



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Campus de São José do Rio Preto

---

Diego Jacinto Fiorotto

*Limitantes Inferiores para o Problema de  
Dimensionamento de Lotes em Máquinas Paralelas*

Dissertação de Mestrado  
Pós-Graduação em Matemática

---

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas  
Rua Cristóvão Colombo, 2265, 15054-000  
São José do Rio Preto - SP - Brasil  
Telefone: (17) 3221-2444 - Fax: (17) 3221-2445

Diego Jacinto Fiorotto <sup>1</sup>

*Limitantes Inferiores para o Problema de  
Dimensionamento de Lotes em Máquinas  
Paralelas*

Orientador:

Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
INSTITUTO DE BIOCÊNCIAS, LETRAS E CIÊNCIAS EXATAS  
CAMPUS DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO

São José do Rio Preto

17 de Fevereiro de 2011

---

<sup>1</sup>*diego\_fiorotto@hotmail.com*

Fiorotto, Diego Jacinto.

Limitantes inferiores para o problema de dimensionamento de lotes em máquinas paralelas / Diego Jacinto Fiorotto - São José do Rio Preto: [s.n.], 2011.

81 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Silvio Alexandre de Araujo.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas.

1. Pesquisa operacional. 2. Otimização matemática. 3. Dimensionamento de lotes. I. Araujo, Silvio. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 519.8

Diego Jacinto Fiorotto

*Limitantes Inferiores para o Problema de Dimensionamento de Lotes em Máquinas Paralelas*

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Análise Aplicada, junto ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo  
Professor Adjunto  
UNESP - São José do Rio Preto  
Orientador

---

Prof. Dr. Bernardo Sobrinho Simões de  
Almada Lobo  
Professor Auxiliar  
FEUPE - Porto

---

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Franklina Maria Bragion Toledo  
Professor Doutor  
USP - São Carlos

São José do Rio Preto, 17 de Fevereiro de 2011.

Aos meus amados pais, Dirceu e Ivone.

A minha irmã, Samira.

Aos meus queridos amigos.

*Dedico.*

# *Agradecimentos*

A Deus, pelas grandes oportunidades e por me conceder a graça de concluir mais esta etapa.

Aos meus pais, Dirceu e Ivone e a minha irmã Samira, pelo apoio incondicional, pela confiança e pelo imenso amor dedicado a mim desde sempre.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo, pelo apoio, dedicação e disponibilidade durante a orientação deste trabalho e dos próximos que possivelmente virão.

A Camila, pelo carinho, compreensão e companheirismo durante esses seis anos de convívio e cumplicidade tornando todos os grandes obstáculos mais fáceis de serem superados.

Aos amigos Michelli e Tiago, pelas várias ajudas e por tornarem as horas de estudos na salinha da pós muito mais agradáveis.

Aos companheiros de república desde a graduação, Rodrigo, Allan, Renato, Gabriel, Rodrigo (Birruga) e Renato (Tim) por todos os momentos de descontração, pelas brincadeiras e por todos “apuros” que passamos.

Aos amigos André (Ronaldo), Michelli, Glauce e Junex, companheiros de vários churrascos e festas que tornaram muitos dias duros de estudos em segundas duplas no Bohemia, terças triplas no Vila e qualquer dia de Chalé.

Aos companheiros de sempre em Olímpia, Pedro (Peu), Pedro Seno, Bruno (Tio), Ronaldo, Diego (presunto) e Murilim que apesar da distância são grandes amigos e parceiros de muitas histórias.

Aos professores de graduação e pós-graduação, pelos valiosos ensinamentos e por ajudarem no meu crescimento intelectual e profissional.

A todos os colegas, pessoas e funcionários do IBILCE que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho. Em especial aos funcionários do DCCE sempre muito atenciosos e competentes.

A CAPES, pelo auxílio financeiro.

# *Resumo*

O problema de dimensionamento de lotes é um problema de otimização da produção, em que o objetivo é planejar a quantidade de itens a ser produzida em várias, ou única, máquinas em cada período ao longo de um horizonte de tempo, de modo a atender uma demanda e otimizar uma função objetivo. Este trabalho aborda o problema de dimensionamento de lotes em um único estágio em um ambiente com máquinas paralelas distintas. Cada item pode ser produzido em qualquer máquina, acarretando um tempo de preparação que é gasto antes de começar a produção. O objetivo do trabalho consiste em obter limitantes inferiores de boa qualidade para este problema. Para tanto, é desenvolvido um método de solução baseado numa reformulação do problema e na relaxação lagrangiana de um conjunto de restrições. Alguns resultados computacionais são apresentados comparando o método proposto com um trabalho da literatura, bem como, são apresentadas algumas propostas futuras para a continuidade do trabalho.

**Palavras-chave:** *Dimensionamento de Lotes; Máquinas Paralelas; Relaxação Lagrangiana; Limites Inferiores.*

# *Abstract*

The lot-sizing problem is a production optimization problem, where the objective is to plan the quantity of items to be produced in multiple, or single, machines in each period over a time horizon, in order to satisfy a demand and optimize an objective function. This work addresses the single stage parallel machine lot-sizing problem. Each item can be produced on any machine, and incur a setup time before to start the production. The objective of this work is to obtain lower bounds of good quality for this problem. A solution method is developed based on a reformulation of the problem and the Lagrangian relaxation of a set of constraints. Some computational results are presented comparing the proposed method with a method from the literature, and, some future researches are proposed.

**Keywords:** Lot-Sizing; Parallel Machines; Lagrangian Relaxation; Lower Bounds.



# *Sumário*

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 9
<b>2</b>	<b>Problemas de Dimensionamento de Lotes</b>	p. 11
2.1	Introdução . . . . .	p. 11
2.2	Dimensionamento de Lotes com Único Item . . . . .	p. 12
2.2.1	Problema de Dimensionamento de Lotes Único Item sem Restrição de Capacidade . . . . .	p. 13
2.2.2	Problema de Dimensionamento de Lotes Único Item Capacitado	p. 14
2.2.3	Problema de Dimensionamento de Lotes Único Item com Máquinas Paralelas . . . . .	p. 15
2.3	Dimensionamento de Lotes com Vários Itens . . . . .	p. 16
2.3.1	Problema de Dimensionamento de Lotes Vários Itens Capacitado	p. 17
2.3.2	Problema de Dimensionamento de Lotes vários Itens em Máquinas Paralelas . . . . .	p. 20
2.3.3	Reformulação do Problema de Dimensionamento de Lotes em Máquinas Paralelas . . . . .	p. 22
2.3.4	Exemplos Numéricos . . . . .	p. 25
<b>3</b>	<b>Método de Solução: Relaxação Lagrangiana</b>	p. 29
3.1	Introdução . . . . .	p. 29
3.2	Relaxação Lagrangiana . . . . .	p. 30
3.3	Teoria da Dualidade Lagrangiana . . . . .	p. 34
3.4	A Propriedade de Integralidade . . . . .	p. 38

3.5	Método de Otimização do Subgradiente . . . . .	p. 41
3.5.1	Características da Relaxação Lagrangiana . . . . .	p. 42
<b>4</b>	<b>Limites Inferiores para o Problema de Dimensionamento de Lotes em Máquinas Paralelas e Tempos de Preparação</b>	<b>p. 45</b>
4.1	Relaxação Lagrangiana Aplicada à Formulação CLM (Toledo e Armentano 2006) . . . . .	p. 45
4.2	Relaxação Lagrangiana Aplicada à Formulação EMM . . . . .	p. 47
4.3	Resolvendo os Subproblemas . . . . .	p. 52
<b>5</b>	<b>Resultados Computacionais</b>	<b>p. 56</b>
5.1	Geração de Dados . . . . .	p. 56
5.2	Resultados Computacionais . . . . .	p. 59
5.2.1	Resultados Detalhados para Cada Classe de Problemas . . . . .	p. 61
<b>6</b>	<b>Conclusão e Trabalhos Futuros</b>	<b>p. 72</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>p. 75</b>

# *Capítulo 1*

## *Introdução*

Com o crescimento da produção e da concorrência no mercado, as indústrias têm buscado agilidade e flexibilidade para se adaptarem às novas exigências e ampliar o seu potencial. Para tanto, ter um bom gerenciamento, tornou-se um fator primordial para suportar e sobreviver a estas novas exigências.

O planejamento da produção em indústrias, que envolve a produção de diversos itens utilizando várias máquinas, é uma tarefa complexa e precisa ser realizada rotineiramente. Deve-se ressaltar que a natureza combinatória de tais problemas os torna de difícil solução do ponto de vista da complexidade computacional e exige o desenvolvimento de complexas ferramentas matemático/computacionais para sua solução.

Este trabalho aborda o problema de dimensionamento de lotes que se enquadra no planejamento tático da produção em que decisões de médio prazo são tomadas. O problema de dimensionamento de lotes é um problema de otimização da produção, em que o objetivo é planejar a quantidade de itens a ser produzido em várias, ou única, máquinas em cada período ao longo de um horizonte de tempo, de modo a atender uma demanda e otimizar uma função objetivo. Segundo Bahl *et al.* (1987), o problema de dimensionamento de lotes pode ter um único estágio ou múltiplos estágios de planejamento. Um sistema tem um único estágio quando os itens a serem produzidos são independentes, isto é, um não depende do outro para ser produzido. Nos sistemas com múltiplos estágios um item final possui itens componentes, cuja produção ou compra, também deve ser planejada.

O problema estudado neste trabalho, envolve o planejamento da produção de múltiplos itens em um único estágio composto de máquinas paralelas distintas com capacidade limitada. Os itens podem ser produzidos em qualquer uma das máquinas e para iniciar

a produção de um item utiliza-se um tempo de preparação da máquina utilizada. O problema com máquinas paralelas pode ser encontrado em muitos ambientes de produção, tais como indústrias farmacêuticas (Feyten e Lietaert 1983), na produção de placas de plástico (Mergaux e Wassenhove 1984), no engarrafamento de líquidos e outros (Carreno 1990).

Dentre os estudos de dimensionamento de lotes que consideram um ambiente de produção em máquinas paralelas, poucos consideram além dos custos, tempos de preparação das máquinas, o que segundo muitos autores aumenta a complexidade destes problemas. Neste trabalho, é estudado o problema de dimensionamento de lotes capacitado em máquinas paralelas considerando os tempos de preparação das máquinas. A intenção deste trabalho é estudar e encontrar bons limites inferiores para estes problemas, para tanto uma nova formulação é proposta e os limites inferiores são gerados através da relaxação Lagrangiana, de tal maneira que, diferente da maioria dos trabalhos que utilizam a decomposição tradicional, ou seja, por itens, utilizamos a decomposição por períodos seguindo as idéias de Jans e Degraeve (2004) que fazem o mesmo para o caso com uma máquina. Cabe ressaltar a importância de se estudar e obter bons limites inferiores para estes problemas devido sua grande complexidade computacional, podendo assim, diminuir consideravelmente as árvores de solução dos algoritmos exatos.

Este trabalho está dividido da seguinte forma. No Capítulo 2, é feita uma revisão e discussão sobre os modelos de problema de dimensionamento de lotes. Os problemas são definidos e modelados para um único item e múltiplos itens e, ainda, com e sem restrições de capacidade. No Capítulo 3, são apresentados os princípios teóricos da relaxação Lagrangiana, bem como, o método de otimização do subgradiente. No Capítulo 4, apresentamos uma breve revisão do trabalho de Toledo e Armentano (2006) e a formulação proposta neste trabalho que utiliza a técnica de relaxação Lagrangiana e a decomposição por períodos. No Capítulo 5, são apresentados os testes computacionais. A conclusão de nosso trabalho e idéias para trabalhos futuros são apresentadas no Capítulo 6.

## *Capítulo 2*

# *Problemas de Dimensionamento de Lotes*

### 2.1 Introdução

O problema de dimensionamento de lotes é um problema de otimização, que surge no planejamento da produção e consiste em definir a quantidade de itens (produtos finais) que serão produzidos, e em quais períodos de um horizonte de planejamento finito, de modo que satisfaça algumas restrições, como por exemplo, capacidade de produção e demanda pré-estabelecida, e minimize o custo total de produção.

Os primeiros estudos de problemas de dimensionamento de lotes ocorreram com o *Economic Order Quantity* (EOQ) em 1913 (Harris 1990), que consiste num modelo sem restrição de capacidade e com um único item. A demanda é estacionária, ou seja, ocorre continuamente com uma razão constante. Os períodos de tempo são contínuos e o horizonte de planejamento é infinito. É possível resolver este problema otimamente por uma expressão analítica.

Posteriormente, surgiram modelos que tentavam se ajustar cada vez mais à realidade. Em 1950 surgiu o *Economic Lot Scheduling Problem* (ELSP) (Elmaghraby 1978; Zipkin 1991) que considera restrições de capacidade e vários itens. A demanda também é estacionária e os períodos de tempo são contínuos com um horizonte de planejamento infinito.

O próximo avanço se deu no sentido de considerar a demanda dinâmica. Surge então o modelo de Wagner e Whitin (1958) que tem como características diferenciais o fato de se tratar de um modelo que assume um horizonte de planejamento finito dividido em vários períodos discretos, sendo que a demanda é dada a cada período e pode variar, ou

seja, tem-se uma demanda dinâmica. Atualmente, os modelos que consideram demanda dinâmica continuam sendo estudados, considerando-se diferentes características.

Quando se considera restrições de capacidade, uma questão historicamente abordada na literatura é a existência, ou não, dos tempos de preparação. Quando custos de preparação são considerados e os recursos de produção são limitados, Florian *et al.* (1980) mostram que encontrar a solução ótima para o problema com um único item e uma única máquina é um problema NP-difícil. Sabe-se que o problema com tempo de preparação não é somente uma simples extensão do problema com custo de preparação, pois uma vez modificado o número de preparações no plano de produção, não é alterado somente o custo, mas também o nível de capacidade utilizada. Essa característica torna bastante difícil encontrar soluções factíveis para o problema (Trigeiro 1987). Alguns autores sugerem que os tempos de preparação já estão implicitamente incluídos nos custos de preparação (Maes *et al.* 1991) não sendo necessário incorporá-los ao problema. Contudo, em vários sistemas com restrição de capacidade, um dos fatores mais críticos do problema de dimensionamento de lotes é o tempo de preparação e não seu custo (Billington *et al.* 1983). Kuik *et al.* (1994) destacam que a representação dos tempos de preparação através dos custos pode levar a uma tradução pobre do consumo dos recursos, questionando a validade de tal substituição, principalmente em sistemas em que os recursos são escassos.

Revisões bibliográficas de problemas de dimensionamento de lotes são encontradas em Billington *et al.* (1983), Bahl *et al.* (1987), Maes e Wassenhove (1988), Goyal e Gunasekaran (1990), Kuik *et al.* (1994), Drexel e Haase (1996), Karimi *et al.* (2003), Brahimi *et al.* (2006) e Jans e Degraeve (2007).

Nas próximas seções, discutimos algumas formulações matemáticas para problemas de dimensionamento de lotes e métodos de solução encontrados na literatura.

## 2.2 Dimensionamento de Lotes com Único Item

Nesta seção são apresentados alguns modelos e variações do problema de dimensionamento de lotes para a produção de um único item. O objetivo é determinar os períodos em que teremos produção e a quantidade produzida em cada período, minimizando o custo total de produção. Uma revisão bibliográfica recente deste problema pode ser encontrada em Brahimi *et al.* (2006).

Considere os seguintes dados:

- $T = \{1, 2, \dots, m\}$  número de períodos;
- $vc_t$ : custo unitário de produção no período  $t$ ;
- $sc_t$ : custo de preparação para a produção no período  $t$ ;
- $hc_t$ : custo unitário de estoque no período  $t$ ;
- $d_t$ : demanda no período  $t$ ;
- $Cap_t$ : capacidade da máquina no período  $t$ ;
- $sd_{tk}$ : soma da demanda do período  $t$  até o período  $k$ .

Variáveis de decisão:

- $x_t$ : unidades produzidas no período  $t$ ;
- $s_t$ : quantidade em estoque no final do período  $t$ ;
- $y_t$ : Variável binária, indicando a produção ou não no período  $t$ .

### 2.2.1 Problema de Dimensionamento de Lotes Único Item sem Restrição de Capacidade

Formulação do Problema:

$$\text{Min} \sum_{t=1}^m hc_t s_t + \sum_{t=1}^m vc_t x_t + \sum_{t=1}^m sc_t y_t \quad (2.1)$$

Sujeito a :

$$s_{t-1} + x_t - s_t = d_t \quad \forall t \in T \quad (2.2)$$

$$x_t - sd_{tm} y_t \leq 0 \quad \forall t \in T \quad (2.3)$$

$$y_t \in \{0, 1\} \quad \forall t \in T \quad (2.4)$$

$$x_t \geq 0 \text{ e } s_t \geq 0 \quad \forall t \in T \quad (2.5)$$

A função objetivo (2.1) minimiza a soma dos custos de produção, estoque e preparação dos  $m$  períodos. A restrição (2.2) garante o balanceamento de estoque, ou seja, a quantidade produzida num período mais a quantidade de estoque disponível no início, menos

o que sobrar em estoque no fim do período deve ser igual a demanda do período. Já as restrições (2.3) são as restrições de preparo, que permitem a produção no período  $t$  somente se houver preparo no período  $t$ . As restrições (2.4) e (2.5) são os domínios das variáveis.

Um método de resolução para esse problema é dado por Wagner e Whitin (1958), onde os autores apresentam um algoritmo de programação dinâmica, baseado numa propriedade de otimalidade do problema em que  $s_{t-1}x_t = 0$ , ou seja, se produz somente quando o nível de estoque for zero. Wagner e Whitin (1958) propõem um método para resolver este problema otimamente em tempo polinomial. Evans (1985) propõe um algoritmo com a mesma complexidade do algoritmo de Wagner e Whitin (1958), porém, testes computacionais mostraram que o algoritmo de Evans (1985) é muito eficiente. Em trabalhos mais recentes, Federgruen e Tzur (1991), Wagelmans *et al.* (1992) e Aggarwal e Park (1993) apresentam novos algoritmos de menor complexidade para resolver este problema. Ainda relacionado ao modelo (2.1) – (2.5), Zangwill (1969) representa o problema como um problema de fluxo em redes, Barany *et al.* (1984a) apresentam um conjunto de desigualdades ((1,S)-desigualdades) que descrevem o envoltório convexo deste modelo, Barany *et al.* (1984a) reformulam o modelo como um modelo de localização de facilidades e Eppen e Martin (1987) reformulam o modelo como um problema de caminho mínimo. Ambas as reformulações descrevem o envoltório convexo do problema e, a equivalência de tais reformulações é analisada em Denizel *et al.* (2008).

### 2.2.2 Problema de Dimensionamento de Lotes Único Item Capacitado

Em alguns casos não é possível admitir que a capacidade de produção seja ilimitada ou grande o suficiente para produzir qualquer quantidade desejada, e é preciso considerar restrições de capacidade no modelo. Um dos primeiros trabalhos com problemas de dimensionamento de lotes capacitado foi apresentado em Florian e Klein (1974), neste também é desenvolvido um algoritmo para resolver este problema. Em Brahim *et al.* (2006) é feita uma revisão sobre métodos e algoritmos de solução. Revisões mais gerais podem ser encontradas em Karimi *et al.* (2003).

Formulação matemática: idêntico ao modelo inicial (2.1) – (2.5), apenas é atribuído o valor de capacidade do período  $t$  ( $Cap_t$ ) e adicionado a restrição abaixo no modelo:

$$x_t \leq Cap_t \quad \forall t \in T \quad (2.6)$$



### 2.2.3 Problema de Dimensionamento de Lotes Único Item com Máquinas Paralelas

No problema de dimensionamento de lotes com único item em máquinas paralelas têm-se que, em cada um dos períodos do horizonte de planejamento, várias máquinas estão disponíveis para a produção do item. O objetivo é minimizar a soma dos custos de produção, preparação e estoque, atendendo a demanda sem atraso. O item pode ser produzido em qualquer uma das máquinas que são não idênticas, isto é, podem ter seus custos de preparação e produção distintos.

Tendo como base o problema de dimensionamento de lotes com apenas uma máquina, Toledo (1998) estendeu a propriedade de Wagner e Whitin para o caso com máquinas paralelas. Esta propriedade caracteriza os pontos extremos do conjunto de soluções do problema e permite generalizar o algoritmo proposto por Evans (1985) para o caso de máquinas paralelas.

Considere os seguintes dados:

- $J = \{1, 2, \dots, r\}$  número de máquinas;
- $vc_{jt}$ : custo unitário de produção da máquina  $j$  no período  $t$ ;
- $sc_{jt}$ : custo de preparação para a produção da máquina  $j$  no período  $t$ ;
- $hc_t$ : custo unitário de estoque no período  $t$ ;
- $d_t$ : demanda no período  $t$ ;
- $sd_{tk}$ : soma da demanda do período  $t$  até o período  $k$ .

Variáveis de decisão:

- $x_{jt}$ : unidades produzidas na máquina  $j$  no período  $t$ ;
- $s_t$ : quantidade em estoque no final do período  $t$ ;
- $y_{jt}$ : Variável binária, indicando a produção ou não na máquina  $j$  no período  $t$ .

O problema de dimensionamento de lotes em máquinas paralelas com único item pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\text{Min} \sum_{t=1}^m \sum_{j=1}^r (sc_{jt}y_{jt} + vc_{jt}x_{jt}) + \sum_{t=1}^m hc_t s_t \quad (2.7)$$

Sujeito a :

$$s_{t-1} + \sum_{j=1}^r x_{jt} - s_t = d_t \quad \forall t \in T \quad (2.8)$$

$$x_{jt} - sd_{tm}y_{jt} \leq 0 \quad \forall j \in J, t \in T \quad (2.9)$$

$$y_{jt} \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J, t \in T \quad (2.10)$$

$$x_{jt} \geq 0 \text{ e } s_t \geq 0 \quad \forall t \in T \quad (2.11)$$

Este problema consiste em minimizar uma função objetivo côncava sobre um conjunto de restrições convexas. Sabe-se que, o mínimo deste problema ocorre num ponto extremo, e portanto, a solução será composta por no máximo tantas variáveis não nulas quantas forem suas restrições.

Observando cada uma das restrições (2.8), conclui-se que, se  $d_t > 0$  então ou  $s_{t-1} > 0$  e/ou  $x_{jt} > 0$  para um ou mais  $j \in \{1, \dots, r\}$ . Isto significa que ou a demanda no período  $t$  é atendida pela produção no próprio período  $t$  em uma ou mais máquinas e/ou pelo estoque proveniente do período  $t-1$ . Dado que existem somente  $m$  restrições e portanto no máximo  $m$  variáveis não nulas em um ponto extremo, exatamente uma das variáveis  $s_{t-1}$  ou  $x_{jt}$  para um único  $j \in \{1, \dots, r\}$  pode ser positiva. Então todo ponto extremo satisfaz a seguinte propriedade:

$$s_{t-1}x_{jt} = 0, \quad \forall j \in J, t \in T$$

Como veremos, o problema de dimensionamento de lotes com único item em máquinas paralelas sem restrição de capacidade surge como um subproblema da relaxação Lagrangiana relativa às restrições de capacidade do problema com vários itens e restrição de capacidade.

