

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
FACULDADE DE ENGENHARIA  
CAMPUS DE BAURU

**MÉTODOS HÍBRIDOS DE PONTOS INTERIORES E DE  
PROGRAMAÇÃO INTEIRA 0-1 PARA PROBLEMAS DE  
CUSTO DE COLHEITA DA CANA-DE-AÇÚCAR E DE  
CUSTO DE COLETA E GERAÇÃO DE ENERGIA  
RELACIONADOS À SUA BIOMASSA**

**Camila de Lima**

**Orientador: Prof. Dr. Antonio Roberto Balbo**  
**Co-orientadora: Profa. Dra. Helenice de Oliveira Florentino Silva**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia de Bauru da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – Campus de Bauru, como um dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Bauru - SP  
Julho - 2013

Lima, Camila de.

Métodos híbridos de pontos interiores e de programação inteira 0-1 para problemas de custo de colheita da cana-de-açúcar e de custo de coleta e geração de energia relacionados à sua biomassa / Camila de Lima, 2013  
153f.

Orientador: Antonio Roberto Balbo.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2013

1. Método primal-dual de pontos interiores. 2. Método branch-and-bound. 3. Método branch-and-cut. 4. Cana-de-açúcar. 5. Biomassa Residual. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia. II. Título.

**ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE CAMILA DE LIMA, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA, DO(A) FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU.**

Aos 31 dias do mês de julho do ano de 2013, às 14:00 horas, no(a) ANFITEATRO DA SEÇÃO TÉCNICA DE PÓS-GRADUAÇÃO DA FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. ANTONIO ROBERTO BALBO do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru - UNESP, Profa. Dra. DANIELA RENATA CANTANE do(a) Departamento de Bioestatística / Instituto de Biociências de Botucatu - UNESP, Profa. Dra. ADRIANA CRISTINA CHERRI NICOLA do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru - UNESP, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de CAMILA DE LIMA, intitulada "MÉTODOS HÍBRIDOS DE PONTOS INTERIORES E DE PROGRAMAÇÃO INTEIRA 0-1 PARA PROBLEMAS DE CUSTO DE COLHEITA DA CANA-DE-AÇÚCAR E DE CUSTO DE COLETA E GERAÇÃO DE ENERGIA RELACIONADOS À SUA BIOMASSA". Após a exposição, a discente foi arguida oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADA . Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que, após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

  
Prof. Dr. ANTONIO ROBERTO BALBO

  
Profa. Dra. DANIELA RENATA CANTANE

  
Profa. Dra. ADRIANA CRISTINA CHERRI NICOLA



*Aos meus pais Antonio e Angela,  
que sempre fizeram o possível e o impossível por mim,  
ao meu irmão Rikardo,  
e ao meu namorado, amigo,  
e companheiro de todos os momentos, Felipe.*

*Sem vocês, nada do que fiz teria sentido.*

# Agradecimentos

À Deus, por me dar o dom da vida, me abençoar com muita saúde, com uma família maravilhosa que sempre me apoiou, com pessoas especiais, que estiveram ao meu lado em momentos bons e ruins, e com grandes oportunidades. Obrigada por me dar força, paciência, perseverança e proteção.

Aos meus pais, Antonio Evaristo de Lima e Angela Aparecida Di Carne Evaristo de Lima, pelo amor, carinho e compreensão, pela educação que me deram, pela dedicação, por me apoiarem e incentivarem em todos os momentos, e por acreditarem em mim. Se hoje alcancei este objetivo, devo tudo à vocês.

Ao meu irmão Rikardo de Lima, que mesmo com nossos desentendimentos, permanecemos unidos, obrigada pelo seu amor, carinho, apoio e amizade.

Ao meu namorado Felipe Almeida da Silva, pelo seu amor, carinho e compreensão, pelos seus conselhos, por me fazer rir nos momentos que queria chorar, por enxugar minhas lágrimas nos momentos difíceis, e por estar presente em minha vida me apoiando e me incentivando.

Ao meu orientador Antonio Roberto Balbo, uma pessoa muito especial, exemplo de profissional, e grande amigo, que me orientou e foi muito paciente comigo desde o ano de 2009, obrigada pelos seus ensinamentos, incentivo e confiança.

À minha co-orientadora Helenice de Oliveira Florentino, pela sua amizade e pelo auxílio em partes deste trabalho.

À minha grande amiga Ellen Cristina Ferreira, uma irmã que encontrei ao longo do mestrado, pelo seu apoio, conselhos e por estar presente em todos os momentos.

Às professoras Adriana Cristina Cherri Nicola e Daniela Renata Cantane, que participaram da banca avaliadora e que, com suas sugestões, enriqueceram este trabalho.

Aos meus colegas do Labore: Thiago, Amélia, Ricardo e Diego, pela contribuição, companhia e pela amizade.

Aos professores dos cursos de Mestrado em Engenharia Elétrica e Licenciatura em Matemática, pelos seus ensinamentos, e por fazerem parte da minha formação acadêmica.

À todos os colegas, professores e funcionários Seção Técnica de Pós-graduação da Faculdade de Engenharia e ao Departamento de Matemática, pela colaboração e atenção.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), pela credibilidade e pelo auxílio financeiro.

*“Não importa o tamanho do passo,  
o importante é a direção em que você caminha.”*

*Autor desconhecido*

*“O sucesso nasce do querer, da determinação  
e persistência em se chegar a um objetivo.*

*Mesmo não atingindo o alvo,  
quem busca e vence obstáculos,  
no mínimo fará coisas admiráveis.”*

*José de Alencar*

# Resumo

O objetivo desse trabalho foi desenvolver métodos híbridos envolvendo os métodos de pontos interiores e de programação inteira binária para a resolução de problemas mono e multiobjetivo referentes à colheita da cana-de-açúcar, coleta de sua biomassa residual e ao balanço de energia relativo ao aproveitamento desses resíduos. Assim, foram investigados os métodos previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e aqueles inseridos em programação inteira: *branch-and-bound*, planos de corte e *branch-and-cut*. São apresentados dois métodos híbridos envolvendo o método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores, um deles associado ao método *branch-and-bound* (PDBB), o qual foi desenvolvido nesse trabalho e implementado em linguagem de programação C++ e o outro, relacionado ao método *branch-and-cut* (PDBC), o qual foi investigado, mas não foi implementado e testado nesse trabalho. O método PDBB foi utilizado para a resolução dos modelos matemáticos referentes à minimização do custo de colheita da cana-de-açúcar, minimização de custo e transporte de coleta da biomassa residual da cana-de-açúcar, e maximização do balanço de energia referente a esses resíduos, que consideram áreas de plantio mecanizáveis e semi-mecanizáveis. Além desses, foram explorados, os modelos multiobjetivo de minimização de custo de coleta e transporte e maximização do balanço de energia da biomassa residual, e de minimização de custo total e maximização de energia total. As estratégias utilizadas para a determinação de soluções eficientes dos modelos multiobjetivo relacionaram-se aos métodos da soma ponderada e  $\varepsilon$ -restrito, as quais transformaram o problema multiobjetivo em uma sequência de problemas mono-objetivo. Os resultados obtidos demonstraram que o método híbrido é robusto à resolução desses problemas pois obteve um bom desempenho computacional, determinou as soluções ótimas para os problemas mono-objetivo, as soluções eficientes e a curva de Pareto associadas ao problema multiobjetivo.

**Palavras-Chave:** *Método Primal-Dual de Pontos Interiores, Método Branch-and-Bound, Método Branch-and-Cut, Cana-de-Açúcar, Biomassa Residual.*



# Abstract

The aim of this study was to develop hybrid methods involving interior point and binary integer programming methods for solving mono and multiobjective problems related to the sugar cane harvest, the collection of their waste and energy balance related to the utilization of these waste. Thus, the predictor-corrector primal-dual interior point method, and those inserted in integer programming: branch-and-bound, cutting planes and branch-and-cut were investigated . We present two hybrid methods involving the predictor-corrector primal-dual interior point method, one is associated to the branch-and-bound method (PDBB), which was developed in this study and implemented in the programming language C++, and another related to the branch-and-cut method (PDBC), which was investigated but was not implemented and tested in this study. The PDBB method was used to resolution of the mathematical models related to minimize the cost of sugar cane harvest, to minimize the collection and transportation cost of residual biomass from sugar cane, and to maximize the energy balance regarding these residues, which consider mechanized and semi-mechanized grow areas. Besides, multiobjective models were explored, such as the minimization of the collection and transportation cost and maximization of the energy balance of the residual biomass, and the total cost minimization and total energy balance maximization. The strategies used for determining efficient solutions of the multiobjective models were the weighted sum and  $\varepsilon$ -constraint methods, which transformed the multiobjective problem into a sequence of mono-objective problems. The obtained results showed that the hybrid method is robust to solve these problems, it got a good computational performance, determined optimal solutions to the mono-objective problems, and the efficient solutions and the Pareto's frontier associated to multiobjective problem.

**Keywords:** *Primal-Dual Interior Point Method, Branch-and-Bound Method, Branch-and-Cut Method, Sugar Cane, Sugar Cane Waste.*

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xix</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xxii</b>
<b>Lista de Abreviaturas e Unidades</b>	<b>xxiii</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xxv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Revisão bibliográfica</b>	<b>5</b>
2.1 Setor elétrico brasileiro . . . . .	6
2.2 Bioeletricidade . . . . .	8
2.3 Cana-de-açúcar . . . . .	8
2.4 Cultivo da cana-de-açúcar . . . . .	9
2.4.1 Solo . . . . .	10
2.4.2 Plantio . . . . .	10
2.4.3 Colheita . . . . .	11
2.4.3.1 Subsistema de corte e carregamento . . . . .	11
2.4.3.2 Subsistema de transporte . . . . .	14
2.4.3.3 Subsistema de recepção . . . . .	14
2.4.4 Qualidade da cana-de-açúcar . . . . .	15
2.4.5 Biomassa residual da cana-de-açúcar . . . . .	16
2.5 Modelagem matemática . . . . .	17
<b>3 Modelos matemáticos</b>	<b>21</b>
3.1 Modelo I – Minimização do custo de colheita da cana-de-açúcar . . . . .	21
3.2 Modelo II – Minimização do custo de coleta da biomassa residual de cana-de-açúcar resultante da colheita em áreas mecanizáveis . . . . .	24
3.3 Modelo III – Maximização do balanço de energia para o aproveitamento do palhico resultante da colheita em áreas mecanizáveis . . . . .	25

3.4	Modelo Multiobjetivo I – Minimização do custo de coleta e transporte e/ou maximização do balanço de energia da biomassa residual . . . . .	27
3.5	Modelo Multiobjetivo II – Minimização do custo total e/ou maximização do balanço de energia total . . . . .	27
3.6	Estratégias para resolução dos modelos multiobjetivo . . . . .	29
3.6.1	Estratégia 1: Método da soma ponderada . . . . .	30
3.6.1.1	Problema mono-objetivo referente ao modelo multiobjetivo I . . . . .	30
3.6.1.2	Problema mono-objetivo referente ao modelo multiobjetivo II . . . . .	30
3.6.1.3	Função objetivo normalizada do problema mono-objetivo referente ao modelo multiobjetivo I . . . . .	31
3.6.1.4	Função objetivo normalizada do problema mono-objetivo referente ao modelo multiobjetivo II . . . . .	32
3.6.2	Estratégia 2: Método $\varepsilon$ -restrito . . . . .	32
3.6.2.1	Problema mono-objetivo I referente ao modelo multiobjetivo I . . . . .	33
3.6.2.2	Problema mono-objetivo II referente ao modelo multiobjetivo I . . . . .	33
3.6.2.3	Problema mono-objetivo I referente ao modelo multiobjetivo II . . . . .	34
3.6.2.4	Problema mono-objetivo II referente ao modelo multiobjetivo II . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Métodos híbridos de pontos interiores e programação inteira 0-1</b>	<b>37</b>
4.1	Método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores . . . . .	40
4.1.1	Direções de busca . . . . .	44
4.1.1.1	Direções de busca do passo previsor . . . . .	44
4.1.1.2	Direções de busca do passo corretor . . . . .	47
4.1.2	Comprimento do passo . . . . .	48
4.1.3	Critério de parada . . . . .	49
4.1.4	Atualização do parâmetro de barreira . . . . .	49
4.1.5	Algoritmo previsor-corretor primal-dual de pontos interiores (PCPD)	49
4.2	Método <i>branch-and-bound</i> . . . . .	50
4.2.1	Critério de sondagem (poda) . . . . .	52
4.2.2	Ramificação . . . . .	52
4.2.3	Seleção do nó . . . . .	53
4.2.4	Algoritmo <i>branch-and-bound</i> (BB) . . . . .	53

---

4.3	Método híbrido envolvendo os métodos previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e <i>branch-and-bound</i> . . . . .	54
4.3.1	Heurística primal . . . . .	55
4.3.2	Algoritmo previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e <i>branch-and-bound</i> (PDBB) . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>57</b>
5.1	Dados para a aplicação dos modelos matemáticos . . . . .	57
5.2	Resultados da aplicação do método híbrido . . . . .	60
5.2.1	Modelo I - Minimização do custo de colheita da cana-de-açúcar . . . . .	60
5.2.2	Modelo II - Minimização do custo de coleta da biomassa residual de cana-de-açúcar resultante da colheita em áreas mecanizáveis . . . . .	61
5.2.3	Modelo III - Maximização do balanço de energia para o aproveitamento do palhico resultante da colheita em áreas mecanizáveis . . . . .	63
5.2.4	Modelo Multiobjetivo I – Minimização do custo de coleta e transporte e/ou maximização do balanço de energia da biomassa residual . . . . .	67
5.2.4.1	Estratégia 1: Método da soma ponderada . . . . .	67
5.2.4.2	Estratégia 2: Método $\varepsilon$ -restrito – Problema I . . . . .	70
5.2.4.3	Estratégia 2: Método $\varepsilon$ -restrito – Problema II . . . . .	72
5.2.4.4	Análise de resultados do modelo multiobjetivo I . . . . .	75
5.2.5	Modelo Multiobjetivo II – Minimização do custo total e/ou maximização do balanço de energia total . . . . .	79
5.2.5.1	Estratégia 1: Método da soma ponderada . . . . .	79
5.2.5.2	Estratégia 2: Método $\varepsilon$ -restrito – Problema I . . . . .	82
5.2.5.3	Estratégia 2: Método $\varepsilon$ -restrito – Problema II . . . . .	85
5.2.5.4	Análise de resultados do modelo multiobjetivo II . . . . .	87
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>91</b>
<b>7</b>	<b>Trabalhos publicados</b>	<b>93</b>
7.1	Trabalhos aceitos para publicação . . . . .	94
7.2	Trabalhos submetidos . . . . .	94
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>95</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>103</b>
<b>A</b>	<b>Método de plano de corte</b>	<b>103</b>
A.1	Planos de corte de Gomory . . . . .	104
A.2	Planos de corte gerados a partir do método de pontos interiores . . . . .	105
A.3	Reotimização . . . . .	107

A.3.1	Reiniciando o algoritmo e recuperando a viabilidade primal . . . . .	107
A.3.2	Resolvendo a relaxação aproximadamente . . . . .	108
A.3.3	Gerando e eliminando restrições . . . . .	109
A.4	Algoritmo planos de corte (PC) . . . . .	110
<b>B</b>	<b>Método híbrido envolvendo os métodos previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e <i>branch-and-cut</i></b>	<b>111</b>
B.1	Método <i>branch-and-cut</i> . . . . .	111
B.2	Algoritmo <i>branch-and-cut</i> (BC) . . . . .	112
B.3	Método híbrido envolvendo os métodos previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e <i>branch-and-cut</i> . . . . .	113
B.3.1	Ponto de partida . . . . .	113
B.3.2	Terminando a relaxação corrente antecipadamente . . . . .	115
B.3.3	Algoritmo previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e <i>branch-and-cut</i> (PDBC) . . . . .	115
<b>Anexos</b>		<b>119</b>
<b>A</b>	<b>Dados para comparação de resultados</b>	<b>119</b>

# Lista de Figuras

2.1	Oferta interna de energia elétrica por fonte – 2011 . . . . .	6
2.2	Desenvolvimento da colheita da cana-de-açúcar. . . . .	12
5.1	Curva de soluções eficientes da estratégia 1. . . . .	69
5.2	Curva de soluções eficientes da estratégia 2 para o problema I. . . . .	71
5.3	Curva de soluções eficientes da estratégia 2 para o problema II. . . . .	74
5.4	Curva de soluções eficientes da estratégia 1. . . . .	78
5.5	Curva de soluções eficientes da estratégia 2 para o problema I. . . . .	78
5.6	Curva de soluções eficientes da estratégia 1. . . . .	81
5.7	Curva de soluções eficientes da estratégia 2 para o problema I. . . . .	84
5.8	Curva de soluções eficientes da estratégia 2 para o problema II. . . . .	85

# Lista de Tabelas

2.1	Poderes caloríficos do palhicho e bagaço da cana-de-açúcar e palha do arroz.	7
2.2	Custos de corte e carregamento da cana-de-açúcar.	13
2.3	Custos de transporte da cana-de-açúcar.	14
2.4	Indicadores da qualidade da cana-de-açúcar e valores recomendados (fermentec).	15
5.1	Dados das variedades.	58
5.2	Custos, consumos e recomendações.	58
5.3	Dados dos talhões.	59
5.4	Dados das variedades.	59
5.5	Custos, consumos e recomendações.	59
5.6	Dados dos talhões.	60
5.7	Valores reais obtidos relacionados à minimização do custo de colheita.	61
5.8	Resultados obtidos pelo algoritmo PDBB.	62
5.9	Desempenho do algoritmo PDBB.	62
5.10	Valores reais obtidos relacionados à minimização do custo de coleta e transporte de resíduos.	63
5.11	Resultados obtidos pelo algoritmo PDBB.	64
5.12	Desempenho do algoritmo PDBB.	64
5.13	Valores reais obtidos relacionados à maximização do balanço de energia.	65
5.14	Resultados obtidos pelo algoritmo PDBB.	66
5.15	Desempenho do algoritmo PDBB.	66
5.16	Variáveis selecionadas para cada valor $\alpha_i$ pré-determinado.	68
5.17	Valores de custo e energia para cada valor $\alpha_i$ pré-determinado.	68
5.18	Desempenho do método PDBB usando a estratégia 1.	69
5.19	Variáveis selecionadas para cada limitante inferior $\varepsilon_i$ .	70
5.20	Valores de custo e energia para cada limitante inferior $\varepsilon_i$ .	71
5.21	Desempenho do método PDBB usando a estratégia 2 para o problema I.	72
5.22	Variáveis selecionadas para cada limitante inferior $\varepsilon_i$ .	73
5.23	Valores de custo e energia para cada limitante inferior $\varepsilon_i$ .	73
5.24	Desempenho do método PDBB usando a estratégia 2 para o problema II.	74

5.25	Número de iterações do passo PD usando a estratégia 1. . . . .	76
5.26	Variáveis selecionadas para cada valor $\alpha_i$ pré-determinado. . . . .	80
5.27	Valores de custo e energia para cada valor $\alpha_i$ pré-determinado. . . . .	80
5.28	Valores dos custos de colheita da cana-de-açúcar e de coleta de resíduos. . . . .	81
5.29	Desempenho do método PDBB usando a estratégia 1. . . . .	82
5.30	Variáveis selecionadas para cada limitante inferior $\varepsilon_i$ . . . . .	83
5.31	Valores de custo e energia para cada limitante inferior $\varepsilon_i$ . . . . .	83
5.32	Valores dos custos de colheita da cana-de-açúcar e de coleta de resíduos. . . . .	84
5.33	Desempenho do método PDBB usando a estratégia 2 para o problema I. . . . .	84
5.34	Variáveis selecionadas para cada limitante inferior $\varepsilon_i$ . . . . .	86
5.35	Valores de custo e energia para cada limitante inferior $\varepsilon_i$ . . . . .	86
5.36	Valores dos custos de colheita da cana-de-açúcar e de coleta de resíduos. . . . .	87
5.37	Desempenho do método PDBB usando a estratégia 2 para o problema II. . . . .	87
A.1	Variáveis selecionadas pela estratégia da soma ponderada. . . . .	120
A.2	Valores de custo e energia para cada valor $\alpha$ . . . . .	121
A.3	Variáveis selecionadas pela estratégia $\varepsilon$ -restrito. . . . .	121
A.4	Valores de custo e energia para cada restrição de balanço. . . . .	121



# Lista de Abreviaturas e Unidades

ANEEL	Agência Nacional de Energia Elétrica
ART	Açúcar redutor total
BB	Branch-and-bound
BC	Branch-and-cut
cal	Caloria
Canasat	Projeto de monitoramento da cana-de-açúcar via imagens de satélite
CONAB	Companhia Nacional de Abastecimento
CO <sub>2</sub>	Gás Carbônico
CPFL	Companhia Paulista de Força e Luz
EPE	Empresa de Pesquisa Energética
ha	Hectare
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IMPE	Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
J	Joule
Kcal	Quilocaloria
Kg	Quilograma
KKT	Karush-Kuhn-Tucker
Km	Quilômetro
KW	Quilowatts
KWh	Quilowatts hora
L	Litro
LIFO	last in first out – o último a entrar, o primeiro a sair, procedimento do branch-and-cut
L.Km <sup>-1</sup>	Litros por quilômetro
m	Metro
m <sup>3</sup>	Metro cúbico
m <sup>3</sup> .ha <sup>-1</sup>	Metro cúbico por hectare
MJ	MegaJoule
MME	Ministério de Minas e Energia

---

MW	Megawatts
MWh	Megawatts hora
°C	Graus centígrados
ORPLANA	Organização de Plantadores de Cana da Região Centro-Sul do Brasil
Pd	Número de pessoas atendidas por ano
PD	Primal-dual de pontos interiores
PDBB	Método previsor corretor primal dual de pontos interiores e branch-and-bound.
PDBC	Método previsor corretor primal dual de pontos interiores e branch-and-cut.
PI	Problema primal de programação linear inteira
POL	Teor de sacarose
PPL	Problema de programação linear
PPLI	Problema de programação linear inteira
PPLIB	Problema de programação linear inteira binária
PR	Problema de programação linear inteira relaxado
PRD	Problema dual relaxado de programação linear inteira
Pu	Poder calorífico
STIBM	Sem o teste de integralidade de Borchers e Mitchell (1992)
t	Tonelada
t.dia <sup>-1</sup>	Toneladas por dia
t.ha <sup>-1</sup>	Toneladas por hectare
TWh	Terawatt hora
TIBM	Teste de integralidade de Borchers e Mitchell (1992)
UNICA	União da Agroindústria Canavieira de São Paulo
US\$	Dólar
US\$.ha <sup>-1</sup>	Dólar por hectare
US\$.L <sup>-1</sup>	Dólar por litro
US\$.m <sup>-3</sup>	Dólar por metro cúbico
US\$.t <sup>-1</sup>	Dólar por tonelada

# Lista de Símbolos

$\alpha$	Variável utilizada na ponderação das funções objetivo no método da soma ponderada, tal que $\alpha \in [0, 1]$ .
$\alpha_k^P$	Comprimento do passo para as variáveis primais.
$\alpha_k^D$	Comprimento do passo para as variáveis duais.
$\beta$	Parâmetro utilizado para controlar o passo, tal que $0 \leq \beta \leq 1$ .
$\varepsilon$	Limitante utilizado no método $\varepsilon$ -restrito.
$\varepsilon_1$	Pequena tolerância que verifica a factibilidade primal.
$\varepsilon_2$	Pequena tolerância que verifica a factibilidade dual.
$\varepsilon_3$	Pequena tolerância que verifica a folga complementar $q_1$ .
$\varepsilon_4$	Pequena tolerância que verifica a folga complementar $q_2$ .
$\gamma$	Tolerância utilizada na estratégia de tornar o dual inviável.
$\nabla L$	Derivadas parciais de primeira ordem sobre todas as variáveis da função $L(x, w, z, r, y, s)$ . Vetor obtido a partir das aproximações de segunda ordem.
$\nabla L_r$	Derivada parcial de primeira ordem sobre a variável $r$ da função $L(x, w, z, r, y, s)$ .
$\nabla L_s$	Derivada parcial de primeira ordem sobre a variável $s$ da função $L(x, w, z, r, y, s)$ .
$\nabla L_w$	Derivada parcial de primeira ordem sobre a variável $w$ da função $L(x, w, z, r, y, s)$ .
$\nabla L_x$	Derivada parcial de primeira ordem sobre a variável $x$ da função $L(x, w, z, r, y, s)$ .
$\nabla L_y$	Derivada parcial de primeira ordem sobre a variável $y$ da função $L(x, w, z, r, y, s)$ .
$\nabla L_z$	Derivada parcial de primeira ordem sobre a variável $z$ da função $L(x, w, z, r, y, s)$ .
$\mu$	Parâmetro de barreira, tal que $\mu > 0$ .
$\mu_k^1$	Parâmetro calculados pelo produto interno envolvendo as variáveis primal $x^k$ e dual $s^k$ do problema.

$\mu_k^2$	Parâmetro calculados pelo produto interno envolvendo as variáveis primal $z^k$ e dual $y^k$ do problema.
$\mu_k^2$	Parâmetro calculados pelo produto interno envolvendo as variáveis primal $z^k$ e dual $y^k$ do problema.
$\pi^k$	Vetor residual.
$\tilde{\pi}^k$	Vetor residual que considera os resíduos com aproximações de segunda ordem.
$\Omega_0$	Conjunto de soluções do método predictor-corretor primal-dual de pontos interiores.
$\Omega_{PI}$	Conjunto de soluções do problema linear inteiro inicial.
$\Omega_{PR}$	Conjunto de soluções do problema linear inteiro relaxado.
$\rho$	Número inteiro tal que $\rho < b^T \bar{w} < c^T \bar{x}$ .
$\theta_k$	Matriz dual normal.
$(\theta_k)_{ii} a_i$	$i$ -ésima linha da matriz $(\theta_k)A$ .
$\sigma$	Parâmetro usado para acelerar a convergência do processo iterativo.
$\tau_1$	Tolerância utilizada nos algoritmos de planos de corte e PDBC.
$\tau_2$	Tolerância utilizada no algoritmo de planos de corte.
$A$	Matriz de restrições do PPL e do PPLI, tal que $A \in \Re^{m \times n}$ e tem posto $m$ .
$\bar{A}$	Quantidade mínima estabelecida para a POL da cana.
$A$	Porcentagem da área de produção.
$Ac$	Área de produção, em hectares, considerada no ano.
$A_i$	Estimativa de produção de sacarose da variedade $i$ (t/ha).
$\bar{A}^S$	Matriz utilizada na geração de planos de corte de Gomory, tal que $\bar{A}^S = B^{-1}N$ .
$\lfloor a \rfloor$	Maior inteiro menor ou igual a $a$ .
$\lfloor \bar{a}_{ij}^S \rfloor$	Maior inteiro menor ou igual a $\bar{a}_{ij}^S$ .
$a_i$	$i$ -ésima linha da matriz $A$ .
$A_0$	Matriz de restrições adicionadas.
$a_0$	Escalar referente ao plano de corte, tal que $a_0 \in \Re^n$ .
$b$	Vetor de valores limitantes das restrições, tal que $b \in \Re^m$ .
$\bar{b}$	$\bar{b} = b - a_0$ quando $x_0$ é fixo em 1 no método branch-and-cut.
$\bar{b}^S$	Vetor utilizado na geração de planos de corte de Gomory, tal que $\bar{b}^S = B^{-1}b$ .
$\lfloor \bar{b}_i^S \rfloor$	Maior inteiro menor ou igual a $\bar{b}_i^S$ .
$B$	Matriz não-singular correspondentes às variáveis básicas $x_B$ .
$BE$	Balanco de energia para o aproveitamento de resíduos da cana-de-açúcar.
$BE_{ij}$	Cálculo do balanço de energia no aproveitamento do palhiço de cana produzido da variedade $i$ no talhão $j$ .
$\overline{BE}_{ij}$	Balanco de energia normalizado no aproveitamento de resíduos da cana-de-açúcar.

$BE_{ij}^{max}$	Maximo valor do vetos de balanço de energia no aproveitamento de resíduos da cana-de-açúcar.
$BE_{ij}^M$	Cálculo do balanço de energia apenas para as áreas mecanizáveis.
$BE_{ij}^{SM}$	Cálculo do balanço de energia apenas para as áreas semi-mecanizáveis.
$BET$	Balanço de energia total no aproveitamento de resíduos da cana-de-açúcar.
$\overline{BET}_{ij}^M$	Balanço de energia total normatizado no aproveitamento de resíduos da cana-de-açúcar, considerando áreas mecanizáveis.
$\overline{BET}_{ij}^{SM}$	Balanço de energia total normatizado no aproveitamento de resíduos da cana-de-açúcar, considerando áreas semi-mecanizáveis.
$b_0$	Escalar referente ao plano de corte, tal que $b_0 \in \mathfrak{R}^n$ .
$c$	Vetor de custo associado à função objetivo, tal que $c \in \mathfrak{R}^n$ .
$c^*$	Valor de uma solução ótima de PR.
$c_0$	Escalar do plano de corte adicionado.
$C_0$	Consumo de combustível do caminhão a ser usado no transporte (L.Km <sup>-1</sup> ).
$\lfloor c_B^T \bar{b}^S \rfloor$	Maior inteiro menor ou igual a $c_B^T \bar{b}^S$ .
$\lfloor \bar{c}_j \rfloor$	Maior inteiro menor ou igual a $\bar{c}_j$ .
$c_B$	Vetor de custo referente às variáveis básicas.
$\bar{c}_B$	Vetor de custo referente às variáveis básicas.
$C_{ecc}$	Custo, por tonelada, para enleirar, compactar e carregar o caminhão com palhiço.
$C_{ij}^M$	Custo da colheita e do transporte da cana de variedade $i$ plantada no talhão $j$ ( $j = 1, \dots, l$ ), no sistema mecanizado.
$C_{ij}^{SM}$	Custo da colheita e do transporte da cana de variedade $i$ plantada no talhão $j$ ( $j = l + 1, \dots, k$ ), no sistema semi-mecanizado.
$c_{med_i}$	Custo médio do transporte da cana por km.
$Ca_i$	Custo de aceiro da variedade $i$ (R\$.ha <sup>-1</sup> ).
$Cca_i$	Custo de carregamento da variedade $i$ (R\$.ha <sup>-1</sup> ).
$Cco_i^M$	Custo de corte da variedade $i$ em áreas mecanizáveis(R\$.ha <sup>-1</sup> ).
$Cco_i^{SM}$	Custo de corte da variedade $i$ em áreas semi-mecanizáveis(R\$.ha <sup>-1</sup> ).
$CC_{ij}$	Custo de coleta e transporte do palhiço da cana de variedade $i$ plantada no talhão $j$ .
$\overline{CC}_{ij}$	Custo normatizado de coleta e transporte do palhiço da cana-de-açúcar.
$CC_{ij}^{max}$	Máximo valor do vetor de custo de coleta e transporte do palhiço da cana-de-açúcar
$CCR$	Custo do processo de coleta da biomassa residual da cana-de-açúcar.
$CCT$	Custo do processo de colheita e transporte da cana de açúcar.
$C_i$	Custo para enleirar, compactar e carregar o caminhão com o palhiço da variedade $i$ , em US\$.m <sup>-3</sup> .
$Cq_i$	Custo da queima da variedade $i$ (R\$.ha <sup>-1</sup> ).

$c_N$	Vetor de custo referente às variáveis não básicas.
$CT$	Custo total gasto pela usina na colheita da cana-de-açúcar e na coleta de seus resíduos, considerando as áreas mecanizáveis e semi-mecanizáveis.
$\overline{CT}_{ij}^M$	Custo total normatizado gasto pela usina na colheita da cana-de-açúcar e na coleta de seus resíduos, considerando áreas mecanizáveis.
$\overline{CT}_{ij}^{SM}$	Custo total normatizado gasto pela usina na colheita da cana-de-açúcar e na coleta de seus resíduos, considerando áreas semi-mecanizáveis.
$CT_{ij}$	Custo para transportar o palhico de um hectare de cana-de-açúcar da variedade $i$ produzido no talhão $j$ , em $\text{US}\$.ha^{-1}$ .
$Ct_{ij}^M$	Custo de transporte da variedade $i$ plantada no talhão $j$ mecanizável.
$Ct_{ij}^{SM}$	Custo de transporte da variedade $i$ plantada no talhão $j$ semi-mecanizável.
$\bar{c}^T$	Vetor utilizado na geração de planos de corte de Gomory, tal que $\bar{c}^T = c_N^T - c_B^T \bar{A}^S$ .
$d$	Vetor de direções do método de pontos interiores.
$D_j$	Distância do talhão $j$ do centro de processamento, em km.
$d_s$	Componente do vetor de direções, relacionado à variável $s$ .
$\tilde{d}_s$	Componente do vetor de direções, relacionado à variável $s$ , que considera as aproximações de segunda ordem.
$D_s$	Matriz diagonal, cujos elementos diagonais são $(d_s^k)_i$ , tal que $i = 1, \dots, n$ .
$d_w$	Componente do vetor de direções, relacionado à variável $w$ .
$\tilde{d}_w$	Componente do vetor de direções, relacionado à variável $w$ , que considera as aproximações de segunda ordem.
$d_x$	Componente do vetor de direções, relacionado à variável $x$ .
$\tilde{d}_x$	Componente do vetor de direções, relacionado à variável $x$ , que considera as aproximações de segunda ordem.
$D_x$	Matriz diagonal, cujos elementos diagonais são $(d_x^k)_i$ , tal que $i = 1, \dots, n$ .
$d_y$	Componente do vetor de direções, relacionado à variável $y$ .
$\tilde{d}_y$	Componente do vetor de direções, relacionado à variável $y$ , que considera as aproximações de segunda ordem.
$D_y$	Matriz diagonal, cujos elementos diagonais são $(d_y^k)_i$ , tal que $i = 1, \dots, n$ .
$d_z$	Componente do vetor de direções, relacionado à variável $z$ .
$\tilde{d}_z$	Componente do vetor de direções, relacionado à variável $z$ , que considera as aproximações de segunda ordem.
$D_z$	Matriz diagonal, cujos elementos diagonais são $(d_z^k)_i$ , tal que $i = 1, \dots, n$ .
$e$	Vetor unitário $e = (1, \dots, 1)^T$ .

$E_{Cij}$	Energia gasta para carregar o palhico da variedade $i$ plantada no talhão $j$ para a usina;
$E_{ECij}$	Energia gasta para enleirar e compactar o palhico da variedade $i$ plantada no talhão $j$ para a usina.
$EB_{ij}$	Energia proveniente do palhico da variedade $i$ plantada no talhão $j$ , em MJ.
$EC_{Bi}$	Energia calorífica do palhico da variedade $i$ (MJ.t <sup>-1</sup> ).
$EC_C$	Energia consumida pela máquina para coleta do palhico por unidade de massa (MJ.t <sup>-1</sup> ).
$EC_{EC}$	Energia consumida pelas máquinas, em forma de combustível para enleirar e compactar o palhico por unidade de massa (MJ.t <sup>-1</sup> ).
$EC_T$	Energia consumida pelo caminhão em forma de combustível para o transporte do palhico, por quilômetro (MJ.Km <sup>-1</sup> ).
$E_{Tij}$	Energia gasta para transportar o palhico da variedade $i$ plantada no talhão $j$ para a usina.
$F(x, w, z, y, s)$	Sistema de equações equivalentes às condições de KKT.
$F_i$	Estimativa do teor de fibra da variedade $i$ .
$\bar{F}_i$	Quantidade mínima estabelecida para a fibra da cana.
$\bar{F}_s$	Quantidade máxima estabelecida para a fibra da cana.
$f1(x), \dots, fT(x)$	Conjunto de funções num modelo multiobjetivo.
$f_a$	Parte fracionária de $a$ .
$f_{\bar{a}_i^S}$	Parte fracionária de $\bar{a}_i^S$ .
$f_{\bar{b}_i^S}$	Parte fracionária de $\bar{b}_i^S$ .
$f_{b^T \bar{w}}$	Parte fracionária de $b^T \bar{w}$ .
$f_{c_B^T \bar{b}^S}$	Parte fracionária de $c_B^T \bar{b}^S$ .
$f_{\bar{c}_{N_j}}$	Parte fracionária de $\bar{c}_{N_j}$ .
$f_{p_i^T}$	Parte fracionária de $p_i^T$ .
$f_{\bar{s}_i}$	Parte fracionária de $\bar{s}_i$ .
$f_{v_i^T}$	Parte fracionária de $v_i^T$ .
$f_{\bar{y}_i}$	Parte fracionária de $\bar{y}_i$ .
$g^k$	Resíduo gerado pela aproximação linear por série de Taylor.
$gap$	Gap de dualidade, tal que $gap = c^T x - b^T w$ .
$h$	Ponto que satisfaz as condições de KKT do método de pontos interiores.
$i$	Índice de variação, que representa as variedades.
$\text{int}[(\bar{x}^j)_i]$	Parte inteira de $(\bar{x}^j)_i$ .
$j$	Índice de variação, que representa os talhões.
$J(h^{(k)})$	Matriz Jacobiana, cujo $(i, j)$ -ésimo elemento é dado por: $\left[ \frac{\partial L_i(h)}{\partial h_j} \right]_{h=h^k}$

$k$	Número total de talhões.
$k - l$	Número de talhões em que se considera o sistema semi-mecanizado.
$l$	Número de talhões em que se considera o sistema mecanizado.
$\bar{l}$	Limitante inferior das variáveis canalizadas do PPL, tal que $l \in \mathfrak{R}^n$ .
$L_0$	Conjunto de subproblemas.
$L(x, w, z, r, y, s)$	Função lagrangiana barreira logarítmica.
$L_j$	Área do talhão $j$ , em hectare.
$m$	Posto da matriz $A$ de restrições.
$M$	Número máximo que cada variedade $i$ pode ser plantada nos $k$ talhões.
$n$	Número total de variedades.
$N$	Matriz não-singular correspondentes às variáveis não-básicas $x_N$ .
$P$	Preço do combustível (US\$.L <sup>-1</sup> ).
$P_{Bi}$	Estimativa da quantidade de palhiço da variedade $i$ (t.ha <sup>-1</sup> ).
$P^{cut}$	Matriz utilizada para gerar um plano de corte para o método de pontos interiores, equivalente ao corte de Gomory.
Pd	Número de pessoas a serem atendidas ao ano.
$p_i$	$i$ -ésima linha de $P^{cut}$ .
$P_j$	Divisão de $\Omega_{PR}$ associado ao nó $j$ da árvore de busca.
$P_{j1}$	Restrição que particiona o problema $P_j$ no nó da árvore de busca.
$P_{j2}$	Restrição que particiona o problema $P_j$ no nó da árvore de busca.
Pu	Poder calorífico em megajoules por tonelada.
$Q_i$	Estimativa de volume do palhiço produzido pela variedade $i$ por hectare de cana-de-açúcar (m <sup>3</sup> .ha <sup>-1</sup> ).
Qt	Quantidade de palhiço no campo, após colheita mecanizada, ou de bagaço obtido, ou palha de arroz.
$q_1^k$	Resíduo gerado pela aproximação linear por série de Taylor.
$\tilde{q}_1^k$	Resíduo gerado pela aproximação de segunda ordem por série de Taylor.
$q_2^k$	Resíduo gerado pela aproximação linear por série de Taylor.
$\tilde{q}_2^k$	Resíduo gerado pela aproximação de segunda ordem por série de Taylor.
$r$	Variável de excesso do PPL, tal que $r \in \mathfrak{R}^n$ .
$R$	Matriz diagonal, cujos elementos diagonais são $r_i$ , $i = 1, \dots, n$ .
$s$	Variável dual do problema associado às restrições de igualdade, tal que $s \in \mathfrak{R}^n$ .
$S$	Matriz diagonal, cujos elementos diagonais são $s_i$ , $i = 1, \dots, n$ .
$\hat{s}$	Ponto dual corrente viável para PRD referente a $s$ .
$\bar{s}$	Folga dual correspondente às soluções primal e dual consideradas para geração de planos de corte no método de pontos interiores.



