

unesp



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

**ALOCAÇÃO ÓTIMA DE BANCOS DE
CAPACITORES EM SISTEMAS DE
DISTRIBUIÇÃO RADIAIS**

CRESENCIO SILVIO SEGURA SALAS

Ilha Solteira - SP

MESTRADO

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Alocação Ótima de Bancos de Capacitores em Sistemas de Distribuição Radiais

Aluno: Cresencio Silvio Segura Salas

Orientador: Rubén Augusto Romero Lázaro

Dissertação submetida à Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP, Campus de Ilha Solteira: Área de Concentração: Automação - Sistemas de Energia Elétrica como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

Ilha Solteira - SP, março de 2006

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Alocação Ótima de Bancos de Capacitores em Sistemas de Distribuição Radial

AUTOR: CRESENCIO SILVIO SEGURA SALAS

ORIENTADOR: Prof. Dr. RUBEN AUGUSTO ROMERO LAZARO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de MESTRE em ENGENHARIA ELÉTRICA pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. RUBEN AUGUSTO ROMERO LAZARO

Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. JOSE ROBERTO SANCHES MANTOVANI

Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. GERALDO ROBERTO MARTINS DA COSTA

Departamento de Engenharia Elétrica/Universidade de São Paulo/USP/São Carlos

Data da realização: 24 de março de 2006.



Presidente da Comissão Examinadora
Prof. Dr. RUBEN AUGUSTO ROMERO LAZARO

A **Deus** e à **minha família** sem os
quais não seria possível chegar até aqui.

“Tantas vezes pensamos ter chegado,
Tantas vezes é preciso ir além ...”
Fernando Pessoa.

FEPISA Este trabalho teve o suporte financeiro da FUNDAÇÃO DE ENSINO, PES-
QUISA E EXTENSÃO DE ILHA SOLTEIRA - (FEPISA)

Agradecimentos

A *Deus*, em primeiro lugar, que me permitiu ter a capacidade para realizar este trabalho e em seguida aos que nas horas difíceis estiveram comigo me ajudando.

Minha eterna gratidão a *meus pais e irmãos*, que ficaram longe de mim na distância mas que sua força e amor ficaram comigo e que foi fundamental para levar este trabalho adiante.

A minha esposa *Katheryne* pela paciência, amor e compreensão nas horas difíceis que demandou este trabalho.

Ao meu orientador Prof. *Rubén Romero Lázaro* pela grande oportunidade que me deu de realizar este trabalho, pela confiança, competência, disposição e atenção a mim prestados em todos os momentos. À Sra. *Lucila Reynoso de Romero* uma gratidão especial pela amizade e hospitalidade oferecida.

Aos professores *José Roberto Sanches Mantovani* e *Antônio Padilha Feltrin* pelas vezes que me auxiliaram em momentos de dúvidas e por suas amizades.

A todos os funcionários do DEE, que de uma maneira ou outra colaboraram para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Dr. *Marcos Rider* por sua valiosa colaboração em matéria do método de pontos interiores e no esclarecimento de dúvidas durante meu mestrado.

A minhas amigas *Silvia, Elisângela* e *Giorgeti* e ao amigo *Tadao* pelas sugestões e críticas para melhorar este trabalho e por suas amizades que ficarão no meu coração.

Um agradecimento especial ao amigo *Hélio Clementino dos Santos*, pela grande amizade e com quem tive oportunidade de conhecer um pouco da cultura brasileira.

Aos muitos amigos e amigas que tive a oportunidade de conhecer e que fizeram minha estadia mais prazenteira, em especial para *Jaine, Adriano, Vlademir* e *Wilmington*.

A *FEPISA*, pelo suporte financeiro deste trabalho, sem o qual sua realização não teria sido possível.

Resumo

Nos sistemas de distribuição radial devem ser instalados bancos de capacitores para reduzir as perdas, corrigir o fator de potência, melhorar o perfil de tensão e aliviar a capacidade do sistema. A decisão de onde alocar bancos, os tipos e potências e os pontos de operação destes, sujeito a um conjunto de restrições operacionais, de forma de minimizar os custos do sistema, gera um problema de programação não linear inteiro misto e que apresenta características de explosão combinatória para sistemas de médio e grande porte. A restrição dos limites de tensão nas barras e o objetivo de reduzir as perdas tornam-se conflitantes, isto especialmente quando o sistema está operando em horas ponta, faz que o problema seja ainda mais difícil de resolver. Esta situação justifica o desenvolvimento desta pesquisa utilizando uma nova técnica de otimização ainda pouco empregada na área de sistemas de distribuição. Assim, neste trabalho foi desenvolvido e implementado o método de pontos interiores para resolver o problema relaxado de alocação de capacitores. Um algoritmo heurístico construtivo em cada passo aloca os bancos de potências discretas utilizando a barra com maior injeção de reativos calculada pelo método de pontos interiores. A diferença de outras pesquisas com a nossa proposta é considerar um fator de sobrecarga alto para o nível pico de operação mantendo os limites de tensão de acordo as exigências da legislação do setor elétrico. O algoritmo implementado é testado em dois sistemas reais de 33 e 69 barras.

Abstract

On radial distribution systems, shunts capacitor must be installed for losses minimization, power factor correction; to improve voltage profile and system capacity release. The decision on where to place capacitors, the type and sizes, and the control settings of these, subject to set of operational restrictions generates a mixed integer no linear programming problem, and that it presents characteristics of combinatorial explosion for medium and large scale systems. The restriction at the bus voltage limits and the objective to reduce the losses becomes conflicting, this especially when the system is operating in peak load levels, make that the problem is still more difficult to solve. This situation justifies the development of this research using a new optimization technique still little used in the area of distribution systems. Thus, in this work was developed and implemented the method of interior points to solve the relaxed capacitor placement problem. A constructive heuristic algorithm in each step places the capacitors of discrete powers using sensitivity nodes with maximum injection of reactive power calculated by interior point method. The difference of other approaches with our proposal is to consider a high factor of overload for the pick load level keeping system voltage according to the requirement of the electrical sector legislation. The implemented algorithm is tested in two real networks of 33 and 69 bars.

Lista de Figuras

2.1	Curva de Duração de Carga	8
2.2	Diagrama unifilar do alimentador de distribuição	9
2.3	Função custo dos bancos de capacitores	12
3.1	Trajectoria Central e curvas de nível	36
3.2	Passo preditor e corretor	45
4.1	Típico sistema de distribuição radial	53
4.2	Injeção de corrente numa barra do sistema de energia eléctrica	55
5.1	Algoritmo heurístico construtivo base para o PAOBC	81
5.2	Algoritmo heurístico construtivo melhorado para o PAOBC	84
5.3	Perfil de tensão do sistema de 69 barras para o PAOBC com bancos mistos	95
5.4	Perfil de tensões do sistema de 33 barras para o PAOBC com bancos mistos.	97
B.1	Dados do sistema de 33 barras estudado	120
B.2	Dados do sistema de 69 barras estudado	121

Lista de Tabelas

5.1	Dados de barras e linhas do <i>sistema exemplo</i>	59
5.2	Processo iterativo para o sistema exemplo	68
5.3	Solução do sistema exemplo	68
5.4	Critério de discretização dos bancos de capacitores	82
5.5	Resultado típico do MPI para o PAOBC com bancos mistos	86
5.6	Perdas do sistema de 69 barras sem a instalação de bancos de capacitores .	88
5.7	Perdas do sistema de 69 barras com a instalação de bancos de capacitores fixos	89
5.8	Resultados do sistema de 69 barras usando bancos de capacitores fixos . .	89
5.9	Resultados do sistema de 69 barras usando bancos de capacitores chaveados	89
5.10	Perdas do sistema de 69 barras com a instalação de bancos de capacitores chaveados	90
5.11	Fluxo de potências na subestação do sistema de 69 barras	90
5.12	Perdas do sistema de 33 barras sem a instalação de bancos de capacitores .	91
5.13	Perdas do sistema de 33 barras com a instalação de bancos de capacitores fixos	91
5.14	Resultados do sistema de 33 barras usando bancos de capacitores fixos . .	91
5.15	Resultados do sistema de 33 barras usando bancos de capacitores chaveados	92
5.16	Perdas do sistema de 33 barras com a instalação de bancos de capacitores chaveados	92
5.17	Perdas do sistema de 69 barras com a instalação de bancos de capacitores mistos	93
5.18	Barras que violaram os limites de tensão do sistema de 69 barras para o nível pico de carga. Tensão na subestação igual a 1.05pu e sem bancos alocados no sistema	93
5.19	Perdas do sistema de 69 barras sem a instalação de bancos de capacitores e com 1.05pu de tensão na subestação para os três níveis de carga	93
5.20	Resultados do sistema de 69 barras usando bancos de capacitores mistos .	94

5.21	Fluxo de potências na subestação do sistema de 69 barras sem/com bancos mistos	96
5.22	Resultados do sistema de 33 barras usando bancos de capacitores mistos .	96
5.23	Barras que violaram os limites de tensão do sistema de 33 barras para o nível pico de carga. Tensão na subestação igual a 1.05pu e sem bancos alocados no sistema.	96
5.24	Perdas do sistema de 33 barras com a instalação de bancos de capacitores mistos.	97
5.25	Fluxo de potências na subestação do sistema de 33 barras sem/com bancos mistos.	97

Lista de Símbolos

\hat{u}_k^i	Banco de capacitores instalado na barra k e operando no nível de carga i , caráter discreto ($k = 1, \dots, nbr$ e $i = 0, \dots, nt$)
\hat{u}_k^0	Potência nominal do banco de capacitores instalado na barra k , (caráter discreto)
B^i	Equações de fluxo de carga do sistema para o nível de carga i
x^b	Variáveis básicas do PAOBC no nível de carga i
\hat{u}^i	Variáveis de controle do PAOBC no nível de carga i , (caráter discreto)
$p_i(x^i)$	Perdas de potência no período de tempo T_i para o nível de carga i
k_e	Parâmetro que representa os custos de energia ($\$/kWh$)
P_k^i	Fluxo de potência ativa saindo da barra k e entrando na barra $k+1$, no nível de carga i
Q_k^i	Fluxo de potência reativa saindo da barra k e entrando na barra $k+1$, no nível de carga i
V_k^i	Magnitude de tensão na barra k no nível de carga i
Qcx_{k+1}^i	Injeção de reativos do banco de capacitores na barra $k + 1$ operando para o nível de carga i
V^i	Quadrados das magnitudes das tensões nas barras do sistema para o nível de carga i
P^i	Fluxos de potência ativa em todas as linhas do sistema para o nível de carga i
Q^i	Fluxos de potência reativa em todas as linhas do sistema para o nível de carga i
nc	Número de barras candidatas a alocar bancos de capacitores (usada no MPI)
nbr	Número de barras do sistema de distribuição
nr	Número de linhas do sistema de distribuição
x^i	Vetor que contém as variáveis primais do PAOBC relaxado
v^{min}	Vetor que contém o quadrado do limite inferior da magnitude de tensão para todas as barras do sistema
v^{max}	Vetor que contém o quadrado do limite superior da magnitude de tensão para todas as barras do sistema
$(nt + 1)$	Número de níveis de carga
\hat{u}_f^0	Vetor que contém bancos de capacitores fixos, (caráter discreto)
\hat{u}_c^i	Vetor que contém bancos de capacitores chaveados, para $i = 0, \dots, nt$, (caráter discreto)

u_f^0	Vetor que contém bancos de capacitores fixos em variáveis contínuas
u_c^i	Vetor que contém bancos de capacitores chaveados, para $i = 0, \dots, nt$ em variáveis contínuas
c	Custo inicial pela instalação de bancos em USD/barra
r_{cc}	Custo marginal pela aquisição de bancos de capacitores chaveados em USD/kVAr
r_{cf}	Custo marginal pela aquisição de bancos de capacitores fixos em USD/kVAr
e	Vetor localização ou desição, contém as barras candidatas a alocar capacitores para o AHC
q_{min}	Potência mínima para integralizar as variáveis contínuas
\hat{e}_{des}	Barras descartadas a alocar bancos de capacitores

Obs: Alguns símbolos utilizados no texto que não constam desta tabela são definidos quando do seu uso.

Lista de Siglas

AHC	Algoritmo Heurístico Construtivo
AHCB	Algoritmo Heurístico Construtivo Base
AHCM	Algoritmo Heurístico Construtivo Melhorado
ANEEL	Agência Nacional de Energia Elétrica
CNOPO	Condições Necessárias de Otimalidade de Primeira Ordem
CSOSO	Condições Suficientes de Otimalidade de Segunda Ordem
GRASP	<i>Greedy Randomized Adaptive Search Procedures</i>
IA	Inteligência Artificial
IEEE	<i>Institute of Electrical and Electronics Engineers</i>
KKT	<i>Karush-Kuhn-Tucker</i>
LOQO	<i>An Interior Point Code for Quadratic Programming</i>
MPI	Método de Pontos Interiores
MPI-PDBL	Método de Pontos Interiores Primal-Dual de Barreira Logarítmica
MPI-PDBL-PC	Método de Pontos Interiores Primal-Dual de Barreira Logarítmica Preditor-Corretor
ONS	Operador Nacional do Sistema Elétrico
PAOBC	Problema de alocação Ótima de Bancos de Capacitores
PCR	Problema Candidato Relaxado
PL	Programação Linear
PNL	Programação Não Linear
PNLIM	Programação Não Linear Inteiro Misto
PR	Problema Relaxado
SEP	Sistemas Elétricos de Potência
SA	<i>Simulated Annealing</i>
TS	<i>Tabu Search</i>
ZIP	Modelo polinomial de cargas, Impedância constante, Corrente constante e Potência constante
USD	<i>United States Dollar</i>

Sumário

1	Introdução	1
2	Problema de Alocação Ótima de Bancos de Capacitores em Sistemas de Distribuição Radiais	6
2.1	Introdução	6
2.2	Formulação Matemática do Problema de Alocação Ótima de Bancos de Capacitores	7
2.2.1	Restrições da demanda	8
2.2.2	Restrições de Operação	11
2.2.3	Restrições de Potência Nominal dos Capacitores	11
2.2.4	Função Objetivo	12
2.3	Principais Métodos de Solução para o Problema de Alocação Ótima de Bancos de Capacitores	13
2.3.1	Métodos de Otimização Clássica	13
2.3.2	Métodos Heurísticos Construtivos	19
2.3.3	Métodos Metaheurísticos	20
3	Método de Pontos Interiores	29
3.1	Introdução	29
3.2	Conceitos Preliminares de Programação Não Linear	31
3.2.1	Condições de otimalidade para problemas de PNL sem restrições	31
3.2.2	Método das barreiras	32
3.2.3	Condições de otimalidade para problemas de PNL com restrições - Lagrangeana	34
3.3	Métodos de Pontos Interiores Primal Dual Barreira Logarítmica para PL	35
3.3.1	Penalizando o problema primal	35

3.3.2	Lagrangeana do problema primal modificado e primeira condição de KKT	37
3.3.3	Solução do sistema de equações não lineares - Método de Newton	37
3.3.4	Redução do sistema linear	38
3.3.5	Equação normal	39
3.3.6	Atualização das variáveis primais e duais	39
3.3.7	Cálculo do comprimento do passo	40
3.3.8	Redução do parâmetro de barreira	40
3.3.9	Ponto inicial	41
3.3.10	Critério de convergência	42
3.3.11	Algoritmo Geral do MPI-PDBL	42
3.4	Métodos de Pontos Interiores de Ordem Superior	42
3.4.1	Penalizando o problema primal	43
3.4.2	Lagrangeana do problema primal modificado e primeira condição de KKT	44
3.4.3	Passo preditor	45
3.4.4	Passo corretor	48
3.4.5	Atualização das variáveis primais e duais	49
3.4.6	Cálculo do comprimento do passo	49
3.4.7	Ponto inicial	49
3.4.8	Critério de convergência	50
3.4.9	Algoritmo geral do MPI-PDBL-PC	51
4	Algoritmo de Fluxo de Potência de Varredura	52
4.1	Introdução	52
4.2	Solução do sistema de distribuição radial	53
4.2.1	Numeração das Linhas e Barras	53
4.2.2	Método de resolução	54
5	Solução do Problema de Alocação Ótima de Bancos de Capacitores	57
5.1	MPI na Solução do Problema Relaxado de Alocação Ótima de Bancos de Capacitores	57
5.1.1	MPI na solução do problema base de alocação ótima de bancos de capacitores	59

5.1.2	MPI na solução do problema relaxado de alocação ótima de bancos de capacitores fixos	69
5.1.3	MPI na solução do problema relaxado de alocação ótima de bancos de capacitores chaveados	72
5.1.4	MPI na solução do problema relaxado de alocação ótima de bancos de capacitores mistos	75
5.2	Algoritmo Heurístico Construtivo para resolver o PAOBC	78
5.2.1	Algoritmo heurístico construtivo para resolver o PAOBC	79
5.2.2	Algoritmo heurístico construtivo melhorado para resolver o PAOBC	83
5.2.3	Modificação do algoritmo heurístico construtivo base para resolver o PAOBC com bancos mistos	85
5.3	Testes usando os algoritmos desenvolvidos	87
5.3.1	Testes para os PAOBC's com bancos fixos e chaveados	88
5.3.2	Testes para o PAOBC com bancos mistos	92
5.4	Comentários dos resultados encontrados	98
6	Conclusões e Futuros Trabalhos	100
A	Formulação usada no PAOBC	107
A.1	Formulação usada no PAOBC do problema base	107
A.1.1	Matriz Jacobiana das restrições de igualdade	107
A.1.2	Vetor gradiente da função objetivo	111
A.1.3	Matriz Hessiana do problema base	113
A.2	Formulação usada no problema relaxado do PAOBC	116
B	Sistemas testados	120
B.0.1	Sistema de 33 Barras	120
B.0.2	Sistema de 69 Barras	121

Capítulo 1

Introdução

Os sistemas de distribuição são compostos pela rede de distribuição primária e circuitos secundários. A rede primária começa nas subestações de distribuição, sendo composta de transformadores para reduzir a tensão da rede de subtransmissão e de equipamentos de proteção e controles necessários para sua adequada operação. A rede é composta também de alimentadores primários e secundários que podem atender diretamente as cargas maiores ou as subestações da rede de distribuição secundária, estas últimas compostas por transformadores de distribuição e equipamentos de proteção adequados, distribuem a energia para os usuários em baixa tensão.

Nas últimas décadas vários países realizaram um processo de reestruturação de seus respectivos setores elétricos, que em muitos casos, passaram das mãos do estado para as empresas privadas. O objetivo principal destas mudanças foi torná-los mais eficientes e competitivos. Entretanto, para definir a regulamentação a qual devem atuar os agentes do setor elétrico, o estado deve estar representado por órgãos de legislação e fiscalização que por sua vez representem os interesses dos usuários.

No Brasil foi criada a Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL) que tem como objetivo principal traçar as diretrizes da indústria de energia e fiscalizar o cumprimento da legislação. Outro agente que surgiu nesse novo ambiente foi o Operador Nacional do Sistema Elétrico (ONS) com a finalidade de operar o sistema interligado nacional e administrar a rede básica de transmissão de energia.

As empresas de distribuição de energia elétrica são obrigadas a atender todos os clientes que se encontram dentro e fora (clientes livres) de sua área de concessão de acordo com a legislação vigente no concernente a confiabilidade, segurança, qualidade e proteção ao meio ambiente.

Para tornar isso possível é necessário que o sistema opere de uma forma segura e com um alto nível de confiabilidade. Isso é assegurado pelo investimento em equipamentos e em sistemas de controle cada vez mais caros e sofisticados. Entretanto, isso deve ser executado visando um custo operacional baixo, a fim de que as margens de lucro se tornem atrativas para as empresas de energia elétrica.

Então, estas regras procuram garantir que os sistemas de transmissão e distribuição sejam econômicos, assim como também benéficos e, sobretudo, o plano destes sistemas

deve ser tal que a frequência AC e as magnitudes de tensão devam estar mantidas dentro dos limites de operação estabelecidos (resolução da ANEEL 505 para os níveis de tensão em regime permanente [3]) e também um alto nível de continuidade de serviço deve ser garantido. A referida norma indica que para unidades consumidoras atendidas em média tensão, a tensão de leitura deve estar entre 0,93 a 1.05% da tensão contratada. Ao mesmo tempo a tensão contratada deve estar entre 0,95 a 1.05% da tensão nominal de operação do sistema no ponto de entrega ou de conexão. Com o objetivo de assegurar estes requerimentos, neste trabalho considera-se que as magnitudes de tensão nas barras devem estar entre 0,95 a 1,05% da tensão nominal de operação do sistema.

Uma das possíveis soluções para cumprir com estas exigências é a instalação dos bancos de capacitores em barras adequadas e com um controle ótimo de seus pontos de operação. Em [1] se relata algumas vantagens do uso de capacitores em sistemas de potência:

- Redução da componente reativa da corrente;
- Aumento do nível de tensão no ponto de consumo;
- Melhoria da regulação de tensão se a unidade capacitiva for apropriadamente chaveada;
- Redução de perdas de potência ativa I^2R no sistema devido à redução da corrente;
- Redução de perdas de potência reativa I^2X no sistema devido à redução da corrente;
- Aumento do fator de potência das fontes geradoras;
- Diminuição da demanda de potência aparente kVA das fontes geradoras e das linhas para aliviar uma condição de sobrecarga ou aliviar capacidade para um crescimento adicional de carga;
- Com a redução da demanda de potência aparente kVA nas fontes geradoras a carga ativa adicional pode ser colocada nos geradores se a capacidade da turbina permite isto;
- Redução da demanda de potência aparente kVA onde a carga é comprada. Em alguns casos uma correção de 100% no fator de potência pode ser econômica;
- Redução de investimentos em equipamentos por kW de carga fornecida.

Porém, mediante a alocação ótima de bancos de capacitores nos sistemas de distribuição radial algumas das exigências estabelecidas pela ANEEL para a operação destes sistemas podem ser conseguidas, além de reduzir os custos da operação que se traduz em ganho para a empresa.

No momento não é econômico a aplicação de bancos de capacitores no lado secundário dos transformadores de distribuição, devido ao maior custo dos capacitores [1], a não ser em situações especiais. Portanto, o presente trabalho só considera a rede de distribuição primária.

É importante também mencionar que a capacidade de uma linha de distribuição pode estar limitada pela corrente ou pela queda de tensão. Quando a corrente é o fator limitante, o efeito dos capacitores em reduzir a corrente é dependente do fator de potência da carga. Caso o fator de potência da carga seja baixo, pode-se obter uma boa redução da corrente do alimentador. Se o fator de potência é alto, os capacitores materialmente não podem aliviar a carga do alimentador. Quando a tensão é o fator limitante, a melhora na tensão é dependente não só do fator de potência mais também do valor da resistência e reatância do alimentador de distribuição.

Desde que os capacitores estejam mais perto das cargas, estes dispositivos alocados nas barras de distribuição, representam o meio mais efetivo de fornecer as necessidades de potência reativa enquanto são minimizadas as perdas do sistema [33]. Estas fontes de potência reativa devem ser alocadas e dimensionadas de forma que minimizem os custos de operação reduzindo as perdas do sistema, isto sujeito a uma série de restrições operacionais além de operar sob uma configuração adequada para os diferentes níveis de carga do sistema. Uma formulação matemática adequada é requerida a fim de representar todas as possibilidades mencionadas acima. Esta formulação é conhecida como o problema geral de alocação ótima de bancos de capacitores (PAOBC) e é de interesse de muitos pesquisadores da área de otimização.

O problema geral de alocação ótima de bancos de capacitores é estudado desde a década de 1960. Inicialmente foram formulados modelos relaxados e técnicas heurísticas de solução. Na década de 1980 foram formulados os modelos matemáticos usados atualmente. Assim, Grainger [24] e Baran e Wu [6] formularam o problema de alocação de bancos como sendo um problema de programação não linear inteiro misto (PNLIM). Entretanto, para resolver esse modelo, Baran e Wu [6] aproximou a função objetivo não diferenciável por uma função linear e assim foi possível resolver o problema usando decomposição de Benders com variáveis contínuas.

Na década de 90 apareceram novos algoritmos heurísticos, também chamados de metaheurísticas, como uma ferramenta importante na otimização de sistemas elétricos. Assim, foram aplicadas metaheurísticas para otimizar o problema de alocação de bancos em sistemas de distribuição radiais e na literatura aparecem algoritmos como *simulated annealing*, algoritmos genéticos, *tabu search* e híbridos.

As técnicas de solução utilizadas se diferenciam pela formulação do problema e pelos métodos empregados na busca da solução ótima. As técnicas de solução utilizadas para resolver o PAOBC podem ser classificadas em quatro categorias [47]: analíticas, programação numérica, heurísticas e inteligência artificial (IA), nesta última consideram-se também as redes neurais.

A escolha do método a utilizar depende da complexidade do problema, de sua formulação e da qualidade da solução requerida. Neste trabalho utiliza-se inicialmente a formulação proposta em [6], que é um PNLIM. A partir desse modelo, relaxam-se as variáveis de controle para resolver o PNL, e depois utiliza-se uma técnica heurística para integralizar as variáveis de controle. Neste trabalho o PNL é chamado de *problema relaxado* (PR).

Os métodos heurísticos são intuitivos e fáceis de entender e implementar, se comparados com algoritmos numéricos. Apresentam soluções rápidas, mas não garantem que sejam as

ótimas.

Para resolver o problema de programação não linear, busca-se desenvolver algoritmos usando o método de pontos interiores (MPI). Deve-se observar, que se no problema de alocação ótima de bancos de capacitores for relaxado à integralidade (ou caráter discreto) da variável de alocação de bancos, o problema se transforma em um PNL. Esse PNL pode ser usado para otimizar o problema de alocação de bancos usando dois tipos de algoritmos: (1) um algoritmo heurístico construtivo (AHC) ou (2) um algoritmo branch and bound. Entretanto, neste trabalho se optou pelo algoritmo heurístico por ser rápido e pelo fato do PAOBC apresentar vários pontos de ótimos locais de boa qualidade. A técnica de branch and bound é computacionalmente muito mais custosa.

Os métodos MPI têm sido aplicados com sucesso na otimização da operação de sistemas elétricos de potência (SEP) [44], em problemas como: fluxo de potência ótimo [52] e [27], estimação de estado [56], estabilidade de tensão [55], minimização de corte de carga [28], máxima capacidade de carga [32], operação de sistemas hidrotérmicos [39], despacho econômico com restrições de segurança [57], etc.

O MPI primal-dual de barreira logarítmica (MPI-PDBL) é usado na maioria das aplicações em SEP. O MPI-PDBL precisa de um maior número de iterações para a convergência e pode apresentar problemas de divergência, devido ao cálculo das direções de busca utilizada no método de Newton. Mehrotra em 1992 consegue melhores direções de busca resolvendo dois sistemas de equações lineares [40]. Estes dois sistemas definem as etapas preditor e corretor, que geram o método de pontos interiores primal - dual barreira logarítmica preditor - corretor (MPI-PDBL-PC).

Neste trabalho apresenta-se a consideração teórica do MPI-PDBL-PC. Desenvolve-se também um algoritmo do MPI-PDBL-PC para resolver o problema de alocação de bancos de capacitores relaxando as variáveis de controle (potência dos bancos) e um algoritmo heurístico construtivo (AHC) para integralizar a alocação de bancos de capacitores fixos e variáveis em barras estratégicas considerando três níveis de operação do sistema.

A solução de um problema de alocação de bancos de capacitores deve fornecer a informação sobre os tipos, potências, a localização onde devem ser instalados os capacitores e um esquema de controle para cada um dos diferentes níveis de operação do sistema.

Este trabalho está estruturado em cinco Capítulos, da seguinte maneira, sendo o primeiro Capítulo introdutório:

No Capítulo 2 descreve-se a modelagem matemática para o problema de alocação de bancos de capacitores em sistemas de distribuição radiais e também são apresentados, e brevemente discutidos, os principais métodos utilizados na solução deste problema. Também são apresentadas as principais técnicas de solução que foram utilizadas até o momento.

O Capítulo 3 está destinado a apresentar o algoritmo de pontos interiores tanto na versão para programação linear como não linear. Neste trabalho é utilizado o algoritmo para programação não linear.

No Capítulo 4 apresenta-se o algoritmo de fluxo de potência radial de varredura desenvolvido em [49]. Este método foi implementado dentro do AHC pelas excelentes características de convergência e robustez que apresenta.

No Capítulo 5 mostra-se a formulação de três tipos de PAOBC, isto é, com capacitores fixos, chaveados e mistos. Logo, através de um breve exemplo explica-se a técnica de solução proposta mediante a utilização do método de pontos interiores, depois a técnica é generalizada para o caso geral do POABC e os resultados obtidos com este algoritmo inseridos num AHC. Após são apresentados os resultados encontrados mediante estes algoritmos para dois sistemas encontrados na literatura especializada. Os resultados são comentados e discutidos neste Capítulo.

As conclusões deste estudo são mencionadas no Capítulo 6.

No Apêndice A é mostrada uma extensão da formulação usada no algoritmo de pontos interiores. Por último, o Apêndice B contém os dados dos dois sistemas testados.

Capítulo 2

Problema de Alocação Ótima de Bancos de Capacitores em Sistemas de Distribuição Radiais

2.1 Introdução

Nos sistemas de distribuição de energia elétrica devem ser instalados bancos de capacitores para reduzir as perdas de potência e energia, melhorar o perfil de tensão, aliviar o carregamento das linhas de distribuição, entre outras vantagens citadas no Capítulo anterior [1].

Devido à complexidade do PAOBC, os métodos de solução propostas na literatura especializada consideram uma ou mais das seguintes suposições: (1) Alimentador uniforme, (2) perfil de tensões constante, (3) os custos dos capacitores variam de forma linear, (4) potências dos capacitores não discretas, (5) alimentador radial sem ramais laterais. As propostas mais comumente usadas consideram que os capacitores só afetam a componente reativa da corrente. Alguns dos métodos propostos avaliam a redução de custos somente na redução de perdas no nível pico de carga, outros consideram também a redução das perdas de energia para todos os níveis de carga. Pelo tipo de banco existem métodos que usam só capacitores fixos, chaveados ou mistos [11].

A modelagem das cargas é um fator importante que deve ser considerado dentro da formulação do PAOBC, pois pesquisas anteriores mostram resultados importantes quando as cargas são modeladas como sendo dependentes da magnitude de tensão, ou utilizam outros modelos [16]. Outra pesquisa considera dentro de sua formulação as cargas não lineares com frequências harmônicas [5].

A complexidade do PAOBC pode aumentar dependendo das hipóteses adotadas com o propósito de obter um modelo mais real. Então são necessárias técnicas de solução cada vez mais eficientes para encontrar soluções mais próximas às soluções globais, ou melhor, se possível encontrar a solução ótima global.

2.2 Formulação Matemática do Problema de Alocação Ótima de Bancos de Capacitores

A formulação matemática usada neste trabalho é para um horizonte de operação de T anos e assume a seguinte forma [6]:

$$\begin{aligned}
 \text{Min } f(x) &= k_e \sum_{i=0}^{nt} T_i p_i(xb^i) + \sum_{k=1}^{nc} f(\hat{u}_k^0) & (2.1) \\
 \text{s.a.} & \\
 & B^i(xb^i, \hat{u}^i) = 0 \\
 & H^i(xb^i) \leq 0 \\
 & 0 \leq \hat{u}^0 \leq u^{max} \\
 & 0 \leq \hat{u}_k^i \leq \hat{u}_k^0; k \in C_1 \\
 & 0 \leq \hat{u}_k^i = \hat{u}_k^0; k \in C_2 \\
 & i = 0, 1, \dots, nt \\
 & k = 0, 1, \dots, nc
 \end{aligned}$$

em que, $B^i(xb^i, \hat{u}^i) = 0$ representa as equações de fluxo de carga do sistema em função das variáveis de estado xb^i e controle \hat{u}^i , estas duas variáveis são agrupadas no vetor x ; $H^i(xb^i) \leq 0$ representa as restrições de operação do sistema, neste estudo são os limites das magnitudes de tensão das barras; \hat{u}^0 é o vetor de bancos de capacitores nominais instalados nas barras do sistema elétrico e que tem como limite superior o vetor u^{max} ; \hat{u}_k^0 é a potência nominal do banco de capacitores que deve ser instalados na barra k ; \hat{u}_k^i representa o ponto de operação do banco de capacitores instalado na barra k para o nível de carga i ; C_1 e C_2 são os conjuntos de bancos de capacitores chaveados e fixos, respectivamente.

Na função objetivo (2.1) temos duas parcelas que representam os custos das perdas de energia e os custos dos bancos de capacitores, respectivamente. O termo $p_i(x^i)$ representa as perdas de potência no período de tempo T_i para o nível de carga i , k_e é um parâmetro que representa os custos de energia ($\$/kWh$), $f(\hat{u}_k^0)$ é uma função discreta que representa os custos dos bancos de capacitores fixos e chaveados. Observa-se que se tem um total de $(nt + 1)$ níveis de operação.

O problema (2.1) é um PNLIM difícil de resolver, porque a função objetivo é não diferenciável e não linear, apresenta restrições não lineares, existem variáveis discretas e contínuas. Adicionalmente, com o aumento da dimensão do problema, apresenta o fenômeno da explosão combinatória. Normalmente é típico resolver este problema permitindo alocar três tipos de bancos de capacitores: (1) Fixos, (2) Chaveados e (3) Fixos e chaveados, representando um problema mais complexo.

Para resolver este problema, nesta pesquisa, foram consideradas as seguintes hipóteses:

- As variações de carga podem ser aproximadas em níveis discretos cada uma com duração T_i ;
- As cargas têm o mesmo padrão de variação;

- As cargas são modeladas como sendo de potência constante;
- Para resolver o *problema relaxado* a variável de controle \hat{u}^0 deixa de ser uma variável discreta e passa ser uma variável contínua. Entretanto o algoritmo heurístico construtivo gera uma resposta final discreta.

Na Figura 2.1 mostra-se a *curva de duração de carga* $S(\tau)$, onde o perfil de carga Q_L pode ser representada como:

$$Q_L(\tau) = Q_L^n S(\tau) \quad (2.2)$$

Anotação, Q_L^n representa o valor nominal da demanda de carga do sistema.

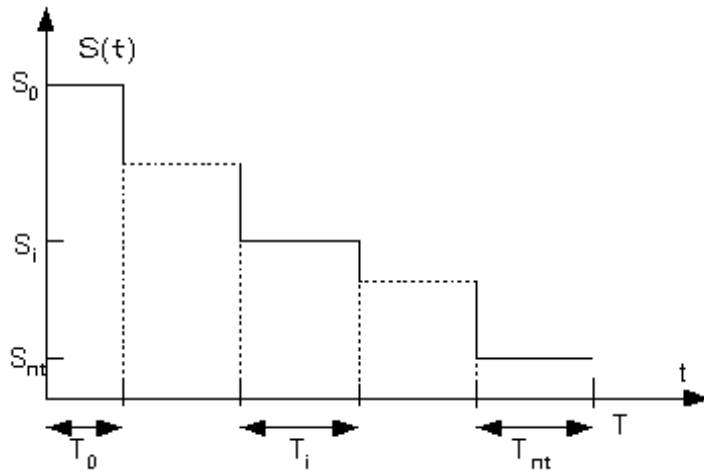


Figura 2.1: Curva de Duração de Carga

Para cada nível de carga temos que considerar um problema de fluxo de carga, restrições de tensões nas barras e uma configuração da operação dos bancos de capacitores.

Em seguida detalham-se brevemente cada uma das equações que formam o PAOBC dado em (2.1).

2.2.1 Restrições da demanda

As equações de fluxo de carga consideradas para modelar as restrições de igualdade do PAOBC são encontradas em [6]. A Figura 2.2 ilustra o diagrama unifilar de uma parte do sistema sob estudo.

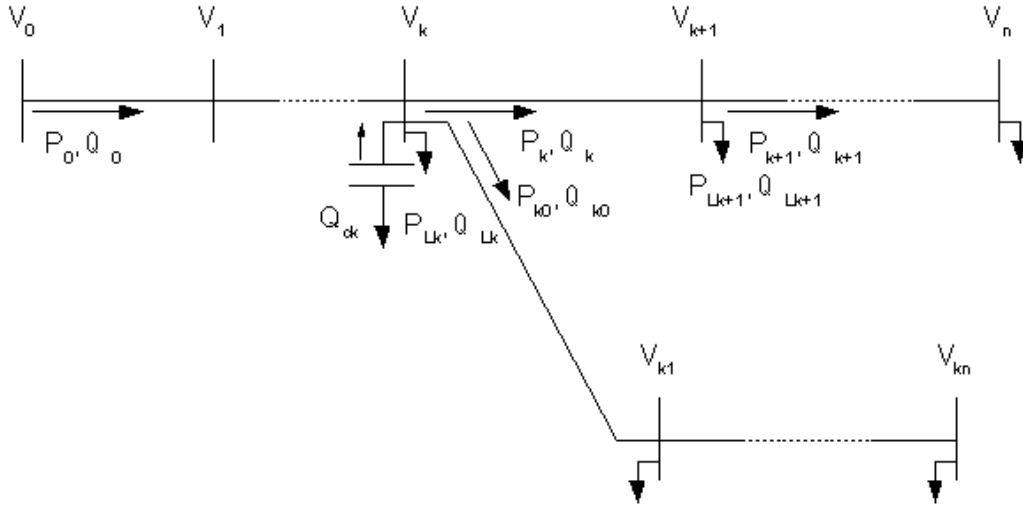


Figura 2.2: Diagrama unifilar do alimentador de distribuição

As equações de fluxo de carga para cada linha do alimentador são calculadas como segue:

$$\begin{aligned}
 P_k^i - r_k(P_k^{i2} + Q_k^{i2})/V_k^{i2} - P_{Lk+1}^i - P_{k+1}^i &= 0 ; \\
 Q_k^i - x_k(P_k^{i2} + Q_k^{i2})/V_k^{i2} - Q_{Lk+1}^i - Q_{k+1}^i + Qe_{k+1}^i + Qcx_{k+1}^i &= 0 ; \\
 V_k^{i2} - 2(r_k P_k^i + x_k Q_k^i) + (r_k^2 + x_k^2)(P_k^{i2} + Q_k^{i2})/V_k^{i2} - V_{k+1}^{i2} &= 0 ;
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

sendo,

- P_k^i O fluxo de potência ativa saindo da barra k e entrando na barra $k + 1$, no nível de carga i ;
- Q_k^i O fluxo de potência reativa saindo da barra k e entrando na barra $k + 1$, no nível de carga i ;
- V_k^i A magnitude de tensão na barra k no nível de carga i ;
- Qcx_{k+1}^i A injeção de reativos do banco de capacitores na barra $k + 1$, operando para o nível de carga i . Para o caso dos bancos fixos, $Qcx_{k+1}^i = Qcx_{k+1}^0$;
- Qe_k^i A injeção de reativos do banco de capacitores existente na barra $k + 1$.

Existem as condições de fronteira que devem ser satisfeitas:

- Normalmente quando se trabalham com metaheurísticas a tensão da subestação é assumida fixa para todos os níveis de carga, $V_1^i = V_0$. Entretanto, o algoritmo proposto aqui pode considerá-la livre e assim fazer parte das incógnitas do problema de otimização;
- No final dos alimentadores principais o fluxo de potência ativa e reativa é zero, $P_n = Q_n = 0$;
- No final dos sub-ramais o fluxo de potência ativa e reativa é zero, $P_{kn} = Q_{kn} = 0$.

Define-se os seguintes vetores:

$$\begin{aligned}
V^i &= [V_2^{i2} \dots V_{nbr}^{i2}]^T; \\
P^i &= [P_1^i \dots P_{nr}^i]^T; \\
Q^i &= [Q_1^i \dots Q_{nr}^i]^T; \\
xb^i &= [V^{iT} \ P^{iT} \ Q^{iT}]^T; \\
\hat{u}^i &= [\hat{u}_1^i \dots \hat{u}_{nc}^i]^T = [Q_{c1}^i \dots Q_{cnc}^i]^T;
\end{aligned} \tag{2.4}$$

sendo,

- V^i : Os quadrados das magnitudes das tensões nas barras do sistema para o nível de carga i .
- P^i : Os fluxos de potência ativa nas linhas do sistema para o nível de carga i .
- Q^i : Os fluxos de potência reativa nas linhas do sistema para o nível de carga i .
- xb^i : As variáveis básicas do PAOBC (caráter contínuo) no nível de carga i .
- \hat{u}^i : As variáveis de controle do PAOBC (caráter discreto) no nível de carga i .

Aqui, nc , nbr e nr representam o número de barras candidatas a alocar bancos de capacitores, barras e linhas do sistema de distribuição, respectivamente.

Então, nc , $(nbr - 1)$ e nr são as dimensões dos vetores u^i , V^i e P^i , respectivamente. Q^i têm a mesma dimensão que P^i . Note-se que $(nbr - 1)$ significa que a tensão na barra de referência não faz parte das incógnitas do problema.

Na equação (2.3) observa-se que nas três equações aparecem os quadrados das tensões, sendo porém representadas desta forma como parte das incógnitas do problema no vetor V^i em (2.4).

Portanto as variáveis do problema x^i podem ser representadas em termos das variáveis de estado xb^i e controle \hat{u}^i como:

$$x^{iT} = [xb^{iT}, \hat{u}^{iT}] = [V^{iT} \ P^{iT} \ Q^{iT} \ Q_{cx}^{iT}] \tag{2.5}$$

Para $(nt + 1)$ níveis de operação, a dimensão da variável x , nx , é igual a $3(nt + 1)nr + nc$ no caso de bancos de capacitores fixos, $(nt + 1)(3nr + nc)$ no caso que os bancos de capacitores sejam chaveados e $(nt + 1)(3nr + nc) + nc$ no caso geral de bancos de capacitores mistos. Isto será tratado com mais detalhe nas seções (5.1.2), (5.1.3) e (5.1.4), respectivamente.

Portanto, pode-se generalizar as equações (2.3) por:

$$B^i(xb^i, \hat{u}^i) = 0; \quad i = 0, \dots, nt \tag{2.6}$$

A dimensão de (2.6) é determinada como segue:

$$ndg = \dim(B) = 3 \cdot nr \cdot nt. \tag{2.7}$$

Para formar o vetor B é utilizada uma numeração por linhas, logo estas linhas são arranjadas por camadas. Assim o primeiro elemento deste vetor será a equação de fluxo de

carga para aquela linha que contenha a barra de referência como barra de envio (camada 1), os elementos seguintes serão as equações das linhas da camada seguinte, assim até acabar com todas as linhas do sistema. Isto é repetido para cada nível de carga. Para maiores informações veja o apêndice A.

