

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

“Análise da estabilidade de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno utilizando as desigualdades de Lyapunov-Metzler”

TALITA TOZETTO ESTEVES

Engenheira Eletricista - FEIS/UNESP

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Co-orientador: Dr. Rodrigo Cardim

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia - UNESP - Campus de Ilha Solteira, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de Conhecimento: Automação.

Ilha Solteira - SP

Maio / 2011

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP - Ilha Solteira.

E79a Esteves, Talita Tozetto.
Análise da estabilidade de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno utilizando as desigualdades de Lyapunov-Metzler / Talita Tozetto Esteves. -- Ilha Solteira : [s.n.], 2011.
101 f.:il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de Conhecimento: Automação, 2011

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Co-orientador: Rodrigo Cardim

Inclui bibliografia

1. Desigualdades matriciais lineares (LMIs). 2. Lyapunov, Funções de.
3. Funções de Lyapunov Fuzzy-Metzler. 4. Estabilidade segundo Lyapunov.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Análise da estabilidade de sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno utilizando as desigualdades de Lyapunov-Metzler

AUTORA: TALITA TOZETTO ESTEVES

ORIENTADOR: Prof. Dr. MARCELO CARVALHO M TEIXEIRA

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica ,
Área: AUTOMAÇÃO, pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO M TEIXEIRA
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. ALFREDO DEL SOLE LRDELO
Centro de Engenharia, Modelagem e Ciências Sociais Aplicadas / Universidade Federal do ABC -
Santo André-SP

Data da realização: 27 de maio de 2011.

*Dedico este trabalho aos meus pais,
Manoel e Marlene, e à minha irmã,
Milena, pelo carinho e amor
que me concedem.*

Agradecimentos

Gostaria de agradecer toda a minha família, amigos, professores e funcionários da FEIS-UNESP, que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial, agradeço

- Em primeiro lugar à Deus, por iluminar meus passos sempre.
- Ao Prof. Dr. Marcelo C. M. Teixeira, principalmente pela paciência, atenção e pelos ensinamentos dados com humildade, sabedoria e dedicação.
- Ao meu Co-orientador Dr. Rodrigo Cardim, pelo auxílio e as contribuições que enriqueceram a dissertação.
- Ao Prof. Dr. Edvaldo Assunção, pela confiança, serenidade e pelos valiosos conselhos, humanos e científicos.
- À Prof^a. Dr^a. Neusa A. P. da Silva, pelo apoio e sugestões.
- Aos meus pais, Manoel e Marlene, minha irmã, Milena, por acreditaram em mim, estando do meu lado em todos os momentos, me ouvindo, me aconselhando e me apoiando.
- Às minhas tias: Hilda, Mary, Marly, Leni, tios: Lineu, Zé e primos, pelas orações, calma, amor, me ajudando a realizar mais esse sonho.
- Ao Emerson Alexandro Bolandim, pelo companheirismo, paciência, amizade e amor.
- Aos meus amigos de laboratório, que proporcionaram momentos de muita harmonia, em especial, Edson, pelo auxílio e sugestões, Manoel, Wallysonn e Máira.
- Aos amigos que de forma direta ou indireta me ajudaram, em especial Stefani Carolline, Luciano, Luiz Francisco, Émerson, Flávio, André, Jefferson, Fábio, Gisele, Fernando, Victor, Kenji, Jadiel, Cibele, Flavilene, Priscila e Naryanne.
- Ao Conselho Nacional de Pesquisa (CNPq), pelo apoio financeiro.
- À Fundação de Amparo à pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).
- Aos desenvolvedores do ABNT_{TEX}, um pacote de classes \LaTeX para a criação e formatação de documentos conforme as normas da ABNT.

*“A diferença entre o possível e o impossível está na
vontade das pessoas”*

*“Um pouco de ciência nos afasta de Deus.
Muito, nos aproxima”*

Louis Pasteur

Resumo

Neste trabalho é realizada a análise da estabilidade de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno (TS) contínuos no tempo, através de Funções de Lyapunov Fuzzy (FLF), Funções de Lyapunov Metzler (FLM) e de Funções de Lyapunov Fuzzy-Metzler (FLFM) introduzida nesta dissertação. Novas propostas são feitas a partir destas análises, sendo apresentadas condições suficientes para a estabilidade assintótica destes sistemas no sentido de Lyapunov. As soluções obtidas são baseadas em desigualdades lineares matriciais (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*) e dependem da solução de um conjunto de desigualdades de Lyapunov-Metzler, que podem ser de difícil solução. Então, foram apresentadas condições de estabilidade baseadas em uma subclasse de matrizes de Metzler que, quando factíveis, podem ser resolvidas através de LMIs com a necessidade de uma busca unidimensional. Foram propostos métodos que generalizam os já existentes na literatura, baseados em FLF, para a estabilidade assintótica dos sistemas fuzzy TS.

Palavras-chave: Desigualdades matriciais lineares (LMIs). Funções de Lyapunov Fuzzy. Funções de Lyapunov Fuzzy-Metzler. Estabilidade segundo Lyapunov.

Abstract

This work addresses the stability analysis of Takagi-Sugeno (TS) fuzzy systems via Fuzzy Lyapunov Functions (FLF), Metzler Lyapunov Functions (MLF) and Fuzzy-Metzler Lyapunov Functions (FMLF) that was proposed in this dissertation. New proposals are made from these analyses, and sufficient conditions for asymptotic stability of these systems in the sense of Lyapunov are presented. The results obtained are based on LMIs (*Linear Matrix Inequalities*) and depend on the solutions of a set of Lyapunov-Metzler inequalities, that are usually difficult to solve. Then, conditions for stability based on a subclass of Metzler matrices that, when feasible, can be described by a set of LMIs with an unidimensional search, are presented. The proposed methods generalize the similar methods available in the literature, based on FLF, for the asymptotic stability of TS fuzzy systems.

Keywords: Linear matrix inequalities (LMIs). Fuzzy Lyapunov function. Fuzzy-Metzler Lyapunov function. Lyapunov stability.

Lista de Figuras

1	Ilustração da aproximação obtida por modelos fuzzy TS.	21
2	Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = 0.85$ com (Lema 1.1, (\diamond)), ((TANAKA, 2003), Teorema 1.1, (o)) e Teorema 1.3, (x).	28
3	Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 0.85$ com (Lema 1.1, (\diamond)), ((MOZELLI, 2009), Teorema 1.2, (o)) e Teorema 1.3, (x).	29
4	Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = 0.85$ com (Lemma 1.1, (\diamond)), ((TANAKA, 2003), Teorema 1.1, (o)) e Teorema 2.3, (x).	39
5	Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = 8$ com (Lema 1.1, (\diamond)), ((TANAKA, 2003), Teorema 1.1, (o)) e Teorema 2.3, (x).	40
6	Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = 30$ com (Lema 1.1, (\diamond)), ((TANAKA, 2003), Teorema 1.1, (o)) e Teorema 2.3, (x).	42
7	Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 0.85$ com (Lema 1.1, (\diamond)), ((MOZELLI, 2009), Teorema 1.2, (o)) e Teorema 2.3, (x).	44
8	Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 8$ com (Lema 1.1, (\diamond)), ((MOZELLI, 2009), Teorema 1.2, (o)) e Teorema 2.3, (x).	45
9	Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 30$ com (Lema 1.1, (\diamond)), ((MOZELLI, 2009), Teorema 1.2, (o)) e Teorema 2.3, (x).	46
10	Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = 0.85$ com (Lema 1.1, (\diamond)), ((TANAKA, 2003), Teorema 1.1, (o)) e Teorema 3.1 (x).	53
11	Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = 8$ com (Lema 1.1, (\diamond)), ((TANAKA, 2003), Teorema 1.1, (o)) e Teorema 3.1 (x).	54
12	Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = 30$ com (Lema 1.1, (\diamond)), ((TANAKA, 2003), Teorema 1.1, (o)) e Teorema 3.1 (x).	55
13	Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 0.85$ com (Lema 1.1, (\diamond)), ((MOZELLI, 2009), Teorema 1.2, (o)) e Teorema 3.1, (x).	57

14	Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 8$ com (Lema 1.1, (\diamond)), ((MOZELLI, 2009), Teorema 1.2, (o)) e Teorema 3.1, (x).	59
15	Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 30$ com (Lema 1.1, (\diamond)), ((MOZELLI, 2009), Teorema 1.2, (o)) e Teorema 3.1, (x).	61
16	Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = 0.85$ com (Lema 1.1, (\diamond)), ((TANAKA, 2003), Teorema 1.1, (o)) e Teorema 3.2 (x).	66
17	Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = 8$ com (Lema 1.1, (\diamond)), ((TANAKA, 2003), Teorema 1.1, (o)) e Teorema 3.2 (x).	67
18	Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = 30$ com (Lema 1.1, (\diamond)), ((TANAKA, 2003), Teorema 1.1, (o)) e Teorema 3.2 (x).	68
19	Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 0.85$ com (Lema 1.1, (\diamond)), ((MOZELLI, 2009), Teorema 1.2, (o)) e Teorema 3.2, (x).	70
20	Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 8$ com (Lema 1.1, (\diamond)), ((MOZELLI, 2009), Teorema 1.2, (o)) e Teorema 3.2, (x).	72
21	Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 30$ com (Lema 1.1, (\diamond)), ((MOZELLI, 2009), Teorema 1.2, (o)) e Teorema 3.2, (x).	74
22	Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = 0.85$ com (Teorema 2.3, (\diamond)), (Teorema 3.1, (o)) e Teorema 3.2 (x).	78
23	Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = 8$ com (Teorema 2.3, (\diamond)), (Teorema 3.1, (o)) e Teorema 3.2 (x).	80
24	Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = 30$ com (Teorema 2.3, (\diamond)), (Teorema 3.1, (o)) e Teorema 3.2 (x).	81
25	Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 0.85$ com (Teorema 2.3, (\diamond)), (Teorema 3.1, (o)) e Teorema 3.2 (x).	83
26	Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 8$ com (Teorema 2.3, (\diamond)), (Teorema 3.1, (o)) e Teorema 3.2 (x).	85
27	Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 30$ com (Teorema 2.3, (\diamond)), (Teorema 3.1, (o)) e Teorema 3.2 (x).	87

28	Análise da estabilidade para vários valores de ϕ_ρ para Lema 1.1 (FLQ) (-), Teorema 1.2 - (MOZELLI, 2009) (-.), (TANAKA, 2007), (x), (RHEE; WON, 2006), (●), Teorema 3.2 (-).	90
29	Análise da estabilidade para vários valores de ϕ_ρ , para $\theta_1 = \theta_2 = 1, (-\diamond)$, $\theta_1 = \theta_2 = 1000, (-\bullet)$, $\theta_1 = \theta_2 = 5000, (-)$	91

Lista de Siglas e Abreviações

LMI s	<i>Linear Matrix Inequalities.</i>
TS	Takagi e Sugeno.
TSK	Takagi, Sugeno e Kang.
FLF	Funções Lyapunov-Fuzzy.
FLF	<i>Fuzzy Lyapunov Function.</i>
FLM	Funções Lyapunov-Metzler.
MLF	<i>Metzler Lyapunov Function.</i>
FLFM	Funções Lyapunov Fuzzy-Metzler.
FMLF	<i>Fuzzy-Metzler Lyapunov Function.</i>
FLQ	Funções Lyapunov Quadrática
BMI	<i>Bilinear Matrix Inequality.</i>
LM	<i>Lyapunov-Metzler.</i>

Sumário

INTRODUÇÃO	14
1 MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO	19
1.1 CONDIÇÕES PARA ESTABILIDADE UTILIZANDO FUNÇÕES DE LYAPUNOV FUZZY	22
1.1.1 Exemplo 1.2 (TANAKA, 2003)	23
1.1.2 Exemplo 1.3 (MOZELLI, 2009)	24
1.2 NOVA CONDIÇÃO DE ESTABILIDADE UTILIZANDO FUNÇÕES DE LYAPUNOV FUZZY	25
1.2.1 Exemplo 1.4	28
1.2.2 Exemplo 1.5	29
1.3 CONCLUSÕES PARCIAIS	29
2 ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE SISTEMAS FUZZY TAKAGI-SUGENO UTILIZANDO AS DESIGUALDADES DE LYAPUNOV-METZLER	31
2.1 TEORIA SOBRE SISTEMAS COM COMUTAÇÃO BASEADOS NAS DE- SIGUALDADES DE LYAPUNOV-METZLER	31
2.2 NOVAS CONDIÇÕES UTILIZANDO MODELOS LOCAIS FUZZY E AS DESIGUALDADES DE LYAPUNOV-METZLER	36
2.2.1 Exemplo 2.1	37
2.2.2 Exemplo 2.2	38
2.2.3 Exemplo 2.3	43
2.3 CONCLUSÕES PARCIAIS	47

3	ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE SISTEMAS FUZZY TAKAGI-SUGENO UTILIZANDO FUNÇÕES DE LYAPUNOV-METZLER (FLFM)	49
3.1	CONDIÇÃO MAIS RELAXADA DE ESTABILIDADE UTILIZANDO FLFM	49
3.1.1	Exemplo 3.1	52
3.1.2	Exemplo 3.2	56
3.2	NOVA CONDIÇÃO MAIS RELAXADA DE ESTABILIDADE UTILIZANDO FUNÇÃO DE LYAPUNOV FUZZY-METZLER	62
3.2.1	Exemplo 3.3	65
3.2.2	Exemplo 3.4	69
3.3	CONCLUSÕES PARCIAIS	75
4	NOVOS EXEMPLOS PARA OS TEOREMAS APRESENTADOS	77
4.1	COMPARAÇÕES DOS NOVOS TEOREMAS	77
4.1.1	Exemplo 4.1	78
4.1.2	Exemplo 4.2	82
4.2	MAIS UM EXEMPLO	89
4.2.1	Exemplo 4.3	89
4.3	INFLUÊNCIA DO θ_m PRESENTE NAS DESIGUALDADES DE LYAPUNOV-METZLER	90
4.4	CONCLUSÕES PARCIAIS	92
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	93
	REFERÊNCIAS	96
	APÊNDICE A	100

INTRODUÇÃO

Aristóteles, filósofo grego (384 - 322 a. C.), fundador da ciência da lógica, estabeleceu um conjunto de regras rígidas binárias, ou seja, conceito de verdadeiro ou falso, a fim de que as conclusões pudessem ser aceitas logicamente. Porém, estas suposições, na maioria das vezes incompletas, possuem muitas incertezas entre serem verdadeiras ou serem falsas.

Para tratar do aspecto vago da informação, foi criada a lógica fuzzy (também conhecida como lógica nebulosa) com sua teoria e aplicações que teve início nos anos 60 quando Lotfi A. Zadeh e outros pesquisadores, ao analisarem o comportamento humano diante de problemas, viram que esses conhecimentos poderiam ser utilizados para completar a descrição e compreensão de sistemas reais complexos. Até então, as teorias mais conhecidas para tratar da imprecisão e incerteza da imperfeição da informação (teoria dos conjuntos e teoria de probabilidades), nem sempre conseguiam captar a riqueza da informação fornecida pelos especialistas.

Zadeh, em seu artigo “*Fuzzy Sets*” (ZADEH, 1965), propôs modelar o mecanismo do pensamento humano, com valores linguísticos em lugar de números, levando estes valores para a teoria de sistemas, utilizando o conhecimento e incertezas sem descrevê-las em termos de probabilidade.

Atualmente, um crescente interesse em pesquisas sobre sistemas fuzzy tem ocorrido, pelo fato da grande similaridade destes sistemas com o comportamento humano na solução de problemas complexos. Também, estes sistemas permitem que o projetista utilize seu conhecimento experimental para elaborar o projeto de sistemas de controle, fazendo com que se aproxime mais do real. Este sistema é baseado em tomada de decisões que, em geral é feito através de experiências obtidas anteriormente. No entanto, em alguns casos, podem ocorrer situações inusitadas ou pouco convencionais, que fazem com que dúvidas surgem sobre qual caminho se deve tomar. Isto ocorre, pois, constantemente diversas decisões são feitas para resolver os mais variados tipos de problemas, em situações diferentes, com a premissa de que sejam as mais próximas da situação em questão. A complexidade dos sistemas reais trazem incertezas, que pelo ser humano são tratados de forma subconsciente, como soluções de problemas sociais, técnicos, biológicos e emocionais. Multidimensionalidade, estruturas hierárquicas, interações mútuas, mecanismos de realimentação e dinâmicas imprevisíveis são apenas parte das características de

tais sistemas complexos (MACHADO, 2003).

A lógica fuzzy é baseada na teoria dos conjuntos fuzzy e é uma das tecnologias atuais mais bem sucedidas para o desenvolvimento de sistemas para controlar processos sofisticados (CASTRO, 1995; DRIANKOV, 1993; DUTTA, 1993; LEE, 1990; MENDEL, 1995) pela capacidade de processar informação de natureza incerta (CAMPELLO, 2002; KOSKO, 1997), e a adequação aos diferentes tipos de aplicações devido às várias arquiteturas existentes, indo de modelos linguísticos na modelagem de um determinado sistema aos modelos fuzzy Takagi-Sugeno (TS), com estruturas adequadas para aplicações em controle.

Os modelos Fuzzy Takagi-Sugeno (TS) (TAKAGI; SUGENO, 1985) ou Takagi-Sugeno-Kang (TSK) (SUGENO; KANG, 1988) são de grande importância quando há um aumento da complexidade dos sistemas e as técnicas mais tradicionais de projetos de sistemas não forem suficientes para resolverem os problemas que apresentarem critérios cada vez mais restritivos. Os sistemas TS são capazes de representar, de forma aproximada ou exata, certas classes de dinâmicas não lineares como combinação de modelos lineares invariantes no tempo locais, descrevendo aproximadamente o comportamento deste sistema em diferentes pontos no seu espaço de estados. Desta forma, pode-se interpretar a técnica tradicional de linearização em apenas um ponto de operação como um caso particular dos modelos fuzzy TS, consistindo apenas de um modelo local.

Esta classe de modelos de projeto são menos complexas do que outras classes de modelos fuzzy (JOHANSEN, 2000) e permite que o engenheiro utilize o seu conhecimento sobre o sistema que vai ser controlado, na definição do número dos modelos locais e dos pontos ou regiões nas quais estes modelos locais serão definidos. O modelo global do sistema é obtido através da combinação destes modelos lineares locais. A idéia é que para cada modelo linear local seja projetado um controle de realimentação linear. O regulador global resultante, que é não-linear em geral, é uma combinação de cada regulador linear individual.

A partir dos anos 90, em diversas áreas de controle, novas metodologias foram buscadas para tratar de problemas da análise da estabilidade e do projeto de sistemas de controle. Estes problemas podem ser resolvidos através de desigualdades matriciais lineares, também conhecida por LMIs (do inglês *Linear Matrix Inequalities*) (BOYD, 1994; WANG, 1996). Essas ferramentas são muito eficientes e poderosas na literatura de programação matemática (GAHINET, 1995; PEAUCELLE, 2002) sendo que uma solução encontrada para problemas de LMIs é equivalente a encontrar soluções para o problema original. Em certas classes de sistemas não-lineares, os modelos fuzzy TS permitem uma modelagem exata e assim os projetos baseados em LMIs são rigorosos, também aprimorados, ampliando as propostas de condições

feitas em (WANG, 1996) como pode ser visto em (JOHANSSON, 2003; TANAKA, 2003; TEIXEIRA, 2003).

Nos últimos anos, há muitas aplicações sobre controle fuzzy, como, por exemplo, na análise de novos sistemas de controle para automóveis (WILL, 1997) e controle de elevadores de alta velocidade (TANAKA, 1998). Muitos esforços tem sido feitos na área de análise da estabilidade (CAO, 1997a, 1997b; KIM; LEE, 2000; TANAKA, 1998; TANAKA; SUGENO, 1992), já que esta, é um dos conceitos mais importantes em sistemas de controle fuzzy sendo possível projetar um regulador fuzzy se for disponível um bom critério de análise da estabilidade.

Neste trabalho são abordados métodos baseados em LMIs que são construídos utilizando a Função de Lyapunov-Fuzzy (FLF) (MOZELLI, 2001, 2009; TANAKA, 2003, 2007), que garantem a estabilidade assintótica do sistema através de interpolação de funções quadráticas segundo as mesmas funções de pertinência usadas na modelagem fuzzy TS, a função de Lyapunov por partes (ARRIFANO, 2006; JOHANSSON, 1999). Também, são abordados métodos para análise da estabilidade baseados em LMIs (DEAECTO, 2007; GEROMEL; COLANERI, 2006; JOHANSSON, 2003).

Assim como fuzzy, há um crescente interesse em sistemas que apresentam desigualdades de Lyapunov-Metzler, pois foi constatado que se pode melhorar o desempenho global dos sistemas que são comumente encontrados na prática e permitir o surgimento de propriedades importantes no sistema global que não aparecem isoladamente. Em (KULKARNI; RAMADGE, 1996; MORSE, 1996; NARENDRA; BALAKRISHNAN, 1997), são mostrados que a comutação em diferentes controladores melhora a resposta transitória dos sistemas e, (BROCKETT, 1993; HESPANHA; MORSE, 1999) mostraram que o controle com comutação permite estabilizar sistemas que não podem ser assintoticamente estabilizáveis utilizando-se apenas um controle com realimentação fixo.

Os sistemas com comutação foram divulgados inicialmente na literatura, nos artigos (DECARLO, 2000; LIBERZON; MORSE, 1999; LIBERZON, 2003), nos quais pode-se encontrar um vasto estudo sobre o assunto. O trabalho (HESPANHA, 2004) fornece resultados sobre a estabilidade uniforme de sistemas com comutação baseados em extensões do Princípio da Invariância de LaSalle. Em (GEROMEL; COLANERI, 2006) foram apresentados resultados sobre sistemas com comutação a tempo discreto; em (DAAFOUZ; BERNUSSOU, 2001), foram obtidas Funções Quadráticas de Lyapunov que dependem de uma classe de parâmetros com incertezas politópicas e em (JOHANSSON; RANTZER, 1998) foi apresentado uma abordagem computacional para a análise da estabilidade de sistemas não-lineares e híbridos através da busca de uma Função Quadrática de Lyapunov.

A teoria de sistemas lineares com comutação pode ser dividida em dois grupos, nos quais, no primeiro a regra de comutação $\sigma(t)$ é independente das variáveis de estado e corresponde a uma incerteza variante no tempo. Neste caso, as condições de estabilidade devem garantir a robustez para qualquer $\sigma(t) \in \{1, 2, \dots, N\}$, sendo N a quantidade de subsistemas (HESPANHA; MORSE, 2002). No outro grupo, $\sigma(t)$ é uma variável de controle que pode depender das variáveis de estado e que seleciona, a cada instante de tempo, uma operação atual $A_{\sigma(t)}$ dentre as N disponíveis $\{A_1, \dots, A_N\}$. Neste caso, é necessário determinar uma regra de comutação $\sigma(t) = g(x(t))$ e condições suficientes para estabilidade assintótica global.

Nesta dissertação, foram utilizados dois conceitos baseados na teoria de sistemas fuzzy (MOZELLI, 2009; TANAKA, 2003) e na teoria de sistemas lineares utilizando as desigualdades de Lyapunov-Metzler (DEAECTO, 2007). O novo método para o estudo da estabilidade satisfaz as condições de estabilidade global no sentido de Lyapunov, bem como de um conjunto de desigualdades de Lyapunov-Metzler definidas em (DEAECTO, 2007; GEROMEL; COLANERI, 2006) e também de um conjunto de regras fuzzy. As desigualdades apresentadas possuem natureza não-convexa devido ao produto de variáveis de um conjunto de matrizes simétricas definidas positivas $\{P_1, \dots, P_N\}$ com os elementos de uma matriz de Metzler Π . Este sistema é resolvido baseado em (DEAECTO, 2007; GEROMEL; COLANERI, 2006) e utiliza uma subclasse de matrizes de Metzler, que podem ser resolvidas através de LMIs e uma busca unidimensional.

Nos capítulos deste trabalho, foram abordadas condições relaxadas que utilizaram propriedades de derivadas do tempo das funções de pertinência dadas através de combinações de LMIs e de técnicas de otimização convexa para lidar com a análise da estabilidade, que serão abordados detalhadamente ao decorrer da dissertação. Sistemas utilizando lógica fuzzy foram flexibilizados utilizando sistemas lineares baseados em desigualdades de Lyapunov-Metzler.

Finalizando, são ilustrados, através de exemplos, que os novos métodos propostos oferecem condições mais relaxadas para o estudo da estabilidade de sistemas fuzzy TS, do que os métodos disponíveis na literatura.

Apresentação da Dissertação

Esta dissertação está dividida em seis partes. Esta primeira parte apresenta uma introdução do tema abordado e a forma em que foi organizado o trabalho.

A segunda parte trata-se do primeiro capítulo em que apresenta os conceitos fundamentais sobre a lógica fuzzy, os modelos fuzzy TS e conceitos de estabilidade segundo Lyapunov. Neste capítulo também são apresentados lema e teoremas existentes na literatura, utilizando FLF, que foram comparados com as novas condições mais relaxadas apresentadas neste e nos próximos capítulos deste trabalho. Exemplos foram feitos para comparar os resultados obtidos, através de figuras. Quando utiliza-se FLF, há a presença da derivada temporal da função de pertinência, que prejudica o sistema, deixando-o mais restritivo. Isso é analisado ao decorrer deste trabalho.

A terceira parte pertence ao segundo capítulo e mostra o estudo da estabilidade de sistemas contínuos no tempo, com comutação. São apresentados teoremas que foram apresentados em (DEAECTO, 2007; GEROMEL; COLANERI, 2006) que asseguram os resultados obtidos. Novas condições são apresentadas utilizando FLM em sistemas fuzzy TS. Como se utilizou FLM, as novas condições apresentadas não dependem da derivada temporal da função de pertinência, fazendo com que não variem conforme os valores desta derivada aumentam. Os resultados foram ilustrados através de exemplos.

A quarta parte se refere ao terceiro capítulo, que apresentam condições mais relaxadas dos métodos propostos nos capítulos anteriores. Como utilizar FLF flexibiliza os sistemas fuzzy TS, mas a presença da derivada temporal da função de pertinência torna o sistema mais restritivo, neste capítulo são apresentadas condições utilizando FLFM de modo a tornar o sistema mais relaxado, sendo que a presença das desigualdades de Lyapunov-Metzler faz com que o sistema não perca tanto sua região de factibilidade quando o valor da derivada temporal da função de pertinência aumenta. Os dois novos teoremas serão apresentados em suas seções, e ilustrados com exemplos.

A quinta parte pertence ao quarto capítulo, dividido também em seções. A primeira seção faz comparações dos novos teoremas encontrados através de exemplos. A segunda seção compara o melhor resultado obtido neste trabalho, com os métodos existentes na literatura, através de um exemplo usado em todos os artigos estudados. A terceira seção mostra a influência de uma variável que surge quando se utiliza FLM e FLFM, através do mesmo exemplo da seção anterior.

Por fim, a sexta parte apresenta as conclusões obtidas nesta dissertação.

1 *MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO*

O sistema fuzzy Takagi-Sugeno (TAKAGI; SUGENO, 1985; TANIGUCHI, 2001) consiste em representar um modelo de uma planta não-linear através de combinações de um certo número de modelos locais lineares e invariantes no tempo, que representam o comportamento de forma aproximada ou exata desse sistema em diferentes pontos do seu espaço de estados. Na maioria dos casos, o modelo é descrito de forma aproximada e o erro de aproximação em relação ao sistema real depende do número de modelos locais utilizados, determinado pelo projetista, que analisa as necessidades dependendo do custo-benefício, ou seja, uma grande quantidade de modelos locais podem exigir um grande custo computacional no projeto ou dificultar a implementação. Um modelo fuzzy é um método de modelagem simples, sua principal característica é a descrição das dinâmicas locais de cada regra fuzzy por um modelo de sistema linear. Mais especificamente, é um conjunto de regras SE-ENTÃO que representam localmente relações lineares entre a entrada e a saída de um sistema.

Tem-se o seguinte modelo linear local:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t),$$

e considerando o sistema não forçado ($u(t) = 0$) o modelo linear local será:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t),$$

sendo $i = 1, 2, \dots, r$ (r é o número de modelos lineares), $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado. Estas informações são fundidas com as regras SE-ENTÃO disponíveis, onde a i -ésima regra tem a forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Regra } i: & \text{SE } z_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ E } \dots \text{ E } z_p(t) \text{ é } M_p^i \\ & \text{ENTÃO } \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A_i x(t). \end{array} \right. \end{array} \quad (1.1)$$

Tem-se que M_j^i , $j = 1, 2, \dots, p$ é o conjunto fuzzy j da regra i e $z_1(t), \dots, z_p(t)$ são as variáveis

premissas. Seja $\mu_j^i(z_j(t))$ o “peso” do conjunto fuzzy M_j^i associado à variável premissa $z_j(t)$, e seja

$$w^i(z(t)) = \prod_{j=1}^p \mu_j^i(z_j(t)), \quad z(t) = [z_1(t)z_2(t)\dots z_p(t)]. \quad (1.2)$$

Como $\mu_j^i(z_j(t)) \geq 0$ tem-se, para $i = 1, 2, \dots, r$,

$$w^i(z(t)) \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^r w^i(z(t)) > 0.$$

Adotar $z(t) = x(t)$, sendo $x(t)$ o vetor de estado do sistema não-linear, é uma escolha normalmente conveniente para se obter o modelo fuzzy Takagi-Sugeno. Então, definindo

$$\alpha = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r]^T,$$

a saída final do sistema fuzzy é inferida utilizando o método do centro de gravidade para a defuzzificação (TANIGUCHI, 2001) que é obtido por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w^i(z(t))(A_i x(t))}{\sum_{i=1}^r w^i(z(t))}, \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) A_i x(t), \\ &= \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) A_i \right) x(t) \\ &= A(\alpha) x(t). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Na equação (1.3), $\alpha_i(z(t))$ é a função de pertinência do modelo local sendo o peso normalizado de cada modelo de regra

$$\alpha_i(z(t)) = \frac{w^i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w^i(z(t))} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, r \quad (1.4)$$

uma observação importante é que, para $i = 1, 2, \dots, r$, tem-se a combinação linear convexa dos modelos:

$$\alpha_i(z(t)) \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) = 1. \quad (1.5)$$

Considerando o modelo fuzzy Takagi-Sugeno abaixo

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) A_i x(t), \quad (1.6)$$

sendo que $i = 1, 2, \dots, r$ (r é o número de modelos lineares), $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\alpha_i(x(t))$ é o peso normalizado de cada modelo local do sistema A_i que satisfaz as

seguintes propriedades:

$$\alpha_i(x(t)) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) = 1, \quad \sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(x(t)) = 0. \quad (1.7)$$

A procura por uma matriz P , afim de obter uma função de Lyapunov $V(x) = x^T P x$ para o sistema (1.6) e (1.7), pode ser resumida em Taniguchi et al. (2001), onde \mathbb{K} é um conjunto $\{1, 2, \dots, r\}$.

Abaixo, será apresentado um exemplo que ilustra a aproximação que é feita utilizando modelos fuzzy TS (MACHADO, 2003).

Exemplo 1.1:

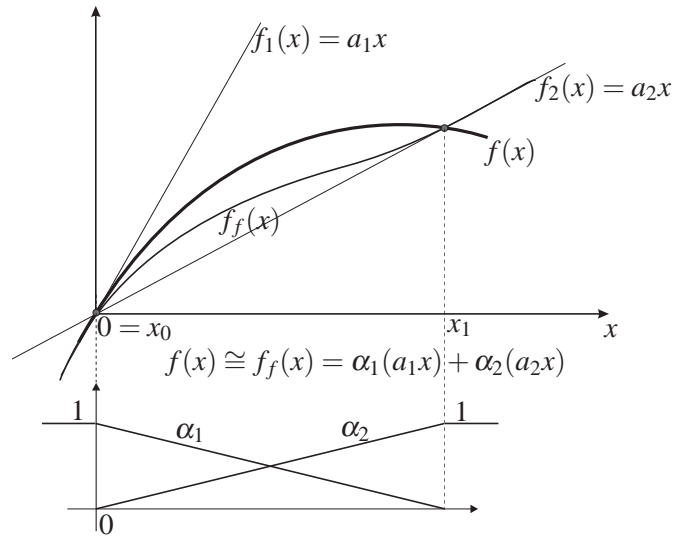


Figura 1: Ilustração da aproximação obtida por modelos fuzzy TS.

Observando a Figura 1, sendo $f(x)$ uma função não-linear, nota-se que $f_1(x) = a_1x$ pode ser uma aproximação para $x \approx x_0$, que é a reta tangente desta curva em $x = 0$. Quando $x \approx x_1$, uma aproximação linear para a função é $f_2(x) = a_2x$. A segunda aproximação linear não é tão boa quanto a primeira, pois $f_2(x)$ não corresponde à reta tangente de $f(x)$ em $x = x_1$. Adotando-se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ como modelos locais, e as funções $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ definidas na Figura 1 (observe que $\alpha_1(x)$ e $\alpha_2(x)$ são positivas ou nulas e que $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) = 1$), um modelo fuzzy TS para $f(x)$ seria $f_f(x) = \alpha_1(x)f_1(x) + \alpha_2(x)f_2(x)$, como ilustrado na Figura 1.