- $\bar{s}^*$  Solução aproximada para o PRD-pai reiniciar o algoritmo PDBC referente ao procedimento do método de pontos interiores.
- $s_0$  Escalar referente ao plano de corte adicionado PPLI 0-1 do método PDBC.
- $T$  Área total (ha) disponível para o plantio.
- $t_1^k$  Resíduo gerado pela aproximação linear por série de Taylor.
- $t_2^k$  Resíduo gerado pela aproximação linear por série de Taylor.
- $\bar{u}$  Limitante superior das variáveis canalizadas do PPL, tal que  $u \in \Re^n$ .
- $V_c$  Volume disponível no caminhão ( $m^3$ ).
- $V_i$  Volume por tonelada do palhico da variedade  $i$  depois de compactada ( $m^3 \cdot ha^{-1}$ ).
- $v_i$  Vetor auxiliar na construção da matriz  $P^{cut}$ .
- $w$  Variável dual do problema associado às restrições de igualdade, tal que  $w \in \Re^m$ .
- $\hat{w}$  Ponto dual corrente viável para PRD referente a  $w$ .
- $\bar{w}$  Solução dual viável considerada para geração de planos de corte no método de pontos interiores.
- $\bar{w}^*$  Solução aproximada para o PRD-pai reiniciar o algoritmo PDBC referente ao procedimento do método de pontos interiores.
- $w_0$  Escalar referente ao plano de corte.
- $x$  Vetor de soluções, tal que  $x \in \Re^n$ .
- $\hat{x}$  Solução primal corrente que não satisfaz o plano de corte.
- $\tilde{x}$  Variável associada ao plano de corte.
- $\bar{x}$  Solução primal viável considerada para geração de planos de corte no método de pontos interiores.
- $X$  Conjunto de soluções factíveis de um problema de otimização multiobjetivo.
- $x_B$  Variáveis básicas.
- $x_f$  Variável fracionária de PR.
- $X_{ij}$  Variáveis de decisão, tais que,  $X_{ij} = 1$  implica que a cana de variedade  $i$  deve ser plantada no talhão  $j$  e em caso contrário  $X_{ij} = 0$ .
- $x_i^*$  Solução ótima.
- $\bar{x}^j$  Vetor de solução referente ao subproblema de um nó  $j$ .
- $(\bar{x}^j)_i$  Componente  $i$  do vetor de solução  $\bar{x}^j$ .
- $\bar{x}^*$  Solução aproximada para o PRD-pai reiniciar o algoritmo PDBC referente ao procedimento do método de pontos interiores.
- $x_N$  Variáveis não básicas.
- $X_0$  Conjunto de soluções factíveis do problema de otimização multiobjetivo.
- $x_1$  Solução factível do problema de otimização multiobjetivo, tal que  $x_1 \in X_0$ .
- $x_2$  Solução factível do problema de otimização multiobjetivo, tal que  $x_2 \in X_0$ .
- $y$  Variável dual do problema associado às restrições de igualdade, tal que  $y \in \Re^n$ .

- $Y$  Matriz diagonal, cujos elementos diagonais são  $y_i, i = 1, \dots, n$ .
- $\hat{y}$  Ponto dual corrente viável para PRD referente a  $y$ .
- $\bar{y}$  Folga dual correspondente às soluções primal e dual consideradas para geração de planos de corte no método de pontos interiores.
- $\bar{y}^*$  Solução aproximada para o PRD-pai reiniciar o algoritmo PDBC referente ao procedimento do método de pontos interiores.
- $y_0$  Escalar referente ao plano de corte adicionado PPLI 0-1 do método PDBC.
- $\bar{y}_0^*$  Solução aproximada para o PRD-pai reiniciar o algoritmo PDBC referente ao procedimento do método de pontos interiores.
- $z$  Variável de folga do PPL, tal que  $z \in \mathfrak{R}^n$ .
- $Z$  Matriz diagonal, cujos elementos diagonais são  $z_i, i = 1, \dots, n$ .
- $\bar{z}^j$  Valor da função objetivo calculado para a solução  $\bar{x}^j$  do problema  $j$ .
- $z^*$  Valor ótimo da função objetivo de PI.

# Capítulo 1

## Introdução

A produção de energia elétrica no Brasil é predominantemente hidráulica, considerando que o país possui um dos maiores parques hidrelétricos do mundo. Há alguns anos, as usinas hidrelétricas eram responsáveis por cerca de 90% da produção de energia do país. Porém, esses dados têm sofrido algumas mudanças devido à necessidade da diversificação da matriz energética prevista no planejamento do setor, visando aumentar a segurança do abastecimento, principalmente em períodos de seca, em que a oferta de eletricidade é afetada diretamente, além da dificuldade de novas propostas de empreendimentos hidráulicos, visto que os projetos podem causar impactos socioambientais, e conseqüentemente, a ausência de novas usinas hidrelétricas e o aumento da demanda de energia, e assim, o aumento da contratação em leilões de energia de usinas de fonte térmica (ANEEL, 2008).

Além disso, o aumento da competitividade, a criação de órgãos federais, com o objetivo de regulamentar e regular este setor, foram motivos para alterações na estrutura do setor elétrico brasileiro. Em se tratando da diversificação da matriz elétrica no país, novas fontes de energia foram introduzidas, como as que exploram o gás natural, a energia nuclear, e as energias renováveis, que utilizam recursos que são reabastecidos naturalmente, promovendo um menor impacto ambiental e atendendo aos princípios de sustentabilidade, dentre elas destacam-se a energia solar, a energia eólica e energia cogenerada pela biomassa residual (Pellegrini, 2002).

Em pesquisa realizada pela Empresa de Pesquisas Energéticas do Ministério de Minas e Energia (MME, 2010) confirmou-se que a cogeração de energia a partir da biomassa é a segunda fonte primária de energia, atrás apenas da geração hidrelétrica. A utilização da biomassa como fonte alternativa no processo de cogeração de energia tem sido considerada promissora, visto sua baixa produção de micro poluentes. Segundo Ripoli e Ripoli (2004), o bagaço e o palhço da cana-de-açúcar são as biomassas que possuem maior poder calorífico. O Brasil destaca-se entre os países que a utilizam para produção de energia, tanto elétrica como em forma de vapor.

Conforme os dados do IBGE (2012), o Brasil é o maior produtor de cana-de-açúcar

do mundo, e as safras aumentam a cada ano. Alguns problemas são resultados deste crescimento acelerado, como o aumento da queima da cana-de-açúcar, utilizadas no processo de colheita semi-mecanizada, o que gera poluição e impactos ao meio ambiente, e ainda, a grande quantidade de resíduos no solo, como folhas, palhas, ponteiros e frações de colmo, ocasionada pela colheita mecanizada, que favorecem o aparecimento de pragas, a contaminação do solo, e o comprometimento da próxima safra (Tolentino, 2007). A fim de resolver este problema, tem-se investido no aproveitamento desta biomassa residual através da cogeração de energia para utilização desta no setor sucroalcooleiro ou comercialização no mercado de energia.

Este processo é considerado viável, pois existe a possibilidade de armazenamento da biomassa por um determinado período até uma maior necessidade ou maior valor de comercialização desta energia. Neste aspecto, há uma motivação para o aproveitamento dessa biomassa residual da cana-de-açúcar na cogeração de energia, pois além do período de sua colheita coincidir com o período de estiagem, uma produção de cerca de 108 milhões de toneladas por ano dessa biomassa permitiria a geração de 10,2 MWh, o que equivale a suprir uma cidade com cerca de 50 mil habitantes, segundo dados apresentados em Sartori et al. (2001).

Assim, muitos estudos têm sido propostos visando otimizar o custo de coletar e transferir a cana-de-açúcar e a biomassa residual, do campo para o centro de processamento, bem como ao uso deste resíduo para a geração de energia, considerando-se os dois sistemas destinados ao plantio: o sistema mecanizável, que gera biomassa para a produção de energia, e o sistema semi-mecanizável, que não gera biomassa residual, mas influencia diretamente no custo de coleta e indiretamente na produção de energia do processo. Florentino (2006), Florentino et al. (2011), Sartori et al. (2001), Lima (2006), Tolentino (2007), Homem (2010), e Homem et al. (2011), discutem modelos matemáticos para escolhas de variedades de cana-de-açúcar que minimizam a biomassa residual e maximizam a geração de energia. Ramos (2010) e Silva (2011) apresentam modelos que minimizam o custo da colheita em áreas mecanizáveis e semi-mecanizáveis.

Nesse trabalho, a investigação dos modelos em destaque, ocorre devido a necessidade das usinas em obter, simultaneamente, o menor custo de colheita de cana-de-açúcar, o menor custo de coleta e transporte do palhço e o maior balanço de energia gerada pela biomassa residual, considerando-se as restrições de demanda da usina e as áreas disponíveis para o plantio, nesta proposta subdividida em duas áreas, mecanizada e semi-mecanizada. Destaca-se que, os resíduos da cana-de-açúcar são gerados apenas em áreas em que a colheita é realizada por máquinas, visto que o processo da queima da cana-de-açúcar não gera resíduos e ocasiona o desperdício energético. Assim, as áreas semi-mecanizáveis influenciam indiretamente na minimização do custo de coleta de resíduos e à maximização da geração de energia, pois, quanto maior for a área destinada ao sistema semi-mecanizado, menores serão o custo de coleta de resíduos e a geração de energia pelo aproveitamento

da biomassa residual.

Dessa forma, o desenvolvimento de técnicas de otimização é fundamental para um melhor planejamento e para a investigação dos processos da colheita de cana-de-açúcar, da coleta do palhico e do aproveitamento da biomassa residual. Nesse sentido, métodos de otimização relacionados às técnicas de programação linear inteira 0-1 podem ser explorados. Inserido nesta metodologia, é proposto um procedimento híbrido envolvendo os métodos primal-dual de pontos interiores e *branch-and-bound*, que gera soluções otimizadas relacionadas aos modelos de custo de colheita da cana-de-açúcar, de custo de coleta e de geração de energia através da biomassa residual de cana-de-açúcar e auxilia na seleção de variedades a serem plantadas, considerando-se as áreas mecanizáveis e semi-mecanizáveis no processo.

Para isso, o método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores foi desenvolvido, baseando-se em Bazaraa et al. (1979), Wu et al. (1994), Granville (1994) e Wright (1997) para problemas lineares com variáveis canalizadas, com o procedimento previsor-corretor, variante do proposto por Mehrotra (1992).

Em seguida, os métodos de programação inteira foram investigados, iniciando pelo método *branch-and-bound*, baseando-se em Homem (2010), Pinto (1999) e Borchers e Mitchell (1992), o qual divide o problema original em subproblemas, que são podados até que se obtenha a solução ótima. Investigou-se também, nesse trabalho, o método de planos de corte, com base em Pinto (1999), Mitchell (1997) e Mitchell (1995), cujo objetivo é reduzir o espaço de soluções, a partir da inserção de inequações válidas ao problema. Dessa forma, foi possível apresentar o método *branch-and-cut*, o qual incorpora os planos de corte aos nós do método *branch-and-bound*. Assim, são propostos dois algoritmos híbridos, ambos envolvendo o método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores, um deles associado ao método *branch-and-bound* (PDBB) e o outro, ao método *branch-and-cut* (PDBC). Devido ao tempo de desenvolvimento desse trabalho, implementou-se apenas o método híbrido PDBB em linguagem de programação C++, utilizando o *software* Borland C++ Builder 6.0, o qual foi aplicado aos modelos de otimização mono e multiobjetivo, relacionados à colheita da cana-de-açúcar, coleta de sua biomassa residual e ao balanço de energia para o aproveitamento desses resíduos. A implementação e testes do método PDBC são de interesse futuro.

Para auxiliar o método híbrido proposto na resolução dos modelos multiobjetivos, foram utilizados como estratégias os métodos clássicos da soma ponderada, o qual pondera as funções objetivo através de um parâmetro  $\alpha \in [0, 1]$ , e  $\varepsilon$ -restrito, o qual mantém uma das funções como função objetivo, e as demais como restrições.

No que segue, o trabalho está dividido e organizado da seguinte forma:

No Capítulo 2 é feita uma revisão bibliográfica do tema, apresentando as principais características do setor elétrico e, além disso, é feito um breve estudo do setor sucroalcooleiro, relatando algumas etapas do processo produtivo da cana-de-açúcar, e seu contexto

no setor energético e ambiental. Uma abordagem sobre modelagem matemática também é feita nesse capítulo.

No Capítulo 3 são apresentados os modelos matemáticos investigados referentes à minimização do custo de colheita da cana-de-açúcar, minimização de custo e transporte de coleta da biomassa residual da cana-de-açúcar, e maximização do balanço de energia referente a esses resíduos, que consideram áreas mecanizáveis e semi-mecanizáveis.

Além destes, são introduzidos no Capítulo 3, os modelos multiobjetivo de minimização de custo de coleta e transporte e maximização do balanço de energia da biomassa residual, e de minimização de custo total e maximização de energia total, bem como as estratégias utilizadas para a determinação de soluções eficientes desses modelos, baseadas em problemas mono-objetivo variantes dos métodos da soma ponderada e  $\varepsilon$ -restrito.

No Capítulo 4 são apresentados os métodos propostos para a resolução dos modelos. Inicialmente, desenvolve-se o método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores, em seguida é discutido o método *branch-and-bound*. A partir desses, é proposto um método híbrido envolvendo os métodos de pontos interiores e *branch-and-bound*. Este método é um variante de Homem (2010), cujas adaptações e modificações são apresentadas nesse capítulo.

No Capítulo 5 são apresentados os dados necessários para aplicação do método aos modelos mono-objetivo de minimização de custo de colheita da cana-de-açúcar, minimização do custo de coleta de resíduos e maximização do balanço de energia, bem como, aos modelos multiobjetivo de aproveitamento de resíduos e o de custo e balanço de energia total. Assim, a partir da implementação do procedimento híbrido dos métodos de pontos interiores e *branch-and-bound*, utilizando o *software* Borland C++ Builder 6, aplicou-se o método aos modelos citados, e os resultados referentes a esta aplicação são apresentados nesse capítulo.

No Capítulo 6 são feitas as considerações finais sobre o trabalho desenvolvido, com previsões de trabalhos futuros.

O Capítulo 7 descreve os trabalhos publicados no decorrer do período de realização do mestrado. Em seguida, são apresentadas as referências bibliográficas, nas quais o trabalho foi baseado.

No Apêndice A, o método de planos de corte é explorado, visto que este é utilizado no desenvolvimento do método *branch-and-cut*.

No Apêndice B é apresentado uma investigação do método *branch-and-cut* e sua adaptação ao método de pontos interiores. A partir disso, propõe-se o método híbrido de pontos interiores e *branch-and-cut*.

Por fim, no Anexo A são apresentados os resultados obtidos por Homem (2010), para o modelo multiobjetivo de aproveitamento de resíduos, utilizando as estratégias da soma ponderada e  $\varepsilon$ -restrito, utilizadas para a comparação dos resultados no Capítulo 5.

# Capítulo 2

## Revisão bibliográfica

Desde sempre, o homem procurou evoluir, adaptando o meio em que vive às suas necessidades. Em se tratando de energia, não poderia ser diferente. A escassez ou a inconveniência de um dado recurso, compensadas pelo surgimento de outro(s), originaram fontes e formas alternativas de energia, como a eletricidade, que passou a ser recurso indispensável e estratégico para o desenvolvimento socioeconômico de muitos países e regiões.

A grande oferta de energia, principalmente obtida de combustíveis fósseis, deu suporte ao crescimento e às transformações da economia mundial durante todo o século XX. Atualmente, a principal preocupação é substituição das fontes tradicionais por recursos menos agressivos ao meio ambiente, visando um desenvolvimento sustentável.

Além da possibilidade de esgotamento, em médio prazo, das reservas de recursos naturais mais utilizadas, como carvão mineral e petróleo, outro problema é o elevado volume de emissões dos gases causadores do efeito estufa, particularmente o dióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ ), liberado em larga escala nos processos de combustão dos recursos fósseis (ANEEL, 2008).

Assim, o grande objetivo é suprir as necessidades da geração atual, sem comprometer o atendimento às necessidades das futuras gerações, reduzindo o impacto ambiental, e sendo capaz de suportar o crescimento econômico.

As iniciativas adotadas abrangem todas as formas de utilização de energia – calor, vapor e elétrica – e são adotadas por praticamente todos os países. Os mais adiantados são os países desenvolvidos, que são os mais dependentes dos combustíveis fósseis. Mas os países em desenvolvimento também têm investido em alguns projetos.

Mesmo sendo bastante dependente do petróleo, o Brasil conseguiu transformar a biomassa na segunda maior fonte produtora de energia local, além disso, a principal fonte de energia elétrica é proveniente de recursos hídricos (ANEEL, 2008).

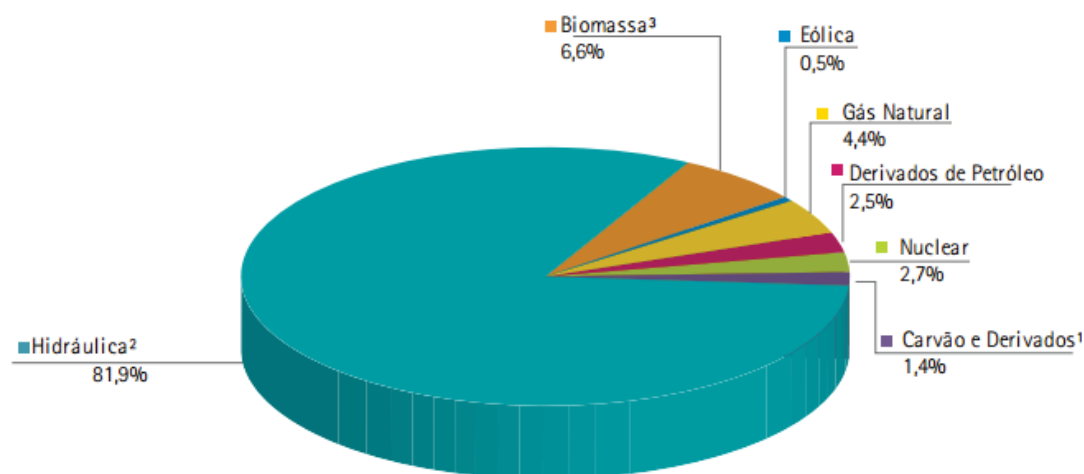
Neste capítulo é feita uma abordagem de algumas características do setor elétrico e do setor sucroalcooleiro do país, para contextualização e melhor entendimento dos modelos

estudados, os quais são apresentados no Capítulo 3.

## 2.1 Setor elétrico brasileiro

De acordo com os dados do balanço energético nacional, visto em Brasil (2012), a geração de energia elétrica no Brasil em centrais de serviço público e autoprodutores atingiu 531,8 TWh em 2011. Importações líquidas de 35,9 TWh, somadas à geração interna, permitiram uma oferta interna de energia elétrica de 567,6 TWh. Entretanto, o consumo final foi de 480,1 TWh.

Dentre as ofertas de energia, a principal fonte é a energia hidráulica representando mais de 80% da geração total. Enquanto que a geração elétrica a partir de combustíveis fósseis representou 18,9%. A Figura 2.1 representa a oferta interna de eletricidade no Brasil do ano de 2011.



### Notas

<sup>1</sup> Inclui gás de coqueria

<sup>2</sup> Inclui importação de eletricidade

<sup>3</sup> Inclui lenha, bagaço de cana, lixívia e outras recuperações

Figura 2.1: Oferta interna de energia elétrica por fonte – 2011

Fonte: Brasil (2012)

Com base no balanço energético em Brasil (2011), pode-se dizer que a produção de energia elétrica a partir da biomassa aumentou de 4,7% para 6,6%, assim como a energia eólica que aumentou de 0,4% para 0,5%, enquanto que a energia elétrica proveniente de derivados do petróleo, gás natural e carvão e seus derivados diminuíram seu percentual.

Mesmo considerando a hidroeletricidade como a mais importante parcela das energias renováveis, o planejamento da expansão do setor elétrico, produzido pela Empresa de Pesquisa Energética (EPE) prevê a diversificação da matriz da energia elétrica. Segundo



a ANEEL (2008), essa mudança já é visível quando são considerados dados de anos anteriores, em que as hidrelétricas representavam cerca de 90% da capacidade total do país. Essa reestruturação do setor elétrico brasileiro tem estimulado a geração descentralizada, de modo que as fontes não convencionais, principalmente as renováveis, tendem a ocupar maior espaço na matriz energética nacional.

Dentre as alternativas para a diversificação da matriz energética, de acordo com Ripoli e Ripoli (2004) a mais promissora é a biomassa, que tem um grande potencial de crescimento nos próximos anos na produção de energia, visto os dados da Tabela 2.1, que estimam o potencial de energia de biomassa, referente ao palhiço e bagaço da cana-de-açúcar e à palha de arroz, para a região centro-sul do país.

Tabela 2.1: Poderes caloríficos do palhiço e bagaço da cana-de-açúcar e palha do arroz.

Biomassas	Pu (MJ/t)	A (%)	Ac (ha/ano)	Qt (t/ha)	Pd (pessoas/ano)
Palhiço da cana	13551	50	$2,7 \times 10^6$	11,26	$9,85 \times 10^6$
Bagaço da cana	7868	30	$2,7 \times 10^6$	18,20	$5,55 \times 10^6$
Palha do arroz	15401	80	$1,8 \times 10^6$	0,257	$0,26 \times 10^6$

Fonte: Ripoli e Ripoli (2004).

em que:

Pu (MJ/t): poder calorífico em megajoules por tonelada;

A (%): porcentagem da área de produção;

Ac (ha/ano): área de produção, em hectares, considerada no ano;

Qt (t/ha): quantidade de palhiço no campo, após colheita mecanizada, ou de bagaço obtido, ou palha de arroz.

Pd (pessoas/ano): número de pessoas a serem atendidas ao ano.

O aproveitamento imediato, embora de eficiência reduzida, através da combustão em caldeiras, fornos, etc. é uma das principais vantagens da biomassa. Tecnologias de conversão eficiente, como a gaseificação e a pirólise, têm sido desenvolvidas para aumentar a eficiência do processo e reduzir impactos socioambientais (ANEEL, 2005).

Atualmente, a biomassa tem sido mais utilizada na geração de eletricidade principalmente em sistemas de cogeração, destacando-se o setor sucroalcooleiro do Estado de São Paulo e no suprimento de eletricidade de comunidades isoladas da rede elétrica, como em alguns projetos na Amazônia.

A cogeração consiste em um processo de produção simultânea e sequenciada de duas ou mais formas de energia a partir de um único combustível, que podem ser convertidas para consumo próprio ou venda (Lima, 2006). De acordo com Oddone (2001), as fontes de energias mais frequentes são a energia mecânica, utilizada para o acionamento de equipamentos ou para a geração de energia elétrica e a energia térmica, utilizada no atendimento das necessidades de calor para processos, ou indiretamente na produção de vapor ou frio.

## 2.2 Bioeletricidade

De acordo com a União da Agroindústria Canavieira de São Paulo - UNICA (2011), a bioeletricidade é uma energia limpa e renovável, obtida através da cogeração a partir da biomassa, que pode ser de resíduos da cana-de-açúcar (bagaço e palha), restos de madeira, carvão vegetal, casca de arroz, capim-elefante e outras. No Brasil, 80% da bioeletricidade vêm dos resíduos da cana-de-açúcar.

O primeiro contrato de venda de energia excedente no Brasil foi assinado no ano de 1987, em Sertãozinho, pela usina de São Francisco para a Companhia Paulista de Força e Luz (CPFL). Porém, o termo bioeletricidade apenas ficou conhecido através do primeiro leilão dessa energia nova em dezembro de 2005. E em 2010, a bioeletricidade da cana-de-açúcar representava 5% da energia elétrica do país, o que é equivalente ao abastecimento de cinco milhões de residências em um ano (UNICA, 2012).

Segundo a UNICA (2011), uma tonelada de bagaço pode gerar mais de 300kWh para a rede elétrica e a mesma quantidade de palhiço pode gerar 500kWh. E ainda, se considerarmos que, em 2010, o consumo médio de uma residência foi de 154kWh, então apenas um hectare de cana-de-açúcar seria capaz de providenciar energia elétrica para oito residências durante o ano todo.

Apesar disso, a bioeletricidade ainda é pouco utilizada no Brasil. Apenas 30% das usinas de cana-de-açúcar estavam ligadas à rede elétrica no ano de 2011. Recentemente, uma nova abordagem, feita pelo Agora<sup>1</sup>, identificou um potencial de crescimento da bioeletricidade e prevê que até 2021 a rede elétrica nacional poderá representar 18% da matriz elétrica. O país poderá gerar mais de 13000MW de energia da cana-de-açúcar, o equivalente a três usinas Bello Monte.

Além de limpa e renovável, a bioeletricidade tem sua maior parte gerada perto dos maiores centros de demanda por energia elétrica. E ainda, segundo a UNICA (2010) a bioeletricidade é produzida em período seco, devido às safras de cana-de-açúcar, e portanto, é complementar à geração das hidrelétricas, que tem uma redução de dois terços do potencial energético dos rios.

A bioeletricidade e o etanol são exemplos do grande potencial da cana-de-açúcar e fizeram do setor sucroalcooleiro nacional, reconhecido mundialmente, como um dos setores do agronegócio mais inovador e sustentável.

## 2.3 Cana-de-açúcar

A cada ano, o setor sucroalcooleiro se consolida como uma das atividades mais importantes da agroindústria nacional visto o seu potencial de produção e a importância

---

<sup>1</sup>Projeto nacional iniciado em 2009, que tem por objetivo mostrar a importância do setor sucoenergético para o Brasil fornecendo informações e esclarecimentos sobre este setor.

da cana-de-açúcar que, segundo Ripoli e Ripoli (2004), não é apenas matéria prima para produzir açúcar e álcool que são os mais tradicionais. Atualmente existem tecnologias para o aproveitamento do bagaço, palhiço, méis <sup>2</sup>, torta de filtro e vinhaça, que originam inúmeros outros produtos como: plástico biodegradável, papéis, fármacos, fermentos, herbicidas e inseticidas biodegradáveis. Além disso, desenvolve-se a chamada alcoolquímica, em que é possível obter diversos produtos extraídos do petróleo, através das várias transformações pelo álcool etílico ou etanol. E ainda, tem-se a energia elétrica, que pode ser obtida através do bagaço ou dos resíduos da cana-de-açúcar.

Esta cultura continua em expansão no Brasil. Estima-se que a área cultivada com cana-de-açúcar na safra de 2012/2013 seja de 8.520,5 mil hectares, um aumento de 2% em relação à safra anterior. A última previsão de produção de cana-de-açúcar na safra 2012/2013 é de 595,13 milhões de toneladas, com uma taxa de crescimento de 6,2% em relação à safra 2011/2012 (CONAB, 2012).

## 2.4 Cultivo da cana-de-açúcar

Segundo dados do CONAB (2012), o cultivo da cana-de-açúcar se concentra na região Centro-Sul, composta pelo Sudeste, Centro-Oeste, e Sul, sendo que São Paulo é o estado que mais produz em todo o país, cerca de 330,2 milhões de toneladas, o equivalente a 55,48% da produção total.

São vários os fatores que determinam a produtividade da cana-de-açúcar. Para que se tenha uma boa cultura deve haver um planejamento de produção que incluem análises envolvendo o clima, as condições físicas, químicas e biológicas do solo, as variedades de cana-de-açúcar e sua distribuição, as práticas culturais, insumos, máquinas e implementos, fatores de produção, épocas de plantio, entre outros serviços, com o objetivo de obter uma alta produtividade que minimize os custos.

Segundo Florentino (2006), cada variedade de cana-de-açúcar possui um índice diferente de volume, poder calorífico, produtividade de açúcar fermentescível, entre outros. Todas essas características devem ser consideradas para o plantio. Tabelas com dados de variedades são apresentadas na Seção 5.1, desse trabalho.

De acordo com Lima (2006), cada variedade é identificada pelas iniciais da estação experimental ou do local onde foram realizadas as pesquisas para a sua aquisição, seguidas de dois números que indicam o ano de sua produção, além dos números de registro do órgão responsável pela sua origem.

Existem diversos tipos de variedades de cana-de-açúcar que são modificados para se adaptarem a diversos tipos de clima e solo, e essas diferentes características devem ser consideradas para a escolha das variedades.

---

<sup>2</sup>derivado obtido antes da cristalização do açúcar por meio da fervura e evaporação do caldo da cana-de-açúcar

### 2.4.1 Solo

Um solo fértil, de acordo com Ripoli e Ripoli (2004), é aquele que apresenta condições básicas e balanceadas referentes à água, calor, ar, permeabilidade às raízes, ph, e nutrientes. Desta forma, é papel da tecnologia agrícola adaptar as condições encontradas no solo à cultura.

Lima (2006) afirma em seus estudos que o cultivo da cana-de-açúcar é feito sobre os mais diferentes tipos de solo, assim para a implantação de um canavial, é feito um planejamento da área por meio de um levantamento topográfico.

### 2.4.2 Plantio

Para o plantio é feito uma sistematização do terreno, no qual subdivide-se a área, de acordo com a topografia e homogeneidade do solo, em talhões, zonas e setores. Este planejamento é muito importante, pois segundo Ripoli e Ripoli (2004), considera-se as operações mecanizadas, necessárias para a condução e colheita do canavial, além das necessidades da indústria e da capacidade de corte, carregamento e transporte, evitando, por exemplo, desníveis significativos e fileiras de plantio mal distribuídas, que podem diminuir o desempenho operacional.

O corte de mudas, distribuição no sulco, corte dos colmos<sup>3</sup> em pedaços menores, dentro do sulco e cobertura, são etapas do plantio. Em geral, os espaçamentos entre os sulcos são determinados de acordo com o tipo de sistema de colheita a ser realizado (Tolentino, 2007).

Assim, pode-se dizer que antes da distribuição das mudas nos talhões, a amostragem do solo, a escolha do cultivo, a quantidade necessária de mudas e a procedência das mesmas, a época, os sistemas, o espaçamento e profundidade de plantio, são variáveis que devem ser levadas em consideração, bem como a aplicação de herbicidas, que também é realizada neste processo.

O período de plantio varia de acordo com as regiões. Na região Centro-Sul são utilizadas duas épocas de plantio, uma no período de setembro a outubro, denominada “cana de ano” ou “12 meses”, e outra no período de julho a março, denominada “cana de ano e meio” ou “18 meses”. No Nordeste, o plantio ocorre de junho a setembro com a colheita programada após um período de 12 a 14 meses. Em regiões de várzea, planta-se de setembro a dezembro para a colheita ocorrer em 12 ou 18 meses (Ripoli e Ripoli, 2004).

Conforme Ramos (2010), o plantio pode ser manual ou mecanizado. O plantio manual envolve cerca de 15 trabalhadores na equipe, cujo rendimento é em média de 4 a 5 hectares por dia, e para o plantio mecanizado são necessários um tratorista e um operador de plantadora, que é capaz de plantar de 0,28 a 0,3 hectares por hora.

---

<sup>3</sup>Caule ou parte aérea da cana-de-açúcar, adequadamente despalhado e despontado (Ripoli e Ripoli, 2004).

### 2.4.3 Colheita

O sistema de colheita de cana-de-açúcar é composto pelos seguintes subsistemas: subsistema de corte, subsistema de carregamento, subsistema de transporte e subsistema de recepção (Lima, 2006).

Segundo Ripoli e Ripoli (2004), os sistemas de colheita utilizados no Brasil e no mundo, podem ser divididos em sistema manual, semi-mecanizado ou mecanizado. O sistema manual é aquele cujos subsistemas de corte e carregamento são feitos manualmente, podendo haver um transporte intermediário por tração animal, ou transbordo. Utilizados em regiões do nordeste brasileiro que ultrapassam 100% de declividade. O sistema semi-mecanizado envolve o subsistema de corte manual e o subsistema de carregamento é feito através de carregadoras mecânicas. Este tipo de sistema é o mais utilizado em todo o país, em que o relevo não ultrapassa 25% de declividade. E por fim, o sistema mecanizado, cujos processos de corte e carregamento são realizados por máquinas, sendo elas cortadoras de diversos tipos e colhedoras de cana inteira ou cana picada. Por uma questão de dinâmica dos equipamentos, este tipo de sistema é adotado somente em regiões em que o relevo atinge no máximo 17% de declividade.

#### 2.4.3.1 Subsistema de corte e carregamento

O corte pode ser feito com a queima prévia da cana-de-açúcar ou sem a queima prévia. De acordo com Tolentino (2007), tanto para o corte manual quanto para o mecanizado, a queima facilita e diminui custos referentes à operação, favorece as operações no solo e o cultivo das soqueiras e, ainda, o teor de cinza no solo elimina algumas pragas. Porém, a queima pode ocasionar a poluição ambiental, o desperdício energético, dificuldades na conservação, purificação dos caldos, aumento de brix (teor de sólidos solúveis) e fibra devido ao ressecamento dos colmos, aumento da infestação de microrganismos nos colmos, exsudação que pode levar à deterioração, perdas na produção de açúcar e álcool, e perdas da ordem de 30% de matéria bruta, que poderia ser utilizada para a produção de biogás ou produção de energia de biomassa.

Além disso, a queima da cana-de-açúcar afeta gravemente a atividade biológica do solo, devido às altas temperaturas, provocando alterações como a oxidação da matéria orgânica, a eliminação de predadores naturais de algumas pragas, causando maior utilização de agrotóxicos, maior uso de herbicidas para controle de ervas daninhas que se desenvolvem rapidamente após a queima, o agravamento do processo de erosão do solo pela falta de cobertura vegetal, a diminuição do equilíbrio ecológico, sem contar o aumento do teor de cinzas no solo Ripoli (2002).

A colheita manual com a queima prévia da cana-de-açúcar tem diminuído a cada ano, sendo substituída pela mecanização. O principal motivo é o Protocolo Agroambiental, assinado em 2007 pelo Governador do Estado de São Paulo, pelos Secretários do

Meio Ambiente e de Agricultura e Abastecimento, pelos presidentes da União da Indústria Sucroalcooleira (UNICA) e pelos presidentes da Organização de Plantadores de Cana da Região Centro-Sul do Brasil (ORPLANA), que tem como um dos objetivos, para o estado, a redução do prazo legal de queima da palha de cana-de-açúcar (Lei Estadual nº 11.241/02) para 2014, ao invés de 2021, em áreas mecanizáveis e para 2017, ao invés de 2031, em áreas não mecanizáveis.

A Figura 2.2 a seguir, mostra o desenvolvimento da colheita mecanizada da cana-de-açúcar ao longo das safras desde a assinatura do Protocolo Ambiental, demonstrando o compromisso efetivo com as metas de redução da queima propostas.

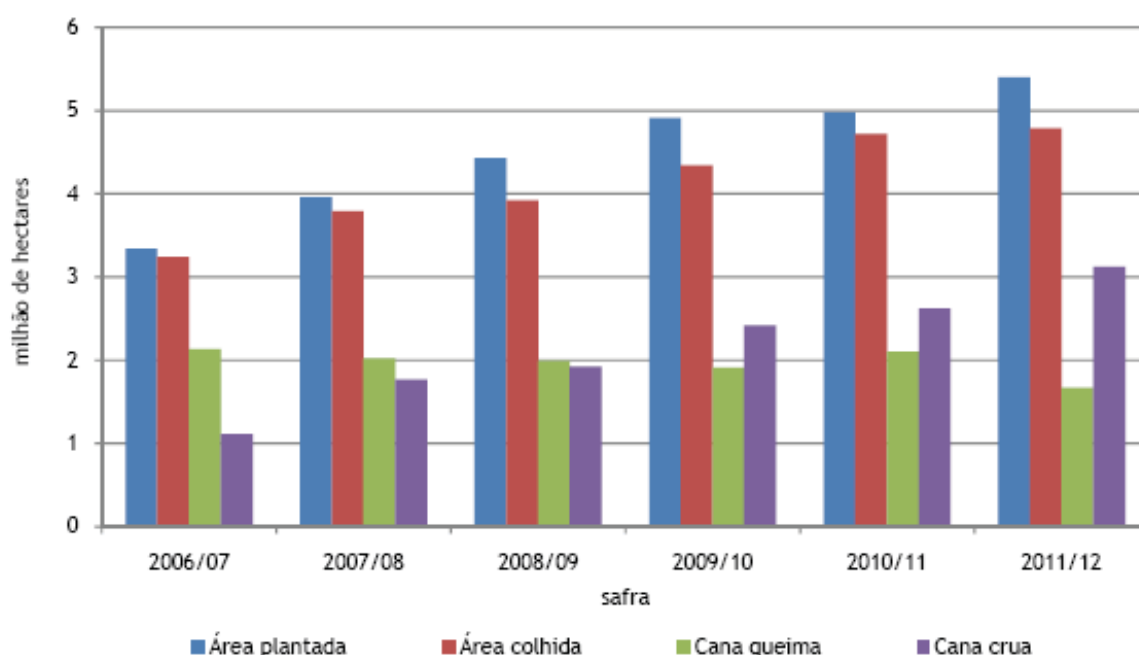


Figura 2.2: Desenvolvimento da colheita da cana-de-açúcar.  
Fonte: Torquato e Ramos (2012) com base em Canasat/IMPE.

Por outro lado, o corte mecanizado reduz os impactos ambientais, além de aumentar o rendimento operacional, porém exige algumas características específicas como solo plano, sem falhas, e redimensionamento das áreas de plantio, com espaçamento adequado, plantio mais raso, e crescimento ereto da cana-de-açúcar (Ramos, 2010).

Ripoli e Ripoli (2004) apresentam alguns aspectos positivos deste tipo de colheita, como a melhoria da qualidade da cana-de-açúcar, maior proteção do solo contra erosões, a manutenção da umidade do solo, o aumento da matéria orgânica no solo e redução da poluição ambiental, mas pode trazer prejuízos de diversas naturezas. De acordo com os autores, as perdas encontradas neste tipo de colheita incluem canas-de-açúcar inteiras, toletes<sup>4</sup>, pedaços de cana-de-açúcar, ponteiros (devido ao acamamento) e canas-de-açúcar

<sup>4</sup>Termo utilizado na região Centro-Sul para rebolo, que é a fração do colmo decorrente da colheita

esmagadas pelas rodas das máquinas (devido à má projeção de espaçamentos). O corte dos ponteiros também é muito importante, pois assim pode-se obter uma cana de melhor qualidade e com menos palha para a indústria, e não comprometeria o rendimento da moagem da cana.

Entre outras desvantagens, Lima (2006) destaca em seus estudos o aumento da incidência de animais peçonhentos e acidentes de trabalho, dificuldade de mão-de-obra disponível para a adoção da técnica e resistência do próprio cortador em executá-la, menor desempenho de corte, e maior consumo operacional, o que implica em maiores custos de produção.

O carregamento, por sua vez, pode ser do tipo manual ou mecanizado. Embora seja uma prática muito limitada e praticamente escassa, o carregamento manual ocorre em relevos de desnível muito acentuados. O carregamento mecânico e semi-mecânico acontece através de carregadoras, e é o mais utilizado no país. No entanto, segundo Ripoli e Ripoli (2004), a mecanização do carregamento acarretou um aumento significativo de matéria estranha, mineral e vegetal, na matéria-prima, podendo ser ocasionados pela qualidade da queima, granulometria e umidade do solo, disposição dos colmos cortados, tipos de rastelo e da garra, aptidão do operador e tipo de eitos<sup>5</sup>, com 3, 5 ou 7 ruas.

Após o carregamento, a cana-de-açúcar é transportada o mais rápido possível e de modo adequado, até o centro de processamento, pois a cana está sujeita à rápida perda de qualidade (Florentino, 2006).

Desta forma, a escolha do tipo de corte depende da disponibilidade de mão-de-obra, aspectos socioeconômicos, configuração do terreno onde está implantado o canavial, sistema de carregamento a ser utilizado, entre outros. A Tabela 2.2, adaptada de Ramos (2010), apresenta os custos envolvidos nos procedimentos de aceiro<sup>6</sup>, corte e carregamento da cana-de-açúcar, tanto para a cana crua, quanto para a cana queimada, quando são considerados mão-de-obra, encargos e transporte.

Tabela 2.2: Custos de corte e carregamento da cana-de-açúcar.

Operação	Custo ( R\$.t <sup>-1</sup> )
Aceiro( $Ca$ )	0,14
Queima( $Cq$ )	0,17
Corte cana queimada( $Cco^{SM}$ )	7,03
Corte cana crua( $Cco^M$ )	10,5
Carregamento( $Cca$ )	1,62

Fonte: Adaptação de Ramos (2010).

mecanizada, cujo tamanho pode variar de acordo com a regulagem e o tipo de colhedora utilizada (Ripoli e Ripoli, 2004).

<sup>5</sup>Também denominado de leira, oito diz respeito a deposição dos colmos cortados (Ripoli e Ripoli, 2004).

<sup>6</sup>Faixa no solo em que toda a vegetação é retirada, com o intuito de evitar a propagação do fogo.

### 2.4.3.2 Subsistema de transporte

Após os processos de corte e carregamento, é realizado o transporte. O transporte pode ser realizado por animais, tratores tracionando carretas e caminhões. Ripoli e Ripoli (2004) consideram que a escolha do tipo de transporte depende de fatores como distância dos campos de produção à unidade industrial, às condições de trafegabilidade de malha viária que podem ser largura, tipo, aclives, declives, etc., quantidade de matéria-prima, e os custos operacionais de cada tipo de transporte.

Entre os meios de transporte existentes, os caminhões são os mais utilizados, e variam desde caminhões médios de 8 a 10 toneladas de carga líquida até os superpesados de 45 a 50 toneladas, recomendados para longas distâncias.

Entre os custos de produção, o custo de transporte da matéria-prima é muito significativo em todo o processo, desta forma, a logística e a distância podem inviabilizar o processo produtivo, o que justifica o fato de várias empresas refinarem seu planejamento, a partir de acompanhamentos periódicos (Marques, 2009; Ripoli e Ripoli, 2004).

