



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Marcos Antonio de Souza Lourenço

***SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS
HIPERSÔNICOS SOBRE CORPOS ROMBUDOS
PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS***

Ilha Solteira, 07 de dezembro de 2007



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

***SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS
HIPERSÔNICOS SOBRE CORPOS ROMBUDOS
PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS***

Marcos Antonio de Souza Lourenço

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. João Batista Campos Silva

Co-orientador: Prof. Dr. Emanuel Rocha Woiski

Ilha Solteira, 07 de dezembro de 2007

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP - Ilha Solteira.

L892s

Lourenço, Marcos Antonio de Souza

Simulação numérica de escoamentos hipersônicos sobre corpos rombudos pelo método de elementos finitos / Marcos Antonio de Souza Lourenço. -- Ilha Solteira : [s.n.], 2007

106 f. : il. (algumas color.)

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Ciências Térmicas, 2007

Orientador: João Batista Campos Silva

Co-orientador: Emanuel Rocha Woiski

Bibliografia: p. 88-93

1. Programa de aplicação. 2. Escoamento. 3. Geração numérica de malhas (Análise numérica). 4. Interpretadores (Programas de computador). 5. Método dos elementos finitos - Programas de computador.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

**TÍTULO: Simulação Numérica de Escoamentos Hipersônicos sobre Corpos
Rombudos pelo Método de Elementos Finitos**

AUTOR: *MARCOS ANTONIO DE SOUZA LOURENÇO*

ORIENTADOR: Prof. Dr. JOÃO BATISTA CAMPOS SILVA

DATA DA REALIZAÇÃO: 07 DE DEZEMBRO DE 2007

Aprovada com parte das exigências para obtenção do Título de MESTRE em
ENGENHARIA MECÂNICA pela Comissão Examinadora:


Prof. Dr. JOÃO BATISTA CAMPOS SILVA

Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Prof. Dr. JOÃO BATISTA APARECIDO

Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Prof. Dr. PAULO GILBERTO DE PAULA TORO

Instituto de Estudos Avançados / Centro Técnico Aeroespacial

Dedicatória

Ao meu pai, Antonio Lourenço e à minha mãe Maria
Luzia de Souza.

Agradecimentos

A Deus, por colocar todos as pessoas citadas subsequentemente na minha vida. A todos os meus professores que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho, mas principalmente aos professores João B. Campos Silva e Emanuel R. Woiski pela atenção e dedicação despendida. Aos amigos, pelo crédito e a força sempre dados gratuitamente e que foram o combustível para a concretização deste trabalho, especialmente seu João e a dona Suely Toledo, e meu amigo Rafael Sene. Agradeço ainda à pós-graduação e à CAPES pelo apoio técnico e financeiro.

Epígrafe

Uma longa viagem começa com um único passo.

(Lao-Tsé)

Resumo

Este trabalho apresenta resultados da simulação numérica de escoamentos hipersônicos de fluidos, por meio de pySolver - um aplicativo computacional desenvolvido pelo autor. No aplicativo, as Equações de Euler foram discretizadas pelo método de elementos finitos de Galerkin (GFEM- Galerkin Finite Element Method) juntamente com a técnica CBS (Characteristic Based Split). O aplicativo pySolver, que foi construído baseado nas ferramentas de códigos fontes abertos Python, Blender e Visit, além da linguagem C, possui interface gráfica para o usuário, é multiplataforma e com orientação a objetos, além de contar com um framework especialmente projetado para a realização de todo o pré processamento, visando o modelamento geométrico bi ou tridimensional de problemas. O autor implementou um método para o refinamento de malha, modificando os programas abertos Triangle e TetGen, de tal forma a permitir o refinamento dinâmico e local de malhas até que determinadas tolerâncias sejam alcançadas nos resultados. Isto contribuiu para uma considerável robustez do aplicativo. Para verificação do aplicativo, foram simulados alguns casos-teste de escoamentos supersônicos e hipersônicos ao redor de corpo de diferentes configurações geométricas, principalmente aqueles encontrados na indústria aeronáutica e aeroespacial. Os dados obtidos são comparados com alguns resultados experimentais disponíveis na literatura, quando possível, e também com outros resultados numéricos obtidos da literatura.

Palavras-chave: Método de Elementos Finitos; Escoamentos compressíveis; Equações de Euler; linguagem Python; Blender; Visit; Triangle; TetGen; Malha não-estruturada; Ferramentas computacionais de código livre.

Abstract

This work presents some results for the numerical simulation of hypersonic fluid flows, utilizing pySolver – a software developed by the author. In this application, the Euler equations have been discretized by means of the Galerkin Finite Element Method (GFEM) using the CBS (Characteristic Based Split) scheme. pySolver, a multiplatform object-oriented software, built around the set of open source tools Python, Blender and Visit, besides C language, exhibits a proper graphical user interface and a framework specially developed to deal with data pre-processing and capable of geometrical modeling of either two or three-dimensional problems. The author has also implemented a scheme for the mesh refinement, by adapting the open-source softwares Triangle and TetGen, obtaining local and dynamic mesh refinement until reaching a determined tolerance in the results. That refinement scheme has contributed to considerable application robustness. In order to compare the software, some test cases composed of supersonic and hypersonic flows over different geometrical configuration bodies, mostly encountered in the aerospace and aeronautic industry data, have been simulated. The results compared very well with experimental data from the literature and, when possible, with other numerical results also obtained in the literature.

Keywords: Finite Element Method; Compressible Flows; Euler Equations; pySolve; Python; Blender; Visit; Triangle; TetGen; Unstructured Mesh; Open Source Computational Tools.

Lista de Figuras

Figura 1.1	Onda de choque ao redor de uma sonda espacial.	20
Figura 1.2	Simulação do escoamento hipersônico ao redor de uma sonda espacial entrando na atmosfera de Marte.	21
Figura 1.3	Escoamento hipersônico a Mach 6 ao redor de um corpo rombudo. .	23
Figura 2.1	Esquema da conservação da massa em um elemento infinitesimal no sistema tridimensional de coordenadas.	34
Figura 2.2	Fronteira computacional para prescrição das condições de contorno.	39
Figura 3.1	Característica linear.	44
Figura 3.2	Característica não-linear.	47
Figura 3.3	Elemento toroidal axissimétrico com área de seção transversal triangular.	53
Figura 4.4	Elementos de exemplo para o cálculo dos desvios de pressão, (a) um nó interno; e (b) um nó no contorno.	58
Figura 4.5	Malha para escoamento hipersônico com $M = 6$ ao redor de um cilindro infinito.	61
Figura 4.6	Malha para o problema de escoamento supersônico sobre uma rampa	

a $M = 3$	62
Figura 5.1 Discretização de domínios em elementos finitos, (a) Exemplo de tetragonalização ao redor de um Boeing 747; e (b) um exemplo simples de triangularização com refinamento no contorno.	64
Figura 5.2 Representação esquemática da estrutura do aplicativo.	66
Figura 6.1 Malha não-estruturada para o escoamento supersônico sobre rampa.	68
Figura 6.2 Distribuição de pressão sobre a rampa.	68
Figura 6.3 Distribuição de densidade sobre a rampa.	69
Figura 6.4 Distribuição do número de Mach sobre a rampa.	69
Figura 6.5 Comparação entre o valor de p/p_∞ deste trabalho com os resultados de Jameson e Mavriplis (1986) e de Frink et al. (1991), ao longo da superfície da cunha.	70
Figura 6.6 Resultados para o corpo rombudo. (a) Malha refinada para o problema; e (b) Distribuição de pressão ao redor de um corpo rombudo.	71
Figura 6.7 Escoamento ao redor de um corpo rombudo. (a) Distribuição de densidade; e (b) Distribuição do número de Mach.	72
Figura 6.8 Comparação entre o valor de C_p do presente trabalho com os resultados de Jameson e Mavriplis (1986).	72
Figura 6.9 Escoamento hipersônico sobre o duplo elipsóide. (a) Malha não-estruturada; e (b) Distribuição de pressão.	73

Figura 6.10 Escoamento hipersônico sobre o duplo elipsóide. (a) Distribuição de densidade; e (b) Distribuição do número de Mach.	74
Figura 6.11 Comparação entre o valor de C_p com os resultados de Jameson e Mavriplis (1986).	74
Figura 6.12 Escoamento supersônico ao redor de um esquema simplificado do VLS. (a) Malha não-estruturada utilizada; e (b) Campo de pressão.	75
Figura 6.13 Distribuição de densidade ao redor do VLS.	76
Figura 6.14 Distribuição do número de Mach ao redor do VLS.	76
Figura 6.15 Distribuição de C_p ao redor do VLS.	77
Figura 6.16 Processo de convergência para o refinamento de malha para o problema de escoamento axissimétrico ao redor de uma esfera para 5 combinações de valores de CFL e do coeficiente de viscosidade artificial μ_a	78
Figura 6.17 Processo de convergência para o refinamento de malha para o problema de escoamento bidimensional ao redor de um cilindro para 3 combinações de valores de CFL e do coeficiente de viscosidade artificial μ_a	79
Figura 6.18 Escoamento hipersônico axissimétrico ao redor da esfera. (a) Malha não-estruturada utilizada; e (b) Campo de pressão.	80
Figura 6.19 Escoamento hipersônico axissimétrico ao redor da esfera. (a) Distribuição de densidade; e (b) Número de Mach.	81
Figura 6.20 Distribuição de temperatura para o problema do escoamento hipersônico	

axissimétrico ao redor da esfera.	82
Figura 6.21 Distribuição de C_p ao longo da superfície da esfera em função do ângulo θ e comparação com valores experimentais (OLIVER, 1956).	82
Figura 6.22 Escoamento hipersônico tridimensional sobre uma esfera. (a) Malha não-estruturada tetraédrica; e (b) Campo de pressão na face perpendicular ao eixo Z.	83
Figura 6.23 Escoamento hipersônico sobre a esfera. (a) Distribuição de densidade; e (b) Distribuição do número de Mach.	84
Figura 6.24 Distribuição de pressão ao redor de esfera e comparação com valores experimentais (OLIVER, 1956).	85
Figura 6.25 Distribuição de pressão na superfície da esfera.	85
Figura A.1 Escoamento supersônico sobre uma rampa.	94
Figura A.2 Criando o domínio com o auxílio de Blender. Escoamento supersônico sobre uma rampa.	95
Figura A.3 Menu Principal da interface em Blender.	96
Figura A.4 Parte do menu de constantes e parâmetros.	97
Figura A.5 Domínio criado em Blender.	97
Figura A.6 Colocando a condição de contorno de saída.	98
Figura A.7 Malha refinada.	99

Figura A.8 Campo de pressão para o escoamento em rampa ilustrado na Figura A.1.	100
Figura B.1 Diagrama simplificativo do funcionamento interno aplicativo.	103

Lista de Tabelas

Tabela 1.1	Regimes de escoamento e respectivos números de Mach.	22
Tabela 6.1	Processo de convergência para o refinamento de malha para o problema de escoamento axissimétrico ao redor de uma esfera.	78
Tabela 6.2	Processo de convergência para o refinamento de malha para o problema de escoamento bidimensional ao redor de um cilindro.	79
Tabela A.1	Resumo das funções do usuário da interface apresentada na Figura A.3.	96
Tabela B.1	Arrays utilizadas no aplicativo.	102

Lista de Siglas

NASA	Agência Espacial Norte Americana (<i>National Aeronautics and Space Administration</i>).
INPE	Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais.
CFD	Dinâmica dos Fluidos Computacional (<i>Computational Fluid Dynamics</i>).
V2	Foguete alemão utilizado na segunda guerra mundial. Significa Arma de represália 2 (<i>Vergeltungswaffe 2</i>).
AOTV	(Veículo Orbital Aero-assistido <i>Aero-assisted Orbital Transfer Vehicle</i>).
NASP	National Aero-Space Plane.
FDM	Método de Diferenças Finitas (<i>Finite Difference Method</i>).
FVM	Método de Volumes Finitos (<i>Finite Volume Method</i>).
FEM	Método de Elementos Finitos (<i>Finite Element Method</i>).
CBS	Characteristic Based Split Algorithm.
SUPG	Streamline Upwind Petrov Galerkin.
TVD	Total Variation Diminishing Scheme.
MUSCL	Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws.
CDT	Tetraedralização Forçada de Delaunay (<i>Constrained Delaunay Tetrahedralization</i>).
2D	bidimensional.
3D	tridimensional.
RAM	memória de acesso aleatório.
VLS	Veículo Lançador de Satélites
GNU	sigla relacionada ao software livre (<i>GNU's Not Unix</i>).