Portanto, para $x \approx x_0$, $\alpha_1 \approx 1$, $\alpha_2 \approx 0$ e $f_f(x) \approx f_1(x)$ e para $x \approx x_1$, $\alpha_2 \approx 1$, $\alpha_1 \approx 0$ e $f_f(x) \approx f_2(x)$. Então, pode-se concluir que a função $f_f(x)$ é uma aproximação da função $f(x)$ muito melhor do que as funções $f_1(x)$ ou $f_2(x)$, que são linearizações em torno de um ponto de operação, por exemplo, na região de $x_0 \leq x \leq x_1$. Quanto maior o número de modelos locais, melhor se torna a aproximação. Neste exemplo, já pode-se notar o potencial dos modelos fuzzy

TS, no tratamento de funções e/ou de sistemas não-lineares. Para obter melhores aproximações, é necessário escolher funções α_1 e α_2 de modo a conseguir uma aproximação exata da função $f(x)$ utilizando $f_f(x)$.

1.1 CONDIÇÕES PARA ESTABILIDADE UTILIZANDO FUNÇÕES DE LYAPUNOV FUZZY

Para obter a estabilidade dos sistemas fuzzy Takagi-Sugeno, é feita uma busca de uma função quadrática afim de garantir a estabilidade global no sentido de Lyapunov para o sistema (TANAKA; SUGENO, 1992). O método direto de Lyapunov estabelece condições para estabilidade, que podem ser expressas como desigualdades matriciais lineares (LMIs). As LMIs, quando factíveis, podem ser resolvidas por técnicas de otimização convexa.

Mas, as vezes, não convém determinar uma única função de Lyapunov quadrática (FLQ), principalmente quando há um grande número de regras fuzzy (TANAKA, 1998). Então, afim de reduzir o conservadorismo das condições LMIs baseadas em FLQ, foram introduzidas variáveis de folga em diversos trabalhos, como em (ARRIFANO, 2006; FANG, 2006; KIM; LEE, 2000; TANAKA, 1998; TEIXEIRA, 2003) para relaxar o sistema.

Um sistema TS pode ser estável mesmo sem existir um FLQ (JOHANSSON, 1999). Este fato motivou o estudo de funções de Lyapunov alternativas, como as funções de Lyapunov fuzzy (FLF) (MOZELLI, 2001, 2009; TANAKA, 2003, 2007), que garantem a estabilidade global do sistema através de interpolação de funções quadráticas segundo as mesmas funções de pertinência usadas na modelagem fuzzy TS, e de funções de Lyapunov por partes (ARRIFANO, 2006; JOHANSSON, 1999).

Nos métodos menos conservadores utilizando FLF proposta em (TANAKA, 2003), é importante observar a derivada temporal das funções de pertinência na variação temporal da função, de maneira que para resolver, é necessário selecionar um limitante superior para a derivada das funções de pertinência. Em (TANAKA, 2003, 2007) há métodos analíticos para obter o limitante e reduzir o conservadorismo, como em (MOZELLI, 2009, 2010), mas nem sempre seu cálculo pode ser realizado.

Um fato que prejudica a FLF é a derivada temporal da função de pertinência. Rhee e Won (2006) propõem uma condição alternativa na qual a diferenciação da função de Lyapunov não depende das funções de pertinência. É um método menos conservador que o proposto em (TANAKA, 2003), mas o fato do sistema não depender da derivada temporal faz com que as matrizes recaiam na solução de BMIs, deixando a solução mais lenta e menos vantajosa, apesar

de ser um processo iterativo bem elaborado.

Uma das novas funções de Lyapunov fuzzy obtidas nesta dissertação será mostrada ainda nesta seção mas, as outras funções serão apresentadas no Capítulo 3, pois foram utilizados sistemas lineares baseados em desigualdades de Lyapunov-Metzler (que serão abordados no Capítulo 2). Os exemplos contidos em (TANAKA, 2003; MOZELLI, 2009) serão comparados com o resultados encontrados neste trabalho.

1.1.1 Exemplo 1.2 (TANAKA, 2003)

Considere a função de Lyapunov fuzzy:

$$v(x(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) x^T(t) P_i x(t) \quad (1.8)$$

com $P_i, i = 1, 2, \dots, r$ matrizes simétricas definidas positivas e o sistema representado pelo modelo TS a seguir e considere o sistema em malha aberta dado por:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) A_i x(t) \quad (1.9)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$, r é o número de modelos locais, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e os elementos do vetor de estado do sistema $x(t)$ escolhidos como variáveis premissas. Tanaka, Hori e Wang (2003) apresentou o sistema abaixo, para ilustrar a eficácia dos métodos propostos:

Modelo fuzzy TS:

Modelo da regra 1: Se $x_1(t)$ é $\alpha_1(x_1(t))$ então $\dot{x}(t) = A_1 x(t)$.

Modelo da regra 2: Se $x_1(t)$ é $\alpha_2(x_1(t))$ então $\dot{x}(t) = A_2 x(t)$,

sendo que

$$\alpha_1(x_1(t)) = \frac{1 + \text{sen}(x_1(t))}{2}, \quad \alpha_2(x_1(t)) = \frac{1 - \text{sen}(x_1(t))}{2}$$

e

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 20 & -2 \end{bmatrix}.$$

Note que, de (1.7)

$$\sum_{\rho=1}^r \dot{\alpha}_\rho(x(t)) = 0 \quad \forall x(t),$$

e

$$\dot{\alpha}_r(x(t)) = - \sum_{\rho=1}^{r-1} \dot{\alpha}_\rho(x(t)). \quad (1.10)$$

Teorema 1.1. De (TANAKA, 2003), considere que

$$|\dot{\alpha}_\rho(x(t))| \leq \phi_\rho, \quad \rho = 1, 2, \dots, r-1. \quad (1.11)$$

O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema fuzzy (1.9) é assintoticamente estável se existirem $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{r-1}$ e matrizes P_1, P_2, \dots, P_r tais que satisfaçam as seguintes LMIs:

$$\begin{cases} P_1, \dots, P_r \succ 0 \\ P_\rho \succeq P_r, \quad \rho = 1, 2, \dots, r-1 \\ \sum_{\rho=1}^{r-1} \phi_\rho (P_\rho - P_r) + \frac{1}{2} (A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i) \prec 0, \quad i \leq j. \end{cases} \quad (1.12)$$

Este teorema corresponde ao Teorema 2 de (TANAKA, 2003) e mostra que o sistema apresenta condições mais relaxadas do que no Teorema 1 de (TANAKA, 2003) (no qual os valores de $\phi_\rho, i = 1, 2, \dots, r$ estão no seu limite máximo de 0.85), podendo obter regiões factíveis para $\phi_\rho = 2.57, i = 1, 2, \dots, r-1$.

Demonstração. Veja: (TANAKA, 2003). □

1.1.2 Exemplo 1.3 (MOZELLI, 2009)

No artigo Mozelli et al. (2009), foi apresentada uma nova condição que generalizou o Teorema 2 de Tanaka, Hori e Wang (2003), com resultados menos conservadores.

A função de Lyapunov fuzzy e o sistema que representa o modelo fuzzy TS em malha aberta, são as mesmas que em (TANAKA, 2003), (1.8) e (1.9).

Para a análise do desempenho do método proposto, foi utilizado o sistema fuzzy TS, dado por (1.9), com $r = 4$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ \frac{1}{5}(3b-2) & \frac{1}{5}(3a-4) \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ \frac{1}{5}(2b-3) & \frac{1}{5}(2a-6) \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ b & -2 \end{bmatrix},$$

sendo que os intervalos dos valores de (a, b) são $a \in [-10, 0]$ e $b \in [0, 200]$ e

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sigma_1(x_1)\sigma_2(x_2), & \alpha_2 &= \sigma_1(x_1)\beta_2(x_2), \\ \alpha_3 &= \beta_1(x_1)\sigma_2(x_2), & \alpha_4 &= \beta_1(x_1)\beta_2(x_2), \end{aligned}$$

$$\beta_i(x_i) = 1 - \alpha_i(x_i),$$

para $\sigma_i(x_i)$, $\beta_i(x_i)$ definidos para $i = 1, 2$, com

$$\sigma_i(x_i) = \begin{cases} (1 - \text{sen}(x_i))/2, & \text{para } |x_i| \leq \pi/2, \\ 0, & \text{para } x_i > \pi/2, \\ 1, & \text{para } x_i < -\pi/2. \end{cases} \quad (1.13)$$

Satisfazendo as propriedades:

$$\alpha_i(x(t)) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) = 1, \quad \sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(x(t)) = 0. \quad (1.14)$$

Teorema 1.2. *Considere que $|\dot{\alpha}_k| \leq \phi_k$, $k \in \mathbb{K}$, o sistema (1.9) é estável se as seguintes LMIs forem satisfeitas:*

$$\begin{cases} P_i = P_i^T \succ 0, & i \in \mathbb{K} \\ P_i + X \succeq 0, & i \in \mathbb{K} \\ \tilde{P}_\phi + \frac{1}{2} (A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i) \prec 0, & i \leq j \end{cases} \quad (1.15)$$

com $i, j \in \mathbb{K}$, $\tilde{P}_\phi = \sum_{k=1}^r \phi_k (P_k + X)$, ϕ_k para $k = 1, 2, \dots, r$ são escalares, e $X = X^T$.

Demonstração. Veja (MOZELLI, 2009). □

1.2 NOVA CONDIÇÃO DE ESTABILIDADE UTILIZANDO FUNÇÕES DE LYAPUNOV FUZZY

O teorema a seguir mostra condições mais relaxadas para diminuir o conservadorismo dos Teoremas 1.1 e 1.2 anteriores e considere a função candidata de Lyapunov fuzzy (1.8), o modelo do sistema fuzzy TS (1.9), satisfazendo as propriedades de (1.14).

Teorema 1.3. *Considerando que $|\dot{\alpha}_\rho(x(t))| \leq \phi_\rho$, $\rho \in \mathbb{K}$, o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema fuzzy TS (1.9) é assintoticamente estável, se as seguintes LMIs forem satisfeitas:*

$$\begin{cases} P_i = P_i^T \succ 0, \\ P_k + X_{ij} \succeq 0, \\ \tilde{P}_{\phi_{ij}} + \frac{1}{2} (A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i) \prec 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} i \leq j \\ i \leq j \end{matrix} \quad (1.16)$$

sendo que $i, j \in \mathbb{K}$ e $\tilde{P}_{\phi_{ij}} = \sum_{\rho=1}^r \phi_\rho (P_\rho + X_{ij})$, ϕ_ρ , $\rho = 1, 2, \dots, r$ são escalares positivos conhecidos, e $X_{ij} = X_{ij}^T = X_{ji} = X_{ji}^T$.

Demonstração. Escolhendo a função candidata Lyapunov fuzzy (1.8) e o modelo fuzzy TS dado em (1.9), a derivada da função de Lyapunov fuzzy é a seguinte:

$$\dot{v}(x(t)) = \sum_{\rho=1}^r \dot{\alpha}_{\rho}(x(t))x^T(t)P_{\rho}x(t) + \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) [\dot{x}^T(t)P_i x(t) + x^T(t)P_i \dot{x}(t)]. \quad (1.17)$$

Substituindo (1.9) em $\dot{x}(t)$ e $\dot{x}^T(t)$ da função $\dot{v}(x(t))$,

$$\begin{aligned} \dot{v}(x(t)) &= \sum_{\rho=1}^r \dot{\alpha}_{\rho}(x(t))x^T(t)P_{\rho}x(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t))\alpha_j(x(t))(A_j x(t))^T P_i x(t) + \\ &+ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t))\alpha_j(x(t))x^T(t)P_i A_j x(t), \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\dot{v}(x(t)) = \sum_{\rho=1}^r \dot{\alpha}_{\rho}(x(t))x^T(t)P_{\rho}x(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t))\alpha_j(x(t))x^T(t) [A_j^T P_i + P_i A_j] x(t).$$

Multiplicando o termo $\sum_{\rho=1}^r \dot{\alpha}_{\rho}(x(t)) [x^T(t)P_{\rho}x(t)]$ por

$$\left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t))\alpha_j(x(t)) \right)$$

tem-se

$$\begin{aligned} \dot{v}(x(t)) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{\rho=1}^r \alpha_i(x(t))\alpha_j(x(t))\dot{\alpha}_{\rho}(x(t))x^T(t)P_{\rho}x(t) + \\ &+ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t))\alpha_j(x(t))x^T(t) \frac{1}{2} (A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i) x(t). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Como, de (1.7)

$$\alpha_i(x(t)) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) = 1, \quad \sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(x(t)) = 0$$

tem-se que

$$\sum_{\rho=1}^r \dot{\alpha}_{\rho}(x(t)) = 0. \quad (1.20)$$

Então, a equação (1.19) pode ser representada por

$$\dot{v}(x(t)) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{\rho=1}^r \alpha_i(x(t))\alpha_j(x(t))\dot{\alpha}_{\rho}(x(t))x^T(t)P_{\rho}x(t) +$$

$$+ \sum_{\rho=1}^r \dot{\alpha}_{\rho}(x(t)) \left[x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i \alpha_j X_{ij} \right) x(t) \right] + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) x^T(t) \frac{1}{2} (A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i) x(t), \quad (1.21)$$

$$\dot{v}(x(t)) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) x^T(t) \left[\sum_{\rho=1}^r \dot{\alpha}_{\rho}(x(t)) (P_{\rho} + X_{ij}) + \frac{1}{2} (A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i) \right] x(t). \quad (1.22)$$

Foi imposto que

$$P_{\rho} + X_{ij} \geq 0, \quad \rho = 1, \dots, r. \quad (1.23)$$

Considerando $|\dot{\alpha}_{\rho}| \leq \phi_{\rho}$, $\rho = 1, 2, \dots, r$, então de (1.21),

$$\dot{v}(x(t)) \leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) x^T(t) \left[\sum_{\rho=1}^r \phi_{\rho} (P_{\rho} + X_{ij}) + \frac{1}{2} (A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i) \right] x(t). \quad (1.24)$$

Assim, conclui-se que v é uma função de Lyapunov fuzzy se as condições dadas em (1.16) forem satisfeitas. \square

Observação 1.1

Note que se as condições do Teorema 1.2, dadas em (1.15), são factíveis, então as condições do Teorema 1.3, dadas em (1.16), também serão factíveis, pois as condições (1.15) e (1.16) são equivalentes para $X = X_{ij}$, i e $j = 1, 2, \dots, r$. O Exemplo 1.4 irá mostrar que existem situações nas quais as condições do Teorema 1.3 são factíveis e as condições do Teorema 1.2 não são factíveis.

O Lema abaixo foi proposto de (MOZELLI, 2009) e será utilizado para compará-lo com os teoremas apresentados ao decorrer deste trabalho.

Lema 1.1. *O sistema fuzzy dado em (1.9) é assintoticamente estável se existir $P = P^T \succ 0$ satisfazendo:*

$$A_i^T P + P A_i \prec 0, \quad i \in \mathbb{K}$$

Neste trabalho, todos os exemplos são resolvidos utilizando o software *Matlab* Version 7.4.0.287, e o solver *SeDuMi* (*Self-Dual-Minimization*) (STURM, 1999) interfaciado pelo *YALMIP* (*Yet Another LMI Parser*) (LOFBERG, 2004).

1.2.1 Exemplo 1.4

Como o objetivo deste exemplo é mostrar a região de factibilidade para o sistema, satisfazendo as LMIs dadas no Teorema 1.3, e que serão comparadas com o Teorema 1.1 e também com o Lema 1.1. Foram colocadas duas incertezas nas matrizes A_1 e A_2 , que abrangem, inclusive, A_1 e A_2 do Exemplo 1.2 proposto por (TANAKA, 2003), para fazer as devidas comparações.

As regras fuzzy do sistema são as mesmas que em (TANAKA, 2003), as matrizes locais são:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ b & -2 \end{bmatrix}$$

e $\phi_1 = \phi_2 = 0.85$.

A Figura 2, mostra o resultado das áreas factíveis obtidas com o método proposto, satisfazendo as condições do Teorema 1.3 para vários valores dos pares (a,b) , $a \in [-10, -1]$ e $b \in [0, 200]$.

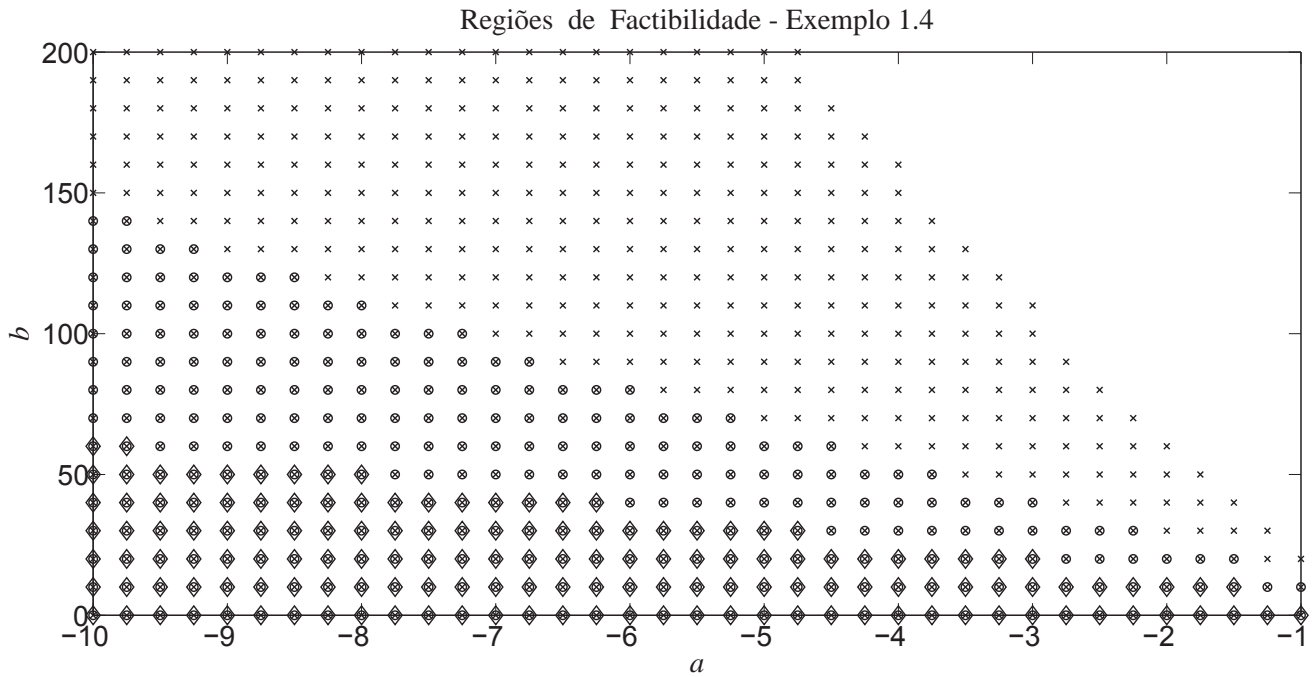


Figura 2: Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = 0.85$ com (Lema 1.1, (◇)), ((TANAKA, 2003), Teorema 1.1, (o)) e Teorema 1.3, (x).

1.2.2 Exemplo 1.5

Este exemplo mostra, assim como o Exemplo 1.4, os resultados obtidos do Teorema 1.3, mas agora, comparado com o método proposto em (MOZELLI, 2009). As regras fuzzy são as mesmas usadas em (MOZELLI, 2009), as matrizes locais são:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ \frac{1}{5}(3b-2) & \frac{1}{5}(3a-4) \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ \frac{1}{5}(2b-3) & \frac{1}{5}(2a-6) \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ b & -2 \end{bmatrix}$$

e os intervalos dos valores de (a, b) são os seguintes: $a \in [-20, -5]$ e $b \in [0, 1200]$.

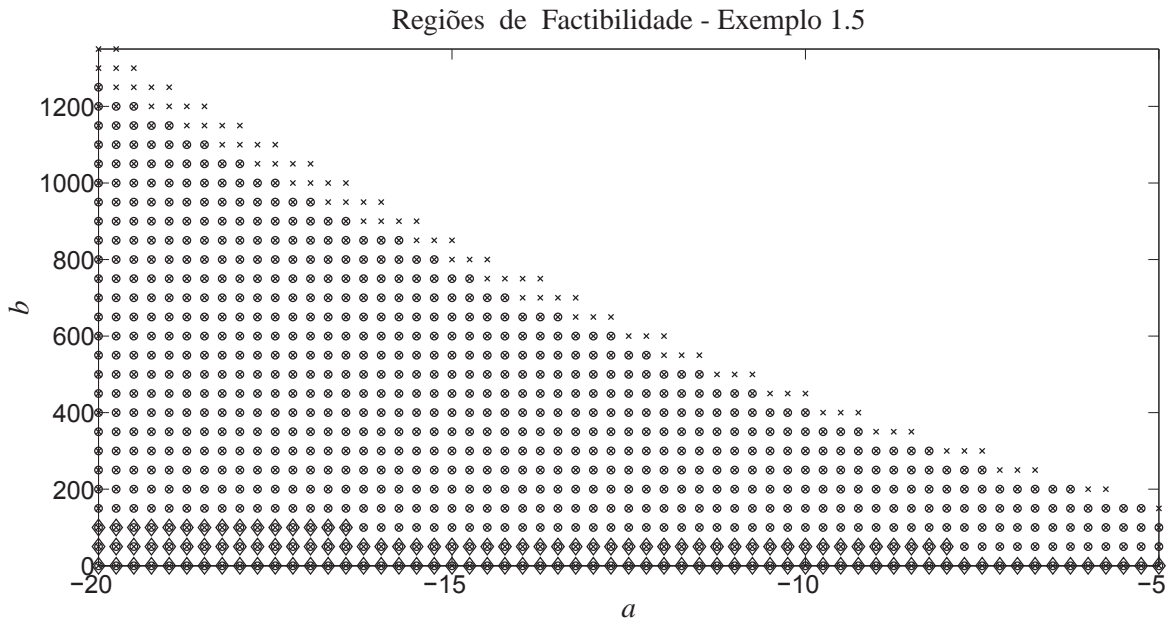


Figura 3: Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 0.85$ com (Lema 1.1, (\diamond)), ((MOZELLI, 2009), Teorema 1.2, (o)) e Teorema 1.3, (x).

1.3 CONCLUSÕES PARCIAIS

Este capítulo introduz um estudo sobre os modelos fuzzy Takagi-Sugeno (TS) de sistemas não-lineares, e conseqüentemente, as condições de estabilidade utilizando Funções de Lyapunov Fuzzy. Foram mostrados teoremas e exemplos apresentados em (MOZELLI, 2009; TANAKA, 2003), de modo a compará-los com os resultados obtidos com a nova condição apresentada. O Teorema 1.3, mostra uma nova condição de estabilidade menos conservadora do que as apresentadas em (MOZELLI, 2009; TANAKA, 2003), sendo que, no Exemplo 1.4, é pos-

sível concluir que o resultado apresenta uma região de factibilidade significativamente melhor comparado ao Teorema 1.1 (TANAKA, 2003) e Lema 1.1, com apenas dois modelos locais. Ao se analisar sistemas maiores, por exemplo com quatro modelos locais, como no Exemplo 1.5, o sistema melhora a região de factibilidade, comparado ao Teorema 1.2 (MOZELLI, 2009) em que já havia sido generalizado o Teorema 1.1 de (TANAKA, 2003). Note que, a nova condição proposta no Teorema 1.3, mostra que, se o Teorema 1.2 for factível, então o teorema proposto também será, pois o Teorema 1.2 é uma condição particular do Teorema 1.3, que apresentou melhores regiões de factibilidade como pode-se observar nas Figuras 2 e 3.

2 ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE SISTEMAS FUZZY TAKAGI-SUGENO UTILIZANDO AS DESIGUALDADES DE LYAPUNOV-METZLER

Neste capítulo, será apresentado o conceito de sistemas com comutação baseado nas desigualdades de Lyapunov-Metzler e também novas condições menos conservadoras utilizando sistemas fuzzy TS e funções baseadas em desigualdades de Lyapunov-Metzler, garantindo a estabilidade assintótica do sistema. Exemplos ilustram a relaxação proporcionada pelo método proposto.

2.1 TEORIA SOBRE SISTEMAS COM COMUTAÇÃO BASEADOS NAS DESIGUALDADES DE LYAPUNOV-METZLER

A comutação entre subsistemas tem sido de muita importância nos últimos anos, por melhorar o desempenho global e permitir o surgimento de propriedades que não são encontradas isoladamente. As características destes sistemas dinâmicos, contínuos no tempo, com comutação, são interações entre subsistemas contínuos e eventos isolados discretos, determinando a dinâmica do sistema global, uma vez que, a cada instante de tempo, é posicionada uma chave de comutação em um dos subsistemas. Alguns resultados sobre síntese de controle para sistemas lineares, contínuos no tempo, com comutação foram apresentados em (GEROMEL; COLANERI, 2006).

Considere o sistema linear com comutação abaixo (GEROMEL; COLANERI, 2006)

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t), \quad x(0) = x_0, \quad (2.1)$$

definido para todo $t \geq 0$, em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $\sigma(t)$ é a regra de comutação e x_0 é a condição inicial. A partir de um conjunto conhecido de matrizes constantes $A_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $m = 1, 2, \dots, N$, é possível, em cada instante de tempo, escolher a regra de comutação $\sigma(t)$ para todo $t \geq 0$, e desta forma, selecionar uma matriz $A_{\sigma(t)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dentre aquelas pertencentes ao conjunto mostrado abaixo

$$A_{\sigma(t)} \in \{A_1, A_2, \dots, A_N\}. \quad (2.2)$$

Assim sendo, cada $A_{\sigma(t)}$ deve comutar instantaneamente de A_m para A_k para algum $m \neq k = 1, \dots, N$ quando ocorrer comutação de $\sigma(t) = m$ para $\sigma(t) = k$ e $A_{\sigma(t)}$ é comutado entre os N vértices do politopo $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$.

Definindo a função de Lyapunov quadrática por partes (DEAECTO, 2007; GEROMEL; COLANERI, 2006)

$$v(x(t)) := \min_{m \in N} x^T(t) P_m x(t) = \min_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{m=1}^N \lambda_m x(t)^T P_m x(t) \right), \quad (2.3)$$

sendo $\{P_1, P_2, \dots, P_N\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ um conjunto de matrizes simétricas positivas definidas e $\lambda \in \mathbb{R}^N$ é um elemento do conjunto convexo

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N : \sum_{m=1}^N \lambda_m = 1, \lambda_m \geq 0 \right\}. \quad (2.4)$$

Como a equação (2.3) não é diferenciável para todo $x(t) \in \mathbb{R}^n$, foi encontrada uma $g(x(t)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}$, e as condições para que a regra de comutação dada por

$$\sigma(t) = g(x(t)) \quad (2.5)$$

faça com que a origem do sistema (2.1) seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável. Para analisar este aspecto, foi definido o conjunto

$$M(x) = \{m : v(x) = x^T P_m x\} \quad (2.6)$$

que possui mais de um elemento cuja função (2.3) não é diferenciável, ou seja, a minimização indicada em (2.3) não é única. Em (DEAECTO, 2007; GEROMEL; COLANERI, 2006) foi proposto um teorema utilizando a função (2.3) e uma classe de matrizes de Metzler denotada por \mathcal{M} , consistindo de todas as matrizes $\Pi \in \mathbb{R}^{N \times N}$, tais que

$$\pi_{mk} \geq 0, \quad \forall m \neq k, \quad \sum_{m=1}^N \pi_{mk} = 0, \quad \forall k \quad (2.7)$$

de forma a encontrar condições suficientes para a estabilidade assintótica de (2.1) que assegurem

um custo garantido de desempenho. Observe que para qualquer matriz de Metzler \mathcal{M} , todos os elementos da diagonal principal são não positivos.

Teorema 2.1. (DEAECTO, 2007; GEROMEL; COLANERI, 2006) Sendo $\{Q_1, \dots, Q_N\}$ um conjunto de matrizes simétricas semidefinidas positivas, se existirem um conjunto de matrizes simétricas definidas positivas $\{P_1, \dots, P_N\}$ e $\Pi \in \mathcal{M}$ satisfazendo as seguintes desigualdades de Lyapunov-Metzler

$$A_m^T P_m + P_m A_m + \sum_{k=1}^N \pi_{km} P_k + Q_m < 0, m \in \mathbb{N} \quad (2.8)$$

então a lei de controle (2.5) com

$$g(x(t)) = \arg \min_{m \in N} x(t)^T P_m x(t) \quad (2.9)$$

faz com que a origem do sistema (2.1) seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Demonstração. A prova está apresentada em (DEAECTO, 2007; GEROMEL; COLANERI, 2006). Como a função (2.3) não é diferenciável para todo $x \in \mathbb{R}^n$, é necessário utilizar a derivada de Dini (GARG, 1998) à direita da equação (2.3) que, por definição, é dada por

$$D^+ v(x(t)) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sup \frac{v(x(t+h)) - v(x(t))}{h}. \quad (2.10)$$

De (2.9), com $t \geq 0$ arbitrário, a regra de comutação é dada por $\sigma(t) = g(x(t)) = m$ com $m \in M(x(t))$. Utilizando o Teorema de Danskin (apresentado com mais detalhes no final deste trabalho), tem-se que

$$\begin{aligned} D^+ v(x(t)) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \sup \frac{v(x(t) + h A_m x(t)) - v(x(t))}{h} \\ &= \min_{l \in M(x(t))} x^T(t) (A_m^T P_l + P_l A_m) x(t) \\ &\leq x^T(t) (A_m^T P_m + P_m A_m) x(t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

no qual a desigualdade assegura o fato que $m \in M(x(t))$. Por outro lado, lembrando que (2.7) é válida para $\Pi \in \mathcal{M}$ e que $x^T(t) P_k x(t) \geq x^T(t) P_m x(t) = v(x(t))$ com $\pi_{km} \geq 0$ para todo $m \neq k \in N$, utilizando as desigualdades de Lyapunov-Metzler (2.8), obtém-se

$$\begin{aligned} D^+ v(x(t)) &< x^T(t) \left(- \sum_{k=1}^N \pi_{km} P_k - Q_m \right) x(t) \\ &\leq x^T(t) \left(- \sum_{k=1}^N \pi_{km} P_m - Q_m \right) x(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \left(\sum_{k=1}^N \pi_{km} \right) x^T(t) P_m x(t) - x^T(t) Q_m x(t) \\
&= -x^T(t) Q_m x(t) \\
&< 0.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Logo (2.12) prova que a origem do sistema (2.1) é globalmente assintoticamente estável. □

Observação 2.1

Pode-se notar que, o Teorema 2.1, não requer que o conjunto de matrizes $\{A_1, \dots, A_N\}$ seja exclusivamente composto por matrizes assintoticamente estáveis. Como $\Pi \in \mathcal{M}$, a condição necessária para que as desigualdades de Lyapunov-Metzler sejam factíveis em relação a $\{P_1, \dots, P_N\}$ são que as matrizes $A_m + (\pi_{mm}/2)I$ para $m = 1, \dots, r$ sejam assintoticamente estáveis.

Mas, se todas as matrizes $\{A_1, \dots, A_N\}$ são assintoticamente estáveis, quando escolhe-se $\Pi = 0$, a estabilidade é preservada utilizando o método proposto em (GEROMEL; COLANERI, 2006). Além disso, se o conjunto de matrizes $\{A_1, \dots, A_N\}$ forem quadraticamente estáveis, então as desigualdades de Lyapunov-Metzler admitem uma solução $P_1 = \dots = P_N = P$ e $M(x(t)) = \{1, \dots, N\}$ para $t \geq 0$. Neste caso particular, a lei de controle (2.9) pode ser escolhida arbitrariamente, garantindo a estabilidade assintótica de (2.1). Nesta situação, o Teorema 2.1 é reduzido à estabilidade quadrática (desde que as desigualdades de Lyapunov-Metzler não dependam de Π).

Pode-se observar que, as condições de estabilidade do sistema (2.1) apresentadas em (DEAECTO, 2007; GEROMEL; COLANERI, 2006), apresentadas no Teorema 2.1, dependem da solução das desigualdades de Lyapunov-Metzler. Estas desigualdades possuem natureza não-convexa devido ao produto das variáveis $(\Pi, \{P_1, \dots, P_N\})$ não sendo possível resolvê-las facilmente com *softwares* existentes na literatura. Portanto, em (DEAECTO, 2007; GEROMEL; COLANERI, 2006) foi proposto um método a fim de resolver este problema, utilizando LMIs e uma busca unidimensional. Esta condição, embora mais conservadora, é mais fácil de ser resolvida, pois permite a utilização de *softwares* existentes na literatura. A condição é baseada em uma subclasse de matrizes de Metzler com elementos iguais na diagonal principal.