## 2.3 Dimensionamento de Lotes com Vários Itens

Nesta seção será considerado que todos os problemas são capacitados. Cabe observar que, em geral, se a capacidade for ilimitada, um problema com vários itens pode ser

decomposto em problemas de um único item. Assim, é possível resolver o problema, com vários itens utilizando métodos de solução desenvolvidos para problemas com um único tipo de item, ou seja, as únicas restrições nos modelos que ligam os itens são as restrições de capacidade. Entretanto, quando as restrições de capacidade são consideradas, é necessário o desenvolvimento de métodos específicos para o problema com vários tipos de itens. Em Kuik *et al.* (1994) e Bahl *et al.* (1987) são feitas boas revisões sobre estruturas, modelos e métodos para o problema de dimensionamento de lotes vários itens. Uma revisão mais detalhada pode ser encontrada em Maes e Wassenhove (1988), onde há uma revisão de heurísticas, relaxações e métodos. Jans e Degraeve (2007) também fazem uma revisão de métodos de solução.

### 2.3.1 Problema de Dimensionamento de Lotes Vários Itens Capacitado

Paralelamente ao trabalho de Wagner e Whitin (1958), Manne (1958), considera o problema com demanda dinâmica, vários itens e restrições de capacidade. O autor propõe um modelo de programação linear em que se considera explicitamente todos os possíveis planos de produção com base nos possíveis planos de preparação. Lambrecht e Vander-venen (1979), Bitran e Matsuo (1986) e Degraeve e Jans (2007) discutem a formulação proposta por Manne (1958). Dzielinski e Gomory (1965), utilizam geração de colunas para tratar a grande quantidade de variáveis da formulação proposta por Manne (1958), de fato, tal formulação trata-se do problema mestre para a decomposição de Dantzig-Wolfe (Dantzig e Wolfe 1960) de uma formulação com menor número de variáveis. Dzielinski e Gomory (1965) observam ainda que os subproblemas que devem ser resolvidos para gerar colunas são equivalentes ao problema estudado por Wagner e Whitin (1958).

Degraeve e Jans (2007) mostram que a decomposição proposta por Manne (1958) tem uma deficiência estrutural e não explicita todas as possíveis programações de máquinas, concluindo, que na verdade, fornece apenas um limite inferior para o problema. O conjunto de soluções factíveis para a formulação de Manne com restrições de integralidade, é apenas um subconjunto das soluções factíveis para o problema inteiro original. A principal razão para esta deficiência, é que a solução para os subproblemas, isto é, uma nova coluna, consiste tanto das variáveis de preparação quanto das variáveis de produção, e na formulação de Manne, as decisões de preparação determinam automaticamente, as decisões de produção de acordo com a propriedade de Wagner-Whitin, o que não explicita todas as possíveis programações de máquinas, não obtendo assim, uma formulação semelhante ao

problema original, como proposto por Dantzig e Wolfe (1960).

O modelo que será apresentado a seguir, é um modelo monoestágio com restrições de capacidade e considera tempo e custo de preparação (*setup*) e uma única máquina. Considere os seguintes dados.

- $I = \{1, 2, \dots, n\}$  número de itens;
- $d_{it}$ : demanda do item  $i$  no período  $t$ ;
- $sd_{itk}$ : soma da demanda do item  $i$ , do período  $t$  até o período  $k$ ;
- $hc_{it}$ : custo unitário de estoque do item  $i$  no período  $t$ ;
- $sc_{it}$ : custo de preparo do item  $i$  no período  $t$ ;
- $vc_{it}$ : custo de produção do item  $i$  no período  $t$ ;
- $fc_i$ : custo unitário de estoque inicial para o item  $i$ ;
- $st_{it}$ : tempo de preparo do item  $i$  no período  $t$ ;
- $vt_{it}$ : tempo de produção do item  $i$  no período  $t$ ;
- $Cap_t$ : capacidade da máquina no período  $t$ .

Variáveis de decisão:

- $x_{it}$ : unidades produzidas do item  $i$  no período  $t$ ;
- $y_{it}$ : variável binária, indicando a produção ou não do item  $i$  no período  $t$ ;
- $s_{it}$ : estoque do item  $i$  no final do período  $t$ ;
- $s_{i0}$ : quantidade de estoque inicial para o item  $i$ ;

Com isso, obtém-se o seguinte modelo (*CL*):

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n fc_i s_{i0} + \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^m (sc_{it} y_{it} + vc_{it} x_{it} + hc_{it} s_{it}) \quad CL \quad (2.12)$$

Sujeito a :

$$s_{i,t-1} + x_{it} = d_{it} + s_{it} \quad \forall i \in I, t \in T \quad (2.13)$$

$$x_{it} \leq s d_{itm} y_{it} \quad \forall i \in I, t \in T \quad (2.14)$$

$$\sum_{i=1}^n (s t_{it} y_{it} + v t_{it} x_{it}) \leq Cap_t \quad \forall t \in T \quad (2.15)$$

$$y_{it} \in \{0, 1\}, \quad x_{it} \geq 0, \quad s_{it} \geq 0, \quad s_{i0} \geq 0, \quad s_{im} = 0 \quad \forall i \in I, t \in T \quad (2.16)$$

A função objetivo (2.12) minimiza os custos totais de preparação, produção, estoque e estoque inicial. As restrições (2.13) garantem o balanceamento de estoque. Para evitar problemas infactíveis o modelo considera a possibilidade de estoque inicial, contudo o custo  $fc_i$  para este estoque é muito grande, assim  $s_{i0}$  terá valor diferente de zero apenas quando o problema não tiver solução factível (Vanderbeck 1998). Não existe preparo para o estoque inicial. Em seguida, temos as restrições de preparo (2.14) e as limitações de capacidade (2.15). Finalmente, em (2.16) tem-se a definição dos domínios das variáveis.

Podem ser encontrados na literatura métodos exatos e heurísticos para resolver problemas monoestágicos considerando uma única máquina, sendo que, a maioria desses trabalhos não consideram tempos de preparação. Dentre os trabalhos em que se desenvolveram métodos exatos sem considerar tempos de preparação estão: Barany *et al.* (1984), Evans (1985), Eppen e Martin (1987) e Hindi (1995). Existem vários trabalhos em que se desenvolveram procedimentos heurísticos para resolver o problema monoestágio, única máquina, sem tempos de preparação: Chen e Thizy (1990), Singh e Rajamani (1991) e Kirca e Kokten (1994). Vale observar que, devido à complexidade do problema, os procedimentos exatos resolvem apenas problemas pequenos, enquanto os procedimentos heurísticos fornecem soluções para problemas de maior porte.

Dentre os métodos exatos para problemas que consideram tempos de preparação, podemos destacar os seguintes trabalhos: Diaby *et al.* (1992) que desenvolvem um método *branch-and-bound*. Souza e Armentano (1994) resolvem o problema com limitação nas variáveis de produção utilizando o algoritmo exato de Roy (1983). Armentano *et al.* (1999) representam o problema como uma rede generalizada e utilizam um algoritmo *branch-and-bound*. Belvaux e Wolsey (2000) e Belvaux e Wolsey (2001) desenvolvem um pacote (baseado no método *branch-and-cut*) para modelagem e resolução de problemas de dimensionamento de lotes e van Vyre e Wolsey (2006) utilizaram este pacote e reformulações estendidas para resolver o mesmo problema. Degraeve e Jans (2007) e Pimentel *et al.* (2010) desenvolvem métodos *branch-and-price*.

Dentre as várias heurísticas que consideram tempo de preparação não nulo e uma única máquina destacam-se: Trigeiro *et al.* (1989) que desenvolvem um método heurístico que consiste em relaxar as restrições de capacidade aplicando a técnica de relaxação Lagrangiana. Em seguida, se a solução for infactível, um método de factibilização é aplicado, o qual, transfere produção entre períodos na tentativa de factibilizar a solução (heurística Lagrangiana) e, finalmente, os multiplicadores duais são atualizados utilizando o método do subgradiente (Held *et al.* 1974; Camerini *et al.* 1975). Lozano *et al.* (1991), propõem um algoritmo similar ao proposto por Trigeiro *et al.* (1989). Araujo e Arenales (2000), fizeram uma modificação no método desenvolvido por Trigeiro *et al.* (1989) e obtiveram uma melhoria em alguns resultados computacionais. Jans e Degraeve (2004) apresentam um método para obter limitantes inferiores para o problema com tempo de preparação. Denizel *et al.* (2008) desenvolvem uma heurística de arredondamento e Sural *et al.* (2009) também utilizam relaxação Lagrangiana para resolver o problema.

### 2.3.2 Problema de Dimensionamento de Lotes vários Itens em Máquinas Paralelas

Para a formulação matemática utilizamos os mesmos dados e variáveis para o problema com uma única máquina, descrito na Seção 2.3.1, entretanto com um índice  $j$  a mais, por exemplo,  $x_{ijt}$  é a quantidade produzida do item  $i$  na máquina  $j$  no período  $t$ . Os nomes dos outros dados e variáveis seguem esse mesmo raciocínio.

Formulação matemática (*CLM*).

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n f c_i s_{i0} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r \sum_{t=1}^m (s c_{ijt} y_{ijt} + v c_{ijt} x_{ijt}) + \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^m h c_{it} s_{it} \quad \text{CLM} \quad (2.17)$$

Sujeito a :

$$s_{i,t-1} + \sum_{j=1}^k x_{ijt} = d_{it} + s_{it} \quad \forall i \in I, t \in T \quad (2.18)$$

$$x_{ijt} \leq s d_{itm} y_{ijt} \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T \quad (2.19)$$

$$\sum_{i=1}^n (s t_{ijt} y_{ijt} + v t_{ijt} x_{ijt}) \leq \text{Cap}_{jt} \quad \forall j \in J, t \in T \quad (2.20)$$

$$y_{ijt} \in \{0, 1\}, \quad x_{ijt} \geq 0, \quad s_{it} \geq 0, \quad s_{i0} \geq 0, \quad s_{im} = 0 \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T \quad (2.21)$$

As restrições são similares às do modelo (*CL*) descrito por (2.12) – (2.16). Seja  $v_{CLM}$  o valor ótimo da função objetivo da formulação *CLM* e  $\bar{v}_{CLM}$  o valor ótimo da relaxação

linear. Na literatura, são encontrados poucos trabalhos que consideram o ambiente de produção com máquinas paralelas. Lasdon e Terjung (1971) propõem uma heurística para o problema discreto de dimensionamento e sequencialmente de lotes para máquinas paralelas idênticas sem tempo de preparação de máquina. Neste problema somente um item pode ser produzido por máquina por período e a produção deve utilizar toda a capacidade disponível. Salomon *et al.* (1991) também estudam este problema analisando sua complexidade e alguns algoritmos de solução.

Carreno (1990) propôs uma heurística de lote econômico para máquinas paralelas idênticas considerando os tempos de preparação das máquinas. São testados problemas envolvendo 100 itens e 10 máquinas em baixos tempos computacionais.

Em Sabbag (1993) foi proposta uma heurística para resolver o problema de dimensionamento de lotes em máquinas paralelas não idênticas considerando os tempos de preparação das máquinas. A heurística parte de uma solução inicial infactível e busca a factibilidade através da transferência de quantidade de produção entre os períodos e entre as máquinas. A seguir é aplicado um passo de melhoria visando obter uma solução de melhor custo. Problemas com 100 itens, 6 máquinas e 24 períodos foram testados em tempo computacional razoável. Kang *et al.* (1999) consideram o problema em máquinas paralelas e custo de preparação dependente da seqüência e propõem um método baseado em geração de colunas e *branch-and-bound*. Adicionalmente, adaptam o método para resolver alguns problemas reais de forma heurística.

Derstroff (1995) resolve o problema de dimensionamento de lotes em máquinas paralelas através da técnica de relaxação Lagrangiana. Em um primeiro passo o modelo é resolvido com as restrições de capacidade relaxadas, em seguida os multiplicadores Lagrangianos são atualizados e finalmente uma solução viável é criada deslocando-se uma determinada quantidade de produção entre os períodos e as máquinas. São testados problemas com 20 itens em 5 níveis de produção, 16 períodos e 6 máquinas, dos quais até duas podem ser utilizadas em paralelo.

Özdamar e Birbil (1998) abordam um problema de dimensionamento de lotes em máquinas paralelas com tempos mas sem custos de preparação. Além da capacidade regular, cada máquina tem permissão para usar uma determinada quantidade de horas extra com um determinado custo. O modelo não permite a divisão de lotes, ou seja, a quantidade total de produção de um item por período deve ser produzida em uma única máquina, portanto, apenas uma das máquinas paralelas pode ser usada para produzir um determinado item específico por período. Três heurísticas híbridas semelhantes são

desenvolvidas para resolver o problema, em que, um algoritmo de busca Tabu é utilizado para melhorar as soluções e torná-las factíveis. São resolvidos problemas com até 20 itens, 6 períodos e 5 máquinas.

Belvaux e Wolsey (2000) descrevem uma modelagem genérica e um sistema de otimização que é capaz de resolver uma ampla classe de problemas de dimensionamento de lotes incluindo os casos especiais com vários itens, máquinas paralelas e vários períodos. Os problemas são resolvidos por rotinas do pacote de otimização XPRESS-MP. Além disso, uma heurística primal pode ser integrada no processo de solução, os autores resolveram um grande número de instâncias tomadas da literatura.

Toledo e Armentano (2006) consideram o problema com várias máquinas, relaxam as restrições de capacidade e propõem uma heurística Lagrangiana para a resolução do problema. A solução inicial é obtida por meio da minimização do problema Lagrangiano, normalmente inactível, realiza-se deslocamento da produção entre períodos e máquinas na tentativa de factibilizá-la, deslocando a produção que excede a capacidade, procurando soluções factíveis que minimizam o custo. Na sua tese de doutorado Toledo (1998) apresenta dois algoritmos *branch-and-bound* para resolver este problema de forma exata. O primeiro algoritmo baseia-se numa formulação de programação inteira mista com relaxação Lagrangiana das restrições de capacidade do problema. O segundo foi desenvolvido a partir da representação do problema como uma rede generalizada e relaxação linear. Os dois algoritmos exatos são utilizados para resolver apenas instâncias pequenas.

### 2.3.3 Reformulação do Problema de Dimensionamento de Lotes em Máquinas Paralelas

O problema de dimensionamento de lotes em máquinas paralelas pode ser reformulado usando a abordagem de redefinição das variáveis proposta por Eppen e Martin (1987). A motivação para estudar esta abordagem decorre dos resultados obtidos por Jans e Degraeve (2004) que mostram que para o problema de dimensionamento em uma máquina os limites inferiores resultantes da decomposição por períodos utilizando esta reformulação são melhores que os obtidos utilizando a decomposição por item da formulação original. Para a reformulação defina os seguintes parâmetros:

$cv_{ijt}$ : custo de produção e estoque total para produzir o item  $i$ , na máquina  $j$  no período  $t$  para satisfazer a demanda dos períodos  $t$  até  $k$



$$= vc_{ijt}sd_{itk} + \sum_{s=t+1}^k \sum_{u=t}^{s-1} hc_{iu}d_{is}$$

$ci_{it}$ : custo de produção e estoque total para que o estoque inicial do item  $i$  satisfaça a demanda dos períodos 1 até o período  $t$

$$= fc_i sd_{i1t} + \sum_{s=2}^t \sum_{u=1}^{s-1} hc_{iu}d_{is}$$

Temos também as seguintes novas variáveis para o modelo:

$zv_{ijtk}$ : fração do plano de produção do item  $i$  na máquina  $j$ , em que a produção no período  $t$  satisfaz a demanda do período  $t$  até o período  $k$

$w_{it}$ : fração do plano de estoque inicial do item  $i$  em que a demanda é satisfeita para os primeiros  $t$  períodos

Então, a reformulação denotada por  $EMM$  é a seguinte:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^m ci_{it}w_{it} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r \sum_{t=1}^m sc_{ijt}y_{ijt} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r \sum_{t=1}^m \sum_{k=t}^m cv_{ijtk}zv_{ijtk} \quad EMM \quad (2.22)$$

Sujeito a :

$$1 = \sum_{k=1}^m w_{ik} + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^m zv_{i,j,1,k} \quad \forall i \in I \quad (2.23)$$

$$w_{i,t-1} + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{t-1} zv_{i,j,k,t-1} = \sum_{j=1}^r \sum_{k=t}^m zv_{ijtk} \quad \forall i \in I, t \in T/\{1\} \quad (2.24)$$

$$\sum_{k=t}^m zv_{ijtk} \leq y_{ijt} \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T \quad (2.25)$$

$$\sum_{i=1}^n st_{ijt}y_{ijt} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=t}^m vt_{ijt}sd_{itk}zv_{ijtk} \leq Cap_{jt} \quad \forall j \in J, t \in T \quad (2.26)$$

$$y_{ijt} \in \{0, 1\}, \quad w_{it} \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in J \quad (2.27)$$

$$zv_{ijtk} \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T \quad \forall k \in T, k \geq t \quad (2.28)$$

A função objetivo (2.22) minimiza a soma dos custos de estoque inicial, preparação, produção regular e custos de estocagem. As restrições (2.23) e (2.24) definem as restrições de fluxo para a rede de caminho mínimo. Para cada produto, uma unidade de fluxo é enviada à rede, impondo que a demanda de cada produto tem que ser satisfeita sem

atraso. As restrições (2.25) forçam a preparação para cada item a ser produzido. As restrições de capacidade (2.26) limitam a soma total dos tempos de preparação e produção pela capacidade disponível em cada período e em cada máquina. As restrições (2.27) e (2.28) definem o domínio das variáveis. Sejam  $v_{EMM}$  o valor ótimo da função objetivo da reformulação de Eppen e Martin (2.22) – (2.28) e  $\bar{v}_{EMM}$  o valor ótimo da relaxação linear.

A Figura 1 representa as restrições de fluxo para um problema com três períodos para um item e uma máquina específica. A primeira restrição (2.23) é representada pela Figura 2: um fluxo de uma unidade entra no nó 1 e os arcos de saída são as variáveis de produção para o período 1  $zv_{ij1k}$ ,  $k = 1, 2, 3$ , e as variáveis de estoque inicial  $w_{ik}$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Algumas variáveis têm a mesma origem e destino, por exemplo,  $zv_{ij11}$  e  $w_{i1}$ . Há, no entanto, uma importante distinção, pois, as restrições de capacidade (2.26) e preparação (2.25) valem apenas para as variáveis de produção  $zv_{ij1k}$  e não para as variáveis de estoque inicial  $w_{i1}$ . Para os nós dois e três, temos as restrições de conservação de fluxo (2.24) que são representadas pelas Figuras 3 e 4: as somas dos fluxos de entrada em um nó, devem ser iguais as somas dos fluxos de saída. A restrição para o nó final, impõe que a soma dos fluxos de entrada,  $w_{i3} + \sum_{k=1}^3 zv_{ijkm}$ , deve ser igual a um. Essa restrição não é representada no modelo (2.22) – (2.28), pois é redundante.

As correspondências entre as variáveis do modelo *EMM* com a formulação original *CLM* (2.17) – (2.21) são as seguintes:

$$x_{ijt} = \sum_{k=t}^m sd_{itk} zv_{ijtk} \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T$$

$$s_{i0} = \sum_{t=1}^m w_{it} sd_{i1t} \quad \forall i \in I$$

Para este modelo, as variáveis  $zv_{ijtk}$  podem ter valores fracionários. A interpretação para um valor fracionário, por exemplo, 0.3 para uma variável  $zv_{ijtk}$  é a seguinte: produzir no período  $t$ , na máquina  $j$ , 30% do total da demanda do período  $t$  até o período  $k$ . Esta produção é utilizada para satisfazer 30% da demanda em cada um dos períodos  $t$  até  $k$ . Portanto, para o período  $k$  produzimos 30% da demanda  $d_{ik}$  no período  $t$  e essa parte é mantida em estoque até o período  $k$ .

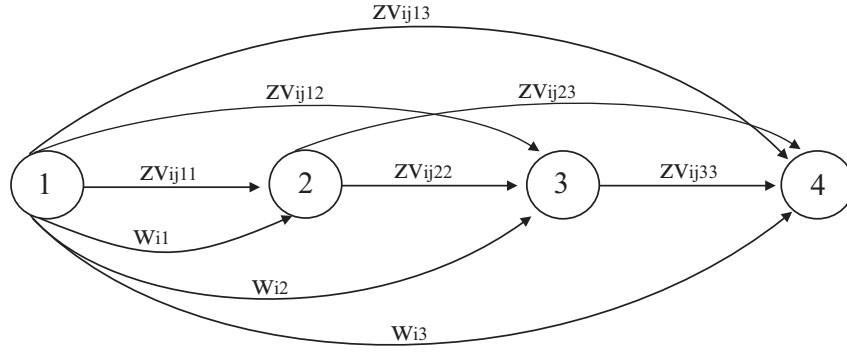


Figura 1: Representação da rede de um item, uma máquina e 3 períodos.

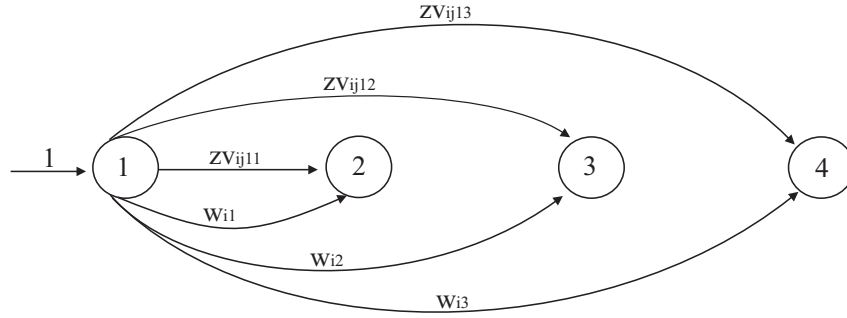


Figura 2: Representação da rede para o período 1:  $1 = \sum_{k=1}^3 (w_{ik} + z v_{i,j,1,k})$

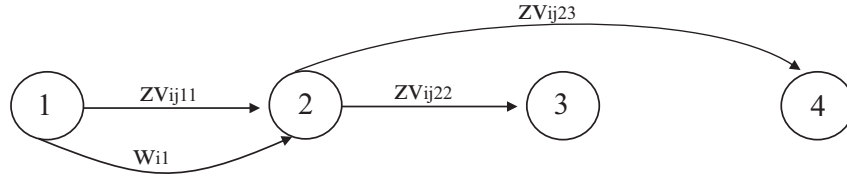


Figura 3: Representação da rede para o período 2:  $w_{i1} + z v_{ij11} = \sum_{k=2}^3 z v_{ij2k}$ .