Lista de Símbolos

a	velocidade do som
M	número de Mach
M_∞	número de Mach no infinito (ou na vizinhança)
γ	razão de calores específicos
T	temperatura
p	pressão estática
ρ	densidade
s	indica condições de isoentropia
Re	número de Reynolds
ρ_∞	densidade na vizinhança
u_∞	velocidade na direção x na vizinhança
μ_∞	viscosidade dinâmica na vizinhança
L	comprimento característico
T_{vib}	temperatura vibracional
u, v e w	componentes de velocidade
x, y e z	coordenadas cartesianas
t	tempo
τ	tensão de cisalhamento
u_i	notação indicial para as componentes de velocidade
x_i	notação indicial para as coordenadas cartesianas
τ_{ij}	tensão de cisalhamento na forma indicial
f_i	contribuição das forças externas na forma indicial
E	energia total por unidade de massa
h	entalpia

H	entalpia de estagnação
q_i	fluxo de calor por condução
k	condutividade térmica
μ	viscosidade dinâmica
R	constante do gás
c_p	calor específico à pressão constante
c_v	calor específico à volume constante
e	energia interna
∞	indica uma propriedade na corrente livre
ϕ	variável independente
x'	coordenada característica
θ	razão de aproximação temporal
Δx	intervalo espacial
O	ordem de erro
Δt	intervalo de tempo
\bar{U}	velocidade média de uma partícula sobre a característica
U^*	campo de velocidades aproximado
Ω	domínio em análise
N	função de interpolação
Γ	fronteira do domínio em análise
n_i	normal à direção i
\mathbf{N}^T	vetor \mathbf{N} transposto ou matriz coluna \mathbf{N}
μ_a	coeficiente de difusão artificial
S_e	desvio ou chave de pressão <i>pressure switch</i>
$\tilde{\phi}$	valores nodais da variável ϕ
ε	tolerância
C_p	coeficiente de pressão

Sumário

Preâmbulo

1	Introdução	19
1.1	Escoamentos Hipersônicos	21
1.1.1	A Camada Limite no Escoamento Hipersônico	25
1.2	Efeitos da Baixa Densidade	26
1.3	Estado da Arte	27
2	Modelo Matemático	33
2.1	Equações de Navier-Stokes	33
2.1.1	Conservação da Massa	33
2.1.2	Equação da Quantidade de Movimento	34
2.1.3	Equação de Conservação da Energia	35
2.1.4	Parâmetros Físicos de Interesse	36
2.2	As Equações de Euler	38
2.3	Condições de contorno	39
2.4	Adimensionalização das Variáveis	40
3	Modelo Numérico	42
3.1	O Algoritmo CBS (Characteristic Based Split)	43
3.1.1	Discretização Temporal	47
3.2	Separação das Equações (<i>Split Method</i>)	48
3.3	Discretização Espacial	50
3.4	Extensão para Escoamentos Axissimétricos	52

4	Amortecimento numérico nas equações de Euler	55
4.1	Métodos para Captura de Choque	55
4.1.1	Viscosidade Artificial	56
4.2	Refinamento e Adaptação de Malhas	58
5	O Aplicativo Computacional	63
5.1	Ferramentas de Código Livre	63
5.1.1	A Linguagem Python	65
5.1.2	Estrutura do Programa	65
6	Resultados e Discussão	67
6.1	Escoamento Supersônico Sobre uma Rampa	67
6.2	Escoamento Supersônico ao Redor de um Corpo Rombudo	70
6.3	Escoamento Hipersônico ao Redor de um Duplo Elipsóide	73
6.4	Escoamento Supersônico ao Redor de uma Forma Simplificada do VLS	75
6.5	Escoamento Hipersônico Axissimétrico ao Redor de uma Esfera	77
6.6	Escoamento Hipersônico ao Redor de uma Esfera	83
7	Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros	86
	Referências	88
	Apêndice A - Exemplo de Utilização do Aplicativo	94
	Apêndice B - Estrutura do Aplicativo	101
	Índice Remissivo	104

Preâmbulo

Este trabalho está inserido no contexto do Grupo de Métodos Analíticos e Numéricos (MANEN), do Departamento de Engenharia Mecânica, UNESP-Ilha Solteira. No presente caso, um dos objetivos principais é a implementação de uma ferramenta computacional, para simulação de escoamentos a altas velocidades, utilizando um método de elementos finitos. O método de elementos finitos de Galerkin combinado com a técnica CBS (Characteristic-based split) é aplicado para simulação de escoamentos compressíveis hipersônicos sobre corpos rombudos. Em outros trabalhos anteriores: Pereira (2005), Lima (2005) e Campos (2005), o enfoque estava sobre aplicações de métodos de elementos finitos para simulações de escoamentos incompressíveis. Desta forma, este trabalho é uma primeira tentativa de ampliar a faixa de aplicação do método de elementos finitos na área de aerodinâmica, dentro do escopo do grupo MANEN, que são aplicações de métodos para soluções de problemas de Engenharia. Este trabalho pode ser considerado como um passo inicial para futuras simulações de problemas de ablação considerando o campo de escoamento externo para cálculo, de forma mais realística, do fluxo de calor devido ao aquecimento aerodinâmico a que são submetidos veículos de reentrada atmosférica. No Capítulo 1 é dada uma introdução à física de escoamentos hipersônicos, assim como uma revisão bibliográfica sobre os trabalhos relacionados. No Capítulo 2 é apresentada a modelagem matemática para solução do problema de escoamentos compressíveis de alta velocidade. A implementação numérica desse modelo é feita no Capítulo 3 e no Capítulo 4 são discutidos os esquemas utilizados para convergência da solução e para a captura das ondas de choque. O Capítulo 5 trata das características do aplicativo computacional desenvolvido. Resultados para o escoamentos supersônico e hipersônico ao redor de diversos corpos são apresentados no Capítulo 6 e as discussões e conclusões sobre o trabalho dadas no Capítulo 7. As referências no final da dissertação podem levar a um estudo mais profundo dos muitos subcampos envolvidos nesse estudo.

1 Introdução

Desde que o homem adquiriu a tecnologia de projetar e construir aeronaves, ele começou a se interessar em voar a velocidades cada vez mais altas. Juntamente com esse interesse, o campo da mecânica dos fluidos se expandiu cada vez mais, e através de experimentos e da conseqüente elaboração de modelos matemáticos adequados, foi possível a análise de diversos parâmetros físicos, característicos de escoamentos hipersônicos, como aqueles que ocorrem na entrada atmosférica de um meteorito. Com a crescente evolução dos computadores e de modelos matemáticos e numéricos, é cada vez maior a utilização do computador para simulação computacional em mecânica dos fluidos, especialmente para escoamentos de difícil simulação experimental, como por exemplo no caso de escoamentos hipersônicos para velocidades muito altas assim como para corpos geometricamente complexos. Instituições como a agência espacial norte-americana NASA, o instituto nacional de pesquisas espaciais, INPE e outras, se utilizam cada vez mais do auxílio de pacotes computacionais específicos para análise, estudo e otimização de suas aeronaves. Essa tendência é cada vez maior e a cada dia novas possibilidades surgem no campo da simulação computacional, levando a resultados cada vez mais próximos dos fenômenos físicos reais.

Problemas relacionados a escoamentos hipersônicos envolvem áreas que vão desde a dinâmica dos gases rarefeitos e escoamentos quimicamente reagentes à escoamentos contínuos e em equilíbrio químico. Referindo-se aos escoamentos de altíssimas velocidades relacionados à tais fenômenos, já no ano de 1946, Tsien havia utilizado o termo *Escoamento Hipersônico*, de acordo com seu trabalho (TSIEN, 1946).

Assim como escoamentos supersônicos, escoamentos hipersônicos também apresentam uma onda de choque característica, como por exemplo, na parte frontal de um corpo rombudo. Um exemplo do padrão de um escoamento hipersônico é ilustrado na Fig. 1.1. Nessa foto, tirada utilizando uma técnica especial (*shadowgraph*), é possível ver uma onda de choque destacada. Entretanto, quando o escoamento possui um elevado valor do número de Mach, outras propriedades e características físicas

desprezíveis ou até mesmo não existentes no caso supersônico começam a ser tornar importantes.

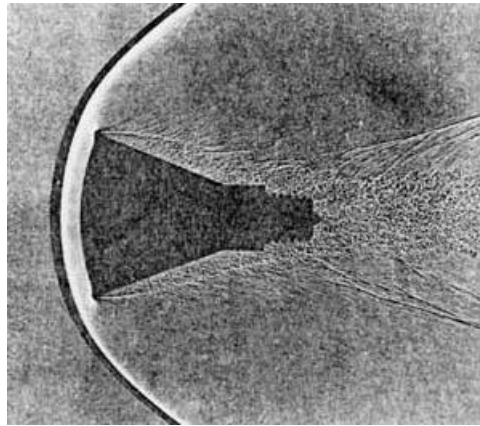


Figura 1.1: Onda de choque ao redor de uma sonda espacial.

Fonte: <http://history.nasa.gov/SP-4001/figures.htm>

Nota: Imagem de domínio público da NASA (*Ames Supersonic Free-Flight Pressurized Range*).

Ao reentrar na atmosfera terrestre, aeronaves, satélites e outros objetos também estão sujeitos a esses fenômenos, tais como elevada força de arrasto e elevadas temperaturas superficiais, que podem até mesmo desintegrar estes veículos. Os acidentes associados são muito caros, o que leva à necessidade de um grande número de análises para sua prevenção. Tais análises, sejam elas numéricas ou experimentais, são caras, devido principalmente ao tempo consideravelmente longo consumido para o preparo da parte humana assim como para a obtenção de resultados. Para o caso experimental, esse preço aumenta à medida que se aumenta a velocidade do escoamento.

Com este intuito, códigos de Dinâmica dos Fluidos Computacional (do inglês CFD) são criados para a utilização, não só nos problemas mencionados acima, como também em outras aplicações envolvendo escoamentos de altas e altíssimas velocidades. Estes códigos são cada vez mais comuns, em razão da tecnologia computacional evoluir cada vez mais juntamente com uma constante melhora dos algoritmos, levando a modelos e aproximações que buscam resultados cada vez mais próximos da realidade.

Por isso, muitas aproximações feitas para o modelamento de escoamentos hipersônicos não são mais necessárias atualmente. Como exemplos de aplicação podem ser mencionados a calibração de modelos para determinação da pressão superficial em aeronaves (JOHNSTON, 1999), a simulação de veículos hipersônicos (KEENAN, 1993) e os escoamentos em turbomáquinas (FALEMPIN, 2004). Uma simulação numérica da entrada de uma sonda espacial na atmosfera de Marte é ilustrada na Fig. 1.2.

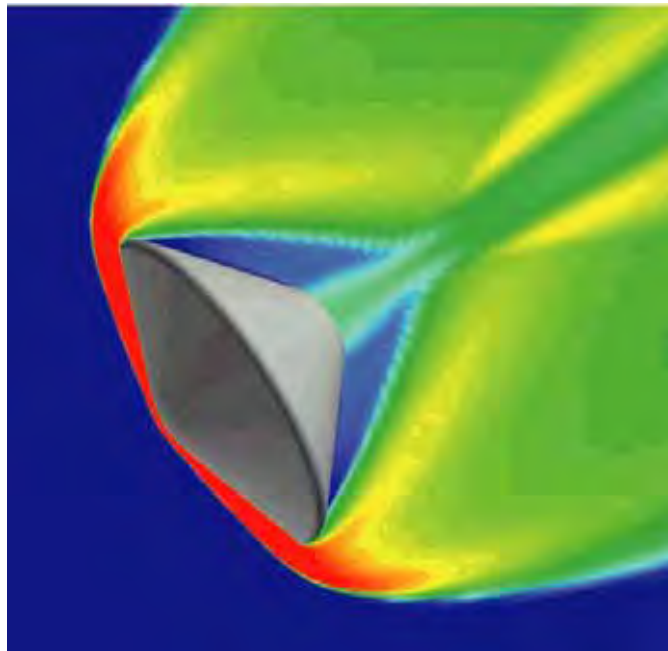


Figura 1.2: Simulação do escoamento hipersônico ao redor de uma sonda espacial entrando na atmosfera de Marte.

