

PLANEJAMENTO DE FONTES REATIVAS EM SISTEMAS DE ENERGIA ELÉTRICA UTILIZANDO A TÉCNICA DE DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS E O ALGORITMO DE BRANCH-AND-BOUND

José R. S. Mantovani¹, José W. Scucuglia², Rubén Romero³, Ariovaldo V. Garcia⁴

¹DEE/FEIS/UNESP – Departamento de Engenharia Elétrica, mant@dee.feis.unesp.br

²DCET/UNIDERP – Departamento de Engenharia Elétrica, deco98@zaz.com.br

³DEE/FEIS/UNESP – Departamento de Engenharia Elétrica, ruben@dee.feis.unesp.br

⁴DSEE/UNICAMP – Departamento de Sistema de Energia Elétrica, ari@dsee.fee.unicamp.br

Resumo: Este artigo apresenta um algoritmo que utiliza a técnica de *Decomposição de Benders* para resolver o problema de Planejamento de Reativos em Sistemas de Energia Elétrica. A *Decomposição de Benders* separa o problema de planejamento em dois subproblemas: um subproblema de investimento (mestre) e outro de operação (escravo), que serão resolvidos alternadamente. O subproblema de operação será resolvido usando um algoritmo de programação linear sucessiva (PLS) e o de investimento, que é um problema de Programação Linear Inteira (PLI) envolvendo variáveis discretas será resolvido usando um algoritmo do tipo *Branch-and-Bound* especialmente desenvolvido para resolver esse tipo de problema..

Palavras-chave: Programação Linear Sucessiva, Planejamento de Reativos, Fluxo de Carga, Decomposição de Benders.

Abstract: This paper presents the Benders decomposition technique and Branch and Bound algorithm used in the reactive power planning in electric energy systems. The Benders decomposition separates the planning problem into two subproblems: an investment subproblem (master) and the operation subproblem (slave), which are solved alternately. The operation subproblem is solved using a successive linear programming (SLP) algorithm while the investment subproblem, which is an integer linear programming (ILP) problem with discrete variables, is resolved using a Branch and Bound algorithm especially developed to resolve this type of problem.

Keywords: Successive Linear Programming, Reactive Power Planning, Power Flow, Benders Decomposition.

1 INTRODUÇÃO

O Planejamento de Reativos em Sistemas de Energia Elétrica (PRSEE) consiste na determinação a um custo mínimo da localização, capacidade e natureza das fontes reativas a serem instaladas no sistema para permitir a sua operação em condições aceitáveis (níveis de tensões nas barras/subestações, limites na geração de potência reativa das fontes existentes), quando sujeito às diversas condições de cargas (leve, média,

pesada) e alterações estruturais e/ou de parâmetros ocasionadas por contingências (perdas de linhas, transformadores, etc.). Trata-se portanto, de um problema de programação não linear envolvendo variáveis reais e inteiras, e, dada a natureza tanto da função objetivo como das restrições, de um problema não convexo. O planejamento de reativos consiste de uma das etapas do planejamento de sistemas de energia elétrica, sendo precedido pelo planejamento da geração e da expansão de linhas de transmissão e/ou transformadores.

Diversos trabalhos envolvendo a formulação e solução do planejamento de reativos foram publicados nos últimos anos [W. M. Lebow *et alii* (1984), Granville *et alii* (1988, 1989, 1994), Obadina e Berg (1989), Hong *et alii* (1990), Gómez *et alii* (1991), Hong e Liu (1990), Hsiao *et alii* (1994), Iba (1994), Dornellas *et alii* (1996), Mantovani e Garcia (1996), Mantovani *et alii* (1998)], e genericamente pode-se classificá-los em dois grupos, de acordo com a técnica de otimização e/ou heurística utilizadas para solução do problema: (a) Os que utilizam a Decomposição de Benders e; (b) Os que utilizam outras técnicas. Alguns trabalhos pertencentes a cada um desses grupos serão discutidos em seguida.

W. M. Lebow *et alii* (1984,1985), apresentam uma formulação completa para o problema, separando-o através da técnica de decomposição, em dois subproblemas para cada cenário de operação (nível de carga, contingências, etc). O subproblema de operação – escravo, é resolvido utilizando técnicas de programação não linear do tipo Lagrangeano Aumentado e o subproblema de investimento é resolvido através de técnicas de programação linear inteira mista (PLIM). Granville *et alii* (1988, 1989, 1994), propõem a solução do problema através da decomposição hierárquica de Benders em três estágios, considerando diversos cenários de operação (contingências e cargas), e para a seleção do conjunto de barras candidatas à alocação de novas fontes reativas utilizam as informações fornecidas pelo processo de otimização usado para resolver o problema de operação: factibilidade da solução e a relação benefício/custo marginal. Obadina e Berg (1989), propõem para resolver o problema de planejamento e despacho ótimo de reativos, técnicas de decomposição em dois níveis semelhante a Lebow *et alii* (1984, 1985), exceto que incluem no conjunto de restrições do subproblema de operação, limites de estabilidade para magnitudes das tensões e coeficientes de segurança para condições de operação pré-estabelecida (este coeficiente é necessário para determinar condições críticas do sistema com vistas a manter estabilidade de tensão). Hong *et alii* (1990) analisam a solução do problema em dois níveis, usando a formulação de Lebow *et alii* (1984, 1985), incluindo

Artigo Submetido em 29/06/99

1a. Revisão em 19/01/00; 2a. Revisão em 20/01/01;

Aceito sob recomendação do Ed. Consultor Prof. Dr. José Luiz Resende Pereira

no problema de operação condições futuras do sistema, procedendo-se ao planejamento completo com base no horizonte de previsão. Gómez *et alii* (1991) apresentam a solução do problema em dois níveis igual a Granville *et alii* (1988, 1989, 1994), considerando várias condições de operação simultaneamente, resolvendo o problema de operação através do uso de Programação linear (PL) sucessiva e o problema de investimento através de Programação Inteira Mista (PIM).