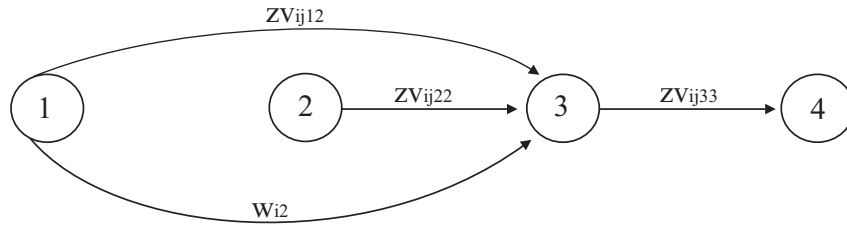


Figura 4: Representação da rede para o período 3:  $w_{i2} + \sum_{k=1}^2 = z v_{ij33}$ .

### 2.3.4 Exemplos Numéricos

Vamos ilustrar a reformulação com um exemplo pequeno, as Tabelas 1 e 2 contém os parâmetros para um problema de dimensionamento de lotes em máquinas paralelas com

tempos de preparação para 2 itens, 2 máquinas e 3 períodos.

	item1/maq1	item1/maq2	item2/maq1	item2/maq2
$vc_{ij}$	70	60	50	45
$vt_{ij}$	1	0.5	1	0.5
$sc_{ij}$	20	15	15	10
$st_{ij}$	10	9	5	4
$hc_i$	1	1	2	2
$fc_i$	999	999	999	999

Tabela 1: Parâmetros para um exemplo pequeno: custos e tempos

	periodo 1	period 2	periodo 3
$cap_{1t}$	120	120	120
$cap_{2t}$	120	120	120
$d_{1t}$	170	20	100
$d_{2t}$	180	40	100

Tabela 2: Parâmetros para um exemplo pequeno: capacidade e demanda

O valor ótimo para as variáveis  $zv_{ijtk}$  é apresentado na Tabela 3, em que a primeira coluna relaciona as variáveis e a segunda seus respectivos valores ótimos. As demais variáveis que não aparecem na Tabela 3 têm valor zero e por isso não foram incluídas. Os custos para a produção e estoque ( $cv_{ijtk}$  e  $ci_{it}$ ) são calculados de acordo com a fórmula que foi apresentada no início da Seção 2.3.3. A quantidade produzida associada à variável  $zv_{ijtk}$  é dada pelo valor dessa variável multiplicado pela soma da demanda do período  $t$  até  $k$ . O custo de produção para uma variável é igual a o seu valor ótimo multiplicado pelo custo dos parâmetros. Para o item 1, a solução ótima indica que temos 21 unidades de estoque inicial, 149 unidades produzidas na máquina 2 no período 1, 20 na máquina 2 no período 2 e 100 na máquina 2 no período 3. Para o item 2, produzimos 115 unidades na máquina 1 e 65 unidades na máquina 2 para o período 1, 40 na máquina 2 para o período 2 e 100 na máquina 2 para o período 3. O custo total para esta solução para o item 1 é igual a soma dos custos (37.113,28) mais custo de preparação ( $3 \times 15$ ), portanto, um total de 37.158,28. Para o segundo item o custo total é 15.019,11.

Considerando a formulação CLM para este exemplo, obtemos a Tabela 4, que mostra as variáveis de produção, preparação e estoque que não tem valor zero e seus respectivos custos na função objetivo.

Variável	Valor ótimo	Parâmetros( $cv$ e $ci$ )	Total produzido	Custos
$w_{11}$	0.1235	169830	21	20979
$y_{121}$	1	-	-	15
$zv_{1211}$	0.8764	10200	149	8939.28
$y_{122}$	1	-	-	15
$zv_{1222}$	1	1200	20	1200
$y_{123}$	1	-	-	15
$zv_{1233}$	1	6000	100	6000
$y_{211}$	1	-	-	15
$zv_{2111}$	0.6388	9000	115	5749.2
$y_{221}$	1	-	-	10
$zv_{2211}$	0.3611	8100	65	2924.91
$y_{222}$	1	-	-	10
$zv_{2222}$	1	1800	40	1800
$y_{223}$	1	-	-	10
$zv_{2233}$	1	4500	100	4500

Tabela 3: Solução ótima para o exemplo formulação EMM

- Comparação entre as formulações

Afim de comparar as duas formulações, resolvemos 10 exemplares maiores com o CPLEX 12.2 (tempo limite de 120 segundos). Os exemplares tem 25 itens, 18 períodos e 6 máquinas. Os custos e parâmetros foram gerados randomicamente com distribuição uniforme, a forma de geração e os intervalos são descritos na Seção 5.1 do Capítulo 5 de resultados computacionais e são exemplares da classe CNSBTB.

Os resultados contidos na Tabela 5 mostram que, apesar das formulações serem equivalentes, a relaxação linear da formulação EMM é mais apertada se comparada com a formulação CLM com uma diferença aproximadamente de 11%. Existe também uma diferença grande no número de cortes gerados para as formulações, uma vez que em todos os exemplares para a formulação CLM foram gerados mais que 1000 cortes, enquanto para a formulação EMM esse número não passou de 43 para todos os exemplos. Esta grande diferença é mantida se compararmos os números de nós analisados nas árvores de solução, sendo que enquanto o total de nós analisados para os 10 exemplares com a formulação CLM foi de quase cinquenta mil (49.823), para a formulação EMM foram analisados apenas 23.731, ou seja, menos que a metade deste valor.

Variável	Valor ótimo	Custos
$s_{10}$	21	20979
$y_{121}$	1	15
$x_{121}$	149	8940
$y_{122}$	1	15
$x_{122}$	20	1200
$y_{123}$	1	15
$x_{123}$	100	6000
$y_{211}$	1	15
$x_{211}$	115	5750
$y_{221}$	1	10
$x_{221}$	65	2927
$y_{222}$	1	10
$x_{222}$	40	1800
$y_{223}$	1	10
$x_{223}$	100	4500

Tabela 4: Solução ótima para o exemplo Formulação CLM

Os tempos de solução confirmam a importância da qualidade dos limites inferiores no âmbito de obter soluções factíveis e/ou ótimas, enquanto para a formulação CLM o CPLEX não conseguiu provar a otimalidade para 4 dos 10 exemplos, para a formulação EMM este valor caiu para 2, além disso, em todos os casos que ambas as formulação encontraram as soluções ótimas, a formulação EMM foi sempre mais eficiente computacionalmente.

Exemplos	Formulação CLM				Formulação EMM			
	Rel. Linear	cortes	nós	Tempo	Rel. Linear	cortes	nós	Tempo
CNSBTB0	68445,33	1433	11089	120,00	75707,05	19	2485	52,25
CNSBTB1	70396,56	1636	2920	31,98	78937,93	28	1136	23,73
CNSBTB2	71966,76	1833	3157	58,48	81087,50	28	652	13,44
CNSBTB3	70045,26	1586	3284	120,00	78759,82	24	4490	120,00
CNSBTB4	75306,44	1767	5960	120,00	83850,01	21	4565	120,00
CNSBTB5	71910,98	1599	2258	58,14	80404,57	43	1008	36,22
CNSBTB6	68839,45	1282	571	10,47	75985,29	11	6	2,67
CNSBTB7	68162,64	1624	10816	120,00	77171,15	15	7279	66,09
CNSBTB8	67108,51	1503	9106	76,16	74651,48	18	2010	29,22
CNSBTB9	71884,89	1541	662	20,19	80872,55	18	150	5,80

Tabela 5: Formulação  $CLM \times EMM$

## *Capítulo 3*

# *Método de Solução: Relaxação Lagrangiana*

### 3.1 Introdução

Este capítulo é baseado principalmente em Carvalho (2001), Maculan e Fampa (2006) e Kitamura (2009).

A Relaxação Lagrangiana é uma das técnicas mais aplicadas e que tem uma grande importância no âmbito de resolver problemas de programação inteira. O seu sucesso deve-se ao fato de permitir obter, em certas condições, formulações mais fortes ou de fornecer de uma forma muito eficiente limitantes muita vezes de melhor qualidade do que os obtidos com a relaxação linear. O objetivo deste capítulo é apresentar e discutir os conceitos teóricos que existem por trás desta técnica, bem como, apresentar o método do subgradiente.

A técnica de relaxação Lagrangiana consiste em dualizar parte das restrições dos problemas, que são integradas na função objetivo. A principal ideia é tirar partido da facilidade de resolução dos problemas que têm apenas as restrições "fáceis" (sem as restrições que foram dualizadas na função objetivo). Em vez do problema original, resolve-se um modelo em que há restrições que são relaxadas, no sentido em que não se impõe explicitamente que essas restrições sejam cumpridas. Em vez disso, tenta-se forçar indiretamente o cumprimento dessas restrições, impondo uma penalidade na função objetivo quando elas não são respeitadas.

No âmbito de se obter bons limitantes com a técnica de relaxação Lagrangiana, tem-se como principal objetivo otimizar o problema dual lagrangiano (que será definido nas próximas seções), para isso, podem ser usados vários métodos, neste trabalho focalizamos

o método do subgradiente (ver por exemplo, Held *et al.* (1974), Fisher (1985) e Camerini *et al.* (1975)).

A aplicação da relaxação Lagrangiana junto com o método do subgradiente têm suas vantagens e desvantagens. A relaxação Lagrangiana fornece a cada iteração um limite inferior sobre o problema original, porém nenhuma solução primal está disponível. Além disso, há problemas com a convergência do método do subgradiente. Normalmente o algoritmo é interrompido após um número fixo de iterações, sem a garantia de ter encontrado o valor ótimo do problema dual Lagrangiano (Fisher 1985). No entanto, a otimização do subgradiente é barata computacionalmente e fácil de implementar. Nas próximas seções veremos esta técnica de forma mais detalhada.

## 3.2 Relaxação Lagrangiana

A relaxação Lagrangiana é uma técnica usada para resolver problemas de otimização em que as restrições têm uma estrutura de que se pode tirar partido. Acontece frequentemente que é possível re-arranjar as restrições de um problema em vários conjuntos, de forma a fazer sobressair uma estrutura especial. De fato, problemas muito difíceis de otimização são muitas vezes formulados com vários conjuntos de restrições. No entanto se o problema tivesse apenas um subconjunto de restrições, ele seria muito mais fácil que o problema original, ou seja, a conjunção das várias restrições é que o torna difícil. Em linhas gerais, o método relaxa parte das restrições, que são integradas na função objetivo, mantendo outras restrições com uma estrutura mais simples que o conjunto inicial.

Considere o problema ( $P$ ) definido por:

$$z_P = \min c^T x \quad (3.1)$$

sujeito a:

$$A^1 x \leq b_1 \quad \textit{Complicadas} \quad (3.2)$$

$$(P) \quad A^2 x \leq b_2 \quad \textit{Simples} \quad (3.3)$$

$$x \in Z_+^n \quad (3.4)$$

onde:  $A^1 \in \Re^{m_1 \times n}$ ,  $A^2 \in \Re^{m_2 \times n}$ ,  $b_1 \in \Re^{m_1}$  e  $b_2 \in \Re^{m_2}$ .

Antes de formalizarmos as ideias de relaxação Lagrangiana, veremos o conceito de



relaxação. Para tanto, Considere o problema de programação inteira ( $P$ ) definido acima, e denotado de forma equivalente por::

$$(P) \quad z_P = \min\{f(x) = c^T x : x \in F\}$$

onde

$$F = \{x \in Z_+^n : A^1 x \leq b_1, A^2 x \leq b_2\}$$

**Definição:** Uma relaxação de  $P$  é qualquer problema de minimização:

$$(RP) \quad z_R = \min\{f_R(x) : x \in F_R\}$$

Com as seguintes propriedades:

$$(R_1) \quad F \subseteq F_R$$

$$(R_2) \quad f(x) \geq f_R(x) \quad \forall x \in F$$

Existem várias técnicas de relaxação de um problema de programação inteira. Dentre elas, tem-se a relaxação Lagrangiana a qual, geralmente, é aplicada quando a matriz de restrições apresenta uma característica especial, tendo um grupo de restrições fáceis e outro grupo de restrições complexas. Cabe observar aqui que existem muitos problemas que apresentam estas características.

Considere novamente o problema  $P$  dado em (3.1) – (3.4), a idéia da relaxação Lagrangiana é relaxar as restrições complicadas (3.2) colocando-as na função objetivo como uma "penalização". Assim, a relaxação Lagrangiana do problema  $P$ , com relação ao conjunto de restrições complicadas é definida associando a este conjunto um vetor  $\lambda \geq 0$ , denominado de multiplicador de Lagrange ou variáveis duais. O problema Lagrangiano obtido utilizando a técnica de relaxação Lagrangiana para o problema  $P$  é dado a seguir:

$$z_{RL}(\lambda) = \min\{z(\lambda, x) = c^T x + \lambda^T (A^1 x - b_1)\} \quad (3.5)$$

$RL(\lambda)$  sujeito a:

$$x \in S_{LR} = \{x \in Z_+^n : A^2 x \leq b_2\} \quad (3.6)$$

onde  $\lambda \in \mathfrak{R}_+^{m_1}$

A partir da definição de relaxação, demonstra-se facilmente que  $RL(\lambda)$  realmente é uma relaxação de  $P$ . O problema  $RL(\lambda)$  não contém as restrições complicadas, as quais foram incluídas na função objetivo como uma "penalidade",  $\lambda^T(A^1x - b_1)$ .

A qualidade de uma relaxação de  $P$ , pode ser avaliada pela proximidade do valor da função objetivo desta relaxação e do valor da função objetivo do problema original  $P$ . Assim, voltando ao problema Lagrangiano, como se trata de uma relaxação de  $P$  e o problema é de minimização temos que  $z_{RL}(\lambda) \leq z_P$ . O maior dos limitantes inferiores disponível da família infinita de relaxações  $\{RL(\lambda)\}_{\lambda \geq 0}$  é  $z_{RL}(\lambda^*)$ , onde  $\lambda^*$  é uma solução ótima do seguinte problema:

$$(DL) \quad z_{DL} = \max_{\lambda \geq 0} z_{RL}(\lambda) \quad (3.7)$$

O problema  $DL$  é chamado dual Lagrangiano com relação às restrições  $A^1x \leq b_1$ .

Observe que, se  $z_P = z_{DL}$  então  $z_P$  representa o valor ótimo para a função objetivo do problema original  $P$  e, a solução  $x^*$  associada a  $z_P$  representa a solução ótima do problema  $P$ .

**Exemplo 3.1.** (Arenales *et al.* 2006) Para uma primeira ilustração da técnica de relaxação Lagrangiana, consideremos o exemplo dado a seguir:

$$z_P = \min -5x_1 + x_2 \quad (3.8)$$

sujeito a:

$$7x_1 - 5x_2 \leq 13 \quad (3.9)$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 17 \quad (3.10)$$

$$x_1, x_2 \in Z_+ \quad (3.11)$$

Consideraremos, as restrições (3.9) e (3.10) como restrições complicadas e simples respectivamente. O ponto ótimo para este problema é  $x^* = (3 \ 2)$ , cujo valor da solução é  $-13$ .

Apliquemos a relaxação Lagrangiana, ou seja, vamos relaxar a restrição complicada na função objetivo utilizando um multiplicador Lagrangiano  $\lambda \geq 0$  como penalizador:

$$z_{RL}(\lambda) = \min -5x_1 + x_2 + \lambda(7x_1 - 5x_2 - 13) \quad (3.12)$$

sujeito a:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 17 \quad (3.13)$$

$$x_1, x_2 \in Z_+, \lambda \geq 0 \quad (3.14)$$

Reorganizando os termos da função objetivo, ficamos com o seguinte problema relaxado:

$$Z_{RL}(\lambda) = \min (-5 + 7\lambda)x_1 + (1 - 5\lambda)x_2 - 13\lambda \quad (3.15)$$

sujeito a:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 17 \quad (3.16)$$

$$x_1, x_2 \in Z_+, \lambda \geq 0 \quad (3.17)$$

Analisemos os valores das soluções do problema inteiro ( $z_P$ ) e da relaxação Lagrangiana ( $z_{RL}(\lambda)$ ) para dois pontos fixos  $x = (1 \ 1)$  e  $x^* = (3 \ 2)$  e diferentes valores para o multiplicador Lagrangiano  $\lambda$ :

$x_1$	$x_2$	$\lambda$	$z_P(x)$	$z_{RL}\lambda(x, \lambda)$
3	2	4	-13	-189
3	2	2	-13	-101
3	2	0.5	-13	-35
3	2	0.2	-13	-21.8
1	1	4	-4	-104
1	1	2	-4	-54
1	1	0.5	-4	-16.5
1	1	0.2	-4	-9

Tabela 6: Diferentes soluções para o problema P e para o problema Lagrangiano

Podemos observar que a qualidade do multiplicador Lagrangiano  $\lambda$ , tem uma grande influência na qualidade do limite inferior gerado pela técnica de relaxação Lagrangiana, o que para este exemplo fica claro quando observamos a diferença entre os valores dos limites inferiores gerados com os valores de  $\lambda = 4$  e  $\lambda = 0.2$ .

### 3.3 Teoria da Dualidade Lagrangiana

É apresentada nesta seção a teoria geral sobre as propriedades que podem ser exploradas utilizando a técnica de relaxação Lagrangiana, bem como as relações que podem ser tiradas sobre o valor do problema original ( $z_P$ ), da relaxação Lagrangiana ( $z_{RL}(\lambda)$ ) e do dual Lagrangiano ( $z_{DL}$ ) apresentados na seção anterior.

A técnica de relaxação Lagrangiana pode ser utilizada para a obtenção de limitantes (limites inferiores para os problemas de minimização), que em geral são melhores que os limitantes encontrados pela relaxação linear. Sabe-se que a obtenção de bons limitantes tem grande importância na busca por soluções ótimas ou factíveis quando trabalhamos com algoritmos exatos, pois permitem várias podas na árvore de solução, fazendo assim, com que os tempos de solução dos problemas sejam muito inferiores se comparados com os mesmos problemas utilizando limitantes de pior qualidade. Portanto, apresentaremos um estudo teórico sobre essa importante técnica de obtenção de bons limitantes.

**Teorema 3.1.** (*Dualidade Lagrangiana Fraca*) Para qualquer escolha do vetor de multiplicadores de Lagrange  $\lambda \geq 0$ , têm-se que  $z_{RL}(\lambda) \leq z_P$ .

Demonstração: Suponhamos que  $x^*$  seja uma solução ótima de  $z_P$ , isto é,  $z_P = c^T x^*$ . Sabemos também que  $z_{RL}(\lambda) \leq c^T x^* + \lambda(A^1 x^* - b_1)$ , como  $\lambda \geq 0$  e  $A^1 x^* - b_1 \leq 0$ , então podemos escrever:

$$z_{RL}(\lambda) \leq c^T x^* + \lambda(A^1 x^* - b_1) \leq c^T x^* = z_P \quad \blacksquare$$

Esta propriedade nos diz que, como afirmado no início da seção,  $z_{RL}(\lambda)$  é um limite inferior de  $z_P$ . Geralmente, fixado um valor para  $\lambda$ , pode-se resolver  $P$ , por exemplo, por algum método enumerativo. O interesse principal é obter um valor para  $\lambda$  específico. Deseja-se encontrar um  $\lambda$  ótimo tal que a solução da relaxação Lagrangiana, que é um limitante inferior para  $P$ , seja o mais próximo possível (ou igual) do valor da solução ótima de  $P$ . Para isto, basta maximizar os limitantes inferiores, uma vez que, pelo Teorema 3.1, este nunca será maior que a solução ótima  $z_P$ . Assim, o foco principal da relaxação Lagrangiana está em resolver o problema dual Lagrangiano.

Resolver o dual Lagrangiano é determinar o valor de  $\lambda$  para o qual a função Lagrangiana  $c^T x + \lambda^T(A^1 x - b_1)$  toma o valor máximo. Assim, deve existir pelo menos um valor  $\lambda^*$  para o qual o problema Lagrangiano toma o maior valor possível e que deve ser igual ao valor ótimo do problema dual Lagrangiano, isto é,  $z_{DL} = z_{RL}(\lambda^*) =$

$\max_{\lambda \geq 0} \{z_{RL}(\lambda)\}$ . As seguintes observações ainda podem ser consideradas: O dual Lagrangiano fornece o valor de  $\lambda^*$  ótimo, bem como a melhor solução Lagrangiana  $z_{RL}(\lambda^*)$ ;  $\lambda^*$  pode assumir valores diferentes para o(s) mesmo(s) valor(es) ótimo(s),  $z_{DL}$ , que é o limitante inferior mais próximo (ou igual) a  $z_P$ .

**Corolário 3.1.** *Para qualquer escolha do multiplicador Lagrangiano,  $\lambda \geq 0$ , têm-se que  $z_{DL} \leq z_P$ .*

Demonstração: Pela estrutura do problema dual (DL) e pelo Teorema 3.1,  $z_{RL}(\lambda) \leq z_P$  acontece para todo  $\lambda$  factível, em particular, para  $\max_{\lambda \geq 0} \{z_{RL}(\lambda)\} = z_{DL}$ . O que implica diretamente que  $z_{DL} \leq z_P$  ■.

Em otimização linear é correto afirmar que a solução ótima dual é sempre igual à solução ótima de seu próprio problema primal, ou seja, se denotarmos por (PL) um problema de otimização linear e por (D) seu dual, têm-se que  $z_D = z_{PL}$ . Entretanto, esta afirmação não é sempre válida para problemas de otimização inteira; em particular, aplicar a relaxação Lagrangiana ao problema primal implicará na função objetivo de (DL), um incremento  $\lambda^T(A^1x - b_1)$ , não necessariamente igual à função objetivo de P. Torna-se então natural o questionamento da existência de condições para que a solução ótima do dual Lagrangiano,  $z_{DL} = z_{RL}(\lambda^*)$ , seja igual à solução ótima do problema primal,  $z_P$ , em otimização inteira, isto é, quando  $z_P = z_{RL}(\lambda^*)$ . Esta idéia é formalizada com o resultado a seguir.

**Teorema 3.2** (Geoffrion, 1974). *Tem-se que  $z_P = z_{DL}$  se, e somente se, existem  $\lambda^* \geq 0$  e  $x^* \in S$  tais que satisfazem as seguintes condições:*

- i.  $z_{RL}(\lambda^*) = z(\lambda^*, x^*)$ ,  $x^*$  é ótima para o problema Lagrangiano  $RL(\lambda)$ .*
- ii.  $A^1x^* \leq b_1$ ,  $x^*$  é factível para o problema original P.*
- iii.  $(\lambda^*)^T(A^1x^* - b_1) = 0$  satisfaz as condições de folgas complementares.*

Tem-se então que  $x^*$  é uma solução ótima do problema original P se satisfaz as três condições. No entanto, se satisfaz somente (i) e (ii), tem-se que  $x^*$  é uma solução  $\epsilon$ -ótima para o problema original P, em que  $\epsilon = z_{RL}(\lambda^*) - z_P$ .

Demonstração: Para provar este resultado, será mostrado que  $z_P = z_{RL}(\lambda^*)$ . Por hipótese, têm-se  $\lambda^* \geq 0$  e  $x^*$  satisfazendo (i), (ii) e (iii).