A Tabela 2.3 apresenta os custos envolvidos no processo de transporte da cana-de-açúcar em reais por hectare para a cana crua e queimada que serão utilizados no modelo matemático I, apresentado na Seção 3.1. Os cálculos foram obtidos para caminhões Mercedes Benz 2318 e Julieta mais encargos a uma distância média de 18 km entre o talhão e a usina.

Tabela 2.3: Custos de transporte da cana-de-açúcar.

Transporte	Custo ( R\$.t <sup>-1</sup> )
Cana crua( $Ct^M$ )	6,42
Cana queimada( $Ct^{SM}$ )	5,35

Fonte: Ramos (2010).

### 2.4.3.3 Subsistema de recepção

O processo industrial tem início com o subsistema de recepção, que envolve a pesagem do transporte, retirada da amostra, descarregamento e uma nova pesagem do transporte. No aspecto gerencial, o subsistema de recepção também é importante, pois a agilidade de receber, descarregar e liberar as unidades de transporte dependerá da adequada sincronia deste processo com o corte e carregamento (Ripoli e Ripoli, 2004).

De acordo com Ramos (2010), o processo de recepção é quando se define a quantidade e a qualidade da cana-de-açúcar. As pesagens dos caminhões feitas antes e depois do descarregamento definem a quantidade, em seguida a cana-de-açúcar é analisada, através das amostras retiradas por meio de sondas, para determinar a quantidade de Açúcar Redutor Total – ART, que é um indicador de qualidade de cana-de-açúcar para a produção



de açúcar e álcool. Em seguida, a cana-de-açúcar será pesada, lavada e moída. Este processo liberará o caldo, resultando açúcar e álcool e seus subprodutos.

#### 2.4.4 Qualidade da cana-de-açúcar

O potencial de produção de açúcar, álcool e outros produtos finais depende da qualidade da cana-de-açúcar e está atrelado diretamente aos diversos fatores intrínsecos, àqueles relacionados com a composição da cana-de-açúcar, ou extrínsecos, aqueles relacionados a materiais estranhos ao colmo, ou produzidos por microrganismos.

Estes indicadores podem ser o POL (sacarose aparente), a pureza, o açúcar reductor total (ART), açúcares redutores (AR), porcentagem de fibra, tempo de queima/corte, temperatura ambiente, chuva, umidade relativa do ar, quantidade de terra contaminação, teor de álcool no caldo da cana, acidez, dextrana (polissacarídeo associado a deterioração da cana), amido, maturadores químicos, pragas e doenças, índice de Honig-Bogstra (indicador de performance da decantação do caldo), palhiço, ácido aconítico, e compostos fenólicos. Ripoli e Ripoli (2004) apresentam as características e influência de cada um destes indicadores, bem como os valores recomendados, como é mostrado na Tabela 2.4.

Tabela 2.4: Indicadores da qualidade da cana-de-açúcar e valores recomendados (fermentec).

Indicadores	Valores recomendados
POL	> 14%
Pureza (POL/Brix)	> 85%
ART (sacarose, glucose, frutose)	> 15% (maior possível)
AR (glucose, frutose)	< 0,8%
Fibra	11 a 13%
Tempo de queima/ corte	< 35 horas para cana com corte manual
Terra na cana (minerais)	< 5Kgf/t cana
Contaminação da cana	< $5 \times 10^5$ bastonetes/ml no caldo
Teor de álcool no caldo da cana	< 0,06% ou < 0,4% Brix
Acidez sulfúrica	< 0,8
Dextrana	< 500 ppm/Brix
Amido da cana	< 500 ppm/Brix
Broca da cana	< 1%
Índice de Honig-Bogstra	> 0,25
Palhiço na cana	< 5%
Ácido aconítico	< 1500 ppm/Brix

Fonte: Ripoli e Ripoli (2004).

De acordo com Silva (2011), os principais fatores considerados para a avaliação da qualidade da cana para sua compra/venda são as determinações do POL e da porcentagem de fibra. Além disso, outro fator importante segundo Lima (2006), é a porcentagem aparente de sólidos solúveis (brix).

Uma porcentagem muito alta de fibra implica em uma quantidade menor de caldo extraído, ou seja, baixa produção de açúcar. Enquanto que, um baixo teor de fibra,

além de provocar danos mecânicos, proporciona altos custos com energia e, em geral, mais gastos e perdas para a usina. Para as indústrias de açúcar e álcool, altos teores de sacarose (POL) são fundamentais para um bom processamento e rendimento (Ripoli e Ripoli, 2004).

### 2.4.5 Biomassa residual da cana-de-açúcar

Segundo Lima (2006), após a colheita mecanizada, realizada sem a queima prévia da cana-de-açúcar, todo resíduo gerado a partir deste sistema de colheita como folhas, bainhas, ponteiros, além de quantidade variável de pedaços de colmo, que são cortados, triturados e lançados sobre o solo, são considerados palhiço.

Este palhiço forma uma camada sobre a superfície e, como visto antes, este material remanescente aumenta a infiltração de água no solo, diminui a erosão e a evaporação, melhorando a estrutura do solo. No entanto, o Brasil é o maior produtor mundial de cana-de-açúcar e com a proibição das queimadas, ocorre o acúmulo de toneladas de palhiço, que podem acarretar sérios problemas, como o aparecimento de pragas, retardamento da brota da cana-de-açúcar e, assim, o comprometimento da próxima safra (Tolentino, 2007).

Dessa forma, essa biomassa não pode ser deixada no solo e deve ser aproveitada. Uma estratégia com bons resultados é o aproveitamento destes resíduos através da cogeração de energia. Para isso, este material deve ser recolhido e levado para as usinas e, de acordo com Ripoli (2002), esta operação tem custo elevado devido à quantidade de maquinário envolvido.

A preparação e transporte do palhiço são realizados em 3 etapas: enleirar, que consiste em separar e fazer montes de palhiço, compactar, que consiste em transformar os palhiços em fardos (prismáticos ou cilíndricos) e carregar, que é o trabalho de carregar os fardos no caminhão, de modo manual ou mecanizado. Feito o carregamento, o palhiço deve ser transportado o mais rápido possível para o centro de processamento (Ripoli e Ripoli, 2004; Florentino, 2006).

Ripoli e Ripoli (2004) descrevem o custo de coleta, transporte e descarregamento do palhiço na usina para o sistema de enfardamento do palhiço residual da colheita convencional e o sistema integral da cana-de-açúcar, cujos colmos e o palhiço são recolhidos ao mesmo tempo, e que apresenta menor custo para a coleta e o transporte deste resíduo.

A quantidade de resíduos resultantes da colheita da cana-de-açúcar sem queima prévia varia de acordo com o tipo de variedade plantada, idade da planta e condições climáticas (Sartori, 2001). Ripoli e Ripoli (2004) afirmam que são geradas em média 26,56 toneladas de palhiço para cada hectare de cana-de-açúcar.

Dessa forma, a produtividade do palhiço da cana-de-açúcar influencia diretamente na quantidade de resíduos, assim deve-se escolher o tipo de variedade de cana-de-açúcar que gere palhiço com mínimo custo para enfardamento, carregamento e transporte até a

usina e/ou que ofereça um balanço ótimo de energia em seu aproveitamento, levando-se em conta as necessidades da usina, possibilitando melhores resultados econômicos e maior ganho energético (Florentino, 2006).

## 2.5 Modelagem matemática

Segundo Bassanezi (2002), a Modelagem Matemática é a estratégia utilizada para formular uma situação problema, analisá-la e transformá-la em uma expressão matemática, buscando sua resolução ou aproximação de um resultado, para que então esta solução possa ser validada.

De acordo com Biembengut e Hein (2003), representar uma situação real matematicamente envolve uma série de procedimentos, iniciando-se pela definição do problema. Feito isso, os dados são examinados e selecionados, preservando as características do problema. Em seguida, a linguagem é substituída pela matemática, através da definição do modelo matemático, considerado por Bassanezi (2002) como o conjunto de símbolos e relações matemáticas que representem o problema.

Os modelos podem ser formulados de acordo com os fenômenos ou situações analisados, e classificados conforme o tipo de matemática utilizada para sua resolução: linear ou não-linear, conforme suas equações básicas; estático, quando representa a forma do objeto; dinâmico, quando simula variações de estágios do fenômeno; educacional, quando baseado em um número pequeno ou simples de suposições; aplicativo, baseado em hipóteses realísticas, que geralmente envolve inter-relações de um grande número de variáveis; estocástico, aqueles que descrevem a dinâmica de um sistema em termos probabilísticos; determinístico, baseados na suposição que existem informações suficientes em um determinado instante ou estágio do processo, para a previsão precisa do sistema (Bassanezi, 2002).

Após a definição do modelo, este é resolvido e dependendo do grau de complexidade em sua formulação a solução só é possível com o auxílio de métodos computacionais. A partir da solução encontrada, o modelo é validado por meio da comparação de dados reais com aqueles obtidos. Caso seja considerado válido, o mesmo é utilizado para compreender, explicar, analisar, prever ou decidir sobre a realidade em estudo. Caso contrário, tudo é feito novamente (Ferruzzi et al., 2004; Biembengut e Hein, 2003; Bassanezi, 2002).

Assim, a modelagem matemática é considerada uma ótima ferramenta de decisão para a resolução de problemas, pois abrange diversas áreas e seus fenômenos, e pelo fato de que sem ela, diversos resultados significantes seriam obtidos em longo prazo e com grande demanda de recursos.

Dessa forma, a modelagem matemática também pode auxiliar no setor sucroalcooleiro, que se encontra em constante expansão e cujos problemas aumentam e se diversificam a cada ano, o que implica no investimento em técnicas e recursos que melhorem os

planejamentos e o processo produtivo em geral.

Silva (2011) propôs um modelo matemático para determinar qual tipo de variedade para o plantio, de forma a obter o menor custo possível para o processo de colheita e transporte da cana-de-açúcar. Para investigar a solução deste problema, o autor utilizou e algoritmo genético comparado ao método *branch-and-bound*.

Homem (2010) investiga, utilizando um método híbrido envolvendo os métodos de pontos interiores e *branch-and-bound*, modelos matemáticos que auxiliam na escolha das variedades de cana-de-açúcar a serem plantadas, de forma a minimizar o custo de coleta da biomassa residual e/ou avaliar o balanço de energia gerado.

Os modelos matemáticos que estimam o balanço de energia foram apresentados por Ramos (2010) que, além disso, desenvolveu um modelo que estima os custos de colheita, calculados para os sistemas manual e mecanizado, que foi testado através uma planilha, feita no software Excel.

Lima (2009) utilizou dados de uma usina de Taquarituba, no interior do estado de São Paulo, para a aplicação e resolução do modelo multiobjetivo que otimiza o custo de coleta da biomassa residual e/ou a geração de energia, apresentados por Florentino (2006), através do software MATLAB, gerando um conjunto de soluções que podem ser escolhidas de acordo com os interesses da usina.

Rangel et al. (2009) desenvolveram um modelo de simulação para o sistema de corte, carregamento e transporte da cana-de-açúcar que, por meio de diferentes parâmetros do sistema, como número de carregadoras de cana, quantidade de cana cortada, tempos de corte, embarque e desembarque, dentre outros, permitiu avaliar a influência das operações realizadas na usina e o impacto destas nas operações de campo.

Paiva e Morabito (2007) apresentam um modelo de programação linear inteira mista de otimização para o planejamento de seleção de processos e dimensionamento de lotes para representar o sistema de produção de açúcar, álcool e melaço, incluindo decisões da etapa agrícola, das fases de corte, carregamento e transporte de cana e, principalmente, decisões de moagem, escolha do processo produtivo e estoque dos produtos finais. Para obtenção de resultados, utilizaram a linguagem GAMS e o CPLEX, para um estudo de caso de uma usina no estado do Alagoas.

Scarpari (2007) apresenta modelos empíricos capazes de obter estimativas de ATR (Açúcar Total Recuperável) de algumas variedades de cana-de-açúcar ao longo da safra; medições da variação espaço-temporal do IAF (Índice de Área Foliar) e o ATR das variedades ao longo de um ciclo para calibração do modelo e relações da influência do armazenamento disponível, queda sazonal da temperatura do ar (graus-dia negativos) e quantidade de carboidratos assimilados na maturação da cana-de-açúcar. O autor utiliza a linguagem GAMS para otimizar o planejamento agrícola.

Tolentino (2007) propõe o uso da programação linear inteira binária, por meio do uso do método *branch-and-bound*, com o uso do software MATLAB para a investigação

dos modelos matemáticos que determinam a escolha das variedades de cana-de-açúcar que deverão ser plantadas nas áreas agrícolas da usina, que derivem palhicho com mínimo custo e/ou ofereça um balanço ótimo de energia proveniente desse palhicho.

Alencar (2006) apresenta uma solução para o problema de decisão de corte de lotes de cana-de-açúcar numa usina canavieira. Para isso foi utilizado algoritmos genéticos na otimização de uma função de retorno agrônômico envolvendo as variáveis: Pol no caldo da cana, TCH (Tonelada de cana por hectare) e Fibra.

Florentino (2006) desenvolveu modelos matemáticos que tem por objetivo a minimização do custo de coleta e transporte da biomassa residual da cana-de-açúcar e a maximização do balanço da energia dessa biomassa, bem como, um modelo multiobjetivo que visa atender ambos objetivos.

Marquesini et al. (2006) apresentam um modelo matemático desenvolvido para a Usina São Domingos, situada na cidade de Catanduva – SP, para roteirizar as frentes de colheita de cana-de-açúcar durante a safra, de modo a atender, com o menor custo, as necessidades diárias de matéria-prima de uma usina sucroalcooleira. Este modelo foi elaborado com base no método heurístico de Metrópolis e permite dividir as frentes de corte com base em critérios econômicos penalizadores do custo de movimentação.

Nascimento (2006) aborda a otimização da logística de transporte e recepção de cana-de-açúcar em indústria sucro-alcooleira, com base em modelos de filas de espera, através da análise do sistema de transporte de cana da Usina Aliança, localizada no interior do estado da Bahia, seguido de um modelo para otimização da produção, que visa a maximização do lucro total, resultante da comercialização de seus produtos (açúcar e álcool) e sub-produtos (bagaço de cana, torta de filtro, vinhaça e eletricidade). Para o estudo destes, utilizou o software Excel, da Microsoft, bem como seu aplicativo Solver, e o software Quantitative Systems for Business Plus - QSB+.

Caliari e Júnior (2005) avaliaram o ganho com o planejamento e posterior aplicação do programa matemático, Xa Callable Library versão 12.0, para a maximização do açúcar por área cultivada, na colheita semana a semana. Dados da Usina Cofercatu, no estado do Paraná, com valores de produtividade e curvas de maturação projetados ao longo da safra, e capacidade de moagem e tempo de aproveitamento da safra 1998/1999, foram utilizados.

Terramoto (2003) avaliou modelos para estimativa do potencial produtivo relativo de cana-de-açúcar com base em parâmetros climáticos e de análise de solo de rotina. Foram utilizados dados de produtividade de experimentos, dados de campo da Usina Santa Rita, localizado em Santa Rita do Passa Quatro e da Usina Costa Pinto em Piracicaba, ambas no estado de São Paulo. Por fim, a produtividade medida no campo e os resultados estimados pelos métodos para o modelo matemático foram comparados.

Iannoni e Morabito (2002), utilizando técnicas de simulação discreta, apresentam modelo de simulação, construído no software Arena, que representa o sistema de recepção

de cana em uma das maiores usinas do Brasil, a Usina São Martinho, localizada na região de Ribeirão Preto-SP.

Sartori (2001) apresenta modelos matemáticos de otimização que minimizam a quantidade de resíduo de colheita ou maximizam a energia contida nesses resíduos determinando as variedades para o plantio da cultura de cana-de-açúcar.

Colin et al. (1999) apresentam a modelagem de um sistema logístico de distribuição e armazenamento de açúcar, cujo objetivo é determinar a quantidade, e em que data enviar o açúcar para as filiais, de modo que o custo de transporte seja minimizado, atendendo as demandas e considerando a capacidade de armazenagem e de produção da usina.

Yamada et al. (2002) utilizou redes Petri para modelar todas as etapas de produção de açúcar e álcool, englobando 14 etapas desde o plantio da cana até o armazenamento do açúcar e álcool, avaliando a viabilidade de utilização desta técnica para etapas predominante discretas.

Um modelo matemático que representa as atividades envolvidas no carregamento, transporte e descarregamento de cana é apresentado por Grisotto (1995), cujos resultados foram obtidos por meio de uma heurística que toma como base a solução do problema linear obtido pelo relaxamento das restrições de integralidade. Este problema foi resolvido pelo algoritmo de pontos interiores e tenta aproximar os valores reais aos valores inteiros.

Ripoli (1991) apresenta um modelo para determinar a eficiência do palhiço da cana-de-açúcar, dado pela relação entre a quantidade de energia, em forma de combustível, consumida pelas máquinas envolvidas nas operações e a quantidade de energia existente no palhiço. Outro modelo que apresenta o balanço econômico do processo de aproveitamento do palhiço é apresentado pelo autor.

Dessa forma, é possível notar a grande importância da modelagem matemática para auxiliar nas principais operações da cultura da cana-de-açúcar. Assim, alguns dos modelos matemáticos citados serão utilizados no desenvolvimento desse trabalho.

# Capítulo 3

## Modelos matemáticos

Nesse capítulo, são apresentados modelos matemáticos que, em geral, consistem em determinar quais variedades de cana-de-açúcar deverão ser plantadas em talhões que minimizem o custo de colheita e coleta de resíduos e/ou maximizem o balanço de energia, os quais estão restritos pelas condições de área, fibra e sacarose (POL).

O Modelo I, apresentado na Seção 3.1, foi proposto por Silva (2011) e pretende minimizar o custo de colheita da cana-de-açúcar. Em seguida, são apresentados os Modelos II e III, os quais são propostos por Florentino (2006) e Tolentino (2007). O Modelo II na Seção 3.2, tem por objetivo minimizar o custo de coleta de resíduos resultante da colheita mecanizada e o Modelo III, visto em 3.3, tem por objetivo maximizar o balanço de energia para o aproveitamento de resíduos.

Além desses, são apresentados dois modelos multiobjetivos, os quais têm objetivos conflitantes e para serem resolvidos, requerem a utilização das estratégias apresentadas na Seção 3.6. O Modelo multiobjetivo I, apresentado em 3.4, é definido por Florentino (2006) e visa minimizar o custo de coleta de resíduos e maximizar o balanço de energia relativo ao aproveitamento desses resíduos. Baseando-se em Silva (2011), Florentino (2006) e Tolentino (2007), propõe-se nesse trabalho o Modelo multiobjetivo II, cujo objetivo é minimizar os custos de colheita de cana-de-açúcar e coleta de resíduos, e ainda maximizar o balanço de energia. Esse modelo é apresentado na Seção 3.5.

### 3.1 Modelo I – Minimização do custo de colheita da cana-de-açúcar

Na colheita da cana-de-açúcar no sistema semi-mecanizado, ocorre a queima prévia no processo de corte. Assim, na colheita de cana queimada têm-se os custos de aceiro, queima, corte manual, carregamento da cana para o caminhão e transporte da cana do campo para a usina.

Silva (2011) apresenta um modelo, baseado em Ramos (2010) que consiste em determinar quais das  $i$  variedades de cana-de-açúcar, ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) devem ser plantadas nos  $j$  talhões, ( $j = 1, 2, \dots, k$ ), de medida  $L_j$  (ha) e distância  $D_j$  (Km) do centro de produção, que ofereça o menor custo possível para o processo de colheita e de transporte da cana-de-açúcar do campo para a usina. Para a formulação do modelo, a área para plantio foi dividida em duas partes, uma parte para plantio da cana que será colhida crua ( $l$  talhões) e outra para a cana que deverá ser queimada na pré-colheita ( $k - l$  talhões), devido aos diferentes custos para cada tipo de colheita. O custo de transporte da variedade  $i$  plantada no talhão  $j$  ( $Ct_{ij}$ ) a uma distância ( $D_j$ ) do talhão  $j$  para a usina é dado por:

$$Ct_{ij} = c_{med_i} D_j \quad (3.1)$$

em que:

$c_{med_i}$ : custo médio do transporte da cana por km;

$D_j$ : distância do talhão  $j$  do centro de processamento, em km.

O custo  $C_{ij}^{SM}$  de colheita da cana-de-açúcar de variedade  $i$  plantada no talhão  $j$  no sistema semi-mecanizado é calculado da seguinte forma:

$$C_{ij}^{SM} = (Ca_i + Cq_i + Cco_i^{SM} + Cca_i + Ct_{ij}^{SM})L_j \quad (3.2)$$

em que:

$Ca_i$ : custo de aceiro da variedade  $i$  (R\$.ha<sup>-1</sup>);

$Cq_i$ : custo da queima da variedade  $i$  (R\$.ha<sup>-1</sup>);

$Cco_i^{SM}$ : custo de corte da variedade  $i$  de cana-de-açúcar queimada (R\$.ha<sup>-1</sup>);

$Cca_i$ : custo de carregamento da variedade  $i$  (R\$.ha<sup>-1</sup>);

$Ct_{ij}^{SM}$ : custo de transporte da variedade  $i$  de cana-de-açúcar queimada, plantada no talhão  $j$  (R\$.ha<sup>-1</sup>), calculado em (3.1);

$L_j$ : área do talhão  $j$ , em hectare.

No sistema mecanizado, o custo  $C_{ij}^M$  de colheita e transporte da cana de variedade  $i$  plantada no talhão  $j$  é calculado da seguinte forma:

$$C_{ij}^M = (Cco_i^M + Ct_{ij}^M)L_j \quad (3.3)$$

em que:

$Cco_i^M$ : custo de corte da variedade  $i$  (R\$.ha<sup>-1</sup>);

$Ct_{ij}^M$ : custo de transporte da variedade  $i$  plantada no talhão  $j$  (R\$.ha<sup>-1</sup>), calculado em (3.1);

$L_j$ : área do talhão  $j$ , em hectare.

A partir dos cálculos (3.2) e (3.3), é proposta a função objetivo do modelo que visa o menor custo possível no processo de colheita. Para a eficiência do modelo, deve-se



satisfazer as restrições de sacarose e de fibra da cana (recomendações da empresa para manter a qualidade da cana e a demanda de açúcar e álcool) e usar toda a área destinada para o plantio da cana (mecanizada e semi-mecanizada). Esse modelo é definido a seguir:

$$\text{Minimizar } CCT = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l C_{ij}^M X_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=l+1}^k C_{ij}^{SM} X_{ij} \quad (3.4)$$

$$\text{Sujeito à: } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k A_i L_j X_{ij} \geq T \bar{A} \quad (3.5)$$

$$T \bar{F}_i \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k F_i L_j X_{ij} \leq T \bar{F}_s \quad (3.6)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ij} = 1, \forall j \quad (3.7)$$

$$X_{ij} = 0 \text{ ou } 1, i = 1, 2, \dots, n \text{ e } j = 1, 2, \dots, k \quad (3.8)$$

$$\sum_{j=1}^k X_{ij} \leq M, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.9)$$

em que:

$CCT$ : custo do processo de colheita da cana de açúcar;

$i = 1, 2, \dots, n$  são os índices que representam as variedades;

$j = 1, 2, \dots, k$  são os índices que representam os talhões;

$n$ : número total de variedades de cana-de-açúcar;

$k$ : número total de talhões;

$l$ : número de talhões em que se considera o sistema mecanizado;

$k - l$ : número de talhões em que se considera o sistema semi-mecanizado;

$C_{ij}^M$ : custo da colheita e do transporte da cana de variedade  $i$  plantada no talhão  $j$  ( $j = 1, \dots, l$ ), no sistema mecanizado, calculado em (3.3);

$C_{ij}^{SM}$ : custo da colheita e do transporte da cana de variedade  $i$  plantada no talhão  $j$  ( $j = l + 1, \dots, k$ ), no sistema semi-mecanizado, calculado em (3.2);

$X_{ij}$ : variáveis de decisão, tais que,  $X_{ij} = 1$  implica que a cana de variedade  $i$  deve ser plantada no talhão  $j$  e em caso contrário  $X_{ij} = 0$ ;

$A_i$ : estimativa de produção de sacarose da variedade  $i$  (t/ha);

$L_j$ : área do talhão  $j$ , em hectare;

$\bar{A}$ : quantidade mínima estabelecida para a POL da cana;

$T$ : área total (ha) disponível para o plantio;

$F_i$ : estimativa do teor de fibra da variedade  $i$ ;

$\bar{F}_i$ : quantidade mínima estabelecida para a fibra da cana;

$\bar{F}_s$ : quantidade máxima estabelecida para a fibra da cana;

$M$ : número máximo que cada variedade  $i$  pode ser plantada nos  $k$  talhões.

A restrição (3.5) é limitada inferiormente e está relacionada à quantidade de saca-rose. A restrição canalizada (3.6) limita inferiormente e superiormente a quantidade de fibra das variedades selecionadas. A restrição (3.7) por sua vez, garante que apenas um tipo de variedade pode ser plantado em cada talhão. A restrição binária (3.8) define se uma variedade deve ser plantada ou não. A restrição (3.9), proposta inicialmente por Tolentino (2007), limita a quantidade que cada tipo de variedade pode ser plantada, e evita que o modelo definido em (3.4)-(3.8) selecione apenas uma variedade de cana-de-açúcar para o plantio. Essa restrição atende um critério estabelecido pelas usinas em plantar uma mesma variedade em no máximo 30% dos talhões, devido à proliferação de pragas, o que pode prejudicar a produção.

### 3.2 Modelo II – Minimização do custo de coleta da biomassa residual de cana-de-açúcar resultante da colheita em áreas mecanizáveis

Para a construção do modelo de minimização do custo da coleta da biomassa residual é necessário que se calcule o custo do aproveitamento do palhicho. Segundo Florentino (2006) e Tolentino (2007) têm-se os estágios realizados para o recolhimento: primeiramente, o palhicho é enleirado, em seguida é passado em uma máquina para compactação, depois é carregado no caminhão e finalmente transportado para o centro de processamento.

Assim, o custo de coleta do palhicho da cana-de-açúcar da variedade  $i$  plantada no talhão  $j$  ( $CC_{ij}$ ) é calculado da seguinte forma:

$$CC_{ij} = (C_i + CT_{ij})L_j \quad (3.10)$$

em que:

$C_i$ : custo para enleirar, compactar e carregar o caminhão com o palhicho da variedade  $i$ , em US\$.m<sup>-3</sup>, calculado por (3.11);

$CT_{ij}$ : custo para transportar o palhicho de um hectare de cana-de-açúcar da variedade  $i$  produzido no talhão  $j$ , em US\$.ha<sup>-1</sup>, calculado por (3.12);

$L_j$ : área do talhão  $j$ , em hectare.

$$C_i = \frac{C_{ecc}}{V_i} Q_i \quad (3.11)$$

$$CT_{ij} = \left( \frac{Q_i}{V_c} \right) D_j C_o P \quad (3.12)$$

em que:

$C_{ecc}$ : custo, por tonelada, para enleirar, compactar e carregar o caminhão com palhicho;  
 $V_i$ : volume por tonelada do palhicho da variedade  $i$  depois de compactada ( $m^3.t^{-1}$ );  
 $Q_i$ : estimativa de volume do palhicho produzido pela variedade  $i$  por hectare de cana-de-açúcar ( $m^3.ha^{-1}$ );  
 $V_c$ : volume disponível no caminhão ( $m^3$ );  
 $D_j$ : distância do talhão  $j$  do centro de processamento, em km.  
 $C_0$ : consumo de combustível do caminhão a ser usado no transporte ( $L.Km^{-1}$ );  
 $P$ : preço do combustível ( $US\$.L^{-1}$ ).

Dessa forma, o modelo definido por Florentino (2006) e Tolentino (2007) consiste em determinar quais das  $i$  variedades de cana-de-açúcar, ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) devem ser plantadas nos  $j$  talhões, ( $j = 1, 2, \dots, k$ ), de medida  $L_j$  (ha) e distância  $D_j$  (Km) do centro de produção, que ofereça o menor custo possível para o processo de transferência do palhicho do campo para o centro de processamento, atendendo as restrições de demanda de sacarose e fibra, área de plantio, e o plantio de apenas uma variedade de cana-de-açúcar por talhão. Este modelo é definido a seguir:

$$\text{Minimizar } CCR = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k CC_{ij} X_{ij} \quad (3.13)$$

Sujeito à: Restrições (3.5)-(3.9)

em que:

$CCR$ : custo do processo de coleta dos resíduos da cana de açúcar;

$CC_{ij}$ : custo de coleta do palhicho da cana de variedade  $i$  plantada no talhão  $j$ , calculada em (3.10).

As restrições (3.5)-(3.9) são definidas na Seção 3.1.

### **3.3 Modelo III – Maximização do balanço de energia para o aproveitamento do palhicho resultante da colheita em áreas mecanizáveis**

Analogamente, para a construção do modelo de maximização, calcula-se antes, o balanço de energia. De acordo com Florentino (2006) e Tolentino (2007), o balanço de energia ( $BE_{ij}$ ) para o aproveitamento do palhicho é dada pela equação a seguir:

$$BE_{ij} = EB_{ij} - (E_{ECij} + E_{Cij} + E_{Tij}) \quad (3.14)$$

em que:

$EB_{ij}$ : energia proveniente do palhicho da variedade  $i$  plantada no talhão  $j$ , em MJ, calculada por (3.15).

$E_{ECij}$ : energia gasta para enleirar e compactar o palhico da variedade  $i$  plantada no talhão  $j$  para a usina, calculado por (3.16);

$E_{Cij}$ : energia gasta para carregar o palhico da variedade  $i$  plantada no talhão  $j$  para a usina, calculado por (3.17);

$E_{Tij}$ : energia gasta para transportar o palhico da variedade  $i$  plantada no talhão  $j$  para a usina, calculado por (3.18);

$$EB_{ij} = EC_{Bi}P_{Bi}L_j \quad (3.15)$$

$$E_{ECij} = EC_{EC}L_jP_{Bi} \quad (3.16)$$

$$E_{Cij} = EC_C L_j P_{Bi} \quad (3.17)$$

$$E_{Tij} = EC_T D_j \frac{Q_i L_j}{V_c} \quad (3.18)$$

em que:

$EC_{Bi}$ : energia calorífica do palhico da variedade  $i$  (MJ.t<sup>-1</sup>);

$P_{Bi}$ : estimativa da quantidade de palhico da variedade  $i$  (t.ha<sup>-1</sup>);

$L_j$ : área (ha) do talhão  $j$ ;

$EC_{EC}$ : energia consumida pelas máquinas, em forma de combustível para enleirar e compactar o palhico por unidade de massa (MJ.t<sup>-1</sup>);

$EC_C$ : energia consumida pela máquina para coleta do palhico por unidade de massa (MJ.t<sup>-1</sup>);

$EC_T$ : energia consumida pelo caminhão em forma de combustível para o transporte do palhico, por quilômetro (MJ.Km<sup>-1</sup>);

$Q_i$ : estimativa do volume de cana da variedade  $i$  produzido por hectare de cana (m<sup>3</sup>.ha<sup>-1</sup>);

$V_c$ : capacidade de carga do caminhão (m<sup>3</sup>).

Assim, o modelo definido pelos autores Florentino (2006) e Tolentino (2007) consiste em determinar quais  $i$  variedades de cana-de-açúcar, ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), devem ser plantadas nos  $j$  talhões, ( $j = 1, 2, \dots, k$ ), de medida  $L_j$  (ha) e distância  $D_j$  (Km) do centro de produção, que produza o máximo balanço de energia no seu aproveitamento. Assim como o modelo anterior, este problema considera as restrições de demanda de sacarose e fibra de cana, uso total da área destinada ao plantio, e o plantio de apenas uma variedade de cana-de-açúcar por talhão. A seguir, o modelo é definido.

$$\text{Maximizar } BE = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k BE_{ij} X_{ij} \quad (3.19)$$

Sujeito à: Restrições (3.5)-(3.9)

em que:

$BE$ : balanço de energia para o aproveitamento de resíduos;

$BE_{ij}$ : cálculo do balanço de energia no aproveitamento do palhicho de cana produzido da variedade  $i$  no talhão  $j$ , calculados em (3.14).

As restrições (3.5)-(3.9) são definidas na Seção 3.1.

### **3.4 Modelo Multiobjetivo I – Minimização do custo de coleta e transporte e/ou maximização do balanço de energia da biomassa residual**

Este problema proposto por Florentino (2006), consiste na determinação de quais das  $i$  variedades de cana-de-açúcar, ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), devem ser plantadas nos  $j$  talhões, ( $j = 1, 2, \dots, k$ ), que ofereçam o menor custo de coleta e transporte dos resíduos da cana-de-açúcar, do talhão ao centro de processamento, e também ofereça o balanço de energia ótimo, simultaneamente. Além disso, como nos modelos apresentados anteriormente, é necessário satisfazer as restrições de sacarose e fibra, o uso total da área destinada ao plantio e o plantio de apenas uma variedade de cana-de-açúcar por talhão.

$$\text{Minimizar } \{CCR, (-1)BE\} \tag{3.20}$$

Sujeito à: Restrições (3.5)-(3.9)

em que:

$CCR$ : custo de coleta do palhicho, calculado em (3.13);

$BE$  : cálculo do balanço de energia para o aproveitamento do palhicho de cana, calculados em (3.19).

As restrições (3.5)-(3.9) são definidas na Seção 3.1.

### **3.5 Modelo Multiobjetivo II – Minimização do custo total e/ou maximização do balanço de energia total**

Com base nos Modelos I, II e III apresentados, é proposto nesse trabalho um novo modelo multiobjetivo que engloba estes problemas, cujos objetivos são minimizar o custo total, que abrange os custos de colheita da cana-de-açúcar e a coleta de resíduos, e maximizar o balanço de energia total do processo.

Este modelo consiste em determinar quais das  $i$  variedades de cana-de-açúcar, ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) devem ser plantadas nos  $j$  talhões, ( $j = 1, 2, \dots, k$ ), que investigue, simultaneamente, o mínimo custo total de colheita da cana-de-açúcar e coleta de resíduos e o máximo balanço de energia no aproveitamento de resíduos resultantes da colheita em áreas mecanizáveis, os quais têm objetivos conflitantes, levando em consideração restrições

como quantidade de produção de sacarose e fibra de cana-de-açúcar, uso total da área destinada ao plantio e o plantio de apenas uma variedade de cana-de-açúcar por talhão. O modelo matemático é definido por:

$$\text{Minimizar } \{CT, (-1)BET\} \quad (3.21)$$

Sujeito à: Restrições (3.5)-(3.9)

em que:

$CT$ : custo total gasto pela usina na colheita da cana-de-açúcar e na coleta de seus resíduos, considerando as áreas mecanizáveis e semi-mecanizáveis, que é expresso por:

$$CT = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l (C_{ij}^M + CC_{ij}^M) X_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=l+1}^k (C_{ij}^{SM} + CC_{ij}^{SM}) X_{ij} \quad (3.22)$$

tal que,

$C_{ij}^M$ : definido em (3.3);

$CC_{ij}^M$ : definido de forma equivalente em (3.10), porém considera apenas as áreas mecanizáveis;

$C_{ij}^{SM}$ : definido em (3.2);

$CC_{ij}^{SM}$ : definido de forma equivalente em (3.10), porém considera somente as áreas semi-mecanizáveis;

$BET$ : balanço de energia total no aproveitamento de resíduos da cana-de-açúcar, que é expresso por

$$BET = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l BE_{ij}^M X_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=l+1}^k BE_{ij}^{SM} X_{ij} \quad (3.23)$$

tal que,

$BE_{ij}^M$ : definido de forma equivalente em (3.14), porém considera apenas as áreas mecanizáveis;

$BE_{ij}^{SM}$ : definido de forma equivalente em (3.14), porém considera somente as áreas semi-mecanizáveis;

As restrições (3.5)-(3.9) são definidas no modelo de minimização do custo de coleta da biomassa residual da cana-de-açúcar, na Seção 3.1.

É importante ressaltar que o custo de coleta de resíduos e o balanço de energia a partir do aproveitamento de resíduos, são considerados apenas em áreas mecanizáveis, em que é feito a colheita da cana-de-açúcar crua, visto que esse tipo de procedimento gera resíduos com potencial calorífico, diferentemente das áreas semi-mecanizáveis, em que ocorre a queima prévia da cana-de-açúcar. Assim, nesse trabalho, os cálculos do custo de coleta de resíduos ( $CC_{ij}^{SM}$ ) e balanço de energia a partir do aproveitamento de resíduos

das áreas semi-mecanizáveis ( $BE_{ij}^{SM}$ ) serão considerados nulos, visto que a colheita nesta área é feita através da queima da cana-de-açúcar e não gera resíduos.

## 3.6 Estratégias para resolução dos modelos multiobjetivo

Um problema multiobjetivo em sua forma geral envolve a otimização simultânea de  $T$  funções objetivo  $f_1(x), \dots, f_T(x)$ . Assim, uma solução ótima global, que atenda a todos os objetivos, é utópica, visto que esses problemas têm objetivos conflitantes. Os Modelos Multiobjetivo I e II definidos na Seções 3.4 e 3.5, em que se pretende minimizar custo e maximizar o balanço de energia, inserem-se nesses problemas.

Assim, ao invés de uma única solução, obtém-se um conjunto de soluções, o que implica que uma avaliação deve ser feita pelo tomador de decisão para determinar a solução de seu interesse, a qual geralmente considera o número de soluções que ela domina. Essas soluções são denominadas eficientes ou não dominadas.

Considerando uma situação de minimização, pode-se dizer que uma solução  $x_1 \in X_0$  domina uma solução  $x_2 \in X_0$ , tal que  $X_0$  é o conjunto de soluções factíveis do problema de otimização multiobjetivo, se  $f_M(x_1) \leq f_M(x_2)$ ,  $M = 1, \dots, T$  e existe pelo menos um índice  $N$  tal que  $f_N(x_1) < f_N(x_2)$ ,  $N = 1, \dots, T$ . Neste caso, pode-se dizer também que  $x_2$  é dominado por  $x_1$ .

Dessa forma, o objetivo é encontrar um conjunto de soluções não-dominadas, ou soluções eficientes, conhecido por conjunto pareto-ótimo, que estejam o mais próximo possível da fronteira ótima de Pareto e seja o mais diverso possível, obtendo assim, uma variedade de soluções ótimas com diferentes valores para a função objetivo.

Algumas estratégias são propostas na literatura para investigar e determinar soluções eficientes para modelos multiobjetivos. Entre os métodos clássicos tem-se o método da soma ponderada, o método  $\varepsilon$ -restrito, método de Benson, método da métrica ponderada, método da função de utilidade, entre outros. Considerando os métodos heurísticos, tem-se colônia de formigas, procedimento aleatório adaptativo guloso (Greedy Randomized Adaptive Procedure – GRASP), algoritmos genéticos, busca tabu, simulated annealing, entre outros.

Neste trabalho são explorados dois métodos clássicos para a resolução dos modelos multiobjetivo apresentados: o método da soma ponderada e o método do  $\varepsilon$ -restrito. A utilização desses métodos como estratégia de resolução dos Modelos Multiobjetivo I e II, permite redefini-los através de problemas mono-objetivos, os quais serão definidos nas Seções 3.6.1 e 3.6.2.

Estes problemas permitem analisar as soluções eficientes do problema multiobjetivo utilizando o método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e *branch-and-bound*,

apresentado na Seção 4.3 deste trabalho. A aplicação destes problemas e os resultados serão apresentados no Capítulo 5.

### 3.6.1 Estratégia 1: Método da soma ponderada

No método da soma ponderada, definido em Deb (2004) e Miettinen (1999), a função multiobjetivo é tratada como uma função mono-objetivo, em que as funções objetivo são ponderadas de acordo com a variação de um parâmetro ou variável  $\alpha$ , que pode assumir valores entre 0 e 1. Essa estratégia busca selecionar os valores que determinam soluções não-dominadas ou eficientes para o problema, as quais minimizam a função objetivo balanceada.

A seguir, as equações (3.24) e (3.25), apresentadas em 3.6.1.1 e 3.6.1.2, definem as novas funções objetivo que consideram a soma ponderada das funções custo e energia.

#### 3.6.1.1 Problema mono-objetivo referente ao modelo multiobjetivo I

$$\text{Minimizar } (\alpha CCR + (1 - \alpha)BE); \alpha \in [0, 1] \quad (3.24)$$

Sujeito à: Restrições (3.5)-(3.9)

em que:

$CCR$ : calculado em (3.13);

$BE$  : calculado em (3.19).

As restrições (3.5)-(3.9) são definidas na Seção 3.1.

#### 3.6.1.2 Problema mono-objetivo referente ao modelo multiobjetivo II

$$\text{Minimizar } (\alpha CT - (1 - \alpha)BET); \alpha \in [0, 1] \quad (3.25)$$

Sujeito à: Restrições (3.5)-(3.9)

em que:

$CT$ : calculado em (3.22);

$BET$  : calculado em (3.23).

As restrições (3.5)-(3.9) são definidas na Seção 3.1.