Fonte: <http://www.caero.mech.tohoku.ac.jp>

1.1 Escoamentos Hipersônicos

O desenvolvimento da mecânica dos fluidos no campo de escoamentos hipersônicos teve início praticamente no fim da segunda Guerra Mundial. Essa pesquisa levou aos rápidos avanços na tecnologia de foguetes começando com o trabalho dos alemães no míssil V2, até a obtenção de velocidades de vôo maiores do que 7,9 km/s em 1958, necessárias para o lançamento de satélites na órbita terrestre. Atualmente, a tecnologia de se viajar à velocidade hipersônica é cada vez mais avançada, tendo como exemplo o número de reentradas realizadas, com sucesso, pelo ônibus espacial (*Space Shuttle*) na atmosfera terrestre.

Veículos supersônicos e hipersônicos, como o ônibus espacial, são geralmente construídos com um nariz rombudo. Estrategicamente, a onda de choque gerada em frente ao veículo por esse tipo de nariz auxilia na resistência, distribuição e dissipação das altas cargas de pressão e de calor, que podem danificar o veículo. Ainda, para o caso particular de reentrada atmosférica, tal rombudez também auxilia na produção do arrasto necessário para sua desaceleração, de uma velocidade superorbital para uma velocidade subsônica. Então, é de prática importância em engenharia a análise, a compreensão e a predição de escoamentos de altíssimas velocidades ao redor corpos

Tabela 1.1: Regimes de escoamento e respectivos números de Mach.

Regime do Escoamento	Intervalo do número de Mach
Subsônico	0.0 - 0.8
Transônico	0.8 - 1.2
Supersônico	1.2 - 5.0
Hipersônico	> 5.0

rombudos, necessárias para o projeto de aeronaves.

Não existe uma definição precisa para a velocidade na qual o escoamento sobre determinado corpo passa do regime supersônico para o regime hipersônico, porque o começo dos efeitos característicos de um escoamento hipersônico é de fato gradual e depende de parâmetros tais como a geometria do corpo, a atmosfera circundante e a velocidade de vôo. Contudo, uma classificação mais comum é dada segundo o número de Mach, que descreve a razão entre a velocidade local u e a velocidade local do som a em um gás caloricamente perfeito, sendo geralmente representado pela letra M . Na transição do regime de subsônico para supersônico, ou seja, para $M_\infty = 1$, é utilizado o número de Mach na vizinhança M_∞ como:

$$M = \frac{u}{a} \quad (1.1)$$

na qual

$$a = \sqrt{\gamma RT} \quad (1.2)$$

é a velocidade local do som no meio, γ é a razão de calores específicos, R é a constante do gás perfeito e T é a temperatura absoluta local. Uma classificação dos regimes de escoamento relativos ao número de Mach é dada na Tabela 1.1.

Em escoamentos com altos valores do número de Reynolds, desde que não ocorra o descolamento da camada limite, os efeitos viscosos e de transferência de calor podem ser confinados em uma fina camada adjacente a superfície do corpo. Dentro desta camada limite viscosa, existem gradientes significativos de velocidade, de densidade e de temperatura .

Para o caso hipersônico, um diagrama do escoamento a Mach 6 ao redor de um cilindro é mostrado na Figura 1.3. O escoamento, inicialmente uniforme da corrente livre, é alterado por uma onda de choque (S) destacada e subseqüentemente entra na camada de choque. A corrente livre é não perturbada pelo obstáculo à velocidade

hipersônica à montante, desde que a velocidade de propagação de informação naquela região seja menor do que a velocidade do escoamento. A onda de choque é muito mais intensa no ponto onde é normal à corrente livre de entrada (N). A partir daí a onda de choque se torna oblíqua ao escoamento de entrada e se enfraquece devido à curvatura do corpo.

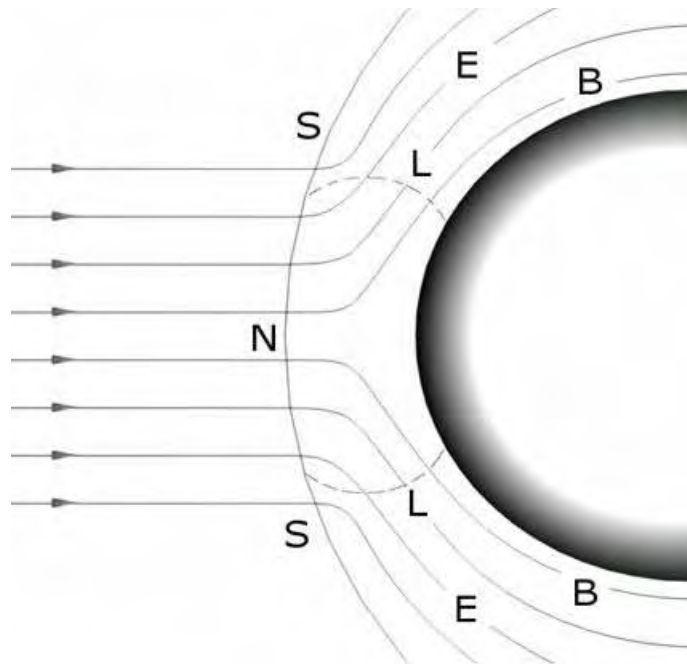


Figura 1.3: Escoamento hipersônico a Mach 6 ao redor de um corpo rombudo.

Dentro da camada de choque, a superfície sônica marca a interface (L) entre o escoamento subsônico e o supersônico. Para baixas velocidades supersônicas de entrada a interface poderia ocorrer mais a jusante que a mostrada na Fig. 1.3.

Dentro da região subsônica, limitada pela superfície sônica, pelo choque e pelo corpo, a informação é propagada a todas as direções através de ondas de pressão. O ponto de estagnação (T), localizado dentro da camada subsônica, é definido como o local onde o escoamento é desacelerado até colidir na direção normal à superfície do corpo. No caso de um gás ideal, caloricamente perfeito, e de uma superfície adiabática, este é o ponto com os maiores valores de temperatura e de pressão. A camada limite (B) viscosa se inicia no ponto de estagnação e cresce sobre a superfície do corpo na direção a jusante. Na presença de gradientes adversos de pressão, principalmente na região posterior do corpo, ocorre a separação ou descolamento da camada limite.

À medida que o gás é advectado para fora da região subsônica, ele se expande (E) e acelera dentro de um maior volume entre o choque e o corpo. A diminuição

do ângulo do choque, combinada com os efeitos de expansão do escoamento, resulta usualmente em uma diminuição tanto da pressão como da temperatura. A jusante da região subsônica, o aumento da velocidade do escoamento significa que as ondas de pressão não podem retornar novamente à montante. Assim, o estado do campo de escoamento à jusante não afeta a região subsônica, exceto possivelmente por meio de um campo eletromagnético ou alguma outra força de campo.

Na transição de subsônico a supersônico, um escoamento apresenta um fenômeno delimitador bem distinto, como um choque sonoro, ou um salto na pressão, como ilustrado na Fig. 1.3. Procurar por um critério que indique a transição de velocidade de supersônica para hipersônica não é tão óbvio. Não há uma forma audível ou visível como no primeiro caso. Uma convenção, utilizando o número de Mach, diz que a transição supersônico-hipersônico ocorre a $M \approx 5$. Este limite não é fixado a certo número, mas quer dizer que por volta de $M \approx 5$ certos fenômenos físicos se tornam cada vez mais importantes, caracterizando um escoamento hipersônico.

Uma forma de ilustrar melhor estes fenômenos físicos é analisando uma aeronave ou sonda, que ao retornar do espaço, penetra na atmosfera terrestre. Na reentrada de um corpo rombudo, por exemplo, atinge-se a velocidade de cerca de 11,2 km/s. O atrito causado pelo número crescente de moléculas de ar escoando ao seu redor produz um aumento da energia interna, fazendo com que a temperatura de sua superfície aumente por mecanismos de transferência de calor por condução, convecção e radiação. À sua volta ocorrem mudanças no ar, o qual se torna cada vez mais denso, até o surgimento de uma onda de choque em frente ao objeto.

A temperatura após o choque, para tal velocidade de reentrada, é geralmente da ordem de 11.000 K, o que exerce influência na composição química do ar circundante, com o surgimento de processos físicos e químicos ou que passam a ter uma maior importância do que no caso de escoamentos supersônicos. Esses processos, como vibração, dissociação, recombinação, ionização, radiação, separam moléculas de oxigênio e nitrogênio em seus átomos, formando novas substâncias indesejáveis em alguns casos, como por exemplo o oxigênio-nítrico. Elétrons podem deixar a estrutura de um átomo ou molécula tornando o ar um plasma parcialmente ionizado, dificultando a comunicação via rádio entre espaçonaves e estações terrestres por exemplo.

Neste caso, existindo uma mistura de gases reagentes a Eq. (1.2) não é válida para o cálculo da velocidade do som no equilíbrio. Uma fórmula geral, válida também para misturas de gases reagentes, no equilíbrio e a altas temperaturas, é a velocidade

do som local à entropia constante, dada como:

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} \quad (1.3)$$

onde p é a pressão e ρ é a densidade. O sufixo s indicando condições de escoamento isoentrópico significa que, dentro desta onda sonora, as condições do escoamento são adiabáticas e reversíveis. Embora efeitos de rarefação sejam de grande importância, particularmente para reentrada na atmosfera, este trabalho lida somente com escoamentos contínuos e no equilíbrio químico. Essas e outras características mostram a necessidade de se pesquisar escoamentos hipersônicos, a fim de se encontrar uma forma razoável do cálculo da temperatura superficial de um corpo no escoamento.

1.1.1 A Camada Limite no Escoamento Hipersônico

Devido às altíssimas velocidades, o escoamento possui energia cinética elevada e à medida que é desacelerado devido aos efeitos de atrito altamente viscosos próximos à superfície, é observada uma transferência térmica de energia. A camada limite também se torna mais espessa e começa a depender do número de Mach do escoamento. A espessura da camada limite em escoamentos hipersônicos, δ , pode ser aproximada (GRUNDMANN, 1991) como:

$$\frac{\delta}{x} \approx \frac{M^2}{\sqrt{Re}} \quad (1.4)$$

na qual o número de Reynolds Re é definido como:

$$Re = \frac{\rho_\infty u_\infty L}{\mu_\infty} \quad (1.5)$$

na qual a densidade ρ_∞ , a velocidade u_∞ e a viscosidade dinâmica μ_∞ são as propriedades da corrente livre a montante e L é o comprimento característico do veículo. Em geral o número de Reynolds é alto em escoamentos subsônicos e supersônicos. À alta altitude a densidade é baixa, diminuindo o valor do número de Reynolds que, com um elevado valor do número de Mach, gera camadas limites bem mais espessas do que em regimes de escoamentos de baixas velocidades.

O aumento da espessura da camada limite faz com que ela seja percebida pelo campo de escoamento invíscido ao redor, que por sua vez influencia novamente na parte viscosa, ocorrendo um efeito chamado de *interação viscosa*. A camada limite pode se tornar tão espessa de modo a ser da mesma ordem da *camada de choque fina*, localizada entre o choque e a superfície do corpo e é chamada neste caso de *camada de choque completamente viscosa*.

Dentro desta camada, o conceito de teoria da camada limite não é mais válido devido a esta forte interação com o choque. O choque por si mesmo não é mais uma região fina de descontinuidade, mas recoberto e completamente fundido com a camada limite viscosa. Tais interações fazem com que o atrito e a transferência de calor na superfície sejam aumentadas, além de afetar o campo de pressão, levando à ocorrência de efeitos importantes na sustentação, arrasto e estabilidade de veículos hipersônicos.