O teorema citado acima pode ser aplicado sem grande esforço computacional, para sistemas com apenas dois modos de comutação ($N = 2$), realizando-se uma busca bidimensional envolvendo duas variáveis independentes, que correspondem aos elementos fora da diagonal

principal da matriz $\Pi \in \mathcal{M}$. Mas, se o sistema tiver mais de dois modos de comutação, sua solução através das condições deste teorema torna-se bastante complicada. Então, (DEAECTO, 2007; GEROMEL; COLANERI, 2006) propôs outro teorema, com novas condições para solucionar este problema.

Teorema 2.2. (DEAECTO, 2007; GEROMEL; COLANERI, 2006) *Dado um conjunto de matrizes simétricas semidefinidas positivas $\{Q_1, \dots, Q_N\}$, se existirem um conjunto de matrizes simétricas definidas positivas $\{P_1, \dots, P_N\}$ e um escalar positivo γ satisfazendo as desigualdades modificadas de Lyapunov-Metzler*

$$A_m^T P_m + P_m A_m + \gamma(P_k - P_m) + Q_m < 0, \quad k \neq m \in N \quad (2.13)$$

então a lei de controle definida por (2.5) e (2.9) faz com que a origem do sistema (2.1) seja globalmente assintoticamente estável.

Demonstração. (DEAECTO, 2007; GEROMEL; COLANERI, 2006). Foi utilizada uma subclasse de matrizes de Metzler com os mesmos elementos na diagonal principal, isto é, $\pi_{mm} = -\gamma, m \in N$. Logo

$$\gamma^{-1} \sum_{k \neq m=1}^N \pi_{km} = 1. \quad (2.14)$$

Sendo $\pi_{km} \geq 0$ para todo $m \neq k \in \mathbb{K}$, multiplicando (2.13) por π_{km} , somando para todos os elementos $k \neq m \in N$ e finalmente multiplicando por γ^{-1} , obtemos

$$\begin{aligned} A_m^T P_m + P_m A_m + Q_m &< - \sum_{k \neq m=1}^N \pi_{km} (P_k - P_m) \\ &< - \sum_{k=1}^N \pi_{km} P_k, \end{aligned} \quad (2.15)$$

para todo $m \in M$.

□

Na seção a seguir, são propostas novas condições menos conservadoras utilizando os conceitos de desigualdades de Lyapunov-Metzler e também funções de Lyapunov fuzzy.

2.2 NOVAS CONDIÇÕES UTILIZANDO MODELOS LOCAIS FUZZY E AS DESIGUALDADES DE LYAPUNOV-METZLER

Nesta seção, são encontradas condições menos conservadoras, que não dependem da derivada temporal da função de pertinência, utilizando o conceito de sistemas com comutação, a fim de obter uma nova função de Lyapunov e também considerando modelos fuzzy locais.

Considere $\{P_1, P_2, \dots, P_r\}$ um conjunto de matrizes simétricas positivas definidas e a função de Lyapunov quadrática por partes:

$$v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} \left[x(t)^T P_m x(t) \right] \quad (2.16)$$

e o modelo fuzzy local dado em (1.9).

Teorema 2.3. *O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema fuzzy TS dado em (1.9) é globalmente assintoticamente estável, se existirem matrizes simétricas P_1, P_2, \dots, P_r e escalares $\theta_m \geq 0$, $m \in \mathbb{K}$, tais que as seguintes desigualdades matriciais são satisfeitas:*

$$\begin{cases} P_m = P_m^T \succ 0, \\ A_j^T P_m + P_m A_j + \theta_m (P_j - P_m) \prec 0, \end{cases} \quad (2.17)$$

para todo m e $j \in \mathbb{K} = \{1, 2, \dots, r\}$.

Demonstração. Considerando a função de Lyapunov (2.16), utilizando os mesmo passos da prova do Teorema 2.1 e 2.2, como a função $v(x(t))$ não é diferenciável para todo $x \in \mathbb{R}^n$, a derivada de Dini (GARG, 1998; GEROMEL; COLANERI, 2006) à direita da função (2.16) será

$$D^+ v(x(t)) = \min_{m \in M(x(t))} \left[\dot{x}^T(t) P_m x(t) + x^T(t) P_m \dot{x}(t) \right]. \quad (2.18)$$

Substituindo (1.9) em (2.18)

$$\begin{aligned} D^+ v(x(t)) &= \min_{m \in M(x(t))} \left[\left(\sum_{j=1}^r \alpha_j(x(t)) A_j x(t) \right)^T P_m x(t) + x^T(t) P_m \left(\sum_{j=1}^r \alpha_j(x(t)) A_j x(t) \right) \right] \\ &\leq \left[\left(\sum_{j=1}^r \alpha_j(x(t)) A_j x(t) \right)^T P_m x(t) + x(t)^T P_m \left(\sum_{j=1}^r \alpha_j(x(t)) A_j x(t) \right) \right] + \\ &\quad + x^T(t) \left[\theta_m \sum_{j=1}^r \alpha_j (P_j - P_m) \right] x(t). \quad (2.19) \end{aligned}$$

Assim,

$$D^+v(x(t)) \leq x^T(t) \left\{ \sum_{j=1}^r \alpha_j(x(t)) [(A_j^T P_m + P_m A_j) + \theta_m (P_j - P_m)] \right\} x(t). \quad (2.20)$$

Portanto, com a factibilidade de (2.17), o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema (1.9) é globalmente assintoticamente estável, (pois $D^+v(x(t)) < 0$ para $x(t) \neq 0$). \square

Observação 2.2:

Note que as condições do Teorema 2.3 são semelhantes às dos Teoremas 2.1 e 2.2 de (GEROMEL; COLANERI, 2006; DEAECTO, 2007). Como nos Teoremas 2.1 e 2.2, a condição do Teorema 2.3 é satisfeita, pois $\theta_m \geq 0$, e P_m são matrizes simétricas definidas positivas. Então, $\theta_m (P_j - P_m) \geq 0$ e a condição

$$\begin{aligned} D^+v(x(t)) &= \min_{m \in M(x(t))} \{x^T(t) (A_j^T P_m + P_m A_j) x(t)\} \leq \\ &\leq \{x^T(t) [A_j^T P_m + P_m A_j + \theta_m (P_j - P_m)] x(t)\} < 0 \end{aligned}$$

será satisfeita. Uma diferença fundamental entre os Teoremas 2.3 e os Teoremas 2.1 e 2.2 é que no novo teorema (Teorema 2.3) o modelo utilizado é o fuzzy TS (1.9) e nos Teoremas 2.1 e 2.2 é o modelo dado em (2.1), que é um sistema com comutação.

Os exemplos a seguir comparam resultados utilizando a função candidata de Lyapunov, baseada nas desigualdades de Lyapunov-Metzler, com os resultados usando as funções candidatas de Lyapunov fuzzy, cujas derivadas com relação ao tempo dependem da derivada das funções de pertinência, o que prejudica a factibilidade das LMIs do sistema.

2.2.1 Exemplo 2.1

Este exemplo mostra a dependência da derivada temporal da função de pertinência em funções de Lyapunov Fuzzy, como nos Teoremas 1.1 e 1.2 de (MOZELLI, 2009; TANAKA, 2003). Por exemplo, considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = f(x_1(t), x_2(t)) = -x_1(t) + a_{22}(x_1(t))x_2(t), \\ x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \\ \dot{x}(t) = A(\alpha(x_1(t)))x(t) = \sum_{i=1}^2 A_i \alpha_i(x_1(t))x(t), \end{cases} \quad (2.21)$$

sendo que $a_{22}(x_1) \in [-1, -3]$, com os modelos locais

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

e as regras fuzzy do sistema são:

$$\alpha_1(x_1(t)) = \frac{1 - \text{sen}(kx_1(t))}{2} \quad \text{e} \quad \alpha_2(x_1(t)) = \frac{1 + \text{sen}(kx_1(t))}{2}.$$

A derivada das funções $\alpha_1(x_1(t))$ e $\alpha_2(x_1(t))$ são:

$$\dot{\alpha}_1(x_1(t)) = \frac{-k \cos(kx_1(t))}{2} x_2(t) \quad \text{e} \quad \dot{\alpha}_2(x_1(t)) = \frac{k \cos(kx_1(t))}{2} x_2(t), \quad (2.22)$$

sendo $k \in \mathbb{R}$, uma constante do sistema. Portanto pode-se observar que $\dot{\alpha}_i(x_1(t))$, $i = 1, 2$, dependem tanto de k quanto das condições iniciais do sistema, através da consideração feita em (1.11):

$$|\dot{\alpha}_1(x_1(t))| = |k| \left| \frac{\cos(kx_1(t))}{2} \right| |x_2(t)| \leq \frac{|k|}{2} |x_2(t)| \leq \phi_1, \quad (2.23)$$

$$|\dot{\alpha}_2(x_1(t))| = |k| \left| \frac{\cos(kx_1(t))}{2} \right| |x_2(t)| \leq \frac{|k|}{2} |x_2(t)| \leq \phi_2. \quad (2.24)$$

Para valores de $k > 0$, se k crescer, ϕ_p crescerá também e, pelas equações (2.23) e (2.24), se as condições iniciais do sistema ($\|x(0)\|$) aumentarem, conseqüentemente, ϕ_p aumentará, pois as equações dependem das condições iniciais em $x_2(t)$. Portanto, ambos os casos prejudicam o sistema. Desta forma, os resultados do Teorema 1.1, proposto em (TANAKA, 2003) permitem estabelecer a estabilidade do ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema apresentado no Teorema 1.1, somente para uma vizinhança em torno de $x = 0$ na qual $\|x(0)\|$ não é muito grande. Este problema não ocorre no Teorema 2.3 proposto, pois a derivada desta nova função de Lyapunov independe de $\dot{\alpha}_i$, $i = 1, 2$ e assim, as condições para estabilidade são válidas para toda condição inicial $x(0) \in \mathbb{R}^2$.

2.2.2 Exemplo 2.2

Neste exemplo, será mostrada a não dependência da derivada temporal da função de pertinência, satisfazendo as LMIs do Teorema 2.3, comparado com o exemplo dado em (TANAKA, 2003). Considerando a função candidata de Lyapunov dada em (2.16) e considerando também

(1.9) os modelos locais do sistema, sendo:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a & -4 \\ b & -2 \end{bmatrix}$$

com $\theta_m = \theta_1 \in [1, 100]$ quando $x^T(t)P_2x(t) > x^T(t)P_1x(t)$ e $\theta_m = \theta_2 \in [1, 100]$ quando $x^T(t)P_1x(t) > x^T(t)P_2x(t)$.

No Teorema 1.1 (TANAKA, 2003), a condição $P_\rho \succeq P_r$ das LMIs (1.12) tem que ser satisfeita para as condições de estabilidade global do sistema. Então, o termo ϕ_ρ em

$$\sum_{\rho=1}^{r-1} \phi_\rho (P_\rho - P_r) + \frac{1}{2} (A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i) \prec 0$$

de (1.12), prejudica a solução das LMIs (1.12) quanto maior for. Para grandes valores de ϕ_ρ , a solução obtida equivale a $P(\alpha) = P$, fixo, e $P_r = P$ e a expressão $P_\rho - P_r$ tende a zero.

As figuras abaixo mostram as regiões de factibilidade do sistema para valores de ϕ_ρ diferentes. Note a influência da derivada temporal e também que ao aumentarmos o ϕ_ρ a área factível não fica menor do que a região factível para $v(t) = x^T P x(t)$, Púnico, como justificado anteriormente.

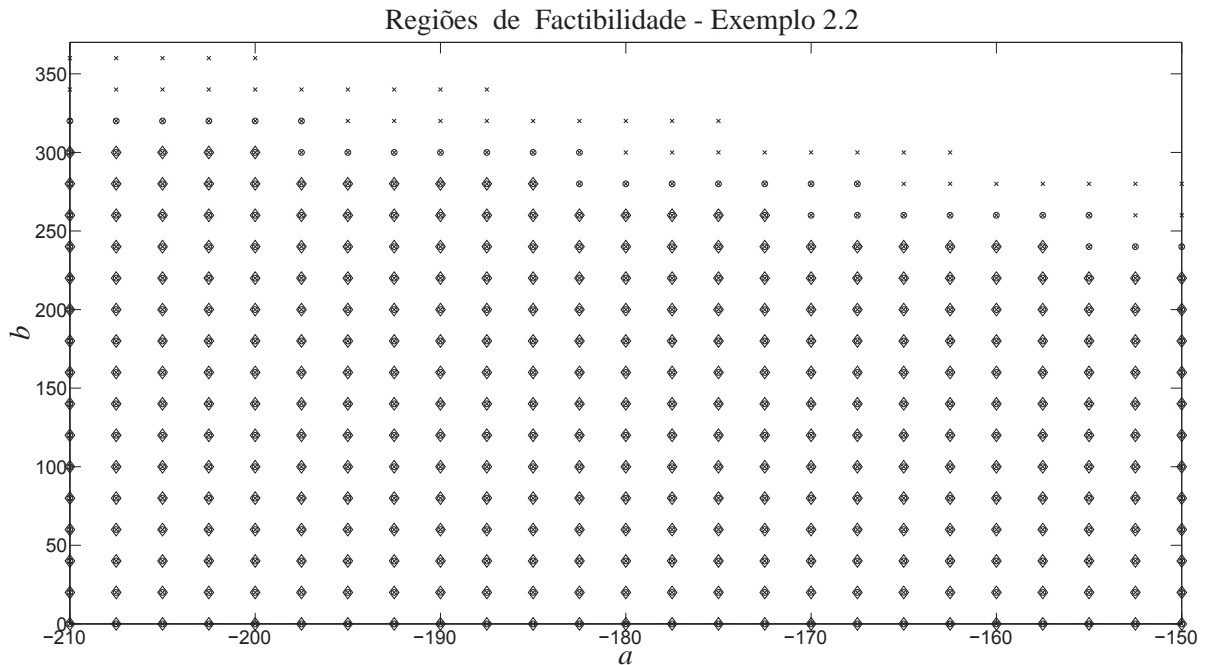


Figura 4: Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = 0.85$ com (Lemma 1.1, (o)), ((TANAKA, 2003), Teorema 1.1, (o)) e Teorema 2.3, (x).

Para $\phi_1 = \phi_2 = 0.85$, as matrizes obtidas das funções de Lyapunov que satisfazem as condições do Teorema 2.3, para o par $(a, b) = (2, 2)$, são:

Para a função $v(x(t)) = x^T(t)Px(t)$ com P único

$$P = \begin{bmatrix} 0.0111 & 0.0133 \\ 0.0133 & 0.1763 \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Para a função (1.8) $v(x(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t))x^T(t)P_i x(t)$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.0288 & 0.0247 \\ 0.0247 & 0.3644 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.0063 & 0.0196 \\ 0.0196 & 0.2115 \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Para a função (2.16) $v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} [x(t)^T P_m x(t)]$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.0106 & 0.0128 \\ 0.0128 & 0.1639 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.0120 & 0.0117 \\ 0.0117 & 0.1628 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Pela Figura 4, pode-se notar que o Teorema 2.3 apresenta uma maior região de factibilidade mesmo com valores de ϕ_ρ pequenos, comparando com o Lema 1.1 e Teorema 1.1 (TANAKA, 2003).

Ao aumentar o valor de ϕ_ρ observa-se que a região de factibilidade utilizando FLF, como no Teorema 1.1, diminui, como será mostrado nas Figuras 5 e 6.

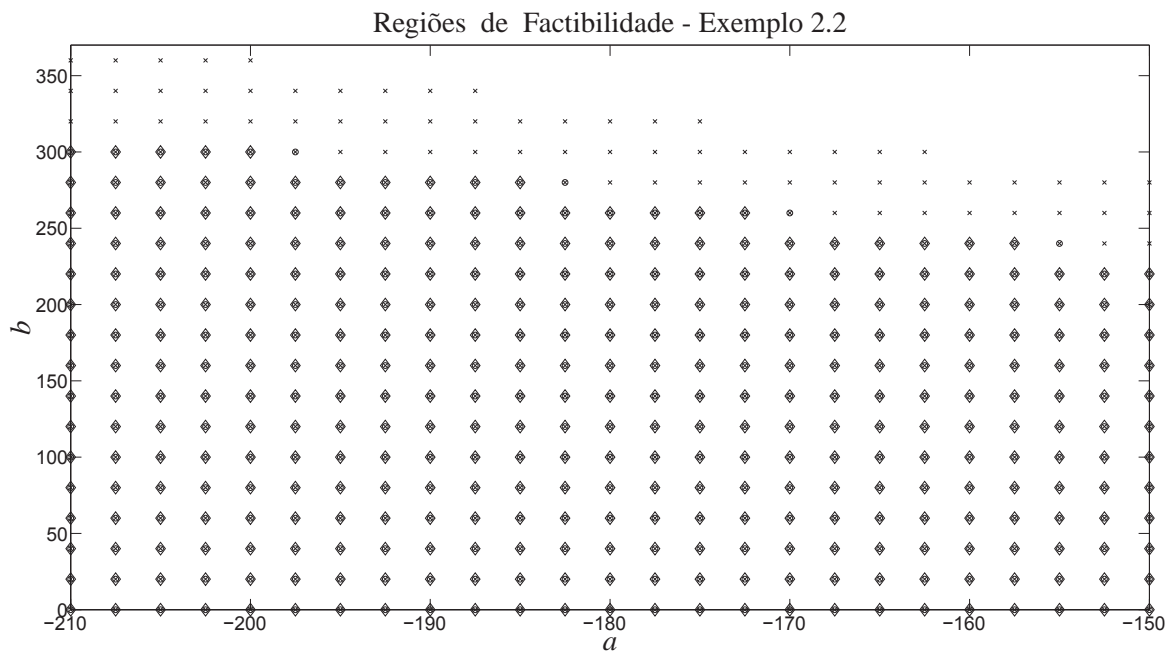


Figura 5: Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = 8$ com (Lema 1.1, (◇)), ((TANAKA, 2003), Teorema 1.1, (o)) e Teorema 2.3, (x).

Para $\phi_1 = \phi_2 = 8$, as matrizes obtidas das funções de Lyapunov que satisfazem as condições do Teorema 2.3, para o par $(a, b) = (2, 2)$ são:

Para a função $v(x(t)) = x^T(t)Px(t)$, com P único

$$P = \begin{bmatrix} 0.0111 & 0.0133 \\ 0.0133 & 0.1763 \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Para a função (1.8) $v(x(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t))x^T(t)P_i x(t)$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.0233 & 0.0259 \\ 0.0259 & 0.2201 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.0126 & 0.0146 \\ 0.0146 & 0.1975 \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Para a função (2.16) $v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} [x(t)^T P_m x(t)]$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.0106 & 0.0128 \\ 0.0128 & 0.1639 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.0120 & 0.0117 \\ 0.0117 & 0.1628 \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

A Figura 5 mostra que a região de factibilidade pertencente ao Teorema 2.3 permanece inalterada quando ϕ_ρ assume valores maiores, pois não depende de ϕ_ρ . Já o Teorema 1.1 (TANAKA, 2003) apresenta uma diminuição da região de factibilidade quase chegando a condição da FLQ.

Pela equação (1.12), a condição $P_\rho \geq P_r$ pertencente às LMIs faz com que o termo $P_\rho - P_r$ de $\sum_{\rho=1}^{r-1} \phi_\rho (P_\rho - P_r)$ tende a zero quando ϕ_ρ cresce, para satisfazer a condição $P_\rho - P_r \geq 0$. Assim, as condições de factibilidade usando FLF ficam iguais às condições com FLQ, como mostra a Figura 6.

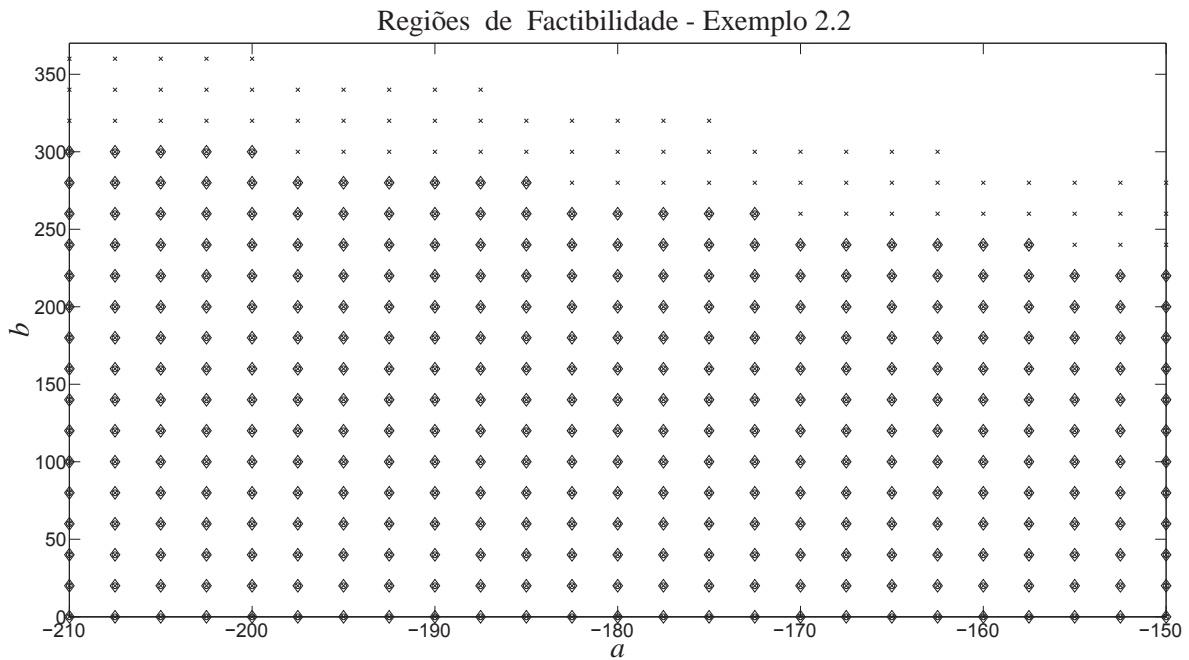


Figura 6: Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = 30$ com (Lema 1.1, (\diamond)), ((TANAKA, 2003), Teorema 1.1, (o)) e Teorema 2.3, (x).

Para $\phi_1 = \phi_2 = 30$, as matrizes obtidas das funções de Lyapunov que satisfazem as condições do Teorema 2.3, para o par $(a, b) = (2, 2)$ são:

Para a função $v(x(t)) = x^T(t)Px(t)$, com P único

$$P = \begin{bmatrix} 0.0111 & 0.0133 \\ 0.0133 & 0.1763 \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Para a função (1.8) $v(x(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t))x^T(t)P_i x(t)$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.0197 & 0.0256 \\ 0.0256 & 0.2465 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.0160 & 0.0187 \\ 0.0187 & 0.2309 \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Para a função (2.16) $v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} [x(t)^T P_m x(t)]$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.0106 & 0.0128 \\ 0.0128 & 0.1639 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.0120 & 0.0117 \\ 0.0117 & 0.1628 \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Note que o método proposto no Teorema 2.3 apresentou melhor área de factibilidade, para $\phi_1 = \phi_2 = 0.85, \phi_1 = \phi_2 = 8$ e $\phi_1 = \phi_2 = 30$ quando comparado com o Teorema 1.1 de Tanaka,

Hori e Wang (2003) e com $v(x(t)) = x^T(t)Px(t)$, P único.

2.2.3 Exemplo 2.3

Assim como o Exemplo 2.2, o sistema comprova a interferência de ϕ_ρ no sistema, mas agora, comparado ao teorema de Mozelli et al. (2009). As regras fuzzy são as mesmas que as usadas no Exemplo 1.3 e as matrizes locais são:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ \frac{1}{5}(3b-2) & \frac{1}{5}(3a-4) \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ \frac{1}{5}(2b-3) & \frac{1}{5}(2a-6) \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ b & -2 \end{bmatrix},$$

com $\theta_m = \theta_1 = \theta_2 \in [50, 100]$.

As figuras mostradas abaixo, mostrarão a influência de ϕ_ρ no sistema fuzzy TS (1.9) para valores de ϕ_ρ diferentes de modo a mostrar que ϕ_ρ , no Teorema 1.2 (MOZELLI, 2009) prejudica a solução das LMIs (1.15). Para grandes valores de ϕ_ρ , a solução obtida equivale a um $P(\alpha) = P$, fixo e $P = -X$ do termo

$$\tilde{P}_\phi + \frac{1}{2} (A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i) \prec 0,$$

das LMIs (1.15), sendo $\tilde{P}_\phi = \sum_{\rho=1}^r \phi_\rho (P_\rho + X)$ e a expressão $P_\rho + X \succeq 0$ é satisfeita para $P_\rho + X = 0$.

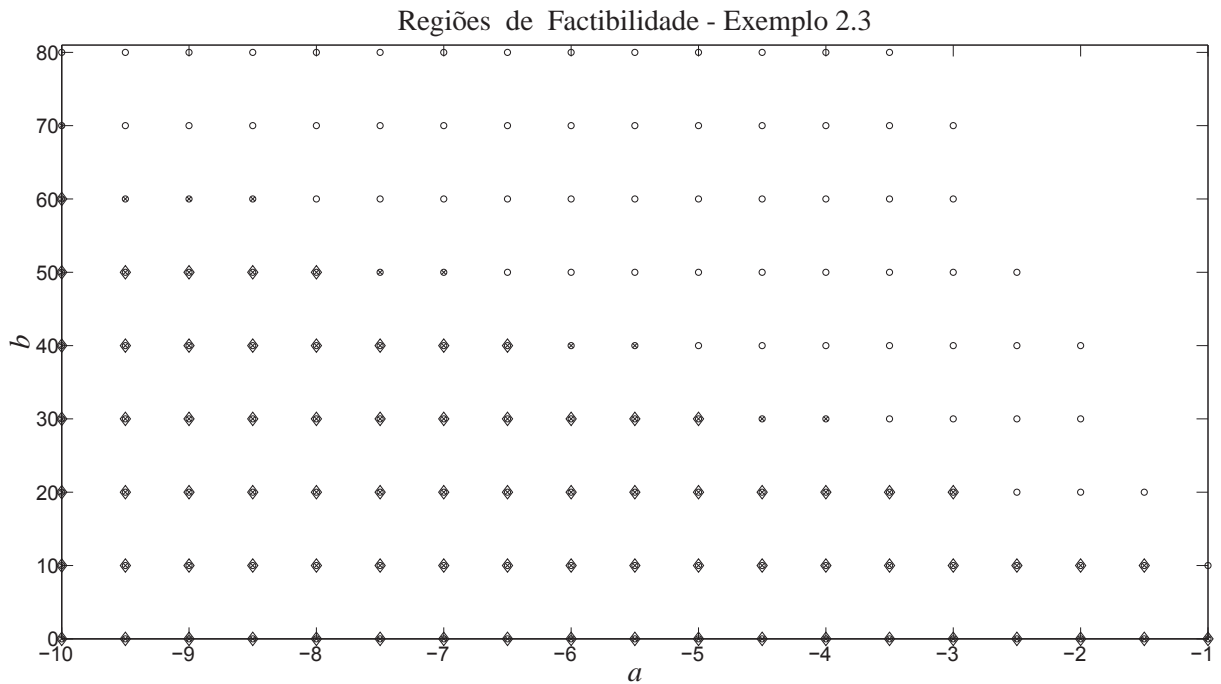


Figura 7: Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 0.85$ com (Lema 1.1, (\diamond)), ((MOZELLI, 2009), Teorema 1.2, (o)) e Teorema 2.3, (x).

Para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 0.85$, as matrizes obtidas das funções de Lyapunov que satisfazem as condições do Teorema 2.3, para o par $(a, b) = (2, 2)$ são:

Para a função $v(x(t)) = x^T(t)Px(t)$, com P único

$$P = \begin{bmatrix} 0.1544 & -0.0182 \\ -0.0182 & 0.1211 \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Para a função (1.8) $v(x(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t))x^T(t)P_i x(t)$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.3942 & -0.0986 \\ -0.0986 & 0.2035 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.4358 & -0.0610 \\ -0.0610 & 0.2654 \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.5341 & -0.1380 \\ -0.1380 & 0.3936 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 0.8145 & 0.0056 \\ 0.0056 & 0.5769 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Para a função (2.16) $v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} [x(t)^T P_m x(t)]$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.1560 & -0.0235 \\ -0.0235 & 0.1309 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.1551 & -0.0257 \\ -0.0257 & 0.1257 \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.1518 & -0.0238 \\ -0.0238 & 0.1227 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 0.1509 & -0.0264 \\ -0.0264 & 0.1163 \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Utilizando quatro modelos locais, quando $\phi_\rho = 0.85, \rho = 1, \dots, 4$, como mostra a Figura 7, o Teorema 1.2 (MOZELLI, 2009) apresenta uma maior região de factibilidade, quando comparado ao Lema 1.1 e ao Teorema 2.3, mas, ao aumentar os valores de ϕ_ρ essa região diminui significativamente e a região de factibilidade do Teorema 2.3 permanece inalterada, ficando assim, maior do que a do Teorema 1.2, como mostra as Figuras 2.5 e 2.6.

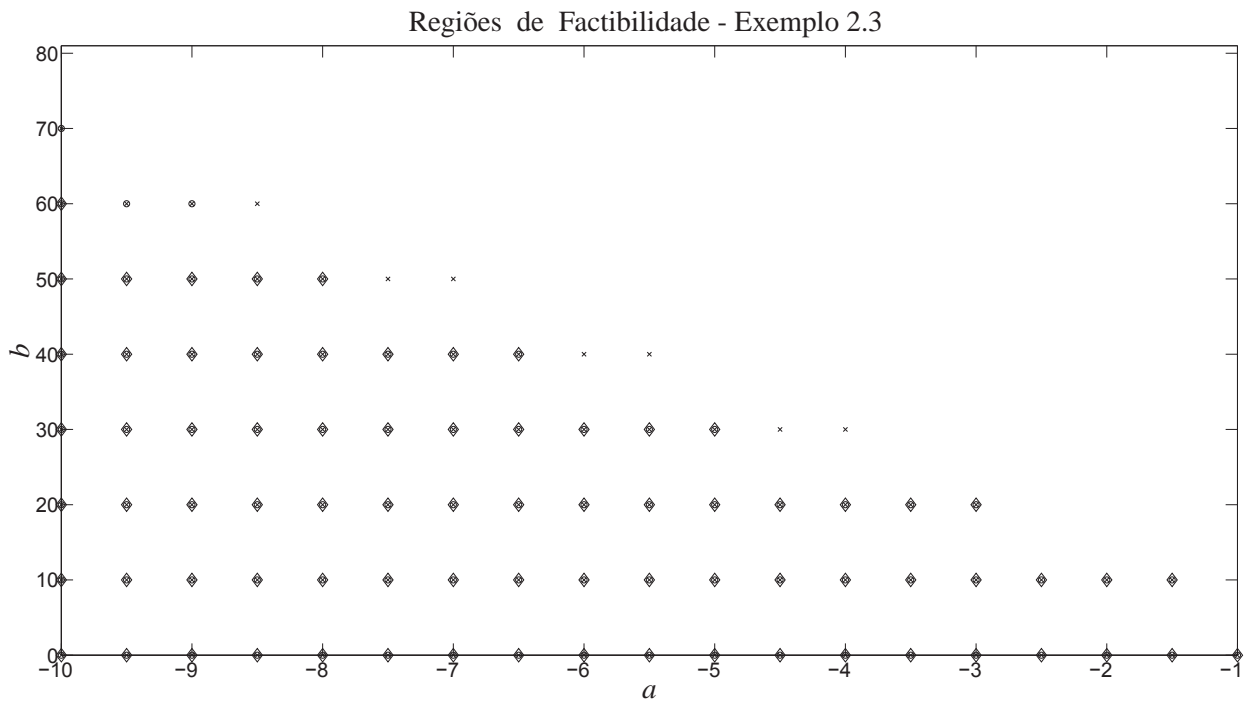


Figura 8: Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 8$ com (Lema 1.1, (◇)), ((MOZELLI, 2009), Teorema 1.2, (o)) e Teorema 2.3, (x).

Para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 8$, as matrizes obtidas das funções de Lyapunov que satisfazem as condições do Teorema 2.3, para o par $(a, b) = (2, 2)$ são:

Para a função $v(x(t)) = x^T(t)Px(t)$, com P único

$$P = \begin{bmatrix} 0.1544 & -0.0182 \\ -0.0182 & 0.1211 \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Para a função (1.8) $v(x(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t))x^T(t)P_i x(t)$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.5155 & -0.1090 \\ -0.1090 & 0.2938 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.5129 & -0.1025 \\ -0.1025 & 0.2946 \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.5233 & -0.1049 \\ -0.1049 & 0.2983 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 0.6942 & -0.0143 \\ -0.0143 & 0.3874 \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Para a função (2.16) $v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} [x(t)^T P_m x(t)]$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.1560 & -0.0235 \\ -0.0235 & 0.1309 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.1551 & -0.0257 \\ -0.0257 & 0.1257 \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.1518 & -0.0238 \\ -0.0238 & 0.1227 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 0.1509 & -0.0264 \\ -0.0264 & 0.1163 \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

A Figura 9 mostra que a região de factibilidade do Teorema 1.2 (MOZELLI, 2009) chega à condição da FLQ, fazendo com que a região do Teorema 2.3 se sobressaia ainda mais, pois ela fica inalterada pela não dependência da derivada temporal da função de pertinência (ϕ_ρ).