Hong e Liu (1990) propõem um sistema especialista em dois módulos para solução do problema, considerando contingências múltiplas e colapso de tensão; um dos módulos efetua os ajustes dos dispositivos de controle de tensão e a inclusão de novos bancos reativos, enquanto que o outro analisa as restrições que asseguram a estabilidade de tensão no sistema. Hsiao *et alii* (1994) formulam o planejamento de reativos como um problema de otimização restrito, multiobjetivo e não diferenciável. A metodologia proposta para solução do problema é a técnica de busca estatística “simulated annealing”. Iba (1994) propõe a solução do planejamento e despacho ótimo de reativos usando um algoritmo genético modificado, decompondo o sistema de energia elétrica em diferentes áreas/regiões, utilizando-se uma técnica aproximada, de modo que cada subsistema é avaliado, e utilizadas as melhores informações de cada um deles para a função adaptação pré estabelecida para o sistema completo. Esse tipo de abordagem permite considerar a natureza discreta de algumas variáveis envolvidas no problema de planejamento de reativos. Dornellas *et alii* (1996) apresentam um método de otimização do despacho de reativos combinando um algoritmo genético simples e um programa de fluxo de carga convencional. Mantovani e Garcia (1996) propõem para solução do problema, considerando diferentes cenários de operação, uma metodologia baseada em técnicas de buscas binárias e o uso de uma heurística especial para obter soluções discretas relacionadas com os bancos reativos existentes no sistema. Mantovani *et alii* (1998) propõem para solução do problema uma metodologia baseada na aplicação de um algoritmo genético simples (AGS) e programação linear sucessiva (PLS) para solução do problema de planejamento de reativos linearizado, que é um problema linear inteiro misto (PLIM). O AGS resolve o problema de otimização envolvendo as variáveis inteiras e discretas do problema (taps de transformadores, ajustes de potência reativa gerada e/ou alocada através de bancos capacitivos), e a PLS atua como uma técnica de suporte do algoritmo genético fornecendo o estado final de operação do sistema e o cálculo da função adaptação.

Neste trabalho, apresenta-se a formulação do problema de planejamento de reativos como um problema de programação não linear inteiro misto. Esse problema é linearizado obtendo-se um problema linear inteiro misto (PLIM) que é decomposto pela técnica de *Benders* em dois subproblemas relativamente mais simples, um subproblema de operação (escravo), que é resolvido utilizando *Programação Linear Sucessiva*, e usa como modelo a matriz jacobiano reativa desenvolvida por Carpentier (1986), e outro de investimento (mestre), que é resolvido por um algoritmo de *Branch-and-Bound* especializado, desenvolvido para a solução do problema de planejamento de reativos com vistas a considerar o modelo de barras de capacitores e reatores discretizados. Tais problemas serão resolvidos alternadamente. A metodologia apresentada, apesar de não garantir a busca de soluções ótimas globais, apresentou resultados de boa qualidade quando comparados a outras técnicas (Mantovani e Garcia (1996), Mantovani *et alii* (1998)) em todos os testes realizados.

Inicialmente apresenta-se a formulação básica do problema. Em seguida a técnica de solução adotada é detalhada. São apresentados resultados com os sistemas testes IEEE30, IEEE118 e um sistema real de 309 barras e as conclusões.

2 FORMULAÇÃO BÁSICA DO PROBLEMA

O planejamento ótimo de reativos consiste em determinar, sob vários cenários de operação (contingências, níveis de carga), as localizações e as magnitudes das fontes reativas que asseguram operação factível do sistema de energia elétrica. Para cada cenário de operação, o problema reativo pode ser formulado como:

$$\text{Min} \left[\sum_{i \in I} (d_i + c_{ci} q_{ci} + c_{ri} q_{ri}) r_i + f(\mathbf{V}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{T}) \right] \quad (1)$$

s.a.

$$PG_k - PC_k - P_k(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V}, \mathbf{T}) \quad (2)$$

$$QG_i - QC_i - Q_j(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V}, \mathbf{T}) = 0 \quad (3)$$

$$-QC_l - Q_l(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V}, \mathbf{T}) = 0 \quad (4)$$

$$PG_k^{\min} \leq PG_k \leq PG_k^{\max} \quad (5)$$

$$V_k^{\min} \leq V_k \leq V_k^{\max} \quad (6)$$

$$T_j^{\min} \leq T_j \leq T_j^{\max} \quad (7)$$

$$QG_i^{\min} - \hat{q}_{ri} - q_{ri} \leq QG_i \leq QG_i^{\max} + \hat{q}_{ci} + q_{ci} \quad (8)$$

$$0 \leq q_{ci} \leq r_i q_{ci}^{\max} \quad (9)$$

$$0 \leq q_{ri} \leq r_i q_{ri}^{\max} \quad (10)$$

$$r = 0, 1 \quad (11)$$

Em que:

I: o conjunto de barras candidatas à alocação de novas fontes reativas;

K: variando de 1 a *NB* (número de barras do sistema);

J: variando de 1 a *NT* (número de transformadores com mudança automática de “taps”);

l ∈ *L*: o conjunto de barras do sistema que não possuem fontes geradoras de reativos e/ou não são candidatas à alocação de novas fontes reativas;

q_{ci}, q_{ri}: fontes reativas de natureza capacitiva e indutiva a serem alocadas no sistema. Podem ser fontes do tipo contínuas ou discretas (bancos);

V_k, θ_k, magnitude da tensão e ângulo da tensão, respectivamente, na barra *k*;

T_k: “Tap” do transformador conectado entre as barras *k* e *m*;

Q_k(θ, V, T): a injeção de potência reativa na barra *k*, dada por:

$$Q_k = V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km})$$

P_k(θ, V, T): a injeção de potência ativa na barra *k*, dada por:

$$P_k = V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km})$$

Ω_k : conjunto formado pela barra k e todas as suas vizinhas;

G_{km}, B_{km} : condutância e a susceptância, respectivamente, entre as barras k e m ;

QG_k, QC_k : a potência ativa gerada e a carga ativa, respectivamente, na barra k ;

PG_k, PC_k : a potência reativa gerada e a carga reativa, respectivamente, na barra k ;

$\hat{q}_{ci}, \hat{q}_{ri}$: as fontes reativas capacitivas e indutivas existentes no sistema, devido a simulação de outros cenários;

$QG_k^{\min}, QG_k^{\max}, q_{ci}^{\max}, q_{ri}^{\max}$: os limites mínimos e máximos das potências geradas nas barras k e os limites máximos das fontes reativas capacitivas e indutivas a serem alocadas, respectivamente;

d_i : o custo fixo associado à instalação de fontes reativas;

c_{ci}, c_{ri} : o custo variável de injeção de potência reativa capacitiva e indutiva, respectivamente;

r_i : variável binária de decisão;

$f(\theta, \mathbf{V}, \mathbf{T})$: função que pode representar perdas no sistema de geração e transmissão, somas das infactibilidades das variáveis envolvidas no sistema, necessidades reativas do sistema, etc.

3 METODOLOGIA DE SOLUÇÃO PROPOSTA

O modelo adotado neste trabalho, consiste, basicamente, em após a definição do cenário de planejamento e determinação das barras candidatas pelo planejador, decompor o problema de planejamento de reativos utilizando-se a técnica de decomposição de Benders em dois subproblemas, um de investimento (mestre), que determinará a quantidade de reativos que deve ser alocada nas barras candidatas para resolver o problema de planejamento utilizando-se de técnicas de programação linear inteira (Branch-and-Bound) trabalhando com variáveis discretizadas, e um outro de operação (escravo), que via programação linear sucessiva e a partir das informações fornecidas pelo problema mestre (quanto deve ser investido e em quais barras) validará ou não a proposta de investimento. A troca de informações entre os subproblemas de operação e investimento é realizada através dos multiplicadores de Lagrange e da soma das infactibilidades fornecidas pelo subproblema de operação e pelas propostas de investimentos obtidas do subproblema de investimento. A soma das infactibilidades e os multiplicadores de Lagrange fornecem informações sobre as necessidades reativas do sistema e essas informações são fornecidas ao problema mestre através de uma restrição linear, formada a partir da soma das infactibilidades, multiplicadores de Lagrange e fontes reativas existentes no sistema, conhecida como CORTE DE BENDERS

que será detalhada nas próximas seções. Caso a proposta de investimento não seja validada, é determinado um novo corte de Benders e o problema mestre fornece uma nova proposta de investimento. Todo desenvolvimento do modelo é detalhado a seguir.