2.2.2 Restrições de Operação

As restrições de operação são dadas pelos limites de tensões, V_k^i , nas barras do sistema:

$$V_{min}^2 \leq V_k^{i^2} \leq V_{max}^2 \quad (2.8)$$

$$k = 1, \dots, nr \text{ e } i = 0, \dots, nt$$

Definimos v^{min} e v^{max} como os vetores que contêm o quadrado dos limites de tensão para todas as barras do sistema de distribuição e para os $(nt + 1)$ níveis de carga:

$$v^{min} = V_{min}^2 \cdot e$$

$$v^{max} = V_{max}^2 \cdot e$$

sendo, e um vetor de coordenadas 1, de dimensão $nr \times (nt + 1)$.

Para o problema, considerando $(nt + 1)$ níveis de carga pode-se generalizar as restrições $H^i(x^i) \leq 0$ como segue:

$$v^{min} \leq \hat{I}^i x b = V^i \leq v^{max} \quad (2.9)$$

sendo, $x b = [x b^{0T}, \dots, x b^{iT}, \dots, x b^{ntT}]^T$, $i = 0, \dots, nt$.

A matriz \hat{I}^i possui dimensão $nr(nt + 1) \times nx$. Por exemplo, para o nível pico de carga é formada primeiro por uma matriz identidade de $nr \times nr$ e acoplada a esta outra matriz de zeros de dimensão $nr \times (nx - nr)$.

2.2.3 Restrições de Potência Nominal dos Capacitores

De 2.4, nota-se que há nc possíveis barras para alocar bancos de capacitores no sistema. \hat{u}^0 é o vetor de dimensão nc , $\hat{u}^0 = [\hat{u}_1^0 \dots \hat{u}_{nc}^0]^T$ que representa os bancos de capacitores para o nível pico de carga $i = 0$.

Neste trabalho são considerados dois tipos de bancos de capacitores, fixos e chaveados:

- Bancos de Capacitores Fixos: Eles são compostos por uma ou mais unidades padrões de capacitores e permanecem conectados para todos os níveis de carga. No PAOBC geral (ambos fixos e chaveados) os capacitores fixos são dimensionados para as condições de carga mínima [33]. No problema são tratados como fontes de potência reativa constante; i.e.,

$$\hat{u}_f^0 = \hat{u}_f^1 = \dots = \hat{u}_f^{nt} \quad (2.10)$$

- Bancos de Capacitores Chaveados: Eles são compostos por uma ou mais unidades padrões de capacitores e podem ser chaveados parcialmente ou totalmente para cada nível de carga. Portanto para cada capacitor, há $(nt+1)$ possíveis estados de operação \hat{u}^i que devem ser determinados. Para isto assume-se que a configuração de cada banco chaveado no nível pico de carga, \hat{u}^0 será maior que os correspondentes dos níveis inferiores de carga, \hat{u}^i . Portanto os bancos de capacitores chaveados estão projetados para operar em níveis de carga acima da mínima até o nível de pico [33].

$$0 \leq \hat{u}_c^i \leq \hat{u}_c^0 \quad i = 0, \dots, nt \quad (2.11)$$

então, os limites de capacidade nominal dos bancos de capacitores (chaveados) que podem ser instalados em uma barra do sistema estão dados por:

$$0 \leq \hat{u}_c^0 \leq u^{max} \quad (2.12)$$

2.2.4 Função Objetivo

A primeira parcela da função objetivo representa o custo das perdas de energia em todos os níveis de carga do sistema, e pode ser formulado por:

$$k_e \sum_{i=0}^{nt} T_i p_i(x^i) \quad (2.13)$$

As perdas para cada nível de operação, $p_i(x^i)$, podem ser encontradas mediante $(nt+1)$ vezes o cálculo do fluxo de carga.

A segunda parcela da função objetivo representa os custos de aquisição e instalação dos bancos de capacitores fixos e chaveados. A função custo, $f(\hat{u}^0)$ usualmente é do tipo escalonado, como é mostrado na Figura 2.3, isso ocorre porque o custo dos bancos de capacitores estão em função de suas potências padrões representando uma função discreta.

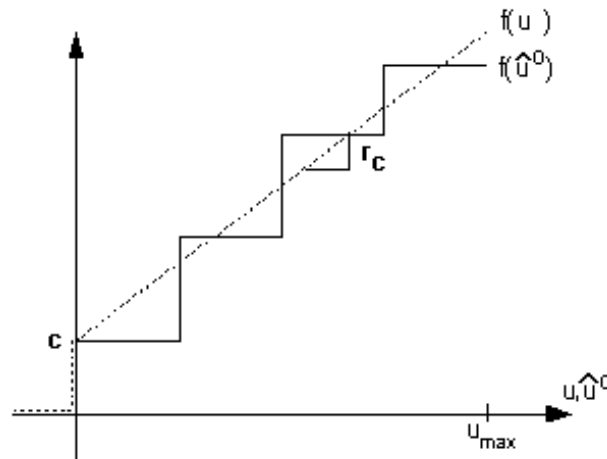


Figura 2.3: Função custo dos bancos de capacitores

Da forma como está representada a função custo, $f(\hat{u}^0)$, há dificuldades na implementação utilizando a formulação proposta. Em [6] esta função aproxima-se a uma função linear com um custo inicial fixo c em USD/barra e um custo marginal r_c em USD/kVAr, tal como é mostrada na Figura 2.3 por uma linha pontilhada.

Esta função linear pode ser formulada como segue:

$$f(u_k) = (c + r_c \cdot u_k) e_k \quad (2.14)$$

em que, r_c é igual r_{cf} se o banco alocado na barra k é fixo ou r_{cc} se o banco é chaveado. O vetor e representa o vetor de decisão, $e_k \in \{0,1\}$. e_k igual a 1 indica que a barra k está alocando banco(s) de capacitores, e_k igual a 0 indica o caso contrário.

Custo de instalação e manutenção dos capacitores

Este custo é dependente das potências e dos tipos dos bancos de capacitores, porém neste trabalho considera-se que este custo é fixo e é representado por c (USD/barra compensada).

Este custo não será considerado no processo de solução do MPI, entretanto, passará a ser considerado somente no AHC.

Custo de aquisição dos bancos de capacitores fixos

Os custos dos bancos de capacitores fixos depende do custo marginal r_{cf} , da potência e da quantidade de capacitores a serem instalados para todos os níveis de carga.

Custo de aquisição dos bancos de capacitores chaveados

Os custos dos bancos de capacitores chaveados depende do custo marginal r_{cc} , da potência e da quantidade de capacitores a serem instalados no pico de carga. Os custos destes bancos de capacitores são maiores quando comparados com os bancos fixos, pois eles podem comutar para operar em níveis de carga baixos.

2.3 Principais Métodos de Solução para o Problema de Alocação Ótima de Bancos de Capacitores

2.3.1 Métodos de Otimização Clássica

Os métodos de otimização clássica, geralmente utilizam técnicas de decomposição matemática, que apresentam habilidade de encontrar a solução ótima do problema de planejamento e são muito eficientes em sistemas de pequeno e médio porte, mas, para sistemas de grande porte ainda apresentam problemas de esforço computacional e de convergência.

Branch and Bound

O algoritmo branch-and-bound é um algoritmo enumerativo, cuja estrutura de resolução baseia-se na construção de uma árvore onde os nós representam os problemas candidatos e os ramos representam as novas restrições que devem ser consideradas. Por intermédio dessa árvore, todas as soluções inteiras da região viável do problema são enumeradas de modo implícito ou explícito, o que garante que todas as soluções ótimas sejam encontradas. A estrutura geral apresenta três elementos fundamentais, que são detalhados a seguir: Separação, Relaxação e Sondagem.

Na etapa de **separação**, o problema original (P) é separado em q subproblemas (P^1), (P^2), ..., (P^q) sujeitos às seguintes condições:

- (S1) Toda a solução viável de (P) é uma solução de somente um dos subproblemas (P^i), $i = 1, 2, \dots, q$.
- (S2) Uma solução viável de qualquer um dos subproblemas (P^i), $i = 1, 2, \dots, q$ é também, uma solução viável de (P).

Estas condições asseguram que o conjunto das soluções viáveis de cada um dos subproblemas (P^i), $i = 1, 2, \dots, q$, seja uma partição do conjunto das soluções viáveis de (P). Os subproblemas (P^i), $i = 1, 2, \dots, q$, são denominados descendentes de (P) e podem, sucessivamente, gerar seus próprios descendentes. O interesse na separação (*branching*) é utilizar a estratégia de “dividir para conquistar” para resolver o problema (P).

Deixando de lado a questão de como se separa o problema de difícil solução, pode-se descrever, sumariamente, esta estratégia do seguinte modo: enquanto a solução de (P) não é possível, separa-se (P) em dois ou mais subproblemas descendentes, gerando uma lista de problemas candidatos (PC). A seguir, seleciona-se um dos candidatos dessa lista e tenta-se resolvê-lo. Se a solução não é possível o problema é, novamente, separado e seus descendentes são adicionados à lista dos candidatos; caso contrário o problema é resolvido e uma nova solução é obtida. O valor da função objetivo dessa nova solução é, então, comparado com o valor da solução incumbente, que é a melhor solução viável conhecida até o momento. Caso a nova solução seja melhor do que a solução incumbente, ela se torna a nova incumbente. A seguir, retorna-se à lista e seleciona-se a próxima candidata. Isto é repetido até que a lista esteja vazia, quando se pode afirmar que a solução do problema é dada pela solução incumbente final.

A forma usual de separação de um problema de programação inteira é através de restrições contraditórias em uma única variável inteira (variável de separação ou de ramificação). Assim, a partir do problema original, denominado nó zero, originam-se dois novos subproblemas (cada um dos subproblemas descendentes é mais fácil de resolver que o subproblema candidato de origem uma vez que foi acrescentada uma restrição na variável de separação), representados pelos nós 1 e 2 que são sucessivamente divididos formando uma árvore. A cada nó se associa um subproblema candidato e cada ramo indica o acréscimo de uma restrição relacionada com a variável empregada na separação. Portanto, a medida que se desce na árvore a região viável dos descendentes gerados vai ficando cada vez mais restrita.

A **relaxação** consiste em, temporariamente, ignorar algumas restrições do problema (P) visando torná-lo mais fácil de resolver. A condição que deve ser satisfeita é que o conjunto de soluções viáveis do problema original (P) esteja contido no conjunto de soluções viáveis do problema relaxado (PR). Isto implica que:

- (R1) Se (PR) não tem solução viável, então o mesmo é verdadeiro para (P).
- (R2) O valor mínimo de (P) não é menor que o valor mínimo de (PR).
- (R3) Se uma solução ótima de (PR) é viável em (P), então ela é uma solução ótima de (P).

Dentre as formas possíveis de relaxação, destaca-se a eliminação das restrições de integralidade das variáveis, o que transforma o problema misto em um problema linear (PL) padrão.

Na análise dos problemas candidatos, existe a necessidade de determinar quais são os problemas promissores e, portanto, devem ser examinados, e quais podem ser sumariamente descartados. Isto é realizado na etapa de **sondagem** onde o problema candidato (PC) é eliminado (descartado para análises futuras), juntamente com todos os seus descendentes, se satisfizer a pelo menos um dos seguintes critérios:

- (S1) O problema candidato relaxado (PCR) não tem solução viável. Devido a (R1), isto significa que o problema candidato (PC) também não tem solução viável.
- (S2) A solução ótima do problema candidato relaxado (PCR) é pior (bounding) do que a melhor solução atualmente conhecida para (P) (solução incumbente). Observar que a solução ótima do problema candidato relaxado é sempre melhor ou igual à solução do problema candidato e de seus descendentes.
- (S3) Uma solução ótima do problema relaxado (PCR) é viável, também, em (PC). Neste caso, devido a (R3), ela é ótima em (PC) e, devido a (S2) ela é também factível em (P). Caso seja melhor que a incumbente atual, a solução deste problema candidato passa a ser a nova incumbente.

A seguir apresentamos alguns trabalhos onde foi aplicado este algoritmo na solução do PAOBC.

Um procedimento para solução do problema de alocação de capacitores é apresentado por Delfanti et al. em [21]. O objetivo é determinar o investimento mínimo requerido para atender satisfatoriamente as restrições reativas. Devido à natureza discreta dos dispositivos de compensação reativa, a alocação ótima de capacitores leva a um problema de programação não linear com mistura de variáveis (discretas e contínuas). Ele é resolvido com um algoritmo iterativo baseado em sucessivas linearizações do modelo original não linear. O problema misto de programação linear inteira a ser resolvido em cada iteração do procedimento é solucionado aplicando-se, um método determinístico (branch and bound) e técnicas de algoritmos genéticos. Um procedimento híbrido, utilizado para a exploração

das melhores características de ambos algoritmos é também considerado.

Em [25] os autores objetivam apenas com o controle dos bancos, assumindo que os capacitores já estão alocados. São considerados os casos de iguais degraus de tap e, degrau do tap dependente da potência do capacitor. O primeiro caso é solucionado diretamente, enquanto no segundo usa-se uma técnica de branch and bound. Ambos problemas começam com o problema de controle contínuo. Em [26], eles também incluem os problemas de projeto e controle assumindo que os capacitores são controlados continuamente. Cargas balanceadas as quais variam uniformemente são assumidas. Os autores introduzem o modelo V-P no qual eles reivindicam a necessidade de uma solução de fluxo de carga enquanto permitem a inclusão dos efeitos da variação de tensão no projeto e controle das fases de um esquema ótimo de compensação capacitiva.

Decomposição de Benders

A Decomposição de Benders é uma técnica de decomposição matemática usada para resolver problemas complicados ou muito grandes através das soluções repetidas de uma série de problemas mais fáceis, ou de menores dimensões.

Nesta técnica, um problema de programação não linear inteiro misto é decomposto em uma série de subproblemas menores, um denominado de Mestre (um problema de programação não linear inteiro), e outro chamado de escravo (um problema de programação não linear).

No problema de alocação ótima de bancos de capacitores encontramos em [6] uma aplicação deste método. Nesse trabalho a solução do PAOBC está baseada na decomposição do problema em níveis hierárquicos. O problema no nível alto é chamado de *problema mestre*, é do tipo inteiro e é usado para alocar os capacitores (i.e. para determinar o número e a localização dos capacitores). O problema no nível inferior é chamado de *problema escravo* e é usado pelo *problema mestre* para determinar o tipo e o ponto de operação dos capacitores alocados. Além disso outros esquemas de decomposição são usados para decompor o *problema escravo* em *problemas base*. Se no problema geral de alocação de bancos de capacitores é conhecido a localização e o tipo de bancos a alocar, então este problema é chamado pelos autores como *problemas base* e são resolvidos em [7], usando um algoritmo eficiente desenvolvido para dimensionar os capacitores.

Para o caso de bancos de capacitores chaveados os autores, formulam o problema como:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Psw} \quad \min \quad f_0 &= k_e T_0 p_0(x^0) + \sum_{k \in C_1} r_{ck} u_k^0 + k_e \sum_{i=1}^{nt} T_i p_i(x^i) \\
 G^0(x^0, u^0) &= 0 \\
 H^0(x^0) &\leq 0 \\
 0 \leq u_k^0 &\leq u_k^{max} \quad k \in C_1
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
 G^i(x^i, u^i) &= 0 \quad i = 1, \dots, nt \\
 H^i(x^i) &\leq 0
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$0 \leq u^i$$

$$u^i - u^0 \leq 0 \quad i = 1, \dots, nt \quad (2.17)$$

Este problema **Psw**, corresponde ao problema escravo para o PAOBC com bancos chaveados, a variável de decisão e_k foi determinada pelo problema mestre.

Procede-se a reagrupar as variáveis de controle em dois conjuntos, U e U_0 , o primeiro contém as variáveis de operação dos bancos e o segundo os valores nominais deste bancos. $U = \{u \text{ / (2.16) é satisfeito } \}$ e $U_0 = \{u^0 \text{ / (2.15) é satisfeito } \}$.

Similarmente,

$$f_m(u^0) = k_e T_0 p_0(x^0(u^0)) + \sum_{k \in C_1} r_{ck} u_k^0;$$

$$f_m(u) = \sum f_{ri} = \sum_{i=1}^{nt} T_i p_i(x^i(u^i))$$

Logo o problema **Psw** (2.15) pode ser escrito como:

$$Min_{u^0, u} \{f_0 = f_m(u^0) + f_r(u)/u^0 \in U_0; u \in U, F(u^0, u) \leq 0\} \quad (2.18)$$

em que $F(u^0, u)$ corresponde às restrições acopladas em (2.17).

Os autores começaram a decomposição projetando o problema só sobre o espaço de u^0 como segue:

$$Min_{u^0 \in U_0} \{inf_{u \in U} [f_m(u^0) + f_r(u)/F(u^0, u) \leq 0]\}, \quad (2.19)$$

Supõe-se que o problema nas chaves,

$$f_s(u^0) = inf_{u \in U} \{f_r(u) - F(u^0, u) \leq 0\},$$

pode ser avaliado para um u^0 dado como um problema de otimização com relação à variável u . Logo o problema principal torna-se:

$$SW_0 \quad Min_{u^0 \in U_0} \quad f_0(u^0) = f_m(u^0) + f_s(u^0) \quad (2.20)$$

Para que a hipótese acima seja assegurada, eles evitam os valores de u^0 tal que $f_s(u^0)$ não tenha solução factível. Para isto, é definido um novo conjunto, V como segue:

$$V = \{u^0 / u \in U \text{ s.a. } F(u^0, u) \leq 0\}$$

em que o conjunto V pode ser pensado como a projecção do conjunto de restrições definidos por $F(u^0, u)$ e U sobre o espaço definido por u^0 .

A generalização da projecção é obtida reescrevendo o problema (2.20) como segue.

$$SW_0 \quad min_{u^0} \{f_m(u^0) + f_s(u^0)/u^0 \in U_0 \cap V\} \quad (2.21)$$

Para o PAOBC com bancos chaveados, tem-se a seguinte hipótese:

$$U_0 \subseteq V$$

Assumindo que esta hipótese permaneça para o caso geral, pode-se usar o problema dividido (2.20) melhor que (2.21) para o problema principal, SW_0 .

O subproblema $f_s(u^0)$ pode ainda ser descomposta em nt subproblemas SW_i da seguinte forma:

$$\begin{aligned} SW_i \quad & f_{si}(u^0) = \inf_{u^i} f_{ri}(u^i) \\ \text{s.a.} \quad & u^i - u^0 \leq 0 \\ & u^i \in U_i \end{aligned}$$

em que,

$$U_i = \{u_i / \text{Eq. (16)}\} \text{ e } f_s(u^0) = \sum f_{si}(u^0).$$

Decomposição de Benders

Supondo que as condições de dualidade permanecem para o problema com capacitores chaveados em (2.19), então o problema principal pode ser transcrito na seguinte forma:

$$\begin{aligned} SW_{0b} \quad & \min \quad f_0(u^0, y) = f_d(u^0) = \sum y_i \\ \text{s.a.} \quad & y_i + \lambda^{ijT} (u^0 - u^{oj}) \geq f_{si}(u^{oj}) & (2.22) \\ & u^0 \in U_0 & (2.23) \\ & j = 1, \dots, p \\ & i = 1, \dots, nt \end{aligned}$$

sendo, u^{ij} e λ^{ij} corresponde à solução do subproblema SW_i na iteração j .

O algoritmo de solução envolve a solução iterativa do problema principal SW_{0b} e os subproblemas SW_i . Depois de cada iteração o novo conjunto de restrições do tipo (2.22) é aumentado a SW_{0b} .

Nota-se que a Decomposição de Benders tem as seguintes características: (1) O problema principal, SW_{0b} não é um problema tipo base. Restrições adicionais de (2.22), chamados de cortes, são difíceis de atender com o algoritmo de solução usado pelo *problema base*; pois tem que identificar qual destas restrições estará ativa durante a solução de SW_{0b} . (2) A contribuição dos subproblemas ao objetivo do problema principal, $f_{si}(u^0)$ é aproximado linearizando este termo em torno do ponto calculado previamente, u^{0j} . Para verificar esta propriedade, seja a k -ésima restrição em (2.22) para o subproblema i . Então a solução para a correspondente y_i será:

$$y_i = f_{si}(u^{0k}) - \lambda^{ikT} (u^0 - u^{0k})$$

Conseqüentemente, ao resolver SW_{0b} a aproximação é boa se somente se o ponto atual de solução, u^0 está próximo do ponto calculado u^{0k} .

2.3.2 Métodos Heurísticos Construtivos

Os métodos de solução que utilizam técnicas heurísticas construtivas, executam o plano de alocação através de um processo passo a passo, ou seja, para uma dada configuração da rede de distribuição, denominada configuração base ou inicial, em que os bancos de capacitores que reduzem as perdas do sistema a custo mínimo, são adicionados um a um. Portanto, em cada passo, a configuração do sistema é modificada pela adição de um banco e, a configuração então obtida, é denominada configuração corrente.

Estes métodos geralmente fazem uma análise da sensibilidade de uma função que avalia o desempenho do sistema e o custo da ampliação em relação a adição de um equipamento específico para escolher as “melhores” adições. Assim, em cada passo, um banco é selecionado por um indicador de sensibilidade próprio de cada algoritmo heurístico.

Desta forma, o banco escolhido em cada passo para ser adicionado à chamada configuração corrente será um banco que corresponderá ao objetivo de redução de perdas mais atrativo identificado pela análise de sensibilidade ou indicador de sensibilidade, ou ainda, índice de desempenho.

A análise de sensibilidade, conforme mencionado anteriormente, é basicamente um parâmetro que de alguma maneira está relacionada com a variação da função objetivo devido a alguma modificação nos parâmetros do sistema, considerando, como sistema, a configuração corrente. Assim, um indicador de sensibilidade possui as seguintes características:

- Identifica as barras mais atrativas para realizar alocação de bancos de capacitores;
- É um indicador de caráter local, isto é, identifica a melhor estratégia para a configuração corrente, ao contrário de um indicador de caráter global que identificaria a melhor estratégia para a determinação da melhor configuração do sistema;
- Como os indicadores locais nem sempre coincidem com os indicadores globais, os algoritmos heurísticos construtivos, freqüentemente, não têm a capacidade de encontrar as configurações ótimas globais de sistemas reais;
- A diferença fundamental de cada algoritmo heurístico está no indicador de sensibilidade usado para se determinar a solução do problema.

Resumindo, do ponto de vista teórico, um algoritmo heurístico construtivo, nem sempre encontra a configuração ótima do problema considerado. Na prática, estes algoritmos heurísticos encontram as configurações ótimas de sistemas pequenos e apenas configurações boas para sistemas elétricos de médio e grande porte. Entretanto, estes algoritmos são muito importantes pelos seguintes motivos:

- Na primeira fase de pesquisas (décadas de 60 e 70), esta era a única maneira que existia para solucionar os complexos problemas de sistemas elétricos de grande porte;
- A maioria destes algoritmos são robustos e simples de entender, programar e usar;

- Os esforços computacionais destes algoritmos são muito pequenos;
- Muitas características e propriedades destes algoritmos podem ser usadas no desenvolvimento de algoritmos mais complexos como as metaheurísticas (*simulated annealing*, algoritmo genético, *tabu search*, *GRASP*, etc...);
- Ainda hoje, esses algoritmos são os mais usados pelas empresas elétricas.

Métodos baseados em técnicas heurísticas foram utilizadas em reconfiguração de sistemas de distribuição para reduzir perdas [19], [51]. Em [2] temos um proposta heurística baseada nas asserções contidas em [19] e [51] para identificar a seção do sistema de distribuição com a maior perda devido ao fluxo de reativos para logo indicar o nó sensível nessa seção havendo o maior efeito na redução de perdas do sistema. A potência nominal do capacitor é determinada diferenciando as perdas do sistema em relação a carga conectada na barra. Os bancos são alocados em ótimas barras com apropriadas potências para obter máximos benefícios em dólares. A variação da carga foi considerada para um ano.

M. Chis et al. [18] melhoraram o trabalho de [2], mas determinando diretamente as barras sensíveis como aquelas barras que têm o maior impacto na redução de perdas para todo o sistema, e otimizando a potência dos bancos de capacitores baseado em maximizar os lucros econômicos pela redução de potência e energia.

Mekhamer et al. [41] ainda introduziram duas novas técnicas heurísticas para compensação reativa em sistemas radiais de distribuição. Os métodos podem ser considerados como idéias generalizadas que emergiram de estratégias de buscas heurísticas recentes e conduzem a resultados melhores. Os métodos formulados são derivados e as técnicas são aplicadas a três alimentadores. Os resultados da pesquisa desenvolvida são comparados com métodos prévios para mostrar a superioridade destes métodos. Para mostrar a proximidade ou o afastamento da solução ótima após implementação desses métodos, um novo algoritmo usando a técnica variacional é apresentado para obtenção da alocação ótima de capacitores de acordo com potências padrões disponíveis de capacitores.

Em [5] Baghzouz considera as correntes harmônicas injetadas pelas cargas de características não lineares nos sistemas de distribuição quando se resolve o problema de alocação de capacitores com o objetivo de assegurar que a solução ótima não resulte em uma distorção harmônica excessiva. É apresentado um modelo de injeção de corrente de carga dependente da magnitude de tensão para determinar as características das formas de onda de tensão e perdas adicionais com as frequências harmônicas. Simulações computacionais mostraram que as potências ótimas dos capacitores e suas posições dependem fortemente do modelo de carga usado na frequência fundamental e sobre sinais harmônicos, especialmente quando são utilizados os limites de tensão.

2.3.3 Métodos Metaheurísticos

As metaheurísticas, são métodos de busca que combinam métodos heurísticos. Estes métodos têm se mostrados muito efetivos na solução de problemas difíceis de grande porte, tais como o problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão. Exemplos de metaheurística são os métodos de *Simulated Annealing*, Algoritmos Genéticos, *Grasp*,

entre outros. A seguir é descrita a lógica de algumas destas técnicas metaheurísticas utilizadas até agora no problema de alocação de bancos de capacitores.

Simulated Annealing

Um problema de otimização combinatória que pode ser resolvido usando *simulated annealing* (SA), pode ser formulado como um par (G, v) sendo G um conjunto finito, embora muito grande, de configurações e v é o custo associado a cada configuração. Assim, resolver um problema combinatório deste tipo consiste em encontrar a configuração de custo mínimo dentre todas as configurações possíveis. Assim, SA parte de uma configuração inicial e depois gera um conjunto de configurações candidatas controladas pelo programa de esfriamento. Estas configurações candidatas são aceitas se apresentam um custo menor que a configuração corrente, mas elas também podem ser aceitas se o custo for maior que a configuração corrente de acordo com um critério probabilístico. Esta última característica de aceitar configurações com custo mais elevado, permite ao SA sair de eventuais ótimos locais. Este processo é controlado pelo programa de esfriamento.

Para explicar esta técnica faremos uma breve descrição do algoritmo.

Dada uma substância específica, as moléculas não se encontram com a mesma energia e pode se afirmar que as partículas se encontram em distintos níveis de energia. O menor nível de energia acontece na temperatura do zero absoluto e esse estado é conhecido como "estado fundamental de energia mínima". Cada nível de energia é conhecido como microestado e cada microestado tem um nível de ocupação definido por n_i , que é o número de partículas que existem no nível i . Assim, n_i ficaria determinado da seguinte forma:

$$n_i = P \cdot e^{\frac{-E_i}{kT}},$$

sendo, P um fator de proporcionalidade; k a constante de "Boltzman"; T a temperatura da substância; E_i a energia do microestado i . Claramente observa-se que se E_i aumenta, então n_i diminui. Se T aumenta, então n_i aumenta.

A aplicação de um algoritmo de SA para resolver um problema de otimização combinatória precisa da especificação de três aspectos significativamente distintos e independentes:

- Uma adequada representação do problema;
- Um mecanismo de transição;
- Um programa de esfriamento (*cooling schedule*).

Para cada tipo de problema, deve ser definido claramente cada um destes três aspectos e geralmente existem várias maneiras de se definir ou caracterizar cada um destes itens, o que leva a algoritmos de SA substancialmente diferentes.

No algoritmo SA, se aplica uma ação combinada do mecanismo de geração de alternativas e do critério de aceitação. T_k é o parâmetro de controle ou temperatura e N_k é o número de alternativas geradas na k -ésima iteração do algoritmo. Inicialmente quanto T

é grande, grandes deteriorações da função objetivo podem ser aceitas; quando T decresce, somente pequenas deteriorações são aceitas e finalmente quando T tende a zero, nenhuma deterioração é aceita. Esta característica faz com que o algoritmo S.A. seja diferente em relação aos algoritmos de busca local como os algoritmos heurísticos construtivos.

A partir do estado i com custo $f(i)$ é gerado o estado vizinho j com custo $f(j)$ usando um mecanismo de geração de vizinhança. O critério de aceitação determina se este novo estado é aceito; assim se deve calcular a seguinte probabilidade:

$$P_T\{aceita_j\} = \begin{cases} 1, & \text{se } f(j) \leq f(i) \\ e^{-\frac{f(i) - f(j)}{T}}, & \text{se } f(j) > f(i) \end{cases}$$

A seguir apresenta-se o algoritmo básico do SA:

Procedimento programa SA

Início

Inicializar (T_0, N_0) ;

$k := 0$;

Configuração inicial S_i

Repetir o procedimento

Do $L := 1$ to N_k

Gere $(S_j$ de $S_i)$;

Se $f(j) \leq f(i)$ faça $S_i := S_j$;

Caso contrário

Se $\exp\left(\frac{f(i) - f(j)}{T_k}\right) > \text{random}[0, 1]$ faça $S_i := S_j$;

End do

$k := k + 1$;

Cálcula o comprimento de (N_k) ;

Calcula o parâmetro de controle (T_k) ;

Critério de parada

Termina

O problema da alocação ótima de bancos de capacitores tem sido resolvido mediante esta técnica. Em [14] Chiang et al. apresentam uma formulação levando em consideração aspectos práticos dos capacitores, as restrições de carga, e restrições de operação em diferentes níveis de carga. A formulação é um problema de otimização com uma função objetivo não diferenciável. Uma metodologia de solução baseada em SA para determinar as localizações para instalação, os tipos e potências dos capacitores, e os ajustes de controle desses dispositivos em diferentes níveis de carga é proposta. Em [15] indica-se que esta metodologia pode fornecer a solução ótima global para o problema geral de alocação de capacitores. A técnica é aplicada em um sistema de distribuição de 69 barras em dois casos: alocação de capacitores fixos e alocação geral de capacitores.

Em [16] Chiang, Wang, e Darling resolvem o problema de alocação, realocação, e controle ótimos de capacitores em redes de distribuição de grande escala, desbalanceadas, radiais ou malhadas, para determinar, de maneira ótima, as localizações para instalar (ou realocar, ou remover) capacitores, os tipos e potências dos capacitores a serem instalados

(ou realocados) e, durante cada nível de carga, o esquema de controle para cada capacitor nos nós de um sistema geral trifásico desbalanceado tal que uma desejada função objetivo é minimizada enquanto restrições de carga, restrições de rede e restrições de operação (e.g. o perfil de tensão) em diferentes níveis de carga são satisfeitas. O novo problema é formulado como um problema de otimização combinatória com uma função objetivo não diferenciável. O espaço de configuração, essencial no projeto de uma metodologia de solução baseada em SA para o novo problema é derivado.

Algoritmos genéticos

O algoritmo genético utiliza um conjunto de configurações (população de indivíduos) para resolver um problema complexo, simulando o que ocorre na genética.

Um algoritmo genético básico deve seguir os seguintes passos:

1. Gerar uma população inicial após escolher a forma de codificação;
2. Calcular a função objetivo de cada configuração e armazenar a solução incumbente;
3. Realizar a seleção;
4. Implementar a recombinação (*crossover*);
5. Implementar a mutação e terminar de gerar a nova geração;
6. Estabelecer um critério de parada, se o critério de parada for satisfeito, pare. Caso contrário voltar para o passo 2.

O ciclo entre os passos 2 e 5 é chamado "ciclo geracional".

O mecanismo de codificação depende da natureza das variáveis do problema. Existem problemas com variáveis binárias que são mais simples de se implementar. Outros problemas podem apresentar variáveis inteiras ou contínuas. Os primeiros algoritmos genéticos usavam a codificação binária, assim, para esses algoritmos, as variáveis que originalmente eram inteiras ou contínuas eram transformadas em binárias.

Deve ser criada uma estratégia para calcular a função objetivo para cada configuração. Às vezes, deve ser usada uma estratégia para formular um equivalente da função objetivo que pode ser mais adequado para o algoritmo genético. Às vezes é necessário padronizar a função objetivo. Por último, o parâmetro que identifica a qualidade de uma configuração (que pode ser a própria função objetivo ou seu equivalente) é chamada de *fitness function* (função de adaptação).

Para a seleção, tipicamente é usada a seleção baseada em torneio em que em cada jogo é escolhida a configuração ou topologia ganhadora. Tipicamente em cada jogo participam um número reduzido de configurações, isto é, de duas a quatro configurações. A seleção baseada em torneio tem a vantagem de tratar da mesma forma problemas de maximização e minimização.

Uma vez selecionadas as configurações, devemos formar os pares de acasalamentos e realizar a recombinação. Na recombinação, um par de configurações mistura seu conteúdo genético e formam 2 descendentes. O ponto de recombinação é escolhido aleatoriamente. Para a recombinação de um simples ponto (*single point*) é feita a escolha de um número aleatório entre 1 e $(k - 1)$, em uma configuração com k elementos. Uma vez escolhido o ponto de recombinação, as duas configurações candidatas são geradas trocando-se as parcelas à direita do ponto de recombinação das duas configurações. Nem todas as configurações são recombinadas. Uma parcela pequena pode passar para a próxima etapa sem recombinação. Assim é definida a taxa de recombinação ρ_c .

Assim para que as configurações selecionadas sejam submetidas a recombinação, deve-se gerar um número aleatório $p \in [0,1]$. Se p é menor que a taxa de recombinação ρ_c então, se deve proceder à recombinação, em caso contrário as duas configurações selecionadas não são recombinadas.

Neste processo de recombinação, novamente, estão presentes três decisões de caráter aleatório: (1) As duas configurações que devem ser submetidas à recombinação são escolhidas aleatoriamente, (2) O ponto de recombinação é escolhido aleatoriamente e, (3) Deve-se gerar um número aleatório p que determina se as configurações selecionadas devem ser submetidas à recombinação. Assim, como no caso da seleção, algumas das decisões anteriores podem ser submetidas a decisões de caráter determinístico como, por exemplo, recombinar as melhores configurações com direito a gerar descendentes.

Na codificação binária, a mutação consiste em transformar o valor de uma posição do arranjo de 0 para 1 ou vice-versa. Na maioria das pesquisas, a mutação é considerada um operador secundário. Uma taxa de mutação é definida como sendo o seguinte: para cada bite de cada configuração, gera-se um número aleatório $p \in [0, 1]$ e se $p < \rho_m$ existirá mutação da posição. Se $\rho_m = 0,05$, significa dizer que existe uma probabilidade de 0,05 de se realizar uma mutação.

O ciclo geracional é o processo de seleção - recombinação - mutação, que permite encontrar as configurações da nova geração a partir da população corrente. O ciclo geracional é controlado pelo chamado Programa de Controle do Algoritmo Genético. Este programa é composto de parâmetros que definem o tamanho da população, a taxa de recombinação e a taxa de mutação, definindo a qualidade do algoritmo.

Existem vários critérios de parada, entre eles podemos citar:

- Parar após a execução de um número determinado de gerações;
- Parar quando a solução incumbente atingir um valor especificado;
- Parar se as configurações da população ficarem muito homogêneas.

A população inicial do algoritmo pode ser gerada aleatoriamente, aleatoriamente controlada ou através de um algoritmo heurístico muito rápido.

Em [50] Sundhararajan e Pahwa aplicam um algoritmo genético, em que as variáveis de projeto são as potências dos capacitores nos locais candidatos para níveis discretos de carga. Um método de sensibilidade é usado para determinar os locais candidatos para

alocar os capacitores. O valor de avaliação para cada string é o valor da função objetivo que é a soma das perdas totais de energia e de pico de potência e o custo dos capacitores para a correspondente configuração de potências de capacitores. O método de solução pode fornecer uma solução próxima do ótimo global para o problema de alocação de capacitores. O método de solução foi implementado e testado com um sistema de 9 barras e um sistema de 30 barras. O número de avaliações da função é grande e conseqüentemente algoritmos genéticos são lentos comparados com algoritmos tradicionais. Contudo, a função de avaliação para cada string é independente e assim elas podem ser processadas em paralelo.

Adicionalmente paralelismo implícito faz deles, os algoritmos genéticos, os mais satisfatórios para otimização de projeto em um ambiente de computação paralela.

No artigo [58] Zeng et al. apresentam uma combinação dos métodos usados para reconfiguração de sistemas de distribuição e alocação de capacitores. Utiliza o método de Tensão Nodal Mínima (MNV na sigla em inglês) e Algoritmos Genéticos (AGs), respectivamente. Esses dois métodos são combinados e assim melhores efeitos de redução de perdas foram alcançados do que usando apenas um dos métodos. Os métodos apresentados nesse artigo foram testados em aplicação em tempo real em uma rede de distribuição real.

Busca Tabu

Busca Tabu (*Tabu Search* - TS) é também um algoritmo adequado para resolver problemas combinatórios. Basicamente é um procedimento metaheurístico usado para gerenciar um algoritmo heurístico de busca local, que usa estratégias adequadas para contornar ou sair de soluções ótimas locais.

TS foi inventado por Fred Glover na década de 80 e, até hoje é usado para resolver problemas complexos em muitas áreas da pesquisa operacional.

Nesta seção detalha-se dois algoritmos TS, o TS básico e o avançado.

Algoritmo Básico Busca Tabu

O algoritmo de busca tabu apresenta a seguinte estrutura:

- Um mecanismo de geração de movimentos, isto é, dada a configuração corrente, deve-se definir e caracterizar a *vizinhança da configuração corrente* e, portanto, de acordo com a lógica TS, deve-se passar para a melhor configuração vizinha (ou para o menos pior).
- A formação da *Lista Tabu* que armazena as configurações vizinhas que estão proibidas. Este mecanismo evita retornar a configurações já visitadas (ciclagem). A escolha do tamanho da lista tabu é crítica no desenvolvimento TS. Normalmente a lista tabu é montada usando informação de memória de curto prazo.
- A definição dos *critérios de aspiração* que tenta contornar as proibições impostas pela lista tabu. Neste contexto, o critério de aspiração anula a proibição de uma

configuração vizinha se for verificada que essa configuração candidata é altamente atrativa de acordo com os critérios de aspiração definidos.

Algoritmo avançado Busca Tabu

Um algoritmo avançado de busca tabu deve levar em conta adicionalmente os seguintes aspectos:

- Montar uma estratégia adequada para gerar uma configuração inicial de boa qualidade ou, ainda melhor, um conjunto de configurações de boa qualidade e de composição diversificada. Assim, existiriam disponíveis configurações atrativas correspondentes a regiões distantes o que facilita a implementação eficiente das estratégias de intensificação e diversificação. Esta parte pode ser implementada usando algoritmos heurísticos muito rápidos em termos de esforço computacional.
- Armazenamento das chamadas configurações de elite que podem ser posteriormente usadas para implementar a intensificação e a diversificação, e também na implementação do chamado *Path Relinking* que é usado para gerar novas configurações de qualidade, misturando adequadamente atributos das configurações de elite.
- Implementação de *estratégias de intensificação e diversificação*. Estas estratégias são basicamente implementadas usando as memórias baseados em frequência. A intensificação tenta explorar, mais intensamente, regiões em que foram encontradas excelentes configurações, e a diversificação tenta levar o processo de otimização a regiões distantes ou pouco exploradas na tentativa de encontrar novas configurações de excelente qualidade.
- Montar uma estratégia destinada a reduzir o número de vizinhos candidatos. Em TS, dada uma configuração, existe um número de configurações vizinhas que devem ser analisadas e, TS passa para a melhor configuração vizinha. Se o número de vizinhos é elevado, TS pode precisar de um elevado esforço computacional para realizar um simples movimento. Existem várias propostas para reduzir o número de vizinhos que devem ser analisados. As principais propostas são chamadas critério de *aspiração plus* e a formação de uma “lista de vizinhos considerados de elite”. Para problemas específicos, pode-se ainda montar uma lista reduzida, aproveitando as características específicas do problema.

TS é diferente de um algoritmo de busca local em dois aspectos fundamentais:

- A partir da configuração corrente, passa-se à melhor configuração vizinha ou à menos pior que implica que é permitida uma degradação da qualidade da função objetivo.
- O conjunto de vizinhos de x não se caracteriza de maneira estática. Assim, TS define uma nova estrutura de vizinhança, $N^x(x)$ que varia dinamicamente em estrutura e tamanho durante todo o processo de otimização. Esta estratégia permite a TS realizar uma busca eficiente e inteligente.

Memória de curto prazo

Um algoritmo TS pode ser implementado simplesmente usando a estratégia de curto prazo e muitas das pesquisas iniciais foram implementadas desta forma. A memória de curto prazo é basicamente a informação de atributos de configurações que foram modificados no passado recente.

Esta informação é conhecida como memória baseada em recência (*recency*). A idéia desta estratégia é considerar todos os atributos selecionados no passado recente como sendo proibidos, portanto, todas as configurações candidatas que possuem algum dos atributos proibidos (tabu-ativos) são excluídos na conformação do conjunto $N^x(x) \subseteq N(x)$ de configurações vizinhas para avaliação.

A idéia básica da memória baseada em recência é evitar revisitar configurações já visitadas e aquelas configurações que compartilhem os atributos tabu-ativos. Esta última parte pode representar um problema, pois podem ser eliminados de $N^x(x)$ configurações muito atrativas. O critério de aspiração contorna em parte esta limitação.

Memória de longo prazo

A incorporação de uma estratégia de longo prazo fornece ao algoritmo TS uma sofisticação adicional e um desempenho melhor na maioria das aplicações. Isto significa que além da memória de curto prazo (estratégia de todo algoritmo TS básico) é incorporada uma estratégia adicional chamada estratégia de longo prazo no algoritmo TS.

Existem três aspectos fundamentais relacionados com a memória de longo prazo: (1) A memória baseada em frequência, (2) A estratégia de intensificação, e (3) A estratégia de diversificação.

A memória baseada em frequência, consiste basicamente em armazenar informação do número de vezes em que o atributo foi escolhido para gerar ou participar nas configurações durante o processo TS. Existem dois tipos de memória baseadas em frequência: as frequências de transição que armazena o número de vezes em que um atributo é retirado ou adicionado para formar novas configurações, e a frequência de residência ou permanência que armazena a informação do número de vezes em que o atributo permanece nas novas configurações ou em todas as configurações geradas durante o processo TS.

A estratégia de intensificação, consiste em mudar os critérios de seleção das novas configurações candidatas, isto é, mudar $N^{xx}(x)$ (ou $N^x(x)$) para incentivar a conformação de novas configurações aproveitando a informação acumulada no processo TS. $N^{xx}(x)$ é um subconjunto reduzido de $N(x)$ obtido usando algum critério de redução de configurações candidatas.