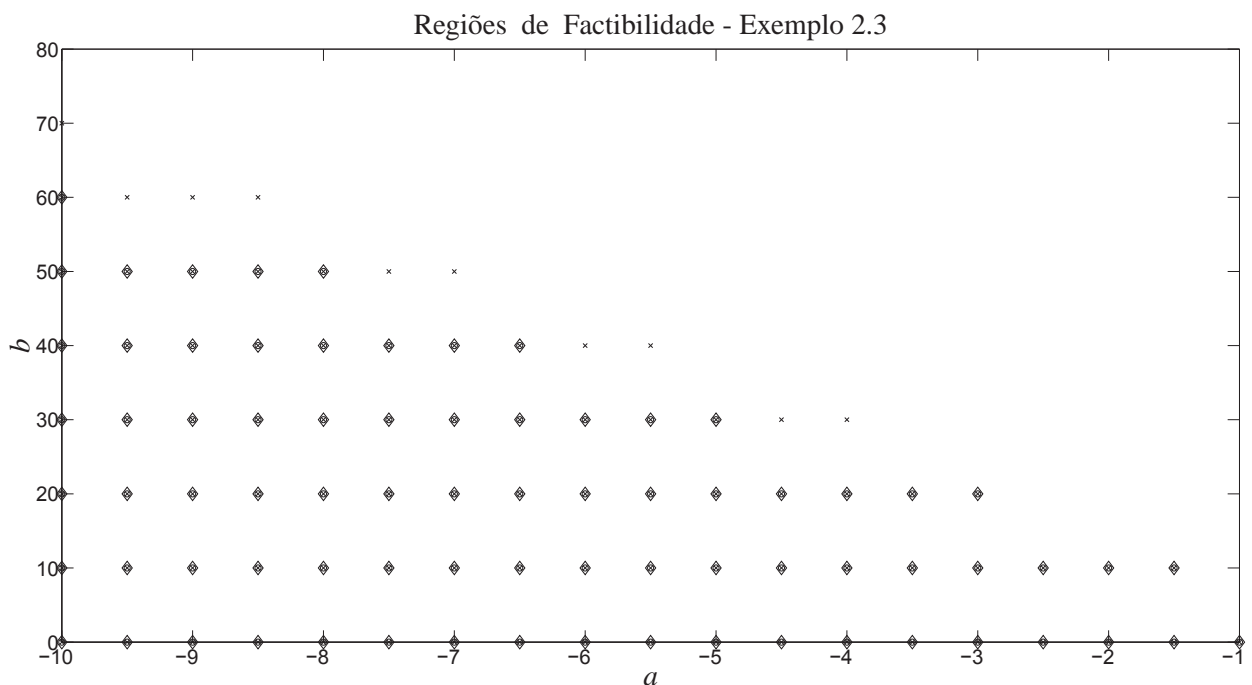


Figura 9: Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 30$ com (Lema 1.1, (\diamond)), ((MOZELLI, 2009), Teorema 1.2, (o)) e Teorema 2.3, (x).

Para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 30$, as matrizes obtidas das funções de Lyapunov que satisfazem

as condições do Teorema 2.3, para o par $(a, b) = (2, 2)$ são:

Para a função $v(x(t)) = x^T(t)Px(t)$, com P único

$$P = \begin{bmatrix} 0.1544 & -0.0182 \\ -0.0182 & 0.1211 \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Para a função (1.8) $v(x(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t))x^T(t)P_i x(t)$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.4435 & -0.0569 \\ -0.0569 & 0.2522 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.4407 & -0.0555 \\ -0.0555 & 0.2523 \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.4431 & -0.0564 \\ -0.0564 & 0.2510 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 0.4572 & -0.0477 \\ -0.0477 & 0.2566 \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Para a função (2.16) $v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} [x(t)^T P_m x(t)]$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.1560 & -0.0235 \\ -0.0235 & 0.1309 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.1551 & -0.0257 \\ -0.0257 & 0.1257 \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.1518 & -0.0238 \\ -0.0238 & 0.1227 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 0.1509 & -0.0264 \\ -0.0264 & 0.1163 \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

O método proposto no Teorema 2.3 apresentou melhores regiões de factibilidade para ϕ_p maiores, por exemplo, nas Figuras 2.5 e 2.6 quando os valores de $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 8$ e $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 30$, respectivamente, pois no Teorema 1.2 proposto por Mozelli et al. (2009), o método de Tanaka, Hori e Wang (2003) foi flexibilizado, apresentando melhores regiões de factibilidade.

Pode-se observar, que quando $\phi_p = 30$ tanto no Exemplo 2.2 quanto no Exemplo 2.3, os valores das matrizes P_p são muito próximos, sendo comprovado pelas Figuras 2.3 a 2.6 que tendem à condição de P único (FLQ).

2.3 CONCLUSÕES PARCIAIS

Neste capítulo, foi apresentado um estudo sobre sistemas com funções baseados em Lyapunov-Metzler (DEAECTO, 2007; GEROMEL; COLANERI, 2006). Foram mostradas condições suficientes para o estudo da estabilidade destes sistemas, contínuos no tempo. As novas condições

apresentadas dependem de um conjunto de desigualdades de Lyapunov-Metzler que, por possuírem natureza não-convexa, são difíceis de serem resolvidas. Então em (DEAECTO, 2007; GEROMEL; COLANERI, 2006) foram propostas novas condições mais conservadoras, baseadas em subclasse de matrizes de Metzler. Através das novas condições encontradas, foi proposto o Teorema 2.3, que estabeleceu uma função candidata Lyapunov-Metzler e modelos fuzzy TS. Com isso, foi eliminado a dependência da derivada temporal das funções de pertinência na variação temporal da função considerando a condição $|\dot{\alpha}_\rho| \leq \phi_\rho$, que prejudica a factibilidade das LMIs quando, obtidas no estudo da estabilidade utilizando Funções de Lyapunov Fuzzy (FLF) (TANAKA, 2003; MOZELLI, 2009). Os Exemplos 2.1, 2.2 e 2.3 mostram a dependência de ϕ_ρ nas FLF e a não dependência da derivada da função de pertinência nas funções de Lyapunov-Metzler. Quanto maiores forem os valores de ϕ_ρ , menor será a região de factibilidade até o sistema convergir para um P único e a função de Lyapunov para $v(x(t)) = x^T(t)Px(t)$, como pode-se observar nas figuras apresentadas. Nos exemplos deste capítulo, o Teorema 2.3 apresenta uma maior região de factibilidade comparado com a proposta de (TANAKA, 2003), independente dos valores de ϕ_ρ , ou seja, mesmo com valores de ϕ_ρ pequenos a região permanece maior em relação ao Teorema 1.1 de (TANAKA, 2003) e, quando ϕ_ρ aumenta, a região de factibilidade pertencente ao Teorema 1.1 diminui, enquanto que a região do Teorema 2.3 não se altera, fazendo com que ela se destaque ainda mais, como pode-se notar nas Figuras 2.1, 2.2 e 2.3. Quando a nova condição (Teorema 2.3) foi comparada com o Teorema 1.2 (MOZELLI, 2009), para $\phi_\rho = 0.85, \rho = 1, \dots, 4$ a região de factibilidade do Teorema 1.2 é maior em relação à nova condição. Mas, conforme os valores de ϕ_ρ crescem, a região de factibilidade do Teorema 1.2 vai diminuindo significativamente até chegar a condição da FLQ, como mostra as Figuras 2.4, 2.5 e 2.6.

3 ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE SISTEMAS FUZZY TAKAGI-SUGENO UTILIZANDO FUNÇÕES DE LYAPUNOV-METZLER (FLFM)

Neste capítulo, serão abordadas novas condições de estabilidade, baseadas em funções de Lyapunov Metzler juntamente com funções de Lyapunov Fuzzy. Estas novas condições diminuem o conservadorismo dos sistemas, de modo a obter maiores regiões de factibilidade, pois como mostrado no capítulo anterior, nas FLF destacam-se a presença da derivada temporal da função de pertinência, sendo necessário selecionar um limitante superior para resolver as LMIs, tornando o sistema mais restritivo. Então, utilizando sistemas baseados nas desigualdades de Lyapunov-Metzler (DEAECTO, 2007; GEROMEL; COLANERI, 2006) e sistemas baseados em funções de Lyapunov Fuzzy, é possível obter LMIs que aumentam a região de factibilidade do sistema através de condições mais relaxadas, utilizando as novas funções de Lyapunov propostas, denominadas Funções de Lyapunov Fuzzy-Metzler (FLFM).

3.1 CONDIÇÃO MAIS RELAXADA DE ESTABILIDADE UTILIZANDO FLFM

Considerando a nova função candidata de Lyapunov:

$$v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} \left[x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i P_{mi} \right) x(t) \right] \quad (3.1)$$

sendo $i = \{1, 2, \dots, r\}$.

Teorema 3.1. *Considere que $|\dot{\alpha}_\rho(x(t))| \leq \phi_\rho$, $\rho \in \mathbb{K}$. Então, o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema TS dado em (1.9) é assintoticamente estável, se existirem matrizes P_{mj} , $X_{ijm} = X_{ijm}^T =$*

$X_{jim} = X_{jim}^T$ e escalares $\theta_m \geq 0$, sendo que $i, j, k, m \in \mathbb{K}$, que satisfaçam as seguintes LMIs:

$$\begin{cases} P_{mi} = P_{mi}^T \succ 0, \\ P_{mk} + X_{ijm} \succeq 0, \\ \tilde{P}_{\phi_{ijm}} + \frac{1}{2} (A_j^T P_{mi} + P_{mi} A_j + A_i^T P_{mj} + P_{mj} A_i) + \\ + \frac{1}{2} \theta_m [(P_{ji} - P_{mi}) + (P_{ij} - P_{mj})] \prec 0, \end{cases} \quad \begin{array}{l} i \leq j \\ i \leq j \end{array} \quad (3.2)$$

sendo $\tilde{P}_{\phi_{ijm}} = \sum_{\rho=1}^r \phi_{\rho} (P_{m\rho} + X_{ijm})$.

Demonstração. Considerando a candidata a função de Lyapunov dada em (3.1), seguindo os mesmo passos da prova dos Teoremas 2.1 e 2.2, note que a derivada de Dini (GARG, 1998) à direita desta função será:

$$D^+v(x(t)) = \min_{m \in M(x(t))} \left[\sum_{\rho=1}^r \dot{\alpha}_{\rho}(x(t)) (x^T(t) P_{m\rho} x(t)) + \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) (\dot{x}^T(t) P_{mi} x(t) + x^T(t) P_{mi} \dot{x}(t)) \right]. \quad (3.3)$$

Substituindo (1.9) em (3.3),

$$D^+v(x(t)) = \min_{m \in M(x(t))} \left\{ \sum_{\rho=1}^r \dot{\alpha}_{\rho}(x(t)) (x^T(t) P_{m\rho} x(t)) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) [x^T(t) (A_j^T P_{mi} + P_{mi} A_j) x(t)] \right\}. \quad (3.4)$$

Como de (1.7)

$$\alpha_i(x(t)) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) = 1, \quad \sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(x(t)) = 0,$$

tem-se que

$$\sum_{\rho=1}^r \dot{\alpha}_{\rho}(x(t)) = 0, \quad (3.5)$$

e assim, de (3.4):

$$\begin{aligned} D^+v(x(t)) = \min_{m \in M(x(t))} \left\{ x(t)^T \left[\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) \sum_{\rho=1}^r \dot{\alpha}_{\rho}(x(t)) P_{m\rho} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{\rho=1}^r \dot{\alpha}_{\rho}(x(t)) \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) X_{ijm} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) \frac{1}{2} (A_j^T P_{mi} + P_{mi} A_j + A_i^T P_{mj} + P_{mj} A_i) \right] x(t) \right\}. \quad (3.6) \end{aligned}$$

Então

$$D^+v(x(t)) = \min_{m \in M(x(t))} \left\{ x(t)^T \left[\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) \sum_{\rho=1}^r \dot{\alpha}_\rho(x(t)) (P_{m\rho} + X_{ijm}) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) \frac{1}{2} (A_j^T P_{mi} + P_{mi} A_j + A_i^T P_{mj} + P_{mj} A_i) \right] x(t) \right\}. \quad (3.7)$$

$$D^+v(x(t)) = \min_{m \in M(x(t))} \left\{ x(t)^T \left[\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) \left(\sum_{\rho=1}^r \dot{\alpha}_\rho(x(t)) (P_{m\rho} + X_{ijm}) + \frac{1}{2} (A_j^T P_{mi} + P_{mi} A_j + A_i^T P_{mj} + P_{mj} A_i) \right) \right] x(t) \right\}. \quad (3.8)$$

Considerando que

$$P_{m\rho} + X_{ijm} \succeq 0, \quad \rho = 1, \dots, r \text{ e } m = 1, \dots, r, \quad (3.9)$$

$|\dot{\alpha}_\rho(x(t))| \leq \phi_\rho$, $\rho = \{1, 2, \dots, r\}$, e que

$$x^T(t) (P_j(\alpha) - P_m(\alpha)) x(t) = x^T(t) \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) (P_{ji} - P_{mi}) x(t) \geq 0,$$

$\theta_m \geq 0$, para todo $j, m \in \{1, 2, \dots, r\}$, então de (3.8), sendo

$$\tilde{P}_{\phi_{ijm}} = \sum_{\rho=1}^r \phi_\rho (P_{m\rho} + X_{ijm}), \quad (3.10)$$

$$D^+v(x(t)) \leq x(t)^T \left\{ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) \left[\tilde{P}_{\phi_{ijm}} + \frac{1}{2} (A_j^T P_{mi} + P_{mi} A_j + A_i^T P_{mj} + P_{mj} A_i) \right] + \theta_m \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) (P_{ji} - P_{mi}) \right\} x(t). \quad (3.11)$$

Multiplicando o termo $\theta_m \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) (P_{ji} - P_{mi})$ da equação (3.11) por $\alpha_j(x(t))$ e tomando a somatória de $j = 1$ a $j = r$:

$$D^+v(x(t)) \leq x(t)^T \left\{ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) \left[\tilde{P}_{\phi_{ijm}} + \frac{1}{2} (A_j^T P_{mi} + P_{mi} A_j + A_i^T P_{mj} + P_{mj} A_i) \right] + \frac{1}{2} \theta_m \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) [(P_{ji} - P_{mi}) + (P_{ij} - P_{mj})] \right\} x(t). \quad (3.12)$$

Então,

$$D^+v(x(t)) \leq x(t)^T \left\{ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) \left[\tilde{P}_{\phi_{ijm}} + \frac{1}{2} (A_j^T P_{mi} + P_{mi} A_j + A_i^T P_{mj} + P_{mj} A_i) + \frac{1}{2} \theta_m [(P_{ji} - P_{mi}) + (P_{ij} - P_{mj})] \right] \right\} x(t). \quad (3.13)$$

Portanto, as LMIs apresentadas no Teorema 3.1 são suficientes para a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio $x = 0$ do modelo fuzzy (1.9). \square

Para ilustrar o Teorema 3.1, serão mostrados exemplos que mostram o aumento da região de factibilidade deste novo teorema comparado aos mostrados nos capítulos anteriores.

3.1.1 Exemplo 3.1

Neste exemplo será comparado o Teorema 3.1 com Tanaka, Hori e Wang (2003) e o Lema 1.1 (FLQ), para mostrar as regiões de factibilidade encontradas, descritas nas Figuras 10, 11 e 12 a seguir. As matrizes do sistema fuzzy TS são:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ b & -2 \end{bmatrix},$$

e as regras fuzzy do sistema são as mesmas do Exemplo 1.2.

As figuras a seguir, mostram os resultados obtidos, satisfazendo as condições do Teorema 3.1 para vários valores do par (a, b) , sendo $\theta_1 = 1$ e $\theta_2 = 100$.

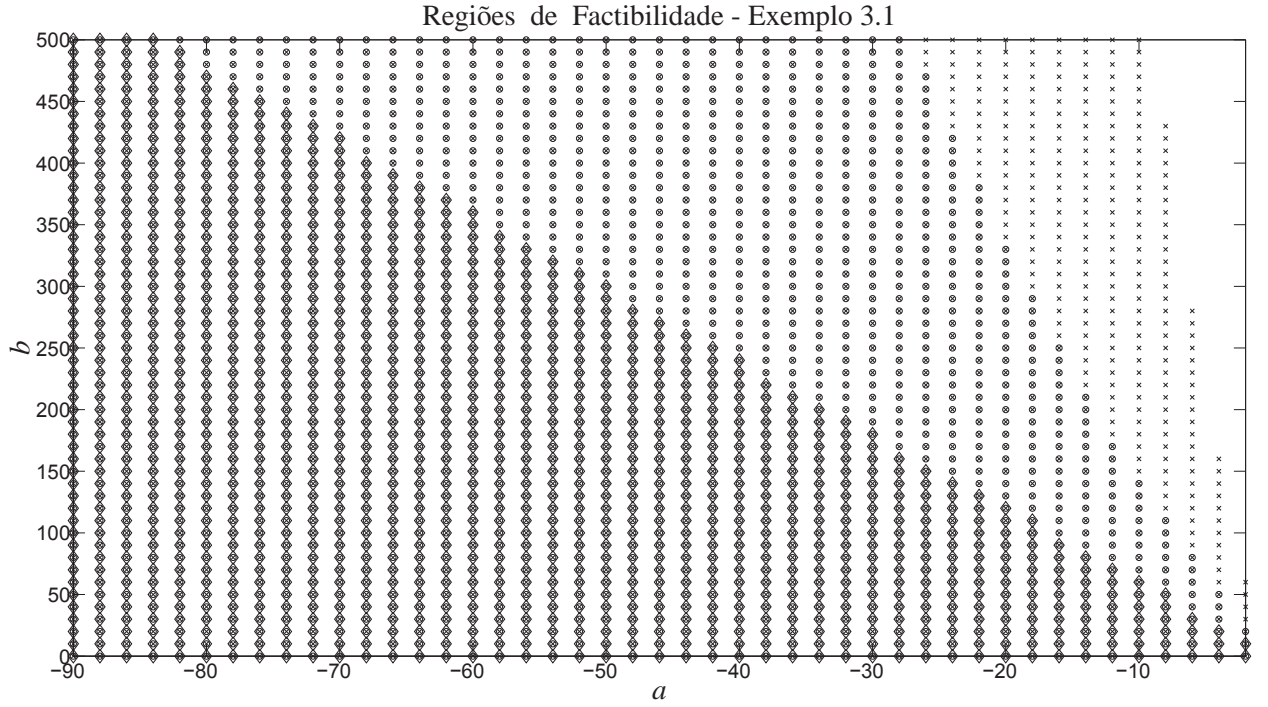


Figura 10: Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = 0.85$ com (Lema 1.1, (\diamond)), ((TANAKA, 2003), Teorema 1.1, (o)) e Teorema 3.1 (x).

Para $\phi_1 = \phi_2 = 0.85$, as matrizes obtidas das funções de Lyapunov que satisfazem as condições do Teorema 3.1, para o par $(a, b) = (2, 2)$ são:

Para a função $v(x(t)) = x^T(t)Px(t)$ com P único

$$P = \begin{bmatrix} 0.0905 & -0.0009 \\ -0.0009 & 0.0256 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Para a função (1.8) $v(x(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t))x^T(t)P_i x(t)$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.2355 & -0.0084 \\ -0.0084 & 0.0333 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.0800 & -0.0035 \\ -0.0035 & 0.0262 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Para a função (3.1) $v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} \left[x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i P_{mi} \right) x(t) \right]$

$$P_{11} = \begin{bmatrix} 0.3691 & -0.0178 \\ -0.0178 & 0.0238 \end{bmatrix}, \quad P_{12} = \begin{bmatrix} 0.2998 & 0.0012 \\ 0.0012 & 0.1121 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$P_{21} = \begin{bmatrix} 0.3607 & -0.0169 \\ -0.0169 & 0.0209 \end{bmatrix}, \quad P_{22} = \begin{bmatrix} 0.3005 & -0.0045 \\ -0.0045 & 0.0904 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

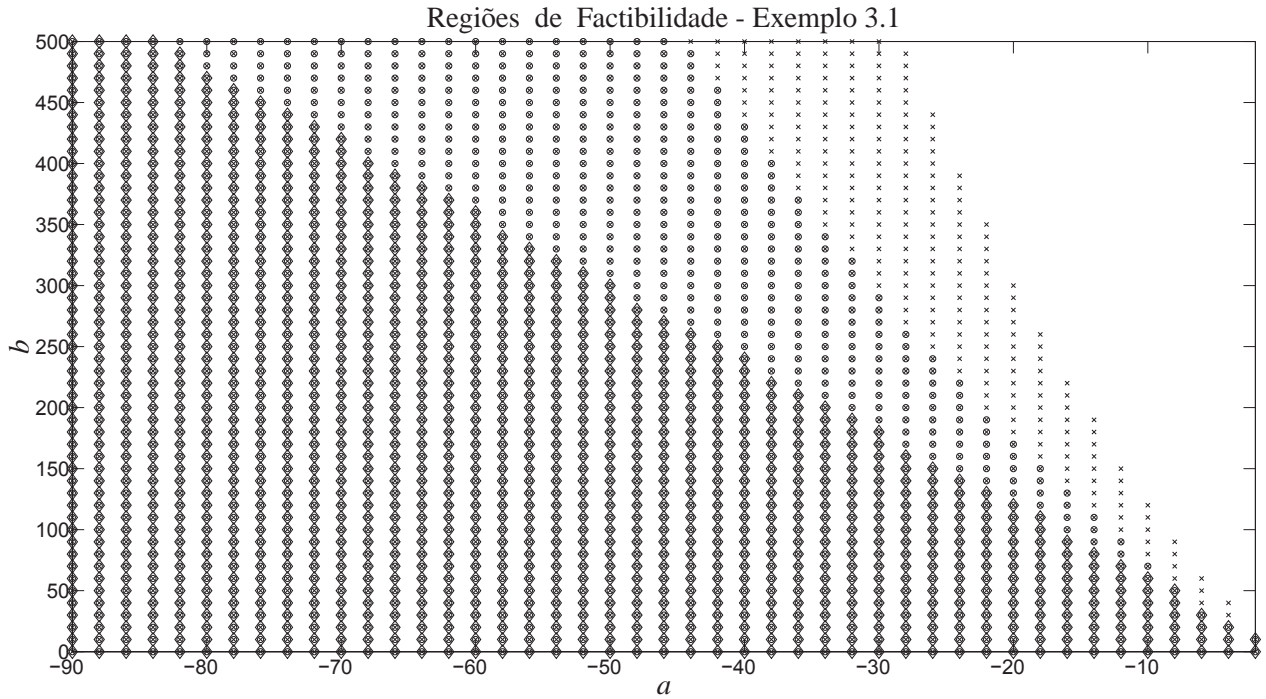


Figura 11: Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = 8$ com (Lema 1.1, (\diamond)), ((TANAKA, 2003), Teorema 1.1, (o)) e Teorema 3.1 (x).

Para $\phi_1 = \phi_2 = 8$, as matrizes obtidas das funções de Lyapunov que satisfazem as condições do Teorema 3.1, para o par $(a, b) = (2, 2)$ são:

Para a função $v(x(t)) = x^T(t)Px(t)$ com P única

$$P = \begin{bmatrix} 0.0905 & -0.0009 \\ -0.0009 & 0.0256 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Para a função (1.8) $v(x(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t))x^T(t)P_i x(t)$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.1420 & -0.0027 \\ -0.0027 & 0.0382 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.1074 & -0.0054 \\ -0.0054 & 0.0336 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Para a função (3.1) $v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} \left[x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i P_{mi} \right) x(t) \right]$

$$P_{11} = \begin{bmatrix} 1.1933 & -0.0541 \\ -0.0541 & 0.3350 \end{bmatrix}, \quad P_{12} = \begin{bmatrix} 1.2047 & 0.0241 \\ 0.0241 & 0.4444 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$P_{21} = \begin{bmatrix} 1.2365 & -0.0613 \\ -0.0613 & 0.2523 \end{bmatrix}, \quad P_{22} = \begin{bmatrix} 1.2860 & 0.0383 \\ 0.0383 & 0.3974 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

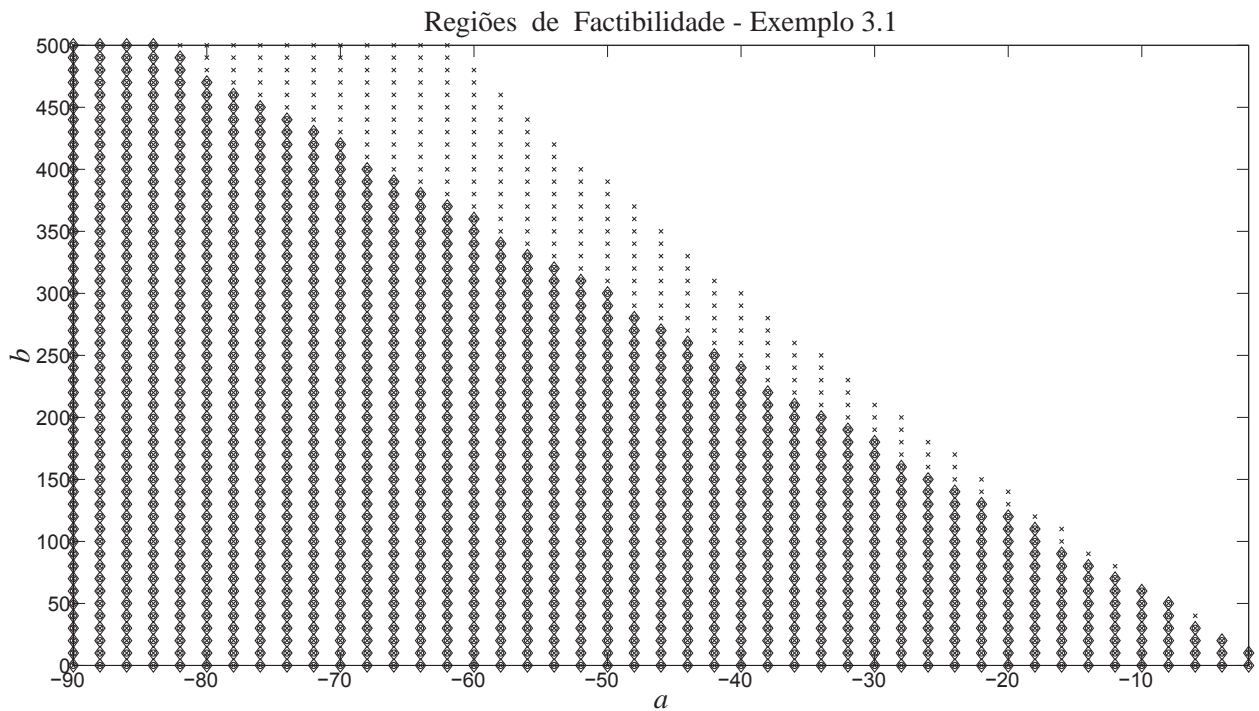


Figura 12: Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = 30$ com (Lema 1.1, (◇)), ((TANAKA, 2003), Teorema 1.1, (o)) e Teorema 3.1 (x).

Para $\phi_1 = \phi_2 = 30$, as matrizes obtidas das funções de Lyapunov que satisfazem as condições do Teorema 3.1, para o par $(a, b) = (2, 2)$ são:

Para a função $v(x(t)) = x^T(t)Px(t)$ com P único

$$P = \begin{bmatrix} 0.0905 & -0.0009 \\ -0.0009 & 0.0256 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Para a função (1.8) $v(x(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t))x^T(t)P_i x(t)$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.1335 & -0.0024 \\ -0.0024 & 0.0379 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.1228 & -0.0048 \\ -0.0048 & 0.0360 \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Para a função (3.1) $v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} \left[x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i P_{mi} \right) x(t) \right]$

$$P_{11} = \begin{bmatrix} 2.3186 & -0.0480 \\ -0.0480 & 0.9347 \end{bmatrix}, \quad P_{12} = \begin{bmatrix} 2.3211 & -0.0358 \\ -0.0358 & 0.9315 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$P_{21} = \begin{bmatrix} 2.5957 & -0.0538 \\ -0.0538 & 0.8248 \end{bmatrix}, \quad P_{22} = \begin{bmatrix} 2.6259 & -0.0330 \\ -0.0330 & 0.8435 \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Pode-se notar a influência de ϕ_p no sistema quando utiliza-se FLF, através das Figuras 10, 11 e 12, e também, a influência de quando se utiliza as FLFM. Observe que quando aumentou-se o valor de ϕ_p a região obtida com o Teorema 3.1 diminui, mas menos que quando só se utiliza FLF.

O Exemplo 3.2, apresenta resultados adicionais deste teorema, mas agora utilizando quatro modelos fuzzy TS.

3.1.2 Exemplo 3.2

Este exemplo mostra os resultados obtidos com o Teorema 3.1, mas agora utilizando quatro regras fuzzy TS. Os resultados foram comparados com o Lema 1.1 (FLQ) e o Teorema 1.2 (MOZELLI, 2009). As regras fuzzy são as mesmas do Teorema 1.2 e os modelos locais do sistema fuzzy TS são:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ \frac{1}{5}(3b-2) & \frac{1}{5}(3a-4) \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ \frac{1}{5}(2b-3) & \frac{1}{5}(2a-6) \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ b & -2 \end{bmatrix}$$

sendo $\theta_m = \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 1000$.

As Figuras 13, 14 e 15 mostram os resultados obtidos do Teorema 3.1 para vários valores do par (a, b) .

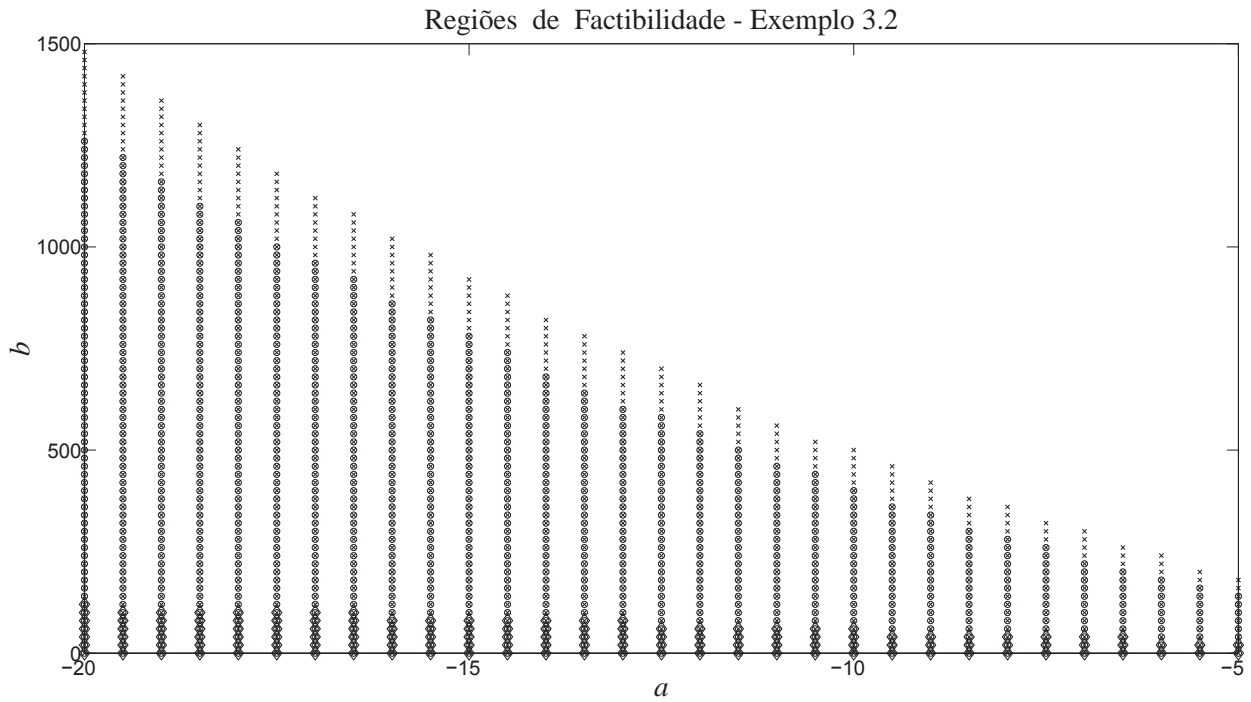


Figura 13: Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 0.85$ com (Lema 1.1, (\diamond)), ((MOZELLI, 2009), Teorema 1.2, (o)) e Teorema 3.1, (x).