3.1 A Técnica de Decomposição de Benders Aplicada ao Planejamento de Reativos

A técnica de *Decomposição de Benders* (Granville *et alii*, 1988, 1989; Benders, 1972; Geoffrion, 1972; Monticelli *et alii*, 1987; Lebow *et alii*, 1985), utiliza a teoria da dualidade em programação matemática (linear e não linear), para particionar um problema de difícil solução quando são consideradas todas as variáveis envolvidas, aplicando os conceitos de partição e projeção, em subproblemas com variáveis específicas, que são resolvidas iterativamente até que uma solução ótima seja obtida para o problema completo.

Considere o problema de planejamento de reativos formulado em (1), em que podem ser identificadas duas funções objetivo: (i) minimizar custos de investimentos e (ii) minimizar restrições violadas, perdas de transmissão ou algum outro critério pré-definido. Dessa forma a função objetivo para o problema (1), $J(\mathbf{z}, \mathbf{w})$, pode ser separada em duas parcelas:

$$J(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = C(\mathbf{w}) + F(\mathbf{z}) \quad (12)$$

em que $C(\mathbf{w})$ representa custos de investimentos, \mathbf{w} o vetor de decisão no problema de planejamento, $F(\mathbf{z})$ o custo de operação do sistema e \mathbf{z} o vetor de estado do sistema, sendo o conjunto de variáveis $\mathbf{z} = (PG_k, QG_k, V_k, \theta_k, T_j)$ e o conjunto de variáveis $\mathbf{w} = (r_i, q_{ci}, q_{ri})_{i \in I}$, todas definidas em (1). Dessa forma:

$$C(\mathbf{w}) = \text{Min} \sum_{i \in I} (d_i + C_{ci} q_{ci} + C_{ri} q_{ri}) r_i$$

$$F(\mathbf{z}) = \text{Min} f(\theta, \mathbf{V}, \mathbf{T})$$

O conjunto de restrições do problema (1) é separado em restrições do subproblema de operação $S(\mathbf{z}) \leq 0$ (2)-(7), restrições do subproblema de investimentos $R(\mathbf{w}) \leq 0$ (9)-(11) e restrições de acoplamento $G(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \leq 0$ (8).

Considerando-se a função objetivo completa, as restrições de operação, investimento e de acoplamento, o problema completo de planejamento de reativos pode ser formulado como:

$$\text{Min}_{\mathbf{z}, \mathbf{w}} C(\mathbf{w}) + F(\mathbf{z}) \quad (13)$$

s.a.

$S(\mathbf{z}) \leq 0$ (Restrições de operação - não lineares e não convexas)

$R(\mathbf{w}) \leq 0$ (Restrições de investimento - lineares)

$G(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \leq 0$ (Restrições de acoplamento - lineares)

O planejamento de reativos como formulado em (13), é um problema de otimização não linear de grande porte com variáveis reais, binárias e discretas, o que sugere o uso de técnicas de decomposição para resolvê-lo. Uma vez decidida sobre a instalação de uma nova fonte reativa, a mesma poderá ser imediatamente utilizada no subproblema de operação.

Desde que o número de cenários a ser considerado no problema de operação é grande, uma vez alocada uma capacidade reativa, todos esses problemas são resolvidos independentemente considerando-se essa capacidade alocada. Dessa forma, a solução do problema de operação fornece informações sobre infactibilidades que podem ser usadas para se alocar novas fontes.

Projetando (13) no espaço das variáveis w :

$$\begin{aligned} \text{Min}_{w \in W} \left[\begin{array}{l} C(w) + \min F(z) \\ \text{s.a.} \\ S(z) \leq 0 \\ G(z, w) \leq 0 \end{array} \right] \quad (14) \\ W = \{w \mid R(w) \leq 0\} \end{aligned}$$

Do conjunto de equações (14), para um valor fixo de $w = w^* \in W$, deriva-se o primeiro nível de programa também chamado operacional.

O subproblema de operação é escrito a partir do problema (1)-(11), considerando apenas no termo da função objetivo as injeções reativas fictícias e fixando-se as fontes reativas existentes no sistema da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Min} \left[\sum_{i \in I} (y_{1i} + y_{2i}) \right] \quad (15) \\ \text{s.a.} \\ P_k^{esp} - P_k(\theta, V, T) = 0 \\ QG_i - QC_i - Q_i(\theta, V, T) - y_{1i} + y_{2i} = 0 \\ -QC_i - Q_i(\theta, V, T) = 0 \\ QG_i^{\min} - \hat{q}_{ri} \leq QG_i \leq QG_i^{\max} + \hat{q}_{ci} \\ V_k^{\min} \leq V_k \leq V_k^{\max} \\ T_j^{\min} \leq T_j \leq T_j^{\max} \\ y_{1i} \geq 0 \\ y_{2i} \geq 0 \\ k = 1, \dots, NB \\ i \in \{NB - L\} \end{aligned}$$

A solução de (15) fornece o melhor estado do ponto de operação z^* do sistema, e as sensibilidades π (Variáveis Duais), para novos investimentos em fontes reativas.

Estas informações são exploradas para determinar a expansão a um custo mínimo no segundo nível de programa, dado por:

$$\text{Min}_{w \in W} W_0$$

s.a.

$$\begin{aligned} w_0 \geq \text{Inf}_{z \in Z} \{F(z) - C(w) + \pi^t G(z, w)\} \\ R(w) \leq 0 \end{aligned}$$

No qual, a expressão:

$$w_0 \geq \text{Inf}_{z \in Z} \{F(z) + C(w) + \pi^t G(z, w)\} \quad (16)$$

forma o conjunto de *Cortes de Benders*, obtidos pela técnica de decomposição aplicada ao problema de planejamento ótimo de reativos (1)-(11), sendo π e w os valores ótimos fornecidos pela solução do subproblema de operação (15). Substituindo as variáveis definidas na formulação do problema

de planejamento de reativos na equação dos cortes (16), obtém-se:

$$\begin{aligned} L(w, \pi) = \text{Inf}_{z \in Z} \left\{ \text{Min}_{w \in W} \sum_{i \in I} (d_i + c_{ci} q_{ci} + c_{ri} q_{ri}) r_i + \right. \\ \left. + \sum_{i \in I} (y_{1i} + y_{2i}) - \pi_{QG_{\min}} [QG_{\min}^{\min} - \hat{q}_r - QG] + \right. \\ \left. + \pi_{QG_{\max}} [QG - QG_{\max}^{\max} - \hat{q}_c] \right\} + v(\hat{w}) \quad (17) \end{aligned}$$