A estratégia de diversificação, foi projetada para levar o processo de busca para regiões novas e atrativas. Esta estratégia é implementada mudando a definição de vizinhança ou de configurações candidatas $N(x)$, incorporando “vizinhos” constituídos por atributos que foram pouco usados. Nesta parte podem ser usadas as estruturas de memória usadas em intensificação ou em memória de curto prazo mas com critérios de duração modificados.

Em [31] é apresentado um algoritmo TS aplicado ao PAOBC.

Antes de iniciar o TS é realizado um processo de redução de barras candidatas, assim uma análise de sensibilidade elimina a maioria das barras como candidatas, obtendo-se um número reduzido de barras candidatas a alocação de bancos de capacitores. São escolhidas como barras candidatas àquelas que apresentam um máximo impacto das perdas ativas com relação à variação de potência reativa.

Em [31] é especificada a chamada estrutura de solução, isto é, uma configuração típica e as outras grandezas típicas como valor das perdas, função objetivo, etc. Assim, uma estrutura de solução assume a seguinte forma:

Estrutura de solução: {localizações candidatas, posições (*setting*) de operação dos capacitores, capacidade instalada, perdas de potência, magnitude de tensão, valor da função objetivo, contador de frequência }

Também são mencionadas as funções de TS como a lista tabu, o critério de aspiração, intensificação e diversificação. Os autores mencionam que foram usadas listas tabus com uma duração de 15 movimentos, um critério de aspiração que elimina a proibição se a configuração candidata é melhor das últimas k configurações aceitas e o uso de intensificação e diversificação baseado em frequência.

Em [22] Gallego, Monticelli, e Romero propõem resolver o PAOBC para a alocação (re-alocação) de capacitores para redes de distribuição radiais. Os tipos, potências, localizações e esquemas de controles de capacitores também serão determinados. O difícil problema combinatorial de alocação ótima de capacitores é formulado como um problema de programação não linear inteira mista (PNLIM). Assim esse é um problema NP (de tempo Não Polinomial) completo e sua solução usa um algoritmo de busca combinatória. Para a solução do problema eles propõem um método híbrido baseado em Busca Tabu estendida com características tomadas de outras aproximações combinatoriais, tais como algoritmos genéticos e SA, e de aproximações heurísticas práticas. O método proposto foi extensivamente testado em um conjunto de redes disponíveis na literatura com resultados superiores referentes a qualidade e custo das soluções, e em uma rede prática de 135 barras.

Mori, e Ogita, em [42], propuseram um método baseado na Busca Tabu Paralela, TSP, para alocação de capacitores em sistemas de distribuição. TSP é proposto para melhorar a performance do TS e contém um conjunto de estratégias. Uma é introduzir múltiplos comprimentos tabus no TS para que a precisão da solução seja melhorada. O comprimento tabu múltiplo permite encontrar melhores soluções em diferentes direções o que cria a diversidade de soluções. Outra é decompor a vizinhança do TS em sub-vizinhanças de tal forma que o esforço computacional é reduzido. A computação de cada sub-vizinhança é designada para cada processador. O método proposto é aplicado com sucesso em sistemas de distribuição de 9 barras e 27 barras. Uma comparação é feita entre esse método e outros métodos que usam algoritmos genéticos, SA e TS para mostrar a melhor efetividade do método TSP proposto.

Capítulo 3

Método de Pontos Interiores

3.1 Introdução

Muitos problemas dos sistemas elétricos podem ser modelados matematicamente, e estes modelos são representados por restrições operacionais e/ou de capacidade do sistema elétrico e/ou de seus componentes. A função objetivo destes problemas pode representar minimização de perdas, investimento ou maximização de lucro. Portanto, existem diferentes modelos matemáticos que podem representar um problema em particular, a escolha depende do objetivo da pesquisa. Nas pesquisas de planejamento é conveniente utilizar um modelo simplificado. No entanto, para problemas de operação é necessário modelos mais reais e complexos. Assim as características desses problemas podem ser lineares, não lineares, inteiros, mistos, indefinidos ou pior ainda não ter um modelo matemático definido ou conhecido.

Dentro da otimização matemática se desenvolveram técnicas de solução que são utilizadas com frequência para resolver problemas de sistemas de energia, na qual pode-se mencionar as principais:

- Método Simplex: Desenvolvido nos anos 40, orientado a resolver problemas de programação linear.
- Método Gradiente: Foi a primeira proposta para resolver problemas de fluxo de potência ótimo. Apesar do rigor matemático destes métodos, usam algumas aproximações que levam a uma convergência lenta e em zig-zag perto da solução ótima.
- Programação Quadrática Sucessiva (PQS): Usa derivadas de segunda ordem, que melhora a convergência do método gradiente. O método é baseado no processo Quasi-Newton e usa uma aproximação da matriz Hessiana (construída iterativamente) da função de Lagrange. A matriz Hessiana é densa e torna esses métodos lentos quando o número de variáveis de controle é muito grande.
- O método de Newton: Busca um ponto que cumpra diretamente as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Poucos métodos são confiáveis e rápidos quanto este

método. O desafio é identificar as restrições de desigualdade que estão ativas na solução ótima e, portanto alguns métodos heurísticos são aplicados.

- Método de Pontos Interiores (MPI): (Desde 1984), criado inicialmente para resolver problemas de PL. O MPI consegue um melhor desempenho computacional para problemas de grande dimensão em comparação com os métodos clássicos. Os problemas de otimização com restrições (seja de minimização ou maximização) são usualmente reformulados como problemas de otimização *sem restrições*, utilizando principalmente: Métodos de Penalidade; Métodos da Lagrangiana, Lagrangiana Reduzida ou Lagrangiana Reduzida Aumentada.

Na última década, a pesquisa na área do método de pontos interiores experimentou um impressionante crescimento com uma quantidade enorme de artigos (acima de 2000) publicados na área nos últimos dez anos. As implementações teóricas e práticas têm sido desenvolvidas rapidamente [44].

Estas pesquisas criaram novas variantes do método para resolver todo tipo de problema, desde programação linear até não linear e desde problemas convexos até não convexos (em geral até hoje não há garantia de convergência para todos os problemas não convexos)[48]. Da mesma forma, estas novas variantes são igualmente aplicadas para resolver toda espécie de problemas práticos.

A evolução dos métodos de pontos interiores pode ser resumida como segue:

- Primeiro método de pontos interiores foi atribuído a Frish (1955), utilizou um método de barreira logarítmica.
- Fiacco e McCormick (1968) apresentam um método para resolver um problema não linear com restrição de desigualdade baseado no método de barreira logarítmica.
- Karmarkar (1984) apresentou um novo método baseado em transformações não lineares para resolver um tipo particular de PL. Foi o maior desenvolvimento no campo da pesquisa de pontos interiores, pois mostrou um tempo de solução acima de 50 vezes mais rápido que o método simplex, isto é, um algoritmo com tempo polinomial de convergência [34].
- Meggido (1989) foi o primeiro em apresentar o método barreira logarítmica para solucionar os PL primal e dual (MPI-PDBL).
- Mehrotra (1992) conseguiu melhores direções de busca resolvendo dois sistemas de equações lineares em cada iteração, para acelerar a convergência. Este método é chamado de pontos interiores predictor-corrector (MPI-PDBL-PC).
- A inclusão de múltiplos passos corretores acrescenta melhorias no algoritmo de Mehrotra, tal como é mostrado em [12].

3.2 Conceitos Preliminares de Programação Não Linear

Nesta seção apresenta-se uma revisão dos conceitos de otimização que serão utilizados no desenvolvimento dos métodos de pontos interiores utilizando um problema de programação não linear.

3.2.1 Condições de otimalidade para problemas de PNL sem restrições

Um problema de otimização sem restrições de uma variável pode ser formulado como segue:

$$\min_x f(x) \quad (3.1)$$

sendo, $x = [x^1 \ x^2 \ \dots \ x^n]^T$ o vetor que representa a variável de controle do problema. As condições necessárias e suficientes para um mínimo local de $f(x)$ são dadas por:

- Condição necessária: O gradiente de $f(x)$ com relação a x tem que ser igual a zero em x^* :

$$r = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x=x^*} = 0 \quad (3.2)$$

- Condição suficiente: A matriz Hessiana de $f(x)$ com relação à x deve ser definida positiva em x^* :

$$H = \nabla^2 f(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}_{x=x^*} > 0 \quad (3.3)$$

O uso das condições necessárias envolve a solução de um sistema de n equações com n incógnitas $\nabla f(x) = 0$. As soluções de $\nabla f(x) = 0$, (pontos estacionários de f) podem ser mínimos locais, máximos locais ou pontos de inflexão (pontos de sela). É necessário conhecer a sinal da matriz Hessiana de f nos pontos estacionários. Os menores principais de H são:

$$D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} \end{bmatrix}, \dots, D_n = H. \quad (3.4)$$

Aplicando o teorema de Sylvester H é definida positiva se e somente se os determinantes de todos os menores principais são positivos. $|D_1| > 0, |D_2| > 0, \dots, |D_n| > 0$.

3.2.2 Método das barreiras

Aplica-se a problemas do tipo:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = f(x) \\ \text{s.a.} \quad & h_j(x) \leq 0; \quad j = 1, \dots, nh \\ & S = \{x | h(x) \leq 0\}; \end{aligned} \quad (3.5)$$

sendo S a região factível, assumimos que $S^- = \{x : h(x) < 0\}$ seja não vazio, e que o fecho de S^- é o conjunto S . A função escalar $f(x)$ e a restrição de desigualdade $h(x)$ são contínuas para todo $j = 1, \dots, nh$, em que nh é o número de restrições de desigualdade.

Seja a função objetivo modificada:

$$P(x, r) = f(x) + r \cdot \sum_{j=1}^{nh} \phi(h_j(x)) \quad (3.6)$$

sendo, r o parâmetro de barreira e ϕ a função de barreira interior.

Esta função forma uma barreira que tende ao infinito ao longo da fronteira da região factível, na tentativa de favorecer a seleção de pontos factíveis quando se utiliza métodos de otimização sem restrições inicializados em pontos estritamente dentro da região factível (i.e., $h_j(x) < 0$, para todo j). Esta barreira prevê a aproximação de qualquer variável na fronteira (i.e., $h_j(x) = 0$), a dificuldade com esta idéia, é que se a solução está na fronteira da região factível, o qual é sempre o caso em PL, então a função barreira impede de atingir o ótimo. Para evitar esta dificuldade utiliza-se o parâmetro de barreira r que equilibra a contribuição da verdadeira função objetivo e da função barreira.

O parâmetro de barreira r deve ser positivo e tem como função controlar a magnitude da função barreira. Desde que a função $\log(-y)$ toma amplos valores negativos quando y aproxima-se de zero. Assim, quanto mais $-y$ permanecer positivo a solução ótima dos problemas da barreira estarão no interior da região factível definida pelas restrições. Portanto, o termo barreira é adicionado na função objetivo para os problemas de maximização e subtraído nos problemas de minimização.

As funções de barreira são funções definidas em $(R^{nh})^- = \{y \in R^m : y < 0\}$, que cumprem as seguintes condições:

- São positivas no interior da região factível:

$$\phi(h_j(x)) > 0; \quad \forall x \in S^- \quad (3.7)$$

- Tendem ao infinito na fronteira da região factível:

$$\lim_{x \rightarrow S-S^-} \phi(h_j(x)) \rightarrow \infty \quad (3.8)$$

Alguns exemplos de funções de barreira, definidas pelas restrições $g(x) \leq 0$, são:

- A função de barreira logarítmica:

$$\phi(h_j(x)) = - \sum_{j=1}^{nh} \log(-h_j(x)); \quad (3.9)$$

- A função de barreira inversa:

$$\phi(h_j(x)) = \sum_{j=1}^{nh} \frac{-1}{h_j(x)}; \quad (3.10)$$

Convergência do método de barreira

Seja $\{r_t\}$ uma sucessão de números positivos convergindo a zero, e seja ϕ uma função escalar de barreira interior, então define-se:

$$x^{(t)} = \arg \underset{x \in S^-}{\text{minimiza}} \{f(x) + r_t \phi(h_j(x))\}; \quad (3.11)$$

$$t = 1, 2, \dots$$

Cada ponto de acumulação da sucessão gerada pelo método de barreira, $x^{(t)}$, é um mínimo global do problema. Em particular, se o problema original tem um único ótimo, então a sucessão $x^{(t)}$ converge para este ótimo [37].

A função barreira logarítmica não está definida para valores negativos de x . Porém, o emprego do método de barreira logarítmica pode levar a pontos não factíveis. Portanto deve-se considerar algum meio de detectar, prevenir e resolver estas situações. Para evitar esta possibilidade, é feita a seguinte modificação no termo de barreira:

$$\hat{\phi}(h) = \phi(\hat{h}), \quad \text{em que } \hat{h}_i = \min\{h_i, -\varepsilon\} \quad (3.12)$$

Para pequenos valores da tolerância ε .

3.2.3 Condições de otimalidade para problemas de PNL com restrições - Lagrangeana

Considerando o problema de programação não linear:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & g_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, ng \\ & h_j(x) \leq 0 \quad j = 1, \dots, nh \end{aligned} \quad (3.13)$$

na qual o vetor x contém as variáveis básicas e de controle do problema. Os escalares ng e nh representam o número de restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente.

A função Lagrangeana associada ao problema pode ser definida como segue:

$$\mathcal{L}(x, u, \lambda) = f(x) + u^T \cdot g(x) + \lambda^T \cdot h(x) \quad (3.14)$$

sendo, \mathcal{L} a função escalar chamada Lagrangeana associada ao problema primal.

As variáveis u e λ são os multiplicadores de Lagrange das restrições de desigualdade e igualdade, respectivamente. Também são chamadas de variáveis duais do problema.

Para resolver este problema modificado aplica-se as condições de otimalidade de KKT:

Condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker

Apresenta-se as condições necessárias de otimalidade de primeira ordem (CNOPO):

- Condição dual

$$\nabla_x \mathcal{L}|_{x^*} = \nabla_x f(x^*) + J_{g(x^*)}^T \cdot u + J_{h(x^*)}^T \cdot \lambda = 0 \quad (3.15)$$

sendo, $\nabla_x f(x^*)$ o vetor gradiente de f ; $J_{g(x^*)}^T$ a Jacobiana de $g(x)$; $J_{h(x^*)}^T$ a Jacobiana de $h(x)$;

- Factibilidade do Primal

$$\nabla_\lambda \mathcal{L}|_{x^*} = g(x^*) = 0 \quad (3.16)$$

$$\nabla_u \mathcal{L}|_{x^*} = h(x^*) \leq 0 \quad (3.17)$$

- Factibilidade do Dual

$$u_i > 0$$

$$\lambda_i \text{ é irrestrito} \quad (3.18)$$

- Condição de complementaridade

$$u_j^* \cdot h_j(x^*) = 0; \quad j = 1, \dots, nh \quad (3.19)$$

Estas quatro condições, em princípio, podem ser resolvidas como um sistema de equações, para isto a dificuldade se encontra na *condição de complementaridade* que supõe que se $h_j(x^*) = 0$ então $u_j^* \geq 0$, e se $h_j(x^*) < 0$ então $u_j^* = 0$ para $j = 1, \dots, nh$.

Condições Suficientes de Otimalidade de Segunda Ordem (CSOSO)

$$L = \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}|_x = F(x^*) + \sum_{j=1}^{ng} u_j^* \cdot G_j(x^*) + \sum_{i=1}^{nh} \lambda_i^* \cdot H_i(x^*) > 0 \quad (3.20)$$

em que,

$$\begin{aligned} \widetilde{M}(x^*) &= \{n \in R^{nx} : \nabla_x g_j(x^*)^T \cdot n = 0 \ j = 1 \dots ng, \\ &\text{e } \nabla_x h_i(x^*)^T \cdot n = 0 \text{ para } i : h_i(x^*) = 0 \text{ e } w_i > 0\} \end{aligned}$$

sendo, $F(x)$ a Hessiana da função objetivo, $G_j(x)$ e $H_j(x)$ as Hessianas das restrições de igualdade e das restrições de desigualdade, respectivamente. $\widetilde{M}(x)$ é o subespaço tangente em x das restrições ativas.

Na próxima seção são apresentados os algoritmos de pontos interiores primal dual (MPI-PDBL) e preditor-corretor (MPI-PDBL-PC) para resolver problemas de programação linear e não linear, respectivamente.

3.3 Métodos de Pontos Interiores Primal Dual Barreira Logarítmica para PL

O MPI aplicado num PL, até o momento, obteve bons resultados. Os matemáticos têm comparado o desempenho do MPI com códigos simplex avançados, e mostrou ser muito competitivo em problemas de pequeno e médio porte e definitivamente superior em problemas de grande porte.

Seja o PL:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c^T \cdot x & (3.21) \\ \text{s.a.} \quad & \\ & A \cdot x = b \\ & l \leq x \leq u \end{aligned}$$

Na qual, x, c, u e $l \in R^n$; $b \in R^m$ e $A \in R^{m \times n}$.

3.3.1 Penalizando o problema primal

Ao introduzir as variáveis de folga não negativas s_1 e $s_2 \in R^n$, nas restrições de desigualdade tem-se:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c^T \cdot x - \mu^k \sum_{i=1}^n (Ln s_{1i} + Ln s_{2i}) & (3.22) \\ \text{s.a.} \quad & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cdot x &= b \\ -s_2 - s_1 + u - l &= 0 \\ x + s_2 - u &= 0 \end{aligned}$$

As restrições $s_1 > 0$ e $s_2 > 0$ são inseridas na função objetivo como termos de barreira logarítmica e devem manter a condição de não negatividade em todo o processo de solução.

O termo $\mu^k > 0$ é o parâmetro de barreira logarítmica que decresce de forma monótona a zero no processo iterativo de solução, então a seqüência de parâmetros $\{\mu^k\}_{k=0}^{\infty}$ gera uma seqüência de sub-problemas dado por (3.22). Baseado no teorema de Fiacco e McCormick, se μ^k tende a zero a seqüência $\{\mu^k\}_{k=0}^{\infty}$ de soluções de (3.22) tende a x^* , um mínimo local de (3.21). Observe que realmente (3.22) não é um único problema, mas uma família inteira de problemas definidos pelo parâmetro μ^k . Cada um desses problemas é um problema de programação não linear devido ao fato da função objetivo ser não linear. Esta função é chamada de função de barreira logarítmica.

A seqüência de pontos que define a *trajetória central* é mostrada na Figura 3.1. Observe que para cada valor de μ^k , o mínimo (problema de minimização) é atingido num ponto interior, e quando μ^k aproxima-se de zero este ponto interior tende para a solução ótima do problema de programação linear original (vértice superior):

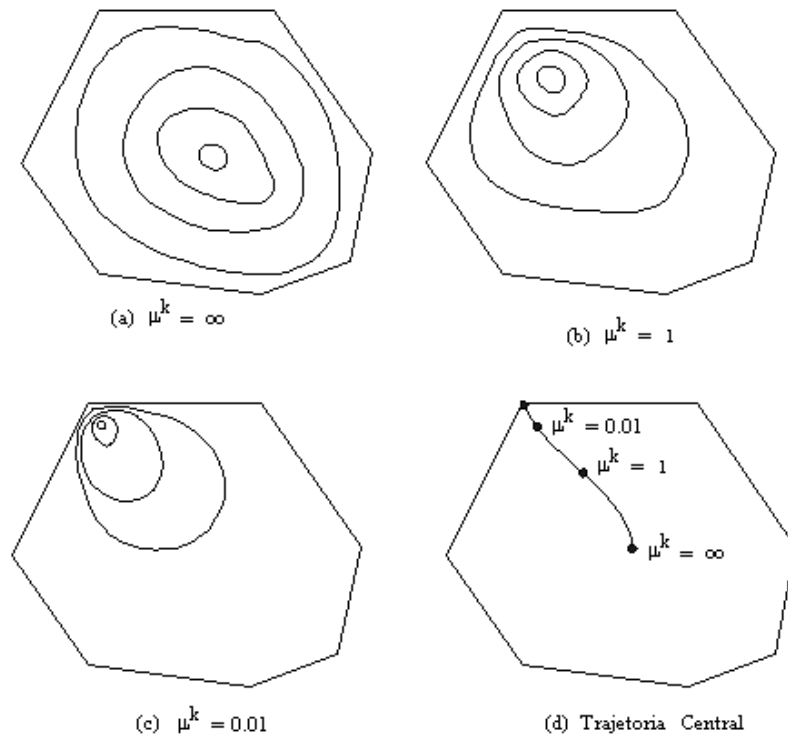


Figura 3.1: Trajetória Central e curvas de nível

3.3.2 Lagrangeana do problema primal modificado e primeira condição de KKT

A Lagrangeana do problema (3.22) é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, y, z, s) = c^T \cdot x - \mu^k \sum_{i=1}^n (Ln s_{1i} + Ln s_{2i}) - y^T (A \cdot x - b) - \\ z_1^T (-s_2 - s_1 + u - l) + z_2^T (x + s_2 - u) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Em que $y \in R^m$ e $z_1, z_2 \in R^n$ são os vetores multiplicadores de Lagrange, também chamadas de variáveis duais.

Aplicando a (3.23) a condição necessária de otimalidade de primeira ordem de KKT (CNOPO), obtém-se:

$$\nabla_x \mathcal{L} = c - A^T \cdot y + z_2 = 0; \quad (3.24)$$

$$\nabla_y \mathcal{L} = -A \cdot x + b = 0; \quad (3.25)$$

$$\nabla_{z_1} \mathcal{L} = s_2 + s_1 - u + l = 0; \quad (3.26)$$

$$\nabla_{z_2} \mathcal{L} = x + s_2 - u = 0; \quad (3.27)$$

$$\nabla_{s_1} \mathcal{L} = -\mu^k \cdot S_1^{-1} e + z_1 = 0; \quad (3.28)$$

$$\nabla_{s_2} \mathcal{L} = -\mu^k \cdot S_2^{-1} e + z_1 + z_2 = 0 \quad (3.29)$$

sendo, S_1 e S_2 matrizes diagonais definidas pelos componentes de s_1 e s_2 , respectivamente. O vetor e é de coordenadas 1 de dimensão apropriada.

As equações (3.25) - (3.27) junto com as condições de não negatividade de ($s_1, s_2 > 0$) asseguram a factibilidade do primal. A equação (3.24) junto com as condições de não negatividade de ($z_1, z_1 + z_2 \geq 0$) asseguram a factibilidade do dual. Entanto (3.28) e (3.29) representam as perturbações ($\mu^k \neq 0$) para as condições de complementaridade ($\mu^k = 0$) em $-\mu^k \cdot e + S_1 \cdot z_1 = 0$ e $-\mu^k \cdot e + S_2 \cdot (z_1 + z_2) = 0$.

3.3.3 Solução do sistema de equações não lineares - Método de Newton

Usualmente para resolver o sistema de equações não lineares (3.24) - (3.29), a solução é aproximada por uma única iteração do método de Newton. As direções de Newton são apenas um meio de seguir o caminho dos pontos minimizantes parametrizados por μ^k , $x(\mu^k)$.

O sistema de equações anterior pode ser representado como segue:

$$F(w^k) = 0 \quad (3.30)$$

sendo, $w^k = [x^k \ y^k \ z^k \ s_1^k \ s_2^k]^T$.

Aplicando o método de Newton ao sistema (3.30), $J_{F(w^k)} \cdot \Delta w^k = -F(w^k)$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -A^T & 0 & I & 0 & 0 \\ -A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & I \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & S_1 & 0 & Z_1 & 0 \\ 0 & 0 & S_2 & S_2 & 0 & Z_1 + Z_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta x^k \\ \Delta y^k \\ \Delta z_1^k \\ \Delta z_2^k \\ \Delta s_1^k \\ \Delta s_2^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c^T + A^T \cdot y - z_2 \\ A \cdot x - b \\ -s_2 - s_1 + u - l \\ -x - s_2 + u \\ \mu^k \cdot e - S_1 \cdot z_1 \\ \mu^k \cdot e - S_2 \cdot (z_1 + z_2) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

O sistema (3.31) tem as seguintes características:

- Dimensão elevada;
- Alta esparsidade, não só pela existência de numerosas sub-matrizes nulas, mas também pela alta esparsidade das sub-matrizes não nulas;
- Matriz simétrica, não só em elementos, mas também em estrutura;
- Sistema indefinido.

3.3.4 Redução do sistema linear

As direções de Newton podem ser obtidas resolvendo diretamente o sistema linear (3.31) ou resolvendo o sistema reduzido (3.32) abaixo, para Δx^k e Δy^k primeiro:

$$\begin{bmatrix} J_r & -A^T \\ -A & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta x^k \\ \Delta y^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \\ A \cdot x - b \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

e logo calculando:

$$\Delta s_2^k = -x - s_2 + u - \Delta x^k \quad (3.33)$$

$$\Delta s_1^k = -s_1 - l + x + \Delta x^k \quad (3.34)$$

$$\Delta z_1^k = \mu^k S_1^{-1} e - S_1^{-1} Z_1 \Delta s_1^k \quad (3.35)$$

$$\Delta z_2^k = \mu^k S_2^{-1} e - S_2^{-1} (Z_1 + Z_2) (-x + u - \Delta x^k) - \Delta z_1^k \quad (3.36)$$

sendo,

$$\begin{aligned} J_r &= S_1^{-1} Z_1 + S_2^{-1} (Z_1 + Z_2) \\ r &= c^T - A^T \cdot y + S_2^{-1} (Z_1 + Z_2) (x - u) + S_1^{-1} Z_1 (x - l) + z_2^k \\ &\quad - \mu^k S_1^{-1} e + \mu^k S_2^{-1} e \end{aligned} \quad (3.37)$$

O sistema (3.32) é esparso, simétrico e indefinido. Este sistema pode se reduzir um pouco mais originando a chamada *equação normal*.

3.3.5 Equação normal

$$\Delta y^k = (A \cdot J_r^{-1} \cdot A^T)^{-1} (A \cdot J_r^{-1} \cdot r - (Ax - b)) \quad (3.38)$$

$$\Delta x^k = J_r^{-1} (A^T \Delta y^k - r) \quad (3.39)$$

sendo, $M = A \cdot J_r^{-1} \cdot A^T$.

A matriz M da equação (3.38) é esparsa, simétrica e definida positiva. Normalmente é resolvida por método da fatoração de Cholesky.

No método de pontos interiores o maior esforço computacional está em resolver as equações (3.31), (3.32) e (3.38) em cada iteração, e pode tomar de 70% a 90 % do tempo computacional total.

A eficiência dos métodos de pontos interiores depende da solução da equação normal, portanto pode se usar um algoritmo para resolver um sistema de equações lineares com esparsidade e a atualização seletiva dos elementos de J_r . Se um elemento de J_r é muito pequeno não deve ser atualizado, deve ser igual a zero.

Além do Cholesky, podem ser utilizados para resolver a equação normal (3.38) os seguintes métodos:

Métodos Diretos ou Não-Iterativos; Métodos Gradiente Conjugado ou Iterativos; Combinação dos Métodos Diretos / Gradiente Conjugado.

Antes da aplicação de qualquer método, é recomendável usar um “Pre-Resolvedor” para eliminar restrições redundantes [9].

3.3.6 Atualização das variáveis primais e duais

Uma vez obtidas as direções de Newton, as variáveis primais e duais devem ser atualizadas:

$$x^{k+1} = x^k + \gamma \alpha_p^k \Delta x^k \quad (3.40)$$

$$s_i^{k+1} = s_i^k + \gamma \alpha_p^k \Delta s_i^k \quad (3.41)$$

$$y^{k+1} = y^k + \gamma \alpha_d^k \Delta y^k \quad (3.42)$$

$$z_i^{k+1} = z_i^k + \gamma \alpha_d^k \Delta z_i^k \quad (3.43)$$

$$i = 1, 2$$

sendo, α_p e $\alpha_d \in (0, 1]$ os comprimentos de passo primal e dual, respectivamente. O parâmetro γ tem um valor apropriado para assegurar que o próximo ponto atingido satisfaça plenamente as condições de não negatividade. Um valor típico é $\gamma = 0.99995$.

A utilização de dois comprimentos de passo (primal e dual) oferece vantagens em problemas de PL. Entretanto em [52] mostra-se que em problemas de PNL é recomendável apenas utilizar um único comprimento de passo segundo:

$$\alpha^k = \min\{\alpha_p^k, \alpha_d^k\}$$

3.3.7 Cálculo do comprimento do passo

O máximo comprimento dos passos primal e dual em cada iteração k nas direções de Newton são determinados por:

$$\begin{aligned}\alpha_s^{max} &= \min\left\{\frac{-s_{1i}^k}{\Delta s_{1i}^k} : \Delta s_{1i}^k < 0, \frac{-s_{2i}^k}{\Delta s_{2i}^k} : \Delta s_{2i}^k < 0, \right\} \\ \alpha_z^{max} &= \min\left\{\frac{-z_{1i}^k}{\Delta z_{1i}^k} : \Delta z_{1i}^k < 0, \frac{-(z_{1i}^k + z_{2i}^k)}{(\Delta z_{1i}^k + \Delta z_{2i}^k)} : (\Delta z_{1i}^k + \Delta z_{2i}^k) < 0, \right\}\end{aligned}$$

$$\alpha_p^k = \{\alpha_s^{max}, 1.0\}; \quad \alpha_d^k = \{\alpha_z^{max}, 1.0\} \quad (3.44)$$

No cálculo do comprimento de passo nos MPIS existem muitas teorias que tentam garantir a convergência do algoritmo. Em [38] são resolvidos dois problemas unidimensionais, tendo como incógnita os comprimentos do passo primal e dual, e as funções objetivos são a factibilidade do primal e dual em que o limite máximo das incógnitas são as calculados em (3.44).

3.3.8 Redução do parâmetro de barreira

O Dual do problema (3.21) é dado por:

$$\begin{aligned}Max \quad & b^T y + l^T z_1 - u^T z_2 \\ s.a. \quad & A^T y + z_1 - z_2 = c \\ & z_1 \geq 0; z_2 \geq 0\end{aligned} \quad (3.45)$$

Por simplificação considera-se $b^T = [b \ l \ u]$ e $y^T = [y \ z_1 \ z_2]$.

Num PL, a função objetivo primal é dada por $c^T x$ e a função objetivo dual é dada por $b^T y'$, portanto, o *gap* dual é a diferença das funções objetivos anteriores:

$$\rho^k = c^T x^k - b^T y'^k \quad (3.46)$$

No ponto ótimo $\rho^* = c^T x^* - b^T y'^* = 0$, então $c^T x^* = b^T y'^*$.

Assumindo que o resíduo primal é pequeno ($Ax \approx b$) pode-se obter uma aproximação do *gap* dual, conhecida como *gap* de complementaridade:

$$\begin{aligned}\rho^k &= c^T x^k - b^T y - l^T z_1 + u^T z_2 \\ \tilde{\rho}^k &= (x^k)^T (c - A^T y) - l^T z_1 + u^T z_2 \\ \hat{\rho}^k &= (x^k)^T (z_1 - z_2) - l^T z_1 + u^T z_2 \\ \tilde{\hat{\rho}}^k &= z_1^T (x^k - l) - z_2^T (x^k - u) \\ \hat{\rho}^k &= z_1^T (\mu^k Z_1^{-1} e) - z_2^T (\mu^k Z_2^{-1} e) \\ \tilde{\hat{\rho}}^k &= 2\mu^k n\end{aligned}$$

O *gap* de complementaridade é calculado como a soma de todas as equações de complementaridade. Cada equação de complementaridade representa a distância que existe do ponto corrente ao ponto candidato a ótimo.

Dado um *gap* dual na iteração k , o parâmetro de barreira da seguinte iteração ($k + 1$) pode ser calculado reduzindo o *gap* dual por um fator σ :

$$\begin{aligned}\mu^{k+1} &= \sigma^k \frac{\rho^k}{2n} \\ \mu^{k+1} &= \sigma^k \frac{c^T x^k - b^T y^k}{2n}\end{aligned}\tag{3.47}$$

Em que $\sigma^k \in (0, 1]$, Gonzaga [23] propõe:

$$\sigma = 1 - \frac{1}{50\sqrt{n}}$$

3.3.9 Ponto inicial

Vetor Primal Inicial

Calcular o vetor auxiliar \hat{x} :

$$\hat{x} = \frac{1}{\|A_j\|_2 + 1}\tag{3.48}$$

em que, A_j é um vetor coluna da matriz A .

Calcular o escalar η :

$$\eta = \frac{\|b\|_2}{\|A\hat{x}\|_2 + 1}\tag{3.49}$$

O vector primal inicial é dado então por: $x^0 = \eta\hat{x}$.

Vector Dual Inicial

$$z^0 = \begin{cases} \text{Se } c_j < 1, & z_j^0 = 1 \\ \text{Caso contrário,} & z_j^0 = c_j \end{cases}\tag{3.50}$$

Parâmetro de barreira inicial

Pode-se estimar como:

$$\mu^0 = \frac{c^T x^0 - b^T y^0}{2n}\tag{3.51}$$

3.3.10 Critério de convergência

O algoritmo termina quando são satisfeitas as condições de factibilidade e otimalidade. As condições de factibilidade incluem a factibilidade primal e dual.

$$|Ax - b|_{\infty} \leq \varepsilon_1 \quad (3.52)$$

$$|s_2 - s_1 - u + l|_{\infty} \leq \varepsilon_1 \quad (3.53)$$

$$|x + s_2 - u|_{\infty} \leq \varepsilon_1 \quad (3.54)$$

$$|A^T y - z_2 - c|_{\infty} \leq \varepsilon_1 \quad (3.55)$$

As equações (3.52) a (3.54) expressam as condições de factibilidade primal, ou seja, o erro primal é menor que a tolerância pre estabelecida. A equação (3.55) representa a factibilidade dual.

A condição de otimalidade neste caso pode ser representada pelo *gap* de dualidade, mas como ele tem o mesmo comportamento que o parâmetro μ , então pode ser utilizado como critério de otimalidade. É importante dar conta que este fato só ocorre nos problemas de programação linear.

3.3.11 Algoritmo Geral do MPI-PDBL

1. Analisar o sistema primal, (3.21) para eliminar possíveis restrições redundantes [9].
2. Encontrar um ponto inicial, (3.48) a (3.51), $x^0 > 0$, $s^0 > 0$, y^0 e $z^0 > 0$, escolher um $\mu^0 > 0$ e fazer $k = 0$.
3. Se os critérios de convergência, (3.52) a (3.55) não são cumpridos, continue. Caso contrário pare.
4. Montar a estrutura esparsa da equação normal (3.38).
5. Resolver a equação normal.
6. Calcular os comprimentos dos passos primal e dual (3.44).
7. Atualizar as variáveis primal e dual (3.40) a (3.43).
8. Reduzir o parâmetro de barreira (3.47).
9. Fazer $k = k + 1$, e ir ao passo 3.

3.4 Métodos de Pontos Interiores de Ordem Superior

Desde o início dos estudos dos métodos de pontos interiores para PL o conceito de usar uma fatoração do sistema reduzido de KKT várias vezes para melhorar a eficiência foi um assunto de interesse. O primeiro método em ganhar a aceitação popular foi o método preditor-corretor de Mehrotra [40].

Quando o método foi desenvolvido, inicialmente para a programação linear, provou facilmente ser adaptável à programação quadrática convexa e algumas pesquisas mais recentes utilizam este método como parte do algoritmo para resolver um PNL generalizado [48].

A idéia é, primeiramente calcular a direção de busca baseada no termo de primeira ordem (direções puras de Newton, sem considerar o parâmetro de barreira μ , preditor). O comprimento do passo que pode ser dado nesta direção é usado para avaliar quanto de correção de centralidade é necessário. Depois, o termo corretor é calculado, que contém o termo de centralidade e o termo de segunda ordem. Conseqüentemente, a direção de busca é a soma da direção do preditor e da direção do corretor.

Nesta seção desenvolve-se o algoritmo do método de pontos interiores primal-dual de barreira logarítmica preditor-corrector (MPI-PDBL-PC) para PNL.

Seja o PNL:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & f(x) & (3.56) \\
 \text{s.a.} \quad & & \\
 & g(x) = 0 & \\
 & h^l \leq h(x) \leq h^u & \\
 & x^l \leq \hat{I}x \leq x^u &
 \end{aligned}$$

Assume-se que $f : R^n \rightarrow R$ seja a função objetivo, $g : R^n \rightarrow R^{ng}$ e $h : R^n \rightarrow R^{nh}$ são funções contínuas duas vezes diferenciáveis. $\hat{I}x : R^n \rightarrow R^{ndx}$ é um subconjunto de x .

3.4.1 Penalizando o problema primal

Ao introduzir as variáveis de folga $s \geq 0$, nas restrições de desigualdade tem-se:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & f(x) - \mu^k \sum_{i=1}^{nh} (Ln s_{1i} + Ln s_{2i}) - \mu^k \sum_{i=1}^{ndx} (Ln s_{3i} + Ln s_{4i}) & (3.57) \\
 \text{s.a.} \quad & & \\
 & g(x) = 0 & \\
 & -s_2 - s_1 + h^u - h^l = 0 & \\
 & -h(x) - s_2 + h^u = 0 & \\
 & -s_4 - s_3 + x^u - x^l = 0 & \\
 & -\hat{I}x - s_4 + x^u = 0 &
 \end{aligned}$$

As restrições $s_1, s_2 \in R^{nh}$ e $s_3, s_4 \in R^{ndx}$ são inseridos na função objetivo como termos de barreira logarítmica.

O parâmetro de barreira logarítmica $\mu^k > 0$ decresce em forma monótona a zero no processo iterativo de solução, então a seqüência de parâmetros $\{\mu^k\}_{k=0}^{\infty}$ gera uma seqüência de sub-problemas dado por (3.57). Baseado no teorema de Fiacco e McCormick se μ^k tende a zero, a seqüência $\{\mu^k\}_{k=0}^{\infty}$ de soluções de (3.57) tende a x^* , um mínimo local de (3.56) tal como se indica na seção 3.3.1.

3.4.2 Lagrangeana do problema primal modificado e primeira condição de KKT

A função Lagrangeana associada ao problema pode ser definida como segue:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(s, z, x, y) = & f(x) - \mu^k \sum_{i=1}^{nh} (Ln s_{1i} + Ln s_{2i}) - \mu^k \sum_{i=1}^{ndx} (Ln s_{3i} + Ln s_{4i}) - \\ & y^T g(x) - z_1^T (-s_1 - s_2 - h^l + h^u) - z_2^T (-h(x) - s_2 + h^u) - \\ & z_3^T (-s_3 - s_4 - x^l + x^u) - z_4^T (-\hat{I}x - s_4 + x^u) \end{aligned} \quad (3.58)$$

sendo, \mathcal{L} a função escalar chamada Lagrangeana associada ao problema primal. Os vetores $y \in R^{ng}$, $z_1, z_2 \in R^{nh}$ e $z_3, z_4 \in R^{ndx}$ são os multiplicadores de Lagrange das restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente. Também são chamadas de variáveis duais do problema.

Um ponto de mínimo local x^* do problema (3.57) pode ser calculado em termos de um ponto estacionário da função Lagrangeana.

Ao aplicar a CNOPO de KKT:

$$F(w^k) = G(w^k) - \mu^k u \quad (3.59)$$

para $w^T = [s_1 \ s_2 \ s_3 \ s_4 \ z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4 \ x \ y]$.

$$G(w^k) = \begin{bmatrix} S_1 z_1 \\ S_2 (z_1 + z_2) \\ S_3 z_3 \\ S_4 (z_3 + z_4) \\ s_2 + s_1 + h^l - h^u \\ s_2 + h(x) - h^u \\ s_4 + s_3 + x^l - x^u \\ s_4 + \hat{I}x - x^u \\ \nabla f(x) - J_{g(x)}^T \cdot y + J_{h(x)}^T z_2 + \hat{I}^T z_4 \\ -g(x) \end{bmatrix}; u = \begin{bmatrix} e \\ e \\ e \\ e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

em que, S_1, S_2, S_3 e S_4 são matrizes diagonais definidas pelos componentes de s_1, s_2, s_3 e s_4 , respectivamente. O vetor e é de coordenadas 1 e de dimensão apropriada.

O vetor $\nabla f(x) \in R^n$ representa o gradiente da função objetivo, $J_{g(x)} \in R^{ng \times n}$ e $J_{h(x)} \in R^{nh \times n}$, são as matrizes Jacobianas das restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente.

O ponto de solução deve cumprir as condições de não negatividade, $s_1, s_2, s_3, s_4, z_1, (z_1 + z_2), z_3, (z_3 + z_4) \geq 0$.

Neste ponto, existe uma variante com relação ao MPI-PDBL para melhorar o cálculo das direções de Newton. No lado direito de (3.59) acrescenta-se os termos de segunda ordem:

$$F(w^k) = G(w^k) - \mu^k u + \Delta \quad (3.60)$$

em que, $\Delta = [\Delta S_1 \Delta z_1, \Delta S_2(\Delta z_1 + \Delta z_2), \Delta S_3 \Delta z_3, \Delta S_4(\Delta z_3 + \Delta z_4), 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$.

Assumindo que estes termos de segunda ordem são conhecidos, uma direção de busca é composta por:

$$\Delta w^k = \Delta w_{af} + \Delta w_{ce} + \Delta w_{co}$$

Aqui Δw_{af} é a direção preditor ou *affine-scaling*, uma direção de Newton pura, obtida pela solução de (3.60) só com a primeira parcela do lado direito, Δw_{ce} é a direção central obtida pela solução de (3.60) só com a segunda parcela do lado direito (com um apropriado μ^k), Δw_{co} é a direção corretor obtida pela solução de (3.60) só com a terceira parcela do lado direito.

No MPI-PDBL a direção de busca é dada por: $\Delta w^k = \Delta w_{af} + \Delta w_{ce}$.