Para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 0.85$, as matrizes obtidas das funções de Lyapunov que satisfazem as condições do Teorema 3.1, para o par $(a, b) = (2, 2)$ são:

Para a função $v(x(t)) = x^T(t)Px(t)$ com P único

$$P = \begin{bmatrix} 0.1999 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0483 \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Para a função (1.8) $v(x(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t))x^T(t)P_i x(t)$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.3862 & -0.0521 \\ -0.0521 & 0.0718 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.4116 & -0.0237 \\ -0.0237 & 0.0879 \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.4834 & -0.0582 \\ -0.0582 & 0.1302 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 0.9925 & 0.0149 \\ 0.0149 & 0.1917 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Para a função (3.1) $v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} \left[x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i P_{mi} \right) x(t) \right]$

$$P_{11} = \begin{bmatrix} 2.9757 & -0.4039 \\ -0.4039 & 1.1645 \end{bmatrix}, \quad P_{12} = \begin{bmatrix} 3.7739 & -0.0457 \\ -0.0457 & 1.2844 \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

$$P_{13} = \begin{bmatrix} 4.0986 & -0.2631 \\ -0.2631 & 1.6823 \end{bmatrix}, \quad P_{14} = \begin{bmatrix} 6.8299 & 0.2099 \\ 0.2099 & 1.6819 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$P_{21} = \begin{bmatrix} 2.9783 & -0.4058 \\ -0.4058 & 1.1573 \end{bmatrix}, \quad P_{22} = \begin{bmatrix} 3.7721 & -0.0479 \\ -0.0479 & 1.2819 \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

$$P_{23} = \begin{bmatrix} 4.0984 & -0.2664 \\ -0.2664 & 1.6774 \end{bmatrix}, \quad P_{24} = \begin{bmatrix} 6.8218 & 0.2040 \\ 0.2040 & 1.6757 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$P_{31} = \begin{bmatrix} 2.9765 & -0.4050 \\ -0.4050 & 1.1588 \end{bmatrix}, \quad P_{32} = \begin{bmatrix} 3.7716 & -0.0482 \\ -0.0482 & 1.2815 \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

$$P_{33} = \begin{bmatrix} 4.0962 & -0.2651 \\ -0.2651 & 1.6751 \end{bmatrix}, \quad P_{34} = \begin{bmatrix} 6.8215 & 0.2036 \\ 0.2036 & 1.6721 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$P_{41} = \begin{bmatrix} 2.9848 & -0.4025 \\ -0.4025 & 1.1550 \end{bmatrix}, \quad P_{42} = \begin{bmatrix} 3.7727 & -0.0475 \\ -0.0475 & 1.2769 \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

$$P_{43} = \begin{bmatrix} 4.0988 & -0.2660 \\ -0.2660 & 1.6700 \end{bmatrix}, \quad P_{44} = \begin{bmatrix} 6.8124 & 0.2003 \\ 0.2003 & 1.6627 \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

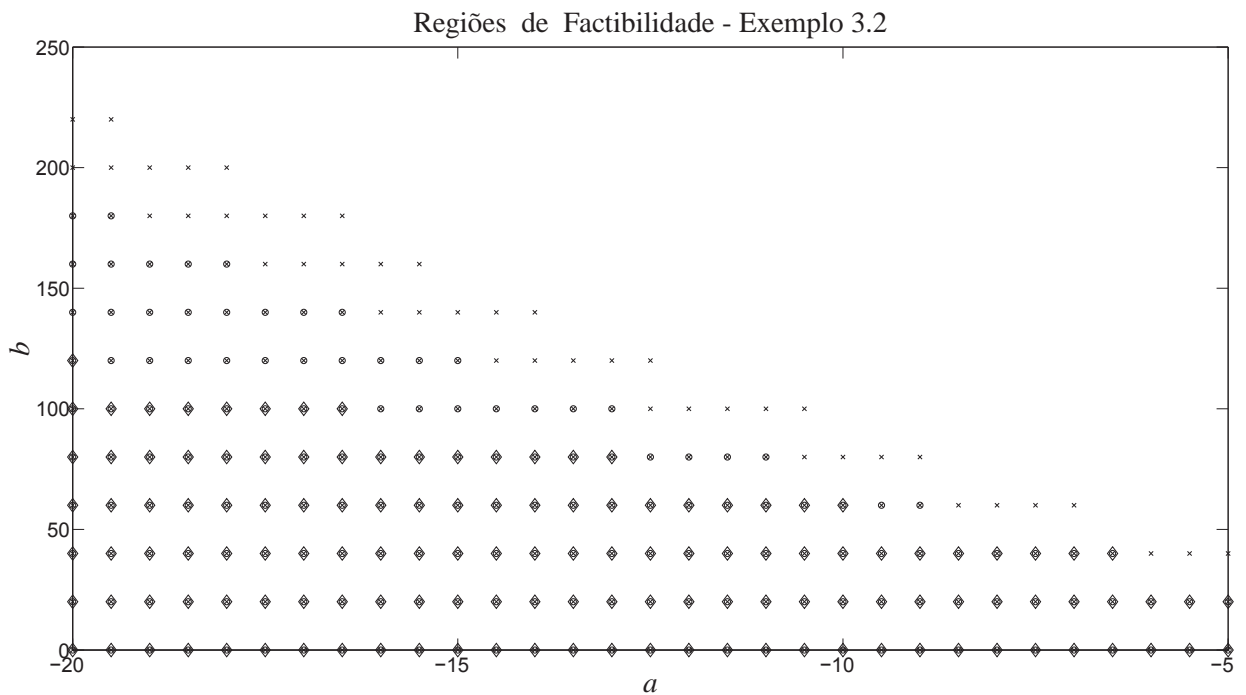


Figura 14: Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 8$ com (Lema 1.1, (\diamond)), ((MOZELLI, 2009), Teorema 1.2, (o)) e Teorema 3.1, (x).

Para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 8$, as matrizes obtidas das funções de Lyapunov que satisfazem as condições do Teorema 3.1, para o par $(a, b) = (2, 2)$ são:

Para a função $v(x(t)) = x^T(t)Px(t)$ com P único

$$P = \begin{bmatrix} 0.1999 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0483 \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Para a função (1.8) $v(x(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t))x^T(t)P_i x(t)$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.5092 & -0.0538 \\ -0.0538 & 0.1178 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.5231 & -0.0484 \\ -0.0484 & 0.1180 \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.5435 & -0.0595 \\ -0.0595 & 0.1179 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 0.7611 & -0.0174 \\ -0.0174 & 0.1308 \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Para a função (3.1) $v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} \left[x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i P_{mi} \right) x(t) \right]$

$$P_{11} = \begin{bmatrix} 4.0231 & -0.1237 \\ -0.1237 & 1.2547 \end{bmatrix}, \quad P_{12} = \begin{bmatrix} 4.0284 & -0.1131 \\ -0.1131 & 1.2328 \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

$$P_{13} = \begin{bmatrix} 4.0392 & -0.1481 \\ -0.1481 & 1.2737 \end{bmatrix}, \quad P_{14} = \begin{bmatrix} 4.2697 & -0.0490 \\ -0.0490 & 1.1721 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$P_{21} = \begin{bmatrix} 4.0179 & -0.1335 \\ -0.1335 & 1.2455 \end{bmatrix}, \quad P_{22} = \begin{bmatrix} 4.0282 & -0.1158 \\ -0.1158 & 1.2266 \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

$$P_{23} = \begin{bmatrix} 4.0384 & -0.1524 \\ -0.1524 & 1.2687 \end{bmatrix}, \quad P_{24} = \begin{bmatrix} 4.2672 & -0.0535 \\ -0.0535 & 1.1663 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$P_{31} = \begin{bmatrix} 4.0153 & -0.1319 \\ -0.1319 & 1.2434 \end{bmatrix}, \quad P_{32} = \begin{bmatrix} 4.0250 & -0.1153 \\ -0.1153 & 1.2262 \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

$$P_{33} = \begin{bmatrix} 4.0348 & -0.1488 \\ -0.1488 & 1.2632 \end{bmatrix}, \quad P_{34} = \begin{bmatrix} 4.2652 & -0.0525 \\ -0.0525 & 1.1637 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$P_{41} = \begin{bmatrix} 4.0150 & -0.1355 \\ -0.1355 & 1.2373 \end{bmatrix}, \quad P_{42} = \begin{bmatrix} 4.0231 & -0.1188 \\ -0.1188 & 1.2195 \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

$$P_{43} = \begin{bmatrix} 4.0343 & -0.1541 \\ -0.1541 & 1.2598 \end{bmatrix}, \quad P_{44} = \begin{bmatrix} 4.2603 & -0.0548 \\ -0.0548 & 1.1559 \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

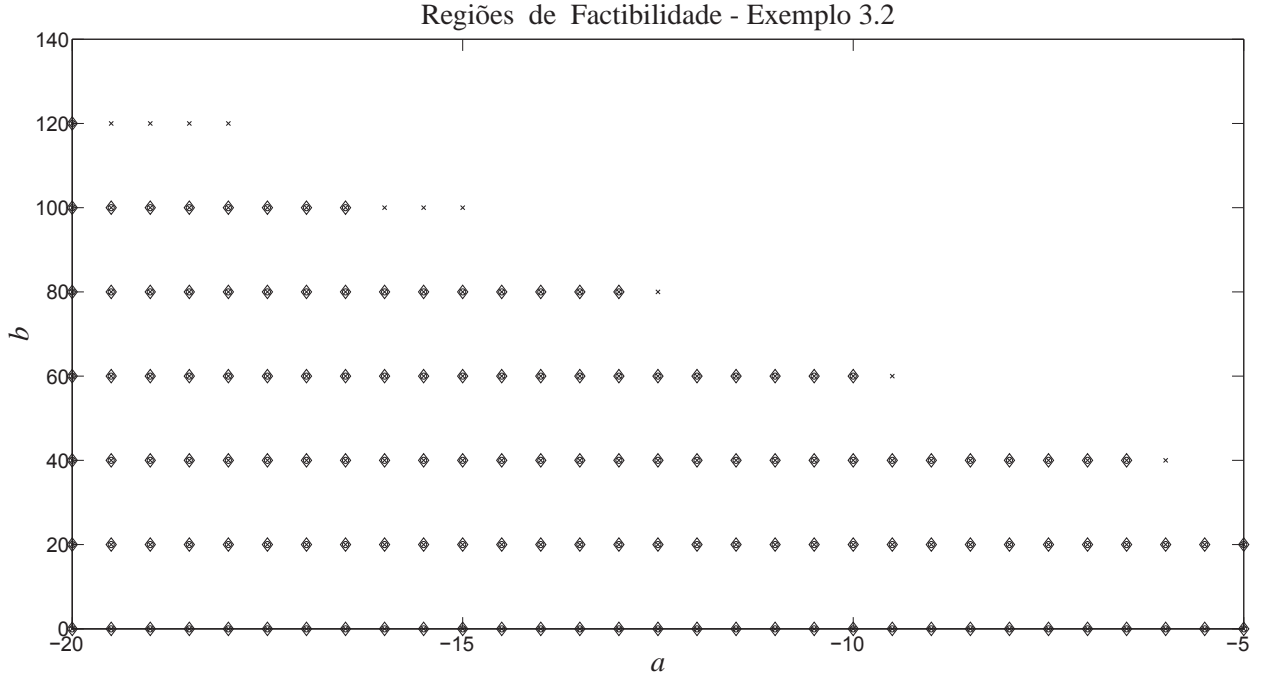


Figura 15: Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 30$ com (Lema 1.1, (◇)), ((MOZELLI, 2009), Teorema 1.2, (o)) e Teorema 3.1, (x).

Para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 30$, as matrizes obtidas das funções de Lyapunov que satisfazem as condições do Teorema 2.3, para o par $(a, b) = (2, 2)$ são:

Para a função $v(x(t)) = x^T(t)Px(t)$ com P único

$$P = \begin{bmatrix} 0.1999 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0483 \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

Para a função (1.8) $v(x(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t))x^T(t)P_i x(t)$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.5034 & -0.0241 \\ -0.0241 & 0.0971 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.5026 & -0.0240 \\ -0.0240 & 0.0969 \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.5088 & -0.0247 \\ -0.0247 & 0.0975 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 0.5366 & -0.0187 \\ -0.0187 & 0.0978 \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Para a função (3.1) $v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} \left[x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i P_{mi} \right) x(t) \right]$

$$P_{11} = \begin{bmatrix} 0.0171 & -0.0007 \\ -0.0007 & 0.0052 \end{bmatrix}, \quad P_{12} = \begin{bmatrix} 0.0171 & -0.0006 \\ -0.0006 & 0.0053 \end{bmatrix}, \quad (3.51)$$

$$P_{13} = \begin{bmatrix} 0.0171 & -0.0006 \\ -0.0006 & 0.0053 \end{bmatrix}, \quad P_{14} = \begin{bmatrix} 0.0177 & -0.0006 \\ -0.0006 & 0.0052 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

$$P_{21} = \begin{bmatrix} 0.0172 & -0.0007 \\ -0.0007 & 0.0053 \end{bmatrix}, \quad P_{22} = \begin{bmatrix} 0.0170 & -0.0007 \\ -0.0007 & 0.0052 \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

$$P_{23} = \begin{bmatrix} 0.0171 & -0.0007 \\ -0.0007 & 0.0053 \end{bmatrix}, \quad P_{24} = \begin{bmatrix} 0.0177 & -0.0007 \\ -0.0007 & 0.0052 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$$P_{31} = \begin{bmatrix} 0.0172 & -0.0007 \\ -0.0007 & 0.0053 \end{bmatrix}, \quad P_{32} = \begin{bmatrix} 0.0171 & -0.0007 \\ -0.0007 & 0.0052 \end{bmatrix}, \quad (3.55)$$

$$P_{33} = \begin{bmatrix} 0.0170 & -0.0007 \\ -0.0007 & 0.0052 \end{bmatrix}, \quad P_{34} = \begin{bmatrix} 0.0177 & -0.0006 \\ -0.0006 & 0.0052 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

$$P_{41} = \begin{bmatrix} 0.0172 & -0.0007 \\ -0.0007 & 0.0052 \end{bmatrix}, \quad P_{42} = \begin{bmatrix} 0.0171 & -0.0007 \\ -0.0007 & 0.0052 \end{bmatrix}, \quad (3.57)$$

$$P_{43} = \begin{bmatrix} 0.0170 & -0.0007 \\ -0.0007 & 0.0052 \end{bmatrix}, \quad P_{44} = \begin{bmatrix} 0.0176 & -0.0007 \\ -0.0007 & 0.0051 \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$

Na seção apresentada a seguir, será apresentada uma condição ainda mais relaxada para sistema fuzzy TS, a fim de obter maiores regiões de factibilidade e que dependem menos da derivada temporal da função de pertinência utilizando FLFM.

3.2 NOVA CONDIÇÃO MAIS RELAXADA DE ESTABILIDADE UTILIZANDO FUNÇÃO DE LYAPUNOV FUZZY-METZLER

Considere que a nova função candidata de Lyapunov:

$$v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} \left[x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i P_{mi} + \bar{P}_m \right) x(t) \right] \quad (3.59)$$

sendo $i = \{1, 2, \dots, r\}$.

Teorema 3.2. *Considere que $|\dot{\alpha}_\rho(x(t))| \leq \phi_\rho$, $\rho \in \mathbb{K}$. Então, o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema TS dado em (1.9) é assintoticamente estável, se existirem matrizes $P_{mj} + \bar{P}_m$, $X_{ijm} =$*

$X_{ijm}^T = X_{jim} = X_{jim}^T$ e escalares $\theta_m \geq 0$, sendo que $i, j, k, m \in \mathbb{K}$, satisfazendo as seguintes LMIs:

$$\begin{cases} P_{mi} + \bar{P}_m = (P_{mi} + \bar{P}_m)^T \succ 0, \\ P_{mk} + X_{ijm} \succeq 0, \\ \tilde{P}_{\phi_{ijm}} + \frac{1}{2} \left[A_j^T (P_{mi} + \bar{P}_m) + (P_{mi} + \bar{P}_m) A_j + A_i^T (P_{mj} + \bar{P}_m) + (P_{mj} + \bar{P}_m) A_i \right] + \\ + \frac{1}{2} \theta_m \left[(P_{ji} + \bar{P}_j) - (P_{mi} + \bar{P}_m) + (P_{ij} + \bar{P}_i) - (P_{mj} + \bar{P}_m) \right] \prec 0, \end{cases} \quad \begin{array}{l} i \leq j \\ \\ i \leq j \end{array} \quad (3.60)$$

sendo $\tilde{P}_{\phi_{ijm}} = \sum_{\rho=1}^r \phi_{\rho} (P_{m\rho} + X_{ijm})$.

Demonstração. Sendo candidata a função de Lyapunov dada em (3.59), como ela não é diferenciável para todo $x \in \mathbb{R}^n$, a derivada de Dini (GARG, 1998) à direita desta função será:

$$D^+v(x(t)) = \min_{m \in M(x(t))} \left\{ \sum_{\rho=1}^r \dot{\alpha}_{\rho}(x(t)) (x^T(t) P_{m\rho} x(t)) + \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) \left[\dot{x}^T(t) (P_{mi} + \bar{P}_m) x(t) + x^T(t) (P_{mi} + \bar{P}_m) \dot{x}(t) \right] \right\}. \quad (3.61)$$

Substituindo (1.9) em (3.61)

$$D^+v(x(t)) = \min_{m \in M(x(t))} \left\{ \sum_{\rho=1}^r \dot{\alpha}_{\rho}(x(t)) (x^T(t) P_{m\rho} x(t)) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) \left[x^T(t) (A_j^T (P_{mi} + \bar{P}_m) + (P_{mi} + \bar{P}_m) A_j) x(t) \right] \right\}. \quad (3.62)$$

Como de (1.7)

$$\alpha_i(x(t)) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) = 1, \quad \sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(x(t)) = 0$$

e assim, de (3.62):

$$\begin{aligned} D^+v(x(t)) = \min_{m \in M(x(t))} \left\{ x(t)^T \left[\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{\rho=1}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) \dot{\alpha}_{\rho}(x(t)) P_{m\rho} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{\rho=1}^r \dot{\alpha}_{\rho}(x(t)) \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) X_{ijm} \right) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) \frac{1}{2} (A_j^T (P_{mi} + \bar{P}_m) + \right. \right. \\ \left. \left. + (P_{mi} + \bar{P}_m) A_j) + A_i^T (P_{mj} + \bar{P}_m) + (P_{mj} + \bar{P}_m) A_i \right] x(t) \right\}. \quad (3.63) \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
 D^+v(x(t)) = \min_{m \in M(x(t))} \left\{ x(t)^T \left[\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{\rho=1}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) \dot{\alpha}_\rho(x(t)) (P_{m\rho} + X_{ijm}) + \right. \right. \\
 \left. \left. + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) \frac{1}{2} (A_j^T (P_{mi} + \bar{P}_m) + (P_{mi} + \bar{P}_m) A_j + \right. \right. \\
 \left. \left. + A_i^T (P_{mj} + \bar{P}_m) + (P_{mj} + \bar{P}_m) A_i) \right] x(t) \right\}. \quad (3.64)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D^+v(x(t)) = \min_{m \in M(x(t))} \left\{ x(t)^T \left[\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) \left(\sum_{\rho=1}^r \dot{\alpha}_\rho(x(t)) (P_{m\rho} + X_{ijm}) + \right. \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{1}{2} (A_j^T (P_{mi} + \bar{P}_m) + (P_{mi} + \bar{P}_m) A_j + A_i^T (P_{mj} + \bar{P}_m) + (P_{mj} + \bar{P}_m) A_i) \right) \right] x(t) \right\}. \quad (3.65)
 \end{aligned}$$

Considerando que

$$P_{m\rho} + X_{ijm} \geq 0, \quad \rho = 1, \dots, r \text{ e } m = 1, \dots, r \quad (3.66)$$

$|\dot{\alpha}_\rho(x(t))| \leq \phi_\rho$, $\rho = \{1, 2, \dots, r\}$ e que

$$x^T(t) [(P_j(\alpha) + \bar{P}_j) - (P_m(\alpha) + \bar{P}_m)] x(t) = x^T(t) \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) [(P_{ji} + \bar{P}_j) - (P_{mi} + \bar{P}_m)] x(t) \geq 0,$$

$\theta_m \geq 0$, para todo $j, m \in \{1, 2, \dots, r\}$. Então de (3.65), sendo

$$\tilde{P}_{\phi_{ijm}} = \sum_{\rho=1}^r \phi_\rho (P_{m\rho} + X_{ijm}), \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned}
 D^+v(x(t)) \leq x(t)^T \left\{ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) \left[\tilde{P}_{\phi_{ijm}} + \frac{1}{2} (A_j^T (P_{mi} + \bar{P}_m) + (P_{mi} + \bar{P}_m) A_j + \right. \right. \\
 \left. \left. + A_i^T (P_{mj} + \bar{P}_m) + (P_{mj} + \bar{P}_m) A_i) \right] + \theta_m \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) [(P_{ji} + \bar{P}_j) - (P_{mi} + \bar{P}_m)] \right\} x(t), \quad (3.68)
 \end{aligned}$$

Multiplicando o termo $\theta_m \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) [(P_{ji} + \bar{P}_j) - (P_{mi} + \bar{P}_m)]$ por $\alpha_j(x(t))$ e tomando a somatória de $j = 1$ a r :

$$\begin{aligned}
 D^+v(x(t)) \leq x(t)^T \left\{ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) \left[\tilde{P}_{\phi_{ijm}} + \frac{1}{2} (A_j^T (P_{mi} + \bar{P}_m) + (P_{mi} + \bar{P}_m) A_j + \right. \right. \\
 \left. \left. + A_i^T (P_{mj} + \bar{P}_m) + (P_{mj} + \bar{P}_m) A_i) \right] + \frac{1}{2} \theta_m \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) [(P_{ji} + \bar{P}_j) - (P_{mi} + \bar{P}_m)] + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ (P_{ij} + \bar{P}_i) - (P_{mj} + \bar{P}_m)] \Big\} x(t). \quad (3.69)$$

$$D^+v(x(t)) \leq x(t)^T \left\{ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) \left[\tilde{P}_{\phi_{ijm}} + \frac{1}{2} [A_j^T (P_{mi} + \bar{P}_m) + (P_{mi} + \bar{P}_m) A_j + \right. \right. \\ \left. \left. + A_i^T (P_{mj} + \bar{P}_m) + (P_{mj} + \bar{P}_m) A_i] + \frac{1}{2} \theta_m [(P_{ji} + \bar{P}_j) - (P_{mi} + \bar{P}_m) + \right. \right. \\ \left. \left. + (P_{ij} + \bar{P}_i) - (P_{mj} + \bar{P}_m)] \right] \right\} x(t). \quad (3.70)$$

Portanto, as LMIs apresentadas no Teorema 3.2 são suficientes para a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio $x = 0$ do modelo fuzzy TS (1.9). \square

Observação 3.1

Note que, o Teorema 3.1 é um caso particular do Teorema 3.2, pois, se $\bar{P}_m = 0$, o Teorema 3.2 se torna o Teorema 3.1. Portanto, se o Teorema 3.1 for factível, o Teorema 3.2 também será.

Os exemplos a seguir apresentam os resultados do Teorema 3.2 para dois e quatro modelos locais fuzzy TS.

3.2.1 Exemplo 3.3

Neste exemplo, são mostrados os resultados obtidos pelas LMIs (3.60), através do modelo fuzzy TS (1.9). As regras fuzzy são as mesmas que em Tanaka, Hori e Wang (2003). Os modelos locais do sistema fuzzy TS são:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ b & -2 \end{bmatrix}.$$

As Figuras 16, 17 e 18 mostram as regiões de factibilidade para vários valores do par (a, b) , sendo $\theta_m = \theta_1 = \theta_2 = 350$. A influência da derivada temporal da função de pertinência é claramente vista quando se aumenta os valores de ϕ_p do sistema, como pode ser observado na Figura 16.

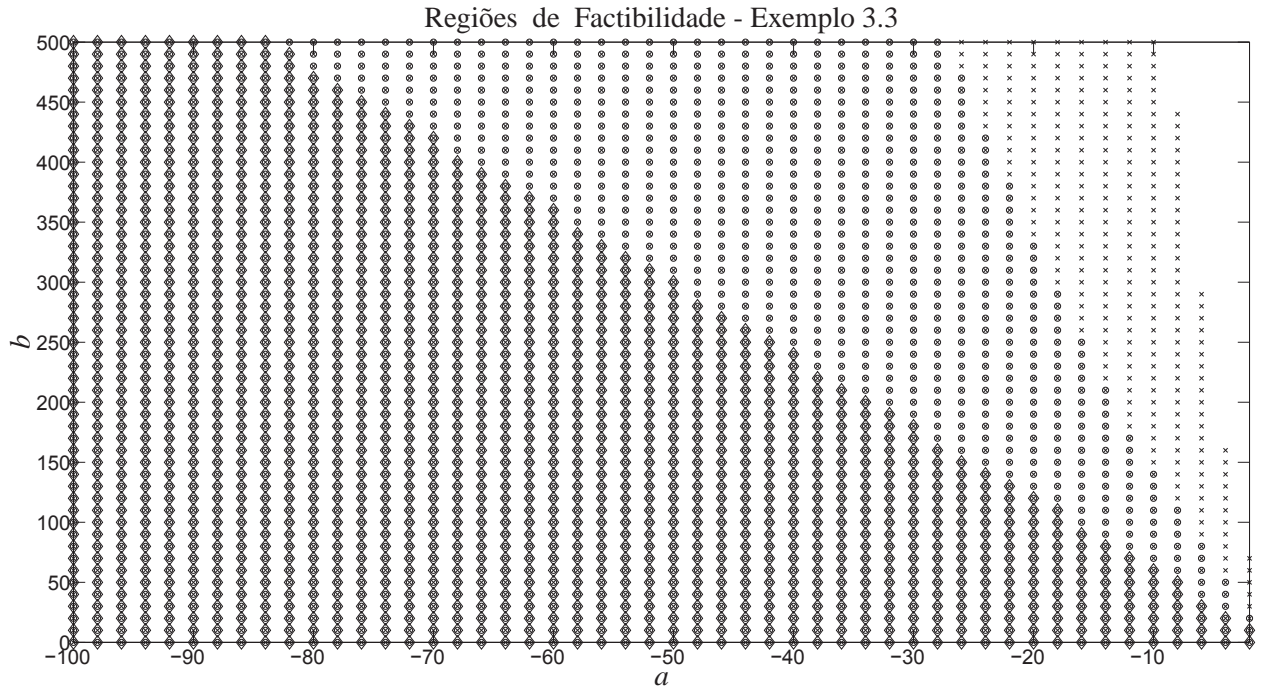


Figura 16: Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = 0.85$ com (Lema 1.1, (\diamond)), ((TANAKA, 2003), Teorema 1.1, (o)) e Teorema 3.2 (x).

Para $\phi_1 = \phi_2 = 0.85$, as matrizes obtidas das funções de Lyapunov que satisfazem as condições do Teorema 3.2, para o par $(a, b) = (2, 2)$ são:

Para a função $v(x(t)) = x^T(t)Px(t)$ com P único

$$P = \begin{bmatrix} 0.0835 & -0.0007 \\ -0.0007 & 0.0234 \end{bmatrix}. \quad (3.71)$$

Para a função (1.8) $v(x(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t))x^T(t)P_i x(t)$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.2297 & -0.0077 \\ -0.0077 & 0.0303 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.0738 & -0.0035 \\ -0.0035 & 0.0239 \end{bmatrix}. \quad (3.72)$$

Para a função (3.59) $v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} \left[x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i P_{mi} + \bar{P}_m \right) x(t) \right]$

$$P_{11} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.2186 & -0.0063 \\ -0.0063 & 0.0168 \end{bmatrix}, \quad P_{12} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.0832 & -0.0168 \\ -0.0168 & 0.1241 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

$$P_{21} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.2170 & -0.0068 \\ -0.0068 & 0.0186 \end{bmatrix}, \quad P_{22} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.0815 & -0.0161 \\ -0.0161 & 0.1168 \end{bmatrix}. \quad (3.74)$$

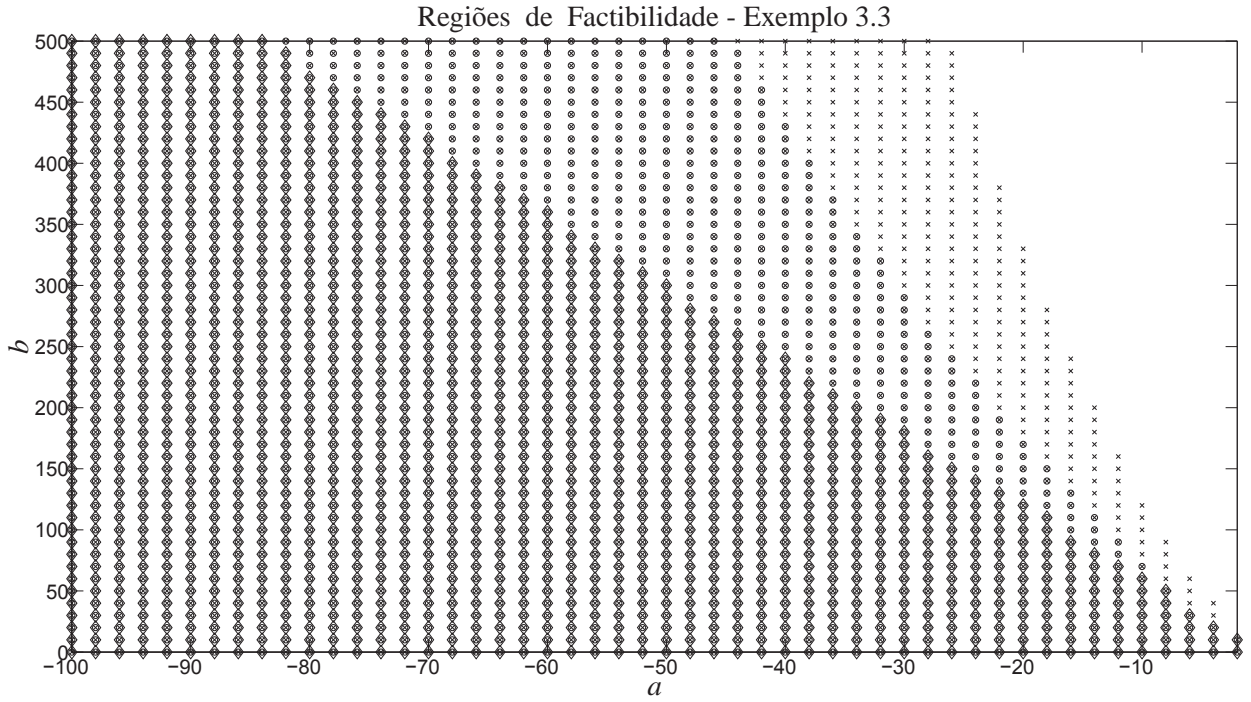


Figura 17: Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = 8$ com (Lema 1.1, (◇)), ((TANAKA, 2003), Teorema 1.1, (o)) e Teorema 3.2 (x).