Um escoamento que cruza uma onda de choque de um corpo rombudo experimenta um aumento de entropia diferente para cada linha de corrente, daí a camada após o choque ser chamada de *camada de entropia*. Nesta região a camada limite se desenvolve de tal forma que sua fronteira externa é totalmente imersa nos altos gradientes de entropia desta camada de entropia. O problema que surge aí se deve às condições no contorno da camada limite. Fora dela há fortes gradientes das propriedades do escoamento. Uma vez que a camada de entropia é acoplada a uma alta vorticidade, ela também é chamada de *camada de vorticidade*.

1.2 Efeitos da Baixa Densidade

Escoamentos hipersônicos são escoamentos altamente energéticos. Energia cinética se transforma em energia térmica à medida que cruza uma onda de choque. Além disso, sob tais circunstâncias, o choque normal pode ser tão forte que causa a dissociação das moléculas e, eventualmente, a ionização dos átomos, liberando energia em forma de calor diretamente na camada após o choque. Tudo isso provoca um aumento da temperatura, que pode se tornar tão grande de forma que o gás passe a se comportar de uma maneira *não-ideal*. Não é fácil estabelecer limites para o início dos processos de dissociação e ionização do ar visto que tais processos são dependentes, além da geometria do veículo, da pressão e da temperatura (TORO, 1997).

Parte da energia térmica disponível é consumida pela *energia vibracional* devida

à excitação das moléculas de ar, que se inicia à temperatura de 800 K. Então, além das energias translacional e rotacional das moléculas, existe um outro tipo de energia térmica. A temperatura vibracional T_{vib} pertencente a este tipo de energia pode alterar o nível da temperatura translacional T .

Para um gás quimicamente reagente no equilíbrio, o calor específico se torna função da temperatura e da pressão. O oxigênio se dissocia à pressão de 1 atm e à temperatura de 2000 K, enquanto que o nitrogênio começa a se dissociar aos 4000 K. Acima de 9000 K são formados íons e o gás se torna um *plasma parcialmente ionizado*.

Se reações químicas e excitação vibracional surgem muito rapidamente, muito mais rápido do que uma partícula de fluido se move no escoamento, há equilíbrio químico e vibracional. Se isto não ocorrer, o escoamento estará em um estado de não equilíbrio. Esses fenômenos de energia de excitação são chamados de *efeitos de alta temperatura*.

Sob baixos valores da densidade a cobertura do choque se torna cada vez maior e a condição de não escorregamento na parede não é mais válida. A velocidade na parede passa a possuir um valor finito e a condição na parede passa a ser chamada condição de escorregamento. Isso geralmente acontece quando um veículo hipersônico move-se através de uma atmosfera rarefeita para uma atmosfera mais densa, saindo de um regime molecular livre, no qual se observa o impacto individual de moléculas na superfície, para o regime de transição.

Estes são os chamados *efeitos de baixa densidade*. Se a densidade se torna tão baixa que o caminho livre médio das moléculas se torna da mesma ordem do tamanho característico do corpo, o escoamento não vai se comportar mais como um meio contínuo. Então se torna um escoamento molecular livre e é tratado usualmente pela técnica da teoria cinética dos gases.

1.3 Estado da Arte

Tsien (1946) foi o primeiro pesquisador a usar o termo escoamento hipersônico, em um artigo chamado Leis de Similaridade em Escoamentos Hipersônicos. Tsien mencionou que um escoamento de alta velocidade estava sendo estudado, sem definir especificamente o termo, nem dar muita importância ao fato de estar lidando com um novo regime de escoamento que apresentava fenômenos particulares.

Von Neumann e Richtmyer (1950), desenvolveram um método numérico para

o estudo de ondas de choque em escoamentos unidimensionais compressíveis. Neste método, termos adicionais foram incluídos nas equações discretizadas, contribuindo para uma grande simplificação dos procedimentos necessários para a solução numérica gradual das equações envolvendo ondas de choque. A influência desses termos artificiais foi controlada pelo refinamento da malha.

Mais tarde, Woodward e Colella (1984) estudaram a simulação bidimensional de escoamentos com fortes ondas de choque, baseados no trabalho de Von Neumann e Richtmyer (1950), que ainda era, com algumas poucas modificações, utilizado na época. Este trabalho ainda possuía algumas desvantagens e a intenção era a de obter formas mais precisas, mais convenientes e elegantes de solução. Assim, utilizando três aproximações diferentes para tratamento das descontinuidades, foi observada a necessidade de um cuidadoso tratamento das descontinuidades do escoamento para a obtenção de bons resultados numéricos.

Quase uma década depois, Hayes e Probstein (1959) descreveram em seu livro texto a existência de escoamentos de altíssima velocidade, chamados escoamentos hipersônicos, que tinham um comportamento diferente de escoamentos supersônicos.

Então, entre as décadas de 50 e 60, devido principalmente ao projeto de mísseis de alcance intercontinental, existiu grande interesse no estudo de escoamentos hipersônicos. Depois de um período de inatividade durante os anos 70, devido principalmente a motivos financeiros, a pesquisa no campo de escoamentos hipersônicos foi reiniciada e voltada principalmente ao suporte dos ônibus espaciais norte americanos. Este recomeço foi financiado pela necessidade do desenvolvimento de ferramentas aerotérmicas avançadas para o programa Hermes na França (HäUSER et al., 1991), além do programa AOTV (Aero-assisted Orbital Transfer Vehicle) (WALBERG, 1982) e do programa (WALBERG, 1983) e NASP (National Aero-Space Plane) (THOMAS; DWOYER; KUMAR, 1990) e (WILLIAMS, 1987) nos EUA. Estas ferramentas foram utilizadas principalmente para o projeto de sistemas de controle, proteção térmica e de propulsão.

Até o início dos anos 80, grande parte dos trabalhos em mecânica dos fluidos computacional envolvia diferenças centradas com operadores dissipativos para o amortecimento de oscilações numéricas. Soluções para a equação de Euler foram obtidas inicialmente por Magnus e Yoshihara (1970) e Grossman e Moretti (1970).

Jameson et al. (1981), utilizando um algoritmo baseado no método de volumes finitos, implementaram um algoritmo de solução com o método de Runge-Kutta de quarta-ordem. A dissipação artificial foi implementada como uma mistura de

diferenças de segunda e quarta ordens das variáveis conservativas. O primeiro operador de dissipação atua como um termo de amortecimento de alta frequência e previne o problema do desacoplamento *par-ímpar*, enquanto que o segundo operador é utilizado como um termo de captura de choque, necessário para redução das oscilações numéricas causadas pelas ondas de choque.

A convergência do algoritmo de Jameson et al. (1981) foi melhorada consideravelmente, primeiramente por Ni (1981) e mais tarde por Jameson (1983), pela introdução de uma técnica de aceleração via malhas múltiplas, transformando este algoritmo em uma aplicação muito eficiente para escoamentos invíscidos. Mesmo obtendo grande confiança entre a comunidade CFD e sendo utilizada amplamente pela indústria aeronáutica, a extensão deste esquema para escoamentos hipersônicos e reagentes foi feita somente por alguns poucos autores como Park e Yoon (1991) e Shuen e Yoon (1988).

De acordo com Yoon e Kwak (1988), o esquema clássico de Jameson et al. (1981) se torna instável em problemas de escoamentos hipersônicos, e um novo modelo de dissipação deveria ser introduzido para superar este problema.

Resultados numéricos para a simulação bidimensional de escoamentos hipersônicos são apresentados por Leclercq e Stoufflet (1992), utilizando o método de malhas múltiplas. O método consiste basicamente em obter correções aproximadas utilizando-se de uma malha grosseira e então aplicar tais correções em uma malha refinada, aumentando significativamente a taxa de convergência do sistema numérico de equações. Também foram mostradas algumas vantagens do método de malhas múltiplas utilizando uma equação unidimensional linear de advecção e resultados de problemas hipersônicos bidimensionais são apresentados.

No início dos anos 80, prevaleceram os esquemas baseados na característica para solução das Equações de Euler. Em contraste com o método de diferenças centradas, que amortecem as oscilações pela adição de termos de dissipação artificial, os esquemas *upwind* introduzem propriedades físicas essenciais nas equações governantes da discretização espacial, prevenindo a ocorrência de oscilações, conforme Hirsch (1990).

Em 1981 foi introduzido, por Steger e Warming (1981), o primeiro esquema de separação de vetores de fluxo com base nos sinais dos autovalores do Jacobiano. Fisicamente, estes autovalores representam ambos a velocidade e a direção da propagação de uma perturbação. Este esquema se utiliza do aspecto homogêneo dos fluxos invíscidos

para separar cada um deles em dois componentes que são levados (*upwinded*) de acordo com as velocidades de propagação.

Uma extensão desse esquema foi feita por Candler (1988), para o cálculo de escoamentos hipersônicos de baixa densidade e por Gokcen (1989) para escoamentos hipersônicos fracamente ionizados. Nestas extensões, criadas inicialmente por MacCormack (1985) e desenvolvidas originalmente para as equações de Navier-Stokes, introduz-se uma menor dissipação em regiões regulares, a partir da avaliação das matrizes do Jacobiano (a jusante e a montante) em um mesmo ponto, enquanto que o esquema original de Steger e Warming (1981), é utilizado em regiões com altos gradientes de pressão. Dessa forma, o método produz uma melhor previsão da camada limite mantendo a estabilidade numérica próxima às descontinuidades físicas.

Contudo, o método de Steger e Warming (1981) gera fluxos não-contínuos em pontos de velocidade sônica no escoamento, causando a ocorrência de uma descontinuidade na curva de solução calculada no ponto sônico. Van Leer (1982) resolveu este problema impondo os fluxos separadamente como sendo funções contínuas do número de Mach e expressas como polinomiais da menor ordem possível.

No trabalho pioneiro de Godunov (1959), destaca-se a introdução de propriedades físicas adicionais em esquemas do tipo *upwind*. No método de Godunov, a solução é constante por partes em cada elemento da malha e a evolução do escoamento para os resultados do próximo passo de tempo depende da solução de um problema exato local de Riemann (tubo de choque) na interface de cada elemento.

Como o esquema proposto por Godunov (1959), requer a solução de um sistema de equações não-lineares a cada passo de tempo, consumindo um tempo de processamento considerável, Roe (1981) desenvolveu um algoritmo de solução a partir da linearização do problema de Riemann. Esse algoritmo tornou-se bastante popular devido à sua capacidade de captura de choques, sendo estendido primeiramente para escoamentos hipersônicos de gases ideais em equilíbrio químico em Glaister (1988) e Grossman e Walters (1989) e então para escoamentos reagentes por Cinnella e Grossman (1990), Dubroca (1993), e outros autores.

A maioria dos trabalhos citados anteriormente foi desenvolvida no contexto da formulação de volumes finitos ou diferenças finitas. Embora grande parte dos procedimentos para lidar com escoamentos hipersônicos seja baseada no método de diferenças finitas (FDM) e no método de volumes finitos (FVM), soluções para a equação de Euler e de Navier-Stokes foram obtidas com sucesso utilizando o método de elementos finitos

(FEM), como nos trabalhos de Hughes (1987), Peeters et al. (1992) e Tworzydło et al. (1992).

Além de oferecer uma base sólida para obtenção de uma variedade de estimativas de erro, de acordo com Babuska et al. (1986), o método de elementos finitos constitui um ótimo ambiente para lidar com problemas de domínios complexos, possibilitando um ambiente favorável para a implementação de técnicas de adaptação de malhas como em Rachowicz et al. (1989).

Donea (1984), utilizando o esquema de Taylor-Galerkin, descreve uma variante do esquema de Lax e Wendroff (1960), para diferenciação temporal utilizando FEM. O método utiliza expansões em séries de Taylor à frente no tempo, incluindo as derivadas no tempo de segunda e terceira ordem que são avaliadas na equação diferencial parcial governante. Este método foi amplamente utilizado por outros autores entre os quais Büchner et al. (1996), Morgan e Peraire (1998) e mais recentemente em uma simulação do escoamento aerodinâmico ao redor do primeiro satélite brasileiro por Scalabrin et al. (2004).