Onde as variáveis π são os multiplicadores de Lagrange ótimos conhecidos após a solução do subproblema de operação, ($\pi_{QG_{\min}}$ - referente a potência reativa indutiva; $\pi_{QG_{\max}}$ - referente a potência reativa capacitiva) \hat{q}_c , \hat{q}_r , as fontes reativas capacitivas e indutivas existentes no sistema, devido a simulação de outros cenários. Reescrevendo (17), retirando da chave as variáveis que não estão sendo otimizadas:

$$\begin{aligned} L(w, \pi) = \text{Inf}_{z \in Z} \left\{ \text{Min}_{w \in W} \sum_{i \in I} (d_i + c_{ci} q_{ci} + c_{ri} q_{ri}) r_i - \right. \\ \left. - \pi_{QG_{\min}} [QG_{\min}^{\min} - \hat{q}_r] + \pi_{QG_{\max}} [-QG_{\max}^{\max} - \hat{q}_c] \right\} + \\ \text{Inf}_{z \in Z} \left\{ \sum_{i \in I} (y_{1i} + y_{2i}) - \pi_{QG_{\min}} QG + \pi_{QG_{\max}} QG \right\} \quad (18) \end{aligned}$$

Para obtenção da expressão final do corte de Benders a partir da equação (18), é necessário resolver o problema de otimização $\text{Inf}_{z \in Z} \{ \cdot \}$, cuja solução, está relacionada com a solução do subproblema (15), ou seja:

$$\begin{aligned} v(\hat{w}) = \text{Sup}_{\lambda_{QG_{\min}}, \lambda_{QG_{\max}}} \left\{ \text{Inf}_{x \in X} \left[\sum_{i \in I} (y_{1i} + y_{2i}) + \pi_{QG_{\min}} [QG_{\min} - \right. \right. \\ \left. \left. - \hat{q}_r - QG] + \pi_{QG_{\max}} [QG - QG_{\max} - \hat{q}_c] \right] \right\} \quad (19) \end{aligned}$$

A obtenção do supremo em (19), independe do cálculo do ínfimo. Sejam $\bar{\pi}_{QG_{\min}}$, $\bar{\pi}_{QG_{\max}}$ os multiplicadores ótimos em (20), logo:

$$\begin{aligned} v(\hat{w}) = \text{Inf}_{z \in Z} \left\{ \sum_{i \in I} (y_{1i} + y_{2i}) + \bar{\pi}_{QG_{\min}} [QG_{\max} - \hat{q}_r - QG] + \right. \\ \left. \bar{\pi}_{QG_{\max}} [QG - QG_{\max} - \hat{q}_c] \right\} + f(\hat{y}) \quad (20) \end{aligned}$$

Manipulando algebricamente a equação (20), o problema de otimização $\text{Inf}_{z \in Z} \{ \cdot \}$, pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \text{Inf}_{z \in Z} \left\{ \sum_{i \in I} (y_{1i} + y_{2i}) - \bar{\pi}_{QG_{\min}} QG + \bar{\pi}_{QG_{\max}} QG \right\} = \\ v(\hat{w}) - \bar{\pi}_{QG_{\min}} [QG_{\min} - \hat{q}_r] - \bar{\pi}_{QG_{\max}} [-QG_{\max} - \hat{q}_c] \quad (21) \end{aligned}$$

Substituindo (21) em (18):

$$\begin{aligned} L(w, \pi) = \text{Inf}_{z \in Z} \left\{ \text{Min}_{i \in I} (d_i + c_{ci} q_{ci} + c_{ri} q_{ri}) r_i + \right. \\ \left. + \bar{\pi}_{QG_{\min}} (QG_{\min} - q_r) + \bar{\pi}_{QG_{\max}} (-QG_{\max} - q_c) + v(\hat{w}) - \right. \\ \left. - \bar{\pi}_{QG_{\min}} (QG_{\min} - \hat{q}_r) - \bar{\pi}_{QG_{\max}} (-QG_{\max} - \hat{q}_c) \right\} \quad (22) \end{aligned}$$

Rearranjando, obtém-se a equação geral do corte de Benders para a solução do problema de planejamento de reativos:

$$\begin{aligned} L(w, \pi) = \text{Inf}_{z \in Z} \left\{ \text{Min}_{i \in I} (d_i + c_{ci} q_{ci} + c_{ri} q_{ri}) r_i + v(\hat{w}) - \right. \\ \left. \bar{\pi}_{QG_{\min}} (\hat{q}_r - q_r) + \bar{\pi}_{QG_{\max}} (\hat{q}_c - q_c) \right\} \quad (23) \end{aligned}$$

A análise de factibilidade consiste em verificar se o investimento em fontes reativas no conjunto de barras

candidatas, I pode garantir factibilidade nos diferentes cenários de operação do sistema (nível de carga, contingência, etc). A verificação implica em determinar se o conjunto de restrições do problema (15), correspondendo a cada cenário de operação, é factível. Neste conjunto, as possíveis injeções reativas $(y_{1i}, y_{2i}) \quad i \in I$, no conjunto de barras candidatas serão diferentes de zero, se o sistema necessitar de suporte reativo, mas o conjunto de barras candidatas deve garantir a factibilidade da operação. Se o sistema é infactível, a única alternativa a considerar é aumentar e/ou alterar o conjunto de candidatas I . É importante salientar que independente da técnica adotada para resolver o problema de operação (15), a equação de corte de Benders (16) permanece inalterada, uma vez que as restrições de acoplamento $G(\mathbf{z}, \mathbf{w})$ são lineares.

O problema de planejamento de reativos foi decomposto pelo método de Benders em dois subproblemas - operação e investimento, como é mostrado na figura 1. Durante o processo de solução, esses dois subproblemas trocam informações. O mestre informa ao escravo acerca das decisões de investimento (aumento nas fontes reativas) e o escravo informa ao mestre acerca das necessidades de novas fontes reativas (os cortes de Benders gerados). O subproblema de operação, a partir de uma alternativa de investimento apresentada pelo subproblema de investimento, minimiza o uso das injeções reativas fictícias, com vistas a factibilizar as restrições de operação, sob o aspecto reativo. Se num estágio do processo as decisões de investimento são tais, que é possível obter um ponto de operação sem a necessidade de injeções fictícias, então foi obtida uma solução para o problema da expansão no cenário de operação que está sendo estudado. Por outro lado, quando não é possível obter um ponto de operação factível sem recorrer às injeções reativas fictícias, então deve-se enviar informações relevantes, acerca das necessidades de operação ao subproblema de investimento através dos cortes de Benders. Estes cortes, incorporados ao subproblema de investimento como restrições adicionais, têm um papel fundamental no mecanismo de planejamento, pois eles informam ao subproblema de investimento acerca das necessidades de capacidade adicional de reativos.