Para cada valor de  $\alpha$  é calculado um valor ótimo para a função balanceada as funções custo e energia. Quando  $\alpha$  percorre o intervalo  $[0,1]$ , são obtidas as soluções eficientes e a curva de Pareto ótima, que relaciona os valores determinados de custo e energia, dependente do parâmetro  $\alpha$  selecionado. As soluções eficientes são obtidas como resultado da variação de  $\alpha$ , que pode ser informado ao produtor para seja feita a escolha que atenda o momento econômico da usina. É importante ressaltar que cada



solução obtida pela ponderação de  $\alpha$ , para os Problemas mono-objetivo 3.6.1.1 e 3.6.1.2, é denominada solução eficiente para os Modelos Multiobjetivo I e II, respectivamente, pois de fato não minimiza ao mesmo tempo as funções de custo de energia, já que essas têm objetivos conflitantes.

Entretanto, selecionar um parâmetro de ponderação  $\alpha$  apropriado também depende da escala dos coeficientes da função objetivo, desde que os coeficientes das funções custo e energia têm ordem de magnitude diferente. Assim, para resolver este problema, os coeficientes das funções objetivos devem ser normalizados, porque os coeficientes da função custo são da ordem de  $10^3$  (valor monetário) e os coeficientes da função energia são da ordem de  $10^6$  (valor em megajoules).

Desta forma, as funções objetivo (3.24) e (3.25), são substituídas por (3.26) e (3.27), respectivamente, em que os coeficientes das funções objetivo são redefinidos dividindo o vetores de coeficientes de custo e energia pelas suas respectivas norma infinito conforme é apresentado em 3.6.1.3 e 3.6.1.4.

### 3.6.1.3 Função objetivo normalizada do problema mono-objetivo referente ao modelo multiobjetivo I

$$\text{Minimizar } \left( \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \overline{CC}_{ij} X_{ij} + (1 - \alpha) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (-\overline{BE}_{ij}) X_{ij} \right); \alpha \in [0, 1] \quad (3.26)$$

em que:

$$\overline{CC}_{ij} = \frac{CC_{ij}}{CC_{ij}^{max}};$$

tal que  $CC_{ij}$  é definido em (3.10) e  $CC_{ij}^{max} = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}} \{CC_{ij}\}$ ;

$$\overline{BE}_{ij} = \frac{BE_{ij}}{BE_{ij}^{max}};$$

tal que  $BE_{ij}$  é definido em (3.14) e  $BE_{ij}^{max} = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}} \{BE_{ij}\}$ .

### 3.6.1.4 Função objetivo normatizada do problema mono-objetivo referente ao modelo multiobjetivo II

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } \alpha & \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l \overline{CT}_{ij}^M X_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=l+1}^k \overline{CT}_{ij}^{SM} X_{ij} \right) - \\ & - (1 - \alpha) \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l \overline{BET}_{ij}^M X_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=l+1}^k \overline{BET}_{ij}^{SM} X_{ij} \right); \end{aligned} \quad (3.27)$$

em que:

$$\overline{CT}_{ij}^M = \frac{CT_{ij}^M}{CT_{ij}^{max}} \text{ e } \overline{CT}_{ij}^{SM} = \frac{CT_{ij}^{SM}}{CT_{ij}^{max}};$$

tal que  $CT_{ij}^M = C_{ij}^M + CC_{ij}^M$ ,  $CT_{ij}^{SM} = C_{ij}^{SM} + CC_{ij}^{SM}$ ,  $CT_{ij}^{max} = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}} \{CT_{ij}^M, CT_{ij}^{SM}\}$ ,

$C_{ij}^M$  é definido em (3.3),  $CC_{ij}^M$  é definido de forma equivalente em (3.10), porém considera apenas as áreas mecanizáveis,  $C_{ij}^{SM}$  é definido em (3.2) e  $CC_{ij}^{SM}$  é definido de forma equivalente em (3.10), porém considera somente as áreas semi-mecanizáveis;

$$\overline{BET}_{ij}^M = \frac{BE_{ij}^M}{BET_{ij}^{max}} \text{ e } \overline{BET}_{ij}^{SM} = \frac{BE_{ij}^{SM}}{BET_{ij}^{max}};$$

tal que  $BET_{ij}^{max} = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}} \{BE_{ij}^M, BE_{ij}^{SM}\}$ ,  $BE_{ij}^M$  e  $BE_{ij}^{SM}$  são definidos de forma equivalente em (3.14), porém  $BE_{ij}^M$  considera apenas as áreas mecanizáveis e  $BE_{ij}^{SM}$  apenas áreas semi-mecanizáveis.

## 3.6.2 Estratégia 2: Método $\varepsilon$ -restrito

De acordo com Deb (2004) e Miettinen (1999), a ideia básica do Método  $\varepsilon$ -restrito é manter um dos objetivos como função e restringir os demais objetivos delimitados por valores especificados pelo usuário. Assim, o problema original é transformado em um problema mono-objetivo, com um aumento no número de restrições que, dependendo do problema pode mudar o conjunto de restrições de lineares para não-lineares, aumentando a complexidade do mesmo. Desde que, os modelos multiobjetivo I e II, investigados nesse trabalho, só operam com funções objetivo lineares, então a natureza das restrições não será alterada, ou seja, as restrições serão acrescentadas, mas continuarão sendo lineares.

Nesse trabalho, os Modelos Multiobjetivo I e II são transformados em quatro problemas mono-objetivos, definidos com a utilização do método do  $\varepsilon$ -restrito, os quais são apresentados nas seções 3.6.2.1 e 3.6.2.3, quando considera a função custo como função objetivo e a função balanço de energia como uma restrição, bem como nas seções 3.6.2.2

e 3.6.2.4, em que a função objetivo é a de balanço de energia e a função custo passa a ser uma restrição do problema. Esses problemas são vistos a seguir:

### 3.6.2.1 Problema mono-objetivo I referente ao modelo multiobjetivo I

$$\text{Minimizar } CCR \quad (3.28)$$

Sujeito à: Restrições (3.5)-(3.9)

$$BE \geq \varepsilon \quad (3.29)$$

em que:

$CCR$ : calculado em (3.13);

$BE$  : calculado em (3.19).

As restrições (3.5)-(3.9) são definidas na Seção 3.1.

Nessa estratégia,  $\varepsilon$  representa o valor mínimo estabelecido para o balanço de energia na restrição (3.29). Assim, o problema consiste em determinar qual variedade de cana-de-açúcar deve ser plantada de modo a obter o mínimo custo de coleta e transporte dos resíduos da cana-de-açúcar, respeitando as mesmas restrições anteriores (3.5)-(3.9), juntamente com a restrição (3.29).

### 3.6.2.2 Problema mono-objetivo II referente ao modelo multiobjetivo I

$$\text{Maximizar } BE \quad (3.30)$$

Sujeito à: Restrições (3.5)-(3.9)

$$CCR \leq \varepsilon \quad (3.31)$$

em que:

$CCR$ : calculado em (3.13);

$BE$  : calculado em (3.19).

As restrições (3.5)-(3.9) são definidas na Seção 3.1.

O problema (3.30) tem por objetivo determinar qual variedade plantar maximizando o balanço de energia para o aproveitamento de resíduos. Vinculada às restrições (3.5)-(3.9), está a restrição (3.28), que limita o custo de coleta e transporte dos resíduos da cana-de-açúcar, tal que  $\varepsilon$  é o custo máximo estabelecido.

### 3.6.2.3 Problema mono-objetivo I referente ao modelo multiobjetivo II

$$\text{Minimizar } CT \quad (3.32)$$

Sujeito à: Restrições (3.5)-(3.9)

$$BET \geq \varepsilon \quad (3.33)$$

em que:

$CT$ : calculado em (3.22);

$BET$  : calculado em (3.23).

As restrições (3.5)-(3.9) são definidas na Seção 3.1.

Nesse problema, pretende-se obter o mínimo custo total, de modo que as restrições (3.5)-(3.9) e (3.33) sejam respeitadas. Tem-se que  $\varepsilon$  representa o valor mínimo estabelecido para o balanço de energia total na restrição (3.33).

### 3.6.2.4 Problema mono-objetivo II referente ao modelo multiobjetivo II

$$\text{Maximizar } BET \quad (3.34)$$

Sujeito à: Restrições (3.5)-(3.9)

$$CT \leq \varepsilon \quad (3.35)$$

em que:

$CT$ : calculado em (3.22);

$BET$  : calculado em (3.23).

As restrições (3.5)-(3.9) são definidas na Seção 3.1. A restrição (3.35) é limitada por  $\varepsilon$ , que representa o valor máximo para o custo total. Dessa forma, o problema (3.34), consiste em determinar qual variedade de cana-de-açúcar plantar, de modo a obter máximo balanço de energia total, respeitando as restrições (3.5)-(3.9) e (3.35).

A resolução desses problemas será feita através do método híbrido envolvendo os métodos predictor-corretor primal-dual de pontos interiores e *branch-and-bound* (PDBB) que é delineado na próxima seção com a seguinte observação. Os resultados a serem investigados para os Modelos Multiobjetivo I e II, estarão relacionados diretamente com a solução dos Problemas mono-objetivo 3.6.2.1 e 3.6.2.3, considerando, nesses casos, que a usina está interessada em diminuir o custo de coleta e colheita no processo operacional de produção. Obviamente, os outros Problemas mono-objetivo definidos em 3.6.2.2 e 3.6.2.4, se o interesse maior da usina é gerar mais energia para comercializá-la no mercado

de energia brasileiro, também podem ser solucionados pelo método PDBB através da estratégia do  $\varepsilon$ -restrito.

## Capítulo 4

# Métodos híbridos de pontos interiores e programação inteira 0-1

A cultura de cana-de-açúcar ocupa uma área muito vasta no Brasil e, para um bom funcionamento, depende de previsões de produções agrícola, residual e energética cada vez mais precisas. Essas previsões podem ser melhoradas explorando-se os métodos de pontos interiores, que têm sido muito utilizados para solucionar problemas de programação matemática linear, não-linear e inteira, desde a década de 80, quando Karmarkar publicou o método das transformações projetivas (Karmarkar, 1984).

Entre os métodos variantes deste, os que apresentam o melhor desempenho computacional são aqueles inseridos na metodologia primal-dual de pontos interiores, muito explorados por Fang e Puthenpura (1993), e inicialmente investigados por Monteiro et al. (1990) e Kojima et al. (1989), os quais demonstraram a complexidade do tempo polinomial, e exploraram a função potencial, que é uma função primal-dual variante da barreira logarítmica.

Inserido nessa metodologia, tem-se o procedimento do tipo previsor-corretor, o qual foi inicialmente definido por Mehrotra e Sun (1990) e implementado por Lustig et al. (1995), em que são determinadas direções variantes do método primal-afim de pontos interiores no passo previsor, e as soluções obtidas são centralizadas a partir de penalizações do tipo barreira logarítmica no passo corretor. Visando atenuar o esforço computacional dessa estratégia, Wu et al. (1994) propuseram utilizar o método de Newton e aproximantes de primeira ordem para determinar as direções e a solução aproximada no passo previsor, ainda sem considerar o parâmetro de barreira logarítmica, e então, melhorar as soluções obtidas considerando as aproximações de segunda ordem e checar a convergência do método no passo corretor.

Nos últimos anos, esses métodos tem sido amplamente estudados nas mais diversas áreas do conhecimento, abrangendo tipos de problemas variados.

Probst e Oliveira (2013) utilizam os métodos de pontos interiores de trajetória

central e preditor-corretor para a aplicação ao problema de minimização das perdas na geração e transmissão do pré-despacho DC de um sistema de potência hidrotérmico. A implementação dos métodos de pontos interiores é feita em MATLAB e testada em estudos de casos com sistemas IEEE.

Pinheiro (2012) apresenta o método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores, com barreira logarítmica modificada e estratégia de ajuste cúbico e o método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores, com barreira logarítmica modificada, com estratégias de ajuste cúbico e de convergência global, ambos implementados em MATLAB e aplicados à problemas de fluxo de potencia ótimo (FPO), referentes à engenharia elétrica.

Stanzani (2012) propõe o método primal-dual previsor-corretor de pontos interiores para programação quadrática, com restrições lineares e quadráticas e variáveis canalizadas, implementado em linguagem de programação C++, para a resolução de problemas multiobjetivo de despacho econômico e ambiental, encontrados na engenharia elétrica. Neste trabalho também foi explorado o procedimento previsor-corretor com uma estratégia de barreira modificada para as restrições quadráticas de desigualdade.

Carvalho e Oliveira (2012) utilizam métodos primal-duais de pontos interiores para minimizar os custos e perdas na geração e transmissão do fluxo de potência ativa em uma hidrelétrica, com manutenção preventiva programadas, durante um período de vinte e quatro horas. A implementação do método foi realizada utilizando o *software* MATLAB. Os autores exploraram a matriz resultante do sistema, obtido pelo método, a fim de obter implementações mais eficientes para o problema de pré-despacho.

Cantane et al. (2012) apresentam os métodos barreira logarítmica e barreira logarítmica preditor corretor com modificações nos pontos iniciais, no cálculo dos resíduos e direções para que estes sejam aplicados ao problema de regressão pela norma  $L_p$ . Estes métodos foram implementados em MATLAB e em linguagem de programação C.

Martins (2011) utiliza o aplicativo linprog do *software* MATLAB, que usa o método Simplex, e uma implementação do método primal-dual de pontos interiores para a resolução de um problema de planejamento ótimo para o tratamento do câncer por radioterapia.

Borges et al. (2011), utilizando o método primal-dual de pontos interiores, resolvem um problema de pré-despacho de geração de potência ativa e reativa no qual a função objetivo engloba minimização dos custos de usinas térmicas e minimização das perdas elétricas na transmissão, considerando a linearização dos limites de transmissão e a representação do fasor tensão em coordenadas retangulares.

Homem (2010) desenvolveu um método híbrido envolvendo os métodos previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e *branch-and-bound* para a resolução de modelos matemáticos de minimização de custo de coleta e transporte e/ou maximização do balanço de energia da biomassa residual.

Souza (2010) apresenta a investigação e implementação de métodos primal-dual previsor-corretor de pontos interiores com a estratégia de busca unidimensional e a aplicação destes em problemas de despacho econômico e ambiental.

Oliveira et al. (2009) propõem a resolução do problema não linear de otimização associado ao cálculo da energia firme, o que permite a representação da variação da produtividade das usinas, através do método primal-dual de pontos interiores.

Dessa forma, propõe-se nesse trabalho o uso do método primal-dual com procedimento previsor-corretor, baseando-se em Balbo et al. (2012), Bazarara et al. (1979), Wu et al. (1994), Granville (1994) e Wright (1997), apresentado na Seção 4.1, o qual é variante daquele proposto por Mehrotra (1992) diferenciando-se deste por já utilizar no passo previsor informações do parâmetro de barreira, o que melhora a eficiência do método por evitar que os pontos definidos por este, aproximem-se da fronteira do problema, podendo, inclusive, inviabilizá-los. Enquanto que, no passo corretor, este reajusta as direções com informações dos aproximantes de segunda ordem referentes às condições de complementaridade, possibilitando que, o procedimento de centragem do passo previsor mais o ajuste feito no passo corretor, acelerem a convergência do processo para a determinação da solução ótima do problema contínuo.

Além disso, os modelos investigados, relativos ao processo envolvido na colheita da cana-de-açúcar e ao aproveitamento de sua biomassa residual, consistem em determinar se uma variedade é plantada ou não. Este problema enquadra-se como um problema de programação inteira binária ou programação inteira zero-um. A busca de soluções para este tipo de problema, com grande número de variáveis e restrições, é de difícil resolução e nem sempre o sucesso na determinação de soluções é garantido, principalmente em casos multiobjetivos. Nesse trabalho, o método de programação inteira utilizado foi o método *branch-and-bound*, visto na Seção 4.2, baseando-se em Homem (2010), Pinto (1999) e Borchers e Mitchell (1992).

Assim, desenvolveu-se um procedimento híbrido em que o método *branch-and-bound*, é adaptado ao método primal-dual de pontos interiores, apresentado na Seção 4.3. Esse método foi implementado para a obtenção de resultados, os quais são apresentados no Capítulo 5. A ideia básica desse método híbrido é inicialmente realizar a busca da solução ótima relaxada do problema utilizando o método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e em seguida, utilizar o método *branch-and-bound* para a geração de soluções inteiras, de modo a obter a solução ótima do problema.

O método desenvolvido é um variante do apresentado em Homem (2010) com algumas modificações que permitiram melhorias em seu desempenho computacional, e resultados obtidos. Dentre as modificações destacam-se:

- i. a mudança na ordem de execução dos passos previsor e corretor. Em Homem (2010), o passo previsor é realizado em iterações pares, e o passo corretor ocorre em itera-



ções ímpares, enquanto que, nesse trabalho, os procedimentos previsor e corretor são efetuados em uma mesma iteração.

- ii. a forma de utilizar o teste de integralidade proposto por Borchers e Mitchell (1992), que é uma heurística que avalia se alguma variável do tipo 0-1 está convergindo para uma fracionária. Homem (2010) utiliza esse teste juntamente com um teste que verifica se a solução dual está se aproximando da solução primal, ou seja, se o gap de dualidade está tendendo para zero. Esta combinação é a forma proposta por Borchers e Mitchell (1992). Nesse trabalho, o teste de integralidade citado é utilizado em conjunto aos critérios de otimalidade do método previsor-corretor primal-dual, em que se verifica a factibilidade primal, a factibilidade dual e a complementaridade. Procurou-se utilizar o teste dessa maneira, de modo a evitar que o método previsor-corretor primal-dual fosse interrompido antecipadamente, e gerasse mais ramificações que o necessário. Dessa forma, o número de iterações no método *branch-and-bound* é reduzido, melhorando o desempenho do método híbrido.
- iii. a atualização do parâmetro de barreira. Em ambos trabalhos, o parâmetro de barreira é atualizado de acordo Wright (1997), porém nesse trabalho utilizou-se um acelerador de convergência, baseado no mesmo autor.

Além disso, em ambos os trabalhos, o parâmetro de barreira é considerado no passo previsor, desde que este influencia diretamente na direção de centragem do método, cuja força de centragem de fato determina pontos no interior da região factível, já que a utilização da direção primal-afim pura, que consiste na projeção do vetor gradiente escalado com sentido oposto no núcleo da matriz do sistema, gera pontos muito próximos à fronteira da região viável e pode inclusive, gerar pontos infactíveis.

Uma outra vantagem de se utilizar o parâmetro de barreira no passo previsor seria a possibilidade de se inicializar o método com pontos infactíveis e utilizar o método da barreira modificada como estratégia de resolução, desde que esse procedimento relaxa as variáveis positivas do problema em função do parâmetro de barreira ( $z \geq 0$  é relaxado para  $z \geq -\mu$ ,  $\mu \geq 0$ ) e dessa forma o parâmetro de barreira necessariamente deve ser considerado no passo previsor do método para auxiliar na definição de uma sequência de pontos viáveis para problema. Esse procedimento não foi realizado nesse trabalho.

## 4.1 Método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores

Para o desenvolvimento desse método, considera-se o seguinte problema de programação linear (PPL) primal, com restrições lineares e variáveis canalizadas:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } c^T x \\ & \text{Sujeito a: } \begin{cases} Ax = b \\ \bar{l} \leq x \leq \bar{u} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1)$$

em que  $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  tal que  $A$  tem posto  $m$ ,  $b \in \mathfrak{R}^m$ ,  $x, c, \bar{u}, \bar{l} \in \mathfrak{R}^n$ .

Reescrevendo o PPL (4.1), tem-se:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } c^T x \\ & \text{Sujeito a: } \begin{cases} Ax = b \\ x \geq \bar{l} \\ x \leq \bar{u} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2)$$

A partir de (4.2), obtém-se o problema (4.3):

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } c^T x \\ & \text{Sujeito a: } \begin{cases} Ax = b \\ -x \leq -\bar{l} \\ x \leq \bar{u} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Tem-se então o seguinte problema equivalente:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } c^T x \\ & \text{Sujeito a: } \begin{cases} Ax = b \\ -x + \bar{l} \leq 0 \\ x - \bar{u} \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Colocando o problema (4.4) em seu formato padrão, tem-se:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } c^T x \\ & \text{Sujeito a: } \begin{cases} Ax = b \\ -x + \bar{l} + r = 0 \\ x - \bar{u} + z = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.5)$$

em que  $r, z \in \mathfrak{R}^n$  são as variáveis de folga, respectivamente para o PPL (4.5).

De acordo com Souza (2010), as restrições de igualdade reduzem a região de busca do problema. Dessa forma, a solução proposta por Lagrange é determinar um novo problema irrestrito, de modo que a função objetivo do PPL (4.5) seja penalizada através dos multiplicadores de lagrange  $w$ ,  $s$  e  $y$ , associados às restrições de igualdade do problema. As condições de primeira ordem, apresentadas de (4.8) a (4.13), garantem que as restri-

ções sejam satisfeitas na solução ótima, e assim, a solução ótima da função lagrangiana corresponde ao ótimo do problema original, desde que este problema seja limitado e tenha uma solução finita.

Além disso, a função objetivo do problema (4.5) é penalizada através do produto de funções barreiras logarítmicas por um parâmetro de barreira  $\mu > 0$ , que condiciona as variáveis de folga do problema original a serem estritamente positivas, ou seja,  $r > 0$  e  $z > 0$ , garantindo que as soluções permaneçam no interior da região viável do problema original. Assim, à medida que  $r$  e  $z$  tendem a zero e as soluções do problema aproximam-se da fronteira da região factível, as funções barreiras tendem ao infinito. Desta forma, o parâmetro de barreira deve tender a zero assintoticamente mais rápido do que as funções barreira logarítmica tenderem ao infinito, de tal forma que o produto destas, tenda para zero e a solução da função lagrangiana barreira logarítmica convirja para a solução do problema original.

Dessa forma, o problema de programação linear (PPL) com restrições lineares de igualdade e variáveis canalizadas (4.5), é redefinido através de um PPNL primal-dual irrestrito que é expresso a partir da função lagrangiana barreira logarítmica  $L(x, w, z, r, y, s)$ :

$$L(x, w, z, r, y, s) = c^T x + w^T (b - Ax) + s^T (-x + \bar{l} + r) + y^T (x - \bar{u} + z) - \mu \sum_{i=1}^n \ln(z_i) - \mu \sum_{i=1}^n \ln(r_i) \quad (4.6)$$

em que  $z > 0$  e  $r > 0$  são as variáveis primais,  $w \in \Re^m$ ,  $y, s \in \Re^n$  são as variáveis duais do problema associado às restrições de igualdade em (4.5), tal que  $y \geq 0$  e  $s \geq 0$ , e  $\mu > 0$  é o parâmetro de barreira.

Ao problema irrestrito (4.6) são aplicadas as condições necessárias de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker (KKT):

$$\nabla L(x, w, z, r, y, s) = 0 \quad (4.7)$$

As componentes do vetor  $\nabla L$  são derivadas parciais de primeira ordem sobre todas as variáveis da função  $L$ , assim tem-se:

$$\nabla L_x = 0 \Leftrightarrow c - A^T w + y - s = 0 \quad (4.8)$$

$$\nabla L_w = 0 \Leftrightarrow b - Ax = 0 \quad (4.9)$$

$$\nabla L_y = 0 \Leftrightarrow x - \bar{u} + z = 0 \quad (4.10)$$

$$\nabla L_s = 0 \Leftrightarrow -x + \bar{l} + r = 0 \quad (4.11)$$

$$\nabla L_z = 0 \Leftrightarrow y - \mu Z^{-1} e = 0 \quad (4.12)$$

$$\nabla L_r = 0 \Leftrightarrow s - \mu R^{-1}e = 0 \quad (4.13)$$

em que  $Z, Y, R$  e  $S$  são matrizes diagonais, cujos elementos diagonais são  $z_i, y_i, r_i$  e  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , respectivamente;  $e = (1, \dots, 1)^T$  e  $\mu$  é o parâmetro de barreira.

Dessa forma, as condições (4.8)-(4.13) são representadas pelo seguinte sistema não-linear de equações:

$$A^T w - y + s - c = 0 \quad (4.14)$$

$$Ax - b = 0 \quad (4.15)$$

$$x - \bar{u} + z = 0 \quad (4.16)$$

$$-x + \bar{l} + r = 0 \quad (4.17)$$

$$ZYe - \mu e = 0 \quad (4.18)$$

$$RSe - \mu e = 0 \quad (4.19)$$

Considerando apenas variáveis limitadas superiormente, por valores maiores que zero, ou seja, o limite inferior é tal que  $\bar{l} = 0$ , dessa forma, a condição (4.17) torna-se:

$$x = r \geq 0 \quad (4.20)$$

Assim, a condição (4.19) é substituída por:

$$XSe - \mu e = 0 \quad (4.21)$$

em que  $X$  é a matriz diagonal, cujos elementos diagonais são  $x_i$ .

Desde que (4.21) deve ser satisfeita, a equação (4.20) pode ser suprimida do sistema de equações (4.14)-(4.19). Com essas considerações, as equações (4.14)-(4.16), (4.18) e (4.21) são reescritas da seguinte forma equivalente:

$$F(x, w, z, y, s) = \begin{pmatrix} A^T w - y + s - c \\ Ax - b \\ x + z - \bar{u} \\ ZYe - \mu e \\ XSe - \mu e \end{pmatrix} = 0 \quad (4.22)$$

O sistema (4.22) é considerado nas seções seguintes para definir passos importantes que compõem o método previsor-corretor primal dual de pontos interiores proposto, tais como as direções de busca, comprimento do passo, critério de parada e atualização do parâmetro de barreira.

Com o objetivo de simplificar notações, define-se o conjunto de soluções  $\Omega^0$ , que descreve os pontos interiores relativos ao sistema (4.22):

$$\Omega^0 = \{(x, w, z, y, s) \mid A^T w + s - y = c, Ax = b, x + z = \bar{u}, (x, z, y, s) > 0\} \quad (4.23)$$

### 4.1.1 Direções de busca

As direções de busca utilizadas no método híbrido proposto são determinadas nessa seção. Nesse método, os procedimentos predictor e corretor são realizadas em um mesmo passo. Inicialmente, as direções de busca para o procedimento predictor são calculadas na Seção 4.1.1.1, em seguida, as direções de busca são atualizadas no procedimento corretor, calculadas na Seção 4.1.1.2.

#### 4.1.1.1 Direções de busca do passo predictor

Supondo que, em uma iteração  $k$ , um ponto  $h^k = (x^k, w^k, z^k, y^k, s^k)^T$  satisfaz as condições de KKT expressas por (4.14)-(4.16), (4.18) e (4.21). A definição de um novo ponto  $h^{k+1}$  depende dos cálculos da direção de busca e do comprimento do passo nesta direção.

Desconsiderando o comprimento do passo numa análise inicial, tem-se que em uma iteração  $k + 1$ , o novo ponto  $h^{k+1}$  é definido por:

$$h^{k+1} = \begin{pmatrix} x^{k+1} \\ w^{k+1} \\ z^{k+1} \\ y^{k+1} \\ s^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^k + d_x^k \\ w^k + d_w^k \\ z^k + d_z^k \\ y^k + d_y^k \\ s^k + d_s^k \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

Assim, para obter o novo ponto  $h^{k+1}$ , é necessário determinar a direção  $d^{(k)} = (d_x^k, d_w^k, d_z^k, d_y^k, d_s^k)^T$ . Utilizando uma aproximação linear por Série de Taylor para avaliar  $L(x, w, z, y, s)$ , obtém-se a seguinte aproximação:

$$F(h^{(k)} + d^{(k)}) \approx F(h^{(k)}) + J(h^{(k)})d^{(k)} \quad (4.25)$$

em que:

$J(h^{(k)})$  é a matriz Jacobiana, cujo  $(i, j)$ -ésimo elemento é dado por:

$$\left[ \frac{\partial F_i(h)}{\partial h_j} \right]_{h=h^k} \quad (4.26)$$

Seguindo-se os passos do método de Newton, a direção  $d^{(k)}$  pode ser obtida resolvendo-

se o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} F(h^{(k)}) + J(h^{(k)})d^{(k)} &= 0 \\ J(h^{(k)})d^{(k)} &= -F(h^{(k)}) \end{aligned} \quad (4.27)$$

O sistema (4.27) é equivalente à (4.28), como segue:

$$\begin{pmatrix} 0 & A^T & 0 & -I & I \\ A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y & Z & 0 \\ S & 0 & 0 & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_x^k \\ d_w^k \\ d_z^k \\ d_y^k \\ d_s^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^k \\ t_1^k \\ t_2^k \\ q_1^k \\ q_2^k \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

em que:

$$g^k = c - A^T w^k - s^k + y^k \quad (4.29)$$

$$t_1^k = b - Ax^k \quad (4.30)$$

$$t_2^k = \bar{u} - x^k - z^k \quad (4.31)$$

$$q_1^k = \mu_k e - Z_k Y_k e \quad (4.32)$$

$$q_2^k = \mu_k e - X_k S_k e \quad (4.33)$$

tal que  $g^k$  é o resíduo dual,  $t_1^k$  e  $t_2^k$  são os resíduos primais,  $q_1^k$  e  $q_2^k$  são as folgas complementares e compõem o vetor de resíduos  $-F(h^{(k)})$ , em (4.28), gerados pela aproximação linear por série de Taylor, para o passo previsor.

As operações em (4.28), resultam nas equações (4.34)-(4.38), como segue:

$$A^T d_w^k + d_s^k - d_y^k = g^k \quad (4.34)$$

$$A d_x^k = t_1^k \quad (4.35)$$

$$d_x^k + d_z^k = t_2^k \quad (4.36)$$

$$Y_k d_z^k + Z_k d_y^k = q_1^k \quad (4.37)$$

$$S_k d_x^k + X_k d_s^k = q_2^k \quad (4.38)$$

As seguintes direções (4.39), (4.40) e (4.41) são obtidas diretamente de (4.36), (4.37) e (4.38), respectivamente.

$$d_z^k = -d_x^k + t_2^k \quad (4.39)$$

$$d_y^k = Z_k^{-1} (q_1^k - Y_k d_z^k) \quad (4.40)$$

$$d_s^k = X_k^{-1} (q_2^k - S_k d_x^k) \quad (4.41)$$

Substituindo os valores de (4.40) e (4.41) na equação (4.34), tem-se que:

$$A^T d_w^k + X_k^{-1} (q_2^k - S_k d_x^k) - Z_k^{-1} (q_1^k - Y_k d_z^k) = g^k \quad (4.42)$$

Em seguida, obtém-se (4.43), a partir da substituição de (4.39) em (4.42).

$$\begin{aligned} A^T d_w^k + X_k^{-1} q_2^k - X_k^{-1} S_k d_x^k - Z_k^{-1} q_1^k + Z_k^{-1} Y_k (-d_x^k + t_2^k) &= g^k \\ A^T d_w^k + X_k^{-1} q_2^k - Z_k^{-1} q_1^k - X_k^{-1} S_k d_x^k - Z_k^{-1} Y_k d_x^k + Z_k^{-1} Y_k t_2^k &= g^k \\ A^T d_w^k + X_k^{-1} q_2^k + Z_k^{-1} (Y_k t_2^k - q_1^k) - (X_k^{-1} S_k + Z_k^{-1} Y_k) d_x^k &= g^k \end{aligned} \quad (4.43)$$

A matriz aplicada ao vetor  $d_x^k$ , conhecida por matriz dual normal, é simétrica e definida positiva. Esta é denotada por  $\theta_k^{-1}$ , como segue:

$$\theta_k^{-1} = (X_k^{-1} S_k + Z_k^{-1} Y_k) \quad (4.44)$$

Os termos restantes, exceto  $A^T d_w^k$ , são armazenados no vetor residual  $\pi^k$ :

$$\pi^k = Z_k^{-1} (q_1^k - Y_k t_2^k) + X_k^{-1} q_2^k \quad (4.45)$$

Desta forma, a partir de (4.44) e (4.45), a equação (4.43) pode ser reescrita como:

$$A^T d_w^k = g^k - \pi^k + \theta_k^{-1} d_x^k \quad (4.46)$$

Pré-multiplicando a matriz  $\theta_k$  à esquerda dos termos da equação (4.46), tem-se:

$$\theta_k A^T d_w^k = \theta_k g^k - \theta_k \pi^k + d_x^k \quad (4.47)$$

Como  $\theta_k$  é uma matriz simétrica e definida positiva, se a matriz  $A$  for aplicada à esquerda da equação (4.47), a matriz  $A\theta_k A^T$  é obtida em (4.48), a qual também é simétrica e definida positiva, e possibilita isolar  $d_w^k$ :

$$\begin{aligned} A\theta_k A^T d_w^k &= A\theta_k (g^k - \pi^k) + A d_x^k \\ d_w^k &= (A\theta_k A^T)^{-1} [A\theta_k (g^k - \pi^k) + A d_x^k] \end{aligned} \quad (4.48)$$

Substituindo (4.35) em (4.48), obtém-se a direção  $d_w^k$ :

$$d_w^k = (A\theta_k A^T)^{-1} [A\theta_k (g^k + \pi^k) + t_1^k] \quad (4.49)$$

Desde que a matriz  $A\theta_k A^T$  seja simétrica e definida positiva em (4.49),  $d_w^k$  pode ser determinado pelo uso da decomposição de Cholesky. Assim, é possível obter a direção  $d_x^k$ ,

quando este é isolado em (4.47):

$$d_x^k = \theta_k (A^T d_w^k - g^k - \pi^k) \quad (4.50)$$

Uma vez calculada a direção  $d_x^k$ , as demais componentes  $d_z^k$ ,  $d_y^k$  e  $d_s^k$ , apresentadas em (4.39), (4.40) e (4.41) respectivamente, são facilmente calculadas, visto que ambas dependem desta direção.

#### 4.1.1.2 Direções de busca do passo corretor

Através das direções determinadas no passo previsor, na iteração corrente, o método deve calcular as direções do passo corretor, baseadas nos termos de segunda ordem desprezados no passo previsor para as equações de complementaridade definidas em (4.32) e (4.33).

Analogamente à Seção anterior 4.1.1.1, o vetor de direções de busca para o procedimento corretor, denominado  $\tilde{d}^{(k)}$ , é determinado resolvendo o seguinte sistema linear:

$$J(h^{(k)}) \tilde{d}^{(k)} = -\tilde{F}(h^{(k)}) \quad (4.51)$$

em que  $\tilde{F}(h^{(k)})$  é obtida considerando a aproximação dos termos de segunda ordem nos resíduos relacionados às condições de complementariedade,  $q_1^k$  e  $q_2^k$ , calculados no passo previsor em (4.32) e (4.33).

Dessa forma, tem-se o sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & A^T & 0 & -I & I \\ A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y & Z & 0 \\ S & 0 & 0 & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{d}_x^k \\ \tilde{d}_w^k \\ \tilde{d}_z^k \\ \tilde{d}_y^k \\ \tilde{d}_s^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^k \\ t_1^k \\ t_2^k \\ \tilde{q}_1^k \\ \tilde{q}_2^k \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

em que  $g^k$ ,  $t_1^k$  e  $t_2^k$  são definidos em (4.29), (4.30) e (4.31), na Seção 4.1.1.1,

$$\tilde{q}_1^k = \mu_k e - Z_k Y_k e - D_z^k D_y^k e \quad (4.53)$$

$$\tilde{q}_2^k = \mu_k e - X_k S_k e - D_x^k D_s^k e \quad (4.54)$$

são os resíduos gerados pela aproximação de segunda ordem, com  $D_x^k$ ,  $D_z^k$ ,  $D_y^k$  e  $D_s^k$ , as quais são matrizes, cujos componentes diagonais são  $(d_x^k)_i$ ,  $(d_z^k)_i$ ,  $(d_y^k)_i$  e  $(d_s^k)_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , respectivamente.

No procedimento corretor, as direções  $d_x^k$ ,  $d_z^k$ ,  $d_y^k$  e  $d_s^k$  são utilizadas para redefinir os resíduos  $\tilde{q}_1^k$  e  $\tilde{q}_2^k$  em (4.53) e (4.54). Assim, as novas direções  $(\tilde{d}_x^k, \tilde{d}_z^k, \tilde{d}_w^k, \tilde{d}_s^k, \tilde{d}_y^k)$  podem ser calculadas usando os mesmos passos utilizados para determinar as direções no passo



previsor, na Seção 4.1.1.1, obtendo as seguintes equações:

$$\tilde{d}_w^k = (A\theta_k A^T)^{-1} [A\theta_k (g^k + \tilde{\pi}^k) + t_1^k] \quad (4.55)$$

$$\tilde{d}_x^k = \theta_k \left( A^T \tilde{d}_w^k - g^k - \tilde{\pi}^k \right) \quad (4.56)$$

$$\tilde{d}_z^k = -\tilde{d}_x^k + t_2^k \quad (4.57)$$

$$\tilde{d}_y^k = Z_k^{-1} \left( \tilde{q}_1^k - Y_k \tilde{d}_z^k \right) \quad (4.58)$$

$$\tilde{d}_s^k = X_k^{-1} \left( \tilde{q}_2^k - S_k \tilde{d}_x^k \right) \quad (4.59)$$

em que  $\theta_k = (X_k^{-1} S_k + Z_k^{-1} Y_k)^{-1}$  conforme definido em (4.44) e

$$\tilde{\pi}^k = Z_k^{-1} (\tilde{q}_1^k - Y_k f^k) + X_k^{-1} \tilde{q}_2^k \quad (4.60)$$

#### 4.1.2 Comprimento do passo

De acordo com Bazaraa et al. (1979), depois de determinar as direções, o comprimento do passo nesta direção, em busca de um novo ponto  $(x^{k+1}, w^{k+1}, z^{k+1}, y^{k+1}, s^{k+1})$ , é calculado como descrito abaixo:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \alpha_k^P \tilde{d}_x^k \\ z^{k+1} &= z^k + \alpha_k^P \tilde{d}_z^k \\ w^{k+1} &= w^k + \alpha_k^D \tilde{d}_w^k \\ y^{k+1} &= y^k + \alpha_k^D \tilde{d}_y^k \\ s^{k+1} &= s^k + \alpha_k^D \tilde{d}_s^k \end{aligned} \quad (4.61)$$

em que  $\alpha_k^P$  é o comprimento do passo primal e  $\alpha_k^D$  é o comprimento do passo dual, os quais são especificados a seguir, segundo estratégia apresentada por Granville (1994):

- O comprimento do passo  $\alpha_k^P$ , para as variáveis primais, é obtido através de (4.62) sem violar os requisitos de não-negatividade das variáveis primais

$$\alpha_k^P = \min \left\{ 1, -\frac{\beta x_i^k}{\tilde{d}x_i^k}, -\frac{\beta z_i^k}{\tilde{d}z_i^k} \mid \tilde{d}x_i^k, \tilde{d}z_i^k < 0 \right\} \quad (4.62)$$

- O comprimento do passo  $\alpha_k^D$ , para as variáveis duais, é calculado por (4.63) sem violar os requisitos de não-negatividade das variáveis duais

$$\alpha_k^D = \min \left\{ 1, -\frac{\beta y_i^k}{\tilde{d}y_i^k}, -\frac{\beta s_i^k}{\tilde{d}s_i^k} \mid \tilde{d}y_i^k, \tilde{d}s_i^k < 0 \right\} \quad (4.63)$$

em que  $0 < \beta < 1$ .

### 4.1.3 Critério de parada

O critério de parada, proposto neste trabalho, é baseado em Wright (1997). Considerando que o algoritmo de pontos interiores não encontra soluções exatas, os seguintes testes (4.64)-(4.66) são apresentados com o objetivo de determinar a solução ótima do problema, decidindo quando a solução obtida na iteração corrente está suficientemente próxima da solução ótima. Estes testes baseiam-se no fato de que uma boa solução aproximada possui os resíduos suficientemente pequenos.

- Factibilidade primal:

$$\frac{\|t_1^k\|}{\|b\| + 1} = \frac{\|b - Ax^k\|}{\|b\| + 1} \leq \varepsilon_1; \quad (4.64)$$

- Factibilidade dual:

$$\frac{\|g^k\|}{\|c\| + 1} = \frac{\|c - A^T w^k - s^k + y^k\|}{\|c\| + 1} \leq \varepsilon_2; \quad (4.65)$$

- Folgas complementares:

$$\|\tilde{q}_1^k\| < \varepsilon_3 \text{ e } \|\tilde{q}_2^k\| < \varepsilon_4; \quad (4.66)$$

em que  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 > 0$  são pequenas tolerâncias positivas.