Zienkiewicz et al. (1999) mostra algumas aplicações práticas do algoritmo CBS (*Characteristic Based Split Algorithm*), inicialmente apresentado em Zienkiewicz e Codina (1995). É mostrado um esquema que pode ser utilizado nas formas explícita, semi-implícita, quase-implícita e totalmente implícita temporal, e são feitas comparações com o esquema de Taylor-Galerkin. Vantagens são apresentadas para as formas explícita e semi-implícita. O algoritmo é baseado no método das características de Galerkin (LÖHNER; MORGAN; ZIENKIEWICZ, 1984) e no método de separação (*Split Method*), descrito por Chorin (1969).

Testes com o esquema CBS foram feitos para escoamentos incompressíveis com transferência de calor em Massarotti et al. (1998), apresentando bons resultados quando comparados com resultados teóricos e experimentais da literatura. Sua utilização em escoamentos compressíveis se fez em Nithiarasu et al. (1998). Neste trabalho, semelhante aos trabalhos de Hirsch (1990) e de Woodward e Colella (1984), os desempenhos de diferentes tipos de viscosidades para captura de choques foram analisados. Foram analisados escoamentos nos regimes supersônico e hipersônico, nos quais, para o último caso, o método anisotrópico com base nos resíduos obteve os melhores resultados. Recentemente, Nithiarasu et al. (2006) apresentam uma revisão do esquema CBS estudando vários problemas de escoamentos compressíveis e incompressíveis e viscosos e invíscidos, além de discutir as possibilidades e limitações do algoritmo.

A partir dos trabalhos mencionados, é possível ver que ao longo dos anos o campo de estudo de escoamentos supersônicos e hipersônicos evoluiu muito. A adição de termos para estabilizar as soluções foi algo primordial e indispensável, sendo utilizada até mesmo em esquemas modernos de captura de choque e sua utilização é cada vez mais precisa. Embora os primeiros trabalhos tenham sido feitos em sua maioria nos ambientes dos métodos de Volumes Finitos (FVM) e Diferenças Finitas (FDM), já existe atualmente uma grande parte de esquemas que fazem uso do método de Elementos Finitos (FEM) nos campos de escoamentos supersônicos e hipersônicos, nos quais a facilidade de se trabalhar com domínio complexos e malhas não-estruturadas é salientada.

Um dos objetivos deste trabalho, além de introduzir pesquisadores do grupo ao estudo de escoamentos compressíveis a altas velocidades, desenvolver um aplicativo baseado no modelo CBS de Zienkiewicz e Codina (1995), utilizando ferramentas de código aberto disponíveis na literatura.

2 Modelo Matemático

Neste trabalho serão analisados escoamentos compressíveis hipersônicos em meio contínuo, invíscidos e em equilíbrios químico e termodinâmico ao redor de corpos rombudos. No presente capítulo será feita uma abordagem matemática das equações básicas de conservação que regem tais escoamentos. Serão apresentadas as equações de Navier-Stokes e, posteriormente, as equações de Euler.

2.1 Equações de Navier-Stokes

O sistema de equações de Navier-Stokes é a forma mais geral para a descrição do escoamento de fluidos. Nesta seção são descritas as equações de conservação da massa e da energia e a equação da quantidade de movimento, apresentadas nos itens seguintes.

2.1.1 Conservação da Massa

Seja ρ a densidade do fluido cruzando o elemento infinitesimal em coordenadas cartesianas ilustrado na Fig. 2.1. Então a taxa na variação no tempo da densidade é igual ao balanço dos escoamentos de massa ρu , ρv e ρw , entrando e saindo do elemento (HIRSCH, 1990), ou seja,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

na qual u , v e w são as componentes de velocidade nas coordenadas cartesianas x , y e z , e t é o tempo. Em notação indicial pode-se escrever,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} \quad (2.2)$$

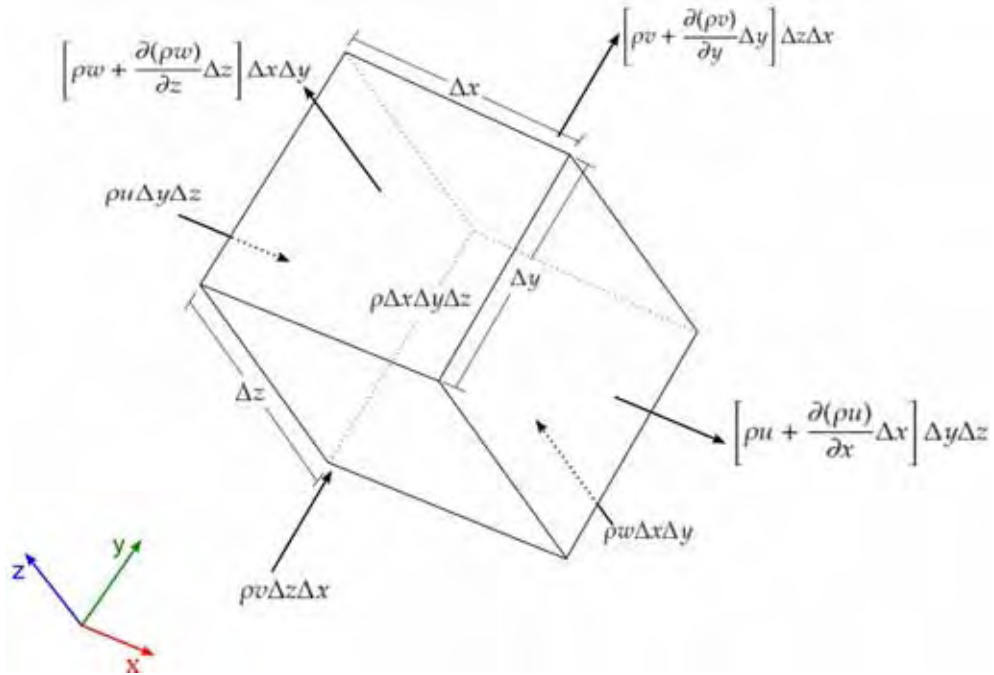


Figura 2.1: Esquema da conservação da massa em um elemento infinitesimal no sistema tridimensional de coordenadas.

2.1.2 Equação da Quantidade de Movimento

Para um esquema semelhante ao ilustrado na Figura 2.1, para o caso da equação da conservação da massa, a taxa de variação no tempo da quantidade de movimento total é igual à soma de todas as forças externas, e pode ser escrito para a direção x como:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} - \rho f_x = 0 \quad (2.3)$$

A Equação (2.3) também pode ser escrita de forma indicial como

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial[(\rho u_j)u_i]}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho f_i = 0 \quad (2.4)$$

2.1.3 Equação de Conservação da Energia

Para um dado sistema, no equilíbrio, o balanço de energia é estabelecido pela primeira lei da termodinâmica. Utilizou-se aqui a energia interna de um corpo e , por unidade de massa que, para um fluido simples, é relacionada com outras variáveis por meio de uma *equação de estado* sendo, geralmente, função da pressão e da densidade. Adicionando a energia cinética por unidade de massa, tem-se a energia total por unidade de massa dada inicialmente como:

$$E = e + \frac{u_i u_i}{2} \quad (2.5)$$

Da definição de entalpia,

$$h = e + \frac{p}{\rho} \quad (2.6)$$

pode-se escrever que

$$H = h + \frac{u_i u_i}{2} = E + \frac{p}{\rho} \quad (2.7)$$

O fluxo de calor por condução q_i , é dado por

$$q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (2.8)$$

sendo k a condutividade térmica. Os termos de geração podem ser especificados por unidade de volume como q_H devido a reações químicas (se houver) e a energia de dissipação viscosa devida às tensões internas:

$$\frac{\partial(\sigma_{ij} u_j)}{\partial x_i} = \frac{\partial(\tau_{ij} u_j)}{\partial x_i} - \frac{\partial(p u_j)}{\partial x_j} \quad (2.9)$$

Então, o balanço de energia no volume de controle diferencial pode ser escrito como:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i H)}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial(T)}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial(\tau_{ij} u_j)}{\partial x_i} - \rho f_i u_i - q_H = 0 \quad (2.10)$$

na qual $\rho f_i u_i$ representa o trabalho exercido pelas forças de corpo.

2.1.4 Parâmetros Físicos de Interesse

As equações governantes de Navier-Stokes do escoamento compressível também podem ser escritas na forma indicial compacta como:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} + \mathbf{Q} = 0 \quad (2.11)$$

com

$$\Phi = [\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, \rho E]^T \quad (2.12)$$

$$\mathbf{F}_i = [\rho u_i, \rho u_1 u_i + p \delta u_{1i}, \rho u_2 u_i + p \delta u_{2i}, \rho u_3 u_i + p \delta u_{3i}, \rho H u_i]^T \quad (2.13)$$

$$\mathbf{G}_i = [0, -\tau_{1i}, -\tau_{2i}, -\tau_{3i}, -\frac{\partial(\tau_{ij} u_j)}{\partial x_i} - k \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right)]^T \quad (2.14)$$

$$\mathbf{Q} = [0, -\rho f_1, -\rho f_2, -\rho f_3, -\rho f_i u_i - q_H]^T \quad (2.15)$$

na qual

$$\tau_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \delta_{ij} \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] \quad (2.16)$$

De forma a completar o sistema de equações anterior, adiciona-se uma lei constitutiva relacionando energia, temperatura e densidade, e que para um gás perfeito, utilizando a constante do gás ideal R , é dada como:

$$\rho = \frac{p}{RT} \quad (2.17)$$

A constante R é dada em termos dos calores específicos,

$$R = (c_p - c_v) = (\gamma - 1) c_v \quad (2.18)$$

na qual a razão de calores específicos é dada como:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (2.19)$$

Escrevendo a energia e interna em função de termos conhecidos tem-se que:

$$e = c_v T = \left(\frac{1}{\gamma - 1} \right) \frac{p}{\rho} \quad (2.20)$$

e então,

$$\rho E = \left(\frac{1}{\gamma - 1} \right) p + \frac{u_i u_i}{2} \quad (2.21)$$

$$\rho H = \rho E + p = \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) p + \frac{u_i u_i}{2} \quad (2.22)$$

As variáveis de interesse escolhidas neste trabalho são a densidade ρ , a energia total E e as velocidades u, v, w nas direções x, y e z , respectivamente.

2.2 As Equações de Euler

Do ponto de vista numérico, as equações de Navier-Stokes apresentam algumas dificuldades para solução. Para se obter uma boa solução em problemas viscosos, particularmente aqueles com elevados números de Reynolds, são necessários muitos cálculos e capacidade de memória computacional. Isso se deve à necessidade de se trabalhar com malhas muito refinadas, indispensáveis para captar as diferentes escalas características do escoamento.

As equações de Euler descrevem os escoamentos invíscidos, uma importante aproximação para as equações de Navier-Stokes. Estas formam um sistema de equações diferenciais parciais hiperbólico, não-linear e de primeira ordem. Sua utilização baseia-se no fato de que a influência das tensões cisalhantes e viscosas fica confinada às regiões próximas a superfície do veículo, e que fora dessas camadas o escoamento se comporta como invíscido.

Dessa forma, muitas propriedades do escoamento podem ser descritas por essa aproximação invíscida, como por exemplo na determinação do campo de pressão e conseqüentemente do coeficiente de arrasto, para escoamentos sem separação. Assim, a configuração geral das equações de Euler para um escoamento não-viscoso e sem condução de calor por difusão é apresentada nos itens seguintes.