3.2 Solução do Subproblema de Operação

O subproblema de operação consiste na solução de um problema de fluxo de potência ótimo reativo considerando as propostas de investimentos fornecidas pelo problema mestre. Dessa forma uma das etapas do procedimento de solução, consiste em resolver, para cada cenário de estudo, um problema de despacho reativo, obtendo-se as seguintes informações:

- Regiões do sistema onde há necessidade de reforçar o suporte reativo;
- Verificar se o conjunto de barras candidatas previamente selecionado pelo planejador permite solução viável;
- Ponto de operação obtido após o despacho ótimo de reativos e o ajuste dos controles de tensão existentes no sistema.

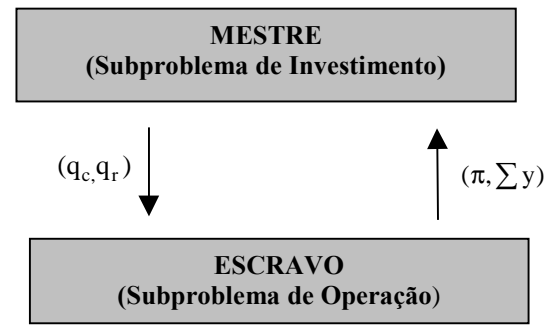


Figura 1: A estratégia da decomposição de Benders

Seja o problema (15) linearizado em torno de um ponto de operação, obtendo-se um PL de grande porte, cuja função objetivo é a minimização das injeções reativas fictícias $(y_{1i}, y_{2i}, i \in I)$.

As sensibilidades entre potência reativa e as variáveis do problema (magnitudes das tensões e "taps" de transformadores) são tratadas de forma explícita, sendo que as sensibilidades entre potência ativa e essas variáveis são consideradas implicitamente pelo modelo proposto por Carpentier (1986) - *CRIC* (Calcul de Rexaux Implicitement Couplés). Adotando-se esse modelo, aqui representado pelas matrizes LC (sensibilidade de tensão) e LC_{tap} (sensibilidade com relação ao controle automático de taps), e não considerando os limites em $\Delta\theta$ (ângulos das tensões) e na potência ativa da barra de balanço, o problema de despacho ótimo de reativos para um ponto de operação pré-definido, pode ser formulado como:

$$\text{Min } \Delta f = \sum_{i \in I} [\Delta y_{1i} + \Delta y_{2i}] \quad (24)$$

s.a.

$$[LC]\Delta V + [LC_{tap}]\Delta T = \Delta QG - \Delta y_{1i} + \Delta y_{2i}$$

$$-\infty \leq \Delta\theta \leq \infty$$

$$-\infty \leq \Delta P_s \leq \infty$$

$$V_k^{\min} - V_k \leq \Delta V_k \leq V_k^{\max} - V_k$$

$$T_j^{\min} - T_j \leq \Delta T_j \leq T_j^{\max} - T_j$$

$$QG_i^{\min} - QG_i - \hat{q}_{ri} \leq \Delta QG_i \leq QG_i^{\max} - QG_i + \hat{q}_{ci}$$

$$y_{1i} \geq 0 \quad i \in I$$

$$y_{2i} \geq 0$$

No problema (24) as variáveis de folga $(\Delta y_{1i}, \Delta y_{2i})$ representam injeções reativas fictícias; se a razão de uma possível solução inviável do problema for falta de suporte reativo, essas injeções permitirão a obtenção de uma solução (Granville (1988, 1989) e Lebow *et alii* (1984)).

Para resolver o problema de despacho ótimo de reativos com o auxílio do conjunto de equações (24) foi utilizada uma seqüência de cálculos de fluxo de potência (não linear) e programação linear, o que na literatura é denominada *Programação Linear Sucessiva*, Palacios-Gomes *et alii* (1982), Stott e Alsac (1983). Devido ao uso da PL para resolver o problema reativo podem surgir problemas de oscilações devido a linearização das restrições de igualdade, Garcia e Mantovani (1988).

3.3 Solução do Subproblema de Investimento

O problema de investimento é um problema de programação linear inteira misto (PLIM) com variáveis discretas e contínuas – magnitudes dos bancos reativos e fontes reativas contínuas (compensadores síncronos e estáticos). Trata-se de um problema de difícil solução e para resolvê-lo utilizou-se um algoritmo de *Branch-and-Bound*, dedicado à solução do problema reativo, e que está apresentado a seguir. Esta fase, obviamente, consome o maior esforço computacional pela necessidade de resolver iterativamente um problema de PLI.

A idéia básica da metodologia *B&B* é dividir e conquistar. O método *B&B* não resolve diretamente o problema inteiro, ele resolve um problema relaxado, pois considera as variáveis inteiras como sendo contínuas. O espaço das soluções do problema inteiro é apenas um subconjunto do espaço das soluções contínuas. O motivo de relaxar o problema inteiro é que este problema pode ser resolvido como um conjunto de problemas de programação linear, Belati (1998).

Considere o problema de programação linear inteira:

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= \sum_{j \in N} c_j x_j \\ \text{s. a.} \\ \sum_{j \in N} a_{ij} x_j &\leq b_i, & i = 1, 2, \dots, m, \\ x &\geq 0 & j = 1, 2, \dots, n \\ x_j &\text{ discreta} & j = 1, 2, \dots, I (I \leq n) \end{aligned}$$

O problema acima pode ser resolvido usando o algoritmo de *B&B*.

A estrutura de um algoritmo *B&B* básico para resolver o problema mestre considerando variáveis discretas múltiplas do valor discreto adotado apresenta a seguinte estrutura:

1. Início:

Fazer a incumbente inicial igual a infinito ($Z_{inc} = \infty$). Resolver o PL correspondente (PLI original com variáveis contínuas). Se a solução do PL for múltipla do valor discreto adotado pára pois ela é ótima global. Caso contrário ir ao passo 2;

2. Branching:

Escolher a primeira variável x_i não múltipla do valor discreto adotado para realizar a separação. Gerar dois novos subproblemas a partir do subproblema corrente adicionando a restrição $x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$ para gerar um subproblema, considerando $\lfloor x_i^* \rfloor$ o maior múltiplo do valor discreto adotado menor que x_i ; e a restrição $x_i \geq \lceil x_i^{**} \rceil$, considerando $\lceil x_i^{**} \rceil$ o menor múltiplo do valor discreto adotado maior que x_i , para gerar o outro subproblema.