### 4.1.4 Atualização do parâmetro de barreira

Baseando-se em Wright (1997), o parâmetro de barreira  $\mu_k$  é atualizado da seguinte forma:

$$\mu_k = \min \{ \sigma \mu_k^1, \sigma \mu_k^2 \} \text{ para uma constante } 0 < \sigma < 1 \quad (4.67)$$

em que o parâmetro  $\sigma$  é usado para acelerar a convergência do processo iterativo e os parâmetros  $\mu_k^1$  e  $\mu_k^2$ , calculados por (4.68), são produtos interno, que envolvem as variáveis primais ( $x^k$  e  $z^k$ ) e duais ( $s^k$  e  $y^k$ ) do problema.

$$\mu_k^1 = \frac{(x^k)^T s^k}{n}; \quad \mu_k^2 = \frac{(z^k)^T y^k}{n} \quad (4.68)$$

### 4.1.5 Algoritmo previsor-corretor primal-dual de pontos interiores (PCPD)

A seguir, são apresentados os passos do algoritmo previsor-corretor primal-dual de pontos interiores (PCPD), baseados em Bazaraa et al. (1979), Wright (1997) e Fang e Puthenpura (1993).

**Passo 1: Inicialização**

Ajustar  $k = 0$ . Escolher um ponto arbitrário:  $(x^0, w^0, z^0, y^0, s^0) \in \Omega^0$ . E escolher também  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  e  $\varepsilon_4$  como números positivos, suficientemente pequenos.

**Passo 2: Teste de otimalidade**

Se os critérios definidos por (4.64), (4.65), (4.66) são satisfeitos, então PARAR, pois a solução encontrada é ótima. Caso contrário, ir para o próximo passo.

**Passo 3: Cálculos intermediários – passo previsor**

Calcular  $g^k, t_1^k, t_2^k, q_1^k$  e  $q_2^k$  usando (4.29)-(4.33),  $\mu_k$  usando (4.67), a matriz  $\theta_k$  usando (4.44) e o vetor  $\pi^k$  usando (4.45).

**Passo 4: Direções de busca – passo previsor**

Determinar as direções de busca  $d_x^k, d_w^k, d_z^k, d_r^k, d_y^k$  e  $d_s^k$  para o passo previsor usando (4.39)-(4.39), (4.49) e (4.50).

**Passo 5: Cálculos intermediários – passo corretor**

Atualizar os resíduos  $\tilde{q}_1^k$  e  $\tilde{q}_2^k$  usando (4.53) e (4.54), e  $\tilde{\pi}^k$  usando (4.60).

**Passo 6: Direções de busca – passo corretor**

Calcular  $\tilde{d}_x^k, \tilde{d}_w^k, \tilde{d}_z^k, \tilde{d}_r^k, \tilde{d}_y^k$  e  $\tilde{d}_s^k$  para o passo corretor (4.55)-(4.59).

**Passo 7: Teste de ilimitariedade**

Se  $t_1^k = 0, t_2^k = 0, \tilde{d}_x^k, \tilde{d}_z^k > 0$ , e  $c^t \tilde{d}_x^k < 0$ , então o problema primal é ilimitado. Se  $g^k = 0, \tilde{d}_w^k, \tilde{d}_s^k, \tilde{d}_y^k > 0$  e  $b^t \tilde{d}_w^k > 0$ , então o problema dual é ilimitado. Se ambos os casos acontecerem, então PARAR. Se  $\tilde{d}_x^k, \tilde{d}_z^k, \tilde{d}_w^k, \tilde{d}_r^k, \tilde{d}_y^k = 0$ , então também PARAR  $x^k, z^k, w^k, s^k, y^k$  são soluções ótimas dos problemas primal e dual, respectivamente. Caso contrário ir para o passo 8.

**Passo 8: Comprimento do passo**

Calcular o comprimento do passo  $\alpha_k^P$  e  $\alpha_k^D$  usando (4.62) e (4.63).

**Passo 9: Nova solução**

Atualizar  $x^{k+1}, w^{k+1}, z^{k+1}, y^{k+1}$  e  $s^{k+1}$  usando (4.61). Fazer  $k = k + 1$  e retornar ao passo 2.

## 4.2 Método *branch-and-bound*

Proposto inicialmente por Land e Doig (1960), o método *branch-and-bound* é um método clássico utilizado para a resolução de problemas de programação linear inteira

(PPLI). A seguir, o método é desenvolvido com base em Homem (2010), Pinto (1999) e Borchers e Mitchell (1992).

Considere o problema PPLI inicial (PI):

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } c^T x \\ & \text{Sujeito a: } \begin{cases} Ax = b \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \\ x_i \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.69)$$

em que  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbb{Z}$  é o conjunto de números inteiros positivos, e  $x_i$  são os componentes do vetor  $x$ . O conjunto de soluções de PI pode ser expresso por:

$$\Omega_{PI} = \{x \in \mathbb{Z}^n | Ax = b, x_i \geq 0; i = 1, \dots, n\} \quad (4.70)$$

A existência de condições de integralidade aumentam o grau de complexidade do problema, podendo dificultar e até mesmo impossibilitar a resolução do PPLI. Retirando-se a restrição de integralidade de PI, obtemos a relaxação linear do PPLI, o qual é denominado problema relaxado (PR). Este é representado por (4.71), e é utilizado pelo método *branch-and-bound* na busca pela solução ótima.

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } c^T x \\ & \text{Sujeito a: } \begin{cases} Ax = b \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (4.71)$$

Para o problema relaxado PR tem-se o seguinte conjunto de soluções:

$$\Omega_{PR} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\} \quad (4.72)$$

De modo geral, inicia-se o método *branch-and-bound* resolvendo o PR. Isso é possível pois se a solução de PR for inviável ou ilimitada, a solução de PI também será. Se a solução de PR é inteira, então esta é a solução ótima de PI. Caso contrário, o problema é dividido em subproblemas de programação inteira, selecionando e ramificando cada componente de solução a ser integralizada, respeitando-se as restrições de PR e o processo é repetido até que todas as componentes atinjam valores inteiros.

Além disso, este método pode ser esquematizado em uma árvore de busca, em que o problema original representa a raiz, e os subproblemas obtidos pelo problema ampliado com a inclusão das restrições de integralidade, representam os nós. Considerando que  $P_j, j = 1, \dots, k$  é uma divisão de  $\Omega_{PR}$ , tem-se que o subproblema associado ao nó  $j$  da árvore de busca é expresso por:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } z &= c^T x \\ \text{Sujeito à: } x_i &\in P_j \end{aligned} \tag{4.73}$$

Desta forma, o valor da função objetivo calculado para a solução  $\bar{x}^j$  do problema  $j$ , é denotado por  $\bar{z}^j$ , que será utilizado como limite inferior PI e por  $z^*$  um limite superior de PI obtido através de alguma solução inteira viável.

### 4.2.1 Critério de sondagem (poda)

Um subproblema, ou nó, é podado (sondado) quando a avaliação detectar que sua ramificação não é promissora, e não há mais necessidade de particionar este nó, de modo que soluções melhores para PI sejam encontradas. Então ele é podado (não é mais ramificado). Isso acontece em três situações:

1. Inviabilidade – A solução  $\bar{x}^j$  do problema que está sendo avaliado é infactível para PR.
2. Limite – A solução  $\bar{x}^j$  do problema que está sendo avaliado é factível para PR e infactível para PI e o valor  $\bar{z}^j$  do subproblema que está sendo avaliado é maior ou igual ao valor de alguma solução viável encontrada anteriormente para PI ( $\bar{z}^j \geq z^*$ ).
3. Integralidade – A solução  $\bar{x}^j$  do problema que está sendo avaliado é factível para PI (deve-se atualizar o valor da função objetivo  $\bar{z}^j$  do subproblema que está sendo avaliado quando este for menor que  $z^*$ ).

### 4.2.2 Ramificação

O problema é ramificado se a solução  $\bar{x}^j$  na relaxação linear associada é inviável para PI, então há pelo menos componente  $(\bar{x}^j)_i$  desta solução, que seja fracionária. Desta forma, é feita uma partição no problema  $P_j$ , acrescentando as seguintes restrições:

$$P_{j1} = \{x \in \mathfrak{R}^n \mid x_i \leq \text{int} [(\bar{x}^j)_i]\} \tag{4.74}$$

$$P_{j2} = \{x \in \mathfrak{R}^n \mid x_i \geq \text{int} [(\bar{x}^j)_i] + 1\} \tag{4.75}$$

em que  $\text{int} [(\bar{x}^j)_i]$  é a parte inteira de  $(\bar{x}^j)_i$ .

A escolha das variáveis para a ramificação tem forte influência no tempo gasto pelo algoritmo. No entanto, não há como identificar quais variáveis retornam os melhores valores na solução posterior. Um critério adotado é escolher a variável com menor parte fracionária, ou até mesmo escolher a variável baseado no julgamento de quanto o limite inferior do nó aumentará, quando esta se tornar inteira.

### 4.2.3 Seleção do nó

Conforme a partição é criada, uma lista de subproblemas é gerada, chamados nós ativos. Deve-se decidir qual nó será avaliado na próxima iteração do algoritmo *branch-and-bound*.

A regra mais comum para selecionar um subproblema é conhecida como “*depth first search plus backtracking*”, ou LIFO (*last in first out* – o último a entrar, o primeiro a sair). Se o nó corrente é ramificado, o próximo a ser considerado é uma de suas ramificações. O *Backtracking* acontece quando o nó é podado e voltamos ao caminho do nó corrente em direção à raiz até encontrar o primeiro nó (se houver) que tenha uma ramificação que não tenha sido considerada.

Outra regra existente, mas não muito utilizada, é a “*breadth first search*” em que todos os nós do mesmo nível da árvore de busca são avaliados, antes que qualquer nó do próximo nível seja considerado.

### 4.2.4 Algoritmo *branch-and-bound* (BB)

O algoritmo a seguir, baseado em Florentino (2006), Homem (2010), Pinto (1999) e Borchers e Mitchell (1992), descreve os passos do método *branch-and-bound*. Para sua aplicação, é necessário considerar que  $L_0$  é o conjunto de subproblemas, e que cada problema relaxado corrente  $P_j$  é resolvido através do método predictor-corretor primal-dual de pontos interiores, apresentado na Seção 4.1.

#### Passo 1: Inicialização

Seja  $L_0 = \{P_j\}$ ,  $\bar{z}^j = -\infty$  e  $z^* = \infty$ .

#### Passo 2: Resolver a relaxação corrente

Resolver PR através de  $P_j$  (4.73). Ir para o passo 3.

#### Passo 3: Poda por inviabilidade

Se o problema corrente é inviável, conforme o item 1 apresentado em 4.2.1, podar o nó e voltar ao passo 2. Caso contrário, armazenar a solução ótima do subproblema em  $\bar{z}^j = c^T \bar{x}^j$ , em seguida, ir para passo 4.

#### Passo 4: Poda por limite

Se  $\bar{z}^j \geq z^*$ , conforme o item 2 apresentado em 4.2.1, podar o nó corrente e voltar ao passo 2. Caso contrário, ir para passo 5.

#### Passo 5: Poda por integralidade

Se  $\bar{x}^j$  é inteiro, conforme o item 3 apresentado em 4.2.1, podar o nó corrente. Fazer  $z^* = \min\{\bar{z}^j, z^*\}$  e voltar ao passo 2. Caso contrário, ir para passo 6.

### Passo 6: Ramificação

Escolher uma variável fracionária da solução corrente  $\bar{x}^j$  e particionar  $Pj$ , acrescentando as restrições (4.74) e (4.75). Adicionar os subproblemas ao conjunto  $L_0$  e ir para passo 7.

### Passo 7: Seleção do nó

Selecionar um subproblema do conjunto  $L_0$  e resolver através do passo 2. Caso  $L_0 = \emptyset$ , ir para passo 8.

### Passo 8: Fim

Se  $z^* = \infty$ , então o problema PI não tem solução. Se  $z^* < \infty$  então a solução  $\bar{x}^j$ , que retorna o melhor valor factível da função objetivo  $z^*$ , é a solução ótima para PI.

## 4.3 Método híbrido envolvendo os métodos previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e *branch-and-bound*

Nessa seção é proposto um procedimento em que o método *branch-and-bound*, apresentado em 4.2, é adaptado ao método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores, visto na Seção 4.1, para a resolução dos modelos matemáticos referentes à cana-de-açúcar do Capítulo 3 desse trabalho.

Inicialmente realiza-se a busca da solução ótima relaxada do problema utilizando o método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e, em seguida, o método *branch-and-bound* é utilizado para a determinação das soluções inteiras, de modo a obter a solução ótima do problema.

A seguir, é definido o PPLI para variáveis binárias:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } c^T x \\ & \text{Sujeito a: } \begin{cases} Ax = b \\ x_i \in \{0, 1\} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.76)$$

O método híbrido desenvolvido para solucionar (4.76) será aplicado à resolução dos modelos apresentados no Capítulo 3.

O problema (4.76) é relaxado e expresso como um Problema de Programação Li-

near:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } c^T x \\ & \text{Sujeito a: } \begin{cases} Ax = b \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.77)$$

Dessa forma, têm-se os seguintes problemas equivalentes à (4.77):

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } c^T x && \text{Minimizar } c^T x \\ & \text{Sujeito a: } \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases} && \Leftrightarrow && \text{Sujeito a: } \begin{cases} Ax = b \\ x + z = 1 \\ x \geq 0, z \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.78)$$

Os PPL's (4.77) e (4.78) particularizam os PPL's definidos em (4.1)-(4.5), cujos limitantes inferior  $\bar{l}$  e superior  $\bar{u}$  são alterados, respectivamente, para 0 e 1. O método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores desenvolvido na Seção 4.1 é então estendido para a determinação de soluções do problema relaxado (4.78). O algoritmo envolvendo esse método e o método *branch-and-bound* é apresentado na Seção 4.3.2.

### 4.3.1 Heurística primal

Além dos critérios de parada apresentados na Seção 4.1.3, adicionamos o teste de integralidade proposto por Borchers e Mitchell (1992), em que uma heurística é utilizada para determinar se alguma variável 0-1 está convergindo para uma variável fracionária, que auxilia a validar a integralidade da solução.

De acordo com os autores, a medida que as razões primais  $\frac{x_i^{k+1}}{x_i^k}$  e  $\frac{z_i^{k+1}}{z_i^k}$  tendem a um e, as razões duais  $\frac{y_i^{k+1}}{y_i^k}$  e  $\frac{s_i^{k+1}}{s_i^k}$  tendem a zero, a solução se aproxima da otimalidade. Além disso, este teste evita que o algoritmo seja ramificado antes do necessário, o que garante a redução no número total de subproblemas a serem resolvidos, bem como do número de iterações a serem realizados pelo método *branch-and-bound*.

Assim, uma variável 0-1 é do tipo fracionária quando satisfaz as seguintes condições

$$\begin{aligned} & \left| \frac{x_i^{k+1}}{x_i^k} - 1 \right| < 0.1 \\ & \left| \frac{z_i^{k+1}}{z_i^k} - 1 \right| < 0.1 \\ & \frac{y_i^{k+1}}{y_i^k} < 0.6 \\ & \frac{s_i^{k+1}}{s_i^k} < 0.6 \end{aligned} \quad (4.79)$$

Esses valores de desigualdade foram adotados, pois segundo os autores, as razões



de  $y$  e  $s$  não tendem a zero tão rápido quanto  $x$  e  $z$  tendem a um.

Dessa forma, é proposto o algoritmo híbrido, envolvendo os métodos previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e *branch-and-bound*, que será utilizado para a resolução dos modelos propostos no Capítulo 3.

### 4.3.2 Algoritmo previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e *branch-and-bound* (PDBB)

O algoritmo a seguir, baseado em Homem (2010), utiliza o método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores, definido na Seção 4.1 e o método *branch-and-bound*, definido na Seção 4.2.

#### **Passo 1: Resolver o problema relaxado**

Resolver o problema relaxado (4.78) a partir do algoritmo apresentado na Seção 4.1.5 utilizando os critérios de otimalidade (4.79), (4.64), (4.65) e (4.66).

#### **Passo 2: Método *branch-and-bound***

Para cada  $x_i$ , se  $x_i \geq 0,99$  assuma  $x_i = 1$  e faça  $x_j = 0$  para todos  $i$  restantes ( $i = j + h$ ) e  $j \neq i$  ( $h$  é informado pelo usuário de acordo com o modelo em questão). Senão faça  $x_i = 0$ . Inicie o algoritmo *branch-and-bound*, conforme apresentado na Seção 4.2.4.

No capítulo a seguir, serão apresentados dados necessários para a aplicação do método híbrido previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e *branch-and-bound*, discutido nesse capítulo, aos modelos de custo de colheita de cana-de-açúcar, coleta e transporte, e geração de energia para aproveitamento dos resíduos da cana-de-açúcar, propostos no Capítulo 3, bem como os resultados obtidos através dessa aplicação.

Além do método híbrido apresentado nesse capítulo, partindo do mesmo princípio, é proposto um procedimento híbrido envolvendo os métodos de pontos interiores e *branch-and-cut*, o qual foi investigado, porém não foi implementado e testado nesse trabalho. Esse método é apresentado no Apêndice B. Para o seu desenvolvimento, foi necessário explorar também o método de plano de corte, apresentado no Apêndice A.

Em trabalhos futuros, esse método pode ser implementado e utilizado para a investigação dos modelos de custo de colheita da cana-de-açúcar, custo de coleta de resíduos e do balanço de energia para o aproveitamento desses resíduos, propostos no Capítulo 3. Os resultados obtidos poderão ser comparados ao método híbrido de pontos interiores e *branch-and-bound*, desenvolvido nesse trabalho, para a verificação do seu desempenho e viabilidade.

# Capítulo 5

## Resultados

O algoritmo híbrido previsor-corretor primal dual de pontos interiores (PDBB) foi implementado em linguagem de programação C++, utilizando o *software* Borland C++ Builder 6, baseando-se em Homem (2010). A execução do programa foi feita em um computador com o processador Intel Core2 Duo 2.20 GHz, com 4 GB de memória e com o sistema operacional Windows 7 Home Premium – Service Pack 1.

De modo geral, o método desenvolvido e implementado nesse trabalho é um variante daquele desenvolvido por Homem (2010), com algumas modificações e adaptações, como na ordem de execução dos passos previsor e corretor, os quais ocorriam em iterações diferentes (passo previsor nas iterações pares e passo corretor nas iterações ímpares), na forma de se utilizar o critério de integralidade, proposto por Borchers e Mitchell (1992) e no modo de atualização do parâmetro de barreira.

Além disso, realizou-se a normatização das variáveis para implementação do método da soma ponderada, como estratégia de resolução de modelos multiobjetivo, visto que o custo de coleta de resíduos e o balanço de energia são de magnitudes diferentes.

Para a obtenção dos resultados, aplicou-se o algoritmo PDBB, apresentado na Seção 4.3, aos modelos matemáticos referentes à cana-de-açúcar, vistos no Capítulo 3 desse trabalho, utilizando os dados na Seção 5.1.

Na intenção de comparar os resultados do Modelo multiobjetivo I, obtidos pelo método híbrido proposto com os apresentados em Homem (2010), utilizou-se os mesmos dados, propostos por Tolentino (2007), para a composição do modelo. Os demais Modelos I, II, III e multiobjetivo II são compostos a partir de dados mais recentes, propostos por Lima (2009).

### 5.1 Dados para a aplicação dos modelos matemáticos

Para a aplicação do algoritmo PDBB aos Modelos de I a III e o multiobjetivo II, apresentados no Capítulo 3 desse trabalho, foram utilizados dados da usina de Taquari-

tuba, no interior do estado de São Paulo, a qual trabalha com dez tipos de variedades, para serem plantadas em dezesseis talhões, segundo Lima (2009). A Tabela 5.1 apresenta dados das variedades e do palhicho produzido por essas variedades.

Tabela 5.1: Dados das variedades.

$i$	Variedade	$V_i$	$Pb_i$	$EC_{Bi}$	$A_i$	$Q_i$	$F_i$	$P_c$
1	SP80-1816	7,964	33,360	2671,990	16,420	354,200	13,940	100,000
2	RB72454	8,610	37,580	2649,950	20,400	299,280	12,900	186,000
3	SP80-3280	9,369	36,720	2602,140	18,460	316,180	12,630	158,000
4	SP81-3250	10,619	34,250	1947,850	18,380	320,850	11,320	179,000
5	RB855536	9,780	26,430	2211,950	17,050	258,460	12,510	165,000
6	RB855113	10,870	29,380	2310,370	17,540	319,380	10,910	155,000
7	SP79-1011	8,910	24,090	1977,470	15,800	214,720	10,330	158,000
8	RB835486	9,560	21,530	2444,200	12,840	205,770	9,280	155,000
9	RB711406	12,320	33,200	2008,830	20,770	410,290	16,120	183,000
10	SP70-1143	7,050	22,140	1924,800	15,010	155,980	11,590	155,000

Fonte: Lima (2009).

Os custos e a energia consumida envolvidos no processo de enleirar, compactar, carregar e transportar o palhicho, além das recomendações de sacarose e fibra, referente às variedades de cana-de-açúcar, são apresentadas na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Custos, consumos e recomendações.

$C_{ecc}$	$Co$	$P$	$EC_{EC}$	$EC_C$	$EC_T$	$V_c$	$\bar{A}$	$\bar{F}_i$	$\bar{F}_s$
US\$.t <sup>-1</sup>	L.km <sup>-1</sup>	US\$.L <sup>-1</sup>	MJ.t <sup>-1</sup>	MJ.t <sup>-1</sup>	MJ.km <sup>-1</sup>	m <sup>-3</sup>	t.ha <sup>-1</sup>	t.ha <sup>-1</sup>	t.ha <sup>-1</sup>
3,69	0,37	2,15	7,56	57,54	5,25	60	18,41	11	15

Na Tabela 5.3, são apresentados dados das áreas, e distâncias dos talhões às usinas, para 16 talhões.

Os Modelos I, II, III e multiobjetivo II são compostos pelos mesmos dados apresentados em Lima (2009), e nessa formulação os talhões 3 e 11 são áreas semi-mecanizáveis, destinados à colheita da cana-de-açúcar utilizando a queima, e os demais talhões são áreas mecanizáveis, nos quais a colheita é realizada por meio de máquinas. Entretanto, para a resolução dos Modelos II e III, as áreas semi-mecanizáveis não são consideradas para a aplicação do método PDBB, visto que a colheita nesses talhões não gera resíduos que possam ser reaproveitados.

Os dados relacionados ao Modelo multiobjetivo I, de custo de coleta e transporte e balanço e energia dos resíduos da cana-de-açúcar, obtidos em Florentino (2006) e Tolentino (2007), são apresentados nas Tabelas 5.4, 5.5 e 5.6.

A Tabela 5.4 inclui dados de 11 variedades (SP701284, SP706163, SP701143, SP71-3146, NA56-79, RB72454, RB855536, SP791011, RB855113, RB806043, RB835486).

Outros dados necessários para a aplicação do algoritmo PDBB ao Modelo multiobjetivo I são apresentados na Tabela 5.5, referentes à custos, consumos e recomendações das variedades vistas anteriormente na Tabela 5.4.

Tabela 5.3: Dados dos talhões.

Talhão $j$	$L_j$ (ha)	$D_j$ (Km)
1	8,490	3,490
2	4,520	2,490
3	58,180	16,080
4	4,220	3,490
5	5,740	2,590
6	6,610	2,590
7	30,410	15,330
8	5,080	8,300
9	12,010	9,240
10	54,950	12,630
11	38,660	16,430
12	3,780	8,250
13	10,430	7,800
14	6,150	8,590
15	8,790	2,250
16	57,790	17,200

Fonte: Lima (2009).

Tabela 5.4: Dados das variedades.

$i$	Variedade	$V_i$	$Pb_i$	$EC_{Bi}$	$A_i$	$Q_i$	$F_i$
1	SP70-1284	4,74	13,37	9156,45	13,12	63,36	10,04
2	SP71-6163	8,72	23,57	8120	12,74	205,55	9,65
3	SP70-1143	7,05	22,14	8057,22	15,01	155,98	11,59
4	SP71-3146	10,15	27,42	8963,06	12,86	278,19	10,33
5	NA56-79	9,56	21,53	10231,42	12,84	205,77	9,28
6	RB72454	8,71	23,54	8392,47	15,26	205,03	11,73
7	RB855536	9,78	26,43	9259,22	17,05	258,46	12,51
8	SP79-1011	8,91	24,09	8277,68	15,8	214,72	10,33
9	RB855113	10,87	29,38	9611,14	17,54	319,38	10,91
10	RB 806043	12,32	33,3	8408,96	20,77	410,29	16,12
11	RB835486	9,08	20,96	8298,11	14,48	190,32	11,25

Fonte: Tolentino (2007).

Tabela 5.5: Custos, consumos e recomendações.

$C_{ecc}$ US\$.t <sup>-1</sup>	$Co$ L.km <sup>-1</sup>	$P$ US\$.L <sup>-1</sup>	$EC_{EC}$ MJ.t <sup>-1</sup>	$E_{CC}$ MJ.t <sup>-1</sup>	$E_{CT}$ MJ.km <sup>-1</sup>	$V_c$ m <sup>-3</sup>	$\bar{A}$ t.ha <sup>-1</sup>	$\bar{F}_i$ t.ha <sup>-1</sup>	$\bar{F}_s$ t.ha <sup>-1</sup>
7,03	0,125	0,85	7,56	57,54	5,25	54,57	14	11	15

Fonte: Tolentino (2007).

Na Tabela 5.6, são apresentados dados das áreas e distâncias dos 15 talhões .

Tabela 5.6: Dados dos talhões.

Talhão $j$	$L_j$ (ha)	$D_j$ (Km)
1	17,6	14
2	17,05	22
3	18,29	12
4	22,17	24,5
5	21,22	13
6	10,6	16,5
7	13,25	14
8	16,96	16
9	18,7	20
10	15,36	15,5
11	16,84	23,5
12	19,88	22
13	21,82	29
14	19,42	15
15	21,59	22,5

Fonte: Tolentino (2007).

Assim, os dados apresentados nas Tabelas de 5.1 a 5.6, são utilizados para a aplicação do método híbrido, desenvolvido na Seção 4.1, aos modelos, apresentados no Capítulo 3, para a obtenção de resultados.

Além disso, visando atender os interesses da usina, foi estabelecido que uma variedade de cana-de-açúcar, pode ser plantada em, no máximo, 4 talhões, considerando que pode não ser interessante para a usina plantar somente um tipo de variedade em todos os talhões ou na maioria deles. Assim,  $M = 4$  é o limitante para a restrição (3.9), apresentada na Seção 3.1.

## 5.2 Resultados da aplicação do método híbrido

Nessa seção, são apresentados os resultados referentes às aplicações aos modelos investigados no Capítulo 3.

### 5.2.1 Modelo I - Minimização do custo de colheita da cana-de-açúcar

Essa seção apresenta os resultados da aplicação do algoritmo híbrido PDBB proposto na Seção 4.3.2 ao modelo de minimização do custo de colheita de cana-de-açúcar, apresentado na Seção 3.1, a partir da utilização dos dados das Tabelas 5.1, 5.2 e 5.3, da Seção 5.1.

Os primeiros resultados, apresentados na Tabela 5.7, representam os valores reais obtidos pela execução do método primal-dual de pontos interiores, para resolver o

problema relaxado.

Os valores destacados representam aqueles que são integralizados diretamente tais que  $x_i \geq 0,99$ , e não precisam ser ramificados, como os restantes. Dessa forma, foi determinado o plantio da variedade 1 nos talhões 3, 10, 11 e 16, o plantio da variedade 6 no talhão 7 e o plantio da variedade 9 no talhão 4. Dessa forma, os valores referentes aos demais talhões devem ser ramificados.

Tabela 5.7: Valores reais obtidos relacionados à minimização do custo de colheita.

Talhão $j$	Variedade $i$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,0000	0,0005	0,9221	0,0003	0,0004	0,0752	0,0003	0,0002	0,0007	0,0003
2	0,0000	0,0379	0,0015	0,0005	0,0004	0,0011	0,0003	0,0001	0,9580	0,0002
3	0,9997	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,0000	0,0000	0,0016	0,0005	0,0004	0,0011	0,0003	0,0001	0,9957	0,0002
5	0,0000	0,0078	0,3542	0,0005	0,0005	0,0048	0,0003	0,0001	0,6315	0,0003
6	0,0000	0,0016	0,9833	0,0004	0,0004	0,0110	0,0003	0,0001	0,0024	0,0003
7	0,0020	0,0001	0,0009	0,0001	0,0001	0,9961	0,0002	0,0002	0,0001	0,0003
8	0,0000	0,0202	0,0030	0,0005	0,0004	0,0017	0,0003	0,0001	0,9735	0,0002
9	0,0000	0,0002	0,0087	0,0002	0,0003	0,9895	0,0003	0,0002	0,0003	0,0003
10	0,9997	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
11	0,9984	0,0000	0,0003	0,0001	0,0001	0,0006	0,0002	0,0001	0,0001	0,0002
12	0,0000	0,5673	0,0009	0,0004	0,0003	0,0007	0,0002	0,0001	0,4297	0,0002
13	0,0000	0,0003	0,0179	0,0002	0,0003	0,9801	0,0003	0,0002	0,0004	0,0003
14	0,0000	0,0030	0,9816	0,0005	0,0005	0,0079	0,0003	0,0001	0,0058	0,0003
15	0,0000	0,0005	0,7225	0,0003	0,0004	0,2750	0,0003	0,0002	0,0006	0,0003
16	0,9998	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Após a integralização das variáveis, através da execução do procedimento *branch-and-bound*, obteve-se o custo ótimo de US\$ 836.789,75 sendo proposto o plantio das variedades SP80-1816, RB72454, SP80-3280, RB855113 e RB711406 como apresentado na Tabela 5.8. A produção de açúcar fermentescível foi estimada em 18,5 (% POL cana-de-açúcar) e produção de fibra de cana-de-açúcar foi estimada em 13,35 (% Fibra cana-de-açúcar).

Na Tabela 5.9 é apresentado o desempenho do método, em que PD representa o procedimento previsor-corretor primal-dual, BB representa o procedimento *branch-and-bound* e o tempo computacional é dado em milissegundos.

### 5.2.2 Modelo II - Minimização do custo de coleta da biomassa residual de cana-de-açúcar resultante da colheita em áreas mecanizáveis

Os resultados apresentados nessa seção são aqueles obtidos da aplicação do algoritmo híbrido PDBB proposto na Seção 4.3.2 ao modelo de minimização do custo de coleta e transporte da biomassa residual de cana-de-açúcar, resultante da colheita em áreas me-

Tabela 5.8: Resultados obtidos pelo algoritmo PDBB.

Talhão $j$	Variedade $i$	Descrição da variedade
1	3	SP80-3280
2	9	RB711406
3	1	SP80-1816
4	9	RB711406
5	6	RB855113
6	3	SP80-3280
7	6	RB855113
8	9	RB711406
9	6	RB855113
10	1	SP80-1816
11	1	SP80-1816
12	2	RB72454
13	6	RB855113
14	3	SP80-3280
15	9	RB711406
16	1	SP80-1816
Custo ótimo (US\$)		836.789,7542
POL (%)		18,5
Fibra (%)		13,35

Tabela 5.9: Desempenho do algoritmo PDBB.

	Procedimentos	
	PD	BB
Tempo computacional	105	47
Número de iterações	25	3

canizáveis, o qual é apresentado na Seção 3.2. Para isso foram utilizados os dados das Tabelas 5.1, 5.2 e 5.3, da Seção 5.1. Os talhões referentes às áreas semi-mecanizáveis para o caso da minimização de custo de coleta da biomassa residual são considerados nulos, já que a cana-de-açúcar nessa área é queimada e não obtém-se resíduos para o aproveitamento de energia.

A Tabela 5.10 representa os valores reais obtidos pela execução do método primal-dual de pontos interiores para a resolução do problema relaxado. Esta indica que deverão ser feitas 16 ramificações já que o método não determinou valores maiores que 0,99.

Tabela 5.10: Valores reais obtidos relacionados à minimização do custo de coleta e transporte de resíduos.

Talhão	Variedade $i$									
$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,0153	0,2259	0,0618	0,0778	0,0568	0,0520	0,0406	0,0172	0,4162	0,0365
2	0,0315	0,1488	0,0874	0,1805	0,0752	0,0739	0,0573	0,0319	0,2618	0,0516
3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,0336	0,1474	0,0897	0,1765	0,0777	0,0767	0,0596	0,0338	0,2512	0,0537
5	0,0248	0,1617	0,0762	0,1018	0,0675	0,0651	0,0505	0,0258	0,3812	0,0454
6	0,0211	0,1686	0,0700	0,0883	0,0631	0,0600	0,0468	0,0225	0,4174	0,0420
7	0,0024	0,7405	0,0158	0,0206	0,0225	0,0116	0,0207	0,0058	0,1289	0,0312
8	0,0282	0,1576	0,0832	0,1296	0,0720	0,0702	0,0541	0,0289	0,3275	0,0486
9	0,0088	0,4182	0,0465	0,0607	0,0449	0,0376	0,0308	0,0109	0,3132	0,0285
10	0,0009	0,7738	0,0027	0,0030	0,0049	0,0022	0,0056	0,0016	0,0026	0,2027
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
12	0,0384	0,1684	0,1264	0,0000	0,0965	0,0959	0,0686	0,0381	0,3068	0,0609
13	0,0111	0,3171	0,0530	0,0681	0,0499	0,0436	0,0347	0,0133	0,3775	0,0316
14	0,0230	0,1640	0,0729	0,0938	0,0652	0,0625	0,0486	0,0242	0,4021	0,0437
15	0,0145	0,2397	0,0605	0,0764	0,0558	0,0507	0,0396	0,0165	0,4105	0,0357
16	0,0008	0,1359	0,0024	0,0027	0,0044	0,0020	0,0052	0,0016	0,0022	0,8428

O custo ótimo obtido após a integralização das variáveis, a partir do procedimento *branch-and-bound*, foi de US\$ 49.387,31. Dessa forma, o método determinou o plantio das variedades RB72454, SP80-3280, RB835486, RB711406 e SP70-1143 como apresentado na Tabela 5.11. Além disso, estimou-se a produção de açúcar fermentescível em 19,43 (% POL cana-de-açúcar) e produção de fibra de cana-de-açúcar em 14,10 (% Fibra cana-de-açúcar).

O desempenho do método é apresentado na Tabela 5.12, em que PD representa o procedimento previsor-corretor primal-dual, BB representa o procedimento *branch-and-bound* e o tempo computacional é dado em milissegundos.

### 5.2.3 Modelo III - Maximização do balanço de energia para o aproveitamento do palhicho resultante da colheita em áreas mecanizáveis

Em se tratando da maximização do balanço de energia para o aproveitamento do palhicho resultante da colheita em áreas mecanizáveis, os talhões referentes às áreas semi-



Tabela 5.11: Resultados obtidos pelo algoritmo PDBB.

Talhão $j$	Variedade $i$	Descrição da variedade
1	9	RB711406
2	8	RB835486
3	Área semi-mecanizável	—
4	8	RB835486
5	10	SP70-1143
6	9	RB711406
7	2	RB72454
8	10	SP70-1143
9	2	RB72454
10	2	RB72454
11	Área semi-mecanizável	—
12	3	SP80-3280
13	2	RB72454
14	9	RB711406
15	9	RB711406
16	10	SP70-1143
Custo ótimo (US\$)		49.387,3086
POL (%)		19,4301
Fibra (%)		14,1028

Tabela 5.12: Desempenho do algoritmo PDBB.

	Procedimentos	
	PD	BB
Tempo computacional	109	45474
Número de iterações	22	46

mecanizáveis são considerados nulos, já que não obtém-se energia desses talhões. Assim, nessa seção são apresentados os resultados da aplicação do algoritmo híbrido PDBB, proposto na Seção 4.3.2, ao modelo, que foi apresentado na Seção 3.3, a partir da utilização dos dados das Tabelas 5.1, 5.2 e 5.3, da Seção 5.1.

Os resultados, apresentados na Tabela 5.13, representam os valores reais obtidos pela execução do método primal-dual de pontos interiores, para resolver o problema relaxado. Estes demonstram que nenhuma variável precisou ser ramificada e os valores destacados indicam que o método determinou diretamente o plantio da variedade 1 nos talhões 2, 5, 8 e 14, o plantio da variedade 2 nos talhões 7, 9, 10 e 16, o plantio da variedade 3 nos talhões 1, 6, 13 e 15 e o plantio da variedade 6 nos talhões 4 e 12.

Tabela 5.13: Valores reais obtidos relacionados à maximização do balanço de energia.

Talhão $j$	Variedade $i$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,0002	0,0002	0,9996	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,9990	0,0000	0,0001	0,0001	0,0000	0,0005	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000
3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,0014	0,0000	0,0001	0,0003	0,0000	0,9979	0,0000	0,0000	0,0003	0,0000
5	0,9992	0,0001	0,0006	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
6	0,0024	0,0001	0,9974	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
7	0,0000	0,9999	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
8	0,9994	0,0000	0,0003	0,0001	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000
9	0,0000	0,9987	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,0000	0,9999	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
12	0,0002	0,0000	0,0001	0,0003	0,0000	0,9990	0,0000	0,0000	0,0003	0,0000
13	0,0001	0,0007	0,9992	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
14	0,9981	0,0001	0,0017	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
15	0,0001	0,0002	0,9996	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
16	0,0000	0,9999	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Após a integralização das variáveis, através da execução do procedimento *branch-and-bound*, obteve-se o custo ótimo de US\$ 20.597.468,47, sendo proposto o plantio das variedades SP80-1816, RB72454, SP80-3280, e RB855113 como apresentado na Tabela 5.14. A produção de açúcar fermentescível foi estimada em 19,65 (% POL cana-de-açúcar) e produção de fibra de cana-de-açúcar foi estimada em 12,75 (% Fibra cana-de-açúcar).

Para obtenção de resultados, o método teve o desempenho apresentado na Tabela 5.15, em que PD representa o procedimento previsor-corretor primal-dual, BB representa o procedimento *branch-and-bound* e o tempo computacional é dado em milissegundos.

Na Seção a seguir, referente aos resultados dos modelos multiobjetivo I e II, são apresentadas tabelas que demonstram o desempenho do método PDBB, quando se considera ou não, o critério de integralidade (4.79), proposto por Borchers e Mitchell (1992). Para os modelos mono-objetivo apresentados em 3.1, 3.2 e 3.3, essa comparação também

Tabela 5.14: Resultados obtidos pelo algoritmo PDBB.

Talhão $j$	Variedade $i$	Descrição da variedade
1	3	SP80-3280
2	1	SP80-1816
3	Área semi-mecanizável	—
4	6	RB855113
5	1	SP80-1816
6	3	SP80-3280
7	2	RB72454
8	1	SP80-1816
9	2	RB72454
10	2	RB72454
11	Área semi-mecanizável	—
12	6	RB855113
13	3	SP80-3280
14	1	SP80-1816
15	3	SP80-3280
16	2	RB72454
Custo ótimo (US\$)		20.597.468,47
POL (%)		19,6499
Fibra (%)		12,7542

Tabela 5.15: Desempenho do algoritmo PDBB.

	Procedimentos	
	PD	BB
Tempo computacional	94	0
Número de iterações	23	1

foi realizada, porém o tempo computacional, o número de iterações e de ramificações foram os mesmos, com ou sem este critério e, portanto, optou-se por não apresentar estes dados em tabelas.

Os resultados obtidos pelo método híbrido PDBB desenvolvido foram comparados com aqueles obtidos pelo aplicativo Solver do *software* Microsoft Excel, o qual utiliza o método Simplex, para validação e análise do desempenho do método. A partir dessa comparação, constatou-se que o método híbrido PDBB determinou os resultados dos Modelos I, II e III, apresentados nas Tabelas 5.8, 5.11 e 5.14, em menor tempo de processamento.

### 5.2.4 Modelo Multiobjetivo I – Minimização do custo de coleta e transporte e/ou maximização do balanço de energia da biomassa residual

O modelo multiobjetivo apresentado em 3.4, que visa a minimização do custo de coleta e transporte e/ou maximização do balanço de energia da biomassa residual da cana-de-açúcar, é resolvido através das estratégias 1 e 2, apresentadas nas Seções 3.6.1 e 3.6.2, respectivamente, a partir da aplicação do método híbrido PDBB, proposto na Seção 4.3. Para isso, utilizou-se os dados das Tabelas 5.4, 5.5 e 5.6, da Seção 5.1.

É importante ressaltar que para esse modelo, não serão considerados talhões com áreas semi-mecanizáveis, para a comparação dos resultados com Homem (2010).

Assim, os resultados obtidos pelo algoritmo PDBB, usando as estratégias da soma ponderada e do  $\varepsilon$ -restrito, são apresentados nas Seções 5.2.4.1, 5.2.4.2 e 5.2.4.3, respectivamente.

#### 5.2.4.1 Estratégia 1: Método da soma ponderada

A Tabela 5.16 apresenta os resultados obtidos pelo método PDBB utilizando a estratégia da soma ponderada, a partir da variação do valor de  $\alpha$ , tal que  $\alpha \in [0, 1]$ . Esta estratégia foi aplicada ao problema I, apresentado em 3.6.1.1, com a função objetivo normalizada definida em (3.26). Dessa forma, as colunas da tabela indicam quais variáveis foram selecionadas para o plantio nos talhões relacionados a cada valor  $\alpha_i$  pré-determinado ( $i = 1, \dots, 12$ ), relativos à uma solução eficiente do problema (solução não-dominada). A Tabela 5.17 representa os respectivos valores de custo e balanço de energia, para cada valor de  $\alpha_i$ .