Para $\phi_1 = \phi_2 = 8$, as matrizes obtidas das funções de Lyapunov que satisfazem as condições do Teorema 3.2, para o par $(a, b) = (2, 2)$ são:

Para a função $v(x(t)) = x^T(t)Px(t)$ com P único

$$P = \begin{bmatrix} 0.0835 & -0.0007 \\ -0.0007 & 0.0236 \end{bmatrix}. \quad (3.75)$$

Para a função (1.8) $v(x(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t))x^T(t)P_i x(t)$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.2297 & -0.0077 \\ -0.0077 & 0.0305 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.0738 & -0.0035 \\ -0.0035 & 0.0239 \end{bmatrix}. \quad (3.76)$$

Para a função (3.59) $v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} \left[x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i P_{mi} + P_m \right) x(t) \right]$

$$P_{11} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.2186 & -0.0063 \\ -0.0063 & 0.0168 \end{bmatrix}, \quad P_{12} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.0832 & -0.0168 \\ -0.0168 & 0.1241 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

$$P_{21} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.2170 & -0.0068 \\ -0.0068 & 0.0186 \end{bmatrix}, \quad P_{22} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.0815 & -0.0161 \\ -0.0161 & 0.1168 \end{bmatrix}. \quad (3.78)$$

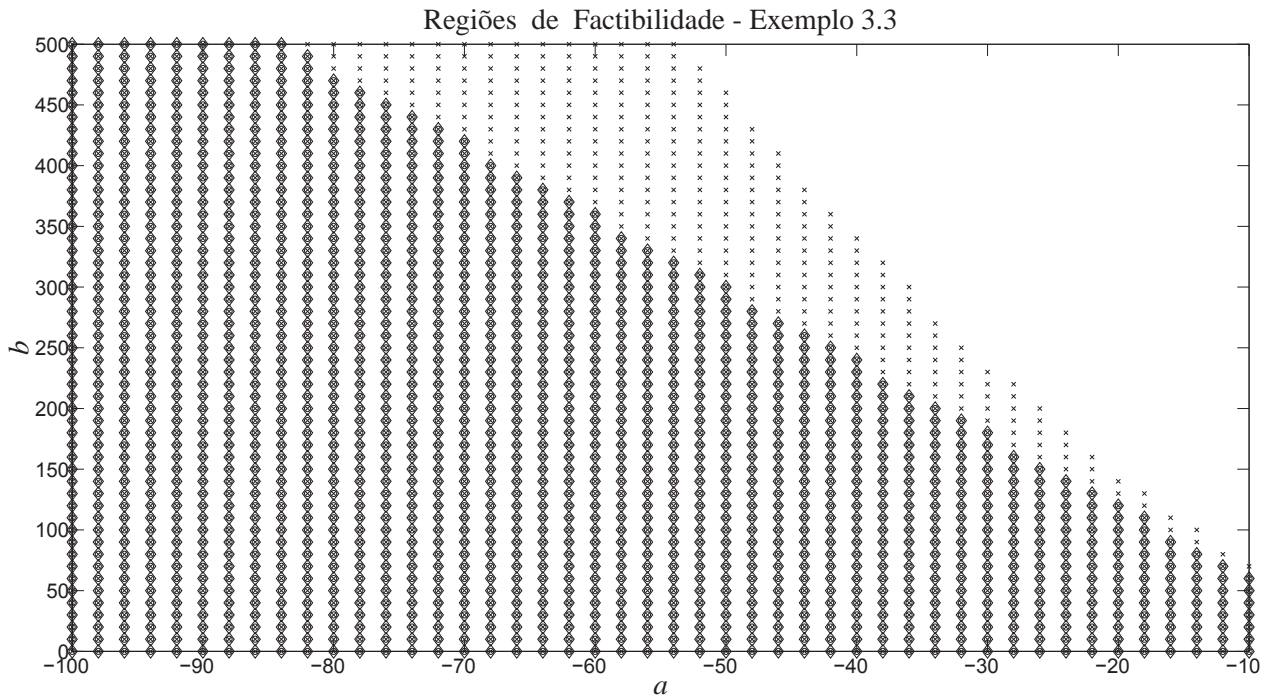


Figura 18: Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = 30$ com (Lema 1.1, (◇)), ((TANAKA, 2003), Teorema 1.1, (o)) e Teorema 3.2 (x).

Para $\phi_1 = \phi_2 = 30$, as matrizes obtidas das funções de Lyapunov que satisfazem as condições do Teorema 3.2, para o par $(a, b) = (2, 2)$ são:

Para a função $v(x(t)) = x^T(t)Px(t)$ com P único

$$P = \begin{bmatrix} 0.0835 & -0.0007 \\ -0.0007 & 0.0236 \end{bmatrix}. \quad (3.79)$$

Para a função (1.8) $v(x(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t))x^T(t)P_i x(t)$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.1212 & -0.0026 \\ -0.0026 & 0.0347 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.1118 & -0.0046 \\ -0.0046 & 0.0328 \end{bmatrix}. \quad (3.80)$$

Para a função (3.59) $v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} \left[x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i P_{mi} + P_m \right) x(t) \right]$

$$P_{11} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.8762 & -0.0363 \\ -0.0363 & 1.2369 \end{bmatrix}, \quad P_{12} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.8944 & -0.0213 \\ -0.0213 & 1.3861 \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

$$P_{21} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.8782 & -0.0332 \\ -0.0332 & 1.1824 \end{bmatrix}, \quad P_{22} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.8834 & -0.0179 \\ -0.0179 & 1.2401 \end{bmatrix}. \quad (3.82)$$

Pelas figuras, pode-se observar que quando $\phi_1 = \phi_2 = 0.85$, as regiões de factibilidade obtidas com o Lema 1.1 e o Teorema 1.1(o) (Figura 16) apresentam uma região bem menor do que a região do Teorema 3.2. Conforme os valores de ϕ_ρ aumentam (Figuras 17 e 18) a região de factibilidade vai diminuindo mas, a região do Teorema 3.2 diminui bem menos em relação a do Teorema 1.1, devido à presença das desigualdades de Lyapunov Metzler. O Exemplo 3.4 mostra os resultados do Teorema 3.2 com quatro modelos locais fuzzy TS.

3.2.2 Exemplo 3.4

Assim como o Exemplo 3.3, este exemplo apresenta os resultados do Teorema 3.2, mas agora com quatro modelos fuzzy TS. Este novo resultado será comparado com os resultados obtidos do Lema 1.1 e do Teorema 1.2 (MOZELLI, 2009). As regras fuzzy são as mesmas do Teorema 1.2 e os matrizes do modelo fuzzy TS são:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ \frac{1}{5}(3b-2) & \frac{1}{5}(3a-4) \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ \frac{1}{5}(2b-3) & \frac{1}{5}(2a-6) \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ b & -2 \end{bmatrix},$$

e $\theta_m = \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 350$.

As figuras abaixo mostram os resultados obtidos para vários valores do par (a, b) e para valores de ϕ_ρ diferentes, a fim de ilustrar sua influência no sistema utilizando FLF e FLFM.

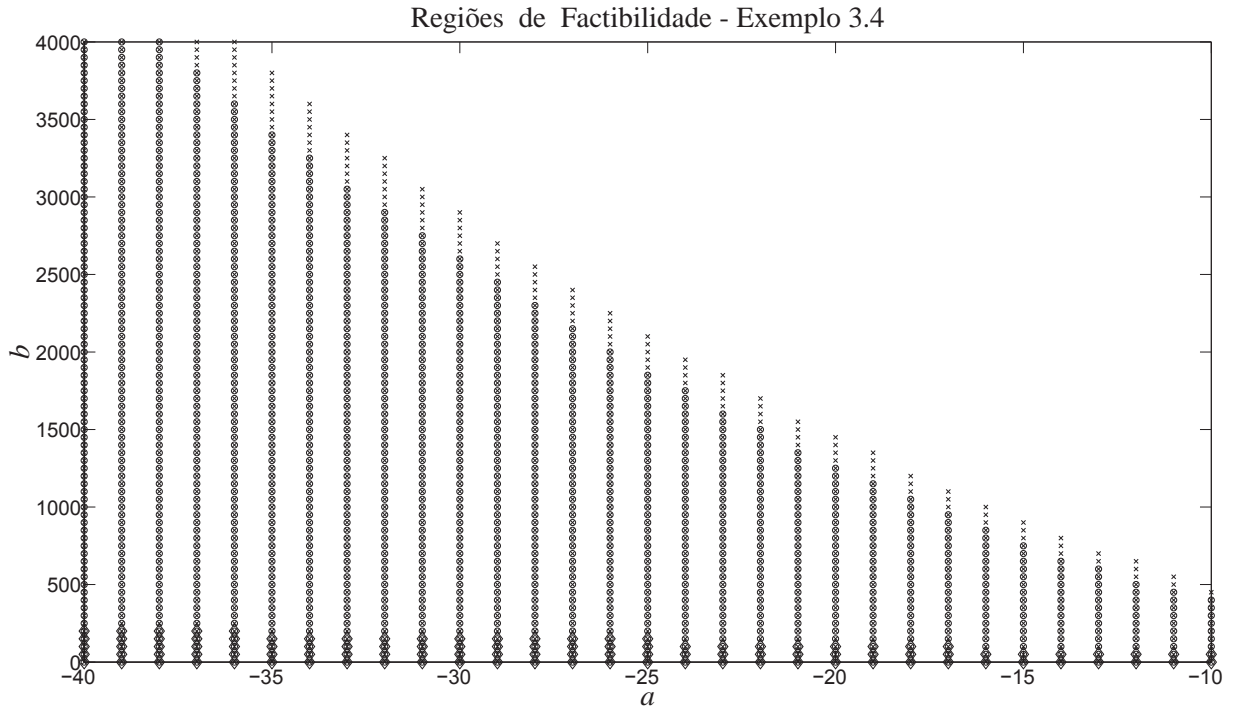


Figura 19: Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 0.85$ com (Lema 1.1, (◇)), ((MOZELLI, 2009), Teorema 1.2, (o)) e Teorema 3.2, (x).

Para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 0.85$, as matrizes obtidas das funções de Lyapunov que satisfazem as condições do Teorema 3.2, para o par $(a, b) = (2, 2)$ são:

Para a função $v(x(t)) = x^T(t)Px(t)$ com P único

$$P = \begin{bmatrix} 0.2308 & 0.0011 \\ 0.0011 & 0.0211 \end{bmatrix}. \quad (3.83)$$

Para a função (1.8) $v(x(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t))x^T(t)P_i x(t)$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.3618 & -0.0243 \\ -0.0243 & 0.0319 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.3833 & -0.0096 \\ -0.0096 & 0.0372 \end{bmatrix}, \quad (3.84)$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.4367 & -0.0250 \\ -0.0250 & 0.0537 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 0.9788 & 0.0070 \\ 0.0070 & 0.0766 \end{bmatrix}. \quad (3.85)$$

Para a função (3.59) $v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} \left[x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i P_{mi} + \bar{P}_m \right) x(t) \right]$

$$P_{11} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.5531 & -0.0697 \\ -0.0697 & 0.0723 \end{bmatrix}, \quad P_{12} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.5143 & -0.0690 \\ -0.0690 & 0.0993 \end{bmatrix}, \quad (3.86)$$

$$P_{13} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.5038 & -0.0740 \\ -0.0740 & 0.1216 \end{bmatrix}, \quad P_{14} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.2818 & -0.0798 \\ -0.0798 & 0.3980 \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

$$P_{21} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.5517 & -0.0683 \\ -0.0683 & 0.0707 \end{bmatrix}, \quad P_{22} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.5126 & -0.0682 \\ -0.0682 & 0.0984 \end{bmatrix}, \quad (3.88)$$

$$P_{23} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.5029 & -0.0732 \\ -0.0732 & 0.1196 \end{bmatrix}, \quad P_{24} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.2811 & -0.0790 \\ -0.0790 & 0.3925 \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

$$P_{31} + \bar{P}_3 = \begin{bmatrix} 0.5507 & -0.0680 \\ -0.0680 & 0.0710 \end{bmatrix}, \quad P_{32} + \bar{P}_3 = \begin{bmatrix} 0.5124 & -0.0680 \\ -0.0680 & 0.0978 \end{bmatrix}, \quad (3.90)$$

$$P_{33} + \bar{P}_3 = \begin{bmatrix} 0.5008 & -0.0724 \\ -0.0724 & 0.1183 \end{bmatrix}, \quad P_{34} + \bar{P}_3 = \begin{bmatrix} 0.2803 & -0.0783 \\ -0.0783 & 0.3895 \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

$$P_{41} + \bar{P}_4 = \begin{bmatrix} 0.5479 & -0.0682 \\ -0.0682 & 0.0815 \end{bmatrix}, \quad P_{42} + \bar{P}_4 = \begin{bmatrix} 0.5099 & -0.0681 \\ -0.0681 & 0.1036 \end{bmatrix}, \quad (3.92)$$

$$P_{43} + \bar{P}_4 = \begin{bmatrix} 0.4999 & -0.0726 \\ -0.0726 & 0.1218 \end{bmatrix}, \quad P_{44} + \bar{P}_4 = \begin{bmatrix} 0.2778 & -0.0776 \\ -0.0776 & 0.3822 \end{bmatrix}. \quad (3.93)$$

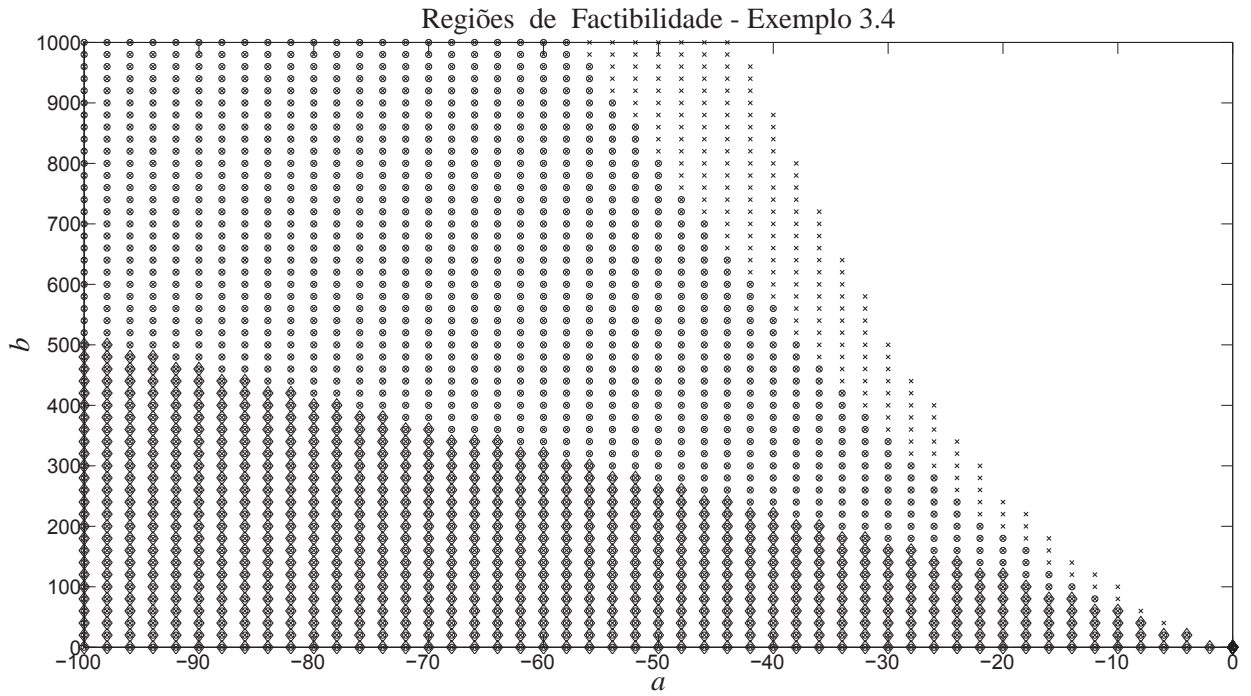


Figura 20: Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 8$ com (Lema 1.1, (\diamond)), ((MOZELLI, 2009), Teorema 1.2, (o)) e Teorema 3.2, (x).

Para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 8$, as matrizes obtidas das funções de Lyapunov que satisfazem as condições do Teorema 3.2, para o par $(a, b) = (2, 2)$ são:

Para a função $v(x(t)) = x^T(t)Px(t)$ com P único

$$P = \begin{bmatrix} 0.2308 & 0.0011 \\ 0.0011 & 0.0211 \end{bmatrix}. \quad (3.94)$$

Para a função (1.8) $v(x(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t))x^T(t)P_i x(t)$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.5093 & -0.0255 \\ -0.0255 & 0.0545 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.5168 & -0.0215 \\ -0.0215 & 0.0557 \end{bmatrix}, \quad (3.95)$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.5414 & -0.0307 \\ -0.0307 & 0.0548 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 0.7663 & -0.0093 \\ -0.0093 & 0.0574 \end{bmatrix}. \quad (3.96)$$

Para a função (3.59) $v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} \left[x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i P_{mi} + \bar{P}_m \right) x(t) \right]$

$$P_{11} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 1.3185 & -0.2025 \\ -0.2025 & 1.3784 \end{bmatrix}, \quad P_{12} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 1.3350 & -0.1946 \\ -0.1946 & 1.3264 \end{bmatrix}, \quad (3.97)$$

$$P_{13} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 1.3395 & -0.1853 \\ -0.1853 & 1.3679 \end{bmatrix}, \quad P_{14} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 1.3941 & 0.0011 \\ 0.0011 & 1.7979 \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

$$P_{21} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 1.3267 & -0.1990 \\ -0.1990 & 1.2541 \end{bmatrix}, \quad P_{22} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 1.3238 & -0.1922 \\ -0.1922 & 1.3534 \end{bmatrix}, \quad (3.99)$$

$$P_{23} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 1.3370 & -0.1833 \\ -0.1833 & 1.3479 \end{bmatrix}, \quad P_{24} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 1.3910 & 0.0020 \\ 0.0020 & 1.7724 \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

$$P_{31} + \bar{P}_3 = \begin{bmatrix} 1.3241 & -0.1975 \\ -0.1975 & 1.2481 \end{bmatrix}, \quad P_{32} + \bar{P}_3 = \begin{bmatrix} 1.3298 & -0.1912 \\ -0.1912 & 1.3005 \end{bmatrix}, \quad (3.101)$$

$$P_{33} + \bar{P}_3 = \begin{bmatrix} 1.3273 & -0.1804 \\ -0.1804 & 1.3542 \end{bmatrix}, \quad P_{34} + \bar{P}_3 = \begin{bmatrix} 1.3878 & 0.0036 \\ 0.0036 & 1.7560 \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

$$P_{41} + \bar{P}_4 = \begin{bmatrix} 1.3205 & -0.1877 \\ -0.1877 & 1.3085 \end{bmatrix}, \quad P_{42} + \bar{P}_4 = \begin{bmatrix} 1.3267 & -0.1833 \\ -0.1833 & 1.3151 \end{bmatrix}, \quad (3.103)$$

$$P_{43} + \bar{P}_4 = \begin{bmatrix} 1.3316 & -0.1746 \\ -0.1746 & 1.3331 \end{bmatrix}, \quad P_{44} + \bar{P}_4 = \begin{bmatrix} 1.3807 & 0.0051 \\ 0.0051 & 1.7106 \end{bmatrix}. \quad (3.104)$$

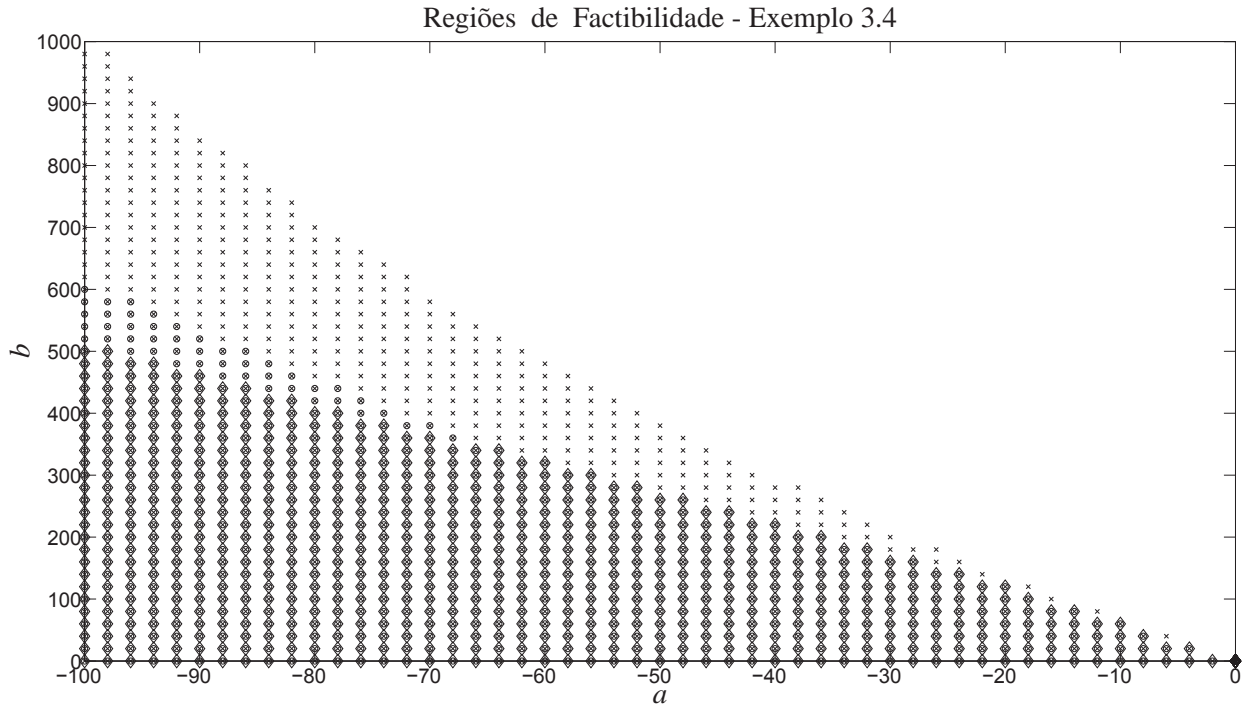


Figura 21: Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 30$ com (Lema 1.1, (\diamond)), ((MOZELLI, 2009), Teorema 1.2, (o)) e Teorema 3.2, (x).

Para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 30$, as matrizes obtidas das funções de Lyapunov que satisfazem as condições do Teorema 2.3, para o par $(a, b) = (2, 2)$ são:

Para a função $v(x(t)) = x^T(t)Px(t)$ com P único

$$P = \begin{bmatrix} 0.2308 & 0.0011 \\ 0.0011 & 0.0211 \end{bmatrix}. \tag{3.105}$$

Para a função (1.8) $v(x(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t))x^T(t)P_i x(t)$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.5403 & -0.0118 \\ -0.0118 & 0.0448 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.5435 & -0.0120 \\ -0.0120 & 0.0447 \end{bmatrix}, \tag{3.106}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.5539 & -0.0128 \\ -0.0128 & 0.0450 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 0.5921 & -0.0073 \\ -0.0073 & 0.0453 \end{bmatrix}. \tag{3.107}$$

Para a função (3.59) $v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} \left[x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i P_{mi} + \bar{P}_m \right) x(t) \right]$

$$P_{11} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 4.0538 & -0.4648 \\ -0.4648 & 5.0799 \end{bmatrix}, \quad P_{12} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 4.0895 & -0.4672 \\ -0.4672 & 4.8586 \end{bmatrix}, \quad (3.108)$$

$$P_{13} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 4.0908 & -0.4682 \\ -0.4682 & 4.9200 \end{bmatrix}, \quad P_{14} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 4.0968 & -0.4551 \\ -0.4551 & 5.0860 \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

$$P_{21} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 4.0803 & -0.4652 \\ -0.4652 & 4.6969 \end{bmatrix}, \quad P_{22} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 4.0549 & -0.4594 \\ -0.4594 & 4.9038 \end{bmatrix}, \quad (3.110)$$

$$P_{23} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 4.0827 & -0.4636 \\ -0.4636 & 4.8437 \end{bmatrix}, \quad P_{24} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 4.0880 & -0.4485 \\ -0.4485 & 4.9906 \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

$$P_{31} + \bar{P}_3 = \begin{bmatrix} 4.0713 & -0.4620 \\ -0.4620 & 4.6717 \end{bmatrix}, \quad P_{32} + \bar{P}_3 = \begin{bmatrix} 4.0725 & -0.4590 \\ -0.4590 & 4.7549 \end{bmatrix}, \quad (3.112)$$

$$P_{33} + \bar{P}_3 = \begin{bmatrix} 4.0538 & -0.4565 \\ -0.4565 & 4.8309 \end{bmatrix}, \quad P_{34} + \bar{P}_3 = \begin{bmatrix} 4.0785 & -0.4418 \\ -0.4418 & 4.9356 \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

$$P_{41} + \bar{P}_4 = \begin{bmatrix} 4.0590 & -0.4483 \\ -0.4483 & 4.7381 \end{bmatrix}, \quad P_{42} + \bar{P}_4 = \begin{bmatrix} 4.0623 & -0.4472 \\ -0.4472 & 4.7418 \end{bmatrix}, \quad (3.114)$$

$$P_{43} + \bar{P}_4 = \begin{bmatrix} 4.0651 & -0.4477 \\ -0.4477 & 4.7423 \end{bmatrix}, \quad P_{44} + \bar{P}_4 = \begin{bmatrix} 4.0545 & -0.4400 \\ -0.4400 & 4.7798 \end{bmatrix}. \quad (3.115)$$

Note que, conforme ϕ cresce, a região de factibilidade diminui, mas o método proposto no Teorema 3.2 continua com uma maior região de factibilidade, como ilustram as Figuras 19, 20 e 21.

3.3 CONCLUSÕES PARCIAIS

Nesta seção, foram abordados dois novos métodos utilizando FLFM de modo a flexibilizarem as condições para a estabilidade de sistemas fuzzy TS. O primeiro método faz com que a função de Lyapunov seja a combinação de uma função de Lyapunov-Fuzzy com uma função de Lyapunov-Metzler, como pode-se notar na função candidata de Lyapunov (3.1), sendo possível encontrar matrizes P de modo a satisfazerem as LMIs (3.2) garantindo a estabilidade do sistema fuzzy TS (1.9). Os resultados apresentados mostram que a região de factibilidade descrita nas figuras dos Exemplos 3.1 e 3.2 são maiores no Teorema 3.1 do que as dos Teoremas 1.1 e 1.2 (MOZELLI, 2009; TANAKA, 2003), respectivamente. Conforme os valores de ϕ_ρ

aumentam, a região de factibilidade diminui mas, no novo método, a função de Lyapunov é o mínimo de funções de Lyapunov-Fuzzy e o sistema consegue uma região de factibilidade maior do que as apresentadas anteriormente.

O segundo método utiliza uma nova candidata a função de Lyapunov, igual à uma soma da FLM com funções de Lyapunov-Metzler, flexibilizando ainda mais o sistema, diminuindo o conservadorismo do sistema fuzzy TS e satisfazendo todas as condições de estabilidade. As figuras dos Exemplos 3.3 e 3.4 mostram que, conforme ϕ_ρ aumenta, a região de factibilidade diminui mas, com este novo método ela não diminui tanto, quando comparadas com os Teoremas 1.1 e 1.2, devido à presença das FLM, apresentando, assim, o melhor resultado obtido neste trabalho.

4 NOVOS EXEMPLOS PARA OS TEOREMAS APRESENTADOS

Neste capítulo, serão abordados exemplos para os novos Teoremas apresentados neste trabalho, de maneira a comparar estas novas condições juntamente com as já existentes na literatura. Como foi visto, quando se utiliza funções de Lyapunov Fuzzy, o sistema fica restrito, pois há a derivada temporal da função de pertinência que faz com que a região de factibilidade do sistema diminua, conforme ϕ_ρ aumenta.

Pode-se observar que, a utilização das desigualdades de Lyapunov-Metzler junto com as FLF faz com que o sistema fique menos conservador, principalmente quando aumenta-se os valores de ϕ_ρ . Os novos métodos propostos mostram a melhora da região de factibilidade, comparado com teoremas já existentes.

Na seção a seguir, será mostrado um exemplo afim de comparar estes novos teoremas.

4.1 COMPARAÇÕES DOS NOVOS TEOREMAS

O Teorema 1.3, do Capítulo 1, mostra uma flexibilização das condições do Teorema 1.1 e 1.2, mas ainda assim há uma grande dependência das FLF. A partir do Teorema 2.3, houve a utilização das FLM que não depende da derivada da função de pertinência. Os Teoremas 3.1 e 3.2 utilizaram FLFM, que através das figuras nos exemplos do Capítulo 3, mostraram que a região de factibilidade é maior do que os métodos existentes na literatura.

O Exemplo a seguir apresenta uma comparação de todos os novos métodos propostos, para ilustrar os resultados dos teoremas. Para vários valores de ϕ_ρ , foram obtidas as regiões de factibilidade.

4.1.1 Exemplo 4.1

Este exemplo apresenta os resultados do Teorema 2.3, (Capítulo 2), Teorema 3.1 e 3.2, (Capítulo 3), com dois modelos fuzzy TS. As regras fuzzy são as mesmas usadas nos exemplos com duas regras fuzzy dos capítulos anteriores, do Exemplo 1.2 (TANAKA, 2003).

As matrizes do modelo fuzzy TS são:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ b & -2 \end{bmatrix}.$$

As Figuras 22, 23 e 24 mostram as regiões de factibilidade para valores de ϕ_p diferentes e para vários valores do par (a, b) . Foram utilizados nos Teoremas 2.3, 3.1 e 3.2 os valores de $\theta_1 = \theta_2 = 350$.

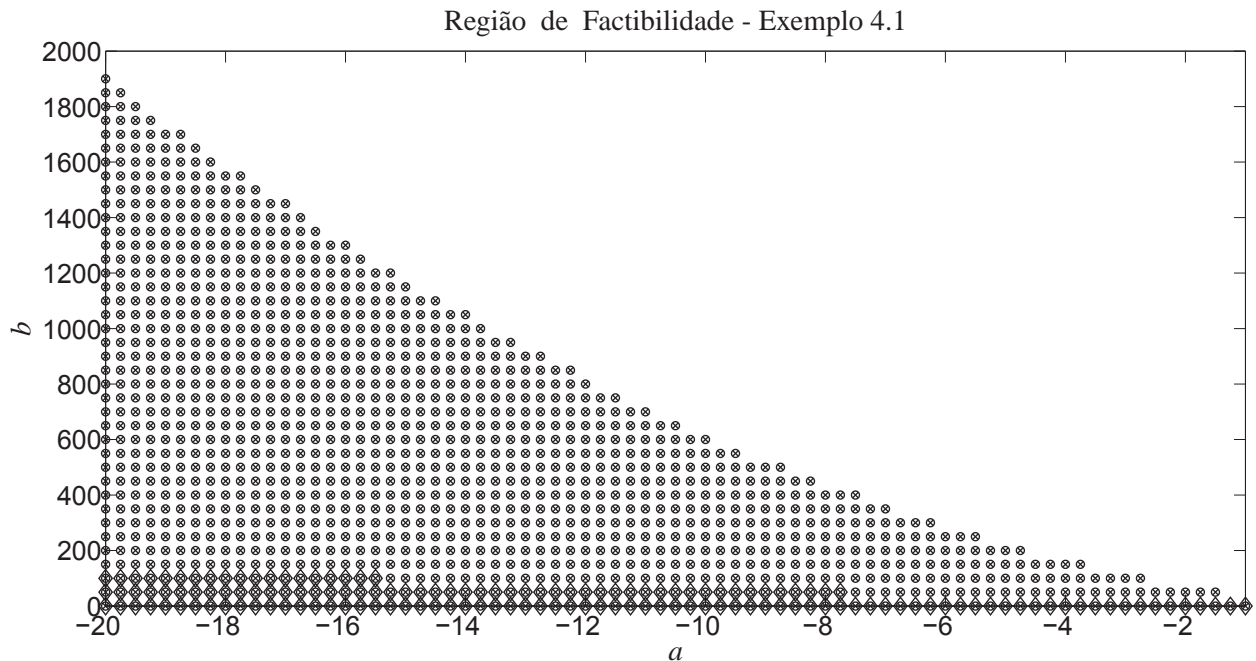


Figura 22: Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = 0.85$ com (Teorema 2.3, (\diamond)), (Teorema 3.1, (o)) e Teorema 3.2 (x).

Para $\phi_1 = \phi_2 = 0.85$, as matrizes obtidas das funções de Lyapunov que satisfazem as condições dos teoremas, para o par $(a, b) = (2, 2)$ são:

Para a função (2.16) $v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} \left[x(t)^T P_m x(t) \right]$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.3353 & 0.0068 \\ 0.0068 & 0.0334 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.3315 & 0.0041 \\ 0.0041 & 0.0316 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Para a função (3.1) $v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} \left[x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i P_{mi} \right) x(t) \right]$

$$P_{11} = \begin{bmatrix} 0.3239 & 0.0325 \\ 0.0325 & 0.1342 \end{bmatrix}, \quad P_{12} = \begin{bmatrix} 1.0864 & 0.0228 \\ 0.0228 & 0.0951 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$P_{21} = \begin{bmatrix} 0.3244 & 0.0273 \\ 0.0273 & 0.1274 \end{bmatrix}, \quad P_{22} = \begin{bmatrix} 1.0827 & 0.0220 \\ 0.0220 & 0.0913 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Para a função (3.59) $v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} \left[x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i P_{mi} + \bar{P}_m \right) x(t) \right]$

$$P_{11} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.4242 & -0.0861 \\ -0.0861 & 0.1038 \end{bmatrix}, \quad P_{12} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.2379 & -0.0737 \\ -0.0737 & 0.3760 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$P_{21} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.4203 & -0.0850 \\ -0.0850 & 0.1052 \end{bmatrix}, \quad P_{22} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.2352 & -0.0725 \\ -0.0725 & 0.3693 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

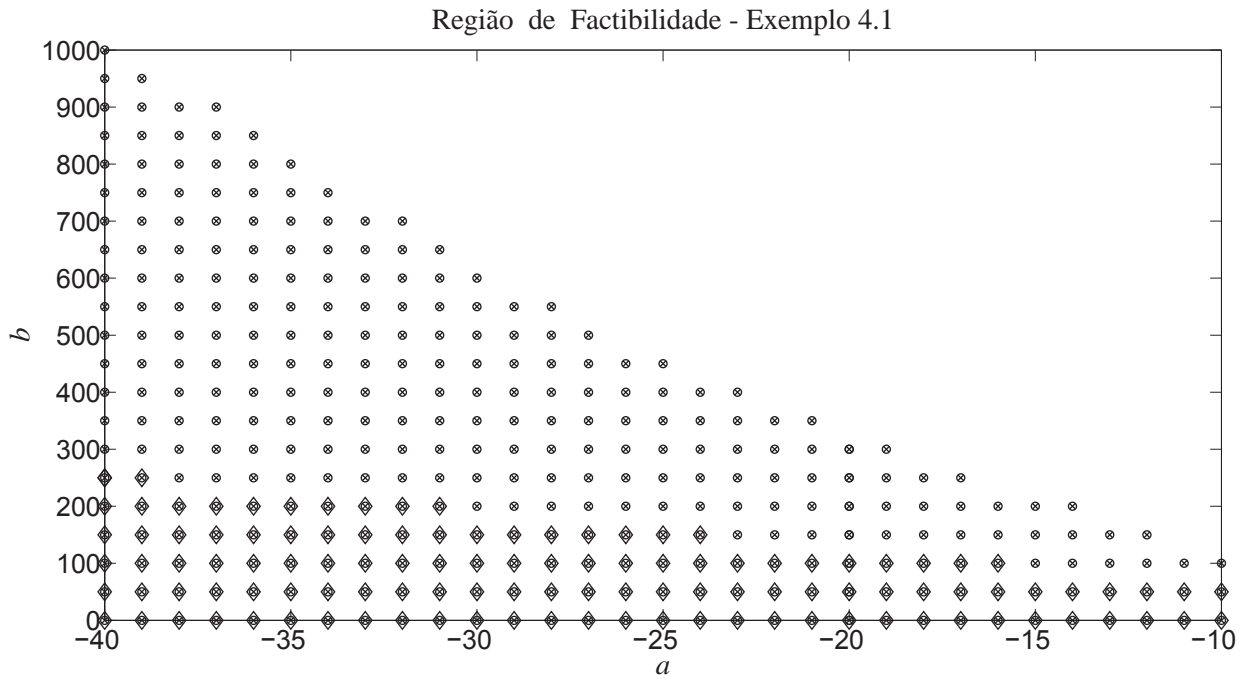


Figura 23: Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = 8$ com (Teorema 2.3, (◇)), (Teorema 3.1, (○)) e Teorema 3.2 (x).