3. Bounding:

Resolver os dois PL's gerados usando o método simplex e armazenar a solução ótima de cada um $z_{pl} = z_{inf}$ como limitante inferior, para os prováveis PL's sucessores;

4. Teste de sondagem:

Após resolver o PL (subproblema), deve-se verificar os testes de sondagem. O problema é sondado (eliminado de futuras

considerações), se satisfizer algum dos seguintes testes de sondagem:

Teste 1: Se $z_{inf} \geq z^*$, em que z^* é o valor da solução incumbente.

Teste 2: Se a solução do PL for infactível.

Teste 3: Se o ótimo do PL for discreto, múltiplo do valor discreto adotado, isto é, todas as variáveis discretas assumem valores múltiplos do valor discreto adotado. Neste caso, se o último valor da função objetiva for menor que o valor da solução incumbente então, deve-se atualizar a incumbente e aplicar o teste 1 para os subproblemas ainda não sondados.

5. Se existir subproblemas (nós) remanescentes não sondados, escolher o de menor z_{inf} e ir ao passo 2 para fazer Branching. Se todos os subproblemas foram sondados, pare, pois terminou o processo.

O algoritmo básico, embora seja conceitualmente simples, apresenta complexidade na implementação computacional. Este algoritmo apresenta excelente desempenho para sistemas pequenos, mas em sistemas reais apresenta várias limitações relacionadas com o esforço computacional. Este algoritmo básico pode ser melhorado usando vários critérios eficientes para a escolha da variável mais adequada para separação e a sequência mais adequada de resoluções dos sistemas, Belati (1998).

3.4 Algoritmo para o Planejamento de Reativo Utilizando a Técnica de Decomposição de Benders e o Algoritmo de Branch-and-Bound.

Apresenta-se nesta subseção o algoritmo básico para Planejamento de Reativo utilizando a técnica de decomposição de Benders e o algoritmo de Branch-and-Bound, conforme apresentado neste trabalho:

- i. Determinar as barras candidatas à alocação de novas fontes reativas;
- ii. Decompor o problema linearizado em um subproblema de operação e um de investimento através da *Decomposição de Benders*;
- iii. Resolver o Despacho Reativo via PL-Sucessiva (problema de operação) e verificar a necessidade de alocação de novas fontes reativas (soma das infactibilidades diferente de zero); caso não seja necessário (soma das infactibilidades igual a zero e/ou multiplicadores de Lagrange das barras candidatas iguais a zero), terminou o planejamento. Senão ir para o passo iv;
- iv. Com base nos multiplicadores de Lagrange e as fontes de reativos já alocadas, determinar os cortes de Benders e buscar solução ótima discreta múltipla do valor discreto adotado resolvendo o PLI por *B&B* (problema de investimento), determinando o quanto de reativo deve-se alocar e em quais barras candidatas;
- v. Alocar as novas fontes ao sistema, desprezando as anteriores e retornar ao passo iii.

4 TESTES E RESULTADOS

O algoritmo proposto foi implementado em um sistema computacional na linguagem FORTRAN, e foram realizados testes com sistemas IEEE30, IEEE118 e um sistema real de 309 barras. Os resultados das simulações estão apresentados a seguir:

a. Sistema IEEE30

O sistema IEEE30 consiste de 30 barras, 37 linhas de transmissão e 4 transformadores com “taps” controlados automaticamente, Freris e Sasson (1968). As barras PV's (1,2,5,8,11,13) foram consideradas inicialmente candidatas à alocação de novas fontes com custos fixos iguais. O objetivo neste teste é mostrar a evolução do algoritmo desenvolvido na alocação de fontes reativas, para as condições nominais de carga. Foram considerados limites nas magnitudes das tensões iguais a 0.97 p.u. e 1.03 p.u., e as capacidades próprias de geração foram feitas iguais a zero $QG_{min} = QG_{max} = 0.0$, procurando tornar o sistema com problemas de reativos, o que não ocorre com os dados originais.

A tabela 4.1 apresenta a evolução dos resultados fornecidos pelo subproblema de investimento, q_c (magnitudes dos bancos de capacitores a serem alocados) em p.u. para cada corte de Benders, bem como a soma das infactibilidades ($\sum y_i$), fornecida pelo problema de operação. Os limites máximos para a alocação de reativos foram estipulados em 1.0 p.u.

Tabela 4.1: Resultados do sistema IEEE30

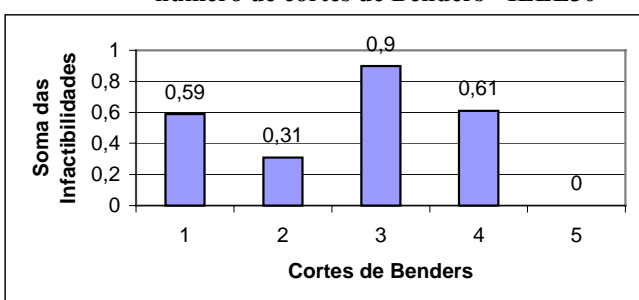
Cortes de Benders	Barras com alocação de reativos				$\sum y_i$ $i \in I$
	1	2	5	8	
	q_c	q_c	q_c	q_c	
0	-	-	-	-	1.90
1	-	-	-	0.625	0.59
2	1.000	-	0.375	0.625	0.31
3	0.625	-	0.375	-	0.90
4	-	1.000	-	1.000	0.61
5	0.625	-	0.375	1.000	0.00

O corte de Benders especificado como zero, na realidade corresponde à condição de operação do sistema em que não foram alocadas fontes reativas no sistema.

Nas barras 11 e 13 não houve necessidade de alocação de reativos.

O gráfico 4.1 apresenta as somas das Infactibilidades em função do número de cortes de Benders - IEEE30.

Gráfico 4.1 - Somas das infactibilidades em função do número de cortes de Benders - IEEE30



b. Sistema IEEE118

A rede IEEE118 tem 118 barras, 177 linhas de transmissão e 8 transformadores com “taps” controlados automaticamente. Os dados de barras e linhas para este sistema, conforme simulado neste trabalho, são os mesmos usados por Lebow *et alii* (1984). Nas simulações, foram considerados três níveis de carga (carga nominal, 115% da carga nominal, e 85% da carga nominal) e quatro contingências (retirando em cada caso as linhas 5-8, 26-30, 65-68, 89-92, respectivamente).

Nas simulações de carga leve e pesada, os dados referentes a cargas ativas, reativas e as gerações ativas foram multiplicadas pelos fatores correspondentes. Os níveis das tensões foram mantidos dentro dos limites de 0.96 e 1.04 p.u., e os “taps” foram considerados como variáveis de controle. O número de barras candidatas foi fixado em 10 barras (12, 31, 35, 49, 56, 60, 71, 76, 85, 94). Na tabela 4.2, apresentam-se os resultados para cada condição de carga e contingências (#1, #2, #3, #4), onde as magnitudes das fontes estão em pu. No caso de carga leve não foi necessária a alocação de novas fontes reativas. Nos gráficos 4.2-a a 4.2-c, apresentam-se os resultados obtidos para o sistema IEEE 118.