No MPI-PDBL-PC a direção de busca é obtida em dois passos, isto são chamados de preditor e corretor e são tratados a seguir:

$$\Delta w^k = \underbrace{\Delta w_{af}}_{\text{preditor}} + \underbrace{\Delta w_{ce} + \Delta w_{co}}_{\text{corretor}} \quad (3.61)$$

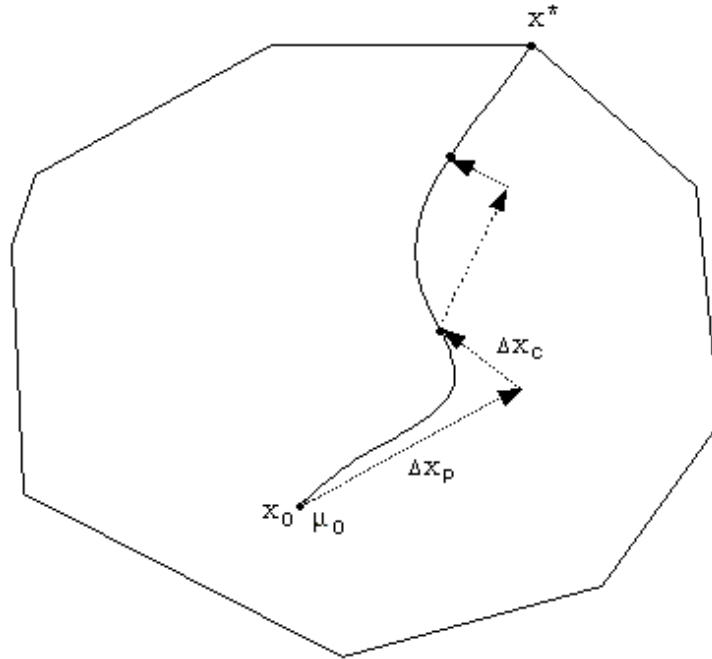


Figura 3.2: Passo preditor e corretor

3.4.3 Passo preditor

Solução do sistema de equações não lineares - Método de Newton

O passo preditor é usado para aproximar os termos não lineares Δ do lado direito de (3.60) e para estimar um valor do parâmetro de barreira μ^k , que serão usados no passo corretor.

Aplicando o método de Newton ao sistema (3.60),

$$J_{F(w^k)} \cdot \Delta w_{af}^k = -G(w^k) \quad (3.62)$$

sendo,

$$J_{F(w^k)} = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_1 + Z_2 & 0 & 0 & S_2 & S_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 & 0 & 0 & 0 & S_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_3 + Z_4 & 0 & 0 & S_4 & S_4 & 0 & 0 \\ I & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{I} & 0 \\ 0 & 0 & I & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & Jh & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{I}^T & 0 & Jh^T & H & -Jg^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Jg & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz é quadrada e constante dentro dos passos preditor e corretor.

Em que,

$$H = Hf(x^k) - \sum_{j=1}^{ng} y_j Hg_j(x^k) + \sum_{j=1}^{nh} z_{2j} Hh_j(x^k) \quad (3.63)$$

As matrizes hessianas da função objetivo $Hf(x^k)$, da restrição de desigualdade $Hh_j(x^k)$ e da restrição de igualdade $Hg_j(x^k)$ são necessárias para calcular H .

O sistema (3.62) tem as mesmas características do sistema (3.31) indicado na seção (3.3.3).

Redução do sistema linear

O sistema (3.62) pode ser reduzido a (3.64) e resolvido primeiro para Δx^{af} e Δy^{af} :

$$\begin{bmatrix} Jr & -Jg^T \\ -Jg & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta x^{af} \\ \Delta y^{af} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \\ g(x) \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

e logo para:

$$\Delta s_2^{af} = -h(x) - s_2 + h^u - J_h \Delta x^{af} \quad (3.65)$$

$$\Delta s_1^{af} = -s_1 - s_2 - h^l + h^u - \Delta s_2^{af} \quad (3.66)$$

$$\Delta s_4^{af} = -s_4 - \hat{I}x + x^u - \hat{I} \Delta x^{af} \quad (3.67)$$

$$\Delta s_3^{af} = -s_4 - s_3 - x^l + x^u - \Delta s_4^{af} \quad (3.68)$$

$$\Delta z_1^{af} = -(z_1 + S_1^{-1} Z_1 \Delta s_1^{af}) \quad (3.69)$$

$$\Delta z_3^{af} = -(z_3 + S_3^{-1} Z_3 \Delta s_3^{af}) \quad (3.70)$$

$$\Delta z_2^{af} = -(z_1 + z_2 + S_2^{-1} (Z_1 + Z_2) \Delta s_2^{af}) - \Delta z_1^{af} \quad (3.71)$$

$$\Delta z_4^{af} = -(z_3 + z_4 + S_4^{-1} (Z_3 + Z_4) \Delta s_4^{af}) - \Delta z_3^{af} \quad (3.72)$$

sendo,

$$Jr = J_h^T [S_1^{-1} Z_1 + S_2^{-1} (Z_1 + Z_2)] J_h + \tilde{I}^T [S_3^{-1} Z_3 + S_4^{-1} (Z_3 + Z_4)] \hat{I} + H \quad (3.73)$$

$$r = \nabla f(x) - J_g^T \cdot y + J_h^T [S_2^{-1} (Z_1 + Z_2) (h(x) - h^u) + S_1^{-1} Z_1 (h(x) - h^l) + z_2] + \tilde{I}^T [S_4^{-1} (Z_3 + Z_4) (\hat{I}x - x^u) + S_3^{-1} Z_3 (\hat{I}x - x^l) + z_4] \quad (3.74)$$

Cálculo do comprimento do passo

Os comprimentos dos passos primal e dual, na direção *affine-scaling* α_p^{af} e α_d^{af} são calculados como segue:

$$\begin{aligned} \alpha_p^{af} &= \min\left\{1, \frac{-s_{1i}}{\Delta s_{1i}^{af}} : \Delta s_{1i}^{af} < 0, \frac{-s_{2i}}{\Delta s_{2i}^{af}} : \Delta s_{2i}^{af} < 0, \right. \\ &\quad \left. \frac{-s_{3i}}{\Delta s_{3i}^{af}} : \Delta s_{3i}^{af} < 0, \frac{-s_{4i}}{\Delta s_{4i}^{af}} : \Delta s_{4i}^{af} < 0, \right\} \\ \alpha_d^{af} &= \min\left\{1, \frac{-z_{1i}}{\Delta z_{1i}^{af}} : \Delta z_{1i}^{af} < 0, \frac{-(z_{1i} + z_{2i})}{(\Delta z_{1i}^{af} + \Delta z_{2i}^{af})} : (\Delta z_{1i}^{af} + \Delta z_{2i}^{af}) < 0, \right. \\ &\quad \left. \frac{-z_{3i}}{\Delta z_{3i}^{af}} : \Delta z_{3i}^{af} < 0, \frac{-(z_{3i} + z_{4i})}{(\Delta z_{3i}^{af} + \Delta z_{4i}^{af})} : (\Delta z_{3i}^{af} + \Delta z_{4i}^{af}) < 0 \right\} \\ \alpha^{af} &= \min\{\alpha_p^{af}, \alpha_d^{af}\} \end{aligned} \quad (3.75)$$

Cálculo do parâmetro de barreira

Uma estimação do *gap* de complementaridade do passo predictor $\hat{\rho}^{af}$ pode ser dado como:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{af} &= (z_1 + \gamma \alpha^{af} \Delta z_1^{af})^T (s_1 + \gamma \alpha^{af} \Delta s_1^{af}) + (z_1 + z_2 + \gamma \alpha^{af} (\Delta z_1^{af} + \\ &\quad \Delta z_2^{af}))^T (s_2 + \gamma \alpha^{af} \Delta s_2^{af}) + (z_3 + \gamma \alpha^{af} \Delta z_3^{af})^T (s_3 + \gamma \alpha^{af} \Delta s_3^{af}) + \\ &\quad (z_3 + z_4 + \gamma \alpha^{af} (\Delta z_3^{af} + \Delta z_4^{af}))^T (s_4 + \gamma \alpha^{af} \Delta s_4^{af}) \end{aligned} \quad (3.76)$$

Uma estimação do parâmetro de barreira μ^{af} do passo predictor é dado como [52]:

$$\mu^{af} = \min\left\{\left(\frac{\rho^{af}}{\rho^k}\right)^2, 0.2\right\} \frac{\rho^{af}}{2(ndx + nh)} \quad (3.77)$$

O valor de μ^{af} deve ser pequeno quando a direção de *affine-scaling* gera um decréscimo maior no *gap* de complementaridade, sendo escolhido um valor maior de μ^{af} no outro caso.

O *gap* de complementaridade ρ^k é inicialmente calculado sem considerar os termos de segundo ordem em (3.76):

$$\rho^k = (z_1^k)^T s_1^k + (z_1^k + z_2^k)^T s_2^k + (z_3^k)^T s_3^k + (z_3^k + z_4^k)^T s_4^k \quad (3.78)$$

Na equação (3.77) calcula-se μ^{af} para ser utilizado no passo corretor. Porém, o parâmetro de centralidade σ é calculado dinamicamente como $\min\{(\frac{\rho^{af}}{\rho^k})^2, 0.2\}$ para compensar os objetivos de reduzir μ^{af} e melhorar a direção de centralidade σ .

No MPI-PDBL caso $\sigma=1$, o sistema (3.31) define uma direção central, um passo Newton para um ponto na trajetória da barreira. Por outro lado, se $\sigma=0$, dá um passo Newton puro, conhecido como *affine-scaling*. Entretanto, para MPI-PDBL-PC o parâmetro de centralidade σ está limitado a 0.2.

3.4.4 Passo corretor

Com os resultados do passo preditor e os termos de segunda ordem, Δ e μ^{af} , pode-se calcular a direção Δw^k :

$$J_{F(w^k)} \times \begin{bmatrix} \Delta s_1^k \\ \Delta s_2^k \\ \Delta s_3^k \\ \Delta s_4^k \\ \Delta z_1^k \\ \Delta z_2^k \\ \Delta z_3^k \\ \Delta z_4^k \\ \Delta x^k \\ \Delta y^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_1 z_1 + \mu^{af} e - \alpha^{af^2} \Delta S_1^{af} \Delta z_1^{af} \\ -S_2(z_1 + z_2) + \mu^{af} e - \alpha^{af^2} \Delta S_2^{af} (\Delta z_1^{af} + \Delta z_2^{af}) \\ -S_3 z_3 + \mu^{af} e - \alpha^{af^2} \Delta S_3^{af} \Delta z_3^{af} \\ -S_4(z_3 + z_4) + \mu^{af} e - \alpha^{af^2} \Delta S_4^{af} (\Delta z_3^{af} + \Delta z_4^{af}) \\ -s_2 - s_1 + h^u - h^l \\ -s_2 - h(x) + h^u \\ -s_4 - s_3 + x^u - x^l \\ -s_4 - \hat{I}x + x^u \\ -\nabla f(x) + J_{g(x)}^T y - J_{h(x)}^T z_2 - \hat{I}^T z_4 \\ -g(x) \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

Redução do sistema linear

Analogamente, o sistema (3.79) pode-se reduzir a (3.80), ser resolvido primeiro para Δx^k e Δy^k :

$$\begin{bmatrix} Jr & -Jg^T \\ -Jg & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta x^k \\ \Delta y^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \\ g(x^k) \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

e logo para:

$$\Delta s_2^k = -h(x) - s_2 + h^u - J_h \Delta x^k \quad (3.81)$$

$$\Delta s_1^k = -s_1 - s_2 - h^l + h^u - \Delta s_2^k \quad (3.82)$$

$$\Delta s_4^k = -s_4 - \hat{I}x + x^u - \hat{I} \Delta x^k \quad (3.83)$$

$$\Delta s_3^k = -s_4 - s_3 - x^l + x^u - \Delta s_4^k \quad (3.84)$$

$$\Delta z_1^k = -(z_1 + S_1^{-1} Z_1 \Delta s_1^k) + S_1^{-1} (\mu^k e - \alpha^{af^2} \Delta S_1^{af} \Delta z_1^{af}) \quad (3.85)$$

$$\Delta z_3^k = -(z_3 + S_3^{-1} Z_3 \Delta s_3^k) + S_3^{-1} (\mu^{af} e - \alpha^{af^2} \Delta S_3^{af} \Delta z_3^{af}) \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned} \Delta z_2^k &= -(z_1 + z_2 + S_2^{-1} (Z_1 + Z_2) \Delta s_2^k) - \Delta z_1^k + \\ &S_2^{-1} (\mu^{af} e - \alpha^{af^2} \Delta S_2^{af} (\Delta z_1^{af} + \Delta z_2^{af})) \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned}\Delta z_4^k &= -(z_3 + z_4 + S_4^{-1}(Z_3 + Z_4)\Delta s_4^k) - \Delta z_3^k + \\ &S_4^{-1}(\mu^{af}e - \alpha^{af^2}\Delta S_4^{af}(\Delta z_3^{af} + \Delta z_4^{af}))\end{aligned}\quad (3.88)$$

sendo,

$$Jr = J_h^T[S_1^{-1}Z_1 + S_2^{-1}(Z_1 + Z_2)]J_h + \hat{I}^T[S_3^{-1}Z_3 + S_4^{-1}(Z_3 + Z_4)]\hat{I} + H \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned}r &= \nabla f(x) - J_g^T \cdot y + J_h^T[S_2^{-1}(Z_1 + Z_2)(h(x) - h^u) + S_1^{-1}Z_1(h(x) - h^l) + z_2 - \\ &S_1^{-1}(\mu^k e - \alpha^{af^2}\Delta S_1^{af}\Delta z_1^{af}) + S_2^{-1}(\mu^{af}e - \alpha^{af^2}\Delta S_2^{af}(\Delta z_1^{af} + \Delta z_2^{af}))] + \\ &\hat{I}^T[S_4^{-1}(Z_3 + Z_4)(\hat{I}x - x^u) + S_3^{-1}Z_3(\hat{I}x - x^l) + z_4 - \\ &S_3^{-1}(\mu^{af}e - \alpha^{af^2}\Delta S_3^{af}\Delta z_3^{af}) + S_4^{-1}(\mu^{af}e - \alpha^{af^2}\Delta S_4^{af}(\Delta z_3^{af} + \Delta z_4^{af}))]\end{aligned}\quad (3.90)$$

3.4.5 Atualização das variáveis primais e duais

Uma vez obtidas as direções de Newton, as variáveis primais e duais devem ser atualizadas como segue:

$$x^{k+1} = x^k + \gamma\alpha^k\Delta x^k \quad (3.91)$$

$$s_i^{k+1} = s_i^k + \gamma\alpha^k\Delta s_i^k \quad (3.92)$$

$$y^{k+1} = y^k + \gamma\alpha^k\Delta y^k \quad (3.93)$$

$$z_i^{k+1} = z_i^k + \gamma\alpha^k\Delta z_i^k \quad (3.94)$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

O parâmetro γ tem um valor apropriado para assegurar que o próximo ponto atingido satisfaça plenamente as condições de não negatividade. Um valor típico é $\gamma = 0.99995$.

3.4.6 Cálculo do comprimento do passo

O comprimento do passo, α^k é calculado, mediante (3.75), ao trocar af por k .

3.4.7 Ponto inicial

O ponto inicial determina o início da trajetória de convergência do MPI, e não está restrito a encontrar-se na região de convergência, mas sim a manter as condições de não negatividade. Porém, é importante escolher um ponto inicial de qualidade para melhorar o desempenho do MPI. A seguir mostra-se uma estratégia heurística para encontrar um ponto inicial.

1. x^0 é estimado usando o ponto médio entre os limites superior e inferior para as variáveis com limites.

2. As variáveis de folga primal são inicializadas como:

$$\begin{aligned}
s_{1i}^0 &= \min\{(1 - \tau)h_i^\Delta, \max\{\tau h_i^\Delta, h_i(x^0) - h_i^l\}\} \\
s_{2i}^0 &= h_i^\Delta - s_{1i}^0 \\
s_{3j}^0 &= \min\{(1 - \tau)x_j^\Delta, \max\{\tau x_j^\Delta, \hat{I}(x^0) - x_j^l\}\} \\
s_{4j}^0 &= x_j^\Delta - s_{3j}^0
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Na qual, $h^\Delta = h^u - h^l$, $x^\Delta = x^u - x^l$, e tipicamente $\tau = 0.25$.

3. As variáveis duais y_i^0 podem ser inicializadas como 0 ou 1.

4. As variáveis de folga dual são inicializadas como segue:

$$\begin{aligned}
z_1^0 &= \mu^k (S_1^0)^{-1} e \\
z_2^0 &= \mu^k (S_2^0)^{-1} e - z_1^0 \\
z_3^0 &= \mu^k (S_3^0)^{-1} e \\
z_4^0 &= \mu^k (S_4^0)^{-1} e - z_3^0
\end{aligned} \tag{3.96}$$

3.4.8 Critério de convergência

O cálculo das direções de Newton é repetido até que os critérios de convergência sejam encontrados:

Factibilidade do primal

$$\begin{aligned}
\max\{\|g(x^k)\|_\infty, \max\{x^l - x^k\}, \max\{x^k - x^u\}, \max\{h^l - h(x^k)\}, \\
\max\{h(x^k) - h^u\}\} \leq \epsilon_f
\end{aligned} \tag{3.97}$$

Factibilidade do dual

$$\frac{\|\nabla f(x^k) - J_{g(x^k)}^T y^k - J_{h(x^k)}^T z_2^k - \hat{I}^T z_4^k\|_\infty}{1 + \|x^k\|_2} \leq \epsilon_f \tag{3.98}$$

Condição de otimalidade

$$\frac{\rho^k}{1 + \|x^k\|_2} \leq \epsilon_f \tag{3.99}$$

$$\mu^k \leq \epsilon_u$$

Desvio da função objetivo

$$\frac{|f(x^k) - f(x^{k-1})|}{1 + |f(x^k)|} \leq \epsilon_f \quad (3.100)$$

3.4.9 Algoritmo geral do MPI-PDBL-PC

1. Escolher um ponto inicial w^0 que cumpra com as condições de não negatividade.
2. Calcular os vetores $\nabla f(x^0)$, $g(x^0)$ e $h(x^0)$, e as matrizes $Jg(x^0)$ e $Jh(x^0)$.
3. Calcular o vetor da parte direita de (3.64).
4. Fazer $k = 0$.
5. Aplicar os critérios de convergência (3.97) a (3.100).
6. Calcular a matriz H através de (3.63).
7. Montar e resolver, no ponto atual, o sistema de equações dado por (3.64) e calcular as outras direções de busca utilizando (3.65) a (3.74).
8. Calcular o comprimento do passo α^{af} , ρ^{af} e μ^{af} usando (3.75), (3.78) e (3.77), respectivamente.
9. Montar e resolver, no ponto atual, o sistema de equações dado por (3.80) e calcular as outras direções de busca utilizando (3.81) a (3.90).
10. Calcular o máximo comprimento do passo usando (3.75), mudando a expressão af por k .
11. Atualizar as variáveis primal e dual por médio de (3.91) a (3.94).
12. Calcular os vetores $\nabla f(x^{k+1})$, $g(x^{k+1})$ e $h(x^{k+1})$, e as matrizes $Jg(x^{k+1})$ e $Jh(x^{k+1})$.
13. Calcular o vetor da parte direita de (3.64).
14. Fazer $k = k + 1$, e ir ao passo 5.

Capítulo 4

Algoritmo de Fluxo de Potência de Varredura

4.1 Introdução

Para resolver problemas de fluxo de carga em sistemas de distribuição é possível usar o método de Newton e suas versões desacopladas. Entretanto, estes sistemas apresentam duas características muito específicas: (1) Normalmente os sistemas de distribuição operam em forma radial, isto é, não existem laços ou malhas no sistema, e (2) os sistemas de distribuição apresentam uma relação R/X muito elevada quando comparados com valores típicos de sistemas de transmissão ou sub-transmissão motivo pelo qual estes sistemas entram na categoria de sistemas mal-condicionados. A primeira característica é uma vantagem porque simplifica consideravelmente a complexidade do problema, entretanto a segunda característica é uma desvantagem quando são usadas as versões desacopladas do método de Newton e frequentemente produz divergência do processo de resolução.

O método de Newton e suas versões desacopladas foram utilizados eficientemente para resolver sistemas bem-condicionados, entretanto para sistemas mal-condicionados, ou com problemas de inicialização, na maioria das vezes eles apresentam problemas de convergência, porém pacotes comerciais de fluxo de carga sempre modificam estes algoritmos para contornar estes problemas [20], [36] e [49].

Neste Capítulo apresenta-se o algoritmo de fluxo de carga radial de varredura para sistemas de distribuição radial e fracamente malhadas desenvolvido em [49]. Este método foi implementado dentro do AHC para alocação de capacitores pelas excelentes características de convergência e robustez que apresenta, e que são necessárias para que o algoritmo seja utilizado em aplicações em tempo real ou como uma subrotina dentro de algoritmos que necessitem dele para calcular as perdas ou algum outro parâmetro elétrico.

Neste trabalho é necessário resolver o problema de fluxo de carga com rapidez e com a mesma precisão que o método de Newton, desta forma este método foi implementado como uma subrotina dentro do AHC.

4.2 Solução do sistema de distribuição radial

Neste método o esquema de numeração das barras e linhas é muito importante, ou melhor, as camadas às quais pertencem devem estar bem definidas. A numeração das barras será utilizada também no algoritmo de pontos interiores do Capítulo 5.

O sistema radial deve ser organizado em camadas, em ordem crescente a partir do nó raiz (subestação de distribuição), conforme ilustra a Figura 4.1. Este esquema de numeração é muito importante para se encontrar a solução do fluxo de carga de maneira eficiente, e como se mostra mais à frente para implementar o método de pontos interiores de uma maneira rápida e também eficiente.

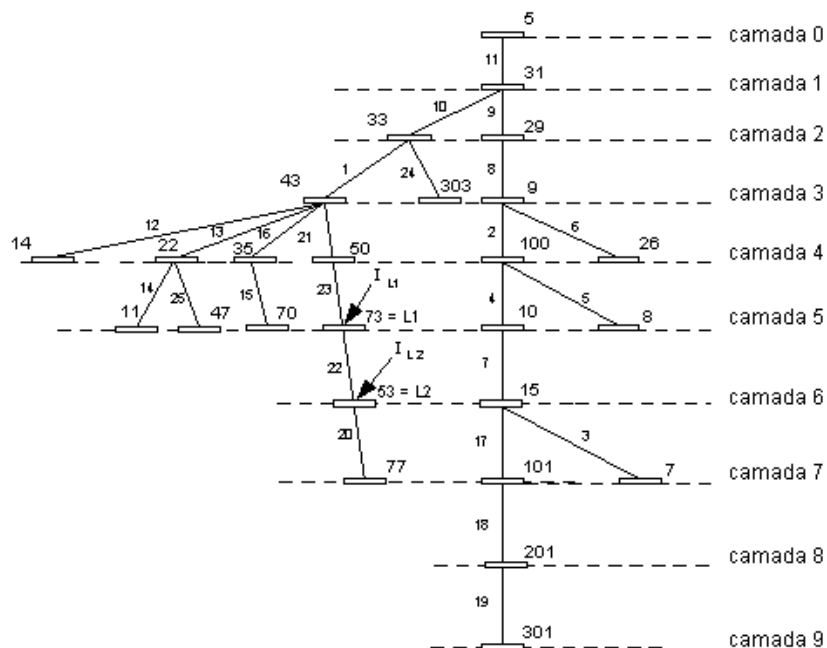


Figura 4.1: Típico sistema de distribuição radial

4.2.1 Numeração das Linhas e Barras

A numeração das barras e linhas foram implementadas mediante o seguinte algoritmo:

A partir da barra de referência encontram-se todas as linhas que estão ligadas nesta e se armazenam na primeira fila de uma matriz (camada 1), as barras de recepção daquelas linhas são encontradas facilmente e passam a ser, cada uma delas, as novas barras de referência do sistema. Para cada uma das novas barras de referência, são encontradas todas as linhas que estão ligadas a elas, e são armazenadas na segunda fila da matriz (camada 2), igualmente as barras de recepção daquelas linhas são achadas facilmente e passam a ser, cada uma delas, as novas barras de referência do sistema. Este processo é repetido até alcançar todas as linhas do sistema.

Para o sistema mostrado na Figura 4.1 a matriz de camadas é a seguinte:

$$A = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 & 10 \\ 8 & 1 & 24 \\ 2 & 6 & 12 & 13 & 16 & 21 \\ 4 & 5 & 14 & 25 & 15 & 23 \\ 7 & 22 \\ 3 & 17 & 20 \\ 18 \\ 19 \end{bmatrix}$$

Da mesma maneira que se obtém a numeração das linhas por camadas também é obtida a numeração das barras de recepção e envio por camadas. Estas últimas serão utilizadas na implementação do método de pontos interiores.

$$Br = \begin{bmatrix} 31 \\ 29 & 33 \\ 9 & 43 & 303 \\ 100 & 26 & 14 & 22 & 35 & 50 \\ 10 & 8 & 11 & 47 & 70 & 73 \\ 15 & 53 \\ 7 & 101 & 77 \\ 201 \\ 301 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Be = \begin{bmatrix} 5 \\ 31 & 31 \\ 29 & 33 & 33 \\ 9 & 9 & 43 & 43 & 43 & 43 \\ 100 & 100 & 22 & 22 & 35 & 50 \\ 10 & 73 \\ 15 & 15 & 53 \\ 101 \\ 201 \end{bmatrix}$$

4.2.2 Método de resolução

Para um sistema de nbr nós e nr ramos (linhas), ($nr = nbr - 1$), o método de resolução consiste em três passos:

Cálculo das correntes nodais

Na Figura 4.2 mostra-se uma situação geral de uma barra de um sistema de energia elétrica, onde se aplica a Primeira Lei de Kirchhoff - Lei de Kirchhoff das correntes (LKC).

A corrente injetada pela carga na barra i é:

$$I_{carga} = \left(\frac{S_i}{V_i}\right)^*$$

A corrente injetada pelo shunt na barra i é:

$$I_{sh} = -Y_i V_i$$

Então na iteração k , as injeções de corrente nodais são calculadas aplicando LKC no nó i :

$$I_i = I_{carga} + I_{sh} = \sum_{m \in \Omega_i} I_{im}$$

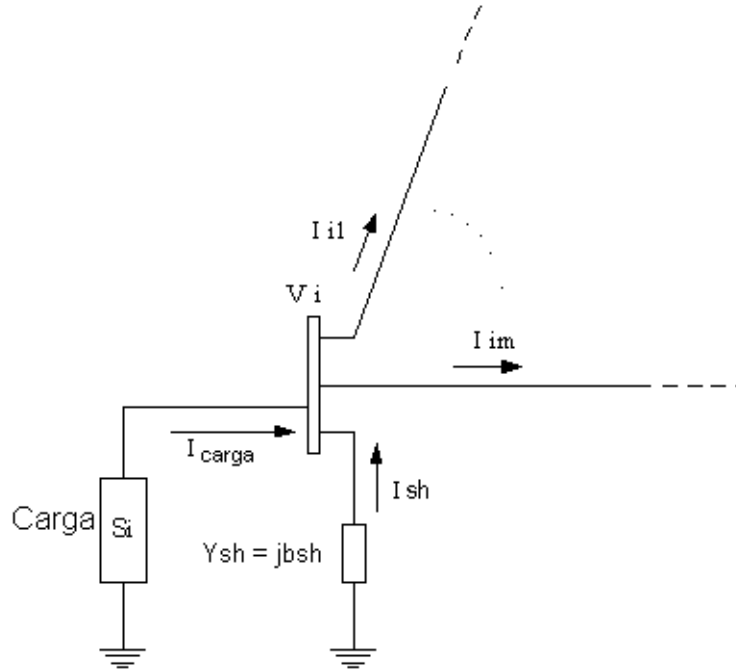


Figura 4.2: Injeção de corrente numa barra do sistema de energia elétrica

$$I_i^{(k)} = \left(\frac{S_i}{V_i^{(k-1)}} \right)^* - Y_i V_i^{(k-1)} \quad (4.1)$$

Em que, $i = 1, 2, \dots, nbr$, V_i^{k-1} é a tensão no nó i calculada durante a iteração $(k-1)$ e S_i é a injeção de potência complexa especificada no nó i . Y_i é a somatória de todos os elementos shunt ligados ao nó i .

Backward Sweep

Na iteração k , começando das barras da última camada e movendo-se em direção à subestação (nó raiz), a corrente nas linhas é calculada sucessivamente. A corrente na linha L , J_L , é calculada por:

$$J_L^{(k)} = -I_{L_2}^{(k)} + \sum(\text{correntes saindo do nó } L_2) \quad (4.2)$$

sendo, $L = nr, nr-1, \dots, 1$. Em que I_{L_2} é a injeção de corrente no nó L_2 .

Forward Sweep

As tensões nas barras são atualizadas, começando nas barras da primeira camada (nó raiz) e seguindo em direção às barras da última camada. Para cada linha, L , a tensão na barra L_2 é calculada usando a tensão atualizada na barra L_1 e a corrente na linha L , calculada no passo anterior.

$$V_{L_2}^{(k)} = V_{L_1}^{(k)} - Z_L J_L^{(k)} \quad (4.3)$$

em que, $L = 1, 2, \dots, nr$. Z_L é a impedância da linha L .

A equação (4.3) é a aplicação direta da Segunda Lei de Kirchhoff - Lei de Kirchhoff das tensões (LKT).

Critério de convergência

Para determinar o critério de convergência proposto deve-se encontrar os valores máximos de acoplamento de potência reativa e ativa nas barras do sistema de distribuição. No processo de solução do algoritmo foi mostrada a injeção de correntes nodais, por meio da equação (4.1). As tensões nas barras na mesma iteração são calculadas por meio das equações (4.2) e (4.3). Porém, a injeção de potência na barra i na k_{th} iteração, $S_i^{(k)}$, é calculada como:

$$S_i^{(k)} = V_i^{(k)} I_i^{(k)*} - Y_i |V_i^{(k)}|^2 \quad (4.4)$$

Os “*mismatches*” das potências ativa e reativa na barra i é calculado como segue:

$$\begin{aligned} \Delta P_i^{(k)} &= Re[S_i^{(k)} - S_i] \\ \Delta Q_i^{(k)} &= Im[S_i^{(k)} - S_i] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Em [49] pode-se encontrar os valores máximos dos “*mismatches*” das potências ativa e reativa para uma seqüência de iterações de vários sistemas de distribuição. Uma excelente taxa de convergência pode ser observada para todos os sistemas estudados.

Esta característica de convergência pode ser explicada brevemente como segue. O erro ocorrido na estimação inicial das tensões nodais é propagado primeiro para as correntes nodais e logo para as correntes de linha por (4.1) e (4.2), respectivamente. No processo de atualização das tensões nodais pela equação (4.3), o erro nas correntes de linhas é multiplicado pela pequena impedância de linha, Z_L , ($Z_L \ll 1$). Porém, este erro é rapidamente atenuado.

Capítulo 5

Solução do Problema de Alocação Ótima de Bancos de Capacitores

5.1 MPI na Solução do Problema Relaxado de Alocação Ótima de Bancos de Capacitores

No Capítulo 2 apresentou-se a formulação geral do PAOBC na forma de um PNLIM. Para resolver-se este problema é necessário relaxar a integralidade da variável de controle, \hat{u}_k^0 , para uma variável contínua. Assim o PAOBC é definido como *problema relaxado* (PR). Além disso a variável e_k que indica se uma barra k aloca ou não capacitores, será dada pelo AHC como dado ao MPI-BLPD-PC. O vetor de decisão e contém a lista de barras a alocar capacitores e é de dimensão igual a nc . Com estas considerações o problema (2.1) é redefinido como segue:

$$\text{Min } f(x) = k_e \sum_{i=0}^{nt} T_i p_i(xb^i) + r_c \sum_{k=1}^{nc} u_k^0 \quad (5.1)$$

s.a.

$$B^i(xb^i, u^i) = 0$$
$$v^{min} \leq \hat{I}x \leq v^{max}$$

$$u^{min} \leq u_f^i = u_f^0 = \hat{J}x \leq u^{max} \quad (5.1.1)$$

$$u^{min} \leq u_c^0 = \hat{J}_{n1}x \leq u^{max} \quad (5.1.2)$$

$$u^{min} \leq u_c^i = \hat{J}_{n23}x \leq u_c^0 \quad (5.1.3)$$

sendo, u_f^0 e u_c^0 a capacidade nominal dos bancos de capacitores fixos e chaveados, respectivamente. O ponto de operação dos bancos chaveados está representado por:

$$u^{iT} = [u_1^i \dots u_k^i \dots u_{nc}^i]$$

A equação (5.1) representa três tipos de PAOBC; fixos, chaveados e mistos. Porém, o vetor incógnita do problema, x , possui três formas diferentes de se representar como é mostrado a seguir:

- PAOBC com bancos fixos: Da equação (5.1.1) usou-se:

$$x = [xb^{0T} \dots xb^{iT} \dots xb^{ntT} u_f^{0T}]^T$$

- PAOBC com bancos chaveados: Das equações (5.1.2) e (5.1.3) usou-se:

$$x^i = [xb^i u^i]^T \quad \text{em que,} \quad x = [x^{0T} \dots x^{iT} \dots x^{ntT}]^T$$

- PAOBC com bancos mistos: Na representação anterior aumenta-se u_f^0 :

$$x = [x^{0T}, \dots, x^{iT}, \dots, x^{ntT} u_f^0]^T$$

O vetor B representa as equações de fluxo de potência do sistema de distribuição. As matrizes \hat{J} , \hat{J}_{n1} e \hat{J}_{n23} contêm elementos de coordenadas 1s e 0s, de dimensão e estrutura apropriada, tal que seja possível obter as restrições indicadas pelas equações (5.1.1), (5.1.2) e (5.1.3), respectivamente.

Os vetores v^{max} e v^{min} foram definidos na seção (2.2.2) como o quadrado dos limites superior e inferior de tensão. Assim $\hat{I}x = V$ deve estar dentro destes limites durante todo o processo de resolução do MPI.

Os limites de tensão são estabelecidos pela ANEEL e foram considerados na solução do problema. Para a aplicação desta restrição dentro do problema assume-se que a tensão na subestação de distribuição é mantida constante dentro dos limites de +/- 5 % por um regulador de tensão ou transformador com comutador.

Os vetores u^{max} e u^{min} contêm os limites superior e inferior da variável u_c^0 .

Observa-se na equação (5.1.3) que o limite superior de operação dos bancos de capacitores chaveados está dado por suas potências nominais u_c^0 , para os $(nt + 1)$ níveis de carga.

Os limites da potência dos bancos de capacitores são dados na prática pela disposição de espaço e pelos limites do projeto dos barramentos e equipamentos de proteção. A norma IEEE 1036- 1992, [33], recomenda que os bancos de capacitores (*shunt*) sejam formados de três a nove unidades de capacitores (monofásicas) em configurações estrela isolada, estrela aterrada, ou delta.

Para resolver estes problemas utiliza-se o MPI, especificamente, o método de pontos interiores de ordem superior preditor corretor (MPI-PDBL-PC), inicialmente proposto para problemas de PL. Foi o método que apresentou melhores características nas pesquisas de sistema de energia elétrica, entre elas pode-se citar; fluxo de potência ótimo em [52] e [27], estabilidade de tensão em [30], despacho econômico com restrições de segurança em [57], etc. A chave desta idéia é avaliar dinamicamente o parâmetro de centro (*centering parameter*) σ , (3.77), para um balanço adequado da otimalidade e a factibilidade, tal que a convergência do algoritmo seja melhorada [30].

Além disso, no PAOBC a heurística proposta precisa resolver muitos PNL's e, portanto, será necessário utilizar o MPI-PDBL-PC. A vantagem mais importante é reduzir o número de iterações comparado com o MPI-PDBL. Outras vantagens foram mostradas na seção 3.4.

5.1.1 MPI na solução do problema base de alocação ótima de bancos de capacitores

O *problema base* tem por objetivo ajudar a mostrar a forma com que o MPI trabalha para resolver o PR de alocação ótima de bancos de capacitores. O algoritmo do MPI-PDBL-PC aplicou-se num exemplo simples.

Neste trabalho define-se o *problema base* como a formulação relaxada em que (5.1) é modificado para um único nível de carga, este é o nível pico de carga e porém considera um fator carga S_0 maior a 1 e o intervalo de duração igual a T_0 . Assim consegue-se uma adequada representação da função objetivo, pois os custos dos capacitores são considerados.

$$\text{Min } f(x) = k_e T_0 p(xb) + r_c \sum_{k=1}^{nc} u_k \quad (5.2)$$

s.a.

$$\begin{aligned} B^1(xb, u) &= 0 \\ v^{min} &\leq \hat{I}_V x \leq v^{max} \\ u^{min} &\leq u = \hat{J}_Q x \leq u^{max} \end{aligned}$$

sendo, $u^T = [u_1, \dots, u_k, \dots, u_{nc}]$, e $x^T = [xb^T \ u^T]$.

Para facilitar a apresentação do método de pontos interiores na solução do *problema base*, toma-se como exemplo um sistema pequeno de 4 barras sem ramais laterais, denominado *sistema exemplo*. Os dados em por unidade (pu) deste sistema são mostrados na Tabela 5.1. Em que a potência de base é 10000 kVA, a tensão de base é 4.6 kV e S_0 é igual a 1.8pu.

Barra_e	Barra_r	Tipo	Vmag	P_L	Q_L	r_{ser}	x_{ser}	V_{min}	V_{max}
1	2	3	1,10	0,00	0,00	0,0236	0,0233	0,75	1,10
2	3	1	0,00	$1,28S_0$	$1,28S_0$	0,0003	0,0002	0,75	1,10
3	4	1	0,00	$0,32S_0$	$0,16S_0$	0,0051	0,0005	0,75	1,10
4		1	0,00	$1,60S_0$	$0,80S_0$			0,75	1,10

Tabela 5.1: Dados de barras e linhas do *sistema exemplo*

O *problema base* sempre recebe como dado o estado das barras através do vetor *tipo* em que sempre haverá uma barra tipo 3. Na Tabela 5.1 mostra-se este vetor *tipo*, que indica o estado da variável de controle, u , isto é, as barras que alocam bancos de capacitores. A variável *tipo* pode conter valores iguais a 1 ou 0, sendo 1 no caso que a barra aloca capacitores, 0 no caso que a barra não aloca capacitores, e 3 no caso que a barra é de referência (subestação). Finalmente para todas as barras de recepção do sistema, o vetor *tipo* representa o vetor de designação e com elementos e_k , para $k = 1, \dots, nc$ apresentado na equação (2.14).

No exemplo tem-se que as três barras de recepção alocaram capacitores e suas potências (em variáveis contínuas) serão calculadas pelo MPI.

Como se comentou no Capítulo 2, a tensão na subestação pode ou não ser parte das incógnitas do problema, no caso de ser parte das incógnitas o MPI terá um melhor desempenho em otimizar os custos de operação do sistema, pois a subestação simulará ter um

regulador de tensão ou um transformador com comutador de tensão operando no nível de carga estabelecido.

De (2.4) toma-se $i = 0$ (trabalha-se com o nível de carga pico). Para representar as variáveis do problema e por simplicidade na notação o superíndice “0” é ignorado na notação das fórmulas subseqüentes:

$$\begin{aligned} xb^T &= \left[V_2^2 \quad V_3^2 \quad V_4^2 \quad P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \right], \\ u^T &= \left[Qcx_2 \quad Qcx_3 \quad Qcx_4 \right] \end{aligned} \quad (5.3)$$

em que, $nr = nc = 3$ e $nbr = 4$.

Função objetivo

A função objetivo assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= k_e T_0 \left(r_1 \frac{P_1^2 + Q_1^2}{V_1^2} + r_2 \frac{P_2^2 + Q_2^2}{V_2^2} + r_3 \frac{P_3^2 + Q_3^2}{V_3^2} \right) + \\ & r_c (Qcx_2 + Qcx_3 + Qcx_4) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Restrições de igualdade

As restrições de igualdade do problema base (5.2) representam as equações de fluxo de potência que devem ser satisfeitas no ponto de ótimo local.

$$\begin{aligned} b_1(x) &= P_1 - r_1 \frac{P_1^2 + Q_1^2}{V_1^2} - S_0 P_{L2} - P_2 \\ b_2(x) &= P_2 - r_2 \frac{P_2^2 + Q_2^2}{V_2^2} - S_0 P_{L3} - P_3 \\ b_3(x) &= P_3 - r_3 \frac{P_3^2 + Q_3^2}{V_3^2} - S_0 P_{L4} \\ b_4(x) &= Q_1 - x_1 \frac{P_1^2 + Q_1^2}{V_1^2} - S_0 Q_{L2} + Qe_2 + Qcx_2 - Q_2 \\ b_5(x) &= Q_2 - x_2 \frac{P_2^2 + Q_2^2}{V_2^2} - S_0 Q_{L3} + Qe_3 + Qcx_3 - Q_3 \\ b_6(x) &= Q_3 - x_3 \frac{P_3^2 + Q_3^2}{V_3^2} - S_0 Q_{L4} + Qe_4 + Qcx_4 \\ b_7(x) &= V_1^2 - 2(r_1 P_1 + x_1 Q_1) + (r_1^2 + x_1^2) \frac{P_1^2 + Q_1^2}{V_1^2} - V_2^2 \\ b_8(x) &= V_2^2 - 2(r_2 P_2 + x_2 Q_2) + (r_2^2 + x_2^2) \frac{P_2^2 + Q_2^2}{V_2^2} - V_3^2 \\ b_9(x) &= V_3^2 - 2(r_3 P_3 + x_3 Q_3) + (r_3^2 + x_3^2) \frac{P_3^2 + Q_3^2}{V_3^2} - V_4^2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

sendo,

P_j e Q_j	Fluxos de potência ativa e reativa na linha j ;
P_{Li} e Q_{Li}	Cargas ativa e reativa na barra i ;
Qcx_i	Potência reativa do capacitor conectado numa barra candidata i ;
V_i	Magnitude de tensão na barra i ;
Qe_i	Potência reativa do capacitor existente conectado numa barra i ;
S	Fator de carga aplicado. Neste exemplo é igual a 1.8;
k_e	Custo em dólares por kWh de energia. Neste exemplo é 0.06 $\$/kWh$;
r_j e x_j	Resistência e a reatância na linha j .

Para $i = 1, \dots, nbr.$ $j = 1, \dots, nr.$ $k = 1, 2, \dots, nc,$ ($nc < nbr$).

Para uma melhor representação do vetor B , ele pode ser dividido em três parcelas da seguinte forma:

$B_P^T = [b(1) \ b(2) \ b(3)]$, corresponde às equações de balanço de potência ativa.

$B_Q^T = [b(4) \ b(5) \ b(6)]$, corresponde às equações de balanço de potência reativa.

$B_V^T = [b(7) \ b(8) \ b(9)]$, corresponde às equações de balanço de tensões.

Assim o vetor das restrições de igualdade, B , pode ser representado da seguinte forma:

$$B = [B_P^T \ B_Q^T \ B_V^T]^T \quad (5.6)$$

Restrições de desigualdade

As restrições de desigualdade do problema base (5.2) são representadas pelos produtos da matriz $\hat{I}_V \in R^{nr \times nx}$ e $\hat{J}_Q \in R^{nc \times nx}$ pelo vetor x . Para o sistema exemplo estas matrizes são:

$$\hat{I}_V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{J}_Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Logo as restrições de desigualdade são dadas por:

$$v^{min} \leq \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} \leq v^{max} \quad (5.8)$$

$$u^{min} \leq \begin{bmatrix} Qcx_2 \\ Qcx_3 \\ Qcx_4 \end{bmatrix} \leq u^{max} \quad (5.9)$$

Solução do PAOBC base usando o MPI-PDBL-PC

Conhecidas as estruturas das funções objetivo e cada uma das restrições da formulação matemática, apresentamos agora a solução do problema usando o MPI-PDBL-PC.