Por (i) e pelo teorema Teorema 3.1,  $x^*$  é ótima para  $z_{RL}(\lambda^*)$  e

$$z_{RL}(\lambda^*) = c^T x^* + (\lambda^*)^T (A^1 x^* - b_1) \leq z_P \quad (*)$$

Por (iii),

$$c^T x^* + \underbrace{(\lambda^*)^T (A^1 x^* - b_1)}_{=0} = c^T x^* \stackrel{(*)}{\Rightarrow} c^T x^* \leq z_P \quad (**)$$

Por (ii),  $x^*$  é factível a P implica em

$$c^T x^* \geq z_P \quad (***)$$

Por (\*\*) e (\*\*\*), obtém-se:

$$c^T x^* = z_P$$

isto é,  $x^*$  é solução ótima para P implicando em  $z_{RL}(\lambda^*) = z_P$  ■.

Isto quer dizer que se, para determinado  $\lambda$ , a solução ótima da relaxação Lagrangiana (que é a solução ótima do dual Lagrangiano) for factível e satisfizer as folgas complementares, então podemos afirmar se tratar de uma solução ótima também para o problema primal, ou seja,  $z_P = z_{DL}$ . Como nem sempre tais condições são satisfeitas, o interesse recai sobre a obtenção de  $\lambda$  que forneça para a relaxação Lagrangiana o limitante inferior mais próximo possível do valor ótimo do problema primal P. O exemplo abaixo irá ilustrar o último resultado.

**Exemplo3.2.:** (baseado em Kitamura (2009)) Resolver o seguinte problema utilizando relaxação Lagrangiana.

$$z_P = \min -3x_1 - 4x_2 \quad (3.18)$$

sujeito a:

$$6x_1 + 2x_2 \leq 3 \quad (3.19)$$

$$5x_1 + 6x_2 \leq 6 \quad (3.20)$$

$$x_1, x_2 \in \{0, 1\} \quad (3.21)$$

Aplicando a relaxação Lagrangiana nas duas restrições obtemos o seguinte problema:

$$z_{RL} = \min -3x_1 - 4x_2 + \lambda_1(6x_1 + 2x_2 - 3) + \lambda_2(5x_1 + 6x_2 - 6)$$

$$\text{sujeito a: } x_1, x_2 \in \{0, 1\}$$

podendo ser reescrito por:

$$z_{RL} = \min (-3 + 6\lambda_1 + 5\lambda_2)x_1 + (-4 + 2\lambda_1 + 6\lambda_2)x_2 - 3\lambda_1 - 6\lambda_2$$

$$\text{sujeito a: } x_1, x_2 \in \{0, 1\}$$

Se tomarmos  $\lambda = (1, 1)$ , obtemos:

$$z_{RL}(1, 1) = \min 8x_1 + 4x_2 - 9$$

$$\text{sujeito a: } x_1, x_2 \in \{0, 1\}$$

A solução para este problema será  $x_1^* = x_2^* = 0$ . O valor  $z_{RL}(1, 1) = -9$  não é igual a  $z_P$ , pois, apesar dos itens (i) e (ii) do Teorema 3.2 estarem sendo satisfeitos (devido à factibilidade de  $x^*$  em P), as folgas complementares de (iii) não são satisfeitas:

$$\lambda^T(Ax^* - b) = (1 \ 1)\left(\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}\right) = -9 \neq 0$$

Assim, o que se pode afirmar é que para  $\lambda = (1, 1)$ ,  $x^* = (0, 0)$  fornece um limite inferior para P.

Entretanto, ao tomar  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 \in [\frac{3}{5}, \frac{2}{3}]$ , obtém-se  $\lambda = \lambda^*$  ótimo e  $x^*$ , que é solução ótima de  $z_{RL}(\lambda^*)$ , também ótima para  $z_P$ . Por exemplo, se  $\lambda^* = (0, \frac{13}{20})$  então:

$$z_{RL}(0, \frac{13}{20}) = \min 0.25x_1 - 0.1x_2 - 3.9$$

$$\text{sujeito a: } x_1, x_2 \in \{0, 1\}$$

A solução para este problema será  $x^* = (0, 1)$  com valor  $z_{RL}(0, 1) = -4$ , que é factível a P e satisfaz as folgas complementares:

$$\lambda^T(Ax^* - b) = (0 \ \frac{13}{20})\left(\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}\right) = 0$$

Logo, os três itens do Teorema 3.2 são satisfeitos e  $x^* = (0, 1)$  é solução ótima para P com  $z_P = -4$ . Observe que os únicos pontos factíveis são  $(0, 0)$  e  $(0, 1)$ . Como a função objetivo é de minimização então  $(0, 1)$  é, de fato, a solução ótima de P.

A necessidade de que encontrar bons limitantes (o mais próximo possível da solução

ótima) para um problema primal depende de uma boa escolha de  $\lambda$  é constatada pelo Exemplo 3.2. Tal fato remete a necessidade de se resolver o problema dual lagrangiano, que fornece o valor dos multiplicadores Lagrangianos ótimos, bem como a melhor aproximação para o problema primal, P.

Algumas propriedades foram desenvolvidas para auxiliar na resolução de certos problemas duais Lagrangianos, uma delas, chamada propriedade de integralidade, é descrita na próxima seção. Porém, tal propriedade é melhor entendida quando são fornecidos pré-requisitos envolvendo relações existentes entre os limitantes inferiores fornecidos pelas diferentes relaxações e problemas duais (mesmo que a propriedade de integralidade não seja necessariamente verificada). Sendo assim, considere o resultado a seguir.

Para o próximo Teorema, definimos:  $\bar{S}$  um conjunto de restrições qualquer, S, com as restrições de integralidade relaxadas. Por exemplo,  $P(\bar{S}) =$  relaxação linear de P.

**Teorema 3.3.**  $z_P(\bar{S}) = z_{DL}(\bar{S}) \leq z_{RL}(\lambda)(S) \leq z_{DL}(S)$

A demonstração deste teorema encontra-se no trabalho de Geoffrion (Geoffrion 1974). O fato de  $z_P(\bar{S}) = z_{DL}(\bar{S})$  implica diretamente que resolver o dual Lagrangiano com o conjunto de restrições, S, relaxado não é mais eficiente do que resolver a relaxação linear de P.  $z_{DL}(\bar{S}) \leq z_{RL}(\lambda)(S) \leq z_{DL}(S)$  implica que o multiplicador ótimo para  $z_{RL}(S)$ , embora não necessariamente ótimo para  $z_P(\bar{S})$ , fornece ao menos e, possivelmente, um melhor limitante, ou tão bom quanto,  $z_P(\bar{S})$ .

### 3.4 A Propriedade de Integralidade

Um elemento chave do desenvolvimento de Geoffrion (Geoffrion 1974) em dualidade Lagrangiana para problemas de otimização inteira é a propriedade de integralidade na relaxação Lagrangiana. Como citado na seção anterior, considere  $P(\bar{S})$ , a relaxação linear do problema P:

$$(P(\bar{S})) \quad \min c^T x$$

$$\text{sujeito a:} \quad A^1 x \leq b_1, x \in \bar{S}$$

Onde  $\bar{S} = \{x \geq 0 : A^2 x \leq b_2\}$ .

**Definição 3.1:** O problema Lagrangiano ( $RL(\lambda)$ ) possui a propriedade de integrali-



dade se  $z_{RL}(\lambda(S)) = z_{RL}(\lambda(\bar{S}))$  para todo  $\lambda \geq 0$ , isto é, se a relaxação Lagrangiana pode ser resolvida como um problema de otimização linear, para todo  $\lambda$  escolhido.

Isto que dizer que se uma relaxação Lagrangiana para o problema P possui a propriedade de integralidade então o limitante fornecido pela relaxação linear de  $RL(\lambda)$  é igual àquele fornecido pelo próprio  $RL(\lambda)$ . Logo, não será necessário resolver o problema Lagrangiano, que geralmente possui maior complexidade computacional, para obtenção de melhores limitantes para P; basta resolver sua relaxação linear,  $RL(\lambda(\bar{S}))$ , como um problema de otimização linear. Neste caso, resolver  $RL(\lambda)$  ao invés de  $RL(\lambda(\bar{S}))$  será a melhor opção exclusivamente nos casos em que  $RL(\lambda(\bar{S}))$  é muito grande e, geralmente, difícil de ser resolvido em um tempo computacional viável. O significado geométrico da propriedade de integralidade é que os limitantes fornecidos por estes dois problemas,  $Z_{RL}(\lambda(S))$  e  $Z_{RL}(\lambda(\bar{S}))$ , são iguais, pois os pontos extremos da região factível de  $RL(\lambda)$  são todos inteiros, isto é, a região factível de  $RL(\lambda)$ ,  $S$ , é um poliedro de pontos extremos inteiros.

Uma análise sobre os limitantes fornecidos por  $P(\bar{S})$  e por DL, quando é satisfeita a propriedade de integralidade para  $RL(\lambda)$ , também pode ser estabelecida. A solução ótima de problemas de otimização inteira são sempre dados por pelo menos um dos vértices do maior politopo de pontos inteiros que está contido ou é igual à sua região de factibilidade,  $S$ . Se  $S$  coincide com este politopo então, como visto acima, a propriedade de integralidade é satisfeita e pode-se desprezar as condições de integralidade de  $x$ , obtendo assim, o seguinte problema Lagrangiano equivalente:

$$(RL^1(\lambda) = RL(\lambda)) \quad \min c^T x + \lambda^T (A^1 x - b_1)$$

$$\text{sujeito a:} \quad x \in \bar{S}$$

Será provado que  $z_P(\bar{S}) = z_{DL}(S)$ , ou seja, que o problema dual Lagrangiano e a relaxação linear fornecem o mesmo limitante superior para P, isto é, possuem a mesma solução ótima, desde que o problema Lagrangiano possua a propriedade de integralidade. Observe que foi demonstrado anteriormente  $z_{DL}(S) = z_{RL}(\lambda^*(S))$ , onde  $\lambda^*$  é o multiplicador dual ótimo de  $RL(\lambda)$ .

**Teorema 3.4.** *Quando  $RL(\lambda)$  possui a propriedade de integralidade então  $z_P(\bar{S}) = z_{DL}(S)$ .*

Demonstração: Pelo Teorema 3.3, sempre é satisfeita a desigualdade:

$$z_P(\bar{S}) \leq z_{DL}(S) \quad (*)$$

Além disso, de acordo a definição de relaxação apresentada na Seção 3.2, o problema Lagrangiano  $RL^1(\lambda)$ , que possui a propriedade de integralidade, é uma relaxação do problema  $P(\bar{S})$ . Então, verifica-se  $z_{RL}^1(\lambda) \leq z_P(\bar{S})$ ,  $\forall \lambda \geq 0$ . Em particular, também é válido para  $\lambda = \lambda^*$ :

$$z_{DL}(S) = z_{RL}^1(\lambda^*) \leq z_P(\bar{S}) \quad (**)$$

De (\*) e (\*\*), conclui-se a demonstração do teorema. ■

O Teorema 3.4 é importante, pois indica que se  $RL(\lambda)$  possui a propriedade de integralidade então o dual Lagrangiano não fornece um limitante mais eficiente do que àquele fornecido pela relaxação linear. Portanto, pela Definição 3.1, bem como pelo próprio Teorema 3.4, resolver o dual Lagrangiano quando  $RL(\lambda)$  possui a propriedade de integralidade será a melhor opção apenas caso  $P(\bar{S})$  ou  $RL(\lambda(\bar{S}))$  sejam problemas complicados de serem resolvidos; encontrar solução dual Lagrangiana, em geral, possui maior complexidade computacional que encontrar solução para uma relaxação linear. Na próxima seção será apresentado o método do subgradiente, utilizado para encontrar os multiplicadores Lagrangianos ótimos e soluções ótimas para DL.

Por outro lado, há situações em que os limitantes fornecidos pela relaxação Lagrangiana são de melhor qualidade do que os dado pela relaxação linear dos problemas. Quando o problema Lagrangiano não tem a propriedade de integralidade, o modelo de relaxação Lagrangiana corresponde a uma formulação mais forte do que o da relaxação linear.

Quando se escolhe um modelo de relaxação Lagrangiana, devemos ter em mente que o problema Lagrangiano deve ser de muito mais fácil resolução que o problema original. Não faz sentido escolher problemas Lagrangianos de muito difícil resolução. No entanto, há normalmente vantagens em aceitar problemas Lagrangianos que não tenham a propriedade de integralidade desde que sua resolução não seja muito difícil. Os benefícios obtidos pela melhor qualidade dos limitantes, em relação a uma escolha em que o problema Lagrangiano tem a propriedade de integralidade e mais fácil de resolver, pode ser de fato, muito compensador.

## 3.5 Método de Otimização do Subgradiente

Quando se tem o problema dual Lagrangiano ( $DL$ ), vários métodos podem ser usados para se obter a melhor aproximação para a solução  $\lambda^*$ . O mais utilizado tem sido o método de otimização do subgradiente o qual tem produzido bons resultados (Held *et al.* (1974) e Camerini *et al.* (1975)). Este método, quando utilizado para a resolução do problema dual Lagrangiano consiste num processo iterativo que, através de um conjunto inicial de multiplicadores de Lagrange, gera uma seqüência de multiplicadores cujo limite tende à solução do problema dual Lagrangiano.

O método do gradiente é bem conhecido na literatura e é utilizado para otimizar funções que são diferenciáveis em todos os pontos de seu domínio. Sabe-se, por definição, que o gradiente de uma função no ponto  $x$  é dado por:

$$\nabla f(x) = \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)$$

e aponta para onde a função  $f(x)$  cresce. Cada parcela  $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$  representa a derivada parcial da função  $f(x)$  em relação à  $x_i$  no ponto  $x$ . Assim, para problemas de minimização da função objetivo  $f(x)$  de um dado problema,  $-\nabla f(x)$  aponta para onde tal função decresce seu valor.

Analogamente a Valério de Carvalho (Carvalho 2001), para um dado ponto  $x$  e uma direção  $d$ , tal que  $-\nabla f(x) \cdot d > 0$ , a idéia da otimização pelo método do gradiente baseia-se no fato de que um pequeno passo, de valor  $t$ , dado na direção  $d$  produz uma solução com menor valor para a função objetivo, isto é, para o ponto  $y = x + td$ , tem-se que  $f(y) < f(x)$ .

O método de otimização do subgradiente é uma adaptação do método do gradiente para funções não diferenciáveis em todos os pontos do domínio. Para problemas duais de minimização, a idéia do método é considerar passos tomados,  $t$ , na direção negativa de um subgradiente a fim de que os valores da relaxação, que formam uma função convexa, diminuam a cada iteração. Antes de apresentarmos o método, definiremos subgradiente e subdiferencial.

**Definição 3.2.** Um vetor  $\gamma \in \mathbb{R}^n$  é um subgradiente de uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se  $f(x) \leq f(x^0) + \gamma^T(x - x^0)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Se a função  $f$  for diferenciável em  $x^0$ , então teremos apenas um subgradiente que será

igual ao gradiente de  $f$  em  $x^0$ .

**Definição 3.3.** *O subdiferencial  $\partial f(x^0)$  de  $f$  em  $x^0$  é o conjunto de todos os subgradientes de  $f$  em  $x^0$ .*

Se  $f$  é diferenciável em  $x^0$ , então  $\partial f(x^0) = \{\nabla f(x^0)\}$ , onde  $\nabla f(x^0)$  representa o gradiente de  $f$  em  $x^0$ . Podemos notar também que  $\partial z_{RL}(\lambda) \neq \emptyset$ .

O método de otimização do subgradiente fornece um multiplicador  $\lambda^k$  para a relaxação atual em cada iteração  $k$ , partindo de um vetor inicial  $\lambda^0$  (por exemplo, o vetor nulo). Como discutido anteriormente, atualização de cada multiplicador atual deve, portanto, ser efetuada na direção oposta a um subgradiente atual,  $s(\lambda^k)$ , de acordo com um dado passo,  $t_k$ , da seguinte forma:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + t_k s(\lambda^k)$$

onde

$$t_k = \frac{[\bar{z}_P - z_{RL}(\lambda^k)]\rho^k}{\|s(\lambda^k)\|^2}$$

O valor  $\bar{z}_P$  pode ser obtido pelo cálculo da função objetivo resultante da aplicação de uma heurística, isto é, uma solução factível para  $P$ ; e  $z_{RL}(\lambda^k)$  é o valor da função objetivo da relaxação utilizada, resolvida com o vetor  $\lambda^k$  atual. Portanto,  $\bar{z}_P - z_{RL}(\lambda^k)$  é obtido como a diferença entre um limitante superior e um limitante inferior para o problema primal  $P$ . O parâmetro  $\rho^k$  ajusta o tamanho do passo à medida que pretende-se escolher com maior minúcia os valores de  $\lambda$ .

Observe que, para  $s(\lambda)^k$  ser um subgradiente válido, ou seja, apontar para onde a função objetivo da relaxação realmente decresce,  $\bar{z}_P$  deve ser uma função côncava sobre um problema dual de maximização (a relaxação e o problema primal devem portanto, ser um problema de minimização).

Variações do método de otimização do subgradiente acima, podem ser encontradas na literatura. É o caso de Camerini *et al.* (1975) que sugerem modificações na atualização do tamanho do passo  $t_k$  em cada iteração  $k$ .

### 3.5.1 Características da Relaxação Lagrangiana

Um dos resultados mais importantes sobre a relaxação Lagrangiana é apresentado no seguinte teorema.

**Teorema 3.5.** *Sejam  $P$  o problema primal e  $RL$  a relaxação Lagrangiana como definidas anteriormente sobre o conjunto finito de restrições  $S$ . Então,  $z_{RL}(\lambda)$  é uma função de  $\lambda$ ,*

côncava e linear por partes.

O teorema não será demonstrado, porém a demonstração pode ser encontrada em Gondran e Minoux (1979), página 497.

A função Lagrangiana é côncava e, de fato, é não-diferenciável apenas nos pontos em que a solução ótima não é única, isto é, onde as funções do tipo  $c^T x^i + \lambda^T (A^1 x_i - b_1)$  se cruzam. Em todos estes pontos em que  $z_{RL}(\lambda)$  é não-diferenciável, não existe gradiente para a função; entretanto, um subgradiente sempre existe desde que a função Lagrangiana tenha solução ótima.

**Teorema 3.6.**  $A^1 x - b_1$  é um subgradiente de  $z_{RL}(\lambda)$  em  $\lambda^0$ .

Demonstração: Podemos escrever:

$$\begin{aligned} z_{RL}(\lambda^0) + (\lambda - \lambda^0)(A^1 x - b_1) &= c^T x + \lambda^0(A^1 x - b_1) + (\lambda - \lambda^0)(A^1 x - b_1) = \\ &= cx + \lambda(A^1 x - b_1) \geq z_{RL}(\lambda^0), \lambda \geq 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

O Teorema 3.6 fornece uma maneira de se obter um subgradiente de  $z_{RL}(\lambda)$  em um dado ponto  $\lambda^0$ .

Uma consequência imediata deste último resultado é que qualquer solução ótima,  $x^*$ , fornece um subgradiente,  $(A^1 x - b_1)$ , para  $z_{RL}(\lambda)$  sobre  $\lambda^*$ . Quando apenas um  $x^*$  resolve  $z_{RL}(\lambda^*)$  então existe apenas um subgradiente,  $(A^1 x - b_1)$ , sobre  $\lambda^*$ . Caso contrário, se  $x_k^*$  pontos resolvem  $z_{RL}(\lambda^*)$  então existem vários subgradientes para a função lagrangiana:  $(A^1 x_1^* - b_1), (A^1 x_2^* - b_1), \dots, (A^1 x_k^* - b_1)$  mais qualquer combinação convexa entre estes vetores. Observe que, como discutido anteriormente,  $(A^1 x - b_1)$  é sempre subgradiente válido para  $z_{RL}(\lambda)$  desde que a função lagrangiana é côncava e, por isso, espera-se grande aproveitamento na resolução de DL através do método de otimização do subgradiente.

### Resolução do Dual Lagrangiano Pelo método do Subgradiente

*Passo 1:*(Inicialização): Escolha um ponto inicial  $\lambda^k$  e faça  $k = 1$ .

*Passo 2:*(Relaxação Lagrangiana) Resolva a relaxação Lagrangiana  $RL(\lambda^k)$  obtendo solução ótima  $x^k \in S$ . Se  $(A^1 x^k - b_1) \geq 0$  e  $\lambda^k(A^1 x^k - b_1) = 0$ , páre; Teorema 3.2 satisfeito com solução ótima  $x^k$  resolvendo o problema primal P:  $z_{RL}(\lambda^k) = z_{DL} = z_P$ .

*Passo 3:*(Atualização e passo subgradiente) Faça  $\lambda^{k+1} = \lambda^k + t_k s(\lambda^k)$  para  $t_k > 0$ . onde  $t_k = \frac{[\bar{z}_P - z_{RL}(\lambda^k)]\rho^k}{\|s(\lambda^k)\|^2}$ . Faça  $k \leftarrow k + 1$  e volte ao passo 2.

Não há nada que garanta que a direção do subgradiente seja uma direção de subida, por isso, a convergência do método depende essencialmente da escolha do tamanho do passo  $t_k$ . É possível mostrar que o método converge se forem satisfeitas as seguintes condições:

$$i) \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = 0$$

$$ii) \sum_{k=1}^{\infty} t_k = \infty$$

Assim, no algoritmo acima usa-se um dos seguintes procedimentos para a escolha do passo:

1— A série divergente  $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \rightarrow \infty$ ,  $t_k \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Esta escolha é teoricamente correta, mais a convergência é muito lenta.

2— A série geométrica:  $t_k = t_0 \rho^k$ , ou  $t_k = \frac{[\bar{z} - z_{RL}(\lambda^k)]\rho^k}{\|s(\lambda^k)\|^2}$  onde  $0 < \rho < 2$  e  $\bar{z}$  é um limitante superior para o problema dual Lagrangiano.

Teoricamente, o algoritmo do subgradiente pode parar quando em alguma iteração  $k$ , encontrar  $s(\lambda^k) = 0 \in \partial z_{LR}(\lambda^k)$ . Mas esta situação dificilmente acontecerá, por isso adota-se um número máximo de iterações, ou um critério de parada baseado na não melhoria da solução após um certo número de iterações.

## *Capítulo 4*

# *Limites Inferiores para o Problema de Dimensionamento de Lotes em Máquinas Paralelas e Tempos de Preparação*

O principal objetivo deste capítulo é apresentar e comparar a qualidade dos limites inferiores obtidos com a relaxação Lagrangiana, aplicada ao problema de dimensionamento de lotes em máquinas paralelas. Para tanto, faremos uma pequena revisão do trabalho de Toledo e Armentano (2006), que fornece limites inferiores utilizando a relaxação Lagrangiana do problema, a partir da formulação original *CLM* (2.17) – (2.21) e as restrições que são dualizadas na função objetivo são as restrições de capacidade (2.20) (decomposição por itens). Posteriormente descrevemos o método proposto neste trabalho em que se utiliza a reformulação *EMM* (2.22) – (2.28) baseada na redefinição de variáveis proposta por Eppen e Martin (1987), em que as restrições dualizadas na função objetivo, são as restrições de fluxos (2.23) e (2.24) (decomposição por períodos). Por fim são apresentados alguns testes computacionais.