Para $\phi_1 = \phi_2 = 8$, as matrizes obtidas das funções de Lyapunov que satisfazem as condições dos teoremas, para o par $(a, b) = (2, 2)$ são:

$$\text{Para a função (2.16) } v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} [x(t)^T P_m x(t)]$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.3353 & 0.0068 \\ 0.0068 & 0.0334 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.3315 & 0.0041 \\ 0.0041 & 0.0316 \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

$$\text{Para a função (3.1) } v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} \left[x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i P_{mi} \right) x(t) \right]$$

$$P_{11} = \begin{bmatrix} 2.8215 & 0.0039 \\ 0.0039 & 0.4218 \end{bmatrix}, \quad P_{12} = \begin{bmatrix} 3.3409 & 0.0386 \\ 0.0386 & 0.3121 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$P_{21} = \begin{bmatrix} 2.7998 & -0.0198 \\ -0.0198 & 0.4057 \end{bmatrix}, \quad P_{22} = \begin{bmatrix} 3.3190 & 0.0323 \\ 0.0323 & 0.2991 \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

$$\text{Para a função (3.59) } v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} \left[x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i P_{mi} + \bar{P}_m \right) x(t) \right]$$

$$P_{11} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 1.0459 & -0.2904 \\ -0.2904 & 1.2542 \end{bmatrix}, \quad P_{12} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 1.0692 & -0.1440 \\ -0.1440 & 1.4708 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$P_{21} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 1.0455 & -0.2834 \\ -0.2834 & 1.2004 \end{bmatrix}, \quad P_{22} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 1.0594 & -0.1402 \\ -0.1402 & 1.4343 \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

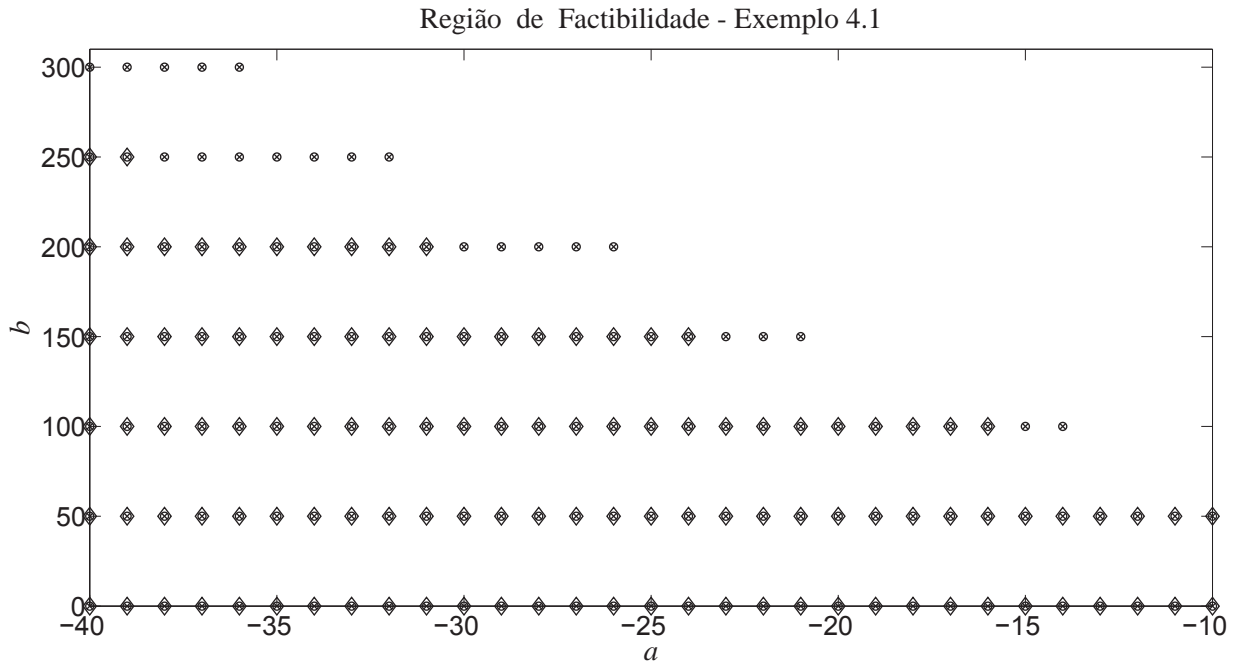


Figura 24: Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = 30$ com (Teorema 2.3, (◇)), (Teorema 3.1, (o)) e Teorema 3.2 (x).

Para $\phi_1 = \phi_2 = 30$, as matrizes obtidas das funções de Lyapunov que satisfazem as condições dos teoremas, para o par $(a, b) = (2, 2)$ são:

$$\text{Para a função (2.16)} \quad v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} \left[x(t)^T P_m x(t) \right]$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.3353 & 0.0068 \\ 0.0068 & 0.0334 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.3315 & 0.0041 \\ 0.0041 & 0.0316 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

$$\text{Para a função (3.1)} \quad v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} \left[x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i P_{mi} \right) x(t) \right]$$

$$P_{11} = \begin{bmatrix} 5.3972 & -0.0200 \\ -0.0200 & 0.5464 \end{bmatrix}, \quad P_{12} = \begin{bmatrix} 5.5102 & 0.0038 \\ 0.0038 & 0.5340 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$P_{21} = \begin{bmatrix} 5.3737 & -0.0499 \\ -0.0499 & 0.5329 \end{bmatrix}, \quad P_{22} = \begin{bmatrix} 5.4769 & -0.0125 \\ -0.0125 & 0.5111 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Para a função (3.59) $v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} \left[x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i P_{mi} + \bar{P}_m \right) x(t) \right]$

$$P_{11} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 2.0117 & -0.3620 \\ -0.3620 & 2.8059 \end{bmatrix}, \quad P_{12} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 2.0313 & -0.3432 \\ -0.3432 & 2.8564 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$P_{21} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 2.0121 & -0.3573 \\ -0.3573 & 2.7114 \end{bmatrix}, \quad P_{22} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 2.0114 & -0.3391 \\ -0.3391 & 2.7596 \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Pelas Figuras 22, 23 e 24, pode-se notar a crescente melhora da região de factibilidade, conforme os teoremas foram mais flexibilizados e que mesmo com o aumento de ϕ_ρ a região diminui, mas menos do que os métodos anteriores, principalmente no último método proposto (Teorema 3.2).

O próximo exemplo mostra a comparação dos mesmos teoremas, mas agora para quatro modelos locais.

4.1.2 Exemplo 4.2

Assim como no Exemplo 4.1, este exemplo fará a comparação dos novos teoremas propostos neste trabalho, mas agora para quatro modelos locais. As matrizes do modelo fuzzy TS são:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ \frac{1}{5}(3b-2) & \frac{1}{5}(3a-4) \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ \frac{1}{5}(2b-3) & \frac{1}{5}(2a-6) \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ b & -2 \end{bmatrix}.$$

As regras fuzzy TS são as mesma apresentadas no Exemplo 1.3 (MOZELLI, 2009) e as Figuras 25, 26 e 27 a seguir mostram os resultados dos teoremas para vários valores do par (a, b) , sendo $\theta_m = \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 1000$ nos Teoremas 2.3, 3.1 e 3.2.

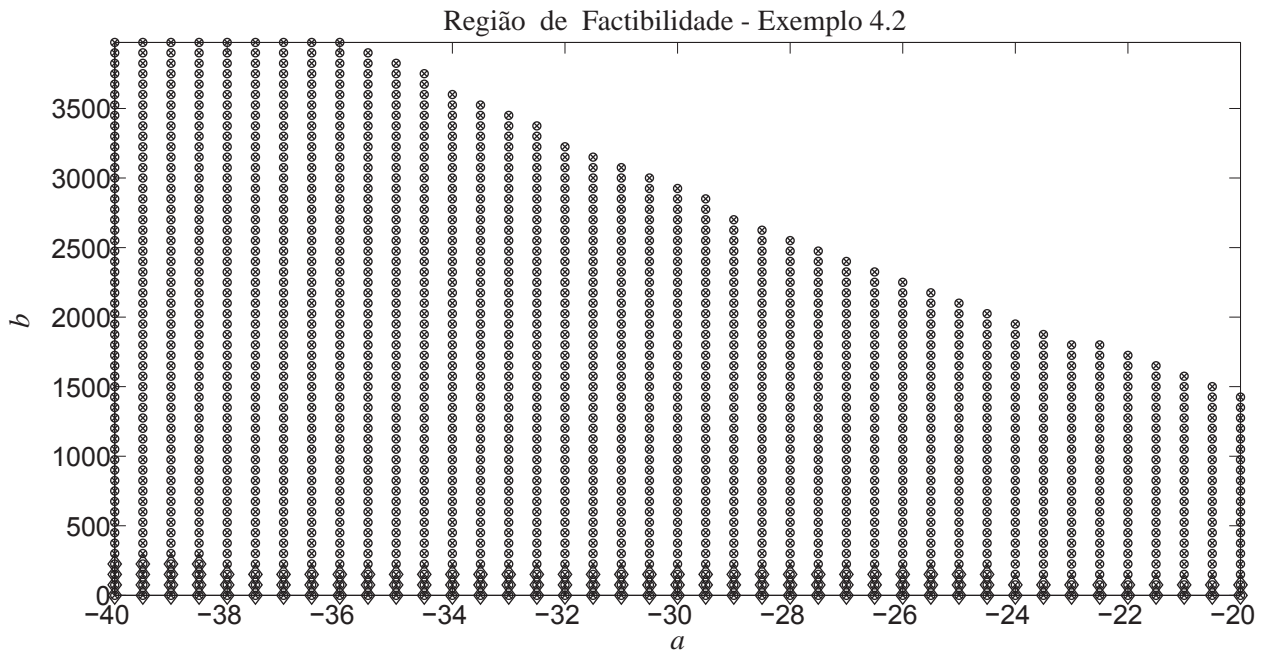


Figura 25: Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 0.85$ com (Teorema 2.3, (\diamond)), (Teorema 3.1, (o)) e Teorema 3.2 (x).

Para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 0.85$, as matrizes obtidas das funções de Lyapunov que satisfazem as condições dos teoremas, para o par $(a, b) = (2, 2)$ são:

Para a função (2.16) $v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} [x(t)^T P_m x(t)]$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.2223 & 0.0013 \\ 0.0013 & 0.0230 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.2221 & 0.0009 \\ 0.0009 & 0.0227 \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.2219 & 0.0010 \\ 0.0010 & 0.0225 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 0.2216 & 0.0007 \\ 0.0007 & 0.0222 \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Para a função (3.1) $v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} \left[x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i P_{mi} \right) x(t) \right]$

$$P_{11} = \begin{bmatrix} 0.8439 & -0.0280 \\ -0.0280 & 0.1823 \end{bmatrix}, \quad P_{12} = \begin{bmatrix} 1.2076 & 0.0176 \\ 0.0176 & 0.1854 \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

$$P_{13} = \begin{bmatrix} 1.2769 & -0.0165 \\ -0.0165 & 0.2402 \end{bmatrix}, \quad P_{14} = \begin{bmatrix} 2.3280 & 0.0363 \\ 0.0363 & 0.2152 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$P_{21} = \begin{bmatrix} 0.8446 & -0.0295 \\ -0.0295 & 0.1791 \end{bmatrix}, \quad P_{22} = \begin{bmatrix} 1.2067 & 0.0167 \\ 0.0167 & 0.1844 \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

$$P_{23} = \begin{bmatrix} 1.2767 & -0.0177 \\ -0.0177 & 0.2385 \end{bmatrix}, \quad P_{24} = \begin{bmatrix} 2.3253 & 0.0346 \\ 0.0346 & 0.2133 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$P_{31} = \begin{bmatrix} 0.8442 & -0.0292 \\ -0.0292 & 0.1795 \end{bmatrix}, \quad P_{32} = \begin{bmatrix} 1.2068 & 0.0166 \\ 0.0166 & 0.1843 \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

$$P_{33} = \begin{bmatrix} 1.2761 & -0.0174 \\ -0.0174 & 0.2378 \end{bmatrix}, \quad P_{34} = \begin{bmatrix} 2.3253 & 0.0344 \\ 0.0344 & 0.2123 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$P_{41} = \begin{bmatrix} 0.8469 & -0.0290 \\ -0.0290 & 0.1776 \end{bmatrix}, \quad P_{42} = \begin{bmatrix} 1.2073 & 0.0167 \\ 0.0167 & 0.1824 \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

$$P_{43} = \begin{bmatrix} 1.2770 & -0.0178 \\ -0.0178 & 0.2358 \end{bmatrix}, \quad P_{44} = \begin{bmatrix} 2.3228 & 0.0339 \\ 0.0339 & 0.2094 \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Para a função (3.59) $v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i P_{mi} + \bar{P}_m \right) x(t)$

$$P_{11} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.1602 & -0.0198 \\ -0.0198 & 0.0219 \end{bmatrix}, \quad P_{12} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.1458 & -0.0200 \\ -0.0200 & 0.0289 \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

$$P_{13} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.1457 & -0.0209 \\ -0.0209 & 0.0331 \end{bmatrix}, \quad P_{14} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.0783 & -0.0237 \\ -0.0237 & 0.1096 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$P_{21} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.1600 & -0.0197 \\ -0.0197 & 0.0216 \end{bmatrix}, \quad P_{22} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.1456 & -0.0199 \\ -0.0199 & 0.0288 \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

$$P_{23} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.1456 & -0.0208 \\ -0.0208 & 0.0329 \end{bmatrix}, \quad P_{24} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.0782 & -0.0236 \\ -0.0236 & 0.1089 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$P_{31} + \bar{P}_3 = \begin{bmatrix} 0.1600 & -0.0196 \\ -0.0196 & 0.0216 \end{bmatrix}, \quad P_{32} + \bar{P}_3 = \begin{bmatrix} 0.1456 & -0.0199 \\ -0.0199 & 0.0287 \end{bmatrix}, \quad (4.30)$$

$$P_{33} + \bar{P}_3 = \begin{bmatrix} 0.1454 & -0.0207 \\ -0.0207 & 0.0327 \end{bmatrix}, \quad P_{34} + \bar{P}_3 = \begin{bmatrix} 0.0781 & -0.0235 \\ -0.0235 & 0.1086 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$P_{41} + \bar{P}_4 = \begin{bmatrix} 0.1596 & -0.0196 \\ -0.0196 & 0.0228 \end{bmatrix}, \quad P_{42} + \bar{P}_4 = \begin{bmatrix} 0.1453 & -0.0199 \\ -0.0199 & 0.0294 \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

$$P_{43} + \bar{P}_4 = \begin{bmatrix} 0.1452 & -0.0208 \\ -0.0208 & 0.0331 \end{bmatrix}, \quad P_{44} + \bar{P}_4 = \begin{bmatrix} 0.0779 & -0.0235 \\ -0.0235 & 0.1078 \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

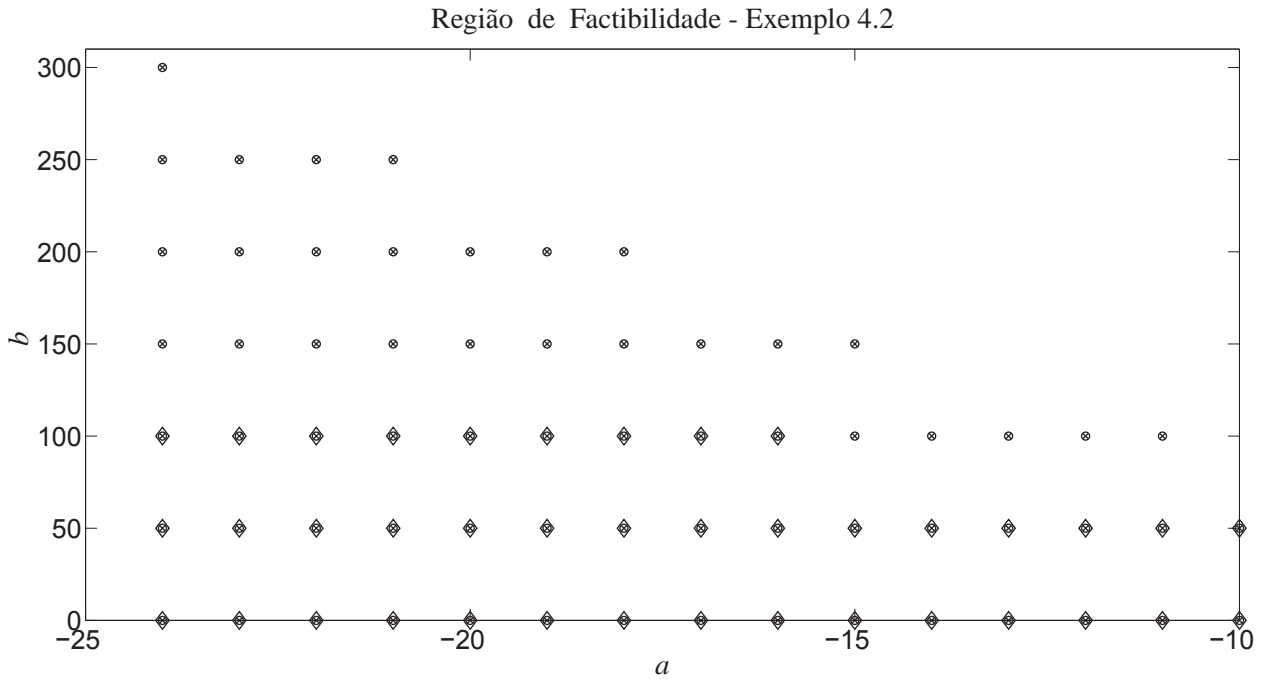


Figura 26: Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 8$ com (Teorema 2.3, (◇)), (Teorema 3.1, (o)) e Teorema 3.2 (x).

Para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 8$, as matrizes obtidas das funções de Lyapunov que satisfazem as condições dos teoremas, para o par $(a, b) = (2, 2)$ são:

Para a função (2.16) $v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} [x(t)^T P_m x(t)]$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.2223 & 0.0013 \\ 0.0013 & 0.0230 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.2221 & 0.0009 \\ 0.0009 & 0.0227 \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.2219 & 0.0010 \\ 0.0010 & 0.0225 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 0.2216 & 0.0007 \\ 0.0007 & 0.0222 \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Para a função (3.1) $v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} \left[x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i P_{mi} \right) x(t) \right]$

$$P_{11} = \begin{bmatrix} 4.5317 & -0.0762 \\ -0.0762 & 0.5590 \end{bmatrix}, \quad P_{12} = \begin{bmatrix} 4.5197 & -0.0610 \\ -0.0610 & 0.5437 \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

$$P_{13} = \begin{bmatrix} 4.5457 & -0.1076 \\ -0.1076 & 0.5806 \end{bmatrix}, \quad P_{14} = \begin{bmatrix} 5.0112 & 0.0230 \\ 0.0230 & 0.4945 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$P_{21} = \begin{bmatrix} 4.5241 & -0.0865 \\ -0.0865 & 0.5524 \end{bmatrix}, \quad P_{22} = \begin{bmatrix} 4.5210 & -0.0638 \\ -0.0638 & 0.5368 \end{bmatrix}, \quad (4.38)$$

$$P_{23} = \begin{bmatrix} 4.5451 & -0.1121 \\ -0.1121 & 0.5755 \end{bmatrix}, \quad P_{24} = \begin{bmatrix} 5.0071 & 0.0184 \\ 0.0184 & 0.4893 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$P_{31} = \begin{bmatrix} 4.5212 & -0.0851 \\ -0.0851 & 0.5507 \end{bmatrix}, \quad P_{32} = \begin{bmatrix} 4.5164 & -0.0638 \\ -0.0638 & 0.5375 \end{bmatrix}, \quad (4.40)$$

$$P_{33} = \begin{bmatrix} 4.5429 & -0.1085 \\ -0.1085 & 0.5701 \end{bmatrix}, \quad P_{34} = \begin{bmatrix} 5.0058 & 0.0190 \\ 0.0190 & 0.4866 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

$$P_{41} = \begin{bmatrix} 4.5216 & -0.0879 \\ -0.0879 & 0.5436 \end{bmatrix}, \quad P_{42} = \begin{bmatrix} 4.5136 & -0.0662 \\ -0.0662 & 0.5304 \end{bmatrix}, \quad (4.42)$$

$$P_{43} = \begin{bmatrix} 4.5412 & -0.1133 \\ -0.1133 & 0.5664 \end{bmatrix}, \quad P_{44} = \begin{bmatrix} 4.9973 & 0.0173 \\ 0.0173 & 0.4803 \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

Para a função (3.59) $v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i P_{mi} + \bar{P}_m \right) x(t)$

$$P_{11} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.4188 & -0.0634 \\ -0.0634 & 0.4254 \end{bmatrix}, \quad P_{12} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.4218 & -0.0623 \\ -0.0623 & 0.4164 \end{bmatrix}, \quad (4.44)$$

$$P_{13} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.4225 & -0.0604 \\ -0.0604 & 0.4224 \end{bmatrix}, \quad P_{14} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.4381 & 0.0026 \\ 0.0026 & 0.5654 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

$$P_{21} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.4197 & -0.0630 \\ -0.0630 & 0.4109 \end{bmatrix}, \quad P_{22} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.4205 & -0.0620 \\ -0.0620 & 0.4188 \end{bmatrix}, \quad (4.46)$$

$$P_{23} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.4222 & -0.0602 \\ -0.0602 & 0.4199 \end{bmatrix}, \quad P_{24} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.4378 & 0.0026 \\ 0.0026 & 0.5614 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$$P_{31} + \bar{P}_3 = \begin{bmatrix} 0.4194 & -0.0628 \\ -0.0628 & 0.4099 \end{bmatrix}, \quad P_{32} + \bar{P}_3 = \begin{bmatrix} 0.4212 & -0.0619 \\ -0.0619 & 0.4129 \end{bmatrix}, \quad (4.48)$$

$$P_{33} + \bar{P}_3 = \begin{bmatrix} 0.4211 & -0.0598 \\ -0.0598 & 0.4202 \end{bmatrix}, \quad P_{34} + \bar{P}_3 = \begin{bmatrix} 0.4374 & 0.0028 \\ 0.0028 & 0.5593 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

$$P_{41} + \bar{P}_4 = \begin{bmatrix} 0.4191 & -0.0617 \\ -0.0617 & 0.4119 \end{bmatrix}, \quad P_{42} + \bar{P}_4 = \begin{bmatrix} 0.4209 & -0.0610 \\ -0.0610 & 0.4127 \end{bmatrix}, \quad (4.50)$$

$$P_{43} + \bar{P}_4 = \begin{bmatrix} 0.4216 & -0.0592 \\ -0.0592 & 0.4172 \end{bmatrix}, \quad P_{44} + \bar{P}_4 = \begin{bmatrix} 0.4366 & 0.0028 \\ 0.0028 & 0.5540 \end{bmatrix}. \quad (4.51)$$

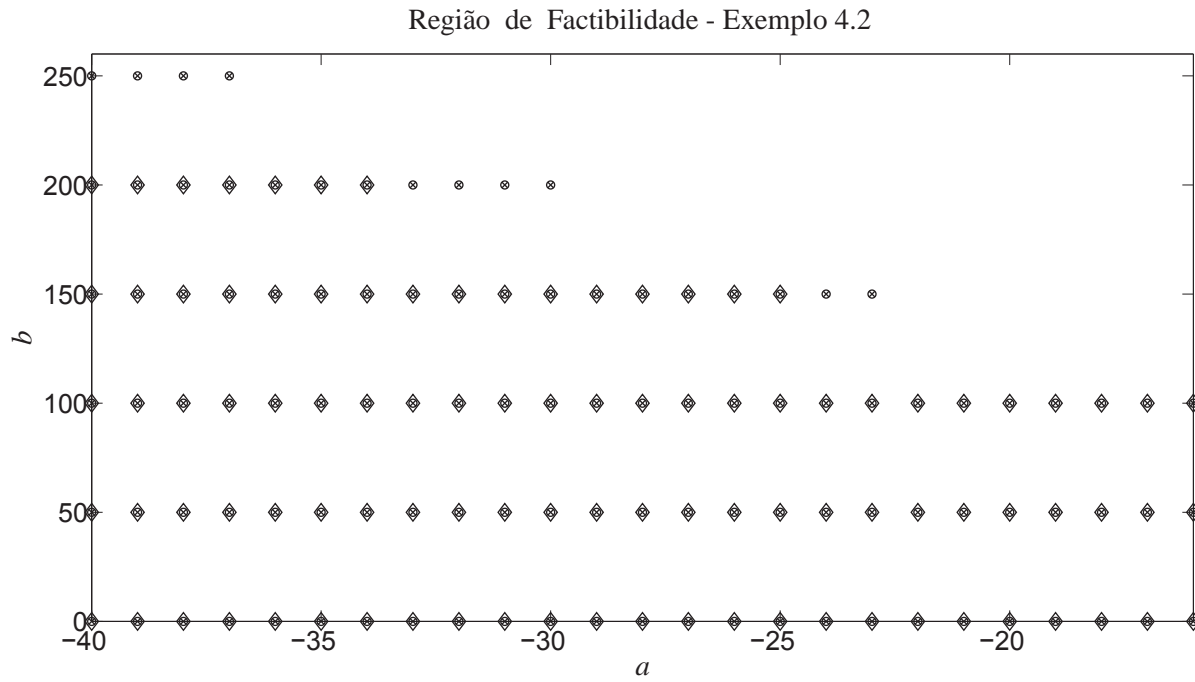


Figura 27: Análise da estabilidade para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 30$ com (Teorema 2.3, (\diamond)), (Teorema 3.1, (o)) e Teorema 3.2 (x).

Para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 30$, as matrizes obtidas das funções de Lyapunov que satisfazem as condições dos teoremas, para o par $(a, b) = (2, 2)$ são:

Para a função (2.16) $v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} [x(t)^T P_m x(t)]$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.2223 & 0.0013 \\ 0.0013 & 0.0230 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.2221 & 0.0009 \\ 0.0009 & 0.0227 \end{bmatrix}, \quad (4.52)$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.2219 & 0.0010 \\ 0.0010 & 0.0225 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 0.2216 & 0.0007 \\ 0.0007 & 0.0222 \end{bmatrix}. \quad (4.53)$$

Para a função (3.1) $v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} \left[x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i P_{mi} \right) x(t) \right]$

$$P_{11} = \begin{bmatrix} 0.0407 & -0.0008 \\ -0.0008 & 0.0041 \end{bmatrix}, \quad P_{12} = \begin{bmatrix} 0.0409 & -0.0008 \\ -0.0008 & 0.0043 \end{bmatrix}, \quad (4.54)$$

$$P_{13} = \begin{bmatrix} 0.0409 & -0.0008 \\ -0.0008 & 0.0043 \end{bmatrix}, \quad P_{14} = \begin{bmatrix} 0.0408 & -0.0006 \\ -0.0006 & 0.0042 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

$$P_{21} = \begin{bmatrix} 0.0408 & -0.0009 \\ -0.0009 & 0.0042 \end{bmatrix}, \quad P_{22} = \begin{bmatrix} 0.0408 & -0.0008 \\ -0.0008 & 0.0041 \end{bmatrix}, \quad (4.56)$$

$$P_{23} = \begin{bmatrix} 0.0409 & -0.0009 \\ -0.0009 & 0.0042 \end{bmatrix}, \quad P_{24} = \begin{bmatrix} 0.0407 & -0.0007 \\ -0.0007 & 0.0042 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

$$P_{31} = \begin{bmatrix} 0.0408 & -0.0008 \\ -0.0008 & 0.0042 \end{bmatrix}, \quad P_{32} = \begin{bmatrix} 0.0408 & -0.0008 \\ -0.0008 & 0.0042 \end{bmatrix}, \quad (4.58)$$

$$P_{33} = \begin{bmatrix} 0.0407 & -0.0009 \\ -0.0009 & 0.0041 \end{bmatrix}, \quad P_{34} = \begin{bmatrix} 0.0407 & -0.0007 \\ -0.0007 & 0.0041 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

$$P_{41} = \begin{bmatrix} 0.0408 & -0.0009 \\ -0.0009 & 0.0041 \end{bmatrix}, \quad P_{42} = \begin{bmatrix} 0.0408 & -0.0009 \\ -0.0009 & 0.0041 \end{bmatrix}, \quad (4.60)$$

$$P_{43} = \begin{bmatrix} 0.0408 & -0.0009 \\ -0.0009 & 0.0041 \end{bmatrix}, \quad P_{44} = \begin{bmatrix} 0.0406 & -0.0007 \\ -0.0007 & 0.0041 \end{bmatrix}. \quad (4.61)$$

Para a função (3.59) $v(x(t)) = \min_{m=1,2,\dots,r} x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i P_{mi} + \bar{P}_m \right) x(t)$

$$P_{11} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 3.9623 & -0.4558 \\ -0.4558 & 4.7430 \end{bmatrix}, \quad P_{12} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 3.9786 & -0.4557 \\ -0.4557 & 4.6528 \end{bmatrix}, \quad (4.62)$$

$$P_{13} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 3.9801 & -0.4555 \\ -0.4555 & 4.6681 \end{bmatrix}, \quad P_{14} + \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 3.9846 & -0.4374 \\ -0.4374 & 4.7493 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

$$P_{21} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 3.9738 & -0.4557 \\ -0.4557 & 4.6004 \end{bmatrix}, \quad P_{22} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 3.9650 & -0.4528 \\ -0.4528 & 4.6634 \end{bmatrix}, \quad (4.64)$$

$$P_{23} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 3.9773 & -0.4538 \\ -0.4538 & 4.6375 \end{bmatrix}, \quad P_{24} + \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 3.9816 & -0.4353 \\ -0.4353 & 4.7126 \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

$$P_{31} + \bar{P}_3 = \begin{bmatrix} 3.9706 & -0.4545 \\ -0.4545 & 4.5876 \end{bmatrix}, \quad P_{32} + \bar{P}_3 = \begin{bmatrix} 3.9726 & -0.4528 \\ -0.4528 & 4.6105 \end{bmatrix}, \quad (4.66)$$

$$P_{33} + \bar{P}_3 = \begin{bmatrix} 3.9663 & -0.4514 \\ -0.4514 & 4.6307 \end{bmatrix}, \quad P_{34} + \bar{P}_3 = \begin{bmatrix} 3.9784 & -0.4330 \\ -0.4330 & 4.6917 \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

$$P_{41} + \bar{P}_4 = \begin{bmatrix} 3.9671 & -0.4516 \\ -0.4516 & 4.5791 \end{bmatrix}, \quad P_{42} + \bar{P}_4 = \begin{bmatrix} 3.9695 & -0.4499 \\ -0.4499 & 4.5848 \end{bmatrix}, \quad (4.68)$$

$$P_{43} + \bar{P}_4 = \begin{bmatrix} 3.9714 & -0.4495 \\ -0.4495 & 4.5882 \end{bmatrix}, \quad P_{44} + \bar{P}_4 = \begin{bmatrix} 3.9695 & -0.4332 \\ -0.4332 & 4.6371 \end{bmatrix}. \quad (4.69)$$

Através das Figuras 25, 26 e 27, pode-se observar que as regiões de factibilidade dos Teoremas 3.1 e 3.2 foram semelhantes para $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 0.85$ e $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 8$. Quando $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 30$, a região de factibilidade do Teorema 2.3 que não depende de ϕ

se aproximou das regiões dos Teoremas 3.1 e 3.2, pois conforme o valor de ϕ aumenta, a região de factibilidade diminui e, como a região do Teorema 2.3 não depende da derivada temporal da função de pertinência, permanece inalterada.