No problema (5.2) acrescenta-se as variáveis de folga não negativas; s_1 e s_2 para as restrições de tensão e; s_3 e s_4 para as restrições das potências dos capacitores. Assim tem-se o PNL na sua forma padrão:

$$\begin{aligned} \text{Min } f(x) &= k_e T_0 p(xb) + r_c \sum_{k=1}^{nc} u_k \\ \text{s.a. } & \\ & B^1(xb, u) = 0 \\ & -s_2 - s_1 + v^{max} - v^{min} = 0 \\ & -s_2 - \hat{I}_V x + v^{max} = 0 \\ & -s_4 - s_3 + u^{max} - u^{min} = 0 \\ & -s_4 - \hat{J}_Q x + u^{max} = 0 \end{aligned}$$

Os vetores v^{max} , v^{min} , u^{max} e u^{min} já foram definidos no Capítulo 2.

Assim, as variáveis do problema são:

$$u^T = [u_1, \dots, u_k, \dots, u_{nc}], \text{ e } x^T = [xb^T \ u^T].$$

O passo seguinte é penalizar as restrições de não negatividade das variáveis de folga na função objetivo por meio do parâmetro de barreira μ^k :

$$\begin{aligned} \text{Min } Z(x) &= f(x) - \mu^k \sum_{i=1}^{nbr-1} (Ln \ s_{1i} + Ln \ s_{2i}) - \mu^k \sum_{i=1}^{nc} (Ln \ s_{3i} + Ln \ s_{4i}) \\ \text{s.a. } & \\ & B^1(xb, u) = 0 \\ & -s_2 - s_1 + v^{max} - v^{min} = 0 \\ & -s_2 - \hat{I}_V x + v^{max} = 0 \\ & -s_4 - s_3 + u^{max} - u^{min} = 0 \\ & -s_4 - \hat{J}_Q x + u^{max} = 0 \end{aligned}$$

No problema anterior aplica-se o Lagrangeano e obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(s, z, x, y) &= f(x) - \mu^k \sum_{i=1}^{nbr-1} (Ln \ s_{1i} + Ln \ s_{2i}) - \mu^k \sum_{i=1}^{nc} (Ln \ s_{3i} + Ln \ s_{4i}) - \\ & y^T B^1(x) - z_1^T (-s_1 - s_2 - v^{min} + v^{max}) - z_2^T (-\hat{I}_V x - s_2 + v^{max}) - \\ & z_3^T (-s_3 - s_4 - u^{min} + u^{max}) - z_4^T (-\hat{J}_Q x - s_4 + u^{max}) \end{aligned}$$

sendo,

$$w^T = [s_1 \ s_2 \ s_3 \ s_4 \ z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4 \ x \ y] \text{ a incógnita do problema primal dual.}$$

A seguir, são aplicadas as condições necessárias de otimalidade de primeira ordem (CNOPO):

$$\begin{aligned} \nabla_{s_1} \mathcal{L} &= -\mu^k S_1^{-1} e + z_1 \\ \nabla_{s_2} \mathcal{L} &= -\mu^k S_2^{-1} e + z_1 + z_2 \\ \nabla_{s_3} \mathcal{L} &= -\mu^k \cdot S_3^{-1} e + z_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{s_4} \mathcal{L} &= -\mu^k \cdot S_4^{-1} e + z_3 + z_4 \\
\nabla_{z_1} \mathcal{L} &= s_2 + s_1 - v^{max} + v^{min} \\
\nabla_{z_2} \mathcal{L} &= \hat{I}_V x + s_2 - v^{max} \\
\nabla_{z_3} \mathcal{L} &= s_4 + s_3 - u^{max} + u^{min} \\
\nabla_{z_4} \mathcal{L} &= \hat{J}_Q x + s_4 - u^{max} \\
\nabla_x \mathcal{L} &= \nabla f(x) - J_{B(x)}^T y + \hat{I}_V^T z_2 + \hat{J}_Q^T z_4 \\
\nabla_y \mathcal{L} &= -g(x)
\end{aligned}$$

as quais podem ser representadas em forma compacta como $F(w^k) = 0$, são não lineares e podem ser resolvidas usando somente um passo de Newton, segundo foi mostrado na seção (3.4).

$$J_{F(w^k)} \Delta w_{af}^k = -F(w^k)$$

em que,

$$J_{F(w^k)} = \begin{bmatrix}
Z_1 & 0 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & Z_1 + Z_2 & 0 & 0 & S_2 & S_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & Z_3 & 0 & 0 & 0 & S_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & Z_3 + Z_4 & 0 & 0 & S_4 & S_4 & 0 & 0 \\
I & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{I}_V & 0 \\
0 & 0 & I & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{J}_Q & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{I}_V^T & 0 & \hat{J}_Q^T & H & -J_B^T \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -J_B & 0
\end{bmatrix}$$

Os passos seguintes consistem no cálculo das direções de Newton e dos comprimentos de passos, assim como também estimar um valor do parâmetro de barreira para finalmente atualizar a variável w , segundo foi explicado na seção (3.4.3).

Implementação do algoritmo de MPI para um sistema pequeno

Usa-se o algoritmo (3.4.9) como segue:

- **Passo 1:** Escolhe-se o ponto inicial:

$$w^{0T} = [s_1^0 \ s_2^0 \ s_3^0 \ s_4^0 \ z_1^0 \ z_2^0 \ z_3^0 \ z_4^0 \ x^0 \ y^0] \text{ utilizando a heurística (3.4.7).}$$

O vetor de tensões $V^{0T} = [V_2^{02} \ V_3^{02} \ V_4^{02}]$ pode ser encontrado utilizando o valor médio de seus limites:

$$V^0 = (v^{min} + v^{max})/2$$

Da mesma forma determina-se o vetor u :

$$u^0 = (u^{min} + u^{max})/2$$

Para conhecer os valores das variáveis restantes do vetor x^0 , isto é, $[P_1^0 P_2^0 P_3^0 Q_1^0 Q_2^0 Q_3^0]$ precisa-se processar um fluxo de potência, ou como se optou neste trabalho, assumir que as perdas de potência em todas as linhas do sistema são iguais a zero, para depois somar as potências das cargas começando das últimas camadas em paralelo até chegar na subestação de distribuição.

As variáveis primais de folga, s , e as duais z e y , são calculadas como segue:

$$\begin{aligned} s_2^0 &= v_{max} - \hat{I}_V x^0 \\ s_1^0 &= v_{max} - v_{min} - s_2^0 \\ s_4^0 &= u_{max} - \hat{J}_Q x^0 \\ s_3^0 &= u_{max} - u_{min} - s_4^0 \\ z_1^0 &= \mu S_1^{0-1} e \\ z_2^0 &= \mu S_2^{0-1} e - z_1^0 \\ z_3^0 &= \mu S_3^{0-1} e \\ z_4^0 &= \mu S_4^{0-1} e - z_3^0 \\ y_i^0 &= 1 \text{ ou } 0, i = 1, \dots, 3nr \end{aligned}$$

em que, $\gamma = 0,999995$ e $\mu^0 = 1$.

Os valores numéricos do ponto inicial das variáveis primais e duais se mostram a seguir para os seguintes dados:

$$v^{min} = 0,75 \cdot e, v^{max} = 1,10 \cdot e, u^{min} = 0,00 \cdot t \text{ e } u^{max} = 0,12 \cdot t.$$

sendo, e e t vetores unitários de dimensão nr e nc , respectivamente. A variável dual y pode ser inicializada como um vetor de 1s ou 0s de dimensão $3nr$.

$$\begin{aligned} x^0 &= \begin{bmatrix} 0,8863 \\ 0,8863 \\ 0,8863 \\ 5,7600 \\ 3,4560 \\ 2,8800 \\ 3,8520 \\ 1,6080 \\ 1,3800 \\ 0,0600 \\ 0,0600 \\ 0,0600 \end{bmatrix}; s_2^0 = \begin{bmatrix} 0,3238 \\ 0,3238 \\ 0,3238 \end{bmatrix}; s_1^0 = \begin{bmatrix} 0,3238 \\ 0,3238 \\ 0,3238 \end{bmatrix}; s_4^0 = \begin{bmatrix} 0,0600 \\ 0,0600 \\ 0,0600 \end{bmatrix}; s_3^0 = \begin{bmatrix} 0,0600 \\ 0,0600 \\ 0,0600 \end{bmatrix}; \\ z_1^0 &= \begin{bmatrix} 30,8880 \\ 30,8880 \\ 30,8880 \end{bmatrix}; z_2^0 = \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \end{bmatrix}; z_3^0 = \begin{bmatrix} 166,6667 \\ 166,6667 \\ 166,6667 \end{bmatrix}; z_4^0 = \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- **Passo 2:** Calcular os vetores $\nabla f(x^0)$, $B(x^0)$, $\hat{I}_V x^0$ e $\hat{J}_Q x^0$, e as matrizes $J_B(x^0)$. O gradiente das restrições de desigualdade são triviais e iguais a \hat{I}_V e \hat{J}_Q , veja em (5.7). Ou seja:

$$\nabla f(x^0) = \begin{bmatrix} -0,3330 \\ -3,9734 \\ 0,0000 \\ 13,4813 \\ 0,1404 \\ 1,9888 \\ 9,0156 \\ 0,0653 \\ 0,9530 \\ 3,0000 \\ 3,0000 \\ 3,0000 \end{bmatrix}; B(x^0) = \begin{bmatrix} -0,9365 \\ -0,0049 \\ -0,0587 \\ -0,9246 \\ -0,0033 \\ -0,0058 \\ -0,0840 \\ -0,0027 \\ -0,0305 \end{bmatrix} e$$

$$J_B(x^0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,7753 & -1 & 0 & -0,1503 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0055 & 0 & 0 & 0 & 0,9977 & -1 & 0 & -0,0011 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0662 & 0 & 0 & 0 & 0,9669 & 0 & 0 & -0,0159 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,2218 & 0 & 0 & 0,8517 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0037 & 0 & 0 & 0 & -0,0016 & 0 & 0 & 0,9993 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0065 & 0 & 0 & 0 & -0,0032 & 0 & 0 & 0,9984 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -0,0367 & 0 & 0 & -0,03960 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,0000 & -1 & 0 & 0 & -0,0006 & 0 & 0 & -0,0004 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9997 & -1 & 0 & 0 & -0,0100 & 0 & 0 & -0,0009 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- **Passo 3:** Calcular o vetor da parte direita de (3.64), utilizando a equação (3.74):

$$r(w^0) = \begin{bmatrix} -0,3422 \\ -4,0457 \\ 1,0000 \\ 12,9645 \\ 0,1449 \\ 2,0352 \\ 8,3538 \\ 0,0675 \\ 0,9713 \\ 2,0000 \\ 2,0000 \\ 2,0000 \end{bmatrix}$$

- **Passo 4:** Fazer $k = 0$
- **Passo 5:** Aplicar os critérios de convergência (3.97) a (3.100):

$$\begin{aligned} \text{factibilidade do primal (facp)} &= 1,3204 \\ \text{factibilidade do dual (facd)} &= 1,7076 \\ \text{condição de otimalidade (condo)} &= 12,4138 \end{aligned}$$

A tolerância para obter a solução é, $tol = 0,0001$. Como os critérios de convergência no passo 5 são maiores a tol , então continuar no passo 6. Caso contrário parar porque a solução foi encontrada.

- **Passo 6:** Calcular a matriz H usando (3.63):

$$H(x^0) = \begin{bmatrix} 0,7723 & 0 & 0 & 0 & -0,1628 & 0 & 0 & -0,0757 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9,1300 & 0 & 0 & 0 & -2,2849 & 0 & 0 & -1,0949 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,4162 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,1628 & 0 & 0 & 0 & 0,0417 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2,2849 & 0 & 0 & 0 & 0,7031 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,4162 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0757 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0417 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,0946 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7031 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Passo 7:** Montar e resolver, no ponto atual, o sistema de equações dado por (3.64), calcular as direções de busca utilizando (3.65) a (3.74):

$$Jr(w^0) =$$

$$\begin{bmatrix} 191,586 & 0 & 0 & 0 & -0,163 & 0 & 0 & -0,076 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 199,944 & 0 & 0 & 0 & -2,285 & 0 & 0 & -1,095 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 190,814 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,416 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,163 & 0 & 0 & 0 & 0,042 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2,285 & 0 & 0 & 0 & 0,703 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,416 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,076 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,042 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,095 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,703 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5,55e^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5,55e^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5,55e^3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta s_2^{af} = \begin{bmatrix} 0,2023 \\ 0,2051 \\ 0,2362 \end{bmatrix}; \Delta s_1^{af} = \begin{bmatrix} -0,2023 \\ -0,2051 \\ -0,2362 \end{bmatrix}; \Delta z_1^{af} = \begin{bmatrix} -11,5879 \\ -11,3242 \\ -8,3536 \end{bmatrix}; \Delta z_2^{af} = \begin{bmatrix} -38,6003 \\ -39,1276 \\ -45,0688 \end{bmatrix};$$

$$\Delta s_4^{af} = \begin{bmatrix} 0,0075 \\ 0,0076 \\ 0,0076 \end{bmatrix}; \Delta s_3^{af} = \begin{bmatrix} -0,0075 \\ -0,0076 \\ -0,0076 \end{bmatrix}; \Delta z_3^{af} = \begin{bmatrix} -145,7262 \\ -145,6255 \\ -145,4995 \end{bmatrix}; \Delta z_4^{af} = \begin{bmatrix} -41,8808 \\ -42,0824 \\ -42,3344 \end{bmatrix};$$

$$\Delta x^{af} = \begin{bmatrix} -0,2023 \\ -0,2051 \\ -0,2362 \\ 1,6033 \\ 0,0810 \\ 0,0748 \\ 1,5008 \\ 0,0023 \\ 0,0026 \\ 0,0044 \\ 0,0044 \\ 0,0048 \end{bmatrix}; \Delta y^{af} = \begin{bmatrix} 35,5169 \\ 35,8787 \\ 40,3058 \\ 26,4489 \\ 26,6270 \\ 28,5497 \\ 131,5370 \\ 92,1275 \\ 44,0688 \end{bmatrix}.$$

- **Passo 8:** Calcular o comprimento do passo α^{af} , ρ^{af} e μ^{af} usando (3.75), (3.78) e (3.77), respectivamente: $\alpha^{af} = 0,5782$, $\rho^{af} = 41,6562$, e $\mu^{af} = 0,4183$.
- **Passo 9:** Montar e resolver, no ponto atual, o sistema de equações dado por (3.80), calcular as outras direções de busca utilizando (3.81) a (3.90):

$$r^{af}(w^0) = \begin{bmatrix} 12,5604 \\ 9,0332 \\ 16,0649 \\ 12,9645 \\ 0,1449 \\ 2,0352 \\ 8,3538 \\ 0,0675 \\ 0,9713 \\ -6,1724 \\ -6,2319 \\ -6,8746 \end{bmatrix}$$

Deve-se lembrar que a parte direita da equação (3.80) é a mesma para os passos preditor e corretor, porém é necessário apenas calcular o lado esquerdo desta equação. O seja, numa iteração, $Jr(w^0)$ do preditor é constante para o corretor. Assim, as novas direções de busca são dadas por:

$$\begin{aligned} \Delta s_2^0 &= \begin{bmatrix} 0,2021 \\ 0,2049 \\ 0,2360 \end{bmatrix}; \Delta s_1^0 = \begin{bmatrix} -0,2021 \\ -0,2049 \\ -0,2360 \end{bmatrix}; \Delta s_4^0 = \begin{bmatrix} -0,0054 \\ -0,0055 \\ -0,0059 \end{bmatrix}; \Delta s_3^0 = \begin{bmatrix} 0,0054 \\ 0,0055 \\ 0,0059 \end{bmatrix}; \\ \Delta z_1^0 &= \begin{bmatrix} -12,7342 \\ -12,4478 \\ -9,1170 \end{bmatrix}; \Delta z_2^0 = \begin{bmatrix} -25,6614 \\ -26,0123 \\ -29,9674 \end{bmatrix}; \Delta z_3^0 = \begin{bmatrix} -170,4179 \\ -170,4945 \\ -171,3738 \end{bmatrix}; \Delta z_4^0 = \begin{bmatrix} 22,0455 \\ 22,2075 \\ 24,0648 \end{bmatrix}; \\ \Delta x^0 &= \begin{bmatrix} -0,2021 \\ -0,2049 \\ -0,2360 \\ 1,6024 \\ 0,0810 \\ 0,0748 \\ 1,4967 \\ 0,0001 \\ 0,0014 \\ 0,0054 \\ 0,0055 \\ 0,0059 \end{bmatrix} \text{ e } \Delta y^0 = \begin{bmatrix} 32,8660 \\ 33,2007 \\ 37,3705 \\ 24,0455 \\ 24,2075 \\ 26,0648 \\ 90,1489 \\ 63,7023 \\ 28,9674 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- **Passo 10:** Calcular o comprimento máximo do passo usando (3.75), mudando a expressão af por k :

$$\alpha^k = 0,7903$$

- **Passo 11:** Atualizar as variáveis primal e dual por médio de (3.91) a (3.94):

$$\begin{aligned} s_1^1 &= \begin{bmatrix} 0,1640 \\ 0,1619 \\ 0,1372 \end{bmatrix}; s_2^1 = \begin{bmatrix} 0,4835 \\ 0,4856 \\ 0,5103 \end{bmatrix}; s_3^1 = \begin{bmatrix} 0,0643 \\ 0,0643 \\ 0,0647 \end{bmatrix}; s_4^1 = \begin{bmatrix} 0,0557 \\ 0,0557 \\ 0,0553 \end{bmatrix}; \\ z_1^1 &= \begin{bmatrix} 20,8248 \\ 21,0511 \\ 23,6833 \end{bmatrix}; z_2^1 = \begin{bmatrix} -20,2790 \\ -20,5563 \\ -23,6818 \end{bmatrix}; z_3^1 = \begin{bmatrix} 31,9936 \\ 31,9330 \\ 31,2381 \end{bmatrix}; z_4^1 = \begin{bmatrix} 17,4215 \\ 17,5495 \\ 19,0172 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$x^1 = \begin{bmatrix} 0,7265 \\ 0,7244 \\ 0,6997 \\ 7,0263 \\ 3,5200 \\ 2,9391 \\ 5,0348 \\ 1,6081 \\ 1,3811 \\ 0,0643 \\ 0,0643 \\ 0,0647 \end{bmatrix} \text{ e } y^1 = \begin{bmatrix} 26,9724 \\ 27,2370 \\ 30,5321 \\ 20,0020 \\ 20,1300 \\ 21,5978 \\ 72,2404 \\ 51,3409 \\ 23,8915 \end{bmatrix}.$$

- **Passo 12:** Calcular os vetores $\nabla f(x^1)$, $B(x^1)$, $\hat{I}_V x^1$ e $\hat{J}_Q x^1$, e a matriz $J_B(x^1)$ usando as regras desenvolvidas no apêndice A.
- **Passo 13:** Calcular o vetor da parte direita de (3.64), $r(w^1)$, utilizando a equação (3.74):
- **Passo 14:** Fazer $k = k + 1$, ir ao passo 5.

Na Tabela (5.2) mostra-se a seqüência de iterações até alcançar o ponto ótimo local. A segunda coluna desta Tabela mostra os comprimentos de passo corretor calculados por

iter	passo	facp	facd	condo
0	0,0000	1,3204e+000	1,7076e+000	1,2414e+001
1	0,7903	3,5902e-001	5,9952e-001	2,2542e+000
2	0,8390	6,5040e-002	1,2486e-001	4,2971e-001
3	1,0000	1,3952e-004	4,4331e-004	1,2417e-002
4	0,9999	6,8168e-008	3,3129e-007	1,0726e-006

Tabela 5.2: Processo iterativo para o sistema exemplo

(3.75), entretanto os comprimentos de passos efetivos são encontrados ainda multiplicando-os pelo parâmetro γ igual a 0,999995.

O custo das perdas deste sistema sem bancos de capacitores é de 1 138 600,00 dólares. Com a alocação de capacitores foi obtido uma economia de 91 300,00 dólares. Observa-se que o MPI calculou bancos com potências iguais as máximas permitidas por barra e que as tensões em barra estão acima do limite inferior. Entretanto, para elevar estas tensões é necessário aumentar os limites superiores dos bancos de capacitores contidos em u^{max} .

Barra_e	Barra_r	linha	u	V	P	Q
1	2	1	0,0000	1,1000	7,4874	5,3056
2	3	2	0,1200	0,8282	3,5410	1,5000
3	4	3	0,1200	0,8265	2,9585	1,3277
4			0,1200	0,8075		

Tabela 5.3: Solução do sistema exemplo

5.1.2 MPI na solução do problema relaxado de alocação ótima de bancos de capacitores fixos

A seguir é desenvolvido a solução do PAOBC relaxado considerando a instalação de capacitores fixos. A diferença com o “problema base” anterior, o PR para o PAOBC com bancos fixos considera vários níveis de operação, em que os custos das perdas de energia e o custo da instalação de capacitores são minimizadas, isto sujeito a um conjunto de restrições do sistema.

A partir da representação matemática (5.10) pode-se enumerar as particularidades desse tipo de problema:

1. Na formulação do problema. Em (5.1) descartamos (5.1.2) e (5.1.3).

$$\begin{aligned} \text{Min } f(x) &= k_e \sum_{i=0}^{nt} T_i P_i(x^i) + r_{cf} \sum_{k=1}^{nc} u_k^0 & (5.10) \\ \text{s.a.} & \\ & B^i(xb^i, u^0) = 0 \\ & v^{min} \leq \hat{I}x \leq v^{max} \\ & u^{min} \leq u^i = u^0 = \hat{J}x \leq u^{max} \end{aligned}$$

em que $u^{0T} = [u_1^0, \dots, u_k^0, \dots, u_{nc}^0]$ contém os bancos fixos como sendo variáveis contínuas.

2. De (2.4), o vetor xb^i é:

$$xb^i = [V^{iT} \ P^{iT} \ Q^{iT}]^T.$$

Para o *sistema exemplo* de 4 barras este vetor é formado pelos seguintes vetores:

$$V^i = [V_2^{i2} \ V_3^{i2} \ V_4^{i2}]^T, \ P^i = [P_1^i \ P_2^i \ P_3^i]^T \ \text{e} \ Q^i = [Q_1^i \ Q_2^i \ Q_3^i]^T, \ \text{para } i = 0, 1, 2.$$

Na implementação do MPI os vetores xb^i são arranjados em um único vetor xb , da seguinte forma:

$$xb^T = [V^{0T} \ P^{0T} \ Q^{0T}, \dots, V^{iT} \ P^{iT} \ Q^{iT}, \dots, V^{ntT} \ P^{ntT} \ Q^{ntT}]$$

e a variável de controle u como sendo:

$$u^T = [Qcx_2 \ Qcx_3 \ Qcx_4]$$

Assim, a nova variável do problema x será:

$$x^T = [V^{0T} \ P^{0T} \ Q^{0T}, \dots, V^{ntT} \ P^{ntT} \ Q^{ntT} \ Qcx_2 \ Qcx_3 \ Qcx_4] \quad (5.11)$$

O número de elementos do vetor xb é $nxb = 3 \times nr \times (nt + 1)$ e como $x \in R^{nx}$, então $nx = nxb + nc$. Logo, o número de variáveis do PAOBC com bancos fixos é dado por $nx = 3 \times nr \times (nt + 1) + nc$.

As duas variáveis xb e x foram utilizadas nas restrições do problema (5.10).

3. Comparada com a função objetivo do problema base dada em (5.4) agora as perdas do sistema devem ser consideradas, em geral, para os $(nt+1)$ níveis de carga, tal como foi mostrada em (5.1), entretanto a parcela relacionado aos custos dos capacitores não deve sofrer nenhuma modificação.

A variável $p_j^i = r_1 \frac{P_j^{i2} + Q_j^{i2}}{V_j^{i2}}$ representa a perda entre a barra j e $j+1$ para um nível de carga i qualquer. Entretanto a função objetivo assume a forma da equação (2.1) com a diferença que são considerados bancos de capacitores fixos, $k \in C_2$:

$$f(x) = k_e \sum_{i=0}^{nt} \sum_{j=1}^{nr} T_i p_j^i(x^i) + \sum_{k=1}^{nc} u_k^0 \quad (5.12)$$

4. A formulação do fluxo de potência para os $(nt+1)$ níveis de carga representa o conjunto de restrições de igualdade em que u é o vetor de acoplamento entre estes níveis de carga. Para o *sistema exemplo* a equação (2.6) assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} b_1^i(x) &= P_1^i - r_1 \frac{P_1^{i2} + Q_1^{i2}}{V_1^{i2}} - S^i P_{L2} - P_2^i \\ b_2^i(x) &= P_2^i - r_2 \frac{P_2^{i2} + Q_2^{i2}}{V_2^{i2}} - S^i P_{L3} - P_3^i \\ b_3^i(x) &= P_3^i - r_3 \frac{P_3^{i2} + Q_3^{i2}}{V_3^{i2}} - S^i P_{L4} \\ b_4^i(x) &= Q_1^i - x_1 \frac{P_1^{i2} + Q_1^{i2}}{V_1^{i2}} - S^i Q_{L2} + Qe_2 + Qcx_2 - Q_2^i \\ b_5^i(x) &= Q_2^i - x_2 \frac{P_2^{i2} + Q_2^{i2}}{V_2^{i2}} - S^i Q_{L3} + Qe_3 + Qcx_3 - Q_3^i \\ b_6^i(x) &= Q_3^i - x_3 \frac{P_3^{i2} + Q_3^{i2}}{V_3^{i2}} - S^i Q_{L4} + Qe_4 + Qcx_4 \\ b_7^i(x) &= V_1^{i2} - 2(r_1 P_1^i + x_1 Q_1^i) + (r_1^2 + x_1^2) \frac{P_1^{i2} + Q_1^{i2}}{V_1^{i2}} - V_2^{i2} \\ b_8^i(x) &= V_2^{i2} - 2(r_2 P_2^i + x_2 Q_2^i) + (r_2^2 + x_2^2) \frac{P_2^{i2} + Q_2^{i2}}{V_2^{i2}} - V_3^{i2} \\ b_9^i(x) &= V_3^{i2} - 2(r_3 P_3^i + x_3 Q_3^i) + (r_3^2 + x_3^2) \frac{P_3^{i2} + Q_3^{i2}}{V_3^{i2}} - V_4^{i2} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Para uma melhor representação do vetor B , ele pode ser dividido em três parcelas da seguinte forma:

$B_P^{iT} = [b_1^i \quad b_2^i \quad b_3^i]$, corresponde às equações de balanço de potência ativa.

$B_Q^{iT} = [b_4^i \quad b_5^i \quad b_6^i]$, corresponde às equações de balanço de potência reativa.

$B_V^{iT} = [b_7^i \quad b_8^i \quad b_9^i]$, corresponde às equações de balanço de tensões.

Porém, o vetor das restrições de igualdade, B^i , é dado como segue:

$$B^i = [B_P^{iT} \quad B_Q^{iT} \quad B_V^{iT}]^T \quad (5.14)$$

para $i = 0, 1, \dots, nt$ níveis de carga.

Observa-se que o vetor $u^T = [Qcx_2 \quad Qcx_3 \quad Qcx_4]$ produz acoplamento entre todos os níveis de carga, injetando potência reativa constante para todos os níveis de carga (assumimos que esta potência não varia com a tensão). Isto faz com que o problema

de alocação ótima de bancos de capacitores fixos tenha características interessantes, pois deve-se considerar que se alocamos um capacitor numa barra para compensar a falta de reativos para o nível de carga pico, quando passamos para um nível de carga menor, o limite das tensões superiores podem ser violadas pelo excesso de injeção de reativos capacitivos. Da mesma forma, se alocamos um capacitor numa barra para compensar a falta de reativos para o nível de carga baixo, quando passamos para um nível de carga maior, o limite das tensões inferiores podem ser violadas pela falta de injeção de reativos capacitivos. Estas condições podem fazer com que o algoritmo de pontos interiores apresente problemas de convergência ou mostre uma convergência lenta.

5. Esta nova configuração da variável básica faz necessário um novo arranjo na matriz \hat{I} . Para ilustrar melhor a implementação desta matriz, utiliza-se o *sistema exemplo*, em que o número de níveis de carga é igual a 3:

$$\hat{I}_{n1} = \hat{I}_{n2} = \hat{I}_{n3} = \hat{I}_V.$$

A nova matriz \hat{I} é formada então por:

$$\hat{I} = \begin{bmatrix} \hat{I}_{n1} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{I}_{n2} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{I}_{n3} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Neste caso $\hat{I} \in R^{nr(nt+1) \times nx}$, $nr = 3$, $nx = 30$ e $nt = 2$. Assim para o *sistema exemplo*, $\hat{I} \in R^{9 \times 30}$.

Os limites das tensões de operação estão dados em uma faixa que não depende do nível de carga de operação, porém estes limites podem ser obtidos multiplicando (5.15) e (5.11) nessa ordem:

$$\begin{bmatrix} v^{min} \\ v^{min} \\ v^{min} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} V^0 \\ V^1 \\ V^2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} v^{max} \\ v^{max} \\ v^{max} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Do mesmo modo que se fez no *problema base*, assume-se neste caso, que na barra de referência existe uma forma de manter a tensão constante, seja com um transformador com comutador ou com um regulador de tensão.

As restrições de desigualdade referente as potências dos bancos de capacitores se mantem constantes, pois nos $(nt + 1)$ níveis de carga, os bancos fixos devem permanecer conectados, e portanto, pode-se utilizar a restrição (5.9) para resolver o problema de alocação ótima de bancos de capacitores fixos. A matriz \hat{J} pode ser representada por:

$$\hat{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \hat{J}_Q \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

sendo, $\hat{J} \in R^{nc \times nx}$

A estratégia usada para obter o ponto inicial no *problema base* é válido também neste problema.

No apêndice A, são mostradas as estruturas para calcular a primeira e a segunda derivada das funções $f(x)$, $B(x)$ e $H(x)$.

Como foi mostrado no Capítulo 3, o algoritmo de pontos interiores inicia o processo iterativo logo após ter formado a matriz do lado direito de (3.31) para MPI-PDBL, e (3.62) para MPI-PDBL-PC. Finalmente apresenta-se a matriz Jacobiana do MPI-PDBL-PC (3.62) para o PAOBC com bancos fixos.

$$J_{F(w)} = \begin{array}{c|cccc|cccc|cc} \begin{array}{c} nr \\ s_1 \end{array} & \begin{array}{c} nr \\ s_2 \end{array} & \begin{array}{c} nc \\ s_3 \end{array} & \begin{array}{c} nc \\ s_4 \end{array} & \begin{array}{c} nr \\ z_1 \end{array} & \begin{array}{c} nr \\ z_2 \end{array} & \begin{array}{c} nc \\ z_3 \end{array} & \begin{array}{c} nc \\ z_4 \end{array} & \begin{array}{c} nx \\ x \end{array} & \begin{array}{c} ng \\ y \end{array} \\ \hline Z_1 & & & & S_1 & & & & & \\ \hline & Z_{12} & & & S_2 & S_2 & & & & \\ \hline & & Z_3 & & & & S_3 & & & \\ \hline & & & Z_{34} & & & S_4 & S_4 & & \\ \hline I & I & & & & & & & & \\ \hline & I & & & & & & & \widehat{I} & \\ \hline & & I & I & & & & & & \\ \hline & & & I & & & & & \widehat{J} & \\ \hline & & & & & \widehat{I}^T & & \widehat{J}^T & H & -J_B^T \\ \hline & & & & & & & & -J_B & \end{array}$$

sendo,

$$Z_{12} = Z_1 + Z_2;$$

$$Z_{34} = Z_3 + Z_4;$$

$$w^T = [s_1^T \ s_2^T \ s_3^T \ s_4^T \ z_1^T \ z_2^T \ z_3^T \ z_4^T \ x^T \ y^T];$$

nr o número de linhas do sistema de distribuição;

nc o número de barras candidatas a alocar bancos de capacitores.

Observa-se que s_1 e s_2 são as variáveis primais de folga da restrição (5.16), e s_3 e s_4 são as variáveis primais de folga da restrição (5.9). Entretanto z_1 , z_2 , z_3 e z_4 são as variáveis duais do problema. Esta formulação pode ser acompanhada a partir da seção (3.4.2).

O seguinte passo é resolver o sistema linear anterior para encontrar as aproximações do preditor Δw^{af} e corretor Δw^k tal como foi mostrado em (3.64)-(3.74), para o preditor, e em (3.80)-(3.90) para o corretor.

5.1.3 MPI na solução do problema relaxado de alocação ótima de bancos de capacitores chaveados

O PAOBC relaxado com bancos chaveados é um problema no qual pretende-se otimizar o custo das perdas de energia do sistema e o custo dos capacitores chaveados instalados. Entretanto o modelo formulado neste trabalho, otimiza simultaneamente o custo das perdas de energia para os diferentes níveis de carga e o custo da incorporação dos bancos de capacitores. Deve-se lembrar que, neste caso também precisa-se encontrar o ponto de operação de cada banco chaveado. Porém, as modificações com relação ao PAOBC relaxado

com bancos fixos são dadas por:

1. Na formulação do problema (5.1) descartamos (5.1.1).

$$\text{Min } f(x) = k_e \sum_{i=0}^{nt} T_i p_i (x b^i) + r_{cc} \sum_{k=1}^{nc} u_k^0 \quad (5.18)$$

s.a.

$$\begin{aligned} B^i(x b^i, u^i) &= 0 \\ v^{min} &\leq \hat{I}x \leq v^{max} \\ u^{min} &\leq u^0 = \hat{J}_{n1}x \leq u^{max} \\ u^{min} &\leq u^i = \hat{J}_{n23}x \leq u^0 \end{aligned}$$

sendo,

$u^0 = [u_1^0, \dots, u_k^0, \dots, u_{nc}^0]^T$, a capacidade nominal dos bancos de capacitores e operando no nível de carga pico, $i = 0$.

$u^i = [u_1^i, \dots, u_k^i, \dots, u_{nc}^i]^T$, é o ponto de operação dos bancos de capacitores chaveados, para $i = 1, 2, \dots, nt$.

2. As variáveis de operação do problema x são representadas por:

$$x^T = [V^{0T} P^{0T} Q^{0T} u^{0T}, \dots, V^{iT} P^{iT} Q^{iT} u^{iT}, \dots, V^{ntT} P^{ntT} Q^{ntT} u^{ntT}] \quad (5.19)$$

Isto é, para cada nível de carga i , temos as variáveis $x^i = [x b^i u^i]^T$ totalmente independente de x^j , para $j = 0, 1, \dots, nt$ e $j \neq i$. Assim:

$$x = [x^{0T}, \dots, x^{iT}, \dots, x^{ntT}]^T$$

.

em que $x \in R^{nx}$, então o número de variáveis do PR para bancos chaveados é $nx = (3 \times nr + nc) \times (nt + 1)$.

3. As equações de fluxo de carga (2.6) são aplicadas para todo o sistema levando em conta os $(nt + 1)$ níveis de carga. Por exemplo na equação (5.13), precisaria-se apenas trocar em $b(4)$, $b(5)$ e $b(6)$ as variáveis de controle Qcx_2 , Qcx_3 e Qcx_4 por Qcx_2^i , Qcx_3^i e Qcx_4^i , respectivamente.
4. As restrições das tensões de operação são representadas por (5.16).

As restrições de operação dos bancos de capacitores podem ser representadas utilizando a matriz \hat{J} para considerar a variável de controle u^i em todos os níveis de carga.

O MPI proposto em (5.1.2) para resolver o PR de alocação de bancos fixos tem sua diferença principal com este algoritmo nesta parte. Isto devido ao fato que se precisa estabelecer as potências dos bancos do nível de carga pico como limites superiores para os pontos de operação dos outros níveis de carga.

Então definimos as sub-matrizes \hat{J}_{n1} , para as restrições do nível pico de carga e a sub-matriz \hat{J}_{n23} para os outros níveis de carga da seguinte forma:

$$\hat{J}_{n1} = \begin{bmatrix} \hat{J}_Q & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e} \quad (5.20)$$

$$\hat{J}_{n23} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{J}_Q & 0 \\ 0 & 0 & \hat{J}_Q \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

As matrizes (5.20) e (5.21) descrevem o caso em que o número de níveis de carga são 3. As sub-matrizes zero nesta equação têm a mesma dimensão que \hat{J}_Q .

Para fins de esclarecimentos usa-se (5.20) e (5.21) nas restrições de desigualdade de (5.18) para o *sistema exemplo* e obtém-se as seguintes restrições:

$$u^{min} \leq \begin{bmatrix} Qcx_2^0 \\ Qcx_3^0 \\ Qcx_4^0 \end{bmatrix} = \hat{J}_{n1}x \leq u^{max} \quad (5.22)$$

$$u^{min} \leq \begin{bmatrix} Qcx_2^1 \\ Qcx_3^1 \\ Qcx_4^1 \\ Qcx_2^2 \\ Qcx_3^2 \\ Qcx_4^2 \end{bmatrix} = \hat{J}_{n23}x \leq \begin{bmatrix} Qcx_2^0 \\ Qcx_3^0 \\ Qcx_4^0 \\ Qcx_2^0 \\ Qcx_3^0 \\ Qcx_4^0 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

A estratégia usada para obter o ponto inicial no *problema base* é válido também neste problema.

No apêndice A, são mostradas as estruturas para calcular a primeira e segunda derivada das funções $f(x)$, $B(x)$ e $H(x)$.

Como foi mostrado no Capítulo 3, o algoritmo de pontos interiores inicia o processo iterativo logo após ter formado a matriz do lado direito de (3.31) para MPI-PDBL e (3.62) para MPI-PDBL-PC. Assim, finalmente apresenta-se a matriz Jacobiana do MPI-PDBL-PC (3.62) para o PAOBC com bancos chaveados.

$$J_{F(w)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccccc} nr & nr & nc_1 & nc_1 & nci & nci & nr & nr & nc_1 & nc_1 & nci & nci & nx & ng \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & x & y \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccccccccccccccc} Z_1 & & & & & & S_1 & & & & & & & & \\ & Z_{12} & & & & & S_2 & S_2 & & & & & & & \\ & & Z_3 & & & & & & S_3 & & & & & & \\ & & & Z_{34} & & & & & S_4 & S_4 & & & & & \\ & & & & Z_5 & & & & & & S_5 & & & & \\ & & & & & Z_{56} & & & & & S_6 & S_6 & & & \\ I & I & & & & & & & & & & & & & \\ & I & & & & & & & & & & & & \hat{I} & \\ & & I & I & & & & & & & & & & & \\ & & & I & & & & & & & & & & \hat{J}_{n1} & \\ & & & & I & I & & & & & & & & -\hat{J}_{n1}^d & \\ & & & & & I & & & & & & & & \hat{J}_d & \\ & & & & & & & \hat{I}^T & & \hat{J}_{n1}^T & -\hat{J}_{n1}^{dT} & \hat{J}_d^T & H & -J_B^T & \\ & & & & & & & & & & & & & -J_B & \end{array} \end{array}$$

sendo,

$$Z_{12} = Z_1 + Z_2;$$

$$Z_{34} = Z_3 + Z_4;$$

$$Z_{56} = Z_5 + Z_6;$$

$$\hat{J}_d = \hat{J}_{n23} - \hat{J}_{n1}^d;$$

$$w^T = [s_1^T \ s_2^T \ s_3^T \ s_4^T \ s_5^T \ s_6^T \ z_1^T \ z_2^T \ z_3^T \ z_4^T \ z_5^T \ z_6^T \ x^T \ y^T];$$

nr o número de linhas do sistema de distribuição;

nc_1 o número de barras candidatas;

$$nci = nc_1 \times nt.$$

Observa-se que s_1 e s_2 são as variáveis primais de folga da restrição (5.16), s_3 e s_4 são as variáveis primais de folga da restrição (5.22), s_5 e s_6 são as variáveis primais de folga da restrição (5.23). Entretanto z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 e z_6 são as variáveis duais do problema. Esta formulação pode ser obtida a partir da seção 3.4.2.

O passo seguinte é resolver o sistema linear anterior para encontrar as aproximações do preditor Δw^{af} e corretor Δw^k tal como foi mostrado em (3.64) a (3.74) para o preditor e (3.80) a (3.90) para o corretor.

5.1.4 MPI na solução do problema relaxado de alocação ótima de bancos de capacitores mistos

Este tipo de problema é o caso geral de alocação de bancos de capacitores em sistemas de distribuição. A solução deste tipo de problema apresenta uma dificuldade maior quando comparada com os outros dois casos anteriormente descritos em (5.1.2) e (5.1.3).

A formulação matemática está dada em (5.1) e pode ser obtida também através dos seguintes passos:

1. Na formulação do problema (5.1) desacoplamos a função custo dos capacitores em duas parcelas:

$$\text{Min } f(x) = k_e \sum_{i=0}^{nt} T_i p_i(xb^i) + r_{cc} \sum_{k=1}^{nc} u_{ck}^0 + r_{cf} \sum_{k=1}^{nc} u_{fk}^0 \quad (5.24)$$

s.a.

$$\begin{aligned} B^i(xb^i, u^i) &= 0 \\ v^{min} &\leq \hat{I}x \leq v^{max} \\ u^{min} &\leq u_f^i = u_f^0 = \hat{J}x \leq u^{max} \\ u^{min} &\leq u_c^0 = \hat{J}_{n1}x \leq u^{max} \\ u^{min} &\leq u_c^i = \hat{J}_{n23}x \leq u_c^0 \end{aligned}$$

sendo,

$u_c^0 = [u_{c1}^0, \dots, u_{ck}^0, \dots, u_{cnc}^0]^T$, a capacidade nominal dos bancos de capacitores chaveados e operando no nível de carga pico, $i=0$;

$u_f^0 = [u_{f1}^0, \dots, u_{fk}^0, \dots, u_{fnc}^0]^T$, a capacidade nominal dos bancos de capacitores fixos injetando potência reativa nominal em todos os níveis de carga;

$u_c^i = [u_{c1}^i, \dots, u_{ck}^i, \dots, u_{cnc}^i]^T$, o ponto de operação dos bancos de capacitores chaveados, para $i = 1, 2, \dots, nt$.