Tabela 4.2: Resultados obtidos nas simulações com o sistema IEEE 118

Cenário de Operação	Barras com alocação de reativos		
	Carga Nominal	Carga Pesada	
	85	76	85
	q_c	q_c	q_c
Caso base	-	0.125	0.250
#1	-	0.125	0.250
#2	-	0.125	-
#3	-	0.125	-
#4	0.375	0.125	0.250

Gráfico 4.2- a: Sistema IEEE118 - Caso Base

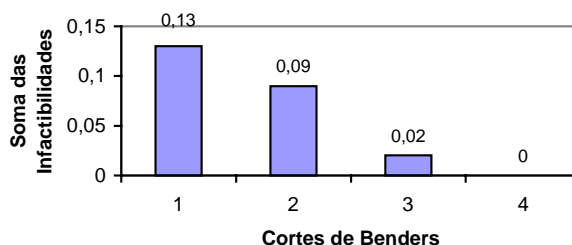


Gráfico 4.2-b: Sistema IEEE118 - # 1

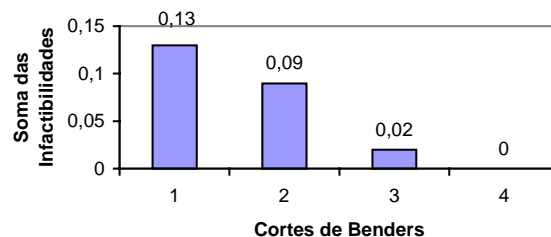
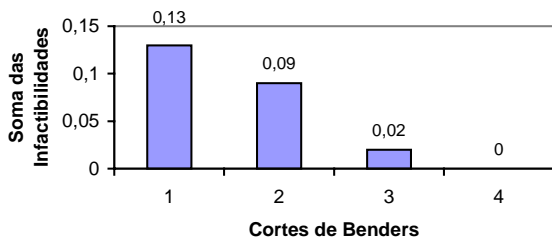


Gráfico 4.2- c: Sistema IEEE118 - # 4



Nas simulações com o sistema IEEE 118 sob as contingências #2 e #3, o sistema convergiu com um único corte.

Em todas as simulações desse sistema os limites máximos de reativos foram mantidos na faixa de 0,8 pu.

c. Sistema de 309 Barras

O sistema real utilizado consiste de 309 barras, 379 linhas de transmissão e 80 transformadores sendo 34 destes com controle automático de “taps”, e foi obtido a partir do cálculo do equivalente estático do sistema sul-sudeste brasileiro e compreende parte do antigo sistema CESP. As barras PV’s (45, 48, 55, 57, 64, 67, 69, 78, 96, 133, 149, 207) foram consideradas inicialmente candidatas à alocação de novas fontes reativas. Os custos fixos e variáveis foram considerados iguais, como mostra a tabela 4.3. O sistema foi simulado considerando condição de carga nominal em duas condições de topologia: operação em estado normal e uma contingência.

Na tabela 4.4 apresentam-se os resultados das simulações para o caso base e contingência #1, sob condições nominais de carga. Nos gráficos 4.3a e 4.3.b apresentam-se as soma das inafectibilidades em função do número de Cortes de Benders no sistema de 309 barras sem contingências e com contingência #1.

Os resultados obtidos para os três sistemas simulados não podem ser precisamente comparados com os apresentados em Mantovani *et alii* (1998), que consideram a natureza discreta das fontes reativas existentes e/ou a serem alocadas e também dos taps dos transformadores, enquanto que neste trabalho, os taps dos transformadores são modelados como variáveis reais. Estabelecendo comparações entre as duas metodologias, conclui-se que a proposta neste trabalho permite a obtenção de respostas rápidas e seguras para sistemas de pequeno e médio porte. A modelagem do problema proposta neste trabalho e em Mantovani e Garcia (1996) é a mesma, e os resultados obtidos para todos os sistemas testados foram os mesmos.

Tabela 4.3: Dados para o conjunto de barras candidatas considerado na simulação do sistema real de 309 barras.

Barra	d_c, d_r	c_c, c_r	$\bar{q}_r(p.u.)$	$\bar{q}_c(p.u.)$
45	1.0	1.0	0.8	0.8
48	1.0	1.0	0.8	0.8
55	1.0	1.0	0.8	0.8
57	1.0	1.0	0.8	0.8
64	1.0	1.0	0.8	0.8
67	1.0	1.0	1.3	1.3

Barra	d_c, d_r	c_c, c_r	$\bar{q}_r(p.u.)$	$\bar{q}_c(p.u.)$
69	1.0	1.0	1.9	1.9
78	1.0	1.0	0.8	0.8
96	1.0	1.0	0.8	0.8
133	1.0	1.0	0.8	0.8
149	1.0	1.0	0.8	0.8
207	1.0	1.0	0.8	0.8

Tabela 4.4: Resultados obtidos nas simulações com o sistema real de 309 barras.

Cenário de Operação	Barras com alocação de reativos					
	Carga Nominal					
	67		69		133	
	q_r	q_c	q_r	q_c	q_r	q_c
Base	-	1.125	-	1.500	0.125	-
#1	-	1.000	-	1.875	0.125	-

Gráfico 4.3-a : Soma das Inafectibilidades em função do número de Cortes de Benders no sistema de 309 barras sem contingências.

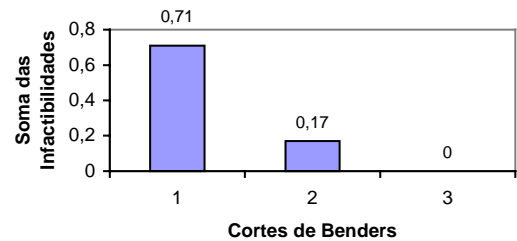
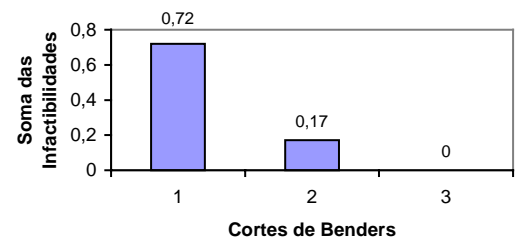


Gráfico 4.3-b : Soma das Inafectibilidades em função do número de Cortes de Benders no sistema de 309 submetido à contingência #1.