### **4.1 Relaxação Lagrangiana Aplicada à Formulação CLM (Toledo e Armentano 2006)**

Toledo e Armentano (2006), propõem uma heurística para resolver o problema de dimensionamento de lotes em máquinas paralelas (2.17) – (2.21), e o limitante inferior utilizado nesta heurística para o cálculo dos *gaps* está baseado na relaxação lagrangiana das restrições de capacidade (2.20) que são dualizadas na função objetivo e as restrições de

preparação, demanda e condições de integralidade são colocadas nos subproblemas. Relaxadas tais restrições, o problema pode ser decomposto em um conjunto de subproblemas de dimensionamento de lotes com único item em máquinas paralelas, que são resolvidos facilmente pela extensão do algoritmo de programação dinâmica de Wagner e Whitin (1958) para o caso com máquinas paralelas, proposto por Toledo (1998).

Considere os multiplicadores Lagrangianos  $\mu_{jt}$ ,  $j = 1, \dots, r$  e  $t = 1, \dots, m$  associados as restrições (2.20), este problema será denotado por  $CLM/I/RL$  (pois utiliza-se a formulação  $CLM$ ,  $I$  porque será feita a decomposição por item e  $RL$  de relaxação Lagrangiana) e pode ser formulado da seguinte forma.

$$\begin{aligned} \text{Min} f c_i s_{i0} + \sum_{j=1}^r \sum_{t=1}^m (s c_{ijt} y_{ijt} + v c_{ijt} x_{ijt}) + \sum_{t=1}^m h c_{it} s_{it} - \\ - \sum_{j=1}^r \sum_{t=1}^m \mu_{jt} (Cap_{jt} - s t_{ijt} y_{ijt} - v t_{ijt} x_{ijt}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Sujeito a :

$$s_{i,t-1} + \sum_{j=1}^r x_{ijt} = d_{it} + s_{it} \quad \forall t \in T \quad (4.2)$$

$$x_{ijt} \leq s d_{itm} y_{ijt} \quad \forall j \in J, t \in T \quad (4.3)$$

$$y_{ijt} \in \{0, 1\}, \quad x_{ijt} > 0, \quad s_{it} \geq 0, \quad s_{i0} \geq 0, \quad s_{im} = 0 \quad \forall j \in J, t \in T \quad (4.4)$$

Dizemos que as restrições de capacidade foram dualizadas na função objetivo. Ainda se denotarmos por  $v_{CLM/I/RL}^i(\mu)$  os valores da função objetivo (4.1) para cada item, tem-se que o valor  $v_{CLM/I/RL}(\mu) = \sum_{i=1}^n v_{CLM/I/RL}^i(\mu)$  fornece um limite inferior para o problema original  $v_{CLM}$ . Deve-se determinar  $\mu_{jt}$  que fornece o maior limite inferior. A maximização de  $v_{CLM/I/RL}(\mu)$ , ou seja, a solução do problema dual lagrangiano ( $v_{CLM/I/RL} = \max\{v_{CLM/I/RL}(\mu)\}$ ) é feita através do método do subgradiente em que:

$$\begin{aligned} u^{k+1} = \max\{0, \mu_{jt}^k - t_k (Cap_{jt} - \sum_{i=1}^n s t_{ijt} y_{ijt} - \sum_{i=1}^n v t_{ijt} x_{ijt})\} \\ t_k = \alpha \frac{(ub - v_{CLM/I/RL}(\mu^k))}{\sum_{t=1}^m (Cap_{jt} - \sum_{i=1}^n s t_{ijt} y_{ijt} - \sum_{i=1}^n v t_{ijt} x_{ijt})^2} \end{aligned}$$

Onde:



$\mu^k$  é o vetor de multiplicadores  $\mu_{jt}$  na iteração  $k$ .

$x_{ijt}$  e  $y_{ijt}$  são as soluções que minimizam a função dual com multiplicadores  $\mu^k$ .

$t_k$  determina o tamanho do passo ( $0 \leq \alpha \leq 2$ ).

$ub$  é um limite superior para o problema.

Nos testes computacionais apresentados no Capítulo 5, os parâmetros utilizados são os mesmos que em Toledo e Armentano (2006), ou seja, o tamanho do passo na direção do subgradiente é proporcional a um parâmetro  $\alpha$ , que deve decrescer com o número de iterações ( $t_k \rightarrow 0$ ) e a regra utilizada para gerar uma sequência decrescente para  $\alpha$  é caracterizada pelos parâmetros  $(\alpha_0, r_0, d, r_m)$ . Os valores de  $\alpha$  são obtidos fazendo  $\alpha = \alpha_0$  por  $r = r_0$  iterações. Então estes dois parâmetros são divididos por  $d$ , e  $\alpha$  é mantido por mais  $r$  iterações. Este processo é repetido até que  $r \leq r_m$ , após isso,  $\alpha$  é dividido por  $d$  em todas  $r_m$  iterações. O limite superior utilizado inicialmente no método do subgradiente é um número grande qualquer, e em seguida, é atualizado de acordo com a solução factível encontrada. Os valores utilizados para os parâmetros são (1.75, 25, 2, 10) e são realizadas 150 iterações.

Deve-se observar que o trabalho de Toledo e Armentano (2006) não se restringe a obtenção de limitantes inferiores, mas sim, de uma heurística Lagrangiana, em que a partir de um limitante inferior inactível para o problema original, é aplicada uma heurística de transferência de produção entre máquinas e períodos afim de obter uma solução factível. No entanto, no âmbito deste trabalho, estaremos interessados somente nos limitantes inferiores fornecidos por Toledo e Armentano (2006).

## 4.2 Relaxação Lagrangiana Aplicada à Formulação EMM

Nesta seção vamos apresentar uma nova relaxação Lagrangiana baseada em Jans e Degraeve (2004), em que se considera o modelo *EMM* (2.22) – (2.28) e as restrições de fluxo (2.23) e (2.24) são dualizadas na função objetivo. O problema se decompõe em subproblemas independentes, por períodos e por máquinas e contém as restrições de capacidade, preparação e as condições de integralidade. Assim, os pontos extremos representam planos de produção a cada período e para cada máquina, ou seja, o número de subproblemas está vinculado ao número total de períodos e de máquinas. As colunas são os planos de produção por períodos e máquinas, indicando, para cada período e máquina quais produtos são produzidos e em quais quantidades. Todos esses planos de produção

são factíveis em relação as restrições de capacidade. Além de Jans e Degraeve (2004) que consideram o problema com uma única máquina, Diaby *et al.* (1992) testam esta decomposição por períodos, mas os autores consideram a formulação  $CL$  (2.12) – (2.16) em que também se tem uma única máquina. De seus testes computacionais, concluíram que a decomposição por item é superior à decomposição por período para aquela formulação. Ainda para o problema com única máquina, esta decomposição é discutida, sem testes computacionais, para o problema de dimensionamento de lotes sem tempos de preparação em Chen e Thizy (1990). Pimentel *et al.* (2010) também fazem tal análise e chegam a mesma conclusão, Sural *et al.* (2009) também testam a decomposição por períodos para o caso sem custo de preparação e assim como Jans e Degraeve (2004) consideram uma reformulação do modelo (2.12) – (2.16). Neste trabalho, começaremos da formulação  $EMM$  (2.22) – (2.28) e aplicaremos a decomposição por períodos e por máquinas, resultando no limite inferior  $v_{EMM/P/RL}$  ( $EMM/P/RL$  pois utiliza-se a formulação  $EMM$ , aplica-se a decomposição por períodos e a técnica de relaxação Lagrangiana). Deve-se observar que não encontramos na literatura nenhum trabalho que considera a decomposição por períodos para o caso de máquinas paralelas.

Na relaxação Lagrangiana as restrições (2.23) e (2.24) são dualizadas na função objetivo (2.22) com multiplicadores lagrangianos  $p_{it}$ .

$$\begin{aligned}
Min \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^m c_{it} w_{it} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r \sum_{t=1}^m s c_{ijt} y_{ijt} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r \sum_{t=1}^m \sum_{k=t}^m c v_{ijtk} z v_{ijtk} - \\
- \sum_{i=1}^n p_{i1} \left( \sum_{k=1}^m w_{ik} + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^m z v_{i,j,1,k} - 1 \right) - \\
- \sum_{i=1}^n \sum_{t=2}^m p_{it} \left( \sum_{j=1}^r \sum_{k=t}^m z v_{ijtk} - w_{i,t-1} - \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{t-1} z v_{ijk,t-1} \right) \quad (4.5)
\end{aligned}$$

Após reorganizar os termos da função objetivo, o problema de Lagrange torna-se:

$$\begin{aligned}
Min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r \sum_{t=1}^m s c_{ijt} y_{ijt} + \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^{m-1} (c_{it} - p_{i,1} + p_{i,t+1}) w_{it} + \sum_{i=1}^n (c_{im} - p_{i,1}) w_{im} + \\
+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r \sum_{t=1}^{m-1} \sum_{k=t}^m (c v_{ijtk} - p_{it} + p_{i,k+1}) z v_{ijtk} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r \sum_{t=1}^m (c v_{ijtm} - p_{it}) z v_{ijtm} + \sum_{i=1}^n p_{i1} \quad (4.6)
\end{aligned}$$

Sujeito a :

$$\sum_{k=t}^m z v_{ijtk} \leq y_{ijt} \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T \quad (4.7)$$

$$\sum_{i=1}^n s t_{ijt} y_{ijt} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=t}^m v t_{ijt} s d_{itk} z v_{ijtk} \leq Cap_{jt} \quad \forall j \in J, t \in T \quad (4.8)$$

$$y_{ijt} \in \{0, 1\}, \quad w_{it} \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T \quad (4.9)$$

$$z v_{ijtk} \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in J, t \in T \quad \forall k \in T, k \geq t \quad (4.10)$$

O problema pode ser decomposto em subproblemas independentes para cada período  $t$ .

$$\begin{aligned} Min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r s c_{ijt} y_{ijt} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r \sum_{k=t}^{m-1} (c v_{ijtk} - p_{it} + p_{i,k+1}) z v_{ijtk} + \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (c v_{ijtm} - p_{it}) z v_{ijtm} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Sujeito a :

$$\sum_{i=1}^n s t_{ijt} y_{ijt} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=t}^m v t_{ijt} s d_{itk} z v_{itk} \leq Cap_{jt} \quad \forall j \in J \quad (4.12)$$

$$\sum_{k=t}^m z v_{itk} \leq y_{ijt} \quad \forall i \in I, j \in J \quad (4.13)$$

$$y_{ijt} \in \{0, 1\}, \quad z v_{itk} \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in J \quad \forall k \in T, k \geq t \quad (4.14)$$

A função objetivo do último período tem uma forma especial:

$$Min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r s c_{ijm} y_{ijm} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (c v_{ijmm} - p_{im}) z v_{ijmm} \quad (4.15)$$

As variáveis  $w_{it}$  estão presentes na função objetivo do problema de Lagrange (4.6), mas não estão na função objetivo do subproblema decomposto por período (4.11) porque elas não aparecem nas restrições dos subproblemas. Para minimizar a função objetivo do problema de Lagrange (4.6) o valor de cada variável  $w_{it}$  é determinada de acordo com a seguinte regra de decisão:

$$w_{it} = 1 \text{ se } (ci_{it} - p_{i,1} + p_{i,t+1}) < 0, \quad w_{it} = 0 \text{ caso contrario } \forall i \in I, t \in T/\{m\} \quad (4.16)$$

$$w_{im} = 1 \text{ se } (ci_{im} - p_{i,1}) < 0, \quad w_{im} = 0 \text{ caso contrario } \quad \forall i \in I \quad (4.17)$$

Além disso, consideramos implicitamente a restrição (2.23) da seguinte maneira: para cada item, apenas a variável de estoque inicial com o maior coeficiente negativo na função objetivo igual a 1.

Para a resolução do subproblema (4.11) – (4.15) decompos novamente o problema em subproblemas independentes para cada máquina  $j$ :

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n sc_{ijt}y_{ijt} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=t}^{m-1} (cv_{ijtk} - p_{it} + p_{i,k+1})zv_{ijtk} + \sum_{i=1}^n (cv_{ijtm} - p_{it})zv_{ijtm} \quad (4.18)$$

Sujeito a :

$$\sum_{i=1}^n st_{ijt}y_{ijt} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=t}^m vt_{ijtk}sd_{itk}zv_{itk} \leq Cap_{jt} \quad (4.19)$$

$$\sum_{k=t}^m zv_{itk} \leq y_{ijt} \quad \forall i \in I \quad (4.20)$$

$$y_{ijt} \in \{0, 1\}, \quad zv_{itk} \geq 0 \quad \forall i \in I \quad \forall k \in T, k \geq t \quad (4.21)$$

Os subproblemas decompostos por períodos e por máquinas podem ser resolvidos pelo método *branch-and-bound* proposto por Jans e Degraeve (2004) e resumido na Seção 4.3. O problema Lagrangiano é resolvido durante algumas iterações e os multiplicadores Lagrangianos  $p_{it}$  são atualizados pelo método de otimização do subgradiente (4.22) e (4.23). Seja  $p_{it}^{\kappa}$  os multiplicadores de Lagrange na iteração  $\kappa$  e seja  $(y_{ijt}^{\kappa}, zv_{itk}^{\kappa}, w_{it}^{\kappa})$  a solução ótima para o problema Lagrangiano na iteração  $\kappa$ . O valor ótimo da função objetivo (4.6) para o problema Lagrangiano na iteração  $\kappa$  é  $v_{EMM/P/RL}(p_{it}^{\kappa})$ . No cálculo de  $t$  (4.24),  $ub$  é o melhor limite superior e  $\alpha$  tem valor inicial 1 e vai decrescendo sempre que a solução de Lagrange  $v_{EMM/P/RL}(p_{it}^{\kappa})$  não for melhorada em um determinado número de passos.

$$p_{i1}^{\kappa+1} = \max\{0, p_{i1}^{\kappa} - t(\sum_{k=1}^m w_{ik}^r + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^m z v_{i,j,1,k}^{\kappa} - 1)\} \quad \forall i \in I \quad (4.22)$$

$$p_{it}^{\kappa+1} = \max\{0, p_{it}^{\kappa} - t(\sum_{j=1}^r \sum_{k=t}^m z v_{ijtk}^{\kappa} - w_{i,t-1}^{\kappa} - \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{t-1} z v_{ijk,t-1}^{\kappa})\} \quad \forall i, t/\{1\} \quad (4.23)$$

$$t_k = \frac{\alpha(ub - v_{EMM/P/RL}(p_{it}^{\kappa}))}{\sum_{i=1}^n (\sum_{k=1}^m w_{ik}^{\kappa} + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^m z v_{i,j,1,k}^{\kappa} - 1)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{t=2}^m (\sum_{j=1}^r \sum_{k=t}^m z v_{ijtk}^{\kappa} - w_{i,t-1}^{\kappa} - \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{t-1} z v_{ijk,t-1}^{\kappa})^2} \quad (4.24)$$

Para iniciar o método, fixamos as variáveis duais em zero ( $p_{it}^0 = 0$ ) e o tamanho do passo na direção do subgradiente é proporcional a um parâmetro  $\alpha$ , que deve decrescer com o número de iterações e a regra utilizada para gerar uma sequência decrescente para  $\alpha$  é caracterizada pelos parâmetros  $(\alpha_0, r_0, d)$ . Os valores de  $\alpha$  são obtidos fazendo  $\alpha = \alpha_0$  e é diminuído progressivamente multiplicando-o por um parâmetro  $d$ , se a solução Lagrangiana  $v_{EMM/P/RL}$  não for melhorada nas últimas  $r = r_0$  iterações. Além disso, o limite superior  $ub$  é um número grande fixado. Os valores utilizados para os parâmetros são  $(1, 50, 0.7)$  e são realizadas 5000 iterações do método.

Para qualquer conjunto de multiplicadores positivos  $p_{it}$ , o valor de  $v_{EMM/P/RL}(p_{it}^{\kappa})$  fornece um limite inferior sobre o valor ótimo  $v_{EMM}$ . O melhor limite inferior de Lagrange possível é chamado de Dual Lagrangiano:  $v_{EMM/P/DL} = \max_{p_{it} \geq 0} (v_{EMM/P/RL}(p_{it}^{\kappa}))$ . Tem-se as seguintes propriedades que relacionam os problemas duais Lagrangiano:

**Propriedade 4.1.**  $\bar{v}_{CLM} \leq v_{CLM/I/DL} = \bar{v}_{EMM} = v_{EMM/I/DL} \leq v_{EMM/P/DL}$ .

Demonstração: A primeira desigualdade segue diretamente do Teorema 3.3. A equivalência entre  $v_{CLM/I/DL}$  e  $\bar{v}_{EMM}$  é estabelecida pelo fato de que ambas as formulações descrevem o envoltório convexo do problema de dimensionamento de lotes em máquinas paralelas com único item. Além disso, aplicar a decomposição por item na formulação  $EMM$  não irá melhorar o limite inferior, pois os subproblemas tem a propriedade de integralidade, isto estabelece a igualdade entre  $\bar{v}_{EMM}$  e  $v_{EMM/I/DL}$ . Finalmente, aplicando a decomposição por períodos a formulação  $EMM$ , resultará num limite inferior melhor ou igual, já que, o subproblema não tem a propriedade de integralidade.

**Propriedade 4.2.**  $\bar{v}_{CLM} \leq v_{CLM/P/DL} \leq v_{EMM/P/DL}$ .

A primeira desigualdade segue novamente do Teorema 3.3. A prova para a segunda desigualdade é semelhante a prova fornecida por Chen e Thizy (1990) para o problema com única máquina sem tempos de preparação. Um ponto factível  $(zv_{ijtk}, w_{it}, y_{ijt})$  do modelo *EMM* com a decomposição por períodos satisfaz as restrições de fluxo (2.23) e (2.24) e está contido no envoltório convexo de (2.25) – (2.28). O ponto corresponde no espaço  $(x_{ijt}, s_i, s_{it}, y_{ijt})$  irá satisfazer as restrições de demanda (2.18) e estará contido no envoltório convexo de (2.19) – (2.21). O inverso não é verdadeiro. Detalhes desta prova pode ser encontrado em Jans e Degraeve (2004).

### 4.3 Resolvendo os Subproblemas

Nesta seção, vamos discutir um algoritmo *branch-and-bound* específico para resolver o subproblema (4.11) – (4.14), maiores detalhes podem ser encontrados em Jans (2002). A relaxação linear do subproblema pode ser resolvida com um algoritmo para o problema linear da mochila de múltipla escolha, este problema é uma extensão para o problema da mochila binário, em que os itens são divididos em algumas classes disjuntas. O problema é escolher exatamente um item de cada classe para que o lucro total seja maximizado sem exceder a capacidade da mochila, a relaxação deste problema é chamada de problema linear da mochila de múltipla escolha (*linear multiple choice knapsack problem* (LMCKP)). Sinha e Zoltners (1979) e Pisinger (1995) apresentam algumas definições básicas e propriedades para este problema. A relaxação do subproblema (4.11) – (4.14) é um LMCKP. As restrições de preparação (4.13) tornam-se restrições de igualdade na relaxação, pois, as variáveis de preparação tem um custo  $sc_{ijt}$  positivo e um tempo de preparação (*setup time*)  $st_{ijt}$  também positivo neste problema de minimização. Portanto, podemos substituir a variáveis de preparação. O subproblema para o período  $t$  e máquina  $j$  agora contém as restrições de capacidade (4.26) e o limite superior generalizado derivado do limite superior de uma das variáveis  $y_{ijt}$  (4.27):

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n \sum_{k=t}^{m-1} (sc_{ijt} + cv_{ijtk} - p_{it} + p_{i,k+1})zv_{ijtk} + \sum_{i=1}^n (sc_{ijt} + cv_{ijtm} - p_{it})zv_{ijtm} \quad (4.25)$$

Sujeito a :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=t}^m (st_{ijt} + vt_{ijt}sd_{itk})zv_{ijtk} \leq Cap_{jt} \quad (4.26)$$

$$\sum_{k=t}^m zv_{ijtk} \leq 1 \quad \forall i \in I \quad (4.27)$$

$$zv_{ijtk} \geq 0 \quad \forall i \in I \quad \forall k \in T, k \geq t \quad (4.28)$$

As classes no *LMCKP* correspondem aos diferentes itens. As restrições (4.27) podem ser transformadas em restrições de igualdade de múltipla escolha, incluindo uma variável artificial em cada classe com custo e utilização da capacidade igual a zero. Esta variável é a variável de folga da restrição original (4.27).

Jans e Degraeve (2004) desenvolveram um algoritmo *branch-and-bound* para resolver o subproblema (4.11) – (4.14). Em cada nó resolve-se um problema do tipo *LMCKP*. Usamos um algoritmo guloso (Sinha e Soltners 1979) que resolve o *LMCKP* até a otimalidade. A estrutura *LMCKP* permanece após as ramificações. Defina:

**B1**: conjunto dos itens para os quais a variável de preparação é definida como um durante a ramificação.

**B0**: conjunto dos itens para os quais a variável de preparação é definida como zero durante a ramificação.

**NB**: conjunto dos itens para os quais nenhuma decisão de ramificação foi feito ainda, =  $I/\{B1 \cup B0\}$ .

Depois de ramificar, o problema é o seguinte:

$$\begin{aligned} Min \sum_{i \in B1} sc_{ijt} + \sum_{i \in B1} \sum_{k=t}^{m-1} (cv_{ijtk} - p_{it} + \pi_{i,k+1})zv_{ijtk} + \sum_{i \in B1} (cv_{ijtm} - p_{it})zv_{ijtm} + \\ + \sum_{i \in NB} \sum_{k=t}^{m-1} (sc_{ijt} + cv_{ijtk} - p_{it} + \pi_{i,k+1})zv_{ijtk} + \sum_{i \in NB} (sc_{ijt} + cv_{ijtm} - p_{it})zv_{ijtm} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Sujeito a :

$$\sum_{i \in B1} \sum_{k=t}^m (vt_{ijt}sd_{itk})zv_{ijtk} + \sum_{i \in NB} \sum_{k=t}^m (st_{ijt} + vt_{ijt}sd_{itk})zv_{ijtk} \leq Cap_{jt} - \sum_{i \in B1} st_{ijt} \quad (4.30)$$

$$\sum_{k=t}^m zv_{ijtk} \leq 1 \quad \forall i \in B1, \forall i \in NB \quad (4.31)$$

$$\sum_{k=t}^m zv_{ijtk} \leq 0 \quad \forall i \in B0 \quad (4.32)$$

$$zv_{ijtk} \geq 0 \quad \forall i \in I \quad \forall k \in T, k \geq t \quad (4.33)$$

Para as variáveis de preparação dos itens em que nenhuma decisão de partição foi feita ainda ( $i \in NB$ ), o valor das variáveis de preparação é calculado da seguinte forma:

$\sum_{k=t}^m zv_{ijtk} = y_{ijt}$ . Em uma solução ótima do *LMCKP* há, no máximo, uma classe com variáveis com valor fracionário, chamada classe fracionária e no máximo duas variáveis são fracionárias nesta classe (Sinha e Zoltners 1979). Portanto, existe no máximo uma variável  $y_{ijt}$  fracionária em qualquer nó da árvore *B&B*, se existe tal variável fracionária  $y_{ijt}$ , primeiro investigamos o ramo onde esta variável recebe valor um e depois o ramo onde esta variável recebe valor zero e consequentemente todas variáveis de produção recebem zero. Faz-se *backtrack* se uma solução inteira é encontrada, e a estratégia utilizada para selecionar o próximo nó a ser investigado é a de busca em profundidade. O problema tem algumas propriedades especiais que ajudam a aumentar a velocidade do algoritmo:

**1.** Os coeficientes da capacidade  $vt_{ijt}sd_{ikt}$  e  $st_{ijt} + vt_{ijt}sd_{itk}$  em (4.30) são sempre positivos. Para a minimização de (4.29)–(4.33) em qualquer nó da árvore *branch-and-bound*, todas as variáveis com os valores dos coeficientes positivos podem ser definidas como zero.