2. As variáveis de operação do problema x estão representadas como segue:

$$x^T = [V^{0T} P^{0T} Q^{0T} u_c^{0T}, \dots, V^{iT} P^{iT} Q^{iT} u_c^{iT}, \dots, V^{ntT} P^{ntT} Q^{ntT} u_c^{ntT} u_f^{0T}] \quad (5.25)$$

Isto é para cada nível de carga i temos a variável $x^i = [x^{iT} u_f^{0T}]^T$ totalmente independente a x^j , para $j = 0, 1, \dots, nt$ e $j \neq i$. Assim:

$$x = [x^{0T}, \dots, x^{iT}, \dots, x^{ntT} u_f^{0T}]^T$$

como, $x \in R^{nx}$ e o número de variáveis do PAOBC com bancos mistos é $nx = (3 \times nr + nc) \times (nt + 1) + nc$.

3. As equações de fluxo de carga (2.6) são aplicadas para todo o sistema e levando em conta os $(nt + 1)$ níveis de carga. Por exemplo na equação (5.13), seria necessário apenas trocar em $b(4)$, $b(5)$ e $b(6)$ as variáveis de controle Qcx_2 , Qcx_3 e Qcx_4 por $Qcx_{c2}^i + Qcx_{f2}^0$, $Qcx_{c3}^i + Qcx_{f3}^0$ e $Qcx_{c4}^i + Qcx_{f4}^0$, respectivamente. Nesta última representação claramente observa-se que $Qcx_k = u_k$, para $k = 2, 3, 4$.
4. As restrições das tensões de operação são representadas por (5.16).

As restrições de operação dos bancos de capacitores podem ser representadas utilizando as matrizes \hat{J} do PAOBC com bancos fixos e as matrizes \hat{J}_{n1} e \hat{J}_{n23} do PAOBC com bancos chaveados, como é mostrado na formulação do problema geral.

Para fins de esclarecimento usa-se estas matrizes nas restrições de desigualdade de (5.24) para o *sistema exemplo* e obtém-se as seguintes restrições:

$$u^{min} \leq \begin{bmatrix} Qcx_{c2}^0 \\ Qcx_{c3}^0 \\ Qcx_{c4}^0 \end{bmatrix} = \hat{J}_{n1} x \leq u^{max} \quad (5.26)$$

$$u^{min} \leq \begin{bmatrix} Qcx_{c2}^1 \\ Qcx_{c3}^1 \\ Qcx_{c4}^1 \\ Qcx_{c2}^2 \\ Qcx_{c3}^2 \\ Qcx_{c4}^2 \end{bmatrix} = \hat{J}_{n23} x \leq \begin{bmatrix} Qcx_{c2}^0 \\ Qcx_{c3}^0 \\ Qcx_{c4}^0 \\ Qcx_{c2}^0 \\ Qcx_{c3}^0 \\ Qcx_{c4}^0 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Para os capacitores chaveados.

$$u^{min} \leq \begin{bmatrix} Qcx_{f2}^0 \\ Qcx_{f3}^0 \\ Qcx_{f4}^0 \end{bmatrix} = \hat{J} x \leq u^{max} \quad (5.28)$$

Para os capacitores fixos.

Finalmente, o algoritmo de pontos interiores inicia o processo iterativo logo após ter formado a matriz do lado direito de (3.31) para MPI-PDBL e (3.62) para MPI-PDBL-PC. Assim, a matriz Jacobiana do MPI-PDBL-PC (3.62) para o PAOBC com bancos mistos é dado por:

$$J_{F(w)} =$$

nr s_1	nr s_2	nc_1 s_3	nc_1 s_4	nc_i s_5	nc_i s_6	nc_1 s_7	nc_1 s_8	nr z_1	nr z_2	nc_1 z_3	nc_1 z_4	nc_i z_5	nc_i z_6	nc_1 z_7	nc_1 z_8	nx x	ng y
Z_1								S_1									
	Z_{12}							S_2	S_2								
		Z_3								S_3							
			Z_{34}							S_4	S_4						
				Z_5								S_5					
					Z_{56}							S_6	S_6				
						Z_7								S_7			
							Z_{78}							S_8	S_8		
I	I																
	I																\hat{I}
		I	I														
			I														\hat{J}_{n1}
				I	I												$-\hat{J}_{n1}^d$
					I												\hat{J}_d
						I	I										
							I										\hat{J}
									\hat{I}^T		\hat{J}_{n1}^T	$-\hat{J}_{n1}^{dT}$	\hat{J}_d^T		\hat{J}^T	H	$-J_B^T$
																$-J_B$	

sendo,

$$Z_{12} = Z_1 + Z_2;$$

$$Z_{34} = Z_3 + Z_4;$$

$$Z_{56} = Z_5 + Z_6;$$

$$Z_{78} = Z_7 + Z_8;$$

$$\hat{J}_d = \hat{J}_{n23} - \hat{J}_{n1}^d;$$

$$w^T = [s_1^T \ s_2^T \ s_3^T \ s_4^T \ s_5^T \ s_6^T \ s_7^T \ s_8^T \ z_1^T \ z_2^T \ z_3^T \ z_4^T \ z_5^T \ z_6^T \ z_7^T \ z_8^T \ x^T \ y^T];$$

nr representa o número de linhas do sistema de distribuição;

nc_1 é o número de barras candidatas;

$$nc_i = nc_1 \times nt.$$

Observa-se que s_1 e s_2 são as variáveis primais de folga da restrição (5.16), s_3 e s_4 são as variáveis primais de folga da restrição (5.26), s_5 e s_6 são as variáveis primais de folga da restrição (5.27) e s_7 e s_8 são as variáveis primais de folga da restrição (5.28). Entretanto $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7$ e z_8 são as variáveis duais do problema. Esta formulação pode ser revisada a partir da seção 3.4.2.

O passo seguinte é resolver o sistema linear anterior para encontrar as aproximações do preditor Δw^{af} e corretor Δw^k tal como foi mostrado em (3.64) a (3.74), para o preditor,

e (3.80) a (3.90) para o corretor.

5.2 Algoritmo Heurístico Construtivo para resolver o PAOBC

Nesta seção mostra-se em detalhes o AHC desenvolvido para resolver o *problema de alocação ótima de bancos de capacitores*. O algoritmo proposto resolve o problema nas variáveis de localização ou desigação, e , e no vetor, \hat{u} , que contém as potências discretas padrões dos bancos para todos os níveis de carga (assume-se que a variável *tipo* de banco é conhecida).

A proposta está baseada na máxima redução de custos em (5.1) porém, a barra com a maior injeção de reativos é a que mais contribui com este objetivo, esta barra será a primeira na qual deva-se alocar bancos de capacitores.

Esta proposta foi implementada com sucesso também em [45] para o problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão. Em [41] é utilizado também este critério com a diferença que o cálculo do índice de sensibilidade é encontrado analisando o sistema, barra por barra, e não simultaneamente como é feito neste trabalho.

O algoritmo proposto pode ser explicado como segue:

O algoritmo heurístico para o PAOBC inicia considerando no *problema relaxado* a localização das barras candidatas no vetor de desigação e , que no início considera todas as barras (a exceção das barras de geração e de referência). O MPI resolve o *problema relaxado* e devolve os valores contínuos das potências dos bancos das barras candidatas dadas pelo vetor e . O AHC avalia se existem barras com uma contribuição exageradamente baixa de reativos, se existem serão descartadas como barras candidatas para logo atualizar a variável e do PAOBC. Estas barras descartadas terão potências reativas injetadas pelos capacitores muito próximos a zero, em nossa implementação este valor foi 5×10^{-4} .

Outra vez o MPI resolve o *problema relaxado* enviando a resposta u (vetor com a lista de potências dos bancos em variáveis contínuas) ao AHC, que neste caso, avalia se as potências dos bancos calculados estão acima da potência mínima para se integralizar, q_{min} . Se o menor banco contido no vetor u está abaixo deste limite então esta barra é descartada para que nas iterações seguintes possa servir como barra candidata. É atualizado a variável de desigação e do PAOBC. O parâmetro q_{min} indica a demanda mínima de reativos por barra do sistema (da solução do MPI) requerida para começar alocar bancos no sistema usando o IS, neste trabalho foi fixado inicialmente a um valor de 0,015 pu.

Os dois passos anteriores são repetidos até conseguir que todas as barras candidatas consigam bancos com potências maiores a q_{min} , logo o AHC emprega o índice de sensibilidade para alocar o primeiro capacitor na barra escolhida, se a potência deste novo banco é igual ao limite superior especificado, $Q_{c_{max}}$, então esta barra é descartada para receber capacitores adicionais, caso contrário, pode continuar sendo candidata a receber mais capacitores. É atualizada a variável discreta \hat{u} com um novo banco e a variável de desigação e do PAOBC.

Depois de alocar um capacitor numa barra do sistema, os dois primeiros passos anteriores são executados para eliminar pequenos resíduos de reativos que não se conseguem alocar nas barras que já contêm capacitores. Esta idéia está baseada no fato que o MPI impede que ao eliminar estes pequenos reativos, os limites inferiores de tensão sejam violados. Com isto consegue-se direcionar estes resíduos de reativos às barras vizinhas que precisam deles, sempre matendo as tensões do sistema dentro dos limites estabelecidos.

Uma vez alocado um capacitor é executado um fluxo de carga para encontrar o novo custo do sistema, e com isto, avalia-se se o novo banco é aceito ou não no sistema. É claro que se o novo banco não reduz o custo do sistema e a tensão em alguma barra do sistema está dentro dos limites estabelecidos, então aquele banco não será aceito, isto é, será descartado como candidato para o resto do processo.

Assim o AHC proposto termina quando todas as barras foram analisadas e já não existem mais barras como candidatas a alocar bancos.

Uma desvantagem desta proposta pode ser que em algum momento o MPI não consiga chegar à convergência por falta de reativos para manter a tensão acima do limite inferior numa barra particular. Este fato pode acontecer se o sistema opera com as restrições de tensão ativas, $V_{min} \approx 0.95$. Entretanto nos testes realizados não se encontrou este tipo de divergência.

Um outro fato que pode acontecer é que quando o sistema opera com as restrições de tensão ativas e é atingido um q_{min} relativamente alto, e dentro do AHC, se descartam tantas barras candidatas a alocar bancos esperando chegar ao valor de q_{min} nas barras restantes. Então, em alguma iteração do MPI, o reativo faltante no sistema pode estar em excesso como para se repartir entre as poucas barras restantes como candidatas trazendo como conseqüência a divergência do MPI, este fato aconteceu em nossos testes preliminares onde se considerou que a tensão na subestação estava fixa em 1.0 pu. Observou-se a maior quantidade de bancos a alocar pela alta sobrecarga no nível pico de carga.

Portanto conclui-se que se o sistema opera com limites de tensão ativas, a potência mínima para integralizar as variáveis de controle não deve ser muito elevada comparadas com os casos onde o sistema opera com limites de tensão abertos e/ou a subestação presente um regulador de tensão para contornar o problema da queda excessiva de tensão em algumas áreas do sistema.

A seguir mostra-se o AHC para o PAOBC.

5.2.1 Algoritmo heurístico construtivo para resolver o PAOBC

- **Passo 1:** Leitura de dados do sistema de distribuição e iniciar o contador de iterações, i , em zero.
- **Passo 2:** Inicializar as variáveis do problema; vetor de desição e^0 , vetor que contém as potências discretas dos bancos de capacitores \hat{u}^0 , potência mínima para integralizar as variáveis contínuas q_{min} e número de barras candidatas, nc , da seguinte forma:

- e^0 : todas as barras, (barras *tipo* 1).
- \hat{u}^0 : iguais a zero para todas as barras candidatas segundo a posição dada por e^0 .
- q_{min} : igual a 0,015 da Tabela 5.4.
- nc : igual a nr , é a dimensão do vetor e^0 .

- **Passo 3:** Processar um fluxo de carga para \hat{u}^0 . Calcular a tensão, v_{mag} , e o custo, f_{ini} , do sistema para esta configuração. Este custo $f=f_{ini}$ será o custo inicial do sistema sem bancos.
- **Passo 4:** Se nc^i é maior que zero, então ir ao passo 5. Caso contrário ir ao passo 14.
- **Passo 5:** Para a configuração corrente \hat{u}^i e e^i resolver o problema relaxado com o MPI desenvolvido nas seções 5.1.2 ou 5.1.3, obter u .
- **Passo 6:** Em u identificar as barras que não contribuem na melhoria da função objetivo (barras com bancos menores a 5×10^{-4} em u), descartar estas barras como candidatas e obter os novos candidatos e_{novo} , ir ao passo 13. Se todas as barras contêm bancos que estão acima desta potência ir ao passo 7.
- **Passo 7:** Em u identificar a barra k que não atinge q_{min} , descartar esta barra como candidata e obter os novos candidatos e_{novo} , ir ao passo 13. Se todas as barras em u estão acima desta potência ir ao passo 8.
- **Passo 8:** Índice de sensibilidade: Na solução do PR, u , identificar a barra k que injeta mais reativos no sistema, alocar um banco de capacitores, Qcx_k nesta barra segundo a Tabela 5.4. Atualizar o vetor \hat{u}^i . Para a primeira iteração, $i = 0$, salvar as barras descartadas até o momento no vetor e_{des} .
- **Passo 9:** Se o banco de capacitores na barra k atinge o limite máximo do problema, Qc_{max} , então descartar esta barra para receber mais bancos. Obter os novos candidatos no vetor e_{novo} .
- **Passo 10:** Processar um fluxo de carga para \hat{u}^i . Calcular o custo f^i e o vetor de tensões v_{mag} para esta configuração. Atualizar $rf = f^{i-1} - f^i$ do sistema.
- **Passo 11:** Se rf é menor que zero e as tensões nas barras estão dentro dos limites estabelecidos, então remover o banco alocado no passo 8, fazer $f^i = f^{i-1}$. Atualizar os vetores \hat{u}^i e e_{novo} .
- **Passo 12:** Acrescentar o contador de iterações do AHC, $i = i + 1$.
- **Passo 13:** Completar a atualização da configuração corrente com $e^i = e_{novo}$ e nc^i igual a dimensão do vetor e^i . Ir ao passo 4.
- **Passo 14:** A solução ótima local $f^* = f^i$ foi encontrada. $\hat{u}^* = \hat{u}^i$.

Observação: Este algoritmo é usado para o PAOBC com bancos fixos e chaveados.

A solução encontrada com este algoritmo é dependente a q_{min} requerido para iniciar a integralizar as variáveis contínuas, assim em sistemas em que os limites de tensão são

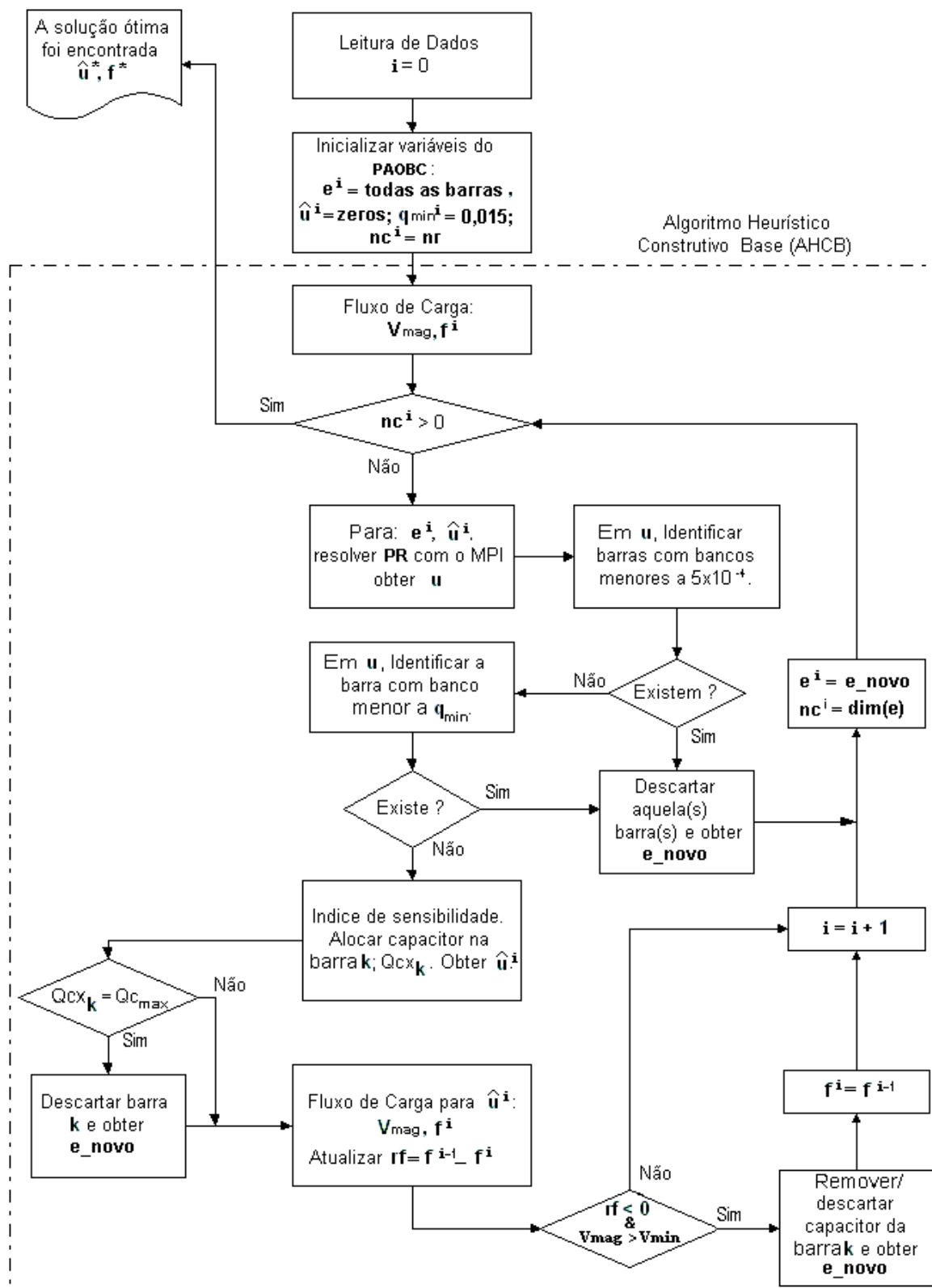


Figura 5.1: Algoritmo heurístico construtivo base para o PAOBC

abertos, $V_{min} \approx 0.75$, é necessário um q_{min} maior comparado com um sistema que tem as restrições de tensões ativas, $V_{min} \approx 0.95$. Isto pode-se explicar porque no PAOBC com as restrições de tensão abertas, as melhores soluções se encontram em configurações, \hat{u} , onde os reativos necessários para otimizar os custos do sistema são repartidos em poucas barras. Por isto deve-se acrescentar o valor do parâmetro q_{min} , afim de repartir os reativos em barras sensíveis determinadas pelo MPI até conseguir a melhor solução.

No caso que o sistema opere com suas restrições de tensões ativas e a tensão na subestação seja fixa, a quantidade de reativos necessários para manter a tensão do sistema dentro destes limites é maior que no caso anterior, portanto o número de barras alocadas com capacitores também será maior, sobretudo no nível pico de carga. Esta simples dedução permite estabelecer que precisaremos de um q_{min} menor que no caso anterior. Já foi mencionado, neste caso, que elevar o valor de q_{min} pode trazer problemas de divergência ao MPI por falta de barras candidatas para repartir os reativos do sistema, ou também, pela saída de uma barra sensível e necessária para manter algumas barras do sistema com as tensões dentro de seus limites ativos.

A forma de contornar este último problema é mediante uma subrotina simples que detecta quando o sistema opera nessas condições e, portanto, permite alocar capacitores padrões inferiores a q_{min} . Mediante esta manipulação se conseguiu manter as tensões em barras críticas muito perto do limite inferior. Da Tabela 5.4 se observa que esta subrotina somente será usada se q_{min} é maior a 0,015, pois no caso que estes sejam iguais, o algoritmo não precisa deste processo para chegar a convergência. Esta última subrotina foi implementada dentro do AHC anterior como um passo necessário para permitir contornar o problema explicado acima. Entretanto, nos testes preliminares (com limites de tensão ativos e tensão da subestação fixa em 1.0pu) observou-se que o custo da instalação de capacitores nos sistemas testados pode chegar a duplicar o custo das perdas do sistema sem a instalação de bancos. Porém, na seção (5.2.3) será tratada em detalhe a alocação ótima de bancos de capacitores com limites de tensão ativos (que cumprem o disposto pela ANEEL 505).

A Tabela 5.4 mostra o critério de como é feito o processo de integralizar as soluções contínuas u fornecidas pelo MPI, para um limite máximo de reativos Q_{cmax} igual a 0,12 p.u. por barra.

Qcxk		Qcxk
candidato entre:		alocado
0,000	0,015	0,000
0,015	0,045	0,030
0,045	0,075	0,060
0,075	0,105	0,090
0,105	0,120	0,120

Tabela 5.4: Critério de discretização dos bancos de capacitores

É possível acrescentar o valor de q_{min} no início deste AHC proposto ou seja executar os respectivos passos do algoritmo e guardar a configuração ótima encontrada como a

incumbente. Este processo de acrescentar q_{min} pode ser repetido até que não se consiga melhorar a incumbente do PAOBC, ou no caso de sistemas com os limites de tensão ativa o MPI não consiga convergência, como mencionou-se acima. Entretanto a melhor incumbente encontrada será a nova solução ótima, \hat{u}_n^* , e seu respectivo q_{min} será chamado a potência ótima para integralizar, q^*_{min} .

Certamente o custo computacional de fazer isto é maior, entretanto nos testes preliminares realizados conclui-se que o MPI sempre descarta uma seqüência de barras candidatas e mantém outras como candidatas “fortes”. Assim pode-se implementar alguns passos dentro do AHC proposto para que as barras que foram descartadas até o passo 8 da primeira iteração do AHCB (e_{des}), não sejam candidatas num próximo processo do AHC, isto é, com um q_{min} aumentado.

No caso de sistemas com limites de tensão abertos pode-se fazer outra melhoria, isto porque as soluções ótimas se caracterizam por terem poucas barras com bancos alocados.

Esta melhoria se inicia depois de obter uma solução ótima local \hat{u}_n^* com um adequado q^*_{min} como foi explicado acima. Esta solução, \hat{u}_n^* , contém uma lista de barras com capacitores alocados, então a melhora consiste em descartar todas estas barras como candidatas menos uma pequena porcentagem das melhores barras alocadas. Isto tem fundamento pois o MPI converge para um ótimo local, ou no melhor dos casos, para um ótimo global, fazendo este procedimento exploramos outros pontos de ótimo local para o AHC.

Logicamente este procedimento começará com um número menor de barras como candidatas e que são aquelas barras que o MPI sempre descarta (barras retiradas como candidatas no passo 6 logo após ter resolvido o primeiro PNL e para a primeira iteração do AHC, \hat{e}_{des}). Estas barras são conhecidas como barras “fracas” a alocar capacitores, além disso o q_{min} será menor em um passo a q^*_{min} . As novas soluções obtidas serão comparadas com \hat{u}_n^* para estabelecer a solução final do problema. Este novo algoritmo heurístico é chamado Algoritmo Heurístico Construtivo Melhorado (AHCM) e o anterior AHC é chamado de Algoritmo Heurístico Construtivo Base (AHCB).

5.2.2 Algoritmo heurístico construtivo melhorado para resolver o PAOBC

- **Passo 1:** Leitura dos dados das linhas e barras do sistema.
- **Passo 2:** Inicializar as variáveis do AHCM: $\hat{q}_{min}^* = 0$, barras descartadas $\hat{e}_{des} = \text{vazio}$, vetor de desição $en = \text{todas as barras}$, contador de iterações $mm = 0$.
- **Passo 3:** Se mm é maior que 2, então as soluções ótimas locais foram encontradas no vetor *sol-externa*, ir ao passo 13. Caso contrário, ir ao passo 4.
- **Passo 4:** Atualizar as variáveis do AHCM para a configuração corrente e inicializar contador de iterações do AHCM; $j = 0$, $e^j = en$, $q_{min} = \hat{q}_{min}^*$, barras descartadas $e_{des} = \hat{e}_{des}$ e $delt > 0$.
- **Passo 5:** Atualizar o contador externo do AHCM, $mm = mm + 1$.

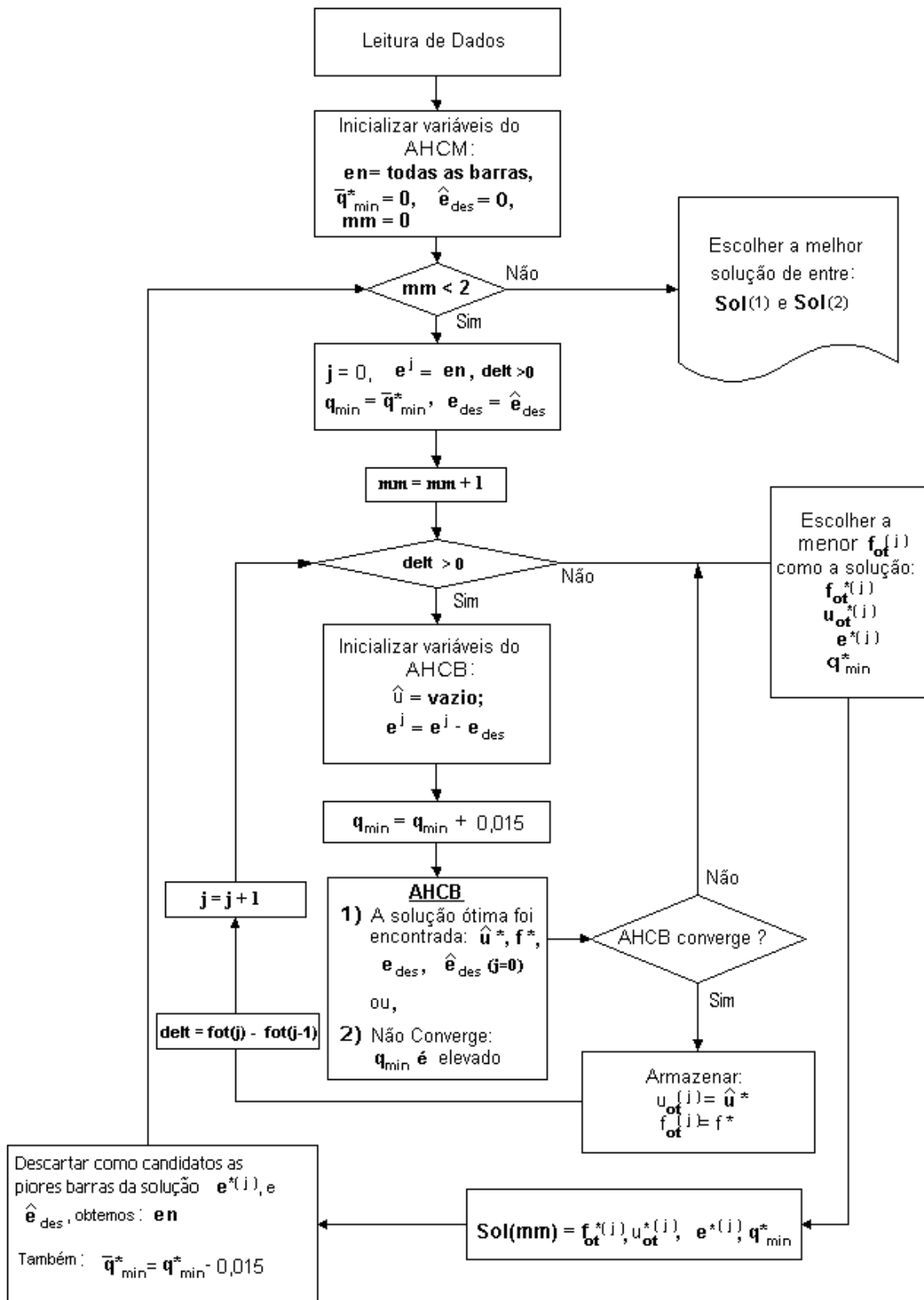


Figura 5.2: Algoritmo heurístico construtivo melhorado para o PAOBC

- **Passo 6:** Se $delt > 0$ ir ao passo 7, senão escolher a melhor solução do vetor *sol-interna* como a incumbente e ir ao passo 12.
- **Passo 7:** Inicializar as variáveis do AHCB; \hat{u}^0 em zeros, nc^0 igual a $e^{j-} e_{des}$ (Passo 2 do AHCB).
- **Passo 8:** Acrescentar $q_{min} = q_{min} + 0,015$.
- **Passo 9:** Executar a AHCB e obter \hat{u}^* , f^* e e_{des} . No caso que o algoritmo de MPI não convergir ir ao passo 12 (*). Para $j = 0$ e para o primeiro PNL resolvido dentro do AHCB salvar as barras descartadas como candidatas no vetor \hat{e}_{des} , isto é, aquelas barras com potências menores que 5×10^{-4} .
- **Passo 10:** Armazenar a solução ótima local do passo anterior no vetor *sol-interna*. Comparar as duas últimas soluções na variável *delt*.
- **Passo 11:** Atualizar o contador interno do AHCM, $j = j + 1$ e voltar ao passo 6.
- **Passo 12:** Armazenar a incumbente da primeira iteração externa do AHCM no vetor *sol-externa*. As piores barras que alocaram bancos nesta incumbente são descartadas como candidatas para a seguinte iteração para obter o novo *en*. Assim também o novo $\hat{q}_{min} = q_{min}^* - 0,015$. Voltar ao passo 3.
- **Passo 13:** Escolher a melhor das duas soluções do vetor *sol-externa* como a solução final do PAOBC.

(*) O algoritmo de pontos interiores somente diverge quando o sistema está operando com seus limites de tensões ativos (tensão na subestação fixa) e ao mesmo tempo é alcançado um valor elevado de q_{min} .

A Figura 5.2 ilustra o AHCM.

Na Tabela 4.1 em [33] se encontram as potências padrões dos capacitores em unidades trifásicas (até 600 V) e monofásicas (de 2.4 kV até 24.94 kV).

As potências padrões para capacitores monofásicos com tensões nominais maiores a 6.64 kV são: 50 (de 6.64 kV até 15.125 kV), 100, 150, 200, 300, e 400 kVAr. Assim, a fim de obter as respostas conseguidas por outros trabalhos como padrões de comparação, nos testes foram utilizadas unidades básicas monofásicas de 100 kVAr para formar bancos trifásicos de 300 kVAr.

5.2.3 Modificação do algoritmo heurístico construtivo base para resolver o PAOBC com bancos mistos

Da mesma forma que a implementação do MPI foi modificada, o AHCB desenvolvido também deve ser modificado para calcular da melhor forma possível as variáveis de localização o desição e , *tipos potência padrão* e os pontos de operação de cada banco. Portanto é um problema mais complexo do que até agora resolvido.

Dentro do processo de solução do PAOBC com bancos mistos o MPI entrega as soluções da forma mostrada na Tabela 5.5. Pode-se observar que temos a barra 25 que apresenta potência nominal próxima de zero para bancos chaveados, mas para bancos fixos esta barra é interessante. A barra 30 apresenta boas potências para ambos tipos de bancos. A barra 32 apresenta potência quase perto de zero para bancos fixos, entretanto é interessante para bancos chaveados.

N ^o Barra	Bancos chaveados			Bancos fixos
	nível 0	nível 1	nível 2	
25	0,000	0,000	0,000	0,021
26	0,000	0,000	0,000	0,002
27	0,000	0,000	0,000	0,003
28	0,001	0,001	0,000	0,002
29	0,004	0,002	0,000	0,006
30	0,076	0,029	0,000	0,031
31	0,010	0,004	0,000	0,003
32	0,012	0,005	0,000	0,005
33	0,006	0,002	0,000	0,002

Tabela 5.5: Resultado típico do MPI para o PAOBC com bancos mistos

Estas características fazem que os passos 6 e 7 do AHCB mudem na forma de eliminar barras candidatas. No passo 8 a forma de empregar o índice de sensibilidade também é reconsiderada. A modificação feita é mostrada como segue:

- **Passo 6:** Em u_c e u_f identificar as barras que não contribuem na melhoria da função objetivo. Estas barras são encontradas somando as potências dos bancos por barra. Por exemplo, na Tabela 5.5 a barra 25 contém 0,021 pu de potência, a barra 30 contém 0,136 pu e a barra 32 contém 0,022pu. Estas potências por barra devem ser menores que 5×10^{-4} . Descartar estas barras como candidatas e obter os novos candidatos e_{novo} , ir ao passo 13. Se todas estas potências por barras estão acima deste limite ir ao passo 7.
- **Passo 7:** Em u_c e u_f identificar e listar a(s) barra(s) k_s que não atinge(m) q_{min} . Somar as potências por barra para cada barra da lista anterior e descartar aquela barra k que contenha a menor potência por barra, obter os novos candidatos e_{novo} e ir ao passo 13. Se nenhuma barra candidata cumpre com este critério de eliminação ir ao passo 8.
- **Passo 8:** Índice de sensibilidade: Na solução do problema relaxado, $u_c + u_f$, identificar a barra k que injeta mais reativos no sistema, alocar um banco de capacitores, $Qcx_{ck} + Qcx_{fk}$ nesta barra segundo a Tabela 5.4. Atualizar os vetores \hat{u}_c^n ($n = 0, \dots, nt$) e \hat{u}_f^0 . Para a primeira iteração, $i = 0$, salvar as barras descartadas até o momento no vetor e_{des} .

Finalmente, uma vez que o AHCB termina de analisar todas as barras do sistema é aplicado ao sistema um processo de otimização final que procura otimizar as perdas do sistema com os bancos de capacitores alocados e considerando as restrições de tensão dada pela ANEEL 505. Este passo é importante dado que na última iteração do AHCB existe

uma sub-compensação ou sobre-compensação que se não for otimizada violará as restrições de tensão impostas pela ANEEL.

A formulação matemática para resolver o fluxo de potência ótimo é a seguinte:

$$\begin{aligned}
 \text{Min } E(x) &= k_e \sum_{i=0}^{nt} T_i p_i(xb^i) & (5.29) \\
 \text{s.a. } & \\
 & G^i(xb^i, u_c^i, u_f^0) = 0 \\
 & v^{\min} \leq \hat{I}x \leq v^{\max}
 \end{aligned}$$

em que, u_c^i e u_f^0 representam os bancos de capacitores chaveados e fixos operando para os $(nt + 1)$ níveis de carga. O vetor incógnita do problema, xb^i representa os quadrados das magnitudes de tensões em barras e os fluxos de potência ativa e reativa do sistema para os $(nt + 1)$ níveis de carga.

Este PNL foi resolvido usando o algoritmo de pontos interiores (MPI-PDBL-PC) desenvolvido para resolver o PAOBC relaxado, isto é, u_c^i e u_f^0 são considerados como dados de entrada para o problema. Assim o último passo do AHCB modificado será como segue:

- **Passo 15:** A solução encontrada no passo 14 do AHCB, \hat{u}^* , ($\hat{u} = \hat{u}_c^i, \hat{u}_f^0$) é usada como dado de entrada para resolver um fluxo de potência ótimo (5.29). A solução final f^* é encontrada acrescentado os custos dos bancos \hat{u}^* , fixos e chaveados (instalação e aquisição) com o custo ótimo E^* obtido da solução de (5.29).

O AHCM será usado sem nenhuma modificação para resolver o PAOBC com bancos mistos.

5.3 Testes usando os algoritmos desenvolvidos

Os algoritmos desenvolvidos nesta pesquisa foram testados em 2 sistemas diferentes encontrados na literatura especializada. Para tal fim consideram-se como unidade mínima padrão capacitores trifásicos de 300 kVAr e o número máximo de unidades alocados neste trabalho é variável. Nos testes utilizamos uma potência máxima de 1200 kVAr por tipo para o sistema de 33 barras e 1800 kVAr por tipo para o sistema de 69 barras.

A representação dos resultados está dada pela barra alocada seguida pelo número e tipo de banco, seguindo a seguinte notação:

Para bancos fixos $NB_1, \dots, NB_{nc}(X)$: Em que NB_i indica o número de barra, X indica a quantidade de unidades padrão de 300 kVAr.

Para bancos chaveados $NB_1, \dots, NB_{nc}(X, X1, X2)$: Em que NB_i indica o número de barra, X, X1 e X2 indicam a quantidade de unidades padrão de 300 kVAr para os níveis pico, médio e baixo, respectivamente.

Por exemplo: As seguintes duas notações; 24, 25(1); 33, 50(2,1,0), significam que as barras 24 e 25 estão alocando um banco fixo de 300 kVAr e nas barras 33 e 50 têm-se um banco chaveado de 600 kVAr operando no nível médio com 300 kVAr.

5.3.1 Testes para os PAOBC's com bancos fixos e chaveados

Nestes testes foram feitas as seguintes suposições:

- A magnitude de tensão na subestação foi considerada constante para todos os níveis de carga e igual a 1 pu.
- Os limites de tensão nas barras de carga do sistema foram consideradas abertas, isto é, um limite inferior igual a 0,75 pu.
- Deve-se escolher um mesmo tipo de banco de capacitores (fixo ou chaveado) para se alocar em todo o sistema.
- Finalmente as cargas são modeladas como sendo de potência constante em relação à tensão.

Sistema de 69 barras

O primeiro sistema testado é de 69 barras [6]. Apresentamos os resultados usando os mesmos critérios usados em [15] onde a parcela da função objetivo relacionada com a instalação de bancos apresenta duas partes: (1) um custo fixo de US\$ 1000 pela infraestrutura de instalação dos bancos em cada barra usada e, (2) um custo de US\$ 900 por cada banco fixo de 300 kVAr e de US\$ 1200 por cada banco chaveado instalado. Os outros dados usados são: $k_e = 0,06$ $\$/kWh$, $S_0 = 1,8$, $S_1 = 1,0$, $S_2 = 0,5$, $T_0 = 1000$, $T_1 = 6760$, $T_2 = 1000$ e um horizonte de um ano. Para operação sem bancos de capacitores a função objetivo apresenta um custo de US\$ $f = 146448,80$. As perdas do sistema são mostradas na Tabela 5.6.

Observação: em [15] os custos dos capacitores fixos e chaveados são iguais a 3 US\$/kVAr. Aqui assume-se que o custo do capacitor chaveado é maior, porém seu custo foi atualizado segundo dados recebidos dos fabricantes.

Nível de carga(pu)	pico: (0)	médio: (1)	fora do pico (2)
Perdas(kW)	868,00	225,00	52,00
%Pot. Subestação	11,25	5,58	2,66

Tabela 5.6: Perdas do sistema de 69 barras sem a instalação de bancos de capacitores

Pode-se observar que as perdas no nível pico de carga são aproximadamente quatro vezes que no nível médio de carga. Porém a alocação de capacitores tentará reduzir principalmente as perdas nestes dois níveis de carga.

Para o caso de alocação de capacitores fixos foi encontrada uma solução com US\$ $f^* = 105713,2$ com a seguinte topologia: 18(1), 62(4). Assim, a redução da função objetivo foi de $\Delta f^* = 40713,2$ dólares anuais. As perdas do sistema são mostradas na Tabela 5.7.

Nível de carga(pu)	pico: (0)	médio: (1)	fora do pico (2)
Perdas(kW)	613,00	147,00	48,00
%Pot. Subestação	8,21	3,72	2,46

Tabela 5.7: Perdas do sistema de 69 barras com a instalação de bancos de capacitores fixos

Como era de se esperar, a redução das perdas para o nível pico de carga é de 29.37%, e para o nível médio é de 34.66%. Entretanto, para o nível fora de pico somente foi de 7.69%. A economia total anual calculada foi de 40713,2 dólares que representa 27,8% das perdas iniciais do sistema.

Entretanto deve-se resaltar que esta solução não considera os limites de tensão estabelecidos pela ANEEL, porém estes resultados somente dão a idéia de quanta redução de perdas e custo pode-se conseguir no sistema mediante a alocação de capacitores fixos, considerando que o sistema opera sem reguladores de tensão na subestação.

A Tabela 5.8 contém o resumo do processo de solução:

iter. AHCM	N° iter. AHCB	f^* US\$	Δf^* US\$	Bancos alocados	q_{min}	N° PNLs	total iter. nos PNLs
1	3	106483,9	39964,9	13(1); 62(4)	0,015	27	180
	3	106333,6	40115,3	13(2), 62(4)	0,030	6	26
	1	107325,6	39123,2	62(4)	0,045	3	13
2	3	105713,2	40713,2	18(1); 62(4)	0,015	26	168
	2	105713,2	40713,2	18(1); 62(4)	0,030	6	26

Tabela 5.8: Resultados do sistema de 69 barras usando bancos de capacitores fixos

O tempo computacional foi de 6,90 minutos.

Para o caso de alocação de capacitores chaveados foi encontrada uma solução com US\$ $f^* = 106403,70$ com a seguinte topologia: 13(1,1,1); 62(6,4,2). Assim, a redução da função objetivo foi de $\Delta f^* = 40045,14$ dólares. O resumo do processo de solução é mostrado na Tabela 5.9.

iter. AHCM	N° iter. AHCB	f^* US\$	Δf^* US\$	Bancos alocados	q_{min}	N° PNLs	total iter. nos PNLs
1	3	106666.5	39782.3	22(1,1,0), 62(4,4,2),65(5,0,0)	0,015	27	237
	1	107125.7	39323.1	62(5,4,2)	0,030	5	33
2	5	107231.9	39216.9	13(1,1,1), 62(4,4,2);	0,015	24	207
	2	106403.7	40045.1	13(1,1,1), 62(6,4,2)	0,030	3	18
	3	106403.7	40045.1	13(1,1,1), 62(6,4,2)	0,045	3	18

Tabela 5.9: Resultados do sistema de 69 barras usando bancos de capacitores chaveados

O tempo computacional foi de 7,77 minutos. Esta vez as barras escolhidas foram o número 13 e 62, onde a barra 62 representa uma barra com grande quantidade de carga (a maior do sistema), isto é, aproximadamente 32% da carga total do sistema. No nível de carga médio o ponto de operação desses bancos é a mesma que no caso da operação com bancos fixos calculado no teste anterior e portanto a redução de perdas neste nível é quase igual à do teste anterior, isto pode-se apreciar na Tabela 5.10.

Nível de carga:(pu)	Pico: (0)	Médio: (1)	Fora do pico (2)
Perdas(kW)	564,00	148,00	34,00
%Pot. Subestação	7,61	3,75	1,76

Tabela 5.10: Perdas do sistema de 69 barras com a instalação de bancos de capacitores chaveados

A redução das perdas para o nível pico de carga é de 35.23%, e para o nível médio é de 34.22%. Entretanto, para o nível fora de pico foi de 34.61%. A economia total anual calculada foi de 40045,14 dólares anuais, o que representa 27,34% do custo das perdas iniciais do sistema.

Uma maior redução das perdas é obtida pela alocação de capacitores chaveados no sistema, isto pode-se notar nos níveis pico e fora de pico de carga devido ao fato que os capacitores chaveados podem comutar seus pontos de operação aumentando passos (no nível pico) e tirando passos (nível fora de pico) com o objetivo de reduzir as perdas do sistema. Deve-se lembrar que uma sobre-compensação de reativos capacitivos aumenta as perdas do sistema. No entanto, devido a que o custo dos capacitores chaveados é maior que os fixos, a alocação de só capacitores chaveados oferece uma redução de custos menor que no caso do teste com só bancos fixos.