A partir dos valores de custo e balanço de energia, apresentados na Tabela 5.17, é gerada a Figura 5.1, a qual representa a curva de soluções eficientes, ou curva Pareto ótimo para os valores obtidos pela estratégia 1.

A Tabela 5.18 representa a *performance* do método PDBB considerando os sub-problemas resolvidos pela estratégia 1, em que a coluna TIBM representa o desempenho

Tabela 5.16: Variáveis selecionadas para cada valor  $\alpha_i$  pré-determinado.

Talhões $j$	Valores de $\alpha_i$					
	$\alpha_1 = 0$	$\alpha_2 = 0,35$	$\alpha_3 = 0,4$	$\alpha_4 = 0,5$	$\alpha_5 = 0,53$	$\alpha_6 = 0,54$
1	4	10	7	9	9	9
2	4	7	7	7	7	9
3	10	10	10	9	9	9
4	9	9	9	5	5	5
5	9	9	9	9	9	7
6	7	5	10	4	2	10
7	7	5	10	10	10	5
8	4	10	7	7	7	1
9	10	7	5	7	7	7
10	7	7	7	4	7	9
11	4	5	5	7	1	1
12	10	7	5	5	5	5
13	9	9	5	5	5	7
14	10	10	9	9	9	7
15	9	9	9	5	5	5

Talhões $j$	Valores de $\alpha_i$					
	$\alpha_7 = 0,55$	$\alpha_8 = 0,57$	$\alpha_9 = 0,6$	$\alpha_{10} = 0,68$	$\alpha_{11} = 0,7$	$\alpha_{12} = 1$
1	5	7	7	7	7	11
2	1	5	5	11	3	3
3	10	7	7	5	7	11
4	5	1	1	1	1	1
5	7	7	7	7	11	1
6	9	9	11	5	5	6
7	9	10	10	5	7	6
8	7	5	7	2	11	3
9	7	5	5	11	11	3
10	9	10	10	10	3	6
11	1	1	5	11	3	3
12	5	5	1	1	1	11
13	1	1	1	1	1	1
14	7	7	5	7	11	11
15	5	1	1	1	1	1

Tabela 5.17: Valores de custo e energia para cada valor  $\alpha_i$  pré-determinado.

$\alpha_i$	Custo $CCR$ (US\$)	Energia $BE$ (MJ)
0	59.523,37	71.608.908,95
0,35	57.240,79	70.430.766,28
0,4	54.190,43	68.423.301,21
0,5	52.332,1	66.958.465,5
0,53	50.085,31	64.197.533,98
0,54	48.825,19	62.644.966,11
0,55	46.101,25	59.073.615,67
0,57	43.930,56	55.777.045,28
0,6	42.695,32	53.840.585,36
0,68	41.006,67	50.246.385,12
0,7	39.079,78	46.460.360,78
1	37.892,45	43.451.748,85

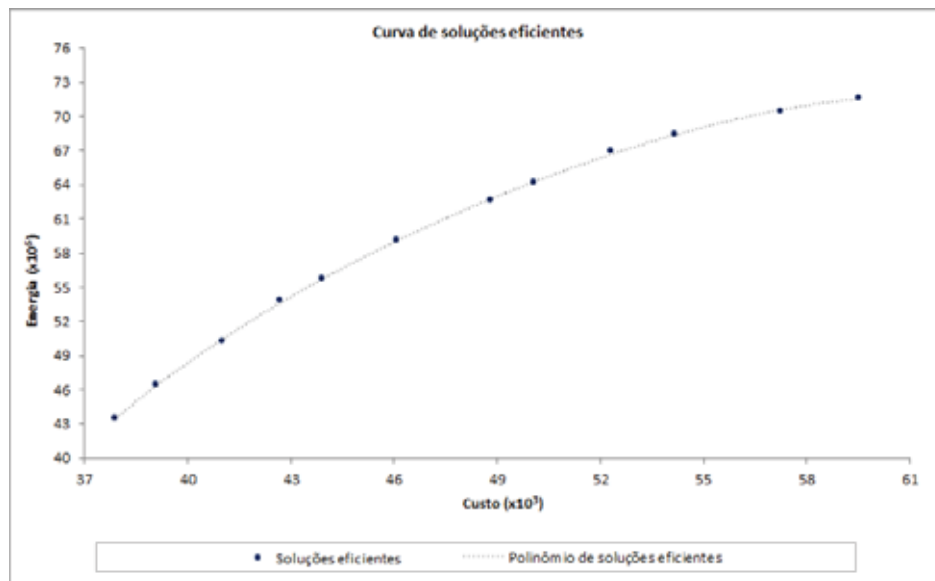


Figura 5.1: Curva de soluções eficientes da estratégia 1.

utilizando o teste de integralidade de Borchers e Mitchell (1992), apresentado em (4.79) na Seção 4.3, e a coluna STIBM representa o desempenho sem esse critério. Essa tabela indica o mínimo e o máximo de iterações, tempo gasto (milissegundos) e ramificações encontrados para ambos os casos, nos dois procedimentos do método, PD (passo 1) e BB (passo 2), relacionados ao respectivos valores  $\alpha_i$ .

Tabela 5.18: Desempenho do método PDBB usando a estratégia 1.

		PD		BB	
		min	max	min	max
TIBM	Número de iterações	28	49	1	4
	Tempo	125	219	0	2902
	Valores de $\alpha_i$	0,4	0,7	0	0,54
	Ramificações	—	—	0	4
STIBM	Número de iterações	28	49	1	4
	Tempo	140	220	0	3136
	Valores de $\alpha_i$	0,4	0,7	0	0,54
	Ramificações	—	—	0	4

Na Tabela 5.18, é possível notar que, nos passos PD e BB do método híbrido proposto, os valores mínimo e máximo de iterações e ramificações, relacionado a cada valor  $\alpha_i$ , são os mesmos usando o critério (TIBM) e sem ele (STIBM), mas quando o tempo gasto é considerado, o método é mais rápido quando utiliza o critério TIBM.

Considerando apenas os 12 problemas determinados para cada valor de  $\alpha_i$ , o tempo de processamento do método usando o critério (TIBM) foi 12,3 segundos, enquanto que sem ele (STIBM), o tempo foi de 13,3 segundos para resolver todos os problemas.

### 5.2.4.2 Estratégia 2: Método $\varepsilon$ -restrito – Problema I

Os resultados obtidos pelo método PDBB, usando a estratégia do  $\varepsilon$ -restrito, para o problema I apresentado em 3.6.2.1, são vistos nas Tabelas 5.19 e 5.20. Cada limitante inferior  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, \dots, 12$ ), relativo a cada solução eficiente do problema, foi determinado considerando valores aproximados do balanço de energia obtidos pela estratégia 1, apresentados na Tabela 5.17. Assim, cada coluna da Tabela 5.19 indica quais variáveis foram selecionadas para o plantio nos talhões, relacionados a cada limitante  $\varepsilon_i$ . Os valores de custo e balanço de energia para cada limitante  $\varepsilon_i$  são apresentados na Tabela 5.20.

Tabela 5.19: Variáveis selecionadas para cada limitante inferior  $\varepsilon_i$ .

Talhões $j$	Limites $\varepsilon_i(10^6)$					
	$\varepsilon_1 = 43,4$	$\varepsilon_2 = 46,4$	$\varepsilon_3 = 50,2$	$\varepsilon_4 = 53,8$	$\varepsilon_5 = 55,9$	$\varepsilon_6 = 59$
1	11	5	7	6	5	7
2	3	3	5	5	1	1
3	11	7	7	7	3	7
4	1	1	1	1	1	5
5	1	11	7	7	7	7
6	6	3	5	5	9	9
7	6	7	5	10	9	9
8	3	11	6	7	5	10
9	3	11	3	5	5	5
10	6	7	6	9	7	9
11	3	3	11	5	1	1
12	11	1	1	1	10	5
13	1	1	1	1	1	1
14	11	11	7	10	7	7
15	1	1	1	1	5	5

Talhões $j$	Limites $\varepsilon_i(10^6)$					
	$\varepsilon_7 = 61,2$	$\varepsilon_8 = 64,1$	$\varepsilon_9 = 66,4$	$\varepsilon_{10} = 68,4$	$\varepsilon_{11} = 70,2$	$\varepsilon_{12} = 71,6$
1	9	7	7	7	10	4
2	5	7	7	5	7	4
3	7	9	9	10	10	10
4	5	5	5	9	9	9
5	7	9	9	9	9	9
6	9	1	4	10	5	7
7	9	1	6	10	5	7
8	10	10	7	7	7	4
9	7	7	9	5	7	10
10	9	7	10	7	4	7
11	1	9	7	5	7	4
12	5	5	5	5	4	10
13	1	5	5	9	9	9
14	7	9	9	4	10	10
15	5	5	5	9	9	9

A Figura 5.2 representa a curva de soluções eficientes obtida através do método PDBB pela estratégia 2, referente ao problema I, baseada nos valores de custo e balanço de energia e apresentados na Tabela 5.20.

A *performance* do método PDBB para os subproblemas resolvidos usando a estratégia 2, em que é avaliado o desempenho do método utilizando o critério TIBM e sem

Tabela 5.20: Valores de custo e energia para cada limitante inferior  $\varepsilon_i$ .

$\varepsilon_i(10^6)$	Custo $CCR$ (US\$)	Energia $BE$ (MJ)
43,4	37.892,45	43.451.748,85
46,4	38.987,74	46.605.684,51
50,2	40.713,03	50.411.318,36
53,8	42.593,03	54.014.937,01
55,9	43.908,06	56.021.914,07
59	46.001,3	59.000.622,56
61,2	48.160,74	61.761.982,84
64,1	50.017,26	64.142.663,38
66,4	52.084,3	66.435.611,81
68,4	54.616,69	68.643.460,88
70,2	57.230,76	70.281.149,98
71,6	59.523,37	71.608.908,95

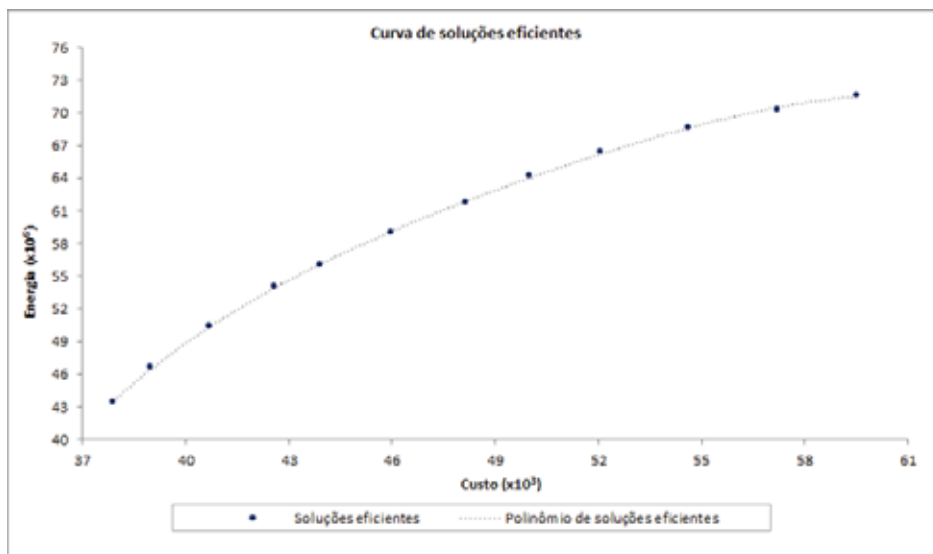


Figura 5.2: Curva de soluções eficientes da estratégia 2 para o problema I.



considerar esse critério, é apresentada na Tabela 5.21. Essa tabela indica o mínimo e o máximo de iterações, tempo gasto (milissegundos) e ramificações, encontrados para ambos os casos, relacionados ao respectivos valores  $\varepsilon_i$ , nos dois procedimentos do método, PD (passo 1) e BB (passo 2).

Tabela 5.21: Desempenho do método PDBB usando a estratégia 2 para o problema I.

		PD		BB	
		min	max	min	max
TIBM	Número de iterações	14	27	1	20
	Tempo	78	125	0	82647
	Valores de $\varepsilon_i$	59	71,6	71,6	50,2
	Ramificações	—	—	0	6
STIBM	Número de iterações	14	27	1	20
	Tempo	78	140	0	87938
	Valores de $\varepsilon_i$	59	71,6	71,6	50,2
	Ramificações	—	—	0	6

Como na estratégia 1, a Tabela 5.21 mostra que nos passos PD e BB do método híbrido proposto, os valores mínimo e máximo de iterações e ramificações, relacionado a cada valor  $\varepsilon_i$ , são os mesmos usando o critério (TIBM) e sem ele (STIBM), mas quando o tempo gasto é considerado nos casos máximos, o método é mais rápido quando utiliza o critério TIBM.

O tempo gasto para a resolução dos 12 problemas associados a cada  $\varepsilon_i$  foi de 3 minutos e 14 segundos usando o critério (TIBM), e de 3 minutos e 23 segundos sem ele, considerando que só para a resolução de  $\varepsilon_i = 50,2 \times 10^6$ , o tempo de processamento foi de 1 minuto e 22 segundos (TIBM), e 1 minuto e 28 segundos (STIBM), e ainda, para  $\varepsilon_i = 53,8 \times 10^6$  gastou-se 42 segundos (TIBM) e 43 segundos (STIBM), e para  $\varepsilon_i = 64,1 \times 10^6$  o tempo foi de 45 segundos (TIBM) e 47 segundos (STIBM). Isso ocorreu pois em todos os casos haviam 6 ramificações para serem realizadas no passo *branch-and-bound* do método híbrido.

### 5.2.4.3 Estratégia 2: Método $\varepsilon$ -restrito – Problema II

Os resultados obtidos pelo método PDBB, usando a estratégia do  $\varepsilon$ -restrito, para o problema II visto em 3.6.2.2, são apresentados nas Tabelas 5.22 e 5.23. Cada limitante superior  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, \dots, 12$ ), relativo a cada solução eficiente do problema, foi determinado considerando valores aproximados do custo de coleta e transporte obtidos pela estratégia 1, apresentados na Tabela 5.17. Dessa forma, cada coluna da Tabela 5.22 indica quais variáveis foram selecionadas para o plantio nos talhões com seus respectivos valores de custo e balanço de energia, relacionados a cada limitante  $\varepsilon_i$ . Assim, na Tabela 5.23 são apresentados os respectivos valores de custo e balanço de energia para esses limitantes.

A Figura 5.3 representa a curva de soluções eficientes baseada nos valores de custo e balanço de energia obtidos através do método PDBB pela estratégia 2, referente ao

Tabela 5.22: Variáveis selecionadas para cada limitante inferior  $\varepsilon_i$ .

Talhões $j$	Limites $\varepsilon_i(10^3)$					
	$\varepsilon_1 = 60$	$\varepsilon_2 = 57,3$	$\varepsilon_3 = 54,5$	$\varepsilon_4 = 52$	$\varepsilon_5 = 49,9$	$\varepsilon_6 = 48,3$
1	4	10	7	9	9	9
2	4	7	5	7	5	5
3	10	10	10	9	9	9
4	9	9	9	5	5	5
5	9	9	9	9	7	7
6	7	5	10	4	9	10
7	7	5	10	10	8	8
8	4	10	7	7	1	9
9	10	7	5	7	7	7
10	7	7	7	1	8	9
11	4	5	5	10	9	7
12	10	7	5	5	5	1
13	9	9	9	5	1	1
14	10	10	7	9	7	7
15	9	9	9	5	5	5

Talhões $j$	Limites $\varepsilon_i(10^3)$					
	$\varepsilon_7 = 46,4$	$\varepsilon_8 = 44,6$	$\varepsilon_9 = 42,7$	$\varepsilon_{10} = 41$	$\varepsilon_{11} = 39,3$	$\varepsilon_{12} = 37,9$
1	5	7	7	7	7	11
2	1	10	5	5	6	3
3	7	9	7	7	7	11
4	5	1	1	1	1	1
5	7	7	7	6	11	1
6	9	5	10	5	5	6
7	9	5	10	6	7	6
8	7	7	7	7	3	3
9	10	9	5	3	11	3
10	9	1	2	5	11	6
11	1	1	5	6	3	3
12	5	5	1	1	1	11
13	1	1	1	1	1	1
14	7	7	5	7	11	11
15	5	5	1	1	1	1

Tabela 5.23: Valores de custo e energia para cada limitante inferior  $\varepsilon_i$ .

$\varepsilon_i(10^3)$	Custo $CCR$ (US\$)	Energia $BE$ (MJ)
60	59.523,37	71.608.908,95
57,3	57.240,79	70.430.766,28
54,5	54.471,64	68.624.953,64
52	51.647,31	65.663.942,89
49,9	49.796,11	63.640.616,31
48,3	48.279,58	61.479.324,46
46,4	46.166,74	59.085.647,07
44,6	44.598,78	56.847.145,43
42,7	42.544,35	53.605.985,11
41	40.912,94	50.653.997,15
39,3	39.296,06	46.791.038,32
37,9	37.892,45	43.451.748,85

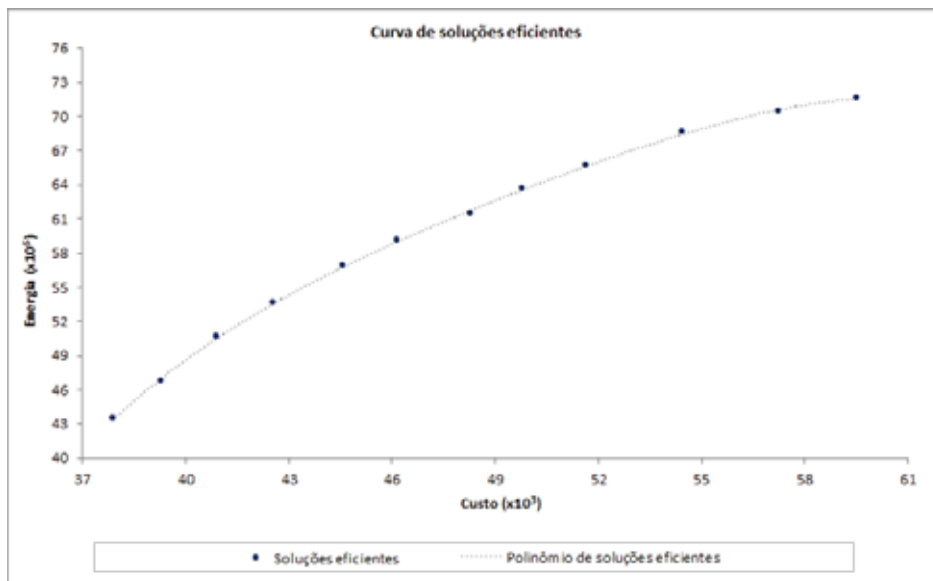


Figura 5.3: Curva de soluções eficientes da estratégia 2 para o problema II.

problema II, apresentados na Tabela 5.23.

A *performance* do método PDBB para os subproblemas resolvidos usando a estratégia 2, em que é avaliado o desempenho do método utilizando o critério TIBM e sem considerar esse critério, é apresentada na Tabela 5.24. Essa tabela indica o mínimo e o máximo de iterações, tempo gasto (milissegundos) e ramificações, encontrados para ambos os casos, relacionados aos respectivos valores  $\varepsilon_i$ , nos dois procedimentos do método, PD (passo 1) e BB (passo 2).

Tabela 5.24: Desempenho do método PDBB usando a estratégia 2 para o problema II.

		PD		BB	
		min	max	min	max
TIBM	Número de iterações	21	56	1	12
	Tempo	109	249	0	37971
	Valores de $\varepsilon_i$	54,5	41	54,5	49,9
	Ramificações	—	—	0	6
STIBM	Número de iterações	29	58	1	12
	Tempo	125	272	0	39867
	Valores de $\varepsilon_i$	54,5	41	54,5	49,9
	Ramificações	—	—	0	6

A Tabela 5.24 mostra que nos passos PD e BB do método híbrido proposto, quando consideramos o tempo computacional gasto, pode-se concluir que o método é mais rápido quando se utiliza o critério TIBM, exceto no caso dos valores mínimos do passo BB, que são iguais. Além disso, é possível notar que o número de iterações referentes ao passo PD é menor quando o critério TIBM é considerado.

O tempo computacional gasto durante a resolução aos problemas associados a cada  $\varepsilon_i$  foi de 1 minuto e 33,2 segundos usando o critério (TIBM), e de 1 minuto e 38,9 segundos sem ele, sendo que para a resolução de  $\varepsilon_i = 49,9 \times 10^3$ , o tempo de processamento foi

38 segundos (TIBM), e 39,9 segundos (STIBM), e para  $\varepsilon_i = 44,6 \times 10^3$  gastou-se 35,8 segundos (TIBM) e 38,3 segundos (STIBM). Em ambos os casos haviam 6 ramificações para serem realizadas no passo *branch-and-bound* do método híbrido, o que provocou em um tempo de processamento maior.

#### 5.2.4.4 Análise de resultados do modelo multiobjetivo I

Em geral, uma solução que satisfaça as duas funções objetivo – minimizar o custo de coleta e transporte e maximizar o balanço de energia – é uma solução utópica. Assim, para determinar uma solução para o modelo multiobjetivo, é necessário um critério para a escolha das melhores soluções eficientes referentes ao problema. Nesse trabalho, esse critério depende dos interesses da usina, que pode ser uma diminuição no custo com um balanço de energia satisfatório, ou um aumento no balanço de energia com respectivo aumento no custo.

Os resultados apresentados foram determinados com a ponderação das funções objetivo, pela estratégia 1 na Seção 5.2.4.1, e separadamente pela resolução do problema com um único objetivo, através da estratégia 2 nas seções 5.2.4.2 e 5.2.4.3. Em ambas as estratégias, foram traçadas as curvas de Pareto ótima associadas às soluções eficientes, que relacionam custo de colheita e transporte e o balanço de energia, e ainda, são indicadas quais as variedades escolhidas para o plantio nos talhões.

É possível notar que em ambas as estratégias, a solução para o problema de minimização de custo é equivalente àquele que fornece o menor custo (referente a  $\alpha = 1$  na estratégia 1,  $\varepsilon = 43 \times 10^6$  MJ no problema I da estratégia 2 e  $\varepsilon = \text{US\$ } 37,9 \times 10^3$  no problema II da estratégia 2) com o menor balanço de energia, enquanto que o problema de maximização do balanço de energia é equivalente àquele que fornece o maior valor para o balanço de energia (referente a  $\alpha = 0$  na estratégia 1,  $\varepsilon = 71,5 \times 10^6$  MJ no problema I da estratégia 2 e  $\varepsilon = \text{US\$ } 60 \times 10^3$  no problema II da estratégia 2) com o maior custo de coleta e transporte de resíduos.

Dessa forma, é o tomador de decisões quem escolhe a solução eficiente que melhor atende suas necessidades, como uma solução que prioriza o menor custo de coleta e transporte e que gere o mínimo de energia, ou alternativamente, uma solução que busca produzir mais energia com um aumento no custo da coleta e transporte dos resíduos da cana-de-açúcar.

Por exemplo, utilizando a estratégia 2 para o problema I, se o tomador de decisão estabelecer um balanço de energia em torno  $64,1 \times 10^6$  MJ, analisando as soluções eficientes na curva de Pareto ótima (Figura 5.2), uma solução com um balanço de energia de 64.142.663,36 MJ pode ser encontrada, esta implica em um custo de coleta e transporte de US\$ 50.017,26, que deve servir ao interesse fábrica. Nesse caso, a partir do algoritmo híbrido envolvendo os métodos primal-dual de pontos interiores e *branch-and-bound* pro-

posto, foram escolhidas para essa solução: a variedade 1 (SP70-1284), nos talhões 6 e 7, a variedade 5 (NA56 -79) nos talhões 4, 12, 13 e 15, a variedade 7 (RB855536) nos talhões 1, 2, 9 e 10, a variedade 9 (RB855113) nos talhões 3, 5, 11 e 14 e da variedade 10 (RB806043) no talhão 8.

A estratégia da soma ponderada, cujos resultados são apresentados em 5.2.4.1, foi a maneira mais complicada de se resolver o modelo, desde que esta depende da normatização das variáveis e da escolha apropriada dos parâmetros  $\alpha \in [0, 1]$ , para determinar as soluções eficientes na fronteira de Pareto. Porém, os valores eficientes encontrados para as funções objetivo de balanço de energia, e de custo de coleta e transporte, obtidos por essa estratégia, podem ser utilizados como limites inferior e superior, respectivamente, para estas funções, quando são consideradas como restrição para a resolução dos modelos definidos pela estratégia 2, cujos resultados são apresentados em 5.2.4.2 e 5.2.4.3. Optou-se por determinar os resultados dessa forma para validar o método e as estratégias, visando que os resultados esperados sejam atingidos.

Assim, a curva de soluções eficientes obtida pelo método híbrido proposto é determinada com menos dificuldade através da estratégia  $\varepsilon$ -restrito. Isso acontece porque esta estratégia permite escolher qualquer valor para os limites de balanço de energia e custo de coleta e transporte, enquanto a estratégia da soma ponderada obtém os resultados a partir da variação de  $\alpha$ .

O algoritmo híbrido PDBB proposto, resolveu os modelos determinando 12 soluções eficientes na curva de Pareto ótima, traçada nas Figuras 5.1, 5.2 e 5.3, apresentadas em 5.2.4.1, 5.2.4.2 e 5.2.4.3, respectivamente. De acordo com Deb (2004), essas figuras mostram um bom desempenho do método híbrido proposto, pois encontra um bom número de soluções eficientes e que são bem espaçadas na fronteira do Pareto.

Com base nas Tabelas 5.18, 5.21 e 5.24, comparamos os resultados obtidos pelo método PDBB, com e sem o critério de integralidade de Borchers e Mitchell (1992), e considerando que o tempo de processamento é dado em milissegundos, os resultados demonstraram pequenas melhorias em relação ao tempo computacional e ao número de iterações, em ambas as estratégias 1 e 2. Outra diferença foi encontrada no passo PD da estratégia 1, em que o número de iterações sem o teste é maior que os resultados usando o mesmo, como segue na Tabela 5.25.

Tabela 5.25: Número de iterações do passo PD usando a estratégia 1.

Valores de $\alpha_i$	TIBM		STIBM	
	Tempo (milissegundos)	Número de iterações	Tempo (milissegundos)	Número de iterações
0,54	172	39	203	43
0,57	156	33	187	36

Como dito anteriormente, esse trabalho é uma extensão daquele desenvolvido por Homem (2010), que desenvolveu um método híbrido envolvendo os métodos predictor-

corretor primal-dual de pontos interiores e *branch-and-bound*, aplicado ao modelo multi-objetivo em questão, que visa a minimização de custo de coleta e transporte e a maximização do balanço de energia. O método foi reimplementado com algumas modificações que permitiram melhorias em seu desempenho, bem como a melhoria dos resultados em relação ao modelo multiobjetivo. Assim, foi possível encontrar mais soluções eficientes para traçar a curva de Pareto ótima, e que estão melhores espaçadas.

Nesse trabalho, os procedimentos previsor e corretor são calculados em um mesmo passo, diferentemente do que é apresentado em Homem (2010), tal que, o autor considera as iterações iniciando em  $k = 0$  e que, em iterações pares é realizado o procedimento previsor, para o cálculo das direções, e em iterações ímpares, executa-se o procedimento corretor, o qual utiliza informações de segunda ordem sobre as condições de complementaridade.

Outra importante diferença está na forma em que o teste de integralidade (4.79), proposto por Borchers e Mitchell (1992), foi utilizado. Embora em Homem (2010) este teste tenha sido utilizado também como critério de otimalidade, o autor utilizou-o como uma heurística, associando-o ao teste que verifica se a solução dual aproxima-se da solução primal, conforme é proposto em Borchers e Mitchell (1992).

Nesse trabalho, o teste de integralidade citado foi utilizado em conjunto aos critérios de otimalidade do método previsor-corretor primal-dual, em que se verifica a factibilidade primal (4.64), a factibilidade dual (4.65) e a complementaridade (4.66). Assim, o teste não interrompe o método de forma antecipada, o que reduz o número de iterações no método *branch-and-bound*.

Além dessas modificações citadas, utilizou-se nesse trabalho, um acelerador de convergência  $\sigma$ , na atualização do parâmetro de barreira, conforme é apresentado em (4.1.4).

Em Homem (2010), não foi realizada a normalização dos coeficientes da função objetivo na resolução da estratégia 2 (método da soma ponderada), proposta na Seção 3.6.1 desse trabalho. Assim, foi mais difícil de encontrar soluções que definissem a curva de Pareto, e que essas fossem igualmente espaçadas, como pode ser visto na Figura 5.4. Além disso, houve uma concentração de soluções eficientes próximas de zero ou próximas de um. Nesse trabalho, realizamos a normalização citada e essa possibilitou que as soluções eficientes, que definiram a curva de Pareto ótima (Figura 5.1), fossem bem espaçadas na fronteira de Pareto.

Quanto à estratégia 2 (método do  $\varepsilon$ -restrito), Homem (2010) encontrou soluções bem espaçadas na fronteira de Pareto, como pode ser visto na Figura 5.5 já que a própria estratégia permite que isso aconteça. Porém, o autor apenas apresenta os resultados para o problema I, apresentado em 3.6.2.1, em que restringe-se o balanço de energia, e o problema II, visto em 3.6.2.2, em que a restrição de custo é adicionada, não é considerado pelo autor.

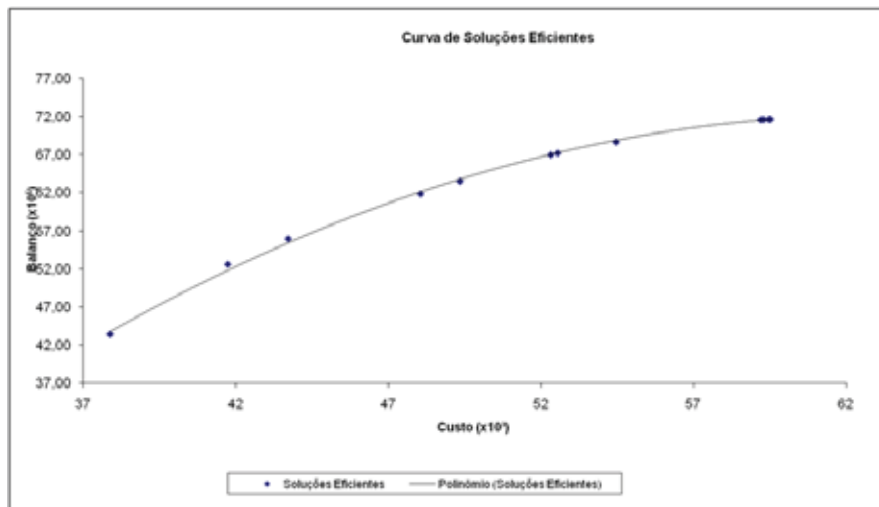


Figura 5.4: Curva de soluções eficientes da estratégia 1.  
Fonte: Homem (2010).

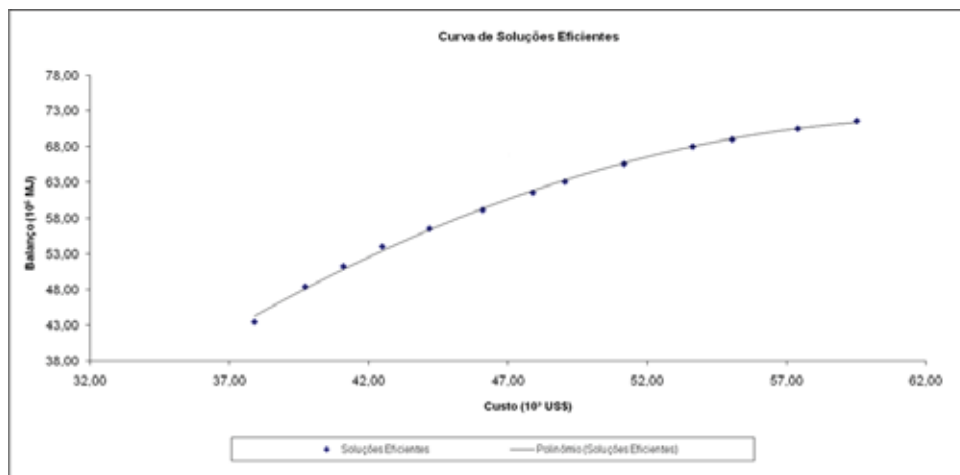


Figura 5.5: Curva de soluções eficientes da estratégia 2 para o problema I.  
Fonte: Homem (2010).

Os resultados encontrados por Homem (2010) e que geraram as Figuras 5.4 e 5.5 são apresentadas nas Tabelas A.2 e A.4, respectivamente, que podem ser vistas no Anexo A.

O modelo multiobjetivo apresentado em Florentino et al. (2011), foi resolvido com o método  $\varepsilon$ -restrito, o qual foi usado como estratégia 2 nesse trabalho. O problema considera 4 variedades e 10 talhões para atender as restrições da usina, mas não considera restrição no número máximo que uma variedade  $i$  pode ser plantada nos talhões, visto em (3.9) na Seção 3.1 desse trabalho. Os resultados foram obtidos por meio do *software* MATLAB.

Tolentino (2007), por sua vez, apresenta alguns resultados usando o algoritmo *branch-and-bound* 0-1 utilizando o *software* MATLAB e o Microsoft Excel. Em seu trabalho há modelos mono-objetivo relacionados com o custo de coleta e transporte e balanço

de energia, que foram comparados com o modelo da estratégia 1 para  $\alpha=1$  e  $\alpha=0$ , respectivamente. Os resultados obtidos foram os mesmos em ambos os trabalhos.

A partir da comparação de cada resultado particular do método PDBB, visto nas Tabelas 5.17, 5.20 e 5.23, com aqueles obtidos pelo Solver (Microsoft Excel), pode-se concluir que os resultados foram obtidos em menor tempo computacional utilizando o método PDBB. Utilizando o Solver, o tempo de processamento para a resolução do modelo utilizando a estratégia da soma ponderada é maior pois, após feita a normalização das variáveis deve ser feita a ponderação da função objetivo do problema, para que então, o problema seja resolvido. Além disso, esse procedimento é feito para cada problema gerado a partir da variação de  $\alpha \in [0, 1]$ , diferentemente do método híbrido implementado, que dá a possibilidade de resolver várias ponderações do problema, numa única execução, o que resulta em menor tempo computacional.

### 5.2.5 Modelo Multiobjetivo II – Minimização do custo total e/ou maximização do balanço de energia total

Nessa seção são apresentados os resultados referentes ao modelo multiobjetivo proposto com base em Silva (2011), Florentino (2006) e Tolentino (2007), apresentado em 3.5, que visa a minimização dos custos de colheita da cana-de-açúcar e coleta de resíduos e/ou maximização do balanço de energia da biomassa residual da cana-de-açúcar. Utilizando os dados das Tabelas 5.4, 5.5 e 5.6, da Seção 5.1, o modelo multiobjetivo 3.21 pôde ser resolvido a partir da aplicação do método híbrido PDBB, proposto na Seção 4.3 por meio das estratégias 1 e 2, apresentadas nas Seções 3.6.1 e 3.6.2, respectivamente. Assim, os resultados obtidos pelo algoritmo PDBB, usando a estratégia da soma ponderada são vistos na Seção 5.2.5.1 e os obtidos utilizando a estratégia  $\varepsilon$ -restrito, são apresentados nas 5.2.5.2 e 5.2.5.3.

#### 5.2.5.1 Estratégia 1: Método da soma ponderada

A Tabela 5.26 apresenta os resultados obtidos pelo método PDBB utilizando a estratégia da soma ponderada, a partir da variação do valor de  $\alpha$ , tal que  $\alpha \in [0, 1]$ . Esta estratégia foi aplicada ao problema I, apresentado em 3.6.1.2, com a função objetivo normalizada definida em (3.27). Dessa forma, as colunas da tabela indicam quais variáveis foram selecionadas para o plantio nos talhões relacionados a cada valor  $\alpha_i$  pré-determinado ( $i = 1, \dots, 10$ ), relativos à uma solução eficiente do problema (solução não-dominada). A Tabela 5.27 representa os respectivos valores de custo e balanço de energia, para cada valor de  $\alpha_i$ .

Utilizando os valores de custo e balanço de energia, apresentados na Tabela 5.27, é gerada a Figura 5.6, a qual representa a curva de soluções eficientes, ou curva Pareto ótimo para os valores obtidos pela estratégia 1.



Tabela 5.26: Variáveis selecionadas para cada valor  $\alpha_i$  pré-determinado.

Talhões $j$	Valores de $\alpha_i$				
	$\alpha_1 = 0$	$\alpha_2 = 0,055$	$\alpha_3 = 0,065$	$\alpha_4 = 0,08$	$\alpha_5 = 0,18$
1	3	3	3	3	3
2	1	1	1	6	6
3	4	6	6	1	1
4	6	6	6	6	6
5	1	1	1	1	3
6	3	3	3	3	1
7	2	2	2	2	2
8	1	1	1	1	6
9	2	2	2	2	2
10	2	2	2	2	2
11	4	4	6	6	1
12	6	6	6	6	6
13	3	3	3	3	3
14	1	1	1	1	3
15	3	3	3	3	1
16	2	2	2	2	2

Talhões $j$	Valores de $\alpha_i$				
	$\alpha_6 = 0,2$	$\alpha_7 = 0,3$	$\alpha_8 = 0,45$	$\alpha_9 = 0,87$	$\alpha_{10} = 1$
1	3	3	2	2	2
2	6	6	9	3	3
3	1	1	1	9	9
4	6	9	9	3	3
5	3	3	3	9	2
6	3	3	3	2	2
7	2	1	1	1	1
8	6	9	3	3	3
9	1	1	1	1	1
10	2	2	1	1	1
11	1	1	9	9	9
12	6	6	9	3	3
13	1	2	2	2	9
14	3	3	3	9	2
15	2	2	2	2	9
16	2	2	2	1	1

Tabela 5.27: Valores de custo e energia para cada valor  $\alpha_i$  pré-determinado.

$\alpha_i$	Custo $CT$ (US\$)	Energia $BET$ (MJ)
0	1.241.777,91	20.597.468,47
0,055	1.215.504,75	20.597.468,47
0,065	1.198.046,52	20.597.468,47
0,08	1.143.057,66	20.502.583,59
0,18	1.104.590,43	20.502.583,59
0,2	1.093.947,18	20.317.323,13
0,3	1.063.298,50	20.098.430,45
0,45	1.031.361,26	19.703.458,44
0,87	1.020.911,42	19.155.067,67
1	1.020.556,80	18.915.734,85

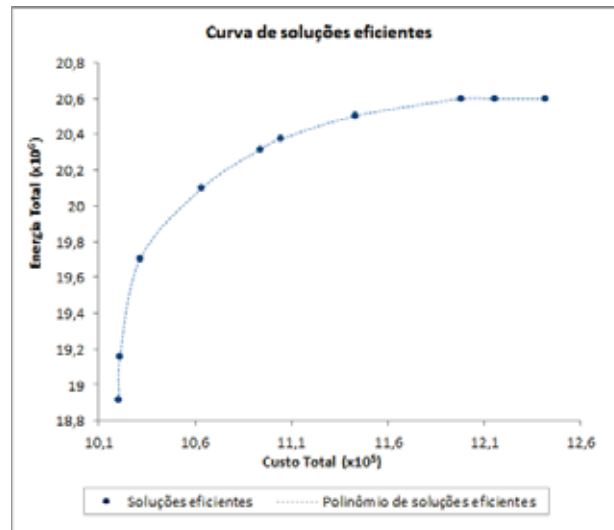


Figura 5.6: Curva de soluções eficientes da estratégia 1.

Visto que o custo total  $CT$  é composto pela soma dos custos de colheita de cana-de-açúcar  $CCT$  e de coleta de resíduos  $CCR$ , a Tabela 5.28 apresenta os valores desses custos determinados pela estratégia da soma ponderada.

Tabela 5.28: Valores dos custos de colheita da cana-de-açúcar e de coleta de resíduos.

Custo total $CT$ (US\$)	Custo de colheita da cana-de-açúcar $CCT$ (US\$)	Custo de coleta de resíduos $CC_{ij}$ (US\$)
1.020.556,80	950.113,40	70.443,40
1.020.911,42	950.598,28	70.313,14
1.031.361,26	965.590,40	65.770,87
1.063.298,50	1.001.849,88	61.448,62
1.093.947,18	1.033.996,13	59.951,04
1.104.590,43	1.044.987,62	59.602,81
1.143.057,66	1.083.324,25	59.733,41
1.198.046,52	1.138.051,94	59.994,58
1.215.504,75	1.155.510,17	59.994,58
1.241.777,91	1.181.783,33	59.994,58

A Tabela 5.29 representa a *performance* do método PDBB considerando os sub-problemas resolvidos pela estratégia 1, em que a coluna TIBM representa o desempenho utilizando o teste de integralidade de Borchers e Mitchell (1992), apresentado em (4.79) na Seção 4.3, e a coluna STIBM representa o desempenho sem esse critério. Essa tabela indica o mínimo e o máximo de iterações, tempo gasto (milissegundos) e ramificações encontrados para ambos os casos, nos dois procedimentos do método, PD (passo 1) e BB (passo 2), relacionados ao respectivos valores  $\alpha_i$ .