Assim, desprezando-se os termos de tensão cisalhante e de condução de calor nas Equações de Navier-Stokes, os parâmetros físicos de interesse, embutidos nas Eq. (2.11), podem ser dados agora como:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} + \mathbf{Q} = 0 \quad (2.23)$$

com os vetores Φ , \mathbf{F}_i e \mathbf{Q} respectivamente dados por:

$$\Phi = [\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, \rho E]^T \quad (2.24)$$

$$\mathbf{F}_i = [\rho u_i, \rho u_1 u_i + p \delta_{u_1 i}, \rho u_2 u_i + p \delta_{u_2 i}, \rho u_3 u_i + p \delta_{u_3 i}, \rho H u_i]^T \quad (2.25)$$

$$\mathbf{Q} = [0, -\rho f_1, -\rho f_2, -\rho f_3, -\rho f_i u_i]^T \quad (2.26)$$

As equações de Euler são utilizadas aqui somente na forma conservativa, uma vez que a forma não-conservativa não é apropriada para a simulação de escoamentos compressíveis. Na forma não-conservativa as Equações de Euler podem resultar em soluções múltiplas ou incorretas, principalmente para escoamentos com altíssimas velocidades e com a presença de ondas de choque, conforme demonstrado por Steinhoff e Jameson (1982).

2.3 Condições de contorno

Neste trabalho serão considerados somente problemas de escoamento externo de fluidos. Para tais casos, a Fig. 2.2 ilustra a colocação das condições de contorno para escoamentos supersônicos e hipersônicos ao redor de um corpo rombudo. Para a determinação de resultados do escoamento no interior desse domínio, valores apropriados das propriedades do escoamento deverão ser especificados nestas fronteiras.

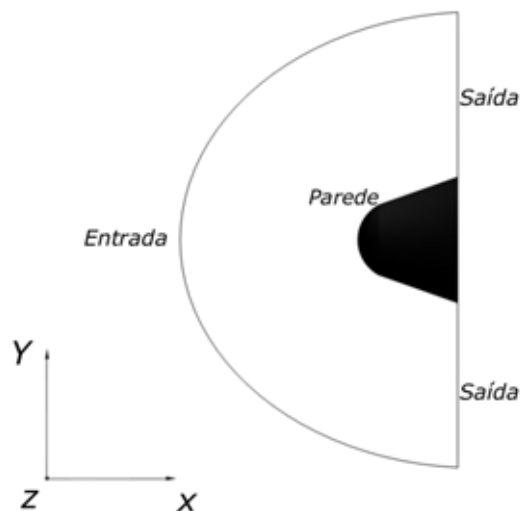


Figura 2.2: Fronteira computacional para prescrição das condições de contorno.

Há três tipos básicos de condições de contorno na figura: as condições de entrada, de saída e de parede. As duas primeiras condições são também chamadas de

condições fictícias, pois são constituídas por limites computacionais fictícios, e a última é a condição real.

Neste caso, nas condições de contorno de entrada (na corrente livre) são especificadas todas as propriedades do escoamento. Na saída, por se tratar de um escoamento supersônico ou hipersônico, nenhuma propriedade é especificada, uma vez que as informações não viajam na direção contrária ao escoamento.

Quando se trabalha com escoamentos invíscidos, a condição de escorregamento na parede passa a ser válida, e somente a velocidade normal à parede é especificada, tendo seu valor igualado a zero. Os valores das propriedades dependentes são inicialmente conhecidas em todo o domínio e a evolução do escoamento segue a partir destas.

2.4 Adimensionalização das Variáveis

As equações de conservação apresentadas neste capítulo são muitas vezes utilizadas na forma adimensional, passando a depender de certas características do escoamento. Nesta seção são apresentadas as formas adimensionais empregadas neste trabalho:

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_i &= \frac{x_i}{L} & \bar{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_\infty} & \bar{p} &= \frac{p}{\rho_\infty u_\infty^2} \\
 \bar{u}_i &= \frac{u_i}{u_\infty} & \bar{E} &= \frac{E}{u_\infty^2} & \bar{t} &= \frac{tu_\infty}{L} \\
 \bar{T} &= \frac{Tc_p}{u_\infty^2} & \bar{c}^2 &= \frac{c^2}{u_\infty^2} = \frac{1}{M_\infty^2}
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

na qual L é um comprimento característico e as propriedades na corrente livre são denotadas com o subscrito ∞ . Aplicando estas relações nas equações governantes, chega-se a seguintes formas conservativas:

Conservação da Massa

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}_i)}{\partial \bar{x}_i} = 0 \tag{2.28}$$

Equação da Quantidade de Movimento

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}_i)}{\partial\bar{t}} = -\frac{\partial(\bar{u}_j\bar{\rho}\bar{u}_i)}{\partial\bar{x}_j} + -\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}_i} \quad (2.29)$$

Equação de Conservação da Energia

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\bar{E})}{\partial\bar{t}} = -\frac{\partial(\bar{u}_j\bar{\rho}\bar{H})}{\partial\bar{x}_j} - \frac{\partial(\bar{u}_j\bar{p})}{\partial\bar{x}_i} = 0 \quad (2.30)$$

Ainda, as seguintes formas adimensionais foram utilizadas no trabalho, como a equação de estado,

$$\bar{p} = \bar{\rho} \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \bar{T} \quad (2.31)$$

e,

$$\bar{E} = \frac{\bar{T}}{\gamma} + \frac{1}{2}\bar{u}_i^2 \quad (2.32)$$

$$\bar{c}^2 = (\gamma - 1)\bar{T} \quad (2.33)$$

$$\bar{p} = (\gamma - 1) \left(\bar{\rho}\bar{E} - \frac{1}{2} \frac{(\bar{\rho}\bar{u}_i)(\bar{\rho}\bar{u}_i)}{\bar{\rho}} \right) \quad (2.34)$$

3 Modelo Numérico

Dentre os modelos numéricos para discretização mais comuns estão os Métodos de Elementos Finitos (FEM), de Volumes Finitos (FVM) e de Diferenças Finitas (FDM). Embora grande parte dos trabalhos envolvendo escoamentos hipersônicos seja desenvolvida no contexto de FVM e FDM, o FEM possui características particulares como, por exemplo, sua capacidade de representação de domínios complexos como em Ait–Ali–Yahia (1996).

Muitos métodos são disponíveis para a determinação da solução aproximada para um dado problema pelo FEM. Dentre eles, três são bastante conhecidos, que são: o método de Ritz ou de Goodman e o método de Rayleigh-Ritz ou do Variacional (LEWIS; NITHIARASU; SEETHARAMU, 2004) e, talvez o mais utilizado, o método dos Resíduos Ponderados (CONNOR; BREBBIA, 1976).

Dentre as muitas formulações possíveis no método de Resíduos Ponderados, estão os métodos de Colocação (SEGERLIND, 1984), de Subdomínio (Campos Silva, 1998), de Mínimos Quadrados (PEREIRA, 2005) e o método utilizado neste trabalho, o método de Galerkin. Em problemas de CFD, assim como em outras formulações numéricas, na aplicação do FEM, uma grande variedade de métodos também difere entre si de acordo com os esquemas de estabilização empregados. Neste quesito, as formulações mais utilizadas no campo do FEM podem ser citadas a formulação de Galerkin, a formulação SUPG (*Streamline Upwind Petrov Galerkin*) e a formulação por mínimos quadrados.

No método padrão de Galerkin ou método de Bubnov-Galerkin, que resulta em uma forma semelhante ao método de diferenças centradas, a estabilização é feita pela adição de operadores do Laplaciano das variáveis do escoamento para as equações governantes. No método SUPG se produz um efeito de *upwind* por meio da adição de um termo de perturbação, dependente da solução numérica, às funções de teste do método de Galerkin. A formulação por mínimos quadrados contém termos de dissipação inerentes, e produz matrizes simétricas e positivo definidas.

Em 1995, o algoritmo CBS foi apresentado por Zienkiewicz et al. (1999) como sendo semelhante ao o método de Taylor-Galerkin (DONEA, 1984). O controle da difusão nestes esquemas surge naturalmente ao se fazer a discretização no tempo. Em particular no algoritmo CBS, baseado no método das Características de Galerkin, a derivada temporal é discretizada ao longo da característica, na qual a natureza da equação é auto-adjunta e então a aproximação no espaço pelo método de Galerkin é ótima (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000a).

3.1 O Algoritmo CBS (Characteristic Based Split)

No algoritmo CBS o passo no tempo é feito utilizando-se do procedimento de separação, ou *operador splitting*, adaptado para o contexto do Método de Elementos Finitos a partir do trabalho em Diferenças Finitas de Chorin (1968). Muitas referências são citadas em Massarotti et al. (1998). Neste método o perfil de velocidades intermediário é calculado segundo a equação da quantidade de movimento, na qual os termos de pressão foram omitidos. O campo de pressão é então calculado utilizando este perfil de velocidades em uma equação semelhante à equação de Poisson. Finalmente o perfil de velocidades é corrigido utilizando o campo de pressão.

Para ilustrar a aplicação do algoritmo é considerada a seguinte equação de convecção-difusão na forma escalar, Eq. (3.1):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} + \frac{\partial G_i}{\partial x_i} = Q \quad (3.1)$$

Considerando o caso unidimensional da Eq. (3.1), tem-se então o seguinte problema:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = Q \quad (3.2)$$

Admitindo-se uma mudança na variável x para x' de tal forma que:

$$dx' = dx - Udt \quad (3.3)$$

A equação unidimensional no espaço, Eq. (3.2) se torna:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x'} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x'} \right) = Q \quad (3.4)$$

Na Eq. (3.4), uma vez que $\phi = \phi(x', t)$, foi utilizado que:

$$\left. \frac{\partial \phi(x', t)}{\partial t} \right|_{x'=cte} = \frac{\partial \phi}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{x'=cte} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{x'=cte} - U \frac{\partial \phi}{\partial x'} \quad (3.5)$$

Dentre muitas formas do método das características de Galerkin, foi utilizada uma forma simples e econômica computacionalmente, mostrada em Zienkiewicz e Taylor (2000a), na qual também há muitas outras referências para outras formas do método das características de Galerkin implementadas com sucesso. O método foi apresentado primeiramente em Zienkiewicz et al. (1984) e utiliza uma aproximação em série de Taylor, como será visto a seguir.

A partir da Eq. (3.5) vê-se que ao longo da coordenada característica os termos de aceleração convectiva desaparecem e os termos de fonte e difusão são quantidades médias. Agora a aproximação por Galerkin é ótima já que a equação é auto-adjunta (CONNOR; BREBBIA, 1976).

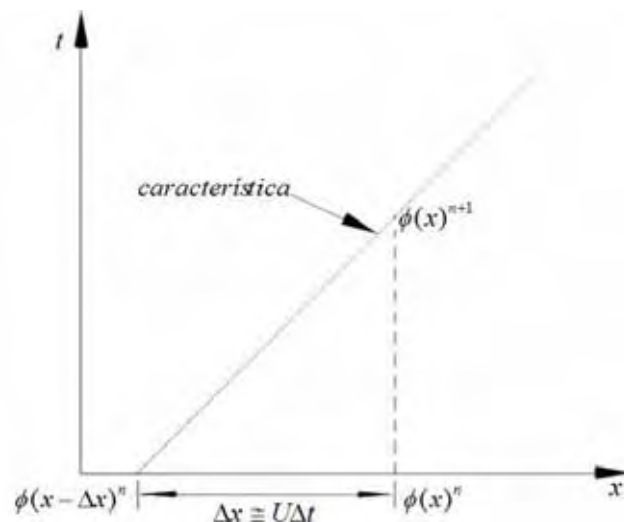


Figura 3.1: Característica linear.