Em uma análise da barra 62 pode-se notar que no primeiro teste, com bancos fixos, a compensação é feita com capacitores fixos de (4x300=1200 kVAr) para os três níveis de carga. Neste teste, a compensação com bancos chaveados para o nível médio também é de 1200 kVAr, entretanto quando o fator de carga aumenta o banco comuta a sua máxima potência (1800kVAr), se outra vez o fator de carga muda para o nível de carga baixo automaticamente o ponto de operação deste banco procura reduzir as perdas do sistema eliminando 4 degraus, isto é 1200 kVAr, para passar a operar com só 600 kVAr.

Outro aspecto que se deve mostrar é a redução no fornecimento das potências ativa e reativa na subestação do sistema após a instalação dos bancos de capacitores. Na Tabela 5.11 pode-se apreciar que a demanda aparente em kVA do sistema é aliviada, isto oferece mais vantagens para a empresa de distribuição pois pode-se acrescentar mais clientes a seu sistema, ou simplesmente, aliviar os equipamentos como linhas e transformadores de condições de sobrecarga que encurtam suas vidas úteis além de evitar possíveis perdas de estabilidade de tensão em barras críticas.

	Nível de carga	Pico	Médio	Baixo	Nível de carga	Pico	Médio	Baixo
Sem bancos	Pot. Ativa(kW)	7515	4029	1954	Pot. Reativa (kVAr)	5241	2797	1371
Bancos fixos	Pot. Ativa(kW)	7460	3951	1950	Pot. Reativa (kVAr)	3632	1263	-131
B. chaveados	Pot. Ativa(kW)	7411	3952	1936	Pot. Reativa (kVAr)	3009	1263	464

Tabela 5.11: Fluxo de potências na subestação do sistema de 69 barras

Sistema de 33 barras

O seguinte sistema testado está em [8]. Apresentamos os resultados usando os mesmos critérios usados no sistema anterior. Para a operação sem bancos de capacitores a função

objetivo apresenta um custo de US\$ $f = 140398,0$. As perdas do sistema são mostradas na Tabela 5.12.

Nível de carga:(pu)	Pico: (0)	Médio: (1)	Fora do pico (2)
Perdas(kW)	784,00	222,00	53,00
%Pot. Subestação	8,58	4,56	2,23

Tabela 5.12: Perdas do sistema de 33 barras sem a instalação de bancos de capacitores

Igualmente ao sistema do caso anterior, as perdas para o nível de carga pico chegam a mais de três vezes o valor das perdas para o nível médio de carga, a potência na subestação foi calculada sem a instalação de bancos no sistema para os três períodos de estudo.

Para o caso de alocação de capacitores fixos foi encontrada uma solução de US\$ $f^* = 114584,1$ com a seguinte topologia: 11(2), 25(2), 20(3). Assim, a redução da função objetivo foi de $\Delta f^* = 25813,8$ dólares. As perdas do sistema são mostradas na Tabela 5.13:

Nível de carga:(pu)	Pico: (0)	Médio: (1)	Fora do pico (2)
Perdas(kW)	615,00	161,00	49,00
%Pot. Subestação	6,86	3,35	2,07

Tabela 5.13: Perdas do sistema de 33 barras com a instalação de bancos de capacitores fixos

A redução das perdas para o nível pico de carga é de 21.55%, e para o nível médio é de 27.47%. Entretanto, para o nível fora de pico somente foi de 7.54%. A economia total anual calculada foi de 25813,8 que representa 18,37% das perdas iniciais do sistema.

A Tabela 5.14 contém o resumo do processo de solução:

iter. AHCM	Nº iter. AHCB	f* US\$	Δf^* US\$	Bancos alocados	q_{min}	Nº PNLs	total iter. nos PNLs
1	8	117851,2	22546,8	9,11,20,22,24,26(1)	0,015	29	155
	4	115544,4	24853,6	8,20,25(2); 11(1)	0,030	15	63
	3	114584,1	25813,8	11,25(2); 20(3)	0,045	8	35
	3	114584,1	25813,8	11,25(2); 20(3)	0,060	6	27
2	5	116358,0	24040,0	9,23(2); 18,20,26(1)	0,030	26	125
	3	114706,0	25691,2	9,26(2); 20(3)	0,045	7	32
	4	114706,0	25691,2	9,26(2); 20(3)	0,060	4	19

Tabela 5.14: Resultados do sistema de 33 barras usando bancos de capacitores fixos

O tempo computacional foi de 1,52 minutos. Observa-se a presença da solução quase ótima com US\$ $f^* = 114706,0$ com a seguinte topologia: 9(2),26(2), 20(3) e uma diferença de somente 122 dólares da melhor solução conseguida.

A diferença entre este sistema e o sistema de 69 barras, é que este sistema apresenta sua carga totalmente distribuídas entre suas barras, ver Apêndice B. Esta característica faz com que este sistema seja mais interessante para análise.

Para o caso de alocação de capacitores chaveados foi encontrada uma solução de US\$ $f^* = 116279,1$ com a seguinte topologia: 9(3,3,1); 21(2,2,1); 25(2,2,1), e uma redução da função objetivo de $\Delta f^* = 24118,85$ dólares.

O resumo do processo de solução é mostrado na Tabela 5.15. O tempo computacional foi de 1,95 minutos.

iter. AHCM	N° iter. AHCB	f^* US\$	Δf^* US\$	Bancos alocados	q_{min}	N° PNLs	total iter. nos PNLs
1	8	119645,5	20752,5	9,21,25(1,1,0) 11,19,23,26(1,1,1)	0,015	27	167
	5	117557,0	22841,0	9(1,1,1),11(1,1,0),21,25(2,2,1);	0,030	12	68
	3	116279,1	24118,9	9(3,3,1); 21(2,2,2); 25(2,2,1)	0,045	7	40
	3	116279,1	24118,9	9(3,3,1); 21(2,2,2); 25(2,2,1)	0,060	5	28
2	5	117794,4	22603,6	9,22(1,1,1),21(1,1,0),19,26(2,2,1)	0,030	23	138
	3	117283,9	23114,1	9,19,26(2,2,1)	0,045	8	44
	2	116610,6	23787,4	9(3,3,2),22(4,4,2)	0,060	6	34
	2	116610,6	23787,4	9(3,3,2),22(4,4,2)	0,075	4	22

Tabela 5.15: Resultados do sistema de 33 barras usando bancos de capacitores chaveados

Neste sistema, podemos apreciar que o custo mais elevado dos capacitores chaveados afetaram em alguma forma a redução do custos das perdas do sistema.

As novas perdas do sistema com a melhor topologia são mostradas na Tabela 5.16:

Nível de carga(pu)	Pico: (0)	Médio: (1)	Fora do pico (2)
Perdas(kW)	616,00	162,00	39,00
%Pot. Subestação	6,87	3,38	1,65

Tabela 5.16: Perdas do sistema de 33 barras com a instalação de bancos de capacitores chaveados

A redução das perdas para o nível pico de carga é de 21,42%, e para o nível médio é de 27,03%. Entretanto, para o nível fora de pico foi de 26,41%. A economia total anual calculada foi de 24118,85 dólares que representa 17,17% das perdas iniciais do sistema.

Uma redução das perdas ligeiramente menor é obtida pela alocação de capacitores chaveados no sistema, isto pode-se notar nos níveis pico e fora de pico de carga, evidentemente isto acontece pelo menor custo dos capacitores fixos. Porém, na seguinte seção apresentaremos os testes, para ambos sistemas, considerando bancos mistos, onde os custos e vantagens técnicas de cada tipo de banco se juntam para obter uma única solução.

Deve-se lembrar que estas soluções não consideram os limites de tensão estabelecidos pela ANEEL, porém estes resultados somente dão a idéia de quanta redução de perdas e custo pode-se conseguir no sistema mediante a alocação de capacitores chaveados, considerando, que o sistema opera sem elemento de controle de tensão na subestação.

5.3.2 Testes para o PAOBC com bancos mistos

Neste caso foram feitas as seguintes suposições:

- A magnitude de tensão na subestação foi considerada variável para todos os níveis de carga com limite máximo igual a 1.05 pu.

- Os limites de tensão nas barras de carga do sistema foram consideradas ativos, isto é, limites inferior e superior segundo a resolução ANEEL 505.
- Finalmente, as cargas foram modeladas como sendo de potência constante em relação à tensão.

Sistema de 69 barras

Foi encontrada uma solução com US\$ $f^* = 108461,7$ com a seguinte topologia: bancos fixos em 19(1), 62(3) e bancos chaveados em 62(5,1,0) e 65(5,0,0). Assim, a redução da função objetivo foi de $\Delta f^* = 37974,6$ dólares. Após a instalação dos bancos as perdas do sistema são mostradas na Tabela 5.17.

Nível de carga:(pu)	Pico: (0)	Médio: (1)	Fora do pico (2)
Perdas(kW)	574,00	132,00	34,00
%Pot. Subestação	7,73	3,35	1,75

Tabela 5.17: Perdas do sistema de 69 barras com a instalação de bancos de capacitores mistos

Também foram feitos testes para este mesmo sistema considerando que os limites de tensão são abertos (como o caso do teste para o PAOBC com bancos fixos da seção 5.3.1) conseguindo-se uma solução de US\$ $f^* = 105327,70$ e uma economia anual de $\Delta f^* = 41121,08$ dólares, com três bancos fixos alocados na barra 22(1), 62(2) e 65(1) e dois bancos chaveados nas barras 62(2,1,0) e 65(1,0,0). As perdas foram de 491, 147 e 40 kW para o nível pico, médio e baixo, respectivamente.

Se comparamos estes dois resultados pode-se concluir que no caso em que o sistema opere com seus limites de tensão ativos, é necessário o uso de mais bancos assim como também uma adequada regulação do tap ou regulador de tensão da subestação. Segundo a Tabela 5.18, para o nível de carga pico, neste sistema existem barras que ainda se encontram com tensões muito baixas após a regulação de tensão da subestação em 1,05 pu., estas barras precisam da injeção de reativos capacitivos para reduzir as perdas do sistema, entretanto o algoritmo de MPI tentará manter a factibilidade da solução alocando mais bancos até que as barras superem o limite de tensão inferior aumentando o fluxo de potência reativa nas linhas o que produz um aumento das perdas nas linhas do sistema.

Barra	59	60	61	62	63	64	65	66
Tensão(pu)	0,9194	0,9115	0,9022	0,8885	0,8880	0,8873	0,8837	0,8827

Tabela 5.18: Barras que violaram os limites de tensão do sistema de 69 barras para o nível pico de carga. Tensão na subestação igual a 1.05pu e sem bancos alocados no sistema

Nível de carga:(pu)	Pico: (0)	Médio: (1)	Fora do pico (2)
Perdas(kW)	754,95	200,52	46,47

Tabela 5.19: Perdas do sistema de 69 barras sem a instalação de bancos de capacitores e com 1.05pu de tensão na subestação para os três níveis de carga

Elevar o nível de tensão na subestação ajuda a elevar o perfil de tensão do sistema, entretanto não assegura que os limites de tensão sejam atingidos em todas as barras, especialmente naquelas que estão mais distantes ou que estejam sobrecarregadas (ver Tabela 5.18), as perdas do sistema são reduzidas numa menor porcentagem do que com a instalação de bancos de capacitores mistos. Isto pode-se apreciar na Tabela 5.19.

A Tabela 5.20 contém o resumo do processo de solução.

Iter. AHCM	Nº Iter. AHCB	f* US\$	Δf^* US\$	Bancos alocados	q_{min}	Nº PNLs	Total iter. nos PNLs
1	6	112127,8	34308,5	13,22(1),57,62(2);57(2,0,0), 62(5,1,0),65(4,0,0)	0,015	18	224
	3	109119,9	37316,3	13(1),62(3);62(5,1,0),65(5,0,0)	0,030	9	181
	3	109596,1	36840,1	13(1),62(3);62(5,1,0),65(5,0,0)	0,045	5	83
2	6	112024,9	34411,3	12,19(1),57,62(2);57(2,0,0), 62(5,1,0);65(4,0,0)	0,015	17	210
	3	108461,7	37974,6	19(1),62(3);62(5,1,0),65(5,0,0)	0,030	8	141
	2	111664,7	34771,6	62(3);62(5,1,0),65(5,0,0)	0,045	5	95

Tabela 5.20: Resultados do sistema de 69 barras usando bancos de capacitores mistos

O tempo computacional empregado neste caso foi de 14,50 minutos, isto é devido ao fato que se resolveram um maior número de PNLs com uma maior quantidade de iterações que no caso do teste usado para o PAOBC com bancos chaveados. O PAOBC com bancos mistos envolve uma quantidade maior de incógnitas e restrições que dificultam mais o algoritmo de pontos interiores desenvolvido. A escolha de um bom ponto inicial também é crítica devido a que a média entre os limites máximos e mínimos como valor inicial para as variáveis bancos de capacitores não assegura que continue sendo um bom ponto inicial para todo o processo de solução.

Além disso, outra dificuldade que aconteceu neste tipo de problema (PAOBC com bancos mistos) foi o fenômeno conhecido na literatura como atolamento ou (*jamming*) [10]. Isto acontece quando dentro do processo de solução do MPI muitas das variáveis de folga rapidamente se aproximam de zero, fazendo com que a matriz Jacobiana $J_{F(w)}$ torne-se próximo à singularidade, obtendo grandes valores de Δw , isto forçará a que o comprimento de passo torne-se próximo a zero para assegurar as condições de não negatividade. Assim, o algoritmo de MPI pára num ponto w^k para as iterações seguintes.

Portanto foi necessário fazer duas correções no algoritmo de MPI com o objetivo de sair do ponto de *atolamento* w^k :

- A primeira foi mudar o parâmetro γ de 0,99995 para 0,98885.
- Foi implementado uma estratégia encontrada em [10]. Consiste em mudar os valores próximos de zero das variáveis de folga s_i , ($i = 1, \dots, 8$) por valores maiores, para assim restabelecer a não singularidade da matriz $J_{F(w)}$. O critério empregado aqui foi o seguinte:

A variável de folga, seja s_{ij} , é mudada se é menor que 10^{-4} e se $\frac{\Delta s_i}{s_{ij}} > 10^4$, para $j = 1, \dots, \dim(s_i)$. Todas aquelas variáveis de folga que cumprem esta condição serão

mudadas pelo mesmo valor q :

$$q = \frac{k}{\sum_j \frac{1}{s_{ij}}}$$

sendo k o número total de termos contidos na somatória.

Mediante estas duas correções o algoritmo de MPI conseguiu sair satisfatoriamente de todos os pontos de atolamento apresentados no processo de solução.

Comparando os resultados das Tabelas 5.17 e 5.19 pode-se concluir que não é suficiente elevar a tensão na barra da subestação para reduzir as perdas do sistema (assim os limites de tensão superam os estabelecidos pela ANEEL como é o caso dos níveis médio e baixo de carga). Porém é necessário a instalação dos bancos de capacitores.

A Figura 5.3 mostra o perfil de tensão do sistema após a instalação dos bancos de capacitores.

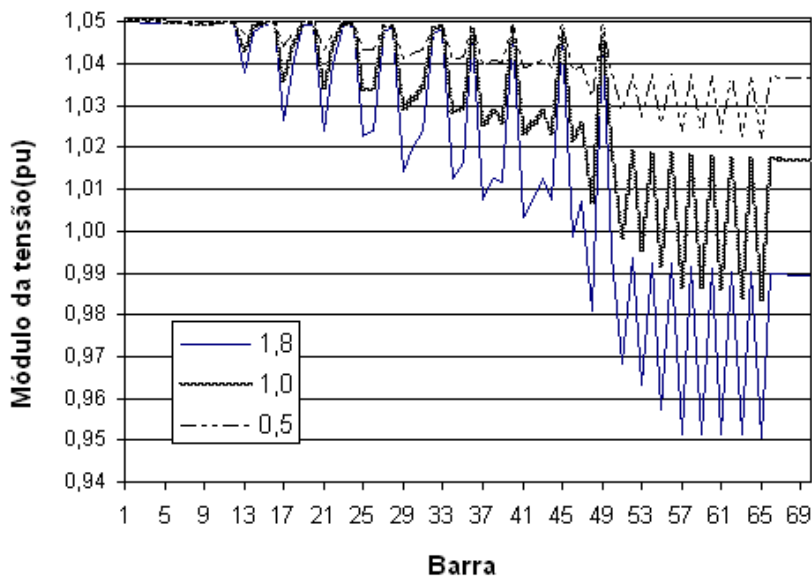


Figura 5.3: Perfil de tensão do sistema de 69 barras para o PAOBC com bancos mistos

As barras que violaram o limite inferior de tensão mostradas na Tabela 5.18 agora superam este limite para o nível pico de carga.

A redução final das perdas para o nível pico foi de 33,87% do qual o 20,8% foi produto da alocação de capacitores. Para os níveis médio e baixo a redução de perdas foi de 41,33% e 34,61%, respectivamente.

O fornecimento das potências ativa e reativa na subestação do sistema após a instalação dos bancos de capacitores mistos é mostrada na Tabela 5.21 onde pode-se verificar que a demanda aparente em kVA do sistema é aliviada com as vantagens já citadas acima para a empresa de distribuição.

	Nível de carga	Pico	Médio	Baixo	Nível de carga	Pico	Médio	Baixo
Sem bancos	Pot. Ativa(kW)	7515	4029	1954	Pot. Reativa (kVAr)	5241	2797	1371
Bancos mistos	Pot. Ativa(kW)	7421	3936	1936	Pot. Reativa (kVAr)	910	1256	163

Tabela 5.21: Fluxo de potências na subestação do sistema de 69 barras sem/com bancos mistos

Sistema de 33 barras

Apresentam-se os resultados utilizando os mesmos critérios aplicados no sistema anterior. Para a operação sem bancos de capacitores a função objetivo apresenta um custo de US\$ $f = 140395,8$. Foi encontrada uma solução com US\$ $f^* = 103866,1$ com a seguinte topologia: bancos fixos em 11(2),19(2),25(2) e um banco chaveado em 25(1,1,0). Assim a redução da função objetivo foi de $\Delta f^* = 36529,7$ dólares. A seguir é mostrada a Tabela 5.22 que contém o resumo do processo de solução:

iter. AHCM	N° iter. AHCB	f^* US\$	Δf^* US\$	Bancos alocados	q_{min}	N° PNLs	total iter. nos PNLs
1	8	107294,3	33101,4	8,9,11,19,21,23,25(1) 25(1,1,0)	0,015	24	244
	4	104636,7	35759,0	8,21(2)11,25(1);25(1,1,0)	0,030	11	110
	3	103866,1	36529,7	11,19,25(2);25(1,1,0)	0,045	7	71
	2	106460,1	33935,7	11(2),19(5)	0,060	5	53
2	4	104820,1	35575,7	8,31(1),20,24(2);24(1,1,0)	0,030	23	235
	3	103894,8	36501,0	20,24,31(2);24(1,1,0)	0,045	5	51
	2	105502,8	34892,9	20(5), 31(2)	0,060	4	43

Tabela 5.22: Resultados do sistema de 33 barras usando bancos de capacitores mistos

O tempo computacional foi de 2,96 minutos. O fenômeno do *atolamento* não se apresentou dentro do processo iterativo de solução do algoritmo de MPI.

Também foram feitos testes para este mesmo sistema considerando que os limites de tensão são abertos, conseguindo-se uma solução de US\$ $f^* = 103866,1$ e uma economia anual de $\Delta f^* = 36529,7$ dólares. Se alocaram três bancos fixos nas barras 11(2), 19(2), 25(2) e um banco chaveado em 25(1,1,0).

Contrariamente ao teste do sistema de 69 barras manter os limites de tensão ativos ou abertos levou o algoritmo à mesma solução. Para fazer um análise destes resultados é necessário observar o comportamento do sistema com somente a regulação de tensão da subestação.

Barra	24	25	26	27
Tensão(pu)	0,9495	0,9473	0,9465	0,9462

Tabela 5.23: Barras que violaram os limites de tensão do sistema de 33 barras para o nível pico de carga. Tensão na subestação igual a 1.05pu e sem bancos alocados no sistema.

Na Tabela 5.23 mostra-se que para o nível pico de carga ($s_0 = 1,8$) existem poucas barras que violam o limite inferior, e o mais importante, as tensões nestas barras estão muito próximas a este limite. Assim, a injeção de reativos capacitivos para elevar a tensão

em barras críticas é pequena quando comparada ao objetivo de reduzir as perdas do sistema. Este fato é diferente que no caso do sistema de 69 barras (ver Tabela 5.18) e explica o porque a alocação de capacitores e a regulação de tensão da subestação neste sistema melhoram de forma significativa a redução do custo do sistema. As perdas finais do sistema são mostradas na Tabela 5.24:

Nível de carga(pu)	Pico: (0)	Médio: (1)	Fora do pico (2)
Perdas(kW)	547.00	146.00	39.00
%Pot. Subestação	6,15	3,05	1,65

Tabela 5.24: Perdas do sistema de 33 barras com a instalação de bancos de capacitores mistos.

A redução final das perdas para o nível pico foi de 30,23% dos quais o 19,25% foi devido a alocação de capacitores e 10,97% pela regulação de tensão da subestação. Para os níveis médio e baixo as redução de perdas foi de 34,23% e 26,41%, respectivamente que representam uma economia anual de 36529,7 dólares. Finalmente o perfil das tensões é mostrada na Figura 5.4.

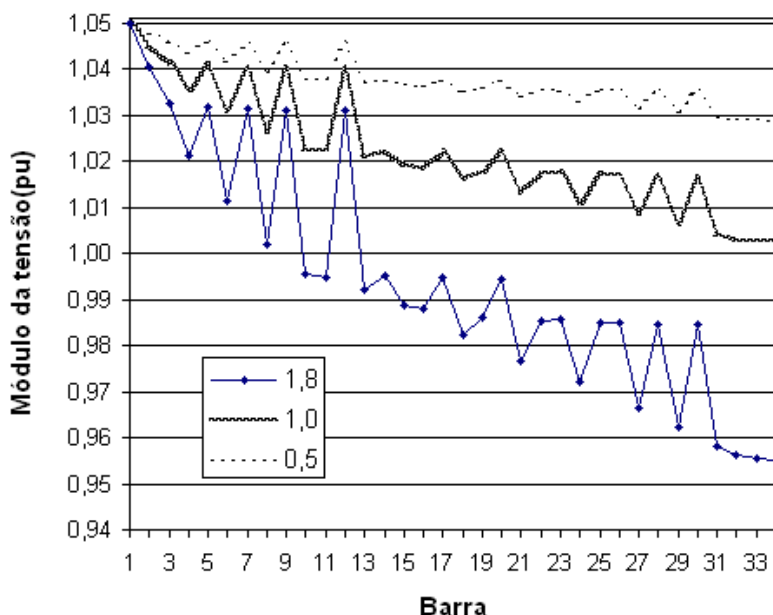


Figura 5.4: Perfil de tensões do sistema de 33 barras para o PAOBC com bancos mistos.

O fornecimento das potências ativa e reativa na subestação do sistema após a instalação dos bancos de capacitores mistos é mostrada na Tabela 5.25. Pode-se apreciar que a demanda aparente em kVA do sistema é aliviada.

	Nível de carga	Pico	Médio	Baixo	Nível de carga	Pico	Médio	Baixo
Sem bancos	Pot. Ativa(kW)	9130	4859	2371	Pot. Reativa (kVAr)	5424	2951	1458
Bancos mistos	Pot. Ativa(kW)	8892	4782	2357	Pot. Reativa (kVAr)	3255	2828	-346

Tabela 5.25: Fluxo de potências na subestação do sistema de 33 barras sem/com bancos mistos.

5.4 Comentários dos resultados encontrados

O AHCM implementado foi testado usando um computador Intel^(R) Pentium^(R) 4, CPU 3.00GHZ operando no S.O. Microsoft^(R) Windows XP^(R) versão 2002. A implementação do algoritmo foi em Matlab 5.3. Entretanto os testes foram feitos em Matlab 7.0 por ser, em geral, mais rápido que a versão anterior.

A utilização do MPI na resolução do problema relaxado (PR) dentro do AHCM encontra topologias de qualidade para os sistemas testados. Para sistemas de pequeno porte o algoritmo encontra soluções ótimas, e no caso de sistemas de médio porte soluções de boa qualidade.

O MPI apresentou um bom desempenho dentro de todo o processo iterativo do AHCB, embora o MPI não garanta um ótimo global em cada iteração do AHCB. Este problema aumenta quanto maior for o sistema, ou seja, a existência de um maior número de mínimos locais onde o MPI pode chegar. Mesmo assim o MPI fornece uma boa solução do PNL, que pode ser utilizada dentro de um AHC com outros critérios de sensibilidade além dos aqui apresentados.

Para os PAOBC's com bancos fixos e chaveados o algoritmo de MPI, dentro do AHCB proposto, manteve boas características de convergência para todos os sistemas testados, com tempos de processamento computacional que cresce segundo a dimensão do problema, isto representa inicialmente uma dificuldade quando são testados sistemas relativamente maiores. Porém, o maior tempo computacional é consumido na solução das equações (3.64) e (3.80) do MPI-PDBL-PC. Este problema foi contornado gradualmente usando um algoritmo de solução de sistemas lineares esparsos definidos e indefinidos mediante o método de gradiente conjugado chamado SYMMLQ [43]. Este pacote permite resolver os sistemas mencionados acima relativamente mais rápido que o algoritmo usado no Matlab, isto é, quando os sistemas são relativamente maiores, para sistemas menores sua vantagem é mínima. Assim, este é o maior problema da aplicação do MPI para resolver problemas em *tempo real* em sistema de grande porte.

Para o PAOBC com bancos mistos o algoritmo de MPI, dentro do AHCB modificado, apresentou o fenômeno de *atolamento* em algumas partes do processo de solução do sistema de 69 barras, onde o passo torna-se zero parando a caminhada do algoritmo. Segundo a literatura especializada, existem várias formas de sair deste problema mas que nem sempre todas têm sucesso, assim nesta pesquisa foi implementada uma forma fácil e eficaz de sair do atolamento encontrada em [10] e que foi implementado com sucesso no pacote profissional LOQO.

Para os PAOBC's com bancos fixos e chaveados a primeira iteração interna do AHCM foi a que mais PNL's precisou resolver pelo fato de ter uma maior quantidade de variáveis de controle como incógnitas. Nas outras iterações o número de PNL's decresceu gradualmente dependendo das características específicas do sistema, isto é, a redução progressiva de barras candidatas. O número de iterações médias por PNL resolvido pelo MPI-PDBL-PC para todos os sistemas testados esteve abaixo de 7 iterações, que é uma boa taxa de convergência, isto prova que a heurística utilizada para gerar os pontos iniciais é eficiente.

Outros parâmetros importantes dentro do algoritmo de pontos interiores são o parâmetro

μ que foi fixado inicialmente em 10 e γ , fixado em 0,99995 para todo o processo. Um valor maior de μ aumentou o comprimento dos passos mas levou muitas vezes ao MPI a divergir.

Também para os PAOBC's com bancos fixos e chaveados os testes foram feitos considerando que o sistema opera com limites de tensões abertas, isto é, $V_{min} \approx 0.75$. Nas tabelas de resultados mostradas acima pode-se observar que segundo o incremento do parâmetro q_{min} a função objetivo é melhorada até atingir um mínimo local. Pode-se também observar que no sistema de 33 barras a melhor solução é encontrada na primeira iteração do AHCM, entretanto no sistema de 69 barras a melhor solução é encontrada na segunda iteração do AHCM. Isto demonstra que o MPI empregado aqui converge sempre para um ótimo local.

Para o PAOBC com bancos mistos, igualmente, a primeira iteração interna do AHCM foi a que mais PNLs precisou resolver, nas seguintes iterações o número de PNL's decresceu gradualmente, entretanto o número de iterações médias por PNL resolvido esteve em 10, para o sistema de 33 barras, e próximo de 16 para o sistema de 69 barras. A causa do maior número de iterações é o *atolamento* no sistema de 69 barras e o maior número de variáveis de controle quando comparado com os PAOBC's com bancos fixos e chaveados. Neste caso o parâmetro μ foi fixado inicialmente em 1 e γ fixado em 0,98885 para todo o processo de solução. Nos testes foram considerados os limites de tensão ativos, isto é entre 0,95 e 1,05 pu segundo a ANEEL 505 e supõe-se a existência de um transformador com taps ou um regulador de tensão na barra da subestação.

No teste com bancos mistos é importante ressaltar que no sistema de 69 barras o efeito da compensação considerando os limites de tensão ativos piora a redução de custos e perdas quando comparado com a compensação com limites de tensão abertos. Já no sistema de 33 barras é totalmente o contrário, acredita-se que isto se deve a fato que na configuração de 33 barras as cargas estão melhor distribuída. é localizada, pois as barras compensadas pertencem às linhas bem mais carregadas.

Os resultados obtidos para o PAOBC com bancos fixos e chaveados foram comparados com pesquisas anteriores encontradas na literatura especializada [46], onde se demonstra que as soluções obtidas foram quase as mesmas.

Para o PAOBC com bancos mistos a maioria dos resultados encontrados na literatura especializada foram obtidos considerando os limites de tensão abertos ou considerando que o fator de carregamento S para os níveis de carga de pico, médio e baixo são iguais a 1,0, 0,8 e 0,5 respectivamente. Porém os resultados apresentados aqui, não têm padrão de comparação.

Capítulo 6

Conclusões e Futuros Trabalhos

Neste trabalho foi apresentado um algoritmo de pontos interiores que é incorporado em um algoritmo heurístico construtivo com a finalidade de resolver o problema de alocação ótima de bancos de capacitores formulado como um PNLIM. O algoritmo proposto forneceu soluções de boa qualidade para esse problema.

O MPI apresentou boas características de convergência dentro do AHC, especialmente quando o sistema opera com seus limites de tensão abertos, entretanto não é garantido que a solução conseguida seja o melhor dos muitos ótimos locais que apresenta o PAOBC. O AHC apresentado também apresentou um bom desempenho pois alocou bancos em barras identificadas como sensíveis por outras metaheurísticas [15].

O MPI consegue manter uma convergência adequada quando o sistema de distribuição opera com seus limites de tensões ativos, isto é, logo superados os problemas de *atolamento*. Nos testes feitos para estes tipos de problemas foram encontrados resultados que mostram que os objetivos de manter as tensões nas barras do sistema dentro dos limites estabelecidos é conflitante com o objetivo de reduzir as perdas do sistema, pois os custos se elevam pela maior alocação de bancos para o nível pico de carga. Foi também observado que o PAOBC com bancos mistos teve maiores problemas de convergência que o PAOBC com bancos fixos e chaveados como era de se esperar. É importante mencionar também que o processo de solução é altamente dependente do ponto inicial dado no MPI.

Dos resultados obtidos conclui-se que a alocação de bancos de capacitores em um sistema de distribuição radial qualquer produz alocação de bancos em pontos estratégicos do sistema, tipicamente em barras com carga elevada reativa ou na vizinhança de barras com grande carga reativa.

Entretanto, conclui-se que para o tipo de modelagem (cargas constantes) usado até agora o MPI proposto é suficiente pois as soluções obtidas podem ser consideradas de boa qualidade e com boa taxa de convergência. Mas quando o modelo do sistema considere mais não linearidades (i.e. cargas dependentes de tensão) será necessário avaliar a convergência do algoritmo apresentado.

Finalmente, podemos dizer que o MPI foi aplicado com sucesso para resolver o PAOBC e serve como precedente para que futuras pesquisas considerem este método como uma alternativa e que inclusive pode ser combinada com outras técnicas de otimização.

Futuros trabalhos devem utilizar técnicas de melhoria da convergência global, como as análises teóricas desenvolvidas em [54] e [29], estas técnicas foram analisadas como parte da presente pesquisa, entretanto sua implementação não chegou aos resultados desejados porque se precisa de uma análise mais detalhada para o problema específico de alocação ótima de bancos de capacitores. Estas técnicas se diferenciam da usada aqui no cálculo do comprimento do passo e na modificação do sistema linear (3.62) para assegurar uma melhor convergência. A redução do passo está baseada no fato de que é definida uma função de mérito que deve também ser minimizada seguindo as direções de Newton.

Adicionalmente, as sugestões para futuros trabalhos são as seguintes:

- Melhorar o cálculo do sistema de equações lineares (3.64) e (3.80), dada as características particulares do PAOBC.
- Resolver o PAOBC com cargas como sendo ZIP compostas, isto é, impedância constante, corrente constante e potência constante, (ZIP).
- Melhorar o cálculo do comprimento do passo do MPI segundo o explicado acima.
- O algoritmo de MPI desenvolvido pode ser incorporado em um algoritmo branch and bound para resolver o PAOBC.

Referências Bibliográficas

- [1] ABB Power T&D Company Inc., “Electrical transmission and distribution reference book”, Raleigh, North Carolina, USA. Oct. 1997.
- [2] Abdel-Salam, T. S.; Chikhani, A. Y.; Hackam, R. “A new technique for loss reduction using compensating capacitors applied to distribution systems with varying load condition”, *IEEE Transactions Power Delivery*, Vol. 9, No. 2, pp. 819-827, 1994.
- [3] ANEEL. “Resolução No. 505 de 26 de novembro de 2001”, Estabelece de forma atualizada e consolidada, as disposições relativas à conformidade dos níveis de tensão de energia elétrica em regime permanente. Republicado no D.O de 02.08.2004, seção 1, p. 73, v. 141, n. 147.
- [4] Argáez, M.; Tapia, R. A. “On the global convergence of a modified augmented Lagrangian line search interior-point Newton method for nonlinear programming”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 114, No. 1, pp. 1-25, July 2002.
- [5] Baghzouz, Y. “Effects of nonlinear loads on optimal capacitor placement in radial feeders”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 6, No. 1, pp. 245-251, Jan. 1991.
- [6] Baran, M. E.; Wu, F. F. “Optimal capacitor placement on radial distribution systems”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 4, No. 1, pp. 725-733, Jan. 1989.
- [7] Baran, M. E.; Wu, F. F. “Optimal sizing of capacitors placed on radial distribution systems”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 4, no. 1, pp. 735-743, Jan. 1989.
- [8] Baran, M. E.; Wu, F. F. “Network reconfiguration in distribution systems for loss reduction and load balancing”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 4, No. 2, pp 1401-1407, April 1989.
- [9] Beasley, J. E. “Advances in linear and integer programming”, *Oxford Science Publications*, Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [10] Benson, H. Y.; Shanno, D. F.; Vanderbei, R. J. “Interior-Point methods for nonconvex nonlinear programming: jamming and comparative numerical testing”, *Operations Research and Financial Engineering*, Disponível em http://www.princeton.edu/~rldb/techreps_pdf.html. Acesso em: 10 set. 2005.
- [11] Carlisle, J. C.; El-Keib, A. A.; Boyd, D.; Nolan, K. “A review of capacitor placement techniques on distribution feeders”, *Proceedings of the Twenty-Ninth Southeastern Symposium on System Theory*, 1997, pp. 359-365, 9-11, March 1997.

- [12] Carpenter, T. J.; Lustig, I. J.; Mulvey, J. M.; Shanno, D. F. "Higher-order predictor-corrector interior point methods with applications to quadratic objectives", *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 3, pp. 696-725, 1993.
- [13] Chang, N. E. "Generalized equations on loss reduction with shunt capacitors", *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS-91, (5), pp. 2189-2195, Sept./Oct. 1972.
- [14] Chiang, H. D.; Wang, J. C.; Cockings, O.; Shin, H. D. "Optimal capacitor placements in distribution systems: Part I: a new formulation and the overall problem", *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 5, No. 2, pp. 634-642, 1990.
- [15] Chiang, H. D.; Wang, J. C.; Cockings, O.; Shin, H. D. "Optimal capacitor placements in distribution systems: Part II: solution algorithms and numerical results", *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 5, No. 2, pp. 643-649, 1990.
- [16] Chiang, H. D.; Wang, J. C.; Darling, G. "Optimal capacitor placement, replacement and control in large-scale unbalanced distribution systems: system modeling and a new formulation", *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 10, No. 1, pp. 356-362, 1995.
- [17] Chiang, H. D.; Wang, J. C.; Darling, G. "Optimal capacitor placement, replacement and control in large-scale unbalanced distribution systems: systems solution algorithms and numerical studies", *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 10, No. 1, pp. 363-369, 1995.
- [18] Chis, M.; Salama, M. M. A.; Jayaram, S. "Capacitor placement in distribution systems using heuristic search strategies", *IEE Proceedings Generation, Transmission and Distribution*, Vol. 144, No. 2, pp. 225-230, 1997.
- [19] Civanlar, S.; Grainger, J. J.; Yin, H.; Lee, S. H. "Distribution feeder reconfiguration for loss reduction", *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 3, No. 3, pp. 1217-1223, 1988.
- [20] Das, D.; Nagi, H. S.; Kothari, D. P. "Novel method for solving radial distribution networks", *IEE Proc.-Gener. Transm. Distrib.*, Vol. 141, No. 4, pp. 291-298, July 1994
- [21] Delfanti, M.; Granelli, G. P.; Marannino, P.; Montagna, M. "Optimal capacitor placement using deterministic and genetic algorithms", *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 15, No. 3, pp. 1041-1046, August 2000.
- [22] Gallego, R. A.; Monticelli, A. J.; Romero, R. "Optimal capacitor placement in radial distribution networks", *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 16, No. 4, pp. 630-637, Nov. 2001.
- [23] Gonzaga, C. C. "Path following methods for linear programming", *SIAM Review*, Vol. 34, pp. 167-227, 1992.

- [24] Grainger, J. J.; Lee, S. H. “Capacity release by shunt capacitor placement on distribution feeders: a new voltage-dependent model”, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-101, No. 15, pp. 1236-1244, May. 1982.
- [25] Grainger, J. J.; Civanlar, S.; Clinard, K. N.; Gale, L. J. “Discrete-Tap control scheme for capacitive compensation of distribution feeders”, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS-103, No. 8, pp. 2089-2107, Aug. 1984.
- [26] Grainger, J. J.; Civanlar, S.; Clinard, K. N.; Gale, L. J. “Optimal voltage dependent continuous-time control of reactive power on primary feeder”, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS-103, No. 9, pp. 2714-2722, Sept. 1984.
- [27] Granville, S. “Optimal reactive dispatch through interior point methods”, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 9, No. 1, pp. 136-146, Feb. 1996.
- [28] Granville, S.; Mello, J. C. O.; Mello, A. C. G. “Application of interior point methods to power flow unsolvability”, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 11, No. 2, pp. 1096-1103, May. 1996.
- [29] Griva, I.; Shanno, D. F.; Vanderbei, R. J. “Convergence analysis of primal-dual interior-point method for nonlinear programming”, Disponível em http://www.princeton.edu/~rvdb/techreps_pdf.html. Acesso em: 10 set. 2005.
- [30] Guo, R.; Han, Z.; Wang, Q. “Preventive/corrective control for voltage stability using Predictor-Corrector Interior Point Method”, *International Conference on Power System Technology, 1998. Proceedings. POWERCON '98. 1998*, Vol. 2, pp. 1513-1517, Beijing, China 1998.
- [31] Huang, Y. C.; Yang, H. T.; Huang, C. L. “Solution to capacitor placement problem in radial distribution system using tabu search approach”, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 11, No. 4, pp. 1868-1873, Nov. 1996.
- [32] Irisarri, G. D.; Wang, X.; Tong, J.; Mokhtari, S. “Maximum loadability of power systems using interior point method nonlinear optimization”, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 12, No. 1, pp. 162-172, Feb. 1997.
- [33] IEEE Standard 1036-1992, “IEEE guide for application of shunt power capacitors”, *Transmission and Distribution Committee of the IEEE Power Engineering Society*, USA, Feb. 1993.
- [34] Karmarkar, N. “A new polynomial-time algorithm for linear programming”, *Combinatorica*, Vol. 4, pp. 373-395, 1984
- [35] Kundur, P. “Power System Stability and Control”, New York: McGraw-Hill,inc., 1994.
- [36] Luo, G. X.; Semlyen, A. “Efficient load flow for large weakly meshed networks”, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 5, No. 4, pp. 1309-1316, Nov. 1990.
- [37] Luenberger, D. G. “Linear and Nonlinear Programming”, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.

- [38] Rider, M. J.; Paucar, V. L.; Garcia, A. V.; Bedriñana, M. F. “A higher order interior point method to minimize active power loss in electric energy systems”, *Power Engineering, 2003 Large Engineering Systems Conference on Power Engineering* , pp. 189-193, May. 2003.
- [39] Medina, J.; Quintana, V. H.; Conejo, A. J.; Thoden, F. P. “A comparison of interior-point codes for medium-term hydro-thermal coordination”, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 13, No. 3, pp. 836-843, Aug. 1998.
- [40] Mehrotra, S. “On the implementation of a primal-dual interior point method”, *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 2, pp. 575-601, 1992.
- [41] Mekhamer, S. F.; El-Hawary, M. E.; Moustafa, M. A; Mansour, M. M.; Soliman, S. A. “New heuristic strategies for reactive power compensation of radial distribution feeders”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 17, No. 4, pp. 1128-1135, 2002.
- [42] Mori, H.; Ogita, Y. “Capacitor placement using parallel tabu search in distribution systems”, *IEEE SMC 99 Conference Proceedings, 1999 International Conference on systems, Man, and Cybernetics*, pp. 521-526, Oct. 1999.
- [43] Paige, C. C.; Saunders, M. A. “Solution of sparse indefinite systems of linear equations” *SIAM J. Numer. Anal.* Vol. 12, No. 4, pp. 617-629, Sep. 1975.
- [44] Quintana, V. H.; Torres, G. L. Medina-Palomo, J. “Interior-point methods and their applications to power systems: A classification of publications and software codes”, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 15, No. 1, pp. 170-176, Feb. 2000.
- [45] Romero, R.; Rocha, C.; Mantovani, M.; Mantovani, J. R. S. “ Analysis of heuristic algorithms for the transportation model in static and multistage planning in network expansion system”, *IEE Proc.-Gener. Transm. Distrib.*, Vol. 150, No. 5, pp. 521-526, September 2003.
- [46] Romero, R.; Gallego, R.A. “Algoritmo genético especializado para o problema de alocação ótima de bancos de capacitores em sistemas de energia de distribuição de energia elétrica”, *XXXII SBPO -Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Viçosa, pp. 835-847, 2000.
- [47] Salama, H. N. Ng. M. M. A.; Chikhani, A. Y. “Classification of capacitor allocation techniques,” *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 15, No. 1. pp. 378-392, Jan. 2000.
- [48] Shanno, D. F. Vanderbei, R. J. “Interior-point methods for nonconvex nonlinear programming: orderings and higher-order methods”, *Math programming*, 87(2), pp. 303-316, 2000.
- [49] Shirmohammadi, D.; Hong, H. W.; Semlyen, A.; Luo, G. X. “ A compensation-based power flow method for weakly meshed distribution and transmission networks”, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 3, No. 2, pp. 753-762, May 1998.