Na Tabela 5.29, é possível notar que, nos passos PD e BB do método híbrido proposto, os valores mínimo e máximo de iterações e ramificações, relacionado a cada valor  $\alpha_i$ , são os mesmos usando o critério (TIBM) e sem ele (STIBM), mas quando o

Tabela 5.29: Desempenho do método PDBB usando a estratégia 1.

		PD		BB	
		min	max	min	max
TIBM	Número de iterações	33	56	1	23
	Tempo	125	234	0	46937
	Valores de $\alpha_i$	0,45	0,08	1	0,3
	Ramificações	—	—	0	7
STIBM	Número de iterações	33	56	1	23
	Tempo	140	250	0	50399
	Valores de $\alpha_i$	0,45	0,08	0,87	0,3
	Ramificações	—	—	0	7

tempo gasto é considerado, o método é mais rápido quando utiliza o critério TIBM.

O tempo gasto para a resolução dos 10 problemas associados a cada  $\alpha_i$  foi de 48,6 segundos usando o critério (TIBM), e de 52,1 segundos sem ele, considerando que só para a resolução de  $\alpha_i = 0,3$ , o tempo de processamento foi de 46,9 segundos (TIBM), e 50,3 segundos (STIBM). Nesse caso haviam 7 ramificações para serem realizadas no passo *branch-and-bound* do método híbrido.

### 5.2.5.2 Estratégia 2: Método $\varepsilon$ -restrito – Problema I

Os resultados obtidos pelo método PDBB, usando a estratégia do  $\varepsilon$ -restrito, para o problema I apresentado em 3.6.2.3, são vistos nas Tabelas 5.30 e 5.31. Cada limitante inferior  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, \dots, 9$ ), relativo a cada solução eficiente do problema, foi determinado considerando valores aproximados do balanço de energia obtidos pela estratégia 1, apresentados na Tabela 5.27. Assim, cada coluna da Tabela 5.30 indica quais variáveis foram selecionadas para o plantio nos talhões, relacionados a cada limitante  $\varepsilon_i$ . Os valores de custo e balanço de energia para cada limitante  $\varepsilon_i$  são apresentados na Tabela 5.31.

A Figura 5.7 representa a curva de soluções eficientes obtida através do método PDBB pela estratégia 2, referente ao problema I, baseada nos valores de custo e balanço de energia e apresentados na Tabela 5.31.

A Tabela 5.32 apresenta os valores de custos total  $CT$ , de colheita de cana-de-açúcar  $CCT$  e de coleta de resíduos  $CCR$  obtidos a partir da estratégia  $\varepsilon$ -restrito para o problema I.

A *performance* do método PDBB para os subproblemas resolvidos usando a estratégia 2, em que é avaliado o desempenho do método utilizando o critério TIBM e sem considerar esse critério, é apresentada na Tabela 5.33. Essa tabela indica o mínimo e o máximo de iterações, tempo gasto (milissegundos) e ramificações, encontrados para ambos os casos, relacionados ao respectivos valores  $\varepsilon_i$ , nos dois procedimentos do método, PD (passo 1) e BB (passo 2).

A Tabela 5.33 mostra que nos passos PD e BB do método híbrido proposto, os valores mínimo e máximo de iterações e ramificações, relacionado a cada valor  $\varepsilon_i$ , são

Tabela 5.30: Variáveis selecionadas para cada limitante inferior  $\varepsilon_i$ .

Talhões $j$	Limites $\varepsilon_i(10^6)$				
	$\varepsilon_1 = 20,59$	$\varepsilon_2 = 20,59$	$\varepsilon_3 = 20,5$	$\varepsilon_4 = 20,37$	$\varepsilon_5 = 20,3$
1	3	3	3	3	3
2	1	1	6	6	6
3	4	6	1	1	1
4	6	6	6	6	6
5	1	1	1	3	3
6	3	3	3	1	3
7	2	2	2	2	2
8	1	1	1	6	6
9	2	2	2	2	1
10	2	2	2	2	2
11	4	4	6	1	1
12	6	6	6	6	6
13	3	3	3	3	1
14	1	1	1	3	3
15	3	3	3	1	2
16	2	2	2	2	2

Talhões $j$	Limites $\varepsilon_i(10^6)$			
	$\varepsilon_6 = 20,09$	$\varepsilon_7 = 19,7$	$\varepsilon_8 = 19,15$	$\varepsilon_9 = 18,9$
1	3	2	2	2
2	6	9	3	3
3	1	1	9	9
4	9	9	3	3
5	3	3	9	2
6	3	3	2	2
7	1	1	1	1
8	9	3	3	3
9	1	1	1	1
10	2	1	1	1
11	1	9	9	9
12	6	9	3	3
13	2	2	2	9
14	3	3	9	2
15	2	2	2	9
16	2	2	1	1

Tabela 5.31: Valores de custo e energia para cada limitante inferior  $\varepsilon_i$ .

$\varepsilon_i(10^3)$	Custo $CC_{ij}$ (US\$)	Energia $BE_{ij}$ (MJ)
20,59	1.241.777,91	20.597.468,47
20,59	1.215.504,75	20.597.468,47
20,5	1.143.057,66	20.502.583,59
20,37	1.104.590,43	20.374.393,59
20,3	1.093.947,18	20.317.323,13
20,09	1.063.298,50	20.098.430,45
19,7	1.031.361,26	19.703.458,44
19,15	1.020.911,42	19.155.067,67
18,9	1.020.556,80	18.915.734,85

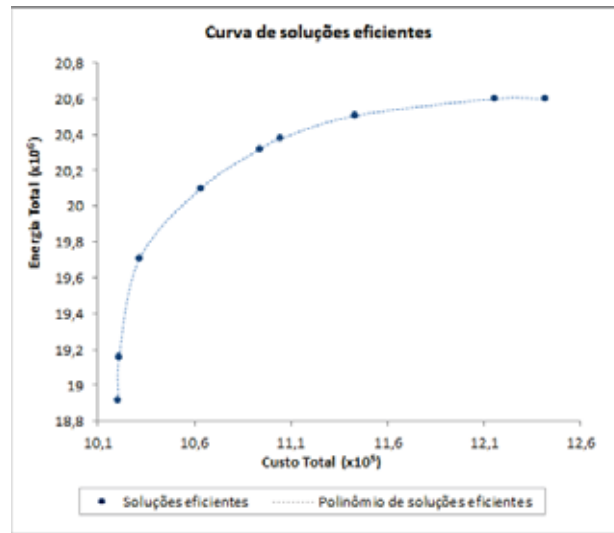


Figura 5.7: Curva de soluções eficientes da estratégia 2 para o problema I.

Tabela 5.32: Valores dos custos de colheita da cana-de-açúcar e de coleta de resíduos.

Custo total $CT$ (US\$)	Custo de colheita da cana-de-açúcar $CCT$ (US\$)	Custo de coleta de resíduos $CC_{ij}$ (US\$)
1.020.556,80	950.113,40	70.443,40
1.020.911,42	950.598,28	70.313,14
1.031.361,26	965.590,40	65.770,87
1.063.298,50	1.001.849,88	61.448,62
1.093.947,18	1.033.996,13	59.951,04
1.104.590,43	1.044.987,62	59.602,81
1.143.057,66	1.083.324,25	59.733,41
1.215.504,75	1.155.510,17	59.994,58
1.241.777,91	1.181.783,33	59.994,58

Tabela 5.33: Desempenho do método PDBB usando a estratégia 2 para o problema I.

		PD		BB	
		min	max	min	max
TIBM	Número de iterações	34	66	1	3
	Tempo	140	280	0	47
	Valores de $\varepsilon_i$	18,9	19,7	18,9	20,5
	Ramificações	—	—	0	2
STIBM	Número de iterações	34	66	1	3
	Tempo	156	280	0	62
	Valores de $\varepsilon_i$	18,9	19,7	18,9	20,5
	Ramificações	—	—	0	2

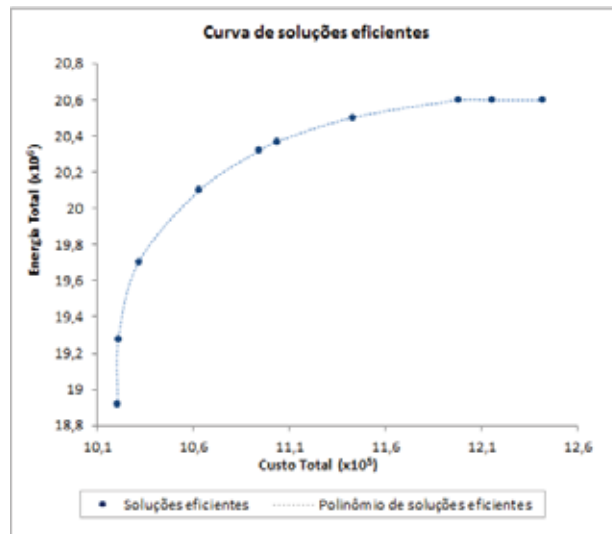


Figura 5.8: Curva de soluções eficientes da estratégia 2 para o problema II.

os mesmos usando o critério (TIBM) e sem ele (STIBM), mas quando o tempo gasto é considerado, assim como na estratégia 1, embora a diferença seja pouca, o método é mais rápido quando utiliza o critério TIBM.

Considerando os problemas determinados para cada valor  $\varepsilon_i$ , o tempo de processamento do método usando o critério (TIBM) foi 1,91 segundos, enquanto que sem ele (STIBM), o tempo foi de 1,97 segundos para resolver todos os problemas.

### 5.2.5.3 Estratégia 2: Método $\varepsilon$ -restrito – Problema II

As Tabelas 5.34 e 5.35 apresentam os resultados obtidos pelo método PDBB, usando a estratégia do  $\varepsilon$ -restrito, para o problema II visto em 3.6.2.4. Cada limitante superior  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, \dots, 10$ ), relativo a cada solução eficiente do problema, foi determinado considerando valores aproximados do custo de coleta e transporte obtidos pela estratégia 1, apresentados na Tabela 5.27. Dessa forma, cada coluna da Tabela 5.34 indica quais variáveis foram selecionadas para o plantio nos talhões, relacionados a cada limitante  $\varepsilon_i$ . Os respectivos valores de custo e balanço de energia para esses limitantes são apresentados na Tabela 5.35.

A Figura 5.8 representa a curva de soluções eficientes baseada nos valores de custo e balanço de energia obtidos através do método PDBB pela estratégia 2, referente ao problema II, apresentados na Tabela 5.35.

Os valores de custos total  $CT$ , de colheita de cana-de-açúcar  $CCT$  e de coleta de resíduos  $CCR$ , determinados pela estratégia  $\varepsilon$ -restrito para o problema II, são apresentados na Tabela 5.36.

A Tabela 5.37 apresenta a *performance* do método PDBB para os subproblemas resolvidos utilizando a estratégia 2, quando o critério TIBM é considerado e sem esse critério. Essa tabela indica o mínimo e o máximo de iterações, tempo gasto (milissegundos)

Tabela 5.34: Variáveis selecionadas para cada limitante inferior  $\varepsilon_i$ .

Talhões $j$	Limites $\varepsilon_i(10^5)$				
	$\varepsilon_1 = 12,42$	$\varepsilon_2 = 12,2$	$\varepsilon_3 = 11,99$	$\varepsilon_4 = 11,5$	$\varepsilon_5 = 11,05$
1	3	3	3	3	3
2	1	1	1	6	6
3	4	6	6	1	1
4	6	6	6	6	6
5	1	1	1	1	1
6	3	3	3	3	3
7	2	2	2	2	2
8	1	1	1	1	6
9	2	2	2	2	2
10	2	2	2	2	2
11	4	4	6	6	1
12	6	6	6	6	6
13	3	3	3	3	1
14	1	1	1	1	3
15	3	3	3	3	3
16	2	2	2	2	2

Talhões $j$	Limites $\varepsilon_i(10^5)$				
	$\varepsilon_6 = 10,95$	$\varepsilon_7 = 10,63$	$\varepsilon_8 = 10,33$	$\varepsilon_9 = 10,209$	$\varepsilon_{10} = 10,206$
1	3	3	2	2	2
2	6	9	9	2	3
3	1	1	1	9	9
4	6	9	9	9	3
5	3	3	3	3	2
6	3	3	3	3	2
7	2	1	1	1	1
8	6	6	3	3	3
9	1	1	1	2	1
10	2	2	1	1	1
11	1	1	9	9	9
12	6	6	9	9	3
13	1	2	2	3	9
14	3	3	3	2	2
15	2	2	2	1	9
16	2	2	2	1	1

Tabela 5.35: Valores de custo e energia para cada limitante inferior  $\varepsilon_i$ .

$\varepsilon_i(10^5)$	Custo $CT$ (US\$)	Energia $BET$ (MJ)
12,42	1.241.777,91	20.597.468,47
12,2	1.215.504,75	20.597.468,47
11,99	1.198.046,52	20.597.468,47
11,5	1.143.057,66	20.502.583,59
11,05	1.103.646,63	20.369.426,65
10,95	1.093.947,18	20.317.323,13
10,63	1.062.938,17	20.099.479,47
10,33	1.031.361,26	19.703.458,44
10,209	1.020.731,55	19.274.411,47
10,206	1.020.556,80	18.915.734,85

Tabela 5.36: Valores dos custos de colheita da cana-de-açúcar e de coleta de resíduos.

Custo total $CT$ (US\$)	Custo de colheita da cana-de-açúcar $CCT$ (US\$)	Custo de coleta de resíduos $CCR$ (US\$)
1.020.556,80	950.113,40	70.443,40
1.020.731,55	950.627,17	70.104,38
1.031.361,26	965.590,40	65.770,87
1.062.938,17	1.001.504,14	61.434,03
1.093.947,18	1.033.996,13	59.951,04
1.103.646,63	1.044.002,87	59.643,76
1.143.057,66	1.083.324,25	59.733,41
1.198.046,52	1.138.051,94	59.994,58
1.215.504,75	1.155.510,17	59.994,58
1.241.777,91	1.181.783,33	59.994,58

e ramificações, encontrados para ambos os casos, relacionados ao respectivos valores  $\varepsilon_i$ , nos dois procedimentos do método, PD (passo 1) e BB (passo 2).

Tabela 5.37: Desempenho do método PDBB usando a estratégia 2 para o problema II.

		PD		BB	
		min	max	min	max
TIBM	Número de iterações	22	57	1	4
	Tempo	109	250	0	21355
	Valores de $\varepsilon_i$	11,99	10,63	11,99	10,209
	Ramificações	—	—	0	7
STIBM	Número de iterações	22	57	1	4
	Tempo	109	250	0	21621
	Valores de $\varepsilon_i$	11,99	10,63	11,99	10,209
	Ramificações	—	—	0	7

A Tabela 5.37 mostra que nos passos PD e BB do método híbrido proposto, apenas quando consideramos o tempo computacional máximo no procedimento BB, o método é mais rápido quando se utiliza o critério TIBM. Em geral, utilizando a estratégia 2, os procedimentos com o teste de integralidade e sem ele, apresentaram o mesmo desempenho.

Para a resolução dos problemas associados a cada  $\varepsilon_i$ , o tempo computacional gasto foi de 22,1 segundos usando o critério (TIBM), e de 23,4 segundos sem ele. Porém, só para a resolução de  $\varepsilon_i = 10,209 \times 10^5$ , o tempo de processamento foi de 21,4 segundos (TIBM), e 21,6 segundos (STIBM). Nesse caso haviam 7 ramificações para serem realizadas no passo *branch-and-bound* do método híbrido.

#### 5.2.5.4 Análise de resultados do modelo multiobjetivo II

Da mesma forma que foi feito para o modelo multiobjetivo I, realizou-se a ponderação das funções objetivo do problema multiobjetivo II (Seção 3.5) utilizando a estratégia 1, cujos resultados são apresentados na Seção 5.2.5.1, e resolveu-se o problema com um único objetivo através da estratégia 2, e esses resultados são vistos nas seções 5.2.5.2 e



5.2.5.3. Em ambas as estratégias, para cada conjunto de soluções eficientes foram traçadas as curvas de Pareto ótima associadas às soluções eficientes, que relacionam custo de colheita e transporte e o balanço de energia, e ainda, são indicadas quais as variedades escolhidas para o plantio nos talhões. Cabe então, ao tomador de decisão, escolher qual a solução eficiente que melhor atende as necessidades da empresa.

Desse modo, se o tomador de decisão estabelecer que pode gastar no máximo US\$  $10,95 \times 10^5$ , utilizando a estratégia 2 referente ao problema II, a partir das soluções eficientes na curva de Pareto ótima, apresentadas na Figura 5.8, uma solução com um custo total de US\$ 1.093.947,18 pode ser encontrada, e esta implica em um balanço de energia de 20.317.323,13 MJ, que deve servir ao interesse fábrica. Nesse caso, a partir do algoritmo híbrido envolvendo os métodos primal-dual de pontos interiores e *branch-and-bound* proposto, foram escolhidas para essa solução: a variedade 1 (SP80-1816) nos talhões 3, 9, 11 e 13, a variedade 2 (RB72454) nos talhões 7, 10, 15 e 16, a variedade 3 (SP80-3280) nos talhões 1, 5, 6 e 14, e a variedade 6 (RB855113) nos talhões 2, 4, 8 e 12.

Para esse resultado obtido, o custo total, conforme citado, é de US\$ 1.093.947,18, assim, de acordo com a Tabela 5.36 tem-se que US\$ 1.033.996,13 é referente ao custo de colheita da cana-de-açúcar, enquanto que US\$ 59.951,04 corresponde ao custo de coleta de resíduos.

Analisando o menor valor de custo total, determinado pelas estratégias 1 e 2, tem-se que o resultado obtido é US\$ 1.020.556,80, tal que o custo de colheita da cana-de-açúcar é US\$ 950.113,40 e o custo de coleta de resíduos é US\$ 70.443,40. Comparando esses resultados com os valores de custo ótimo apresentados respectivamente nas Tabelas 5.8 e 5.11, das Seções 5.2.1 e 5.2.2, é possível notar que há uma grande diferença, visto que os problemas de minimização de custo de colheita da cana e custo de coleta de resíduos não são tratados separadamente e procura-se um valor que atenda ambos os objetivos. Os resultados obtidos são influenciados ainda pela separação dos talhões em áreas, mecanizáveis e semi-mecanizáveis, desde que o custo de colheita envolve as duas áreas, e o custo de coleta relaciona-se somente com áreas mecanizáveis, o que dificulta na busca de uma solução intermediária.. Entretanto, o balanço de energia total, cujo máximo valor é de US\$ 20.597.468,47, coincide com aquele obtido pelo modelo III de maximização do balanço de energia, visto que os problemas são equivalentes, desde que são considerados em áreas mecanizáveis.

Para utilizar a estratégia da soma ponderada, a normatização das variáveis foi realizada, e esses resultados são apresentados em 5.2.5.1. Para isso, foi feita a escolha dos parâmetros  $\alpha \in [0, 1]$ , para determinar as soluções eficientes que melhor definiam a fronteira de Pareto. Assim, os valores eficientes encontrados para as funções objetivo de balanço de energia e de custo total, obtidos pela estratégia da soma ponderada, foram utilizados como limites inferior e superior, respectivamente, para essas funções, quando consideradas restrições, usadas na resolução dos modelos definidos pela estratégia 2, cujos

resultados são apresentados em 5.2.5.2 e 5.2.5.3.

Como dito anteriormente, a estratégia da soma ponderada obtém os resultados a partir da variação de  $\alpha$ , o que dificulta a busca por soluções eficientes, enquanto a estratégia  $\varepsilon$ -restrito determina com menos dificuldade essas soluções pois permite escolher qualquer valor para os limites de balanço de energia e custo total. Porém, é importante ressaltar que nesse trabalho, foram utilizados os valores das soluções eficientes encontradas pela estratégia 1 como limites para as restrições dos modelos da estratégia 2 visando validar o método e as estratégias, esperando que estes retornem os resultados esperados.

Em ambas as estratégias, a solução para o problema de minimização de custo total é equivalente àquele que fornece o menor custo (referente a  $\alpha = 1$  na estratégia 1,  $\varepsilon = 18,9 \times 10^6$  MJ no problema I da estratégia 2 e  $\varepsilon = \text{US\$ } 10,206 \times 10^5$  no problema II da estratégia 2) com o menor balanço de energia, enquanto que o problema de maximização do balanço de energia é equivalente àquele que fornece o maior valor para o balanço de energia (referente a  $\alpha = 0$  na estratégia 1,  $\varepsilon = 20,59 \times 10^6$  MJ no problema I da estratégia 2 e  $\varepsilon = \text{US\$ } 12,42 \times 10^5$  no problema II da estratégia 2) com o maior custo total referente à colheita da cana-de-açúcar e à coleta de resíduos.

Assim como no modelo multiobjetivo I, as Figuras 5.6, 5.7 e 5.8 mostram um bom desempenho do método híbrido proposto, pois encontra um bom número de soluções eficientes e que são bem espaçadas na fronteira do Pareto, conforme Deb (2004).

Além disso, é possível notar que para um mesmo valor de balanço de energia total (20.597.468,47 MJ) existem até três valores de custo total (US\$ 1.241.777,91, US\$ 1.215.504,75 e US\$ 1.198.046,52). Isso acontece devido ao fato de existirem áreas mecanizáveis e semi-mecanizáveis (talhões 3 e 11), pois os custos de colheita da cana-de-açúcar abrangem tanto áreas mecanizáveis como semi-mecanizáveis, e que a coleta de resíduos e o aproveitamento destes para a geração de energia ocorrem apenas em áreas mecanizáveis. Assim, plantar nos talhões destinado à colheita semi-mecanizável influencia somente no custo total, visto que o custo total envolve os custos de colheita da cana-de-açúcar e de coleta de seus resíduos, e portanto, os valores relacionados ao balanço de energia total não sofrem alterações. Isso também justifica a dificuldade de se obter soluções eficientes que esboçassem a curva de Pareto ótima da melhor maneira possível.

Em relação aos resultados obtidos pelo método PDBB, com e sem o critério de integralidade de Borchers e Mitchell (1992), apresentados nas Tabelas 5.29, 5.33 e 5.37, tem-se que em ambas as estratégias 1 e 2, as melhorias ocorreram no tempo computacional, mas são relativamente pequenas, considerando que o tempo é dado em milissegundos.

Cada resultado particular do método PDBB, visto nas Tabelas 5.27, 5.31 e 5.35, com aqueles obtidos pelo Solver (Microsoft Excel), e o método híbrido PDBB proposto obteve os resultados em menor tempo, e além disso, o método implementado possibilita que em uma única execução possam ser resolvidas várias ponderações do problema. Essa comparação apenas foi feita com o Solver, pois o modelo multiobjetivo em destaque é

novo, o qual foi proposto nesse trabalho, e esses foram os primeiros resultados obtidos pelo método híbrido PDBB.

# Capítulo 6

## Conclusões

Nesse trabalho foi desenvolvido um método híbrido envolvendo os métodos previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e *branch-and-bound* (PDBB), variante daquele proposto em Homem (2010), no qual as modificações realizadas foram: a ordem de execução dos passos previsor e corretor; a forma de se utilizar o critério de integralidade, proposto por Borchers e Mitchell (1992); e a forma de atualização do parâmetro de barreira. Esse método foi aplicado em problemas mono e multiobjetivo de programação inteira 0-1 relacionados à colheita da cana-de-açúcar e ao aproveitamento de sua biomassa residual.

Os modelos investigados visaram determinar as variedades de cana-de-açúcar para o plantio nos talhões, de modo que se atendessem as restrições do processo de produção relativo à fibra, à sacarose e à área de plantio, e solucionasse os seguintes problemas mono-objetivos: o de minimização de custo de colheita da cana-de-açúcar (modelo I), o de minimização de custo de coleta e transporte de sua biomassa residual (modelo II) e o de maximização do balanço de energia proveniente desses resíduos (modelo III). Além desses, foram apresentados e solucionados dois modelos multiobjetivo: o de minimização de custo de coleta e transporte e maximização do balanço de energia da biomassa residual (modelo multiobjetivo I) e o de minimização de custo total e maximização de energia total, que envolvem custo de colheita e o aproveitamento de resíduos (modelo multiobjetivo II).

Destaca-se que o modelo multiobjetivo II é um novo modelo proposto nesse trabalho, baseado nos modelos apresentados em Silva (2011), Florentino (2006) e Tolentino (2007).

Para a resolução dos modelos citados, o método híbrido PDBB proposto foi implementado usando o programa Borland C++ Builder 6.0 e executado em um computador com o processador Intel Core2 Duo 2.20 GHz, com 4 GB de memória e com o sistema operacional Windows 7 Home Premium – Service Pack 1. Inicialmente, foram resolvidos os modelos mono-objetivo I, II e III, para um caso específico de dezesseis talhões e dez variedades, em que os talhões 3 e 11 foram destinados às áreas semi-mecanizáveis, obtendo soluções ótimas para os casos considerados. Os resultados obtidos foram compa-

rados com aqueles determinadas pelo aplicativo Solver, do *software* Excel, mostraram o bom desempenho computacional do método híbrido proposto.

Como estratégias de resolução dos modelos multiobjetivo I e II foram utilizados os métodos da soma ponderada e  $\varepsilon$ -restrito. Estas estratégias transformaram cada problema multiobjetivo em uma classe de problemas mono-objetivo. Assim, o método PDBB foi utilizado para determinar as soluções eficientes e a curva de Pareto ótima desses modelos.

Os resultados obtidos pelo método PDBB para o modelo multiobjetivo I foram comparados com os apresentados em Florentino et al. (2011), Homem (2010), Tolentino (2007) e os obtidos pelo Solver (Microsoft Excel), demonstrando que este procedimento tem um bom desempenho computacional e determina soluções eficientes que atendem os interesses da usina respeitando suas limitações operacionais.

O modelo multiobjetivo II, proposto nesse trabalho, foi investigado e solucionado pela primeira vez pelo método híbrido PDBB. Assim, os resultados determinados pelo método em destaque foram comparados apenas com aqueles obtidos pelo Solver (Microsoft Excel) para a verificação de sua viabilidade. Esses resultados comprovaram que as áreas mecanizáveis e semi-mecanizáveis influenciaram diretamente na determinação de soluções eficientes do modelo, dificultando o desempenho do método. Apesar dessa dificuldade, o método mostrou-se robusto à resolução do mesmo em um bom tempo computacional.

Para ambos os modelos, foram realizados testes computacionais usando o critério de integralidade, através de uma heurística primal proposta por Borchers e Mitchell (1992), confirmando que este critério é importante para melhorar o desempenho do método, porém essas melhorias podem ser mais significativas para problemas de maior dimensão, os quais não foram explorados nesse trabalho. De um modo geral, o desempenho do método híbrido PDBB depende do número de ramificações a serem realizadas e resolvidas pelo passo *branch-and-bound*.

Portanto, o método híbrido PDBB proposto neste trabalho demonstrou ser uma técnica de otimização viável e robusta à resolução dos modelos apresentados.

Como proposta de continuidade deste trabalho, tem-se a possibilidade de se complementar o método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e *branch-and-cut* (PDBC), proposto no Apêndice B. Objetiva-se verificar sua viabilidade e comparar o seu desempenho computacional com o método PDBB na resolução de modelos mono e multiobjetivo relativos à colheita da cana-de-açúcar e ao aproveitamento de sua biomassa residual.

# Capítulo 7

## Trabalhos publicados

**Lima, C.**, Balbo, A. R. e Florentino, H. O. Aplicação de um método híbrido de pontos interiores e *branch-and-bound* em problemas de minimização de custo de colheita da cana-de-açúcar. *CQD – Revista eletrônica paulista de matemática*, vol.2, n.1, 2013.

**Lima, C.** e Balbo, A. R. Métodos híbridos de pontos interiores e de programação inteira 0-1 em problemas de custo de transporte e geração de energia da biomassa de cana-de-açúcar In: *II Seminário da Pós-Graduação em Engenharia Elétrica*. Bauru – SP, 2012.

**Lima, C.**, Balbo, A. R. e Florentino, H. O. Um procedimento híbrido envolvendo os métodos previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e *branch-and-bound* em problemas multiobjetivo da cana-de-açúcar. In: *XIX SIMPEP – Simpósio de Engenharia de Produção*. Bauru – SP, 2012

**Lima, C.**, Balbo, A. R. e Florentino, H. O. Um método híbrido de pontos interiores e *branch-and-bound* aplicado ao modelo de minimização de custo de colheita da cana-de-açúcar. In: *XXIV SELMAT – Semana da Licenciatura em Matemática*. Bauru – SP, 2012

**Lima, C.**, Balbo, A. R. e Florentino, H. O. Um método híbrido envolvendo os métodos de pontos interiores e *branch-and-bound* em problemas multiobjetivo referentes ao cultivo da cana-de-açúcar. In: *CLAIO/SBPO – Congresso Latino-Iberoamericano de Investigação Operativa/ Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*. Rio de Janeiro – RJ, 2012.

**Lima, C.**, Balbo, A. R. e Florentino, H. O. Métodos híbridos de pontos interiores e *branch-and-bound* em problemas de custo de transporte e geração de energia da biomassa de cana-de-açúcar. In: *CNMAC 2012 – XXXIV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*. Águas de Lindóia – SP, 2012.

**Lima, C.**, Balbo, A. R. e Florentino, H. O. Interior points and branch-and-cut hybrids methods applied in transport cost and energy generation problems of sugarcane biomass. In: *3rd International Conference on Engineering Optimization - EngOpt 2012*. Rio de Janeiro – RJ, 2012

**Lima, C.**, Balbo, A. R. e Florentino, H. O. Uma aplicação dos métodos híbridos de pontos interiores e *branch-and-bound* em problemas de minimização de custo de colheita da cana-de-açúcar. In: *Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional – ERMAC*. Botucatu – SP, 2012.

**Lima, C.** e Balbo, A. R. Métodos híbridos de pontos interiores e *branch-and-cut* em problemas de custo de transporte e geração de energia da biomassa de cana-de-açúcar. In: *I Seminário da Pós-Graduação em Engenharia Elétrica*. Bauru – SP, 2011.

**Lima, C.**, Balbo, A. R., Homem, T. P. D. e Florentino, H. O. Métodos híbridos de pontos interiores e de programação inteira 0-1 em problemas de resíduos da cana-de-açúcar. In: *X Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações*. Águas de Lindóia – SP, 2011.

## 7.1 Trabalhos aceitos para publicação

**Lima, C.**, Balbo, A. R. e Florentino, H. O. Método híbrido de pontos interiores e *branch-and-bound* aplicado ao problema multiobjetivo de aproveitamento de resíduos da cana-de-açúcar. In: *CMAC Sudeste 2013 – Congresso de Matemática Aplicada e Computacional*. Bauru – SP, 2013.

## 7.2 Trabalhos submetidos

**Lima, C.**, Balbo, A. R., Homem, T. P. D. e Florentino, H. O. A hybrid approach combining interior-point and branch-and-bound methods applied to the problem of sugarcane waste. *Journal of the Operational Research Society*, 2013.

**Lima, C.**, Balbo, A. R. e Florentino, H. O. Método híbrido de pontos interiores e *branch-and-bound* aplicado ao modelo multiobjetivo de colheita de cana-de-açúcar e aproveitamento de resíduos. In: *XX SIMPEP – Simpósio de Engenharia de Produção*. Bauru – SP, 2013.

# Referências Bibliográficas

- Alencar, C. E. R. (2006). *Ferramenta para suporte à decisão de frentes de corte de cana-de-açúcar usando algoritmos genéticos*. Trabalho de Conclusão de Curso Engenharia da Computação. Escola Politécnica de Pernambuco - Universidade de Pernambuco, Recife, PE.
- ANEEL (2005). *Atlas de energia elétrica do Brasil*. Agência Nacional de Energia Elétrica, Brasília, 2 edition.
- ANEEL (2008). *Atlas de energia elétrica do Brasil*. Agência Nacional de Energia Elétrica, Brasília, 3 edition.
- Balbo, A. R., Souza, M. A. S., Baptista, E. C. e Nepomuceno, L. (2012). A predictor-corrector primal-dual interior-point method for solving the multi-objective environmental economic dispatch problems: a post-optimization analysis. *Mathematical Problems in Engineering (Print)*, 2012:1–26.
- Bassanezi, R. R. (2002). *Ensino - Aprendizagem com Modelagem Matemática: Uma Nova Estratégia*, chapter Modelagem Matemática - Um método científico de pesquisa ou uma estratégia de ensino e aprendizagem? Contexto.
- Bazaraa, M. S., Sherali, H. D. e Shetty, C. M. (1979). *Nonlinear Programming-Theory and Algorithm*. John Wiley & Sons., New York.
- Biembengut, M. S. e Hein, N. (2003). *Modelagem Matemática no Ensino*. Contexto, São Paulo.
- Borchers, B. e Mitchell, J. E. (1992). Using an interior point method in a branch-and-bound algorithm for integer programming. Technical report, Mathematical Sciences Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, NY 12180.
- Borges, S. S., Fernandes, T. S. P. e Almeida, K. C. (2011). Pré-despacho hidrotérmico de potência ativa e reativa via método dos pontos interiores e coordenadas retangulares. *Sociedade Brasileira de Automática: Controle & Automação*, 22(5).



- Brasil (2011). *Balanço Energético Nacional 2011 - Ano base 2010: Relatório Final*. Empresa de Pesquisa Energética, Rio de Janeiro.
- Brasil (2012). *Balanço Energético Nacional 2012 - Ano base 2011: Relatório Final*. Empresa de Pesquisa Energética, Rio de Janeiro.
- Caliari, M. e Júnior, M. S. S. (2005). Programação matemática aplicada à colheita de cana-de-açúcar com ênfase na recuperação máxima de açúcar. *Pesquisa Agropecuária Tropical*, 35(1).
- Cantane, D. R., Contharteze, E. G. e Oliveira, A. R. L. (2012). Método de pontos interiores barreira logarítmica preditor-corretor especializado para o problema de regressão pela norma  $lp$ . *TEMA. Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 13:219–231.
- Carvalho, S. M. S. e Oliveira, A. R. L. (2012). Interior-point methods applied to the predispatch problem of a hydroelectric system with scheduled line manipulations. *American Journal of Operations Research*, 02:266–271.
- Colin, E. C., Ciparrone, F. A. M. e Shimizu, T. (1999). Otimização do custo de transporte na distribuição-armazenagem de açúcar. *Produção (São Paulo. Impresso)*, 9(1):87–97.
- CONAB (2012). *Acompanhamento de safra brasileira: cana-de-açúcar, terceiro levantamento, dezembro/2012 - Companhia Nacional de Abastecimento*. Companhia Nacional de Abastecimento, Brasília.
- Deb, K. (2004). *Multi-objective optimization using evolutionary algorithms*. John-Wiley & Sons Ltda.
- Fang, S. C. e Puthenpura, S. (1993). *Linear optimization and extensions: theory and algorithms*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Ferruzzi, E. C., Gonçalves, M. B., Hruschka, J. e Almeida, L. M. W. (2004). Modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem nos cursos superiores de tecnologia. In *World Congress on Engineering and Technology Education*, São Paulo.
- Florentino, H. O. (2006). *Programação linear inteira em problemas de aproveitamento da biomassa residual de colheita da cana-de-açúcar*. PhD thesis, Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências de Botucatu, Botucatu, SP.
- Florentino, H. O., Lima, A. D., Carvalho, L. R., Balbo, A. R. e Homem, T. P. D. (2011). Multi-objective 0-1 integer programming for the use of sugarcane residual biomass in energy cogeneration. *International Transactions in Operational Research*, 18:605–615.
- Granville, S. (1994). Optimal reactive dispatch through interior point methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, 9:135–146.

- Grisotto, M. E. (1995). Otimização do transporte de cana-de-açúcar por caminhões campinas, sp, 1995. Master's thesis, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - Universidade Estadual de Campinas.
- Homem, T. P. D. (2010). Procedimento híbrido envolvendo os métodos primal-dual de pontos interiores e branch-and-bound em problemas multiobjetivo de aproveitamento de resíduos de cana-de-açúcar. Master's thesis, Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia, Bauru, SP.
- Homem, T. P. D., Balbo, A. R. e Florentino, H. O. (2011). Optimal energy generation with biomass of sugarcane harvest. *IEEE América Latina*, 1:653–658.
- Iannoni, A. P. e Morabito, R. (2002). Análise do sistema logístico de recepção de cana-de-açúcar: um estudo de caso utilizando simulação discreta. *G&P – Gestão & Produção, São Carlos*, 9(2):107–128.
- IBGE (2012). Levantamento sistemático da produção agrícola, confronto das safras de 2011 e 2012, brasil, fevereiro de 2012. instituto brasileiro de geografia e estatística. disponível em: [http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/indicadores/agropecuaria/lspa/lspa\\_201202\\_5.shtm](http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/indicadores/agropecuaria/lspa/lspa_201202_5.shtm). Acesso em 20 de março de 2012.
- Karmarkar, N. (1984). A new polynomial time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4:373–395.
- Kojima, M., Mizuno, S. e Yoshise, A. (1989). *Progress in mathematical programming: interior-point and related methods*, chapter A primal-dual interior-point method for linear programming, pages 29–48. Springer-Verlag, New York.
- Land, A. e Doig, A. (1960). An automatic method for solving discrete programming problems. *Econometric*, 28:497–520.
- Lima, A. D. (2006). Modelos matemáticos aplicados a problema na cultura da cana-de-açúcar e no aproveitamento da energia da biomassa. Master's thesis, Faculdade de Ciências Agrônomicas – Universidade Estadual Paulista, Botucatu, SP.
- Lima, A. D. (2009). *Otimização do aproveitamento do palhico de cana-de-açúcar*. PhD thesis, Faculdade de Ciências Agrônomicas, Universidade Estadual Paulista, Botucatu, SP.
- Lustig, I. J., Marsten, R. E. e Shanno, D. F. (1995). On implementing mehrota's predictor-corrector interior point method for linear programming. *SIAM Journal on Optimization*, 2:435–449.

- Marques, P. V. (2009). *Custo de produção agrícola e industrial de açúcar e álcool no Brasil na safra 2007/2008*. Programa de Educação Continuada em Economia e Gestão de Empresas, Departamento de Economia, Administração e Sociologia, Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz-- Universidade de São Paulo, Piracicaba, SP.
- Marquesini, A. G., Sanches, R. B. e Souza, J. W. M. (2006). *Modelo matemático para otimizar a roteirização mensal das frentes de colheita de cana-de-açúcar em usinas sucroalcooleiras*. XII SIMPEP – Simpósio de Engenharia de Produção, Bauru, SP.
- Martins, A. C. S. (2011). O método de pontos interiores no planejamento da radioterapia. Master's thesis, Instituto de Biociências de Botucatu – Universidade Estadual Paulista, Botucatu.
- Mehrotra, S. (1992). On the implementation of a primal-dual interior point method. *SIAM Journal on Optimization*, 2:572–601.
- Mehrotra, S. e Sun, J. (1990). An interior point algorithm for convex quadratic programming that requires  $o(n^{3.5})$  arithmetic operations. *Mathematics of Operations Research*, 15:342–363.
- Miettinen, K. (1999). *Nonlinear multi-objective optimization*. Kluwer, Boston.
- Mitchell, J. E. (1995). *Interior point algorithms for integer programming*. *Advances in Linear and Integer Programming*, chapter 6 Interior point algorithms for integer programming. Oxford University Press.
- Mitchell, J. E. (1997). Fixing variables and generating classical cutting planes when using an interior point branch and cut method to solve integer programming problems. *Europeans Journal of Operation Research*, 97(1):139–148.
- MME (2010). Disponível em <http://www.mme.gov.br>. Ministério de Minas e Energia. Acesso em 12 de janeiro.
- Monteiro, R. D. C., Adler, I. e Resende, M. C. (1990). A polynomial-time primal-dual affine scaling algorithm for linear and convex quadratic programming and its power series extension. *Mathematics of Operations Research*, 15:191–214.
- Nascimento, A. N. (2006). *Otimização da capacidade de instalações sucro-alcooleiras*. PhD thesis, Faculdade de Engenharia Química – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.
- Oddone, D. C. (2001). Cogeração: uma alternativa para produção de eletricidade. Master's thesis, Escola Politécnica, Faculdade de Economia e Administração, Instituto de Física e Instituto de Eletrotécnica e Energia – Universidade de São Paulo, São Paulo, SP,.