A seção a seguir mostrará a comparação, através de um novo exemplo, do novo Teorema 3.2, que apresentou melhor resultado que todos os métodos existentes na literatura do momento, para valores suficientemente pequenos de ϕ_p .

4.2 MAIS UM EXEMPLO

Como foi visto nos Capítulos 2 e 3, os resultados do Teorema 1.1 e 1.2, tendem à estabilidade quadrática quando aumenta-se os valores de ϕ_p , como foi mostrado nas Figuras 3, 6, 12, 15, 18 e 21. Isso se deve ao fato que a estabilidade quadrática garante a estabilidade de um sistema fuzzy TS para qualquer combinação convexa dos modelos locais.

O Exemplo a seguir comprova ainda mais a influência da derivada temporal da função de pertinência em FLF e também nas FLFM.

4.2.1 Exemplo 4.3

Considere o sistema fuzzy TS dado em (1.9), com duas regras fuzzy, sendo as matrizes do modelo local:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2-k & -1 \end{bmatrix}$$

sendo k os máximos valores dos quais a estabilidade do sistema é garantida. Estes valores foram checados para vários valores de ϕ_k . Os resultados foram mostrados na Figura 28. A figura mostra os resultados deste sistema para o Teorema 3.2, Teorema 1.2 (MOZELLI, 2009; RHEE; WON, 2006; TANAKA, 2007) e Lema 1.1 (FLQ).

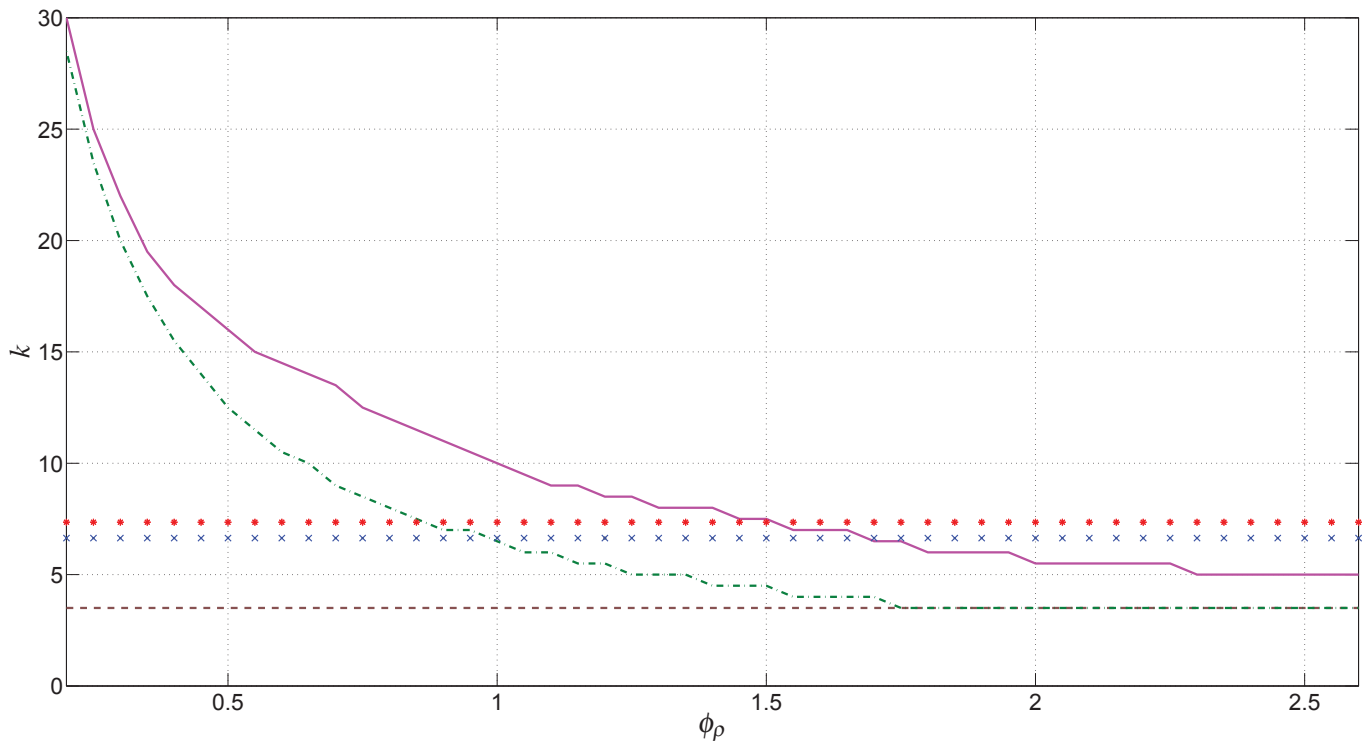


Figura 28: Análise da estabilidade para vários valores de ϕ_ρ para Lema 1.1 (FLQ) (-), Teorema 1.2 - (MOZELLI, 2009) (-.), (TANAKA, 2007), (x), (RHEE; WON, 2006), (•), Teorema 3.2 (-).

Pela Figura 28, pode-se observar que os métodos apresentados por Tanaka et al. (2007), por Rhee e Won (2006) e também no Lema 1.1 (FLQ) não variam com os valores de ϕ_ρ pois, suas condições não dependem da derivada temporal da função de pertinência. Sendo então os valores de k fixo para cada condição. Para Lema 1.1, $k = 3.82$, para Rhee e Won (2006), $k = 7.35$ e para Tanaka et al. (2007), $k = 6.64$.

Rhee e Won (2006) e Tanaka et al. (2007) obtiveram os maiores valores de k , quando os valores de ϕ_ρ foram maiores. Mas, no geral, o Teorema 3.2 ($k = 5$) apresenta os melhores resultados, comparados com todos os outros métodos.

4.3 INFLUÊNCIA DO θ_m PRESENTE NAS DESIGUALDADES DE LYAPUNOV-METZLER

A partir do Capítulo 2, foram utilizadas as desigualdades de Lyapunov-Metzler definidas em (GEROMEL; COLANERI, 2006), em que, ao considerar o mínimo das condições obtidas, foram introduzidos os parâmetros θ_m , $m = 1, \dots, r$ que influenciam o resultado das LMIs.

Utilizando os mesmos dados do Exemplo 4.3, ou seja, as mesmas matrizes locais, definidas por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2-k & -1 \end{bmatrix}.$$

sendo k o máximo valor para o qual a estabilidade do sistema é garantida, dado um ϕ , com $\phi_1 = \phi_2 = \phi$. A figura 4.8, mostra os resultados obtidos utilizando o Teorema 3.2, para quatro valores de θ_m , afim de mostrar sua influência no sistema.

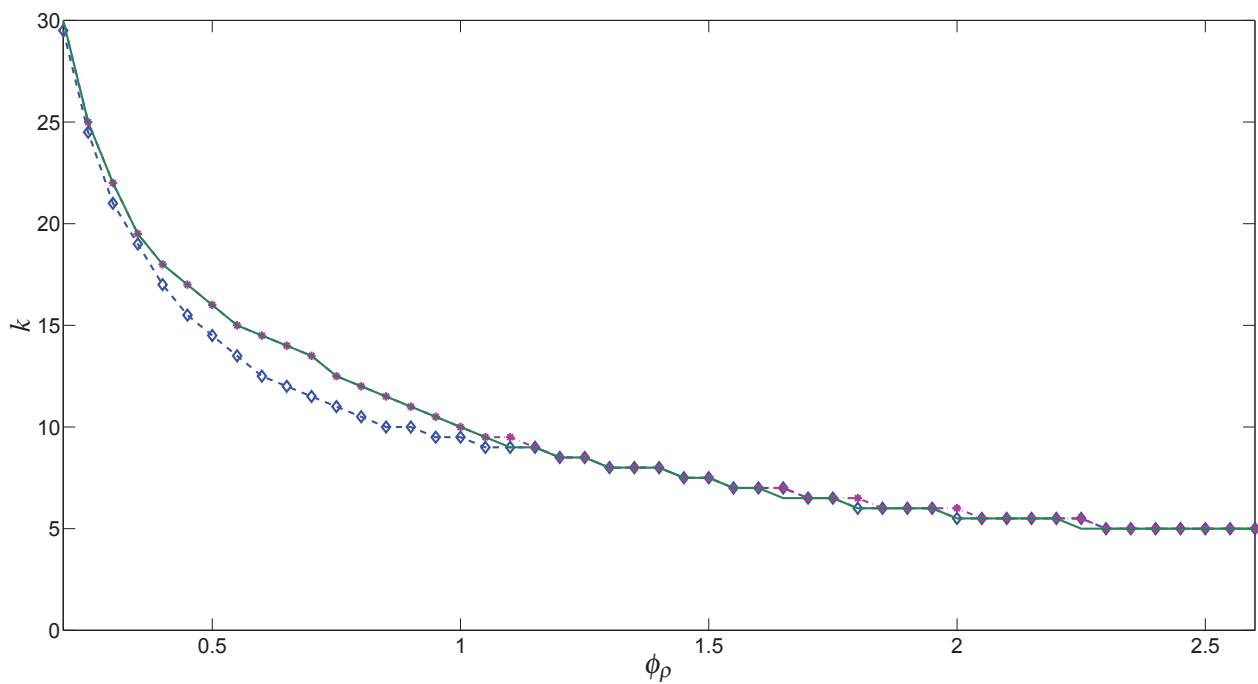


Figura 29: Análise da estabilidade para vários valores de ϕ_ρ , para $\theta_1 = \theta_2 = 1$, ($-\diamond$), $\theta_1 = \theta_2 = 1000$, ($- \bullet$), $\theta_1 = \theta_2 = 5000$, ($-$)

Pela Figura 29, pode-se notar a influência de θ_m presente nas LMIs quando foram utilizadas FLM e FLFM. Há uma região dos valores de θ_m que apresentam o melhor resultado. No Teorema 3.2, a melhor região de factibilidade foi para valores de θ_m em torno de 1000. Para valores pequenos de θ_m ($\theta_m = 1$), a região é bem menor do que para valores maiores. A região vai crescendo conforme θ_m aumenta. Mas, depois que chega no seu melhor valor, conforme aumenta-se o valor de θ_m , a região vai perdendo factibilidade (como para $\theta_m = 5000$).

4.4 CONCLUSÕES PARCIAIS

Neste Capítulo, foram feitas comparações dos novos teoremas propostos no trabalho, sendo possível concluir a melhora da região de factibilidade conforme as condições se tornam menos conservadoras. Também foi apresentado um novo exemplo comparando o melhor resultado encontrado (Teorema 3.2) com os métodos existentes na literatura.

Nas Figuras 22, 23 e 24, com apenas duas regras, foi possível observar a melhora dos métodos, utilizando apenas FLM (Teorema 2.3) e utilizando FLFM (Teorema 3.1 e 3.2). Mesmo com o aumento dos valores de ϕ_ρ as regiões de factibilidade diminuíram, mas em menor proporção, comparados com os outros métodos já existentes (TANAKA, 2003). Nas Figuras 25, 26 e 27, quando foram utilizadas quatro regras, para valores de $\phi_m = 0.85$, $m = 1, \dots, 4$ e $\phi_m = 8$, $m = 1, \dots, 4$ as regiões de factibilidade foram semelhantes, pois para valores pequenos de ϕ_m os Teoremas 3.1 e 3.2, no qual foram utilizados FLFM, possuem resultados melhores do que o Teorema 2.3 em que se utilizou FLM. Quando os valores de ϕ aumentam, a derivada temporal da função de pertinência prejudica o sistema (nos Teoremas 3.1 e 3.2) e então, o Teorema 2.3 (que não depende de ϕ) se aproxima dos Teoremas 3.1 e 3.2.

Na Seção 4.2 deste mesmo capítulo, foi feito um exemplo para comparar o melhor teorema obtido neste trabalho (Teorema 3.2) com os métodos existentes na literatura, sendo que alguns deles, foram apresentados através de lema e teoremas ao decorrer dos capítulos. Como mostra a Figura 28, o Teorema 3.2 se sobressai, sobre todos os métodos apresentados, para valores de ϕ suficientemente pequenos e, para maiores valores de ϕ_ρ não fica tão abaixo dos outros métodos como pode ser visto na Figura 28.

Quando utiliza-se as desigualdades de Lyapunov-Metzler, há um θ_m presente quando se tira o mínimo do sistema, que dependendo do seu valor, ele pode ajudar ou prejudicar o sistema. Na Seção 4.3, foi feita uma análise do θ_m , utilizando o mesmo exemplo da Seção 4.2, mas para vários valores de θ_m diferentes, e o resultado foi mostrado na Figura 29. Pela figura, pode-se observar que há uma região relacionada a θ_m em que apresenta a maior região de factibilidade, que para o Teorema 3.2, foi quando θ_m está em torno de 1000. Valores distantes deste valor, tanto menor quanto maior, faz com que a região perca sua factibilidade.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Neste trabalho, foram introduzidas novas condições para estabilidade baseadas em funções Lyapunov-Fuzzy e Lyapunov-Fuzzy-Metzler, reduzindo o conservadorismo de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno contínuos.

Primeiramente, foi feito um estudo sobre modelos fuzzy TS (MOZELLI, 2009; TANAKA, 2003), que descrevem um sistema não-linear como a combinação de um certo número de modelos locais lineares e invariantes no tempo, sendo o sistema global obtido, uma combinação fuzzy dos modelos locais lineares. Dependendo do número de modelos locais, o sistema não-linear pode ser representado na sua forma exata.

Baseado nos sistemas fuzzy TS, foi proposta uma nova condição mais relaxada do que em (MOZELLI, 2009; TANAKA, 2003). Os resultados são baseados em LMIs e a estabilidade assegurada através das funções de Lyapunov Fuzzy. Resultados de simulação são mostrados nas Figuras 2 e 3, dos Exemplos 1.3 e 1.4, respectivamente. Houve melhores resultados utilizando o novo método (Teorema 1.3), quando comparado com o Teoremas 1.1 de (TANAKA, 2003) e o Teorema 1.2 de (MOZELLI, 2009). O Teorema 1.3 flexibilizou as condições dos Teoremas 1.1 e 1.2.

Um outro novo método proposto foi utilizar nos modelos fuzzy TS, funções baseadas nas desigualdades de Lyapunov-Metzler para relaxar mais o sistema e, então, foi abordada a teoria sobre este assunto apresentadas em (DEAECTO, 2007; GEROMEL; COLANERI, 2006). Esta teoria trata sistemas lineares com comutação e consiste em encontrar condições suficientes para a estabilidade do sistema através de uma regra de comutação $\sigma(t)$ que depende das variáveis de estado do sistema. A solução deste problema é descrita através de BMIs, que possuem natureza não-convexa, e por isso, são difíceis de serem resolvidas. Então, em (GEROMEL; COLANERI, 2006) foi proposto um método que permite substituir estas desigualdades não-convexas por uma busca unidimensional de um conjunto de LMIs. Este método faz com que a origem do sistema global seja globalmente assintoticamente estável, sem exigir que cada subsistema isolado seja estável ou mesmo estabilizável. Sendo assim, o novo método proposto mostra a vantagem

destes sistemas baseados em funções de Lyapunov-Metzler e esta dissertação explorou este fato na análise da estabilidade de sistemas fuzzy TS sem comutação.

Um ponto prejudicial do emprego de FLF é a derivada temporal da função de pertinência na derivada da FLM, que faz com que o sistema se torne dependente desta derivada temporal e também das condições iniciais do sistema, como foi mostrado nos Exemplos 2.1, 2.2 e 2.3. Nestes exemplos, pode-se notar que quanto maior os valores de ϕ_p menor a região de factibilidade. Isto ocorre até que a solução obtida equivale a $P(\alpha) = P$ único pois, pelas condições dos Teoremas 1.1 e 1.2, nos quais os termos que multiplicam os ϕ_p das LMIs (1.12) e (1.15), respectivamente, possuem a condição de serem maiores que zero para satisfazerem as condições dadas, ou seja, quanto maior o ϕ_p , este termo multiplicado tende a zero e o sistema volta à condição do P único. Portanto, quando utiliza-se funções baseadas em Lyapunov-Metzler como no Teorema 2.3, no lugar das funções Lyapunov-Fuzzy, conforme ϕ_p aumenta diminui a região de factibilidade de (MOZELLI, 2009; TANAKA, 2003) e o novo método permanece da mesma forma que com P único, pois assim não será prejudicado por esta variável.

Se, por um lado, o uso de FLF, prejudica o sistema pelo fato da presença da derivada temporal, por outro, os modelos fuzzy TS relaxam o sistema, por haver vários parâmetros na função de Lyapunov de modo a tornar o sistema mais flexível. Então, foram utilizadas funções Lyapunov Fuzzy-Metzler em uma outra nova condição apresentada. Nesta condição, as matrizes P dependem tanto de FLM quanto das FLF, e com isso, o sistema tende a ser menos conservativo do que em (MOZELLI, 2009; TANAKA, 2003). O Teorema 3.1 apresentou uma maior região de factibilidade, tanto para valores de ϕ_p pequenos quanto para valores maiores. Quando os valores de ϕ_p aumentam, a região de factibilidade diminui, pois também possui a derivada temporal da função de pertinência. Mas, pela presença das desigualdades de Lyapunov-Metzler, ela diminui em menor proporção do que nos Exemplos 1.2 (TANAKA, 2003) e 1.3 (MOZELLI, 2009).

Por fim, foi proposto um último método em que uma função de Lyapunov seja a soma de uma função Lyapunov-Fuzzy mais uma função Lyapunov-Metzler. Este novo método apresentou os melhores resultados deste trabalho, isto porque, abrange o método proposto em (MOZELLI, 2009; TANAKA, 2003) com sistemas baseados em Lyapunov-Fuzzy-Metzler. Então, mesmo com um aumento dos parâmetros ϕ_p pertencente às LMIs do sistema, a região de factibilidade diminui, mas menos do que nos métodos anteriores.

No último capítulo deste trabalho, foram ilustradas comparações, através de exemplos, primeiramente, de todos os métodos propostos, através dos Teoremas 2.3, 3.1 e 3.2. O Teorema 1.3 não foi utilizado nas figuras das comparações porque, os novos teoremas propostos ao

decorrer do trabalho, abrangem as condições do Teorema 1.3. Através das Figuras 22, 23 e 24, para duas regras fuzzy, ficou claro que o melhor resultado deste trabalho foi o Teorema 3.2, que foi o resultado menos conservador apresentado. Para quatro regras fuzzy TS, pode-se observar que para valores pequenos de ϕ o mínimo presente nas FLM e FLFM não influencia tanto no sistema, sendo assim, os Teoremas 3.1 e 3.2, no qual foram utilizados FLFM, obtiveram resultados semelhantes, como mostram nas Figuras 25 e 26. Quando os valores de ϕ crescem, a região de factibilidade dos Teoremas 3.1 e 3.2 diminuem devido a presença da derivada temporal da função de pertinência, fazendo com que o Teorema 2.3 se aproxime dos Teoremas 3.1 e 3.2, pois não depende de ϕ . Neste caso, a presença do mínimo presente nas FLM e FLFM se sobressai.

Na seção 4.2, foi mostrado um exemplo, com os mesmos modelos do sistema fuzzy TS apresentado em (MOZELLI, 2009) e também utilizando outros métodos apresentados na literatura, que mostram a influência da derivada temporal da função de pertinência. Foi possível observar a eficiência do Teorema 3.2 em relação aos outros métodos, para valores de ϕ_p suficientemente pequenos, em que os resultados são bem melhores.

Para maiores valores de ϕ_p em que a diferença entre os métodos diminuem um pouco mas, ainda assim o Teorema 3.2 se sobressai, exceto para as condições de (RHEE; WON, 2006), em que $k = 7.35$, fixo, pois independe de ϕ_p , mas, por não depender da derivada temporal da função de pertinência, suas condições caem em BMIs, que apesar de bem elaboradas, é um processo lento, sendo menos vantajoso e de (TANAKA, 2007), em que $k = 6.64$, e o método proposto por ele não depende de ϕ , assim, por k ser um valor fixo, para valores de ϕ pequenos, o Teorema 3.2 apresenta uma região de factibilidade bem maior.

E na Seção 4.3, foi utilizado o mesmo exemplo da Seção 4.2, mas agora com o objetivo de mostrar a influência do θ_m presente quando se utiliza as desigualdades de Lyapunov-Metzler, como no Teorema 2.3 (FLM) e nos Teoremas 3.1 e 3.2 (FLFM). O θ_m pode tanto ajudar quanto prejudicar o sistema, dependendo do seu valor. Isso foi mostrado na Figura 29, em que para valores pequenos, a região de factibilidade é menor do que para valores de θ_m maiores. Mas há uma região em que apresenta o melhor resultado e a partir desta região, o sistema começa a perder factibilidade, como pode-se notar na figura.

Foi possível, neste trabalho, contribuir com novas condições de estabilidade para sistemas fuzzy TS e sistemas baseados em funções Lyapunov Fuzzy-Metzler, tornando mais relaxadas do que em (MOZELLI, 2009; TANAKA, 2003).

REFERÊNCIAS

- ARRIFANO, N. S. D.; OLIVEIRA, V. A.; COSSI, L. A. V. Synthesis of an LMI-based fuzzy control system with guaranteed cost performance: a piecewise Lyapunov approach. *Revista SBA - Controle & Automação*, Campinas, v. 17, p. 213 – 225, 2006.
- BOYD, S. et al. *Linear matrix inequalities in systems and control theory*. 2. ed. [S.l.]: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994. 193 p. (Studies in Applied Mathematics, 15).
- BROCKETT, R. W. Hybrid models for motion control systems . In: *TRENTELMAN, H.; WILLEMS, J. C. (Eds)*. Birkhäuser: Boston, 1993. p. 29 – 53. Essays on control: perspectives in the theory and its applications.
- CAMPELLO, R. J. G. B. Arquiteturas e metodologias para modelagem e controle de sistemas complexos utilizando ferramentas clássicas e modernas. Campinas: Biblioteca Digital da Unicamp, 2002.
- CAO, S. G.; REES, N. W.; FENG, G. Further results about quadratic stability of continuous-time fuzzy control systems. *International Journal of Systems Science*, Hants, v. 28, n. 4, p. 397 – 404, 1997a.
- CAO, S. G.; REES, N. W.; FENG, G. Lyapunov-like stability theorems for discrete-time fuzzy control systems. *International Journal of Systems Science*, Hants, v. 28, n. 3, p. 297 – 308, 1997b.
- CARDIM, R. *Projeto de controladores baseados em LMIs: realimentação derivativa e sistemas chaveados utilizando estrutura variável*. 2009. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2009.
- CASTRO, J. Fuzzy logic controllers are universal approximators. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, New York, v. 25, n. 4, p. 629 –635, abr. 1995.
- DAAFOUZ, J.; BERNUSSOU, J. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. *Systems and Control Letters*, v. 43, n. 5, p. 355 – 359, 2001.
- DEAECTO, G. S. *"Síntese de controle para sistemas dinâmicos com comutação"*. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2007.
- DECARLO, R. A. et al. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. *Proceedings of the IEEE*, New York, p. 1069–1082, 2000.
- DRIANKOV, D.; HELLENDORRN, H.; REINFRANK, M. *An introduction to fuzzy control*. New York: Springer-Verlag, 1993.

- DUTTA, S. Fuzzy logic applications: Technological and strategic issues. *IEEE Transactions on Engineering Management*, New York, v. 40, n. 3, p. 237 –254, ago. 1993.
- FANG, C.-H. et al. A new lmi-based approach to relaxed quadratic stabilization of t-s fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 14, n. 3, p. 386 – 397, 2006.
- GAHINET, P. et al. Lmi control toolbox - for use with matlab. Natick: Mathworks, 1995. Disponível em: <<http://www.mathworks.com/access>>. Acesso em: 22 Set. 2009.
- GARG, K. M. *Theory of differentiation: A unified theory of differentiation via new derivate theorems and new derivatives*. New York: Wiley & Sons, 1998.
- GEROMEL, J. C.; COLANERI, P. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems. *SIAM - Journal on Control and Optimization*, Philadelphia, v. 45, n. 5, p. 1915–1930, 2006.
- HESPANHA, J. Uniform stability of switched linear systems: extensions of lasalle’s invariance principle. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 49, n. 4, p. 470 – 482, 2004.
- HESPANHA, J. P.; MORSE, A. S. Stabilization of nonholonomic integrators via logic-based switching. *Automática*, Elmsford, v. 35, n. 3, p. 385 – 393, 1999.
- HESPANHA, J. P.; MORSE, A. S. Switching between stabilizing controllers. *Automática*, v. 38, n. 11, p. 1905 – 1917, 2002.
- JOHANSEN, T. A.; SHORTEN, R.; MURRAY-SMITH, R. On the interpretation and identification of dynamic takagi-sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 8, p. 297–313, 2000.
- JOHANSSON, M. *Piecewise linear control systems*. New York: Springer Verlag, 2003. 205 p.
- JOHANSSON, M.; RANTZER, A. Computation of piecewise quadratic lyapunov functions for hybrid systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 43, n. 4, p. 555–559, 1998.
- JOHANSSON, M.; RANTZER, A.; ARZEN, K.-E. Piecewise quadratic stability of fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 7, n. 6, p. 713 –722, dez. 1999.
- KIM, E.; LEE, H. New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 8, n. 5, p. 523 – 534, 2000.
- KOSKO, B. *Fuzzy engineering*. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1997.
- KULKARNI, S. R.; RAMADGE, P. J. Model and controller selection policies based on output predictions errors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 41, p. 1594 – 1604, 1996.
- LASDON, L. S. *Optimization Theory for Large Systems*. New York: Macmillan, 1970.
- LEE, C. Fuzzy logic in control systems: fuzzy logic controller. (parti). *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, New York, v. 20, n. 2, p. 404 –418, 1990.
- LIBERZON, D. *Switching in Systems and Control*. Boston: Birkhäuser, 2003.

- LIBERZON, D.; MORSE, A. S. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, New York, v. 19, p. 59–70, 1999.
- LOFBERG, J. Yalmip : a toolbox for modeling and optimization in matlab. In: *IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER AIDED CONTROL SYSTEMS DESIGN*. New York: IEEE, 2004. p. 284 –289.
- MACHADO, E. R. M. D. "Modelagem e controle de sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno". 2003. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista - UNESP, Ilha Solteira, 2003.
- MENDEL, J. Fuzzy logic systems for engineering: A tutorial. New York, v. 83, n. 3, p. 345 –377, 1995.
- MORSE, A. S. Supervisory control of families of linear set-point controllers - part1: exact matching. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 41, p. 1413 – 1431, 1996.
- MOZELLI, L. et al. Alternative lmi conditions for takagi-sugeno systems via fuzzy lyapunov function [condições lmis alternativas para sistemas takagi-sugeno via função de lyapunov fuzzy]. *Controle & Automação*, v. 21, n. 1, p. 96–107, 2010.
- MOZELLI, L. A. "Controle Fuzzy para sistemas Takagi-Sugeno: Condições aprimoradas e aplicações". 2001. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.
- MOZELLI, L. A. et al. Reducing conservativeness in recent stability conditions of ts fuzzy systems. *Automática*, v. 45, n. 6, p. 1580 – 1583, 2009. ISSN 0005-1098.
- NARENDRA, K. S.; BALAKRISHNAN, J. Adaptive control using multiple models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 42, p. 171 – 187, 1997.
- PEAUCELLE, D. et al. User's guide for SeDuMi Interface 1.04. Toulouse:LAAS-CNRS,, 2002. 37p, Disponível em: <<http://www.laas.fr/peaucell/software>>. Acesso em: 22 Set. 2009.
- RHEE, B.-J.; WON, S. A new fuzzy lyapunov function approach for a takagi-sugeno fuzzy control system design. *Fuzzy Sets and Systems*, Amsterdam, v. 157, n. 9, p. 1211 – 1228, 2006.
- STURM, J. F. Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, New York, v. 11–12, p. 625–653, 1999. Disponível em: <<http://citeseer.ist.psu.edu/sturm99using.html>>>.
- SUGENO, M.; KANG, G. T. Structure identification of fuzzy model. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 28, n. 1, p. 15 – 33, 1988.
- TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, v. 15, n. 1, p. 116–132, 1985.
- TANAKA, K.; HORI, T.; WANG, H. A multiple lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 11, n. 4, p. 582 – 589, 2003.

- TANAKA, K.; IKEDA, T.; WANG, H. O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 6, n. 2, p. 250 – 265, 1998.
- TANAKA, K.; NISHIMURA, M.; WANG, H. O. Multi-Objective Fuzzy Control of high rise/high speed elevators using LMIs. *Proceedings...*, New York:IEEE, p. 3450 – 3454, 1998.
- TANAKA, K.; SUGENO, M. Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 45, n. 2, p. 135 – 156, 1992.
- TANAKA, K. et al. A sum of squares approach to stability analysis of polynomial fuzzy systems. In: *AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2007. ACC '07*. [S.l.: s.n.], 2007. p. 4071 – 4076.
- TANIGUCHI, T. et al. Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 9, n. 4, p. 525–537, 2001.
- TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; AVELLAR, R. G. On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, v. 11, n. 5, p. 613 – 623, oct. 2003.
- WANG, H.; TANAKA, K.; GRIFFIN, M. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 4, n. 1, p. 14 – 23, February 1996.
- WILL, A. B.; TEIXEIRA, M. C. M.; ŻAK, S. H. Four wheel steering control systems design using fuzzy models. In: *In IEEE CONFERENCE ON CONTROL APPLICATIONS*, 6.,. New York: IEEE, 1997. p. 73 – 78. Hartford.
- ZADEH, L. Fuzzy sets. *Information and Control*, New York, v. 8, n. 3, p. 338 – 353, 1965.

APÊNDICE A

DERIVADA DIRECIONAL

Será apresentado neste apêndice, o Teorema de Danskin (LASDON, 1970), também encontrado nos trabalhos de Cardim (2009) e Deaecto (2007), muito utilizado no cálculo de derivadas direcionais.

Seja $f(x, m)$ definida para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e para todo $m \in M$, com derivadas parciais $\partial f / \partial x_m$ contínuas, sendo que M é um conjunto compacto de índices ($M = 1, 2, \dots, n$). Assim, pode-se definir a função:

$$\bar{v}(x) = \min_{m \in M} f(x, m) \quad (5.1)$$

que é contínua, porém não é diferenciável para todo $x \in \mathbb{R}^n$. De fato, esta função deixa de ser diferenciável para todo $x \in Z(x)$, onde

$$Z(x) = \{m \in M : \bar{v}(x) = f(x, m)\} \quad (5.2)$$

é composto por mais de um elemento. A derivada direcional à direita da função (5.1) no ponto x e na direção d é definida como:

$$D^+ \bar{v}(x, d) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\bar{v}(x + hd) - \bar{v}(x)}{h}. \quad (5.3)$$

O Teorema de Danskin (LASDON, 1970), apresenta uma forma simples de calcular derivadas direcionais como a definida em (5.3).

Teorema 5.1. *Para uma função $\bar{v}(x)$ definida em (5.1), com o conjunto $Z(x)$ dado por (5.2), a derivada direcional de $\bar{v}(x)$ existe em qualquer direção d , para qualquer ponto $x \in \mathbb{R}^n$, e é dada por*

$$D^+(\bar{v}(x, d)) = \min_{m \in Z(x)} \nabla f(x, m)' d \quad (5.4)$$

A prova deste teorema pode ser encontrada em detalhes em (LASDON, 1970). Neste trabalho, foi utilizado este teorema para o cálculo de derivadas em relação ao tempo de funções de Lyapunov associadas a sistemas lineares com comutação presentes na teoria do Capítulo 2. Como exemplo deste teorema, foi considerado um caso simples, que trata da determinação da derivada temporal da função (5.1), com $f(x, m) = x^T P_m x$, sendo que x é uma trajetória genérica

do sistema linear $\dot{x} = Ax$, para todo $t \geq 0$. Para $h \rightarrow 0^+$, tem-se que $x(t+h) = x(t) + hAx(t)$ e portanto, de (CARDIM, 2009; DEAECTO, 2007),

$$D^+\bar{v}(x, Ax) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\bar{v}(x + hAx) - \bar{v}(x)}{h}. \quad (5.5)$$

Considerando $Z(x)$ definido em (5.2) e aplicando o Teorema de Danskin, tem-se

$$\begin{aligned} D^+(\bar{v}(x, Ax)) &= \min_{m \in Z(x)} \nabla f(x, m)^T Ax \\ &= \min_{m \in Z(x)} x^T (A^T P_m + P_m A)x. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Logo, a equação (5.6) representa a derivada direcional à direita de $\bar{v}(x)$, sobre uma trajetória qualquer do sistema linear $\dot{x} = Ax$ (CARDIM, 2009; DEAECTO, 2007).