5 CONCLUSÕES

A técnica proposta neste trabalho, em todos os testes realizados, chegou a boas soluções, mostrando-se eficiente para sistemas de pequeno e médio porte. Dada a natureza não convexa do problema e as linearizações efetuadas, as soluções encontradas podem ser classificadas como boas, não sendo possível concluir que são ótimos globais. Na solução do subproblema de investimento, o uso do algoritmo do tipo *Branch-and-Bound* permitiu que o problema de PLIM, uma vez fixadas as variáveis de decisão, fosse resolvido de forma simples e eficiente por qualquer método clássico de otimização, sendo que a técnica adotada aqui foi o método simplex de PL e foi adotado o modelo “CRIC” para levar em

consideração interações entre a parte ativa e reativa. O algoritmo de B&B mostrou-se bastante rápido nos testes realizados. Todavia, é importante ressaltar que para determinados valores de limites fixados para as variáveis, o sistema mostra-se com dificuldade (enorme quantidade de ramos ou solução infactível) na determinação da solução ótima discreta. Nestes casos é necessário que se relaxe os limites ou se refaça o conjunto de barras candidatas. Verificou-se, também, uma convergência bastante eficiente na relação entre o problema Mestre (Investimento) e o Escravo (Operação) conseguida com poucos *Cortes de Benders* em cada condição estudada.

Algumas melhorias podem ser implementadas em trabalhos futuros, como por exemplo, a implementação do controle discreto de “taps” de transformadores, uma metodologia mais inteligente para busca de solução discreta no PLI e para a determinação do conjunto de barras candidatas e um novo equacionamento em que se considere os reativos alocados como admitâncias shunt nas barras do sistema, etc. Neste trabalho as propostas de investimentos fornecidas pelo subproblema mestre são consideradas no conjunto de restrições de acoplamento (8), ampliando os limites que determinam as capacidades de geração de reativos, que poderá ser total ou parcialmente utilizado e levar a um super dimensionamento das capacidades reativas. Uma forma de evitar o super dimensionamento dos bancos reativos seria adotar uma formulação que considere toda a capacidade de reativos determinada pelo subproblema mestre como uma admitância shunt. A metodologia estudada neste trabalho é adequada para ser implementada em máquinas paralelas. O modelo de programação a ser implementado pode ser do tipo assíncrono, alocando-se um processador para gerenciar o processo de solução dos subproblemas de operação para cada contingência e/ou cenários de operação em estudo e um conjunto de processadores para solução dos subproblemas de investimento. Outras técnicas de solução para o problema de fluxo de potência ótimo reativo podem ser analisadas e testadas, principalmente aquelas que utilizam técnicas de programação não linear aliadas aos algoritmos de *pontos interiores*.

6 BIBLIOGRAFIA

- Belati, E. A. (1998). Planejamento de Sistemas de Transmissão Usando Técnicas de Decomposição Matemática e de Branch-and-Bound, Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista – UNESP, Ilha Solteira – SP, Brasil.
- Benders, J. F. (1972). Partitioning Procedures for Solving Mixed Variables Programming Problems. *Numerische Mathematik*, vol. 4, pp. 238-259.
- Carpentier, J. L. (1986). CRIC. a New Active Reactive Decoupling Process in Load Flows, Optimal Power Flow and Systems Control. *Proc. IFAC Conference on Power Systems and Power Plan Control*, Beijing, China, pp. 65-70.
- Dornellas *et alii* (1996). Otimização do Despacho de Reativos Utilizando Algoritmos Genéticos, *Anais do 11º congresso Brasileiro de Automática*, São Paulo – S.P.
- Freris, L. L. & Sasson, A. M. (1968). Investigation of the Load-Flow Problem, *Proceedings of IEE*, vol. 10 n° 115, pp. 1459-1470.
- Garcia, A. V. E Mantovani, J. R. S. (1988). Planejamento de Reativos em Sistemas de Energia Elétrica Utilizando um Modelo Implicitamente Acoplado. *Anais do 7º congresso Brasileiro de Automática*, São José dos Campos – S.P.
- Geoffrion, A. M. (1972). Generalized Benders Decomposition. *Journal of Optimization Theory and Applications JOTA* : vol. 10, n° 4, pp. 237-260.
- Gómez, T. *et alii* (1991). A Security-Constrained Decomposition Approach to Optimal Reactive Power Planning. *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 06. n° 03, pp. 1069-1076, August.
- Granville, S. *et alii* (1988). Mathematical Decomposition Techniques for Power System Expansion Planning. Vol. 3: An Integrated Methodology for VAR Sources Planning, EL-52299, Research Project 2473-6, Final Report, EPRI, Palo Alto – California, USA.
- Granville, S. *et alii* (1989). An Integrated Methodology for Var – Sources Planning. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. 4, n° 2, pp. 677-686.
- Granville, S. & Lima, M. C. A. (1994). Application of Decomposition Techniques to Var Planning: Methodological & Computational Aspects, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 9, n° 4, pp. 1780-1787, November.
- Hong, Y. *et alii* (1990). Multi-Year, Multi-Case Optimal VAR Planning, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. 5, n° 4, pp. 1294-1301.
- Hong, Y. & Liu, C. (1992). A Heuristic and Algorithmic Approach to Var Planning, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 7, n° 2, pp. 505-512.
- Hsiao, Y. *et alii* (1994). A Computer Package for Optimal Multi-Objective VAR Planning in Large Scale Power Systems, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 9, n° 2, pp. 668-676.
- Iba, K. (1994). Reactive Power Optimization by Genetic Algorithm, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 9, n° 2, pp. 685-692.
- Lebow, W. M. *et alii* (1985). A Hierarchical Approach to Reactive Volt Ampere Sources (Var) Optimization in System Planning. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. 104, n° 8, pp. 2051-2057.
- Lebow, W. M. *et alii* (1984). Optimization of Reactive Volt-Ampere Sources in System Planning – vol. 1; Solution Techniques Computing Methods and Results. EL-3279 Final Report – EPRI, USA.
- Mantovani, J.R.S. & Garcia, A.V.(1996). A Heuristic Method for Reactive Power Planning. *IEEE Transactions on Power Systems*, vol 11, n° 1, February , pp. 68-74.
- Mantovani, J.R.S. *et alii* (1998). Planejamento de Reativos em Sistemas de Energia Elétrica Utilizando uma Metodologia Mista: Programação Linear – Algoritmo Genético, *Anais do 12º congresso Brasileiro de Automática*, pp. 2017-2022, Uberlândia – M.G.
- Monticelli, A. *et alii* (1987). Security – Constrained Optimal Power Flow with Post – Contingency Corrective Rescheduling. *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 2, pp. 175-182.

- Obadina, O. O. and BERG, G. J. (1989) Var Planning for Power Systems Security. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol 4, n° 2, May , pp. 677-686.
- Palacios-Gomez, F. *et alii* (1982). Nonlinear Optimization by Successive Linear Programming, *Management Science*, vol. 28, n° 10, pp. 1106-1120.
- Scucuglia, J. W. (1999). Planejamento de Reativos em Sistemas de Energia Elétrica Usando a Técnica de Decomposição de Benders e Branch-And-Bound. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista -UNESP, Ilha Solteira – SP, Brasil.
- Stott, B. & Alsac, O. (1983). Experience with Linear Programming for Optimal Rescheduling of Active and Reactive Power. *Paper 104-01, CIGRE-IFAC*, Florence, Itália.