Discretizando a Eq. (3.5) no tempo, de acordo com a Fig. 3.1 resulta:

$$\phi^{n+1} - \phi^n|_{x-\Delta x} \approx \Delta t \left\{ \theta \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - Q \right]^{n+1} + (1 - \theta) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - Q \right]^n \Big|_{x-\Delta x} \right\} \quad (3.6)$$

na qual θ é zero para o caso totalmente explícito e entre zero e a unidade para os casos semi e totalmente implícito. Fazendo uma expansão em série de Taylor é possível expressar os termos em $(x - \Delta x)$ como função dos termos em x :

$$\phi^n|_{x-\Delta x} \approx \phi^n - \Delta x \frac{\partial \phi^n}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x^2} + O(\Delta x^3) \quad (3.7)$$

Para $\theta = \frac{1}{2}$ tem-se:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \Big|_{(x-\Delta x)} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n \right] + O(\Delta x^2) \quad (3.8)$$

e

$$\frac{1}{2} Q|_{(x-\Delta x)} \approx \frac{Q^n}{2} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial Q^n}{\partial x} \quad (3.9)$$

A distância Δx percorrida pela partícula na direção x , conforme a Fig. 3.1, pode ser dada como:

$$\Delta x = \bar{U} \Delta t \quad (3.10)$$

Uma aproximação alternativa para \bar{U} é:

$$\bar{U} = \frac{U^{n+1} + U^n|_{x-\Delta x}}{2} \quad (3.11)$$

Fazendo uma expansão em série de Taylor a equação torna-se:

$$U^n|_{x-\Delta x} \approx U^n - \Delta t U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} + O(\Delta x^2) \quad (3.12)$$

Desprezando os termos de alta ordem das Eqs.(3.6 - 3.12), obtém-se:

$$\begin{aligned} (\phi^{n+1} - \phi^n) = \Delta t \left\{ -U^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial \phi^n}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2} U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \frac{\partial \phi^n}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2} (U^{n+\frac{1}{2}})^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} U^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n \right] + \right. \\ \left. - Q + \frac{\Delta t}{2} U^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial Q}{\partial x} \right\} \quad (3.13) \end{aligned}$$

na qual

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^{n+1} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n \right] \quad (3.14)$$

$$Q^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [Q^{n+1} + Q^n] \quad (3.15)$$

$$U^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [U^{n+1} + U^n] \quad (3.16)$$

A Eq. (3.12) é uma aproximação na forma não conservativa utilizando o método simples das características de Galerkin para a Eq. (3.6). Para o caso conservativo da Eq. (3.5) a Fig. 3.2 representa o comportamento não linear da característica. Assim pode se escrever, ao invés da Eq. (3.6), que:

$$\phi^{n+1} - \phi^n|_{x-\Delta x} \approx \frac{\Delta t}{U} \left\{ \theta \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial (U\phi)}{\partial x} \right) - Q \right]^{n+1} + (1 - \theta) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial (U\phi)}{\partial x} \right) - Q \right]^n \Big|_{x-\Delta x} \right\} \quad (3.17)$$

E similarmente para a Eq. (3.7):

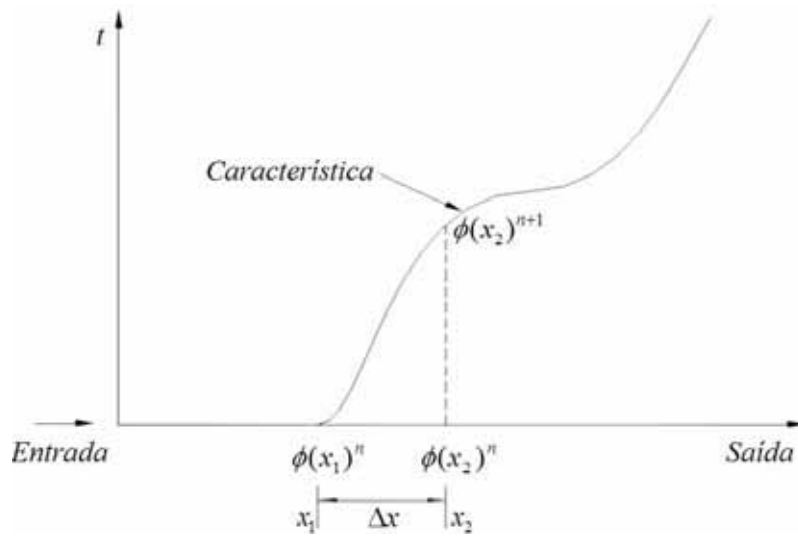


Figura 3.2: Característica não-linear.

$$\phi^n|_{x-\Delta x} \approx \phi^n - \frac{\Delta x}{U} \frac{\partial(U\phi)^n}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2U} \frac{\partial^2(U\phi)^n}{\partial x^2} + O(\Delta t^3) \quad (3.18)$$

Seguindo-se os procedimentos das Eqs.(3.6 - 3.12) e utilizando as Eqs.(3.14 - 3.16) obtém-se a equação de convecção-difusão com o método das características de Galerkin, Eq. (3.19):

$$(\phi^{n+1} - \phi^n) = -\Delta t \left[\frac{\partial(U_j\phi)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + Q \right]^n + \frac{\Delta t^2}{2} U_k^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial(U_j\phi)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + Q \right]^n \quad (3.19)$$

3.1.1 Discretização Temporal

A utilização do processo de discretização no tempo, discutido na seção anterior, para utilização na Eq. (2.4) não viscosa, só não é possível devido ao termo de pressão. Contudo, tratando esse termo como uma quantidade conhecida, a Eq. (2.4) pode ser escrita de forma adequada para aplicação do método das características de Galerkin como:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = -\frac{\partial(u_j U_i)}{\partial x_j} + Q_i^{n+\theta_2} \quad (3.20)$$

na qual,

$$U_i = \rho u_i$$

Na Eq. (3.20) o último termo do lado direito é tratado como uma quantidade conhecida, avaliada em $t = t^n + \theta_2 \Delta t$ em um incremento de tempo Δt e é dado como:

$$Q_i^{n+\theta_2} = -\frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} \quad (3.21)$$

com,

$$\frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} = \frac{\partial p^n}{\partial x_i} + \theta_2 \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} \quad (3.22)$$

e,

$$\Delta p = p^{n+1} - p^n \quad (3.23)$$

Substituindo o termo da Eq. (3.20) de forma apropriada na Eq. (3.19) e utilizando a Eq. (3.21), excluindo-se os termos difusivos, para o caso das Equações de Euler se obtém:

$$(U_i^{n+1} - U_i^n) = -\Delta t \left[\frac{\partial (u_j U_i)}{\partial x_j} + Q^{n+\theta_2} \right] + \frac{\Delta t^2}{2} u_k^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial (u_j U_i)}{\partial x_j} + Q \right]^n \quad (3.24)$$

3.2 Separação das Equações (*Split Method*)

É introduzida aqui uma aproximação de forma a utilizar a Eq. (3.24), mesmo antes do termo p^{n+1} ser avaliado. Na aproximação empregada são removidos todos os termos de pressão da Eq. (3.24). Esta e outra aproximação também freqüentemente adotada são melhor apresentadas em Zienkiewicz e Taylor (2000a).

Assim, define-se com uma variável U_i^* de tal forma que:

$$\Delta U_i^* = U_i^* - U_i^n = \Delta t \left[-\frac{\partial(u_j U_i)}{\partial x_j} + \frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial(u_j U_i)}{\partial x_j} \right]^n \quad (3.25)$$

A Eq. (3.25), com uma devida discretização pode ser resolvida para obtenção dos valores de ΔU_i^* . Após a determinação da pressão, o campo de velocidades pode ser corrigido utilizando a Eq. (3.26):

$$\Delta U_i = U_i^{n+1} - U_i^n = \Delta U_i^* - \Delta t \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} - \frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial Q_i^n}{\partial x_k} \quad (3.26)$$

Da equação da continuidade, Eq. (2.1), tem-se que:

$$\Delta \rho = \left(\frac{1}{a^2} \right)^n \Delta p = -\Delta t \frac{\partial U_i^{n+\theta_1}}{\partial x_i} = -\Delta t \left(\frac{\partial U_i^n}{\partial x_i} + \frac{\partial \Delta U_i}{\partial x_i} \right) \quad (3.27)$$

Substituindo a expressão para ΔU_i da Eq. (3.26) na Eq. (3.27) e desprezando os termos de alta ordem resulta em:

$$\Delta \rho = \left(\frac{1}{a^2} \right)^n \Delta p = -\Delta t \left\{ \frac{\partial U_i^n}{\partial x_i} + \theta_1 \frac{\partial \Delta U_i}{\partial x_i} - \Delta t \theta_1 \left[\frac{\partial^2 p^n}{\partial x_i^2} + \theta_2 \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x_i^2} \right] \right\} \quad (3.28)$$

O processo das características de Galerkin pode ser aplicado à equação da energia, Eq. (1.5), como:

$$\Delta(\rho E) = -\Delta t \frac{\partial(u_j(\rho E + p))}{\partial x_j} + \frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial(u_j(\rho E + p))}{\partial x_j} \right)^n \quad (3.29)$$

A seqüência para solução das equações de Euler e da conservação da energia é a seguinte:

1. Eq. (3.25) para determinação de ΔU_i^* ;
2. Determinação de Δp e/ou $\Delta \rho$ utilizando a Eq. (3.28);

3. Correção de ΔU_i com a Eq. (3.26) e;
4. Solução da Eq. (3.29) para determinação dos termos de energia.

3.3 Discretização Espacial

O algoritmo CBS foi utilizado na derivação das Eqs. (3.25, 3.26, 3.28 e 3.29), que são equações conservativas e que podem ser resolvidas, seqüencialmente, de maneira eficiente e com amortecimento numérico apropriado. A seguir tais equações são escritas na sua forma fraca, utilizando a aproximação pelo método de Galerkin, onde as funções peso são as funções de forma, começando pela Eq. (3.25):

$$\int_{\Omega} N_{k,u} \Delta U_i^* d\Omega = \Delta t \left[- \int_{\Omega} N_{k,u} \frac{\partial (u_j U_i)}{\partial x_j} d\Omega \right]^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left[\int_{\Omega} \frac{\partial (u_i N_{k,u})}{\partial x_i} \left(- \frac{\partial (u_j U_i)}{\partial x_j} \right) d\Omega \right]^n \quad (3.30)$$

A forma fraca para a equação da pressão/densidade, onde foi feita uma integração por partes, é dada na Eq. (3.31) como,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_{k,u} \Delta \rho d\Omega &= \frac{1}{a^2} \int_{\Omega} N_{k,u} \Delta p d\Omega \\ &= \Delta t \int_{\Omega} \frac{\partial N_{k,p}}{\partial x_i} \left[U_i^n + \theta_1 \left(\Delta U_i^* - \Delta t \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} \right) \right] d\Omega + \\ &\quad - \Delta t \theta_1 \int_{\Gamma} N_{k,p} \left(U_i^k + \Delta U_i^* - \Delta t \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} \right) n_i d\Gamma \end{aligned} \quad (3.31)$$

A correção para os termos da quantidade de movimento é similarmente dada na Eq. (3.32) como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_{k,u} \Delta U_i^{n+1} d\Omega &= \int_{\Omega} N_{k,u} \Delta U_i^* d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} N_{k,u} \left(\frac{\partial p^n}{\partial x_i} + \theta_2 \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} \right) d\Omega \\ &\quad - \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j N_{k,u}) \frac{\partial p^n}{\partial x_i} d\Omega \end{aligned} \quad (3.32)$$

E, para a equação da energia a forma fraca é dada na Eq. (3.33).

$$\int_{\Omega} N_{k,E} \Delta (\rho E)^{n+1} d\Omega = \Delta t \left[- \int_{\Omega} N_{k,E} \frac{\partial (u_j (\rho E + p))}{\partial x_j} d\Omega \right]^n \quad (3.33)$$

$$+ \frac{\Delta t^2}{2} \left[\int_{\Omega} \frac{\partial (u_j N_{k,E})}{\partial x_j} \left(- \frac{\partial (u_j (\rho E + p))}{\partial x_j} \right) d\Omega \right]^n$$

Nesta seção as Eqs. (3.25, 3.28, 3.26 e 3.29) são discretizadas espacialmente com o método de Galerkin. A aproximação no espaço é feita utilizando as seguintes funções de forma:

$$U_i = \mathbf{N}_u \tilde{\mathbf{U}}_i \quad \Delta U_i = \mathbf{N}_u \Delta \tilde{\mathbf{U}}_i \quad \Delta U_i^* = \mathbf{N}_u \Delta \tilde{\mathbf{U}}_i^* \quad u_i = \mathbf{N}_u \tilde{\mathbf{u}}_i \quad p = \mathbf{N}_p \tilde{\mathbf{p}} \quad \rho = \mathbf{N}_\rho \tilde{\rho} \quad (3.34)$$

na qual,

$$\mathbf{u}_i = [u_{i,1} \ u_{i,2} \ \dots \ u_{i,k} \ \dots \ u_{i,m}]^T \quad \mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_k \ \dots \ N_m] \quad (3.35)$$

na qual m é o número de identificação dos nós no elemento.