- Oliveira, E. J., Rocha, R. S., Silva, I. C., Marcato, A. L. M., Oliveira, L. W. e Pereira, J. L. R. (2009). Influência da variação da produtividade das usinas hidroelétricas no cálculo da energia firme. *Sociedade Brasileira de Automática: Controle & Automação*, 20(2).
- Padberg, M. e Rinaldi, G. (1991). A branch-and-cut algorithm for the resolution of large-scale symmetric traveling salesman problem. *SIAM Review*, 33:60–100.
- Paiva, R. P. O. e Morabito, R. (2007). Um modelo de otimização para o planejamento agregado da produção em usinas de açúcar e álcool. *G&P – Gestão & Produção, São Carlos*, 14(1):25–41.
- Pellegrini, M. C. (2002). Inserção de centrais cogeneradoras a bagaço de cana-de-açúcar no parque energético do estado de são paulo: exemplo de aplicação de metodologia para análise dos aspectos locacionais e de integração energética. Master's thesis, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP.
- Pinheiro, R. B. N. (2012). Um método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores barreira logarítmica modificada, com estratégias de global e de ajuste cúbico, para problemas de programação não-linear e não-convexa. Master's thesis, Faculdade de Engenharia de Bauru – Universidade Estadual Paulista, Bauru, SP.
- Pinto, L. A. (1999). Métodos de pontos interiores para programação inteira. Master's thesis, Instituto de Biociências, Letras, e Ciências – Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, SP.
- Probst, R. W. e Oliveira, A. R. L. (2013). Métodos de pontos interiores aplicados ao problema de pré-despacho de um sistema hidrotérmico. *Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento*, 5:14–30.
- Ramos, R. P. (2010). Modelo matemático para custo e energia na produção de açúcar e álcool. Master's thesis, Faculdade de Ciências Agrônomicas – Universidade Estadual Paulista, Botucatu, SP.
- Rangel, J. J. A., Francisco, L. E. S., Nogueira, V. P., Vianna, D. S. e Meza, E. B. M. (2009). Modelo de simulação para o sistema de corte, carregamento e transporte de cana-de-açúcar: um estudo de caso no estado do rio de janeiro. *Vértices, Campos dos Goytacazes, RJ*, 11(1/3):43–54.
- Ripoli, M. L. C. (2002). Mapeamento do palhiço enfardado de cana-de-açúcar (*saccharum ssp.*) e do seu potencial energético. Master's thesis, Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz – Universidade de São Paulo, Piracicaba, SP.

- Ripoli, T. C. C. (1991). Utilização do material remanescente da colheita de cana-de-açúcar (*saccharum ssp*) - equacionamento dos balanços energético e econômico. Master's thesis, ESALQ, USP, Piracicaba, SP.
- Ripoli, T. C. C. e Ripoli, M. L. C. (2004). *Biomassa de cana-de-açúcar: colheita, energia e ambiente*. USP-ESALQ, Piracicaba, SP.
- Sartori, M. M. P. (2001). *Otimização da produção de energia e biomassa do resíduo de colheita em variedades de cana-de-açúcar*. PhD thesis, Faculdade de Ciências Agrônomicas – Universidade Estadual Paulista, Botucatu, SP.
- Sartori, M. M. P., Florentino, H. O., Basta, C. e Leão, A. L. (2001). Determination of the optimal quantity of crop residues for energy in sugarcane crop management using linear programming in variety selection and planting strategy. *Energy*, 26:1031–1040.
- Scarpari, M. S. (2007). *PREDPOL: Um modelo de previsão da maturação da cana-de-açúcar visando planejamento otimizado*. PhD thesis, Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz – Universidade de São Paulo, Piracicaba, SP.
- Silva, L. M. (2011). Algoritmo genético na otimização do custo de colheita e de transporte da cana-de-açúcar. Master's thesis, Faculdade de Ciências Agrônomicas – Universidade Estadual Paulista, Botucatu, SP.
- Souza, M. A. S. (2010). Investigação e aplicação de métodos primal - dual de pontos interiores em problemas de despacho econômico e ambiental. Master's thesis, Faculdade de Engenharia de Bauru – Universidade Estadual Paulista, Bauru, SP.
- Stanzani, A. L. (2012). Método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores em problemas multiobjetivo de despacho econômico e ambiental. Master's thesis, Faculdade de Engenharia de Bauru – Universidade Estadual Paulista, Bauru, SP.
- Terramoto, E. R. (2003). *Avaliação e aplicação de modelos de estimativa de produção de cana-de-açúcar (Saccharum spp) baseados em parâmetros do solo e do clima*. PhD thesis, Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz – Universidade de São Paulo, Piracicaba, SP.
- Tolentino, G. (2007). Programação linear inteira aplicada ao aproveitamento do palhico da cana-de-açúcar. Master's thesis, Faculdade de Ciências Agrônomicas, Universidade Estadual Paulista, Botucatu, SP.
- Torquato, S. A. e Ramos, R. C. (2012). Protocolo agroambiental do setor sucroalcooleiro paulista: ações visando à preservação ambiental. *Análises e Indicadores do Agronegócio*, 7(6).

- UNICA (2010). *Etanol e bioeletricidade: a cana-de-açúcar no futuro da matriz energética*. União da Agroindústria Canavieira de São Paulo, São Paulo, prole edition. Luc Projetos de Comunicação.
- UNICA (2011). *Bioeletricidade: a energia verde e inteligente do Brasil*. União da Agroindústria Canavieira de São Paulo, São Paulo, prole edition. Sousa, E. L & Macedo, I. C (coord.).
- UNICA (2012). Disponível em : <http://www.unica.com.br>. União da Agroindústria Canavieira de São Paulo.
- Wright, S. J. (1997). *Primal-dual interior-point methods*. SIAM.
- Wu, Y. C., Debs, A. S. e Marsten, R. E. (1994). A direct nonlinear predictor-corrector primal-dual interior-point algorithm for optimal power flows. *IEEE Transactions on Power Systems*, 9(2):876–883.
- Yamada, M. C., Porto, A. J. V. e Inamasu, R. Y. (2002). Aplicação dos conceitos de modelagem e de redes de petri na análise do processo produtivo da indústria sucroalcooleira. *Pesquisa Agropecuária Brasileira*, 37(6):809–820.

# Apêndice A

## Método de plano de corte

O método de planos de corte foi a primeira técnica sistemática desenvolvida para PPLI. O método opera construindo uma sequência de problemas lineares pela adição sucessiva de inequações lineares que eliminem a solução do problema linear anterior, mas que não eliminem nenhum ponto viável inteiro, ou seja, reduzindo o espaço das soluções.

Nessa Seção é apresentada uma ideia geral do método, visto que este é utilizado no desenvolvimento do método *branch-and-cut*. Em geral, o método de planos de corte é resolvido utilizando o método Simplex, porém nesse trabalho é apresentada uma adaptação para o método de pontos interiores, baseando-se em Mitchell (1995). Para um melhor entendimento, são necessárias as seguintes definições.

Dado o PPLI inicial PI, apresentado em (4.69) e o problema relaxado PR, visto em (4.71), tem-se que uma inequação válida para PI é uma inequação linear que é satisfeita por todos os pontos de PI, e representada por:

$$a_0^T x \leq b_0, \forall x \in \Omega_{PI} \quad (\text{A.1})$$

em que  $a_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $b_0 \in \mathbb{R}$  e  $\Omega_{PI}$  está definido em (4.70).

O plano de corte é considerado quando uma inequação válida é adicionada à PR e esta elimina um ponto fracionário  $x_f$  de PR, ou seja:

$$a_0^T x_f > b_0 \quad (\text{A.2})$$

O método adotado para a geração de plano de corte é que vai definir, por exemplo, como gerar inequações válidas, como reotimizar o problema após a adição e/ou eliminação de inequações, quando gerar novos cortes e quando eliminar cortes que se tornam desnecessários para o problema. Nesta seção serão apresentadas duas vertentes: planos de corte de Gomory e planos de corte gerados a partir de pontos interiores.

## A.1 Planos de corte de Gomory

Quando PR é resolvido utilizando o método Simplex, é possível gerar cortes a partir de qualquer restrição associada à variável básica que tenha valor fracionário e/ou da função objetivo, usando os custos reduzidos ótimos, quando estes têm valor fracionário.

Seja a matriz  $A = [B|N]$ , tal que a submatriz  $B$  é uma matriz não-singular correspondentes às variáveis básicas  $x_B$  e  $N$  é uma matriz não-singular correspondentes às variáveis não- básicas  $x_N$ . E ainda,  $c^* = c^T x^*$ , em que  $c^*$  é o valor de uma solução ótima de PR,  $\bar{A}^S = B^{-1}N$ ,  $\bar{b}^S = B^{-1}b$  e  $\bar{c}^T = c_N^T - c_B^T \bar{A}^S$ .<sup>1</sup>

Uma solução básica pode ser escrita da seguinte forma:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N = \bar{b}^S - \bar{A}^S x_N \quad (\text{A.3})$$

Considerando a  $i$ -ésima variável básica com valor fracionário tem-se:

$$\bar{b}_i^S - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij}^S x_j = x_{B_i}, \forall i \in B \quad (\text{A.4})$$

Seja  $f_a = a - [a]$ , que  $[a]$  representa o maior inteiro menor ou igual a  $a$ , e  $f_a$  representa a parte fracionária de  $a$ .

Como  $x \geq 0$ , uma forma de obter uma inequação válida para PI é considerar apenas a parte inteira do lado esquerdo da equação (A.4), como é visto a seguir:

$$[\bar{b}_i^S] - \sum_{j \in N} [\bar{a}_{ij}^S] x_j \leq x_{B_i}, \forall i \in B \quad (\text{A.5})$$

Subtraindo a equação (A.5) de (A.4), obtém-se:

$$f_{\bar{b}_i^S} - \sum_{j \in N} f_{\bar{a}_{ij}^S} x_j \leq 0, \forall i \in B \quad (\text{A.6})$$

Assim, a inequação (A.7) decorrente de (A.6), é um plano de corte de Gomory gerado por variáveis básicas com valores fracionários.

$$\sum_{j \in N} f_{\bar{a}_{ij}^S} x_j \geq f_{\bar{b}_i^S}, \forall i \in B \quad (\text{A.7})$$

Outra maneira de se gerar um plano de corte é através da função objetivo, que pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} c_B^T \bar{b}^S + \bar{c}_N^T x_N &= c^T x \\ c_B^T \bar{b}^S + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j &= c^T x \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

<sup>1</sup>O índice  $S$  utilizado nas variáveis, representam variáveis do método Simplex.



De maneira análoga ao procedimento realizado de (A.4) a (A.7), desde que  $x \geq 0$ , considera-se apenas a parte inteira do lado esquerdo da equação (A.8), resultando na seguinte inequação:

$$\lfloor c_B^T \bar{b}^S \rfloor + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{c}_j \rfloor x_j \leq c^T x \quad (\text{A.9})$$

Substituindo (A.8) em (A.9), obtém-se:

$$\begin{aligned} \lfloor c_B^T \bar{b}^S \rfloor + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{c}_j \rfloor x_j &\leq c_B^T \bar{b}^S + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j \\ (\lfloor c_B^T \bar{b}^S \rfloor - c_B^T \bar{b}^S) + \left( \sum_{j \in N} \lfloor \bar{c}_j \rfloor x_j - \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j \right) &\leq 0 \\ -f_{c_B^T \bar{b}^S} - \sum_{j \in N} f_{\bar{c}_{N_j}} x_j &\leq 0 \\ f_{c_B^T \bar{b}^S} + \sum_{j \in N} f_{\bar{c}_{N_j}} x_j &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Como a soma dos custos relativos fracionários nunca será igual a zero, a inequação (A.10) é reescrita por:

$$f_{c_B^T \bar{b}^S} + \sum_{j \in N} f_{\bar{c}_{N_j}} x_j > 0 \quad (\text{A.11})$$

Desta forma, a inequação (A.11) é um plano de corte de Gomory gerado pelos custos relativos com valores fracionários.

## A.2 Planos de corte gerados a partir do método de pontos interiores

Mitchell (1997) apresenta como gerar cortes de Gomory utilizando o método de pontos interiores.

Para resolver o problema relaxado PR utilizando o método de pontos interiores, apresentado em 4.1, é necessário que, em cada iteração, a matriz definida positiva seja calculada.

$$A\theta_k A^T \quad (\text{A.12})$$

em que a matriz  $\theta_k$  é calculada em (4.44).

De acordo com o autor, esta matriz (A.12) pode ser utilizada para gerar um plano de corte, equivalente ao corte de Gomory se a relaxação corrente for resolvida até a otimalidade e for não degenerada. Assim, é proposta a seguinte matriz:

$$P^{cut} = \theta_k A^T (A\theta_k A^T)^{-1} A \quad (\text{A.13})$$

Esta relação é apresentada pelo seguinte teorema:

**Teorema 1:** Suponha que o problema relaxado PR seja não degenerado e que  $x_i^*$  é uma variável básica em sua solução ótima. Conforme avançamos nas iterações de pontos interiores, a  $i$ -ésima linha da matriz  $P^{cut}$  tende à linha correspondente à variável básica  $x_i^*$  da solução ótima obtida pelo método Simplex.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Mitchell (1997).

As linhas da matriz (A.13) podem ser geradas através da resolução do seguinte sistema:

$$(A\theta_k A^T) v_i = (\theta_k)_{ii} a_i \quad (\text{A.14})$$

em que:

$a_i$ :  $i$ -ésima linha da matriz  $A$ .

$(\theta_k)_{ii} a_i$ :  $i$ -ésima linha da matriz  $\theta_k A$ .

Assim, a  $i$ -ésima linha de  $P^{cut}$ , denominada  $p_i$ , é calculada por:

$$p_i^T = v_i^T A \quad (\text{A.15})$$

Para gerar o corte, basta pós multiplicar  $x$  em ambos os lados da equação (A.15), como segue:

$$p_i^T x = v_i^T A x \quad (\text{A.16})$$

considerando que  $Ax = b$ , tem-se que:

$$p_i^T x = v_i^T b \quad (\text{A.17})$$

Desta forma, a equação (A.17) pode ser usada para gerar inequações válidas para o problema relaxado PR.

À medida que a solução se aproxima da otimalidade, tem-se (A.17) equivalente ao corte de Gomory, conforme é apresentado no Teorema 2 a seguir:

**Teorema 2:** Seja  $p_i$  a  $i$ -ésima linha de  $P^{cut}$  e  $v_i = (\theta_k)_{ii} (A\theta_k A^T)^{-1} a_i$ . Então a inequação

$$f_{p_i^T} x = f_{v_i^T} b \quad (\text{A.18})$$

é satisfeita para toda solução viável de PI. Se PR é não degenerado então esta restrição dá o corte de Gomory para a variável  $x_i$  quando  $(c^T \bar{x} - b^T \bar{w}) \rightarrow 0$ .

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Mitchell (1997).

Partindo da propriedade de que as folgas duais são iguais aos custos reduzidos das variáveis primais na otimalidade no método de pontos interiores, é possível gerar cortes

de Gomory a partir da função objetivo.

Assim, através de qualquer par de soluções primal-dual viáveis, é possível encontrar uma inequação válida equivalente a (A.11), como mostra o Teorema 3 a seguir, cuja demonstração é vista em Mitchell (1997).

**Teorema 3:** Seja  $\bar{x}$  e  $\bar{w}$  soluções primal e dual viáveis, respectivamente, e  $\bar{y}$  e  $\bar{s}$  as folgas duais correspondentes. Suponha que existe um número inteiro  $\rho$  tal que  $\rho < b^T \bar{w} \leq c^T \bar{x} < \rho + 1$ . Então a restrição:

$$f_{b^T \bar{w}} - \sum_{i=1}^n f_{\bar{y}_i} x_i + \sum_{i=1}^n f_{\bar{s}_i} x_i \geq 1 \quad (\text{A.19})$$

é válida para PI mas violado por  $\bar{x}$ . Mas ainda: se o PR for não-degenerado, então esta restrição é equivalente ao corte de Gomory (A.11) no limite de  $(c^T \bar{x} - b^T \bar{w}) \rightarrow 0$ .

## A.3 Reotimização

Para o uso do método de pontos interiores com o método de planos de corte, algumas técnicas devem ser definidas, tais como: reiniciar o algoritmo e recuperar a viabilidade primal do problema após a adição de planos de corte, resolver o problema relaxado, antecipando sua parada, e ainda, eliminar inequações desnecessárias do problema. Esses tópicos serão tratados nesta seção.

### A.3.1 Reiniciando o algoritmo e recuperando a viabilidade primal

Considerando o PPL (4.5), definido em 4.1, para variáveis limitadas superiormente ( $\bar{l} = 0$ ), e supondo que o plano de corte  $a_0^T \tilde{x} \leq b_0$  seja adicionado ao problema, já considerando suas variáveis de folga ( $a_0^T x = b_0$ ), tem-se o seguinte problema relaxado primal (PRP) da forma:

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar } c^T x \\ \text{Sujeito a: } \left\{ \begin{array}{l} Ax = b \\ a_0^T x = b_0 \\ x + z = \bar{u} \\ x \geq 0 \\ z \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \quad (\text{A.20})$$

com seu dual (PRD) correspondente:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } b^T w + b_0^T w_0 - \bar{u}^T y \\ & \text{Sujeito a: } \begin{cases} A^T w + a_0^T w_0 - y + s = c \\ s \geq 0 \\ y \geq 0 \quad w, w_0 \text{ irrestrito} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Sabe-se que uma solução corrente  $\hat{x}$  satisfaz  $Ax = b$  e  $x + z = \bar{u}$ , mas não satisfaz  $a_0^T x = b_0$ . O ponto dual corrente  $\hat{w}, \hat{y}$  e  $\hat{s}$  é viável para PRD se  $w_0 = 0$ . Além disso, tem-se que  $\hat{x} > 0$ ,  $\hat{w} > 0$  e as folgas primal e dual são estritamente positivas, exceto aquela associada à nova restrição. Como  $w_0 = 0$  não é um ponto interior, pode ser uma grande dificuldade reiniciar o problema desse ponto, pois segundo Pinto (1999), o método de pontos interiores primeiro tentará gerar direções para o centro do politopo e em seguida, direções que levem à solução. Uma estratégia, para evitar esse problema, é adotar  $w_0 = \gamma$ , de modo a tornar o dual inviável, e resolver o problema PR usando um método de ponto exterior, e fazer todas as variáveis iguais a  $\gamma$ , quando estas forem menores que  $\gamma$ .

Ao adotar  $w_0 = \gamma$ , o dual torna-se inviável, e deve-se tomar um certo cuidado pois o algoritmo de pontos interiores pode acabar longe da otimalidade enquanto busca pela viabilidade.

Dessa forma, se a solução  $\hat{x}$  satisfaz a restrição adicionada na igualdade,  $\bar{w}_0$  será estritamente positivo. Assim, o algoritmo aumenta  $w_0$  de  $\gamma$  para um número positivo diferenciando-se de  $w_0 = \gamma$ .

### A.3.2 Resolvendo a relaxação aproximadamente

Essa técnica trata de interromper a resolução da relaxação corrente antes que se obtenha a solução ótima, e assim, introduzir os planos de corte para eliminar a solução aproximada (Pinto, 1999).

As principais vantagens desse procedimento, segundo Mitchell (1995) é que:

- As soluções para o próximo subproblema são mais centradas, o que requer um número reduzido de iterações para resolver o próximo subproblema.
- No problema corrente, são necessárias menos iterações.
- Permite encontrar cortes que eliminam mais a região viável de PR e aproximam-se mais da solução ótima de PI, visto que a solução antecipada está mais próxima do centro da região viável de PR.
- Pode acontecer de cortes encontrados pela busca antecipada não sejam encontrados até a próxima relaxação.

Porém, segundo o autor, existem duas grandes desvantagens:

- Não há a garantia de encontrar planos de corte, a menos que resolva-se até a otimalidade, porém muito tempo seria gasto devido ao fato da busca antecipada.
- Pode gerar cortes desnecessários, visto que a solução antecipada pode estar fora do envoltório convexo da região viável.

Visando ponderar as vantagens e as desvantagens, o autor sugere a busca por planos de corte apenas nos casos em que uma tolerância adotada seja menor que o gap de dualidade ( $c^T x - b^T w$ ). Esta tolerância pode ser alterada de acordo com a quantidade de planos de corte, assim quando se tem muitos planos de corte, aumenta-se a tolerância, e quando se tem poucos, diminui-se.

### A.3.3 Gerando e eliminando restrições

Após a geração dos planos de corte, temos o seguinte problema equivalente:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } c^T x \\ & \text{Sujeito a: } \begin{cases} Ax = b \\ A_0^T x = b_0 \\ x + z = \bar{u} \\ x \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

com o dual:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } b^T w + b_0^T w_0 - \bar{u}^T y \\ & \text{Sujeito a: } \begin{cases} A^T w + A_0^T w_0 - y + s = c \\ s \geq 0 \\ y \geq 0 \quad w, w_0 \text{ irrestrito} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

em que  $A_0$  é a matriz de restrições adicionadas.

Um número elevado de restrições adicionadas pode ser um problema, pois pode mudar o problema relaxado primal e dual, além da resolução do problema modificado, aumentando consideravelmente o número de iterações do método de pontos interiores. Dessa forma, sugere-se eliminar cortes encontrados que se tornam desnecessários.

Padberg e Rinaldi (1991) sugerem um critério que, inicialmente verifica se o corte que acabou de ser gerado, já foi gerado anteriormente, e verifica também a violação na solução primal corrente  $\bar{x}$ , através de  $|a_0^T \bar{x} - b_0|$ , que avalia a profundidade dos cortes, e os classifica dessa maneira. Feito isso, apenas um número pré-determinado  $\rho$  de cortes é adicionado ao problema.

## A.4 Algoritmo planos de corte (PC)

O algoritmo de planos de corte apresentado é baseado em Pinto (1999), considerando  $\Omega^0$ , definido em (4.23), e  $gap = c^T x - b^T w$ .

### Passo 1: Inicialização

Encontrar  $(x^0, w^0, z^0, y^0, s^0) \in \Omega^0$ , definir as tolerâncias  $\tau_1$  (otimalidade),  $\tau_2 > \tau_1$  (geração de cortes) e  $\gamma > 0$ .

### Passo 2: Resolver aproximadamente a relaxação corrente

Resolver problema relaxado através do método definido em 4.1.

- 2.1. Se  $gap < \tau_1$ , adotar  $x^*$  como solução. Ir para passo 7.
- 2.2. Se  $gap < \tau_2$ , ir para o passo 3.
- 2.3. Caso contrário, repetir esse passo.

### Passo 3: Procurando planos de corte

Tentar gerar planos de corte. Se nenhum for gerado, reduzir  $\tau_2$  e voltar ao passo 2. Caso contrário, ir para o passo 4.

### Passo 4: Adicionando planos de corte

Do conjunto de cortes encontrados, selecionar um subconjunto para adição ao problema. Caso este subconjunto seja muito grande, aumentar  $\tau_2$ . Se for muito pequeno, diminuir  $\tau_2$ .

### Passo 5: Eliminando planos de corte

Eliminar restrições desnecessárias.

### Passo 6: Modificando a iteração corrente

Fazer as componentes  $x$ ,  $w$ ,  $z$ ,  $y$  e  $s$  da solução menores ou iguais a  $\gamma$ . Voltar ao passo 2.

### Passo 7: Fim

Se  $x^*$  for inteiro, então é a solução ótima, e PI foi resolvido. Caso contrário, PR não tem solução inteira.

## Apêndice B

# Método híbrido envolvendo os métodos previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e *branch-and-cut*

Da mesma forma que foi proposto um método híbrido entre os métodos de pontos interiores e *branch-and-bound*, é proposto nesse capítulo, um procedimento híbrido que envolve o método *branch-and-cut*, e o método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores, visto em 4.1. Esse método híbrido também pode ser aplicado à resolução dos modelos matemáticos referentes à cana-de-açúcar apresentados no Capítulo 3 desse trabalho.

### B.1 Método *branch-and-cut*

De modo geral, o método *branch-and-cut*, também utilizado na resolução de PPLI's, incorpora, a cada nó do método *branch-and-bound*, a geração de planos de corte ao problema.

O método de planos de corte é uma alternativa para melhorar a relaxação utilizada pelo método *branch-and-bound*, visto que este fator implica diretamente na dificuldade de se encontrar uma solução viável para o problema. Se a relaxação é ruim, o número de nós aumenta, o que implica em um número maior de ramificações a serem investigadas.

Desta forma, no algoritmo *branch-and-cut* (BC), todos os passos do algoritmo *branch-and-bound* (BB) são executados, adicionando, quando necessário, inequações válidas para o problema, com o objetivo de eliminar soluções fracionárias. Assim, ocorre a seleção do subproblema para a avaliação, a seleção da variável fracionária, e a geração ou não de planos de corte.

O processo que verifica se há a necessidade ou não de gerar cortes é denominada “*Tailing-off*”. Neste procedimento, é avaliada a melhoria no valor da função objetivo. Se

nas últimas iterações, esta não for um valor considerável, a geração de planos de corte é interrompida e o subproblema é ramificado.

O procedimento de geração de cortes, o qual se tenta encontrar inequações válidas para que estas sejam adicionadas aos subproblemas, é a parte fundamental do algoritmo *branch-and-cut*. Tem-se que, se uma inequação vale para cada subproblema da árvore de busca *branch-and-cut*, então esta é válida globalmente. Caso contrário, é considerada válida localmente.

## B.2 Algoritmo *branch-and-cut* (BC)

O algoritmo a seguir, baseado em Pinto (1999) e Borchers e Mitchell (1992), descreve os passos do método *branch-and-cut*. Considera-se que  $L_0$  é o conjunto de subproblemas, e que cada problema relaxado corrente  $P_j$ , definido em (4.73), é resolvido através do método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores, apresentado na Seção 4.1.

### Passo 1: Inicialização

Seja  $L_0 = \{P_j\}$ ,  $\bar{z}^j = -\infty$  e  $z^* = \infty$ .

### Passo 2: Resolver a relaxação corrente

Resolver problema relaxado (PR) através de  $P_j$  (4.73). Ir para o passo 3.

### Passo 3: Poda por inviabilidade

Se o problema corrente é inviável, conforme o item 1 apresentado em 4.2.1, podar o nó e voltar ao passo 1. Caso contrário, armazenar a solução ótima do subproblema em  $\bar{z}^j = c^T \bar{x}^j$ , em seguida, ir para passo 4.

### Passo 4: Poda por limite

Se  $\bar{z}^j \geq z^*$ , conforme o item 2 apresentado em 4.2.1, podar o nó corrente e voltar ao passo 1. Caso contrário, ir para passo 5.

### Passo 5: Poda por integralidade

Se  $\bar{x}^j$  é inteiro, conforme o item 3 apresentado em 4.2.1, podar o nó corrente. Fazer  $z^* = \min\{\bar{z}^j, z^*\}$  e voltar ao passo 1. Caso contrário, ir para passo 6.

### Passo 6: *Tailing-off*

Se há continuidade na geração de cortes, ir para o passo 7. Caso contrário, ir para o passo 8.

### Passo 7: Geração de planos de corte



Gerar inequações válidas para PI que sejam violadas por variáveis fracionárias. Adicionar os cortes à  $P_j$  e voltar ao passo 1.

**Passo 8: Ramificação**

Escolher uma variável fracionária da solução corrente e particionar  $P_j$ , acrescentando as restrições (4.74) e (4.75). Adicionar os subproblemas ao conjunto  $L_0$  e ir para passo 9.

**Passo 9: Seleção do nó**

Selecionar um subproblema do conjunto  $L_0$  e resolver através do passo 1. Caso  $L_0 = \emptyset$ , ir para passo 10.

**Passo 10: Fim** Se  $z^* = \infty$ , então o problema PI não tem solução. Se  $z^* < \infty$  então a solução  $\bar{x}^j$ , que retorna o melhor valor factível da função objetivo  $z^*$ , é a solução ótima para PI.

## **B.3 Método híbrido envolvendo os métodos previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e *branch-and-cut***

Como dito anteriormente, o método *branch-and-cut* incorpora os planos de corte ao método *branch-and-bound*. Dessa maneira, os procedimentos utilizados no método de plano de corte, que pode ser visto no Apêndice A, serão apresentados nessa seção para o método *branch-and-cut*, com algumas modificações. Além disso, utiliza-se o critério de integralidade (4.79) proposto por Borchers e Mitchell (1992), além dos testes apresentados na Seção 4.1.3.

A seguir, é apresentado o método *branch-and-cut* associado ao método de pontos interiores previsor-corretor primal-dual para problemas inteiros zero-um.

### **B.3.1 Ponto de partida**

Supondo que o subproblema gerado foi criado para fixar a variável fracionária no seu limite superior ou inferior por uma variável no problema corrente, tem-se o seguinte

PR-pai em seu formato padrão:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } c^T x + c_0 x_0 \\ & \text{Sujeito a: } \begin{cases} Ax + a_0 x_0 = b \\ a_0^T x = b_0 \\ x + z = 1 \\ x_0 + z_0 = 1 \\ x \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

em que  $c_0$  e  $x_0$  são escalares e  $z_0$  é folga primal.

Dessa forma, o problema particular gerado PR-filho tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } c^T x \\ & \text{Sujeito a: } \begin{cases} Ax = \bar{b} \\ x + z = 1 \\ x \geq 0, z \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

em que  $\bar{b} = b - a_0$  quando  $x_0$  é fixo em 1. Sendo  $x = x^*$ ,  $x_0 = x_0^*$  soluções aproximadas para o PR-pai, sabe-se que  $x_0^*$  é fracionário, e  $x^*$  é inviável para PR-filho, quando consideramos (B.2). A seguir, são definidos os problemas duais PRD-pai e PRD-filho, expressos em (B.3) e (B.4), respectivamente.

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } b^T w - y - y_0 \\ & \text{Sujeito a: } \begin{cases} A^T w - y + s = c \\ a_0^T w - y_0 + s_0 = c_0 \\ y, y_0, s, s_0 \geq 0 \\ w \text{ irrestrito} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } \bar{b}^T w - y \\ & \text{Sujeito a: } \begin{cases} A^T w - y + s = c \\ y, s \geq 0 \\ w \text{ irrestrito} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Considerando (B.3) e (B.4), tem-se que a solução aproximada  $w = \bar{w}^*$ ,  $s = \bar{s}^*$ ,  $y = \bar{y}^*$ ,  $y_0 = \bar{y}_0^*$  para o PRD-pai é viável também para PRD-filho. Assim, é possível reiniciar o algoritmo utilizando o método de pontos interiores.

Caso as componentes de  $x^*$  estejam muito próximas da fronteira, estas podem ser

ajustadas para pontos mais interiores, assim, se os valores forem muito grandes, podem ser diminuídos, ou vice-versa. Da mesma forma, se  $\bar{w}^*$ ,  $\bar{s}^*$  e  $\bar{y}^*$  ou as variáveis de folga primal ou dual são menores que as determinadas tolerâncias, estas podem ser aumentadas. E então, o método de pontos interiores pode ser iniciado para o problema PR-filho para os valores armazenados  $\bar{x}^*$ ,  $\bar{w}^*$ ,  $\bar{s}^*$  e  $\bar{y}^*$ .

Outra estratégia, proposta por Mitchell (1995), é iniciar o PR-filho, com solução encontrada antes de  $x^*$  para o PR-pai, que mesmo sendo uma solução distante da otimalidade para o PR-pai, é uma solução inicial melhor para o PR-filho, por ser mais centralizada.

### B.3.2 Terminando a relaxação corrente antecipadamente

Interromper a relaxação corrente, com a intenção de obter pontos mais centrais, terminando a relaxação antecipadamente, é uma estratégia utilizada como ponto de partida, como apresentado na Seção A.3.2.

Esse tipo de estratégia tem algumas desvantagens, como dividir um subproblema em dois, evitando resolvê-lo até sua otimalidade. Isso poderia ser evitado pelo uso dos limites inferior e superior que o subproblema oferece através da solução corrente, utilizando-os também, como critério para a ramificação.

Dessa forma, três testes para evitar a ramificação antecipada são propostos por Mitchell (1995):

- A solução dual tem que ser viável – Uma vez alcançada, esta viabilidade pode ser mantida na árvore de busca.
- A inviabilidade primal relativa deve estar em torno de 10% - Essa inviabilidade pode ser recuperada em poucas iterações, caso uma variável seja fixada em toda ramificação.
- O valor da função objetivo dual, não pode aumentar rapidamente a cada iteração – Este critério pode ser atendido quando a iteração primal corrente é viável, e se o seu valor objetivo é maior do que o problema inteiro corrente.

### B.3.3 Algoritmo previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e *branch-and-cut* (PDBC)

O algoritmo envolvendo os métodos previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e *branch-and-cut* proposto é baseado em Pinto (1999), considerando  $\Omega^0$ , definido em (4.23), e  $gap = c^T x - b^T w$ . Considera-se que  $L_0$  é o conjunto de subproblemas, e que cada problema relaxado corrente  $P_j$ , definido em (4.73), é resolvido através do método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores, apresentado na Seção 4.1.

**Passo 1: Inicialização**

Seja  $L_0 = \{P_j\}$ ,  $\bar{z}^j = -\infty$  e  $z^* = \infty$ , encontrar  $(x^0, w^0, z^0, y^0, s^0) \in \Omega^0$  e definir  $\tau_1$  (otimalidade).

**Passo 2: Resolver o problema relaxado**

Resolver problema relaxado (Pr) através de  $P_j$  (4.73) através do método de pontos interiores.

2.1. Se o problema é inviável, ir para o passo 8.

2.2. Se  $gap < \tau_1$ , seja  $\bar{x}^0$  a sua solução. Se  $\bar{x}^0$  é inteiro, fazer  $\bar{z}^0 = c^T \bar{x}^0$  e ir para o passo 8. Caso contrário, ir para o passo 7.

2.3. (*Tailing-off*) Se há continuidade na geração de cortes, vá ao passo 3. Caso contrário, vá ao passo 7.

**Passo 3: Geração de planos de corte**

Gerar inequações válidas para  $\Omega_{PI}$  que sejam violadas pela solução da relaxação linear corrente  $\bar{x}^j$ . Adicionar os cortes a  $\Omega_{PRE}$  voltar para o passo 2.

**Passo 4: Seleção do nó**

Selecionar um subproblema do conjunto  $L$  e resolver através do passo 5. Caso  $L_0 = \emptyset$ , ir para passo 8.

**Passo 5: Resolver o subproblema corrente**

Fazer uma iteração do método de pontos interiores e ir para o passo 6.

**Passo 6: Poda**

2.1. Inviabilidade – Se o problema corrente é inviável, conforme o item 1 apresentado em 4.2.1, podar o nó e voltar para o passo 4. Caso contrário, armazenar a solução ótima do subproblema em  $\bar{z}^j = c^T \bar{x}^j$ .

2.2. Heurística primal – Fazer o teste de integralidade, proposto em (4.79), para verificar se  $P_j$  está convergindo para um valor fracionário. Caso esteja, ir para o passo 7.

2.3. Integralidade – Se  $\bar{x}^j$  é inteiro, conforme o item 3 apresentado em 4.2.1, podar o nó corrente. Fazer  $z^* = \min \{\bar{z}^j, z^*\}$  e voltar para o passo 4.

2.4. Limite – Se  $\bar{z}^j \geq z^*$ , conforme o item 2 apresentado em 4.2.1, podar o nó corrente e voltar ao passo 4.

2.5. Caso contrário, voltar para o passo 5.

**Passo 7: Ramificação**

Escolher uma variável fracionária da solução corrente  $\bar{x}^j$  e particionar  $P_j$ , acrescentando as restrições (4.74) e (4.75). Adicionar os subproblemas ao conjunto  $L_0$  e ir para passo 4.

**Passo 8: Fim**

Se  $z^* = \infty$ , então o problema PI não tem solução. Se  $z^* < \infty$  então a solução  $\bar{x}^j$ , que retorna o melhor valor factível da função objetivo  $z^*$ , é a solução ótima para PI.

Embora o método híbrido envolvendo os métodos previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e *branch-and-cut*, apresentado em B.3, tenha sido investigado, não foi possível realizar a sua implementação, devido ao tempo dedicado ao desenvolvimento desse trabalho. Assim, a implementação e testes computacionais desse método podem ser realizados em uma pesquisa futura, utilizando-o na investigação dos modelos de minimização de custo de colheita de cana-de-açúcar, custo de coleta do palhico e de maximização do balanço de energia gerada pela biomassa residual, vistos no Capítulo 3. Dessa forma, o desempenho desse método poderá ser comparado com o do método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e *branch-and-bound*, proposto na Seção B.3, discutido nesse trabalho, avaliando sua viabilidade na resolução dos modelos citados.

## Anexo A

# Dados para comparação de resultados

Nesse anexo estão as tabelas de resultados apresentadas em Homem (2010), em que os resultados foram obtidos a partir da aplicação do método híbrido de pontos interiores e *branch-and-bound*, desenvolvido por esse autor, associado às estratégias da soma ponderada e  $\varepsilon$ -restrito, para a determinação de soluções eficientes do modelo multiobjetivo que visa minimizar o custo de coleta de resíduos da cana-de-açúcar e maximizar o balanço de energia para o aproveitamento desses resíduos.

Dessa forma, a Tabela A.1 apresenta as variedades selecionadas para o plantio nos talhões, para cada  $\alpha \in [0, 1]$ , e relacionados a eles, estão os valores de custo de coleta e de balanço de energia apresentados na Tabela A.2.

A Tabela A.3 apresenta as variedades selecionadas para o plantio nos talhões para cada valor de balanço de energia escolhido como limitante e os valores de custo de coleta e balanço de energia determinados para cada restrição, são apresentados na Tabela A.4.

Tabela A.1: Variáveis selecionadas pela estratégia da soma ponderada.

Talhões $j$	Variedades para $\alpha =$									
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,95	0,99	0,992	0,993
1	4	4	4	4	4	4	4	4	4	7
2	4	4	4	4	4	4	4	4	7	7
3	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
4	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
5	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	4
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	4	4	4	4	4	4	4	4	4	7
9	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
10	7	7	7	7	7	7	7	4	4	4
11	4	4	4	4	4	4	4	7	7	7
12	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
13	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
14	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
15	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

Talhões $j$	Variedades para $\alpha =$						
	0,998	0,999	0,9991	0,9992	0,9993	0,9995	1
1	10	7	9	9	7	7	11
2	7	7	7	7	1	10	3
3	10	9	9	9	10	7	11
4	9	5	5	5	1	1	1
5	9	9	9	9	7	7	1
6	4	4	4	1	9	11	6
7	4	10	10	10	9	11	6
8	7	7	7	7	7	5	3
9	7	5	7	5	5	5	3
10	4	4	4	9	5	5	6
11	7	7	7	1	1	5	3
12	10	5	5	7	5	1	11
13	9	5	5	5	1	1	1
14	10	9	9	7	7	7	11
15	9	9	5	5	5	1	1

Fonte: Homem (2010).

Tabela A.2: Valores de custo e energia para cada valor  $\alpha$ .

$\alpha$	Custo (US\$)	Balanço (MJ)
0	59.523,37	71.608.908,7
0,1	59.523,37	71.608.908,7
0,2	59.523,37	71.608.908,7
0,3	59.523,37	71.608.908,7
0,4	59.523,37	71.608.908,7
0,5	59.523,37	71.608.908,7
0,95	59.523,37	71.608.908,7
0,99	59.507,11	71.607.755,40
0,992	59.473,63	71.604.385,70
0,995	59.295,31	71.581.520,43
0,998	59.204,42	71.545.049,35
0,999	52.554,45	67.175.675,57
0,9991	52.332,10	66.958.465,50
0,9992	49.357,69	63.488.270,10
0,9993	43.727,18	55.954.083,13
0,9995	41.747,56	52.605.659,07
1	37.892,92	43.451.748,85

Fonte: Homem (2010).

Tabela A.3: Variáveis selecionadas pela estratégia  $\varepsilon$ -restrito.

Talhões $j$	Variedades selecionadas para balanço ( $10^6$ MJ) $\geq a$								
	43	48	54	59	61,5	63	65,5	69	70,5
1	11	7	5	7	9	7	9	7	4
2	3	3	5	1	5	5	7	5	4
3	11	7	10	9	9	9	9	10	10
4	1	1	1	5	1	5	5	9	9
5	1	11	7	7	9	9	9	9	9
6	6	5	11	9	9	1	1	7	7
7	6	7	9	9	10	10	10	7	7
8	3	11	7	5	7	7	9	7	4
9	3	11	7	5	5	5	7	5	10
10	6	5	7	10	7	9	4	10	7
11	3	11	5	1	5	7	7	5	4
12	11	1	1	7	7	7	5	5	10
13	1	1	1	1	1	1	5	9	9
14	11	7	5	7	7	9	7	10	10
15	1	1	1	5	5	5	5	9	9

Fonte: Homem (2010).

Tabela A.4: Valores de custo e energia para cada restrição de balanço.

Restrição (MJ)	Custo (US\$)	Balanço (MJ)
43000000	37892,45	43446507,48
48000000	39711,61	48394224,02
54000000	42484,38	54005085,23
59000000	46090,45	59124810,00
61500000	47891,59	61553253,00
63000000	49044,40	63069565,00
65500000	51159,19	65572275,00
69000000	55049,88	69003395,00
70500000	57398,86	70502135,00

Fonte: Homem (2010).