**2.** Na primeira etapa do algoritmo guloso, tem-se as variáveis ordenadas em cada classe pelo aumento da utilização da capacidade. Entretanto, as variáveis  $zv_{ijtk}$  dentro de uma classe  $i$  para um período  $t$ , já estão ordenadas (fracamente) pelo aumento da utilização de capacidade:

$$st_{ijt} + vt_{ijt}sd_{itk} \leq st_{ijt} + vt_{ijt}sd_{it,k+1} \quad \forall k \in T \mid t \leq k < m$$

**3.** Em outro passo do algoritmo guloso, tem-se que determinar para cada classe o conjunto de variáveis LP-dominadas, isto é, variáveis que terão valor zero na solução ótima



---

relaxação linear. Para as demais variáveis em cada classe, calculamos o declive entre as variáveis adjacentes em cada classe usando os coeficientes do custo e capacidade. Estes cálculos são feitos no nó raiz, mas essa informação é armazenada e pode ser reutilizada em outros nós da árvore. Somente quando a variável de preparação de um item específico toma valor um os coeficientes do custo e da capacidade são alterados e nós temos que fazer estes cálculos novamente para esta classe.

## *Capítulo 5*

# *Resultados Computacionais*

Neste Capítulo, inicialmente, são apresentados os valores para gerar os dados do problema de dimensionamento de lotes em máquinas paralelas e, posteriormente, são apresentados os resultados computacionais dos limitantes inferiores encontrados utilizando a relaxação Lagrangiana aplicada a formulação *EMM* e *CLM* e ainda os resultados obtidos (limites superiores) pelo pacote de otimização CPLEX 12.2 (os problemas foram modelados com o auxílio da linguagem de modelagem AMPL e o tempo máximo de processamento fixado em 120 segundos). O procedimento descrito na Seção 4.2 *CLM/I/RL* foi implementado em Linguagem C (código fornecido pela prof. Dra Franklina Maria Bragion Toledo, co-autora no trabalho Toledo e Armentano (2006)) e o procedimento descrito na Seção 4.3 *EMM/P/RL* foi implementado em linguagem Fortran. Todos os testes foram realizados em um microcomputador AMD Turion 1.8 GHz com 3 GB de memória RAM e sistema operacional Windows XP.

### **5.1 Geração de Dados**

A geração dos exemplares terá como base o trabalho de Toledo e Armentano (2006). Para gerar e analisar os exemplares são considerados três fatores: custo de preparação, tempo de preparação da máquina e capacidade, onde, os custos de preparação e tempo de preparação podem ser altos e baixos e a capacidade pode ser normal ou apertada.

O procedimento foi testado em um total de 2880 instâncias divididas em 10 instâncias para cada configuração de número de máquinas ( $r = 2, 4, 6$ ), itens ( $n = 6, 12, 25, 50$ ) e períodos ( $m = 6, 12, 18$ ). Dividimos estas 2880 instâncias em 8 tipos diferentes de classes, ou seja, realizamos 360 testes para cada classe sendo elas:

:

- Capacidade normal, custo de preparação baixo e tempo de preparação baixo (CNSBTB);
- Capacidade normal, custo de preparação alto e tempo de preparação baixo (CNSATB);
- Capacidade normal, custo de preparação baixo e tempo de preparação alto (CNSBTA);
- Capacidade normal, custo de preparação altp e tempo de preparação alto (CNSATA);
- Capacidade apertada, custo de preparação baixo e tempo de preparação baixo (CASBTB);
- Capacidade apertada, custo de preparação alto e tempo de preparação baixo (CASATB);
- Capacidade apertada, custo de preparação baixo e tempo de preparação alto (CASBTA);
- Capacidade apertada, custo de preparação alto e tempo de preparação alto (CASATA);

Os parâmetros foram gerados em intervalos  $[a, b]$  com distribuição uniforme e denotado  $U[a, b]$ :

- custo de produção ( $vc_{ij}$ )  $U[1.5, 2.5]$
- custo de preparação ( $sc_{ij}$ )  $U[5.0, 95.0]$
- custo de estoque ( $hc_i$ )  $U[0.2, 0.4]$
- tempo de produção ( $vt_{ij}$ )  $U[1.0, 5.0]$
- tempo de preparação ( $st_{ij}$ )  $U[10.0, 50.0]$
- demanda ( $d_{it}$ )  $U[0, 180]$

Para gerar exemplares com custos de preparação alto multiplicamos os custos gerados por 10, da mesma forma, para gerar exemplares com tempos de preparação alto multiplicaremos estes por 1.5.

A capacidade foi gerada de seguinte forma: a demanda de cada item e cada período é dividida entre as máquinas e a política lote-por-lote é aplicada a cada máquina. A média é calculada sobre o número de máquinas e períodos, isso resulta na seguinte expressão para a capacidade em cada período:

$$Cap = \frac{\sum_{t=1}^m \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^n \left( \frac{d_{it}}{r} vt_{ij} + st_{ij} \right)}{rm}$$

Nesta expressão uma preparação de todos os itens é reservada para todas as máquinas e períodos, o que gera muita capacidade para cada período, principalmente para testes com quatro e seis máquinas. Testes iniciais realizados por Toledo e Armentano (2006) mostram que utilizando esta capacidade as soluções geradas utilizaram um nível de capacidade baixa, em média 70% e 65% para custos de preparação altos e baixos. A fim de gerar instâncias com a utilização da capacidade em torno de 80% para 2, 4 e 6 máquinas, utiliza-se o método dos mínimos quadrados para ajustar uma expressão linear da capacidade em função do número de máquinas:

$$Cap^* = (1.18 - 0.07r)Cap$$

A capacidade apertada é obtida multiplicando  $Cap^*$  por 0.9. Para avaliar a qualidade dos limites inferiores calcularemos os GAP da seguinte forma:

$$Gap = \frac{z_{CPLEX} - z_{RL}}{z_{RL}} * 100$$

onde:

$z_{CPLEX}$  é o valor da solução encontrada pelo CPLEX;

$z_{RL}$  limite inferior obtido com a relaxação Lagrangiana;

## 5.2 Resultados Computacionais

Nesta seção são apresentados todos os resultados obtidos com a realização dos testes computacionais, sendo que a primeira tabela (Tabela 7) resume a dificuldade para a solução dos problemas, que são determinados pela quantidade de instâncias em que o CPLEX provou a otimalidade e a segunda tabela (Tabela 8) mostra um resumo (média) dos resultados obtidos com a geração de todos os exemplares.

A Tabela 7 apresenta a quantidade de instâncias para cada configuração, número de períodos, máquinas e itens que o CPLEX provou a otimalidade no tempo máximo de dois minutos, para cada instância, o que permite analisar a dificuldade em se obter soluções para os problemas conforme suas características. Observa-se que para problemas com 6 períodos o CPLEX provou otimalidade para quase todas as instâncias, por outro lado, para os problemas com 18 períodos, na maioria dos casos o solver não provou a otimalidade em nenhum dos exemplos. Verificamos ainda que para os problemas com capacidade normal com custos e tempos de preparação baixos, o CPLEX provou a otimalidade em todas as instâncias em 58,3% das configurações (porcentagem de configurações com o número 10 na Tabela 7, que significa que o CPLEX provou a otimalidade em todas instâncias para estas configurações) e o CPLEX não provou a otimalidade para nenhuma instância em 2,7% das configurações (porcentagem de configurações com o número 0 na Tabela 7, que significa que a CPLEX não provou a otimalidade em nenhuma instância para estas configurações). Entretanto, se considerarmos custos e tempos de preparação alto a porcentagem de configurações em que o solver provou a otimalidade para todas as instâncias cai para 13,8% e a porcentagem em que não encontra nenhuma solução sobe para 47,2%. Considerando esta mesma análise para o caso com capacidade apertada encontramos 36,1% e 5,5% para custos e tempos de preparação baixos e 8,3% e 55,5% para custos e tempos de preparação altos, o que mostra portanto, que a dificuldade dos problemas aumenta quando considera-se problemas com capacidade apertada e custos e tempos de preparação altos.

Ainda analisando a Tabela 7, conclui-se facilmente que o aumento nos custos de preparação tornam os problemas mais difíceis se comparado com o aumento dos tempos de preparação. Pode-se concluir ainda que, dentre as oito classes de problemas, as classes mais fáceis e difíceis são as CNSBTB e CASATA respectivamente, sendo que, se considerarmos a porcentagem de configurações em que o CPLEX encontrou mais do que a metade, ou seja 5, soluções ótimas a diferença é de 91,6% e 25,0%. Considerando os exemplos que o CPLEX não encontrou nenhuma solução ótima a diferença é de 2,7% e

55,5%, respectivamente.

Analisando a dificuldade em relação as configurações dos exemplares (número de itens, máquinas e períodos) verifica-se que a configuração mais difícil é com 6 itens, 6 máquinas e 18 períodos em que o solver não provou a otimalidade e nenhum exemplar para todas as 8 classes. A configuração mais fácil é a com 6 itens, 2 máquinas e 6 períodos em que, para todas as classes, foi provada a otimalidade para todos exemplares.

m	r	n	CNSBTB	CNSATB	CNSBTA	CNSATA	CASBTB	CASATB	CASBTA	CASATA	
6	2	6	10	10	10	10	10	10	10	10	
		12	10	10	10	10	10	10	10	10	
		25	10	10	10	10	10	10	10	9	
		50	10	8	10	7	10	3	10	2	
	4	6	10	10	10	10	10	10	10	10	10
		12	10	10	10	10	10	10	8	10	9
		25	10	8	10	8	10	5	10	4	
		50	10	3	10	4	10	0	9	0	
	6	6	10	9	10	8	10	9	10	10	8
		12	10	7	10	6	10	5	10	5	
		25	10	8	10	7	10	4	10	4	
		50	10	3	10	4	10	1	10	1	
12	2	6	10	8	10	6	10	5	9	5	
		12	10	6	9	5	9	5	8	5	
		25	9	3	9	0	8	0	7	0	
		50	10	0	10	0	7	0	7	0	
	4	6	8	0	8	0	7	1	5	0	
		12	8	2	8	2	6	3	7	2	
		25	10	1	10	2	8	0	7	0	
		50	10	1	10	1	8	1	7	0	
	6	6	5	0	3	0	1	0	1	0	
		12	8	0	7	0	6	0	6	0	
		25	10	0	9	0	6	0	8	0	
		50	10	0	10	0	9	0	10	0	
18	2	6	8	1	7	1	6	1	7	1	
		12	8	2	7	2	6	0	3	1	
		25	5	0	5	0	3	0	3	0	
		50	9	0	8	0	6	0	6	0	
	4	6	1	0	0	0	0	0	0	0	
		12	4	1	3	0	1	0	0	0	
		25	7	0	5	0	4	0	3	0	
		50	10	0	8	0	6	0	6	0	
	6	6	0	0	0	0	0	0	0	0	
		12	5	0	4	0	3	0	3	0	
		25	8	0	7	0	4	0	4	0	
		50	10	0	9	0	8	0	6	0	

Tabela 7: Número de soluções ótima encontradas pelo CPLEX

A Tabela 8 mostra a média de todos os *gaps* e tempos encontrados pelas duas formulações para todos os tamanhos de acordo com os três fatores abordados: capacidade, custo e tempo de preparação. Pode-se verificar que os maiores *gaps* e tempos de solução são encontradas no caso de capacidade apertada, custo de preparação alto e tempo de preparação alto (CASATA).

Observe que, apesar da razoável diferença entre os tempos, a reformulação proposta obteve limites inferiores bem melhores. Deve-se observar que, praticamente para todos os testes os *gaps* encontrados para 25 e 50 itens (como pode ser visto nas próximas tabelas), foram praticamente zero pelas duas abordagens. Portanto, décimos de diferença na média

geral podem dar uma falsa impressão de pequena melhora, o que não se concretiza ao analisarmos os resultados detalhadamente.

Ao analisar o resumo dos resultados contidos na Tabela 8, conclui-se que o método proposto *EMM/P/RL* encontrou em média *gaps* 40% melhores que o método clássico *CLM/I/LR*, confirmando a qualidade dos limites inferiores obtidos com a abordagem proposta.

A grande diferença dos tempos computacionais entre os dois métodos explica-se pela dificuldade dos subproblemas, enquanto para o método *CLM/I/RL* os subproblemas são problemas de dimensionamento de lotes com único item sem restrição de capacidade, que são baratos computacionalmente, para o método proposto *EMM/P/RL* os subproblemas que temos que resolver são problemas da mochila que são caros computacionalmente.

Capacidade/Setup	CLM/I/LR		EMM/P/LR	
	GAP	Tempo	Gap	Tempo
CNSBTB	0,53	0,88	0,27	10,03
CNSATB	3,73	1,25	2,89	15,55
CNSBTA	0,58	0,92	0,23	10,64
CNSATA	4,14	1,30	3,22	16,45
CASBTB	0,82	1,02	0,30	11,75
CASATB	5,02	1,49	4,04	20,07
CASBTA	1,12	1,09	0,47	13,55
CASATA	6,18	1,57	4,22	21,71

Tabela 8: Média de todos resultados

### 5.2.1 Resultados Detalhados para Cada Classe de Problemas

- Classe CNSBTB

Podemos verificar pela Tabela 9 que, embora o método *EMM/P/RL* necessite de mais tempo para encontrar os limites inferiores, estes, são sempre melhores que limites inferiores encontrados pelo método clássico *CLM/I/LR* mesmo nos casos com 50 itens em que o método clássico encontra *gaps* muito pequenos. Os maiores *gaps* encontrados nesta classe foram 3,14% e 1,54% para os métodos clássico e proposto respectivamente. Os *gaps* encontrados pelo método *EMM/P/RL* foi em quase todas as instâncias metade do valor encontrado por *CLM/I/RL*. Para esta classe de problemas exceto para configurações com 6 períodos todos os *gaps* encontrados são menores que um.

- Classe CNSATB

			CPLEX		CLM/I/LR			EMM/P/LR		
m	r	n	LS	Tempo	LI	GAP	Tempo	LI	GAP	Tempo
6	2	6	7742,39	0,13	7686,54	0,72	0,05	7710,36	0,41	0,63
		12	14455,32	0,31	14430,54	0,17	0,06	14440,64	0,10	1,37
		25	30288,44	2,17	30265,45	0,07	0,16	30274,38	0,04	3,79
		50	58738,93	1,94	58724,77	0,02	0,35	58733,36	0,00	6,36
	4	6	6724,21	1,49	6605,15	1,80	0,1	6675,77	0,72	0,91
		12	13398,84	1,55	13343,35	0,41	0,14	13375,82	0,17	1,92
		25	27059,14	1,19	27039,50	0,07	0,26	27053,41	0,02	3,81
		50	55160,39	2,96	55151,44	0,01	0,53	55158,16	0,00	7,70
	6	6	6888,13	4,11	6724,61	2,43	0,2	6798,84	1,31	1,17
		12	12722,56	1,69	12674,13	0,38	0,21	12704,19	0,14	2,19
		25	26328,44	1,19	26306,69	0,08	0,42	26319,36	0,03	4,25
		50	51748,36	0,92	51737,48	0,02	0,78	51740,03	0,01	8,32
12	2	6	14914,52	11,47	14819,07	0,64	0,1	14874,98	0,26	1,60
		12	28598,94	12,62	28549,44	0,17	0,17	28575,46	0,08	3,54
		25	60295,27	17,31	60272,41	0,03	0,34	60287,62	0,01	8,89
		50	117560,30	4,63	117543,80	0,01	0,81	117555,50	0,00	14,08
	4	6	13516,07	33,81	13274,35	1,82	0,27	13310,49	1,54	2,50
		12	26492,78	29,49	26391,39	0,38	0,41	26454,07	0,14	4,86
		25	54228,53	13,67	54194,68	0,06	0,73	54216,74	0,02	9,65
		50	108812,30	8,22	108792,	0,01	1,39	108805,30	0,00	18,31
	6	6	13348,60	87,32	12998,38	2,69	0,48	13209,64	1,05	3,22
		12	25280,80	39,26	25195,00	0,34	0,71	25247,63	0,13	6,02
		25	52360,82	23,46	52320,16	0,07	1,25	52348,64	0,02	12,30
		50	103527,30	5,33	103512,80	0,01	2,38	103523,50	0,00	22,87
18	2	6	22040,58	40,25	21906,50	0,61	0,19	21939,50	0,46	2,80
		12	43067,71	34,81	42979,74	0,20	0,41	43037,81	0,06	6,82
		25	89245,32	66,12	89199,43	0,05	0,74	89223,88	0,02	18,58
		50	176507,40	27,65	176479,40	0,01	1,36	176461,90	0,02	28,43
	4	6	20396,34	116,25	20022,95	1,86	0,56	20091,03	1,51	4,51
		12	39950,36	77,97	39805,60	0,36	0,87	39895,38	0,13	9,09
		25	80882,78	56,53	80837,88	0,05	1,68	80869,69	0,01	17,91
		50	162328,70	31,34	162309,20	0,01	3,23	162325,30	0,00	36,56
	6	6	20019,78	120,16	19409,86	3,14	0,97	19752,90	1,35	6,03
		12	38451,17	66,82	38314,37	0,35	1,58	38396,81	0,14	11,42
		25	78785,89	47,46	78735,85	0,06	2,74	78769,38	0,02	23,59
		50	154684,20	17,52	154660,30	0,01	5,28	154678,20	0,00	45,25

Tabela 9: Resultados Computacionais(CNSBTB)



Note que na Tabela 10 os *gaps* encontrados, principalmente, para 6 e 12 itens são bem maiores quando comparados com os da Tabela 9, chegando para 18 períodos, 6 máquinas e 6 itens a 18,01% para o método clássico e 14,19% para método proposto. Observe ainda que o CPLEX não provou a otimalidade para a grande maioria das instâncias com 12 e 18 períodos, em que os altos tempos computacionais mostram que em vários casos chegou-se ao tempo limite de execução do CPLEX que foi fixado em 120 segundos. Isso mostra um aumento da dificuldade dos problemas nos casos em que aumentamos os custos de preparação.

Nesta tabela fica mais evidente a diferença entre os limites inferiores em que na maioria das configurações a redução do gap gerado pelo método baseado na reformulação foi grande, observa-se também que os tempos computacionais aumentaram em relação a classe anterior.

- Classe CNSBTA

Analisando a Tabela 11, concluímos que, diferente do custo de preparação, o aumento do tempo de preparação não dificulta significativamente os problemas, com isso observamos que os *gaps* encontrados como no caso CNSBTB voltaram a ser pequenos assim como os tempos de solução, sendo que os únicos casos em que o CPLEX não encontrou nenhuma solução ótima foi para os casos com 18 períodos, 6 itens, 4 e 6 máquinas.

Para esta classe os maiores *gaps* encontrados para os dois métodos são de 3,49% para o clássico e 1,35% para o proposto, sendo que apenas em 2 das 36 possíveis configurações, o método proposto encontrou *gaps* maiores que 1,00%, o que mostra a eficiência da técnica para esta classe.

- Classe CNSATA

Os resultados da Tabela 12 são semelhantes aos da Tabela 10 em que foram encontrados *gaps* altos, um destaque em relação a qualidade dos limites inferiores obtidos pelo método proposto em relação ao clássico pode ser observado para o caso de 6 períodos, 2 máquinas e 6 itens em que o gap encontrado pelo método clássico (8,17%) é maior que o dobro encontrado pelo método proposto (3,73%).

Para esta classe os maiores *gaps* encontrados foram de 22,60% e 20,28% para os métodos *CLM/I/RL* e *EMM/P/RL* respectivamente. A quantidade de configurações que o método proposto encontrou *gaps* maiores que 1,00% foi 16, muito maior que no caso de apenas tempos de preparação alto que eram somente 2.