- [50] Sundhararajan, S.; Pahwa, A. "Optimal selection of capacitors for radial distribution systems using a genetic algorithm ", *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 9, No. 3, pp. 1499-1507, 1994.
- [51] Taylor, T.; Lubkeman, D. "Implementation of heuristic search strategies for distribution feeder reconfiguration", *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 5, No. 1, pp. 239-246, 1990.
- [52] Torres, G. L.; Quintana, V. H. "An interior-point method for non-linear optimal power flow using voltage rectangular coordinates", *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 13, No. 4, pp. 1211-1218, Nov. 1998.
- [53] Torres, G. L.; Quintana, V. H. "On a nonlinear multiple-centrality- corrections interior-point method for optimal power flow," *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 16, No. 2, pp. 222-228, May 2001.
- [54] Vanderbei, R. J. " An interior-point algorithm for nonconvex nonlinear programming", *Computational Optimization and Applications*, Kluwer Academic Publisher, Vol. 13, pp. 231-252, August 1999.
- [55] Wang, X.; Ejebe, G. C.; Tong, J.; Waight, J. G. "Preventive/corrective control for voltage stability using direct interior point method", *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 13, No. 3, pp. 878-883, Aug. 1998.
- [56] Wei, H.; Sasaki, H.; Kubokawa, J.; Yohoyama, R. "An interior point method for power systems weighted nonlinear L1 norm static state estimation", *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 13, No. 2, pp. 617-623, May 1998.
- [57] Yan, X.; Quintana, V. H. "An efficient predictor - corrector interior point algorithm for security-constrained economic dispatch", *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 12, No. 2, pp. 803-810, May 1997.
- [58] Zeng, R.; Pan, X.; He, J.; Sheng, X. "Reconfiguration and capacitor placement for loss reduction of distribution system", *TENCON '02. Proceedings. 2002 IEEE Region 10 Conference on Computers, Communications, Control and Power Engineering*, Vol. 3, pp. 1945-1949, 28-31 Oct. 2002.

Apêndice A

Formulação usada no PAOBC

Para implementar o algoritmo de método de pontos interiores precisa-se montar a estrutura dos vetores e matrizes indicadas no algoritmo (3.4.9). Assim apresenta-se as estruturas dos vetores e matrizes para resolver o problema de alocação ótima de bancos de capacitores, primeiro, do problema base e logo para o caso geral de alocação de bancos fixos, chaveados e mistos. É usado um sistema de 9 barras, sendo ele, parte do sistema de 34 barras usado nos testes. Este sistema foi tomado parcialmente com fins didáticos.

A matriz *camadas* que contém a numeração das linhas usada no banco de dados do sistema elétrico é mostrado a seguir:

$$camadas = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 & 12 \\ 4 & 13 \\ 5 & 14 \end{bmatrix},$$

As matrizes de barras de recepção, Br , e de envio, Be , são compostas pela numeração de barras usada no banco de dados do sistema elétrico.

$$Br = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 & 13 \\ 5 & 14 \\ 6 & 15 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Be = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 13 \\ 5 & 14 \end{bmatrix}$$

A.1 Formulação usada no PAOBC do problema base

A.1.1 Matriz Jacobiana das restrições de igualdade

O vetor *posbe* contém as barras de envio seguindo a ordem em que aparecem na matriz Be .

$$posbe = [1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 4 \ 13 \ 5 \ 14];$$

As barras de recepção estão contidas no vetor $posbr$ seguindo a ordem em que aparecem na matriz Br .

$$posbr = [2 \ 3 \ 4 \ 13 \ 5 \ 14 \ 6 \ 15];$$

O vetor $posln$ contém as linhas seguindo a ordem em que aparecem na matriz $camadas$.

$$posln = [1 \ 2 \ 3 \ 12 \ 4 \ 13 \ 5 \ 14];$$

O vetor $possh$ contém as barras candidatas a alocar capacitores seguindo a ordem em que aparecem na matriz Br .

$$possh = [3 \ 13 \ 14 \ 15].$$

As equações de fluxo de carga estão contidas no vetor B e são arranjadas seguindo a numeração em que aparecem no vetor $posln$.

$$B^T = [b(1) \ b(2) \ \dots \ b(23) \ b(24)]$$

Para melhor representação o vetor B pode ser dividido em três partes da seguinte forma:

$B_P^T = [b(1) \ b(2) \ \dots \ b(8)]$, que corresponde às equações de balanço de potência ativa, da forma mostrada em (5.6).

$B_Q^T = [b(9) \ b(10) \ \dots \ b(16)]$, que corresponde às equações de balanço de potência reativa, da forma mostrada em (5.6).

$B_V^T = [b(17) \ b(18) \ \dots \ b(24)]$, que corresponde às equações de balanço de tensões, da forma mostrada em (5.6).

Assim por exemplo, $b(2)$ corresponde à equação de balanço de potências ativas na linha 2, $b(23)$ corresponde à equação de balanço de tensões na linha 5.

Dessa forma o vetor de restrições de igualdade, B , é dado por:

$$B^T = [B_P^T \ B_Q^T \ B_V^T]$$

A matriz Jacobiana do *problema base* tem a seguinte estrutura:

$$\frac{\partial B}{\partial x} = J_B = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline Jb_A & Jb_B & Jb_C & \\ \hline Jb_D & Jb_E & Jb_F & Jb_Q \\ \hline Jb_G & Jb_H & Jb_I & \\ \hline \end{array} \quad (A.1)$$

A primeira coluna desta matriz corresponde à derivada do vetor B (vetor que contém as restrições de igualdade ou fluxo de carga) com relação ao quadrado da magnitude de tensão seguindo a ordem em que as barras aparecem no vetor $posbr$.

$$\begin{bmatrix} Jb_A \\ Jb_D \\ Jb_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_P}{\partial V_i^2} \\ \frac{\partial B_Q}{\partial V_i^2} \\ \frac{\partial B_V}{\partial V_i^2} \end{bmatrix}, \text{ para } i \in posbr$$

A segunda coluna desta matriz corresponde à derivada do vetor B com relação ao fluxo de potência ativa seguindo a ordem em que as linhas aparecem no vetor $posln$.

$$\begin{bmatrix} Jb_B \\ Jb_E \\ Jb_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_P}{\partial P_j} \\ \frac{\partial B_Q}{\partial P_j} \\ \frac{\partial B_V}{\partial P_j} \end{bmatrix}, \text{ para } j \in posln$$

A terceira coluna desta matriz corresponde à derivada do vetor B com relação ao fluxo de potência reativa seguindo a ordem em que as linhas aparecem no vetor $posln$.

$$\begin{bmatrix} Jb_C \\ Jb_F \\ Jb_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_P}{\partial Q_j} \\ \frac{\partial B_Q}{\partial Q_j} \\ \frac{\partial B_V}{\partial Q_j} \end{bmatrix}, \text{ para } j \in posln$$

A quarta coluna desta matriz corresponde à derivada do vetor B com relação ao vetor de controle, u , seguindo a ordem em que as linhas aparecem no vetor $posln$.

$$\begin{bmatrix} Jb_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_P}{\partial u_j} \\ \frac{\partial B_Q}{\partial u_j} \\ \frac{\partial B_V}{\partial u_j} \end{bmatrix}, \text{ para } j \in possh$$

As três primeiras colunas da matriz Jacobiana foram derivados com relação ao vetor de variáveis básicas, $xb = [V^T \ P^T \ Q^T]$, mostrado no capítulo 5.1.1.

As sub-matrizes Jacobianas foram obtidas seguindo os passos indicados acima:

$$Jb_A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline posbr & 2 & 3 & 4 & 13 & 5 & 14 & 6 & 15 \\ \hline b(1) & 0 & & & & & & & \\ \hline b(2) & A & & & & & & & \\ \hline b(3) & 0 & A & & & & & & \\ \hline b(4) & 0 & A & & & & & & \\ \hline b(5) & 0 & 0 & A & & & & & \\ \hline b(6) & 0 & 0 & 0 & A & & & & \\ \hline b(7) & 0 & 0 & 0 & 0 & A & & & \\ \hline b(8) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ \hline \end{array}, \quad Jb_D = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline posbr & 2 & 3 & 4 & 13 & 5 & 14 & 6 & 15 \\ \hline b(9) & 0 & & & & & & & \\ \hline b(10) & D & & & & & & & \\ \hline b(11) & 0 & D & & & & & & \\ \hline b(12) & 0 & D & & & & & & \\ \hline b(13) & 0 & 0 & D & & & & & \\ \hline b(14) & 0 & 0 & 0 & D & & & & \\ \hline b(15) & 0 & 0 & 0 & 0 & D & & & \\ \hline b(16) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D & 0 & 0 \\ \hline \end{array},$$

$$Jb_G = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline posbr & 2 & 3 & 4 & 13 & 5 & 14 & 6 & 15 \\ \hline b(17) & -1 & & & & & & & \\ \hline b(18) & G & -1 & & & & & & \\ \hline b(19) & 0 & G & -1 & & & & & \\ \hline b(20) & 0 & G & 0 & -1 & & & & \\ \hline b(21) & 0 & 0 & G & 0 & -1 & & & \\ \hline b(22) & 0 & 0 & 0 & G & 0 & -1 & & \\ \hline b(23) & 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 & -1 & \\ \hline b(24) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 & -1 \\ \hline \end{array}$$

sendo os componentes destas sub-matrizes:

$$\begin{aligned}
A_{j,i} &= r_j \frac{P_j^2 + Q_j^2}{V_i^4} \\
D_{j,i} &= x_j \frac{P_j^2 + Q_j^2}{V_i^4} \\
G_{j,i} &= 1 - (r_j^2 + x_j^2) \frac{P_j^2 + Q_j^2}{V_i^4}
\end{aligned} \tag{A.2}$$

em que, $j \in \text{poln}$ e $i \in \text{posbr}$

As outras sub-matrizes podem ser determinadas pelo mesmo método e mostram-se a seguir:

$$Jb_B = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{posln} & 1 & 2 & 3 & 12 & 4 & 13 & 5 & 14 \\ \hline b(1) & B & -1 & & & & & & \\ \hline b(2) & 0 & B & -1 & -1 & & & & \\ \hline b(3) & 0 & 0 & B & 0 & -1 & & & \\ \hline b(4) & 0 & 0 & 0 & B & 0 & -1 & & \\ \hline b(5) & 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 & -1 & \\ \hline b(6) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 & -1 \\ \hline b(7) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & \\ \hline b(8) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B \\ \hline \end{array}, \quad Jb_E = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{posln} & 1 & 2 & 3 & 12 & 4 & 13 & 5 & 14 \\ \hline b(9) & E & & & & & & & \\ \hline b(10) & 0 & E & & & & & & \\ \hline b(11) & 0 & 0 & E & & & & & \\ \hline b(12) & 0 & 0 & 0 & E & & & & \\ \hline b(13) & 0 & 0 & 0 & 0 & E & & & \\ \hline b(14) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & & \\ \hline b(15) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & \\ \hline b(16) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \\ \hline \end{array}$$

$$Jb_H = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{posln} & 1 & 2 & 3 & 12 & 4 & 13 & 5 & 14 \\ \hline b(17) & H & & & & & & & \\ \hline b(18) & 0 & H & & & & & & \\ \hline b(19) & 0 & 0 & H & & & & & \\ \hline b(20) & 0 & 0 & 0 & H & & & & \\ \hline b(21) & 0 & 0 & 0 & 0 & H & & & \\ \hline b(22) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H & & \\ \hline b(23) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H & \\ \hline b(24) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H \\ \hline \end{array}$$

sendo,

$$\begin{aligned}
B_{j,i} &= 1 - 2r_j \frac{P_j}{V_i^2} \\
E_{j,i} &= -2x_j \frac{P_j}{V_i^2} \\
H_{j,i} &= -2r_j + 2(r_j^2 + x_j^2) \frac{P_j}{V_i^2}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

em que, $j \in \text{poln}$ e $i \in \text{posbe}$

$$Jb_C = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{posln} & 1 & 2 & 3 & 12 & 4 & 13 & 5 & 14 \\ \hline b(1) & C & & & & & & & \\ \hline b(2) & 0 & C & & & & & & \\ \hline b(3) & 0 & 0 & C & & & & & \\ \hline b(4) & 0 & 0 & 0 & C & & & & \\ \hline b(5) & 0 & 0 & 0 & 0 & C & & & \\ \hline b(6) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & & \\ \hline b(7) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & \\ \hline b(8) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C \\ \hline \end{array}, \quad Jb_F = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{posln} & 1 & 2 & 3 & 12 & 4 & 13 & 5 & 14 \\ \hline b(9) & F & -1 & & & & & & \\ \hline b(10) & 0 & F & -1 & -1 & & & & \\ \hline b(11) & 0 & 0 & F & 0 & -1 & & & \\ \hline b(12) & 0 & 0 & 0 & F & 0 & -1 & & \\ \hline b(13) & 0 & 0 & 0 & 0 & F & 0 & -1 & \\ \hline b(14) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F & 0 & -1 \\ \hline b(15) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F & \\ \hline b(16) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F \\ \hline \end{array}$$

$$Jb_I = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{posln} & 1 & 2 & 3 & 12 & 4 & 13 & 5 & 14 \\ \hline b(17) & I & & & & & & & \\ \hline b(18) & 0 & I & & & & & & \\ \hline b(19) & 0 & 0 & I & & & & & \\ \hline b(20) & 0 & 0 & 0 & I & & & & \\ \hline b(21) & 0 & 0 & 0 & 0 & I & & & \\ \hline b(22) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & & \\ \hline b(23) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & \\ \hline b(24) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ \hline \end{array}$$

sendo,

$$\begin{aligned}
C_{j,i} &= -2r_j \frac{Q_j}{V_i^2} \\
F_{j,i} &= 1 - 2x_j \frac{Q_j}{V_i^2} \\
I_{j,i} &= -2x_j + 2(r_j^2 + x_j^2) \frac{Q_j}{V_i^2}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

em que, $j \in poln$, $i \in posbe$

$$Jb_Q =$$

<i>possh</i>	3	13	14	15
$b(9)$				
$b(10)$	1			
$b(11)$	0			
$b(12)$	0	1		
$b(13)$	0	0		
$b(14)$	0	0	1	
$b(15)$	0	0	0	
$b(16)$	0	0	0	1

A.1.2 Vetor gradiente da função objetivo

Supor que temos um sistema com somente uma linha j com um capacitor alocado em sua barra de recepção ($j + 1$). A função objetivo para este sistema estará composto por duas parcelas. A primeira representa a perda de potência ativa nesta linha j e está dada pela seguinte fórmula:

$$p(j) = r_j \frac{P_j^2 + Q_j^2}{V_j^2},$$

a segunda parcela representa os custos do capacitor alocado na barra ($j + 1$) e está dado por $r_c u_{(j+1)}$.

Assim, a gradiente da função objetivo também terá duas parcelas:

$$(1) \nabla p(j) = \frac{\partial p(j)}{\partial xb}$$

para as perdas de potência, e (2) r_c para a função custo do capacitor.

em que, xb representa as variáveis básicas do problema.

Para um sistema de nr linhas e nc barras candidatas a alocar capacitores temos a seguinte função objetivo :

$$f(x) = k_e T \sum_{j=0}^{nr} p(j) + r_c \sum_{k=0}^{nc} u_k^0$$

Então, o procedimento para determinar o vetor gradiente é o mesmo que o utilizado para calcular a primeira linha da matriz Jacobiana em (A.1), com a diferença, que o vetor B_P , agora chamado G_{per} , está formado somente pelas parcelas das perdas de potência do vetor B_P mas multiplicado por (-1) (problema de minimização). A soma dos elementos por colunas é aplicado para finalmente encontrar a gradiente da função objetivo.

Por exemplo, as perdas de potência ativa para o sistema de 9 barras, são indicadas como segue:

$$Gper^T = \left[p(1) \ p(2) \ p(3) \ p(12) \ p(4) \ p(13) \ p(5) \ p(14) \right],$$

por exemplo $p(12)$ representa as perdas na linha 12 e também a somatória dos elementos de $Gper$ representa o total das perdas do sistema.

Define-se o gradiente da função objetivo do *problema base* como:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \nabla fAp \\ \nabla fBp \\ \nabla fCp \\ r_c u \end{bmatrix} \quad (A.5)$$

em que, $\nabla f(x) \in R^{nx}$. u é um vetor de coordenadas 1, de dimensão igual ao número de barras candidatas a alocar capacitores.

Então, para obter os três primeiros elementos de $\nabla f(x)$ segue-se a seguinte proposta que consiste em encontrar a matriz Jacobiana de $Gper$:

- Para ∇fAp :

$$\frac{\partial Gper}{\partial V^2} =$$

<i>posbr</i>	2	3	4	13	5	14	6	15
$p(1)$	0							
$p(2)$	$Ap(2, 2)$							
$p(3)$	0	$Ap(3, 3)$						
$p(12)$	0	$Ap(12, 3)$						
$p(4)$	0	0	$Ap(4, 4)$					
$p(13)$	0	0	0	$Ap(13, 13)$				
$p(5)$	0	0	0	0	$Ap(5, 5)$			
$p(14)$	0	0	0	0	0	$Ap(14, 14)$	0	0

Somar as colunas desta matriz e obter o seguinte vetor:

$$\nabla fAp = \left[Ap(2, 2) \quad Ap(3, 3) + Ap(12, 3) \quad Ap(4, 4) \quad Ap(13, 13) \quad Ap(5, 5) \quad Ap(14, 14) \quad 0 \quad 0 \right]^T$$

sendo,

$$Ap(j, i) = \frac{\partial p(j)}{\partial V_i^2} = -r_j \frac{P_j^2 + Q_j^2}{V_i^4}, \quad (A.6)$$

em que, $j \in poln$ e $i \in posbr$.

- Para ∇fBp :

$$\frac{\partial Gper}{\partial P} =$$

<i>posln</i>	1	2	3	12	4	13	5	14
$p(1)$	$Bp(1)$							
$p(2)$	0	$Bp(2)$						
$p(3)$	0	0	$Bp(3)$					
$p(12)$	0	0	0	$Bp(12)$				
$p(4)$	0	0	0	0	$Bp(4)$			
$p(13)$	0	0	0	0	0	$Bp(13)$		
$p(5)$	0	0	0	0	0	0	$Bp(5)$	
$p(14)$	0	0	0	0	0	0	0	$Bp(14)$

Somando as colunas desta matriz obtemos o seguinte vetor:

$$\nabla fBp = \left[Bp(1) \quad Bp(2) \quad Bp(3) \quad Bp(12) \quad Bp(4) \quad Bp(13) \quad Bp(5) \quad Bp(14) \right]^T$$

em que,

$$Bp(j) = \frac{\partial p(j)}{\partial P_j} = 2r_j \frac{P_j}{V_i^2} \quad (\text{A.7})$$

em que $j \in \text{poln}$ e $i \in \text{posbe}$.

- Para $\nabla f C p$:

$$\frac{\partial G_{per}}{\partial Q} =$$

<i>posln</i>	1	2	3	12	4	13	5	14
<i>p(1)</i>	$Cp(1)$							
<i>p(2)</i>	0	$Cp(2)$						
<i>p(3)</i>	0	0	$Cp(3)$					
<i>p(12)</i>	0	0	0	$Cp(12)$				
<i>p(4)</i>	0	0	0	0	$Cp(4)$			
<i>p(13)</i>	0	0	0	0	0	$Cp(13)$		
<i>p(5)</i>	0	0	0	0	0	0	$Cp(5)$	
<i>p(14)</i>	0	0	0	0	0	0	0	$Cp(14)$

Somando as colunas desta matriz obtemos o seguinte vetor:

$$\nabla f C p = [Cp(1) \quad Cp(2) \quad Cp(3) \quad Cp(12) \quad Cp(4) \quad Cp(13) \quad Cp(5) \quad Cp(14)]^T$$

sendo,

$$Cp(j) = \frac{\partial p(j)}{\partial Q_j} = 2r_j \frac{Q_j}{V_i^2} \quad (\text{A.8})$$

em que, $j \in \text{polne}$ e $i \in \text{posbe}$.

Em geral esta representação pode ser feita para qualquer sistema radial.

A.1.3 Matriz Hessiana do problema base

Da equação (3.63):

$$H = Hf(x^k) - \sum_{j=1}^{ng} y_j Hb_j(x^k) + \sum_{j=1}^{nh} z_{2j} Hh_j(x^k) \quad (\text{A.9})$$

em que, $H \in R^{nx \times nx}$.

Observa-se que a matriz Hessiana do problema está formada pela combinação linear da matriz Hessiana da função objetivo e as matrizes Hessianas das restrições do problema. No PAOBC o terceiro termo é zero.

Matriz Hessiana da função objetivo

Observa-se também que Hf é obtido derivando $\nabla f(x)$ com relação ao vetor x , e porém aplica-se o mesmo procedimento empregado para encontrar a Jacobiana de B .

Esta relação representa o segundo termo da equação (A.10), isto é, a combinação linear das matrizes Hessianas das nb restrições. y_j são os multiplicadores de Lagrange para cada equação contida no vetor B .

Observa-se que as estruturas de (A.11) e (A.10) são idênticas. Além disso as sub-matrizes de ambas equações também possuem a mesma estrutura e a única diferença está no valor dos elementos destas sub-matrizes. A seguir mostra-se a forma de obter a matriz simétrica (A.11).

Derivando a primeira linha de (A.1) com relação de x , temos que:

$$Hb_{ABC} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Jb_A}{\partial V^2} & \frac{\partial Jb_A}{\partial P} & \frac{\partial Jb_A}{\partial Q} & \frac{\partial Jb_A}{\partial u} \\ \frac{\partial Jb_B}{\partial V^2} & \frac{\partial Jb_B}{\partial P} & \frac{\partial Jb_B}{\partial Q} & \frac{\partial Jb_B}{\partial u} \\ \frac{\partial Jb_C}{\partial V^2} & \frac{\partial Jb_C}{\partial P} & \frac{\partial Jb_C}{\partial Q} & \frac{\partial Jb_C}{\partial u} \\ \frac{\partial V^2}{0} & \frac{\partial P}{0} & \frac{\partial Q}{0} & \frac{\partial u}{0} \end{bmatrix}$$

em que, $\frac{\partial Jb_A}{\partial P} = \frac{\partial Jb_B}{\partial V^2}$, $\frac{\partial Jb_A}{\partial Q} = \frac{\partial Jb_C}{\partial V^2}$. $\frac{\partial Jb_B}{\partial Q} = \frac{\partial Jb_C}{\partial P} = 0$. Além disso a terceira coluna é zero.

Esta matriz pode ser simplificada em sua notação como segue:

$$Hb_{ABC} = \begin{bmatrix} A_{Vb} & B_{Vb} & C_{Vb} & 0 \\ B_{Vb} & B_{Pb} & 0 & 0 \\ C_{Vb} & 0 & B_{Pb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Das duas linhas restantes de (A.1) obtém-se as duas matrizes Hessianas restantes, Hb_{DEF} e Hb_{GHI} , ambas com a mesma estrutura e porém $H_B = Hb_{ABC} + Hb_{DEF} + Hb_{GHI}$, que é equivalente a (A.11) tem a mesma estrutura que (A.10).

Os elementos das sub-matrizes foram alocadas seguindo os critérios empregados para calcular a matriz Hessiana Hf . Entretanto apenas indica-se os elementos de cada sub-matriz:

Sub-matriz	A_{Vb}	B_{Vb}	C_{Vb}	B_{Pb}
Elementos	$-2r_j \frac{P_j^2 + Q_j^2}{V_i^6}$	$2r_j \frac{P_j}{V_i^4}$	$2r_j \frac{Q_j}{V_i^4}$	$-\frac{2r_j}{V_i^2}$
Sub-matriz	D_{Vb}	E_{Vb}	F_{Vb}	E_{Pb}
Elementos	$-2x_j \frac{P_j^2 + Q_j^2}{V_i^6}$	$2x_j \frac{P_j}{V_i^4}$	$2x_j \frac{Q_j}{V_i^4}$	$-\frac{2x_j}{V_i^2}$
Sub-matriz	G_{Vb}	H_{Vb}	I_{Vb}	H_{Pb}
Elementos	$2(r_j^2 + x_j^2) \frac{P_j^2 + Q_j^2}{V_i^6}$	$-2(r_j^2 + x_j^2) \frac{P_j}{V_i^4}$	$-2(r_j^2 + x_j^2) \frac{Q_j}{V_i^4}$	$\frac{2(r_j^2 + x_j^2)}{V_i^2}$

A.2 Formulação usada no problema relaxado do PAOBC

Para uma melhor ilustração das formulações assume-se que o número de níveis de carga ($nt + 1$) é igual a 3.

Matriz Jacobiana para o PAOBC relaxado com bancos fixos

Utiliza-se (A.1) para montar a matriz Jacobiana do problema para os três níveis de carga, como segue:

$$J_B = \begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|c} & \text{nível 1} & & & \text{nível 2} & & & \text{nível 3} & & \text{enlace} \\ \hline J^1 b_A & J^1 b_B & J^1 b_C & & & & & & & \\ J^1 b_D & J^1 b_E & J^1 b_F & & & & & & & J b_Q \\ J^1 b_G & J^1 b_H & J^1 b_I & & & & & & & \\ \hline & & & J^2 b_A & J^2 b_B & J^2 b_C & & & & \\ & & & J^2 b_D & J^2 b_E & J^2 b_F & & & & J b_Q \\ & & & J^2 b_G & J^2 b_H & J^2 b_I & & & & \\ \hline & & & & & & J^3 b_A & J^3 b_B & J^3 b_C & \\ & & & & & & J^3 b_D & J^3 b_E & J^3 b_F & J b_Q \\ & & & & & & J^3 b_G & J^3 b_H & J^3 b_I & \end{array} \quad (\text{A.12})$$

A coluna de acoplamento está composta com elementos 1s e 0s comuns aos três níveis de carga, sendo que esses elementos comuns representam bancos de capacitores fixos.

O super índice i em $J^i b_X$ representa o nível de carga em que a matriz é implementada.

Vetor gradiente para o PAOBC relaxado com bancos fixos

Da mesma forma que o caso da Jacobiana, o vetor gradiente é construído a partir de (A.5) mas, considerando ($nt + 1$) igual a 3.

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \nabla f^1 A p \\ \nabla f^1 B p \\ \nabla f^2 C p \\ \nabla f^2 A p \\ \nabla f^2 B p \\ \nabla f^2 C p \\ \nabla f^3 A p \\ \nabla f^3 B p \\ \nabla f^3 C p \\ r_{cf} u \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

em que, $\nabla f(x) \in R^{nx}$. u é um vetor de 1s de dimensão igual ao número de barras candidatas a alocar capacitores.

O super índice i em $\nabla f^i X p$ representa o nível de carga em que o vetor é implementado.

Matriz Hessiana para o PAOBC relaxado de bancos fixos

A estrutura desta matriz pode-se representar facilmente a partir de (A.11) como segue:

$$H_B = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} & \text{nível 1} & & & \text{nível 2} & & & \text{nível 3} & & \text{enlace} \\ \hline H_{Ab}^1 & H_{Bb}^{1T} & H_{Cb}^{1T} & & & & & & & 0 \\ \hline H_{Bb}^1 & H_{Bpb}^1 & 0 & & & & & & & 0 \\ \hline H_{Cb}^1 & 0 & H_{Cqb}^1 & & & & & & & 0 \\ \hline & & & H_{Ab}^2 & H_{Bb}^{2T} & H_{Cb}^{2T} & & & & 0 \\ \hline & & & H_{Bb}^2 & H_{Bpb}^2 & 0 & & & & 0 \\ \hline & & & H_{Cb}^2 & 0 & H_{Cqb}^2 & & & & 0 \\ \hline & & & & & & H_{Ab}^3 & H_{Bb}^{3T} & H_{Cb}^{3T} & 0 \\ \hline & & & & & & H_{Bb}^3 & H_{Bpb}^3 & 0 & 0 \\ \hline & & & & & & H_{Cb}^3 & 0 & H_{Cqb}^3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad (\text{A.14})$$

Matriz Jacobiana para o PAOBC relaxado com bancos chaveados

Utiliza-se (A.1) para montar a matriz Jacobiana do problema para os três níveis de carga, segundo como segue:

$$J_B = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} & \text{nível 1} & & & \text{nível 2} & & & \text{nível 3} & & \\ \hline J^1b_A & J^1b_B & J^1b_C & & & & & & & \\ \hline J^1b_D & J^1b_E & J^1b_F & Jb_Q & & & & & & \\ \hline J^1b_G & J^1b_H & J^1b_I & & & & & & & \\ \hline & & & & J^2b_A & J^2b_B & J^2b_C & & & \\ \hline & & & & J^2b_D & J^2b_E & J^2b_F & Jb_Q & & \\ \hline & & & & J^2b_G & J^2b_H & J^2b_I & & & \\ \hline & & & & & & & J^3b_A & J^3b_B & J^3b_C \\ \hline & & & & & & & J^3b_D & J^3b_E & J^3b_F & Jb_Q \\ \hline & & & & & & & J^3b_G & J^3b_H & J^3b_I & \end{array} \quad (\text{A.15})$$

Neste caso a coluna enlace é distribuída entre os três níveis de carga e representam os bancos chaveados e seus respectivos pontos de operação.

O super índice i em $J^i b_X$ representa o nível de carga em que a matriz é implementada.

Vetor gradiente para o PAOBC relaxado com bancos chaveados

Da mesma forma que no caso anterior é construído a partir de (A.5) considerando que $(nt + 1)$ é igual a 3.

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \nabla f^1 Ap \\ \nabla f^1 Bp \\ \nabla f^1 Cp \\ r_{cc}u \\ \nabla f^2 Ap \\ \nabla f^2 Bp \\ \nabla f^2 Cp \\ 0 \\ \nabla f^3 Ap \\ \nabla f^3 Bp \\ \nabla f^3 Cp \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

em que, $\nabla f(x) \in R^{nx}$. u é um vetor de 1s, de dimensão igual ao número de barras candidatas a alocar capacitores.

O super índice i em $\nabla f^i Xp$ representa o nível de carga em que o vetor é implementado.

Matriz Hessiana para o PAOBC relaxado com bancos chaveados

A estrutura desta matriz pode-se representar facilmente a partir de (A.11) como segue:

$$H_B = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} & \text{nível 1} & & & & \text{nível 2} & & & & \text{nível 3} & & \\ \hline H_{Ab}^1 & H_{Bb}^{1T} & H_{Cb}^{1T} & 0 & & & & & & & & 0 \\ \hline H_{Bb}^1 & H_{BPb}^1 & 0 & 0 & & & & & & & & 0 \\ \hline H_{Cb}^1 & 0 & H_{CQb}^1 & 0 & & & & & & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & 0 \\ \hline & & & & & H_{Ab}^2 & H_{Bb}^{2T} & H_{Cb}^{2T} & 0 & & & 0 \\ \hline & & & & & H_{Bb}^2 & H_{BPb}^2 & 0 & 0 & & & 0 \\ \hline & & & & & H_{Cb}^2 & 0 & H_{CQb}^2 & 0 & & & 0 \\ \hline & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & & & 0 \\ \hline & & & & & & & & & & H_{Ab}^3 & H_{Bb}^{3T} & H_{Cb}^{3T} & 0 \\ \hline & & & & & & & & & & H_{Bb}^3 & H_{BPb}^3 & 0 & 0 \\ \hline & & & & & & & & & & H_{Cb}^3 & 0 & H_{CQb}^3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad (\text{A.17})$$

A formulação usada no problema relaxado do PAOBC com bancos mistos é uma combinação das formulações do PAOBC com bancos fixos e a formulação do PAOBC com bancos chaveados, como exemplo mostra-se apenas a estrutura da matriz hessiana.

Matriz Hessiana para o PAOBC relaxado com bancos mistos

$$H_B =$$

	nível 1				nível 2				nível 3			
H_{Ab}^1	H_{Bb}^{1T}	H_{Cb}^{1T}	0								0	0
H_{Bb}^1	H_{BPb}^1	0	0								0	0
H_{Cb}^1	0	H_{CQb}^1	0								0	0
0	0	0	0								0	0
				H_{Ab}^2	H_{Bb}^{2T}	H_{Cb}^{2T}	0				0	0
				H_{Bb}^2	H_{BPb}^2	0	0				0	0
				H_{Cb}^2	0	H_{CQb}^2	0				0	0
				0	0	0	0				0	0
								H_{Ab}^3	H_{Bb}^{3T}	H_{Cb}^{3T}	0	0
								H_{Bb}^3	H_{BPb}^3	0	0	0
								H_{Cb}^3	0	H_{CQb}^3	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(A.18)

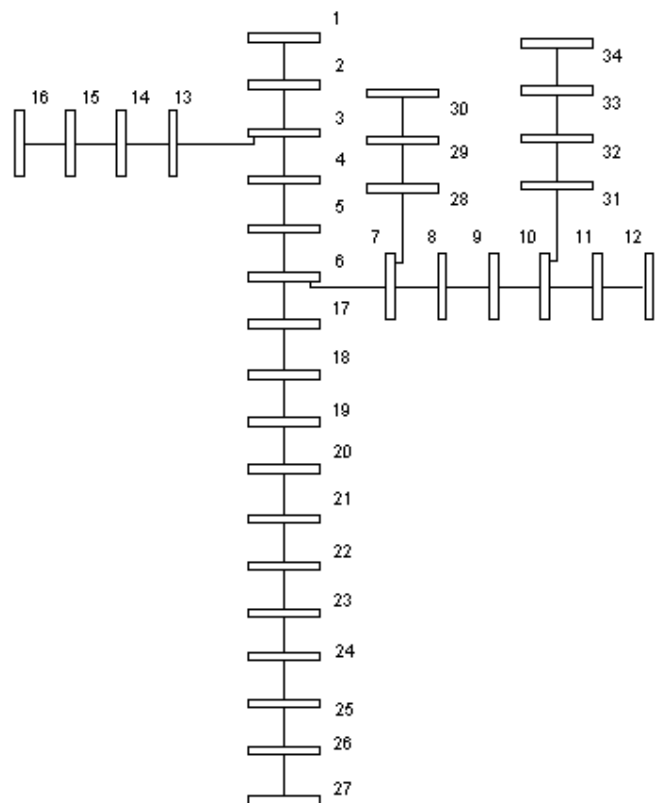
Nesta matriz foi acrescentado uma coluna e uma linha de zeros que corresponde às variáveis de controle bancos de capacitores fixos.

Apêndice B

Sistemas testados

B.0.1 Sistema de 33 Barras

Br	Be	Br	kW	kVAr	R(Ω)	X(Ω)
1	1	2	230,0	142,5	0,1170	0,0480
2	2	3	0,0	0,0	0,1073	0,0440
3	3	4	230,0	142,5	0,1645	0,0457
4	4	5	230,0	142,5	0,1495	0,0415
5	5	6	0,0	0,0	0,1495	0,0415
6	6	7	0,0	0,0	0,3144	0,0540
7	7	8	230,0	142,5	0,2096	0,0360
8	8	9	230,0	142,5	0,3144	0,0540
9	9	10	0,0	0,0	0,2096	0,0360
10	10	11	230,0	142,5	0,1310	0,0225
11	11	12	137,0	84,0	0,1048	0,0180
12	3	13	72,0	45,0	0,1572	0,0270
13	13	14	72,0	45,0	0,2096	0,0360
14	14	15	72,0	45,0	0,1048	0,0180
15	15	16	13,5	7,5	0,0524	0,0090
16	6	17	230,0	142,5	0,1794	0,0498
17	17	18	230,0	142,5	0,1645	0,0457
18	18	19	230,0	142,5	0,2079	0,0473
19	19	20	230,0	142,5	0,1890	0,0430
20	20	21	230,0	142,5	0,1890	0,0430
21	21	22	230,0	142,5	0,2620	0,0450
22	22	23	230,0	142,5	0,2620	0,0450
23	23	24	230,0	142,5	0,3144	0,0540
24	24	25	230,0	142,5	0,2096	0,0360
25	25	26	230,0	142,5	0,1310	0,0225
26	26	27	137,0	85,0	0,1048	0,0180
27	7	28	75,0	48,0	0,1572	0,0270
28	28	29	75,0	48,0	0,1572	0,0270
29	29	30	75,0	48,0	0,1572	0,0270
30	10	31	57,0	37,5	0,1572	0,0270
31	31	32	57,0	37,5	0,2096	0,0360
32	32	33	57,0	37,5	0,1572	0,0270
33	33	34	57,0	37,5	0,1048	0,0180



Potência ativa : 4693,50 kW,
 Potência reativa : 2923,00 kVAr,
 Tensão da subestação : 11,00 kV,
 Potência de base :10000,00 kVA,
 Tensão de base : 11,00 kV.

Figura B.1: Dados do sistema de 33 barras estudado

B.0.2 Sistema de 69 Barras

Br	Be	Br	kW	kVAr	R(Ω)	X(Ω)	Br	Be	Br	kW	kVAr	R(Ω)	X(Ω)
1	1	2	0,0	0,0	0,0005	0,0012	35	35	36	6,0	4,0	1,4740	0,4873
2	2	3	0,0	0,0	0,0005	0,0012	36	4	37	26,0	18,55	0,0044	0,0108
3	3	4	0,0	0,0	0,0001	0,0001	37	37	38	26,0	18,55	0,0640	0,1565
4	4	5	0,0	0,0	0,0015	0,0036	38	38	39	0,0	0,0	0,1053	0,1230
5	5	6	0,0	0,0	0,0251	0,0294	39	39	40	24,0	17,0	0,0304	0,0305
6	6	7	2,6	2,2	0,3660	0,1864	40	40	41	24,0	17,0	0,0018	0,0021
7	7	8	40,4	30,0	0,3811	0,1941	41	41	42	1,2	1,0	0,7283	0,8509
8	8	9	75,0	54,0	0,0922	0,0470	42	42	43	0,0	0,0	0,3100	0,3623
9	9	10	30,0	22,0	0,0493	0,0251	43	43	44	6,0	4,3	0,0410	0,0478
10	10	11	28,0	19,0	0,8190	0,2707	44	44	45	0,0	0,0	0,0092	0,0116
11	11	12	145,0	104,0	0,1872	0,0619	45	45	46	39,22	26,3	0,1089	0,1373
12	12	13	145,0	104,0	0,7114	0,2351	46	46	47	39,22	26,3	0,0009	0,0012
13	13	14	8,0	5,5	1,0300	0,3400	47	5	48	0,0	0,0	0,0034	0,0084
14	14	15	8,0	5,5	1,0440	0,3450	48	48	49	79,0	56,4	0,0851	0,2083
15	15	16	0,0	0,0	1,0580	0,3496	49	49	50	384,7	274,5	0,2898	0,7091
16	16	17	45,5	30,0	0,1966	0,0650	50	50	51	384,7	274,5	0,0822	0,2011
17	17	18	60,0	35,0	0,3744	0,1238	51	9	52	40,5	28,3	0,0928	0,0473
18	18	19	60,0	35,0	0,0047	0,0016	52	52	53	5,3	2,7	0,3319	0,1114
19	19	20	0,0	0,0	0,3276	0,1083	53	10	54	4,35	3,5	0,1740	0,0886
20	20	21	1,0	0,6	0,2106	0,0696	54	54	55	26,4	19,0	0,2030	0,1034
21	21	22	114,0	81,0	0,3416	0,1129	55	55	56	24,0	17,2	0,2842	0,1447
22	22	23	5,3	3,5	0,0140	0,0046	56	56	57	0,0	0,0	0,2813	0,1433
23	23	24	0,0	0,0	0,1591	0,0526	57	57	58	0,0	0,0	1,5900	0,5337
24	24	25	28,0	20,0	0,3463	0,1145	58	58	59	0,0	0,0	0,7837	0,2630
25	25	26	0,0	0,0	0,7488	0,2475	59	59	60	100,0	72,0	0,3042	0,1006
26	26	27	14,0	10,0	0,3089	0,1021	60	60	61	0,0	0,0	0,3861	0,1172
27	27	28	14,0	10,0	0,1732	0,0572	61	61	62	1244,0	888,0	0,5075	0,2585
28	3	29	26,0	18,6	0,0044	0,0108	62	62	63	32,0	23,0	0,0974	0,0496
29	29	30	26,0	18,6	0,0640	0,1565	63	63	64	0,0	0,0	0,1450	0,0738
30	30	31	0,0	0,0	0,3978	0,1351	64	64	65	227,0	162,0	0,7105	0,3619
31	31	32	0,0	0,0	0,0702	0,0232	65	65	66	59,0	42,0	1,0410	0,5302
32	32	33	0,0	0,0	0,3510	0,1160	66	12	67	18,0	13,0	0,2012	0,0611
33	33	34	14,0	10,0	0,8390	0,2816	67	67	68	18,0	13,0	0,0047	0,0014
34	34	35	19,5	14,0	1,7080	0,5646	68	13	69	28,0	20,0	0,7394	0,2444
							69	69	70	28,0	20,0	0,0047	0,0016

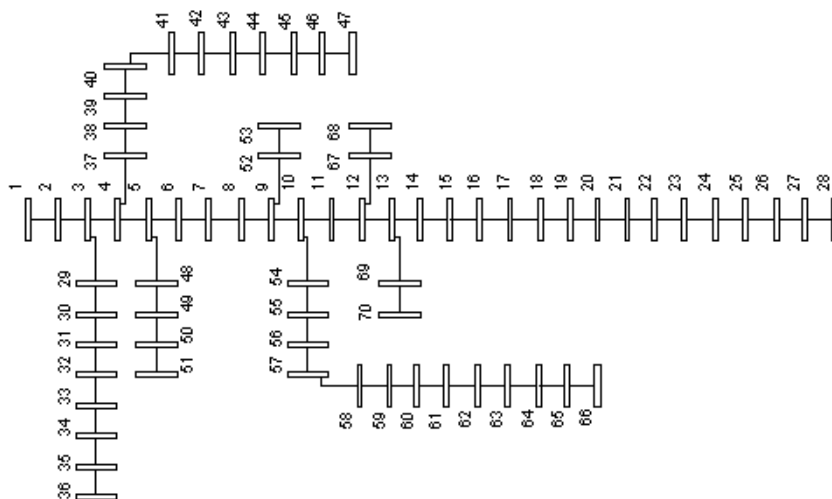


Figura B.2: Dados do sistema de 69 barras estudado

Potência ativa : 3803,89 kW, Potência reativa : 2694,60 kVAr, Tensão da subestação : 12,66 kV, Tensão de base : 12,66 kV, Potência de base :10000,00 kVA.



**,UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de Ilha Solteira
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Av. Brasil Centro, 56
15385-000 Ilha Solteira - SP
www.dee.feis.unesp.br**