			CPLEX		CLM/I/LR			EMM/P/LR		
m	r	n	LS	Tempo	LI	GAP	Tempo	LI	GAP	Tempo
6	2	6	13672,09	0,84	12859,32	6,32	0,05	13202,48	3,43	0,82
		12	24487,18	2,11	24090,94	1,64	0,08	24244,79	0,98	2,09
		25	50844,82	13,13	50603,94	0,47	0,23	50694,65	0,29	7,73
		50	97745,43	69,19	97631,52	0,27	0,74	97793,49	0,11	21,49
	4	6	11063,14	4,86	10034,90	10,24	0,11	10414,30	5,86	1,01
		12	20515,31	15,69	20059,74	2,27	0,18	20274,78	1,17	2,20
		25	41019,17	48,61	40818,45	0,49	0,38	40930,19	0,21	5,65
		50	83486,66	98,40	83432,76	0,22	1,08	83518,58	0,12	13,06
	6	6	11491,80	45,85	9993,48	14,99	0,21	10355,27	9,88	1,41
		12	19290,97	49,66	18670,88	3,32	0,29	18943,39	1,80	2,59
		25	39085,53	77,36	38816,75	0,69	0,58	38953,85	0,33	6,18
		50	75626,90	99,18	75534,30	0,12	1,31	75593,80	0,04	11,66
12	2	6	24775,37	48,87	23283,43	6,40	0,16	23781,14	4,01	2,05
		12	44890,83	61,75	44282,30	1,37	0,28	44573,05	0,70	5,03
		25	93932,73	100,41	93696,89	0,25	0,65	93838,40	0,10	18,48
		50	181907,30	120,31	181708,30	0,10	1,51	181925,20	0,00	39,02
	4	6	21566,95	120,12	19286,97	11,82	0,31	19654,85	8,86	2,89
		12	39499,80	99,91	38500,71	2,59	0,57	38827,27	1,70	5,77
		25	79294,56	113,50	78981,96	0,39	1,06	79150,66	0,18	13,17
		50	159264,90	116,15	159026,40	0,14	2,15	159156,00	0,06	28,26
	6	6	21870,09	120,10	18652,50	17,25	0,56	18765,88	14,19	4,08
		12	37438,41	120,18	36201,58	3,41	0,99	36546,69	2,38	7,19
		25	75838,95	120,30	75305,25	0,70	1,82	75582,08	0,33	16,36
		50	147764,10	120,46	147581,10	0,12	3,45	147699,50	0,04	30,86
18	2	6	35624,26	111,24	33111,33	7,58	0,35	33152,60	6,93	3,31
		12	66086,89	104,51	65291,05	1,21	0,55	65699,10	0,58	8,21
		25	136164,90	120,24	135641,80	0,38	1,14	135867,90	0,21	28,28
		50	267087,30	120,33	266772,70	0,11	2,53	266968,00	0,04	68,73
	4	6	32326,21	120,12	28672,58	12,74	0,66	28842,72	10,77	5,47
		12	59221,14	115,20	57435,41	3,10	1,15	57766,87	2,45	10,68
		25	117211,00	120,35	116669,90	0,46	2,12	116952,00	0,22	24,62
		50	235106,90	120,60	234953,50	0,15	4,25	235151,30	0,03	54,29
	6	6	33214,92	120,14	28145,79	18,01	1,29	28642,91	13,76	7,82
		12	56461,24	120,30	54343,71	3,89	2,02	55037,62	2,52	13,19
		25	113202,20	120,48	112245,60	0,85	3,70	112650,30	0,48	30,38
		50	219164,00	120,82	218897,80	0,12	6,78	219055,60	0,04	55,93

Tabela 10: Resultados Computacionais(CNSATB)

			CPLEX		CLM/I/LR			EMM/P/LR		
m	r	n	LS	Tempo	LI	GAP	Tempo	LI	GAP	Tempo
6	2	6	7757,18	0,20	7695,62	0,80	0,05	7728,26	0,37	0,69
		12	14478,76	0,79	14445,53	0,23	0,07	14458,54	0,13	1,36
		25	30316,67	2,20	30292,95	0,07	0,15	30301,93	0,04	4,02
		50	58773,92	1,92	58755,59	0,03	0,42	58766,50	0,01	8,13
	4	6	6742,77	2,45	6613,765	1,95	0,11	6690,09	0,78	0,96
		12	13409,67	1,72	13353,45	0,42	0,14	13388,97	0,15	2,01
		25	27070,69	1,93	27048,30	0,08	0,27	27064,36	0,02	4,23
		50	55168,33	2,39	55158,94	0,01	0,19	55165,91	0,00	8,53
	6	6	6905,19	4,53	6732,30	2,56	0,22	6833,99	1,04	1,21
		12	12728,17	1,27	12678,15	0,39	0,23	12711,18	0,13	2,24
		25	26338,03	2,04	26312,93	0,09	0,43	26327,40	0,04	4,48
		50	51752,75	1,43	51741,53	0,02	0,8	51749,58	0,00	8,73
12	2	6	14941,45	7,35	14827,00	0,77	0,11	14898,46	0,28	1,74
		12	28620,85	15,07	28570,66	0,17	0,2	28597,40	0,08	3,97
		25	60326,18	24,21	60297,71	0,04	0,35	60314,14	0,01	10,45
		50	117595,70	8,47	117575,40	0,01	0,86	117589,50	0,00	15,93
	4	6	13551,82	37,96	13290,87	1,96	0,28	13449,86	0,75	2,58
		12	26520,41	31,25	26408,45	0,42	0,41	26478,70	0,15	5,08
		25	54239,24	10,47	54207,21	0,05	0,79	54228,96	0,01	10,32
		50	108825,50	20,51	108802,80	0,02	1,75	108816,20	0,00	19,31
	6	6	13382,38	100,12	13007,96	2,87	0,5	13223,32	1,20	3,27
		12	25301,46	51,65	25204,66	0,38	0,73	25264,35	0,14	6,22
		25	52375,80	41,75	52329,61	0,08	1,36	52360,07	0,03	12,67
		50	103533,00	6,63	103516,70	0,01	2,35	103528,80	0,00	23,50
18	2	6	22081,13	46,91	21925,32	0,71	0,21	22004,42	0,34	2,91
		12	43110,97	48,22	42957,94	0,35	0,41	43074,84	0,08	7,49
		25	89283,51	67,26	89236,06	0,05	0,8	89261,62	0,02	20,69
		50	176549,60	34,40	176519,30	0,01	1,66	176510,60	0,02	33,08
	4	6	20442,22	120,10	20045,14	1,98	0,56	20282,53	0,78	4,59
		12	39991,93	94,14	39826,72	0,41	0,92	39928,37	0,15	9,38
		25	80905,20	69,07	80854,75	0,06	1,65	80890,28	0,01	18,93
		50	162347,20	45,93	162320,80	0,01	3,37	162340,90	0,00	37,96
	6	6	20099,56	120,17	19421,69	3,49	0,91	19831,39	1,35	6,13
		12	38475,32	79,21	38326,20	0,38	1,6	38418,68	0,14	11,63
		25	78802,69	55,56	78747,17	0,07	2,83	78784,09	0,02	23,77
		50	154693,60	23,74	154666,20	0,01	5,55	154686,20	0,00	44,73

Tabela 11: Resultados Computacionais(CNSBTA)

			CPLEX		CLM/I/LR			EMM/P/LR		
m	r	n	LS	Tempo	LI	GAP	Tempo	LI	GAP	Tempo
6	2	6	13847,47	0,93	12801,53	8,17	0,05	13348,71	3,73	0,87
		12	24758,92	3,86	24320,60	1,80	0,09	24490,48	1,09	2,29
		25	51256,85	16,52	51018,63	0,46	0,23	51111,52	0,28	7,98
		50	98530,26	62,47	98428,05	0,10	0,84	98599,23	0,10	28,32
	4	6	11171,70	5,35	9997,58	11,74	0,11	10376,03	7,66	1,04
		12	20591,66	12,70	20179,31	2,04	0,18	20369,20	1,09	2,35
		25	41168,77	44,45	40954,24	0,52	0,41	41071,33	0,23	6,13
		50	83729,05	95,02	83680,99	0,24	1,08	83769,63	0,13	14,29
	6	6	11556,68	38,92	10076,09	14,69	0,21	10253,39	12,71	1,44
		12	19355,15	60,94	18716,41	3,41	0,30	19009,20	1,81	2,69
		25	39153,19	69,64	38888,53	0,68	0,60	39032,09	0,31	6,54
		50	75746,05	96,20	75648,99	0,12	1,33	75709,97	0,04	12,09
12	2	6	25032,58	71,92	23192,69	7,93	0,18	23975,13	4,41	2,22
		12	45163,22	74,35	44501,52	1,48	0,28	44781,76	0,85	5,42
		25	94386,10	120,13	94127,97	0,27	0,65	94267,51	0,12	19,01
		50	182686,80	120,24	182488,20	0,20	1,57	182717,90	0,07	46,14
	4	6	21708,21	120,09	19325,92	12,32	0,33	19638,37	10,53	3,01
		12	39656,73	106,59	38577,17	2,79	0,59	38910,41	1,91	5,92
		25	79479,71	105,37	79116,16	0,45	1,13	79296,92	0,23	13,62
		50	159464,20	112,88	159243,30	0,13	2,29	159383,10	0,05	30,18
	6	6	22116,17	120,11	18693,52	18,30	0,58	18887,27	17,09	4,09
		12	37489,30	120,17	36252,18	3,41	0,98	36568,21	2,51	7,34
		25	75986,24	120,42	75380,71	0,80	1,91	75669,03	0,41	16,87
		50	147890,70	120,42	147691,30	0,13	3,51	147813,30	0,05	32,23
18	2	6	35945,12	111,35	33052,56	8,75	0,36	33502,22	7,29	3,44
		12	66311,99	110,00	65211,82	1,68	0,59	65945,44	0,55	8,87
		25	136573,50	120,24	136028,90	0,40	1,20	136280,30	0,21	29,86
		50	267962,80	120,33	267502,70	0,17	2,89	267717,00	0,09	70,81
	4	6	32597,09	120,09	28590,43	14,01	0,69	28675,40	13,67	5,58
		12	59309,68	120,25	57331,39	3,45	1,21	57752,37	2,69	10,88
		25	117351,50	120,36	116796,10	0,47	2,18	117082,60	0,22	25,47
		50	235363,20	120,56	235190,40	0,17	4,47	235395,70	0,09	55,58
	6	6	34119,67	120,13	27828,97	22,60	1,21	28365,75	20,28	8,08
		12	56599,13	120,31	54393,68	4,05	2,06	54932,37	3,03	13,44
		25	113318,80	120,48	112330,00	0,88	3,71	112744,10	0,50	30,94
		50	219289,60	120,85	219011,50	0,12	6,93	219172,50	0,05	57,27

Tabela 12: Resultados Computacionais(CNSATA)

- Classe CASBTB

Na Tabela 13 em que começa a análise dos exemplos com capacidade apertada, observamos que para todos os exemplares os *gaps* com o método *EMM/P/LR* foram reduzidos pela metade em relação ao método clássico, mostrando que para exemplos com capacidade apertada a tendência é que a diferença entre a qualidade dos limites inferiores aumente.

Entretanto, como no caso com capacidade normal, esta classe encontrou *gaps* muito baixos sendo, a grande maioria, menor que um, e os maiores *gaps* encontrados pelas duas abordagens foram 4,08% e 1,73% respectivamente. O CPLEX não encontrou nenhuma solução ótima para apenas 2 das 36 configurações possíveis.

m	r	n	CPLEX		CLM/I/LR			EMM/P/LR		
			LS	Tempo	LI	GAP	Tempo	LI	GAP	Tempo
6	2	6	7807,49	0,49	7725,00	1,06	0,08	7762,68	0,57	0,79
		12	14510,3	0,42	14476,31	0,23	0,07	14495,40	0,10	1,89
		25	30391,02	4,12	30321,69	0,22	0,20	30375,78	0,05	5,38
		50	58862,85	4,63	58844,04	0,03	0,46	58852,47	0,01	10,26
	4	6	6800,17	3,10	6603,56	2,97	0,11	6726,85	1,08	0,99
		12	13452,95	2,65	13368,19	0,63	0,15	13425,20	0,20	2,11
		25	27101,79	2,19	27074,01	0,10	0,31	27092,87	0,03	4,67
		50	55198,16	6,12	55184,14	0,02	0,64	55194,56	0,00	9,00
	6	6	6954,06	16,85	6729,79	3,33	0,23	6868,49	1,24	1,21
		12	12755,61	2,61	12690,69	0,51	0,24	12730,96	0,19	2,33
		25	26361,84	3,55	26329,98	0,12	0,44	26349,56	0,04	4,80
		50	51768,49	1,65	51753,15	0,02	0,89	51764,11	0,00	9,53
12	2	6	15035,89	15,49	14773,30	1,77	0,14	14956,09	0,53	1,92
		12	28715,82	21,16	28593,27	0,42	0,27	28670,87	0,15	4,65
		25	60424,38	47,92	60345,75	0,13	0,57	60409,77	0,02	12,99
		50	117696,40	42,87	117670,70	0,02	1,01	117685,10	0,00	9,23
	4	6	13658,76	55,24	13273,47	2,90	0,30	13533,48	0,92	2,59
		12	26593,90	57,45	26458,90	0,51	0,48	26545,65	0,18	5,38
		25	54297,70	39,96	54246,50	0,09	0,88	54277,12	0,03	11,43
		50	108865,70	36,38	108836,00	0,02	1,71	108853,00	0,01	22,49
	6	6	13478,64	109,04	12963,82	3,97	0,57	13277,63	1,51	3,29
		12	25357,04	54,75	25232,44	0,49	0,79	25310,82	0,18	6,42
		25	52424,06	59,65	52368,02	0,10	1,54	52406,74	0,03	13,62
		50	103559,20	20,53	103535,20	0,02	2,64	103551,90	0,00	24,68
18	2	6	22195,69	63,38	21929,01	1,21	0,25	22096,75	0,44	3,12
		12	43236,42	75,80	42925,60	0,72	0,50	43182,39	0,12	8,16
		25	89427,47	95,96	89356,91	0,07	1,00	89387,02	0,04	24,14
		50	176680,70	62,19	176642,20	0,02	1,94	176608,10	0,04	44,90
	4	6	20592,25	120,18	20100,45	2,44	0,57	20373,28	1,07	4,63
		12	40128,42	114,05	39899,44	0,57	1,06	40037,45	0,22	9,90
		25	80978,99	84,14	80912,38	0,08	1,83	80959,14	0,02	20,85
		50	162415,10	68,21	162374,60	0,02	3,94	162399,20	0,00	44,75
	6	6	20256,29	120,16	19461,13	4,08	1,04	19911,43	1,73	6,18
		12	38543,23	91,56	38365,27	0,46	1,76	38483,23	0,15	11,93
		25	78881,95	96,19	78789,90	0,11	3,22	78847,88	0,04	24,73
		50	154728,00	60,30	154695,50	0,02	5,07	154719,40	0,00	47,95

Tabela 13: Resultados Computacionais(CASBTB)

- Classe CASATB

A Tabela 14 confirma a tese levantada na classe com capacidade normal de que o aumento do custo de preparação dificulta muito a resolução dos problemas, pois o número de instâncias em que o CPLEX encontra a solução ótima diminui significativamente e a qualidade dos limites inferiores nas duas abordagens também diminui, principalmente para os casos com 6 e 12 itens.

Os maiores *gaps* encontrados foram 24,26% e 24,20% para os métodos *CLM/I/RL* e *EMM/P/RL*, respectivamente. Apesar desta diferença ser pequena, em algumas configurações as diferenças foram grandes como por exemplo 7,38% contra 4,03% para o caso de 6 períodos, 2 máquinas e 6 itens e 11,05% contra 4,63% para 12 períodos, 2 máquinas e 6 itens. O CPLEX não encontrou nenhuma solução ótima em 19 configurações.

- Classe CASBTA

Podemos verificar na Tabela 15 que exceto para o caso com 6 itens, ambas as formulações encontram *gaps* abaixo de 1%, mostrando que ambas as abordagens encontram bons limites inferiores para estes casos, porém as diferenças continuam grandes entre os *gaps*, tanto que, em apenas uma configuração o gap encontrado pelo método clássico não é pelo menos o dobro do que o encontrado pelo método proposto.

- Classe CASATA

Por fim, encontra-se na Tabela 16 o maior gap entre todos os testes realizados que é de 25,92% e 25,67% respectivamente para os métodos *CLM/I/LR* e *EMM/P/LR*. Isso ocorre para o caso com 18 períodos, 6 máquinas e 6 itens. Observe também que nesta tabela encontramos as maiores diferenças entre os limites inferiores como por exemplo, na configuração com 12 períodos, 2 máquinas e 6 itens em que o método clássico encontrou um *gap* de 15,92% o proposto 3,99%. Pode-se observar também que, em 25 configurações, os tempos do CPLEX foram maiores que 100 segundos, o que mostra que na grande maioria dos casos para esta classe encontramos nenhuma ou apenas uma solução ótima utilizando o CPLEX o que demonstra a grande complexidade desta classe de problemas.

			CPLEX		CLM/I/LR			EMM/P/LR		
m	r	n	LS	Tempo	LI	GAP	Tempo	LI	GAP	Tempo
6	2	6	14381,95	1,72	13393,01	7,38	0,07	13824,49	4,03	0,94
		12	25373,76	4,79	24621,84	3,05	0,10	25082,83	1,15	2,75
		25	52475,64	40,39	52149,19	0,62	0,29	52266,80	0,39	9,50
		50	100666,50	101,28	100540,90	0,29	0,99	100693,50	0,14	32,82
	4	6	11456,51	12,29	10018,98	14,34	0,12	10381,07	10,35	1,09
		12	20944,16	63,47	20364,43	2,86	0,22	20593,87	1,60	2,52
		25	41631,63	89,98	41347,32	0,68	0,45	41490,14	0,34	6,90
		50	84471,40	120,18	84377,69	0,11	1,29	84472,38	0,00	17,42
	6	6	11804,57	41,97	10045,12	17,51	0,23	10279,40	14,83	1,47
		12	19561,76	68,32	18839,60	3,83	0,33	19157,58	2,10	2,74
		25	39460,65	95,62	39116,09	0,88	0,69	39272,91	0,47	6,66
		50	76129,44	111,22	75993,83	0,17	1,47	76072,48	0,07	13,87
12	2	6	25983,26	87,49	23397,71	11,05	0,20	24831,60	4,63	2,50
		12	46047,47	86,94	44684,44	3,05	0,34	45465,59	1,27	6,53
		25	95772,97	120,12	95262,02	0,53	0,88	95467,87	0,31	24,03
		50	184950,70	120,23	184706,60	0,13	2,35	184878,40	0,03	59,41
	4	6	22319,96	115,76	19629,26	13,70	0,35	19841,32	12,49	3,06
		12	40156,89	102,01	38818,50	3,44	0,66	39160,54	2,54	6,30
		25	80086,56	120,22	79541,38	0,68	1,33	79784,22	0,37	16,46
		50	160155,00	111,90	159886,40	0,16	2,62	160018,90	0,08	37,82
	6	6	22946,90	120,07	18696,69	22,73	0,63	18754,09	22,35	4,40
		12	38008,71	120,14	36417,64	4,36	1,08	36524,86	4,06	7,80
		25	76470,26	120,28	75641,31	1,09	2,00	76017,84	0,59	18,18
		50	148384,90	120,57	148057,40	0,22	3,79	148199,70	0,12	33,95
18	2	6	37035,01	114,39	33162,00	11,67	0,43	33794,12	9,59	3,86
		12	67435,82	120,10	65735,42	2,58	0,80	66137,38	1,96	10,38
		25	138155,20	120,23	137249,90	0,65	1,70	137565,90	0,42	39,68
		50	270475,60	120,34	269851,40	0,23	3,86	270032,50	0,16	114,12
	4	6	33548,32	120,08	28713,87	16,83	0,73	29128,15	15,17	5,80
		12	60176,46	120,20	57806,86	4,09	1,37	57826,44	4,06	11,40
		25	118069,80	120,33	117203,60	0,73	2,54	117544,30	0,44	28,61
		50	236379,60	120,56	235943,00	0,18	4,96	236143,40	0,09	69,37
	6	6	35041,17	120,12	28199,1	24,26	1,20	28213,28	24,20	8,25
		12	57340,11	120,30	54601,02	5,01	2,35	55119,33	4,02	13,98
		25	114116,20	120,50	112632,30	1,31	4,24	113166,20	0,83	32,96
		50	219966,20	120,87	219412,40	0,25	7,19	219607,80	0,16	64,90

Tabela 14: Resultados Computacionais(CASATB)

			CPLEX		CLM/I/LR			EMM/P/LR		
m	r	n	LS	Tempo	LI	GAP	Tempo	LI	GAP	Tempo
6	2	6	7835,24	0,40	7711,14	1,60	0,08	7790,79	0,57	0,86
		12	14545,76	0,66	14439,16	0,73	0,09	14524,41	0,14	2,28
		25	30445,88	4,18	30360,88	0,27	0,23	30426,32	0,06	6,43
		50	58936,84	7,42	58916,04	0,03	0,49	58926,22	0,01	12,57
	4	6	6828,30	3,33	6619,03	3,16	0,13	6746,43	1,21	1,04
		12	13489,14	6,83	13381,47	0,80	0,20	13446,86	0,31	2,23
		25	27120,31	7,09	27087,00	0,12	0,34	27108,18	0,04	5,10
		50	55212,66	13,35	55199,61	0,02	0,64	55209,21	0,00	10,49
	6	6	6981,90	20,75	6743,38	3,53	0,23	6889,93	1,33	1,26
		12	12765,74	3,03	12696,72	0,54	0,24	12740,64	0,19	2,41
		25	26374,18	4,74	26339,02	0,13	0,45	26359,96	0,05	5,05
		50	51775,64	3,92	51759,05	0,03	0,89	51771,28	0,00	9,92
12	2	6	15167,19	19,91	14816,75	2,36	0,15	15008,73	1,05	2,12
		12	28773,61	35,39	28541,28	0,81	0,29	28714,64	0,20	5,12
		25	60486,20	67,40	60391,81	0,15	0,69	60463,18	0,03	14,91
		50	117775,80	51,15	117747,50	0,02	1,17	117761,70	0,01	30,65
	4	6	13696,88	73,40	13244,15	3,41	0,33	13573,13	0,91	2,68
		12	26628,43	53,60	26483,71	0,54	0,52	26575,61	0,19	5,69
		25	54326,77	59,62	54266,37	0,11	0,94	54302,71	0,04	12,27
		50	108889,50	48,21	108854,30	0,03	1,73	108875,40	0,01	25,19
	6	6	13535,00	109,10	12932,20	4,66	0,54	13312,55	1,67	3,38
		12	25385,79	60,44	25247,12	0,54	0,78	25335,79	0,19	6,69
		25	52442,10	54,37	52383,08	0,11	1,58	52424,31	0,03	14,20
		50	103571,90	20,15	103544,10	0,02	2,71	103564,20	0,00	26,36
18	2	6	23284,31	80,35	21959,17	6,03	0,27	22183,04	4,96	3,40
		12	43310,55	96,11	42949,82	0,83	0,54	43244,64	0,15	9,00
		25	89507,75	91,56	89320,30	0,20	1,42	89457,12	0,05	27,86
		50	176774,40	75,87	176731,60	0,02	2,21	176709,20	0,03	57,19
	4	6	20659,59	120,12	20064,69	2,96	0,61	20423,83	1,15	4,75
		12	40180,63	120,23	39933,38	0,61	1,08	40085,93	0,23	10,46
		25	81019,56	101,52	80941,51	0,09	1,89	80991,77	0,03	22,00
		50	162450,70	74,14	162403,20	0,02	3,92	162430,50	0,01	49,96
	6	6	20342,99	120,13	19372,54	5,00	1,02	19965,55	1,89	6,31
		12	38581,94	98,15	38382,61	0,51	1,77	38511,13	0,18	12,27
		25	78903,27	99,64	78808,16	0,12	3,17	78869,92	0,04	25,78
		50	154743,40	62,31	154708,20	0,02	6,13	154721,60	0,01	49,85

Tabela 15: Resultados Computacionais(CASBTA)



			CPLEX		CLM/I/LR			EMM/P/LR		
m	r	n	LS	Tempo	LI	GAP	Tempo	LI	GAP	Tempo
6	2	6	14654,76	1,25	13028,03	12,48	0,07	14077,25	4,10	1,03
		12	25846,33	3,95	24876,94	3,89	0,12	25480,63	1,43	3,09
		25	53194,92	45,91	51688,29	2,91	0,32	52953,89	0,45	10,04
		50	102070,40	113,28	101912,80	0,35	1,10	102109,60	0,16	30,88
	4	6	11626,38	9,49	10139,84	14,66	0,14	10421,38	11,56	1,15
		12	21112,92	56,86	20194,55	4,54	0,21	20717,81	1,90	2,62
		25	41877,94	89,73	41547,55	0,79	0,50	41695,29	0,43	7,94
		50	84808,97	120,15	84728,47	0,31	1,35	84826,53	0,20	19,84
	6	6	11912,87	46,98	9973,57	19,44	0,21	10405,38	14,48	1,50
		12	19626,04	73,42	18894,15	3,87	0,34	19206,63	2,18	2,81
		25	39563,88	91,19	39215,66	0,88	0,71	39376,86	0,47	6,99
		50	76282,03	117,85	76137,23	0,19	1,43	76229,45	0,06	15,44
12	2	6	26409,00	82,48	22780,69	15,92	0,21	25395,68	3,99	2,69
		12	46459,27	80,22	44612,82	4,13	0,39	45840,77	1,34	7,02
		25	96429,49	120,16	92673,45	4,05	1,03	96141,33	0,29	27,16
		50	186411,10	120,24	186029,00	0,20	2,62	186225,80	0,09	75,47
	4	6	22707,05	120,11	19241,55	18,01	0,35	19993,12	13,57	3,17
		12	40307,97	111,66	38931,92	3,53	0,70	39334,22	2,47	6,64
		25	80348,69	120,30	79461,87	1,11	1,42	80003,10	0,43	17,76
		50	160527,70	120,39	160185,30	0,21	2,86	160319,30	0,12	39,15
	6	6	23329,34	120,10	18739,76	24,49	0,65	19131,86	21,93	4,57
		12	38220,38	120,20	36416,03	4,95	1,15	36674,13	4,21	7,97
		25	76582,67	120,33	75743,15	1,10	2,16	76134,29	0,58	19,21
		50	148479,90	120,44	148204,30	0,18	3,92	148355,80	0,08	36,02
18	2	6	38503,40	115,74	33262,77	15,75	0,45	34595,40	11,29	4,05
		12	67902,10	115,79	65591,97	3,52	0,84	67121,72	1,16	11,04
		25	138857,10	120,29	136834,20	1,47	1,84	138280,70	0,41	42,81
		50	271828,60	120,37	271191,10	0,23	4,39	271409,80	0,15	130,60
	4	6	33924,38	120,11	28630,01	18,49	0,73	29060,25	16,73	5,89
		12	60527,77	120,24	57127,63	5,95	1,41	58594,38	3,29	12,06
		25	118219,40	120,35	117377,30	0,71	2,60	117734,60	0,41	30,00
		50	236745,70	120,61	235889,90	0,36	5,18	236488,60	0,10	70,86
	6	6	35520,03	120,15	28207,56	25,92	1,29	28263,98	25,67	8,50
		12	57987,43	120,36	54668,55	6,07	2,38	55165,84	5,11	14,24
		25	114320,30	120,53	112751,70	1,39	4,29	113302,00	0,89	34,17
		50	220194,30	120,76	219572,30	0,28	7,34	219784,70	0,18	67,26

Tabela 16: Resultados Computacionais(CASATA)

## *Capítulo 6*

### *Conclusão e Trabalhos Futuros*

Neste trabalho foi estudado um problema de dimensionamento de lotes capacitado em máquinas paralelas. O trabalho foi inspirado em Jans e Degraeve (2004), em que os autores analisam os limites inferiores do problema de dimensionamento de lotes com uma máquina utilizando a relaxação Lagrangiana. Jans e Degraeve (2004) propõem uma reformulação para o problema utilizando a ideia de redefinição de variáveis proposta por Eppen e Martin (1987) e relaxam as restrições de demanda do problema, propondo assim uma decomposição por períodos ao invés da decomposição clássica por itens e encontram limites inferiores melhores comparados com a decomposição clássica.

A ideia foi estendida, no presente trabalho, considerando um ambiente com máquinas paralelas. Foi utilizada a mesma ideia de redefinição de variáveis proposta por Eppen e Martin (1987) e foi proposta uma reformulação para o problema com máquinas paralelas. Os limites inferiores foram gerados utilizando a decomposição por períodos e comparados com os limites inferiores encontrados por Toledo e Armentano (2006) que utilizaram a decomposição clássica por itens.

Os limitantes foram testados para diferentes tipos de problemas e os resultados foram comparados utilizando como limite superior, soluções encontradas pelo pacote de otimização CPLEX 12.2. A formulação proposta encontrou em todos os testes limites inferiores melhores do que os gerados pela decomposição clássica apesar dos tempos computacionais serem maiores, pois, enquanto na reformulação proposta temos que resolver problemas da mochila como subproblemas, na formulação clássica temos problemas de dimensionamento de lotes com único item sem restrição de capacidade que são baratos computacionalmente. Observamos ainda que, para problemas com poucos itens os gaps são maiores, sendo que os maiores gaps encontrados em quase todos testes foram para a configuração 18 períodos, 6 máquinas e 6 itens, entretanto, a medida em que aumentamos o número de itens para

50 os gaps encontrados são sempre menores que um, ainda, como esperado, ao aumentar o número de itens e máquinas os tempos computacionais também aumentam chegando a marca de 130 segundos com a formulação proposta.

Tendo em vista estender o trabalho bem como melhorar os resultados computacionais sugerimos como próximos passos:

- Desenvolver uma heurística para a obtenção de soluções factíveis. Para isso, iremos estender e adaptar o método de solução desenvolvido por Thizy e Wassenhove (1985), para o nosso problema. O método original foi desenvolvido para o caso com uma única máquina sem tempos de preparação e consiste em uma heurística Lagrangiana com os seguintes passos: i-) A partir do problema original aplica-se a técnica da relaxação Lagrangiana as restrições de capacidade, obtendo vários subproblemas. Com as soluções destes subproblemas (problema relaxado) gera-se um limitante inferior para o problema original; ii-) A solução do problema relaxado fixa as variáveis  $y_{ijt}$  a 1 ou 0 indicando se há ou não preparação de determinado item  $i$  na máquina  $j$  em um período  $t$ ; iii-) Com as variáveis  $y_{ijt}$  fixadas no passo anterior, obtém-se um subproblema de fluxo de redes e este por sua vez gera uma solução factível para o problema original que será um limitante superior para o mesmo.

A adaptação do método para o caso em que se tem tempos de preparação não é direta, pois, podem ocorrer infactibilidades. No entanto, observa-se que diferente da relaxação Lagrangiana clássica, em que as restrições de capacidade são relaxadas, na relaxação Lagrangiana proposta, relaxa-se as restrições de fluxo e os subproblemas que resolvemos após se aplicar a relaxação Lagrangiana tem como uma das restrições a restrição de capacidade o que significa que os planos de produção obtidos ao fixarmos as variáveis  $y_{ijt}$  respeitam as capacidades disponíveis, precisamos então, fazer com que as restrições de fluxo (que foram dualizadas na função objetivo) sejam satisfeitas, ou seja, precisamos atender a demanda pré-estabelecida. Para tanto, transformaremos o nosso problema em um problema de fluxo de redes, utilizando as ideias explicadas acima e ao resolver este problema a demanda estará sendo atendida e teremos, assim, uma solução factível para o problema. Dependendo da qualidade desta solução factível, uma heurística de melhoria que transfere produção entre máquinas e períodos poderá ser desenvolvida.

- Para um possível doutorado a ideia é implementar, para o problema de dimensionamento de lotes em máquinas paralelas, métodos híbridos que consideram decomposição de Dantzig-Wolfe e relaxação Lagrangiana, com o foco na discussão de

como a relação entre decomposição de Dantzig-Wolfe e relaxação lagrangiana pode ser explorada para desenvolver algoritmos combinando os pontos fortes de ambos os métodos.

## *Referências Bibliográficas*

- [Araujo e Arenales 2000]ARAUJO, S. A.; ARENALES, M. N. Problema de dimensionamento de lotes monoestágio com restrição de capacidade: modelagem, métodos de resolução e resultados computacionais. *Pesquisa Operacional*, v. 20, p. 287–306, 2000.
- [Arenales *et al.* 2006]ARENALES, M.; ARMENTANO, V. A.; MORABITO, R. *Pesquisa Operacional*. : Editora Campus, 2006.
- [Armentano *et al.* 1999]ARMENTANO, V. A.; FRANTA, P. M.; TOLEDO, F. M. B. A network flow model for the capacitated lot-sizing problem. *Omega*, v. 27, p. 275–284, 1999.
- [Bahl *et al.* 1987]BAHL, H. C.; RITZMAN, L. P.; GUPTA, J. N. D. Determining lote sizes and resource requirements: a riview. *Operations Research*, v. 35, p. 329–345, 1987.
- [Barany *et al.* 1984]BARANY, I.; ROY, T. J. V.; WOLSEY, L. A. Strong formulations for multi-item capacitated lot sizing. *Management Science*, v. 30, p. 1255–1261, 1984a.
- [Belvaux e Wolsey 2000]BELVAUX, G.; WOLSEY, L. A. Bc-prod: a specialized branch-and-cut system for lot-sizing problems. *Management Science*, v. 46, p. 993–1007, 2000.
- [Belvaux e Wolsey 2001]BELVAUX, G.; WOLSEY, L. A. Modeling practical lot-sizing problems as mixed integer programs. *Management Science*, v. 47, p. 724–738, 2001.
- [Billington *et al.* 1983]BILLINGTON, P.; MCCLAIN, J. O.; THOMAS, L. J. Mathematical programming approaches to capacity-constrained mrp systems: Review formulation and problem reductin. *Management Science*, v. 29, p. 1126–1141, 1983.
- [Bitran e Matsuo 1986]BITRAN, G. R.; MATSUO, H. The multi-item capacitated lot size problem: Error bounds of mannes formulations. *Management Science*, v. 32, p. 350–359, 1986.
- [Brahimi *et al.* 2006]BRAHIMI, N.; PERES, D. S.; NAJID, N. M.; NORDLI, A. Single item lot sizing problem,. *European Journal of Operational Research*, v. 168, p. 1–16, 2006.
- [Camerini *et al.* 1975]CAMERINI, P. M.; FRATTA, L.; MAFFIOLI, F. On improving relaxation methods by modified gradient techniques. *Mathematical Programming Study*, v. 3, p. 26–54, 1975.
- [Carreno 1990]CARRENO, J. J. Economic lot scheduling for multiple products on parallel identical processors. *Management Science*, v. 36, p. 348–358, 1990.
- [Carvalho 2001]CARVALHO, J. M. V. *Programação Inteira*. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Minhos, 2001.

- [Cattrysse *et al.* 1993]CATTRYSSSE, D. G.; SALOMON, M.; KUIK, R.; Wassenhove, V. L. N. A dual ascent and column generation heuristic for the discrete lotsizing and scheduling problem with setup times. *Management Science*, v. 39, p. 447–486, 1993.
- [Chen e Thizy 1990]CHEN, W. H.; THIZY, J. M. Analysis of relaxation for the multi-item capacitated lot-sizing problem. *Operations Research*, v. 26, p. 29–72, 1990.
- [Dantzig e Wolfe 1960]DANTZIG, G. B.; WOLFE, P. Decomposition principles for linear programming. *Operations Research*, v. 8, p. 101–111, 1960.
- [Degraeve e Jans 2007]DEGRAEVE, Z.; JANS, R. A new dantzig-wolfe reformulation and branch-and-price algorithm for the capacitated lot-sizing problem with setup times. *Operational Research*, v. 55, p. 909–920, 2007.
- [Denizel *et al.* 2008]DENIZEL, M.; ALTEKIN, F. T.; SURAL, H., STADTLER, H. Equivalence of the lp relaxation of two strong formulation for the capacitated lot-sizing problem with setup times. *OR spectrum*, v. 30, p. 773–785, 2008.
- [Derstroff 1995]DERSTROFF, M. C. *Mehrstufige Losgrobplanung mit Kapazitätsbeschränkungen*. Dissertação (Mestrado) Physica, Heidelberg, 1995.
- [Diaby *et al.* 1992]DIABY, M.; BAHL, H.; KARWAN, M. H., ZIONT, S. Capacitated lot-sizing and scheduling by lagrangean relaxation. *European Journal Of Operational Research*, v. 59, p. 444–458, 1992.
- [Dzielinski e Gomory 1965]DZIELINSKI, B. P.; GOMORY, R. E. Optimal programming of lot sizes, inventory and labor allocations. *Management Science*, v. 11, p. 874–890, 1965.
- [Elmaghraby 1978]ELMAGHRABY, S. E. The economic lot scheduling problem (elsp): Review and extensions. *Management Science*, v. 24, p. 587–598, 1978.
- [Eppen e Martin 1987]EPPEN, G. B.; MARTIN, R. Solving multi-item capacitated lot-sizing problems using variable redefinition. *Operations Research*, v. 6, p. 832–848, 1987.
- [Evans 1985]EVANS, J. R. An efficient implementation of the wagner-whitin algorithm for dynamic lot-sizing. *Journal of Operational Management*, v. 5, p. 229–235, 1985.
- [Federgruen e Tzur 1991]FEDERGRUEN, A.; TZUR, M. A simple forward algorithm to solve general dynamic lot sizing models with n periods in  $o(n \log n)$  or  $o(n)$  time. *Management Science*, v. 37, p. 909–925, 1991.
- [Feyten e Lietaert 1983]FEYTEN, P.; LIETAERT, F. *Production Planning for a Packaging Department*. Dissertação (Mestrado) — Katholiek Universiteit Leuven, Dutch, 1983.
- [Fisher 1981]FISHER, M. L. The lagrangian relaxation method for solving integer programming problems. *Management Science*, v. 27, p. 1–18, 1981.
- [Fisher 1985]FISHER, M. L. An applications oriented guide to lagrangian relaxation. *Interfaces*, v. 15, p. 10–21, 1985.

- [Florian e Klein 1974]FLORIAN, M.; KLEIN, M. Deterministic production planning with concave cost and capacity constraints. *Management Science*, v. 19, p. 12–20, 1974.
- [Florian *et al.* 1980]FLORIAN, M.; LENSTRA, J. K.; KAN, A. H. G. R. Deterministic production planning algorithms and complexity. *Management Science*, v. 26, p. 669–679, 1980.
- [Geoffrion 1974]GEOFFRION, A. M. Lagrangean relaxation for integer programming. *Mathematical Programming Study*, v. 2, p. 82–114, 1974.
- [Gongran e Minoux 1979]GONGRAN, M.; MINOUX, M. *Graphes et Algorithmes*. Paris: Eyrolles, 1979.
- [Goyal e Gunasekaran 1990]GOYAL, S. K.; GUNASEKARAN, A. Multi-stage production-inventory systems. *European Journal of Operational Research*, v. 46, p. 1–20, 1990.
- [Harris 1990]HARRIS, F. W. How many parts to make at once. *Operations Research*, v. 38, p. 947–950, 1990.
- [Held *et al.* 1974]HELD, M.; WOLFE, P.; CROWDER, H. P. Validation of subgradient optimization. *Mathematical Programming*, v. 6, p. 62–88, 1974.
- [Hindi 1995]HINDI, K. S. Computationally efficient solution of the multi-item, capacitated lot-sizing problem. *Computers and Industrial Engineering*, v. 28, p. 709–719, 1995.
- [Huisman *et al.* 2005]HUISMAN, D.; JANS, R.; PEERTERS, M.; WAGELMANS, A. P. M. Combining column generation and lagrangian relaxation. *G. Desaulniers, J. Desrosiers, M. Solomon, eds. Column Generation*. Springer, New York, p. 247–270, 2005.
- [Jans 2002]JANS, R. *Capacitated lot sizing problems: new applications, formulations and algorithms*. Tese (Doutorado) — Katholieke Universiteit Leuven, 2002.
- [Jans e Degraeve 2004]JANS, R.; DEGRAEVE, Z. Improved lower bounds for capacitated lot sizing problem with setup time. *Operation Research Letters*, v. 32, p. 185–195, 2004.
- [Jans e Degraeve 2007]JANS, R.; DEGRAEVE, Z. Meta-heuristics for dynamic lot sizing: A review and comparison of solution approaches. *European Journal of Operational Research*, v. 177, p. 1855–1875, 2007.
- [Kang *et al.* 1999]KANG, S.; MALIK, K.; THOMAS, L. J. Lotsizing and scheduling on parallel machines with sequence-dependent setup costs. *Management Science*, v. 45, p. 273–289, 1999.
- [Karimi *et al.* 2003]KARIMI, B.; F.GHOMI, S. M. T.; WILSON, J. M. The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms. *Omega- The International Journal of Management Science*, v. 31, p. 365–378, 2003.
- [Kirca e Kokten 1994]KIRCA, O.; KOKTEN, M. A new heuristic approach for the multi-item dynamic lot sizing problem. *European Journal of Operational Research*, v. 75, p. 332–341, 1994.

- [Kimatura 2009]KIMATURA, B. L. A. *Heurística surrogate para o problema de carregamento de paletes do produtor*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, 2009.
- [Kuik *et al.* 1994]KUIK, R.; SALOMON, M.; WASSENHOVE, L. N. van. Batching decisions: Structure and models. *European Journal of Operational Research*, v. 75, p. 243–263, 1994.
- [Lambrecht e Vandervenen 1979]LAMBRECHT, M.; VANDERVENEN, H. Heuristic procedures for the single operation, multi-item loading problem. *AIIE Transactions*, v. 11, p. 319–326, 1979.
- [Lasdon e Terjung 1971]LASDON, L. S.; TERJUNG, R. C. An efficient algorithm for multi-item scheduling. *Operations Research*, v. 19, p. 946–969, 1971.
- [Lozano e Onieva 1991]LOZANO, S. J. L.; ONIEVA, L. Primal-dual approach to the single level capacitated lot-sizing problem. *European Journal of Operational Research*, v. 51, p. 354–366, 1991.
- [Maculan e Fampa 2006]MACULAN, N.; FAMPA, M. H. C. *Otimização Linear*. [S.l.]: Editora Universal de Brasília, 2006.
- [Maes *et al.* 1991]MAES, J.; MCCLAIN, J. O.; WASSENHOVE, L. N. Multilevel capacitated lot sizing complexity and lp-based heuristics. *European Journal of Operational Research*, v. 53, p. 131–148, 1991.
- [Maes e Wassenhove 1988]MAES, J.; WASSENHOVE, L. N. van. Multi-item single level capacitated dynamic lot-sizing heuristics a general review. *Journal of the Operation Research Society* 39, v. 11, p. 991–1004, 1988.
- [Manne 1958]MANNE, A. S. Programming of economic lot sizes. *Management Science*, v. 4, p. 115–135, 1958.
- [Mergaux e Wassenhove 1984]MERGAUX, J. P.; WASSENHOVE, L. N. van. *Production Planning With Capacity Constraints*. Dissertação (Mestrado) — Division of Industrial Management, Katholieke Universiteit Leuven, Dutch, 1984.
- [Oliveira e Morabito 2006]OLIVEIRA, L. K.; MORABITO, R. Métodos exatos baseados em relaxação lagrangiana e surrogate para o problema de carregamento de paletes do produtor. *Pesquisa Operacional*, v. 26, p. 403–432, 2006.
- [Park 1993]PARK, A. A. and J. K. Improved algorithms for economic lot size problems. *Operations Research*, v. 41, p. 549–571, 1993.
- [Pimentel *et al.* 2010]PIMENTEL, C. M. O.; ALVELOS, F. P.; CARVALHO, J. M. V. Comparing dantzig-wolfe decompositions and branch-and-price algorithms for the multi-item capacitated lot sizing problem. *Optimization Methods and Software*, v. 25, p. 229–319, 2010.
- [Pisinger 1995]PISINGER, D. A minimal algorithm for the multiple-choice knapsack problem. *European Journal of Operational Research*, v. 83, p. 394–410, 1995.



- [Roy 1983]ROY, T. J. V. Cross decomposition for mixed integer programming. *Mathematical Programming*, v. 25, p. 43–63, 1983.
- [Sabbag 1993]SABBAG, Z. *Planejamento da produção em máquinas paralelas sob restrições de capacidade*. Dissertação (Mestrado) — FEE-Unicamp, Campinas, 1993.
- [Salomon et al. 1991]SALOMON, M. et al. Some extensions of the discrete lotsizing and scheduling problem. *Management Science*, v. 37, p. 801–812, 1991.
- [Singh e Rajamani 1991]SINGH, N.; RAJAMANI, D. An incremental cost and resource smoothing for the capacitated lot-sizing problem. *Computers and Industrial Engineering*, v. 20, p. 469–475, 1991.
- [Sinha e Zoltners 1979]SINHA, P.; ZOLTNER, A. The multiple-choice knapsack problem. *Operational Research*, v. 27, p. 503–515, 1979.
- [Souza e Armentano 1994]SOUZA, K. X. N.; ARMENTANO, V. A. Multi-item capacitated lot-sizing by a cross decomposition based algorithm. *Annals of Operations Research*, v. 50, p. 557–574, 1994.
- [Sural et al. 2009]SURAL, H.; DENIZEL, M.; WASSENHOVE, L. N. van. Lagrangean relaxation based heuristic for lot sizing with setup times. *European Journal of Operational Research*, v. 195, p. 51–63, 2009.
- [Thizy e Wassenhove 1985]THIZY, J. M.; WASSENHOVE, L. N. V. Lagrangean relaxation for the multi-item capacitated lot-sizing problem: A heuristic implementation. *AIIE Transactions*, v. 17, p. 64–74, 1985.
- [Toledo 1998]TOLEDO, F. M. B. *Dimensionamento de Lotes em Máquinas Paralelas*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.
- [Toledo e Armentano 2006]TOLEDO, F. M. B.; ARMENTANO, V. A. A lagrangian-based heuristic for the capacitated lot-sizing problem in parallel machines. *European Journal of Operational Research*, v. 175, p. 1070–1083, 2006.
- [Trigeiro 1987]TRIGEIRO, W. W. The effect of setup time on production lot sizes. *Production and Inventory Management Third Quarter*, p. 50–52, 1987.
- [Trigeiro et al. 1989]TRIGEIRO, W. W.; THOMAS, J.; MCCLAIN, J. O. Capacitated lot sizing with setup times. *Management Science*, v. 35, p. 353–366, 1989.
- [Vanderbeck 1998]VANDERBECK, F. Lot-sizing with start-up times. *Management Science*, v. 44, p. 1409–1425, 1998.
- [Vyre e Wolsey 2006]VYRE, M. V.; WOLSEY, L. A. Approximate extended formulations. *Math. Program*, v. 105, p. 501–522, 2006.
- [Wagelmans et al. 1992]WAGELMANS, A.; HOESEL, S. V.; KOLEN, A. Economic lot sizing: An  $O(n \log n)$  algorithm that runs in linear time in the wagner-whitin case. *Operations Research*, v. 40, p. 145–156, 1992.

- [Wagner e Whitin 1958]WAGNER, H. M.; WHITIN, T. M. Dynamic version of the economic lotsize model. *Management Science*, v. 5, p. 89–96, 1958.
- [Zangwill 1969]ZANGWILL, W. I. A backlogging model and a multi-echelon model of a dynamic economic lot size production system - a network approach. *Management Science*, v. 15, p. 506–527, 1969.
- [Özdamar e Birbil 1998]ÖZDAMAR, L.; BIRBIL, S. I. Hybrid heuristics for the capacitated lot sizing and loading problem with setup times and overtime decisions. *European Journal of Operational Research*, v. 110, p. 525–547, 1998.
- [Zipkin 1991]ZIPKIN, P. H. Computing optimal lot sizes in the economic lot scheduling problem. *Operations Research*, v. 39, p. 56–63, 1991.