Aplicando o método de Galerkin, a Eq. (3.30) pode ser escrita na forma:

$$\Delta \mathbf{U}_i^* = -\mathbf{M}^{-1} \Delta t (\mathbf{C} \tilde{\mathbf{U}}_i - \Delta t \mathbf{K} \tilde{\mathbf{U}}) \quad (3.36)$$

na qual,

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \quad \mathbf{K} = \int_{\Omega} (\nabla^T (\mathbf{uN}))^T (\nabla^T (\mathbf{uN})) d\Omega \quad \mathbf{C} = \int_{\Omega} N^T (\nabla (\mathbf{uN})) d\Omega \quad (3.37)$$

Escolheu-se trabalhar a discretização espacial da Eq. (3.31) em termos da densidade. Uma vez determinado o campo de densidades, o campo de pressão pode então ser calculado. Esta discretização é dada como:

$$\Delta \tilde{\rho} = \mathbf{M}^{-1} \Delta t \left[\mathbf{G} \tilde{\mathbf{U}} + \theta_1 (\mathbf{G} \Delta \tilde{\mathbf{U}}^* - \Delta \mathbf{H} \tilde{\mathbf{p}}) \right] - \mathbf{f}_p \quad (3.38)$$

na qual,

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N})^T \nabla \mathbf{N} d\Omega \\ \mathbf{G} &= \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N})^T \mathbf{N} d\Omega \\ \mathbf{f}_p &= \Delta t \int_{\Gamma} \mathbf{N} \mathbf{n}^T \left[\tilde{\mathbf{U}}^n + \theta_1 (\Delta \tilde{\mathbf{U}}^* - \Delta t \nabla \tilde{\mathbf{p}}) \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (3.39)$$

A Eq. (3.32) é dada na forma matricial por:

$$\Delta \mathbf{U}_i = \Delta \tilde{\mathbf{U}}_i^* - \mathbf{M}^{-1} \Delta t \left[\mathbf{G}^T (\tilde{\mathbf{p}}^n + \theta_2 \Delta \tilde{\mathbf{p}}) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{P} \tilde{\mathbf{p}}^n \right] \quad (3.40)$$

na qual,

$$\mathbf{P} = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u} \mathbf{N})^T \nabla \mathbf{N} d\Omega \quad (3.41)$$

E finalmente a equação da energia pode ser escrita como:

$$\Delta \tilde{\mathbf{E}} = -\mathbf{M}^{-1} \Delta t \left(\mathbf{C} (\tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{p}}) - \Delta t \mathbf{K} (\tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{p}}) \right)^n \quad (3.42)$$

3.4 Extensão para Escoamentos Axissimétricos

Muitos problemas tridimensionais possuem simetria geométrica ao redor de um eixo de referência. A presença dessa simetria simplifica muito o método de solução para tais problemas utilizando FEM, desde que as equações governantes e as condições de contorno sejam independentes da direção circunferencial, como esboçado na Figura 3.3.

A formulação da equação de Euler para o escoamento axissimétrico segue

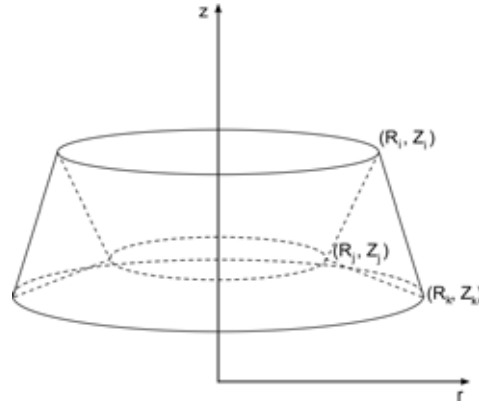


Figura 3.3: Elemento toroidal axissimétrico com área de seção transversal triangular.

como uma extensão daquela aplicada ao plano cartesiano, Equações 2.1, 2.3 e 2.10, e as equações governantes, em coordenadas cilíndricas, seguem como:

Conservação da Massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r\rho u)}{\partial r} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial z} = 0 \quad (3.43)$$

Equação da Quantidade de Movimento na Direção r

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r u \rho u)}{\partial r} + \frac{\partial (v \rho u)}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (3.44)$$

Equação da Quantidade de Movimento na Direção z

$$\frac{\partial (\rho v)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r u \rho v)}{\partial r} + \frac{\partial (u \rho v)}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (3.45)$$

Equação de Conservação da Energia

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r u \rho H)}{\partial r} + \frac{\partial (v \rho H)}{\partial z} = 0 \quad (3.46)$$

A aplicação do algoritmo nas Equações 3.43, 3.44, 3.45 e 3.46 segue os mesmos passos descritos nas seções anteriores. Para a discretização espacial, uma vez que a

integração das equações, embora estas sejam semelhantes àquelas para o caso bidimensional, agora necessita ser volumétrica e nesse caso foi considerado que, para um elemento triangular linear, essa integração pode ser feita como:

$$\int_{\Omega} d\Omega = \int_V dV \equiv \int_A 2\pi r dA \quad (3.47)$$

na qual A é a área do elemento bidimensional utilizado, nesse caso um triângulo, no qual r é escrito em função de seus valores nodais R_i , R_j e R_k como,

$$r = N_i R_i + N_j R_j + N_k R_k \quad (3.48)$$

Em alguns casos, por questão de simplificação, utilizou-se também que,

$$\int_{\Omega} d\Omega \approx 2\pi \bar{r} \int_A dA \quad (3.49)$$

em tal aproximação \bar{r} é dado como:

$$\bar{r} = \frac{(R_i + R_j + R_k)}{3} \quad (3.50)$$

Esta última aproximação retornará valores mais precisos de solução à medida que diminuem os tamanhos característicos dos elementos. Sobre a forma de integração nos elementos, muito mais pode ser estudado nas referências (LEWIS; NITHIARASU; SEETHARAMU, 2004), (SEGERLIND, 1984) e (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000b).

4 Amortecimento numérico nas equações de Euler

As equações de Euler formam um sistema de equações diferenciais parciais hiperbólicas e não-lineares. Duas classes de soluções podem existir para este problema; contínuas, descrevendo o transporte não-difusivo das ondas ao longo das características e soluções descontínuas, como no caso de ondas de choque. Para a solução de ambos os problemas em um mesmo programa computacional, alguns termos precisam ser adicionados, geralmente de caráter difusivo e que atuam na maioria das vezes como uma viscosidade artificial, amortecendo as oscilações numéricas indesejáveis e melhorando a solução final. Na maioria dos esquemas numéricos estes termos são adicionados naturalmente, como na discretização das equações governantes, juntamente com outros termos, que causam erros de dispersão, como no caso de alguns esquemas em FVM.

Aplicativos eficientes para solução das equações de Navier-Stokes geralmente são construídos por meio da adição de termos viscosos à um aplicativo estável e confiável de solução das equações de Euler. Entretanto, as viscosidades artificiais utilizadas para solução das equações de Euler podem, quando não inseridas e trabalhadas corretamente, interferir nas soluções das equações de Navier-Stokes, ocorrendo uma adição de quantidades indesejáveis de viscosidade artificial. Esta dissipação pode superar a dissipação física na camada limite viscosa e prejudicar a solução. Dessa forma, faz-se necessária uma maneira mais precisa e racional de inserção desse tipo de viscosidade.

4.1 Métodos para Captura de Choque

O choque, como uma região de descontinuidade das propriedades do escoamento, pode geralmente ser representado numericamente como uma região de altíssimos gradientes. Quando se trabalha com o método de elementos finitos, assim como em muitos métodos computacionais, uma maneira de se representar uma onda de choque é na forma de regiões de altíssimos gradientes. No presente trabalho é uti-

lizada uma aproximação por elementos finitos interpolando as variáveis usando uma continuidade de ordem C^0 . Nesse caso, mesmo se a descontinuidade for representada por grandes variações em alguns elementos próximos ao choque, ali pode haver a geração de oscilações numéricas, que vão persistir por grande parte do domínio e gerar erros.

Para suprimir tais oscilações, muitos esquemas de *captura* de ondas de choque foram desenvolvidos na literatura. Woodward e Colella (1984), mostraram que a captura de choque utilizando o método de viscosidade artificial é a forma mais direta de captura de choque entre os esquemas de hibridização linear e da aproximação de Godunov. E ainda se mostra uma alternativa mais econômica computacionalmente, se comparada aos esquemas de alta resolução TVD, (LYRA et al., 1994) e MUSCL (MANZARI, 1996).

Assim, nesse trabalho foi utilizado o método de viscosidade artificial de captura de choque para lidar com as características ondas de choque que surgem nesse tipo de escoamento.

4.1.1 Viscosidade Artificial

O método de viscosidade artificial foi primeiramente introduzido por Von Neumann e Richtmyer (1950). A forma de atuação do método é imitar a ação de viscosidade na vizinhança do choque e dessa forma dar mais estabilidade ao processo iterativo de solução.

No trabalho de Nithiarasu et al. (1998) foram apresentadas e testadas quatro formas de viscosidade numérica, baseadas nos gradientes da velocidade e da pressão, em um desvio de pressão (do inglês *pressure switch*) e por quarto um método anisotrópico de captura de choque.

Foi mostrado que os métodos baseados no segundo gradiente da pressão oferecem o melhor desempenho entre estes quatro tipos diferentes de esquemas de captura de choque. Este método é uma forma modificada de viscosidade de captura desenvolvida para o método de elementos finitos (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000a).

Se trata de uma forma apropriada de viscosidade artificial para escoamentos compressíveis e usa um desvio de pressão que é calculado utilizando os valores nodais da pressão (NITHIARASU; CODINA; ZIENKIEWICZ, 2006). Uma vez que as variáveis são calculadas explicitamente, elas são então modificadas, amortecidas pela adição desse

desvio de pressão, melhorando significativamente os resultados.

Por exemplo, supondo que os valores no tempo $n + 1$ de uma variável escalar ϕ já estejam determinados, os novos valores para essa variável podem ser estabelecidos como:

$$\phi_s^{n+1} = \phi^{n+1} + \mu_a \Delta t \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \quad (4.1)$$

Na Eq. (4.1), μ_a é um coeficiente de difusão artificial apropriado. Esse coeficiente precisa possuir um controle sensível à presença do choque, de forma a não alterar a solução em outras partes do domínio. Neste caso, a variável utilizada para fazer esse controle é a pressão e, segundo Zienkiewicz e Taylor (2000a), uma aproximação para um elemento pode ser dada como:

$$\mu_{ae} = C_e h (\|\mathbf{u}\| + a) S_e \quad (4.2)$$

Na Eq. (4.2) C_e é uma constante adimensional, \mathbf{u} é o vetor velocidade, a é a velocidade do som e S_e , como definido abaixo, é o desvio de pressão no elemento. Aqui, a derivada segunda da variável ϕ é avaliada da seguinte forma:

$$h^2 \frac{\overline{\partial^2 \phi}}{\partial x_i^2} \approx (\mathbf{M} - \mathbf{M}_L) \tilde{\phi} \quad (4.3)$$

onde o superscrito $\tilde{}$ indica valores nodais e \mathbf{M} e \mathbf{M}_L são as matrizes de massa consistente e concentrada respectivamente. Substituindo as Eqs. (4.2) e (4.3) na Eq. (4.1), obtém-se uma forma de correção das variáveis dada na Eq. (4.4) como:

$$\phi_s^{n+1} = \phi^{n+1} + \Delta t \mathbf{M}_L^{-1} \frac{C_e S_e}{\Delta t_e} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_L) \phi^n \quad (4.4)$$

Na Eq. (4.4) o desvio de pressão S_e é dado como uma média dos desvios nodais S_i calculados como:

$$S_i = \frac{|\sum_e (p_i - p_k)|}{\sum_e |p_i - p_k|} \quad (4.5)$$

onde $S_i = 1$ em um extremo local e $S_i = 0$ quando a pressão no nó i é uma média de todos os outros nós adjacentes ao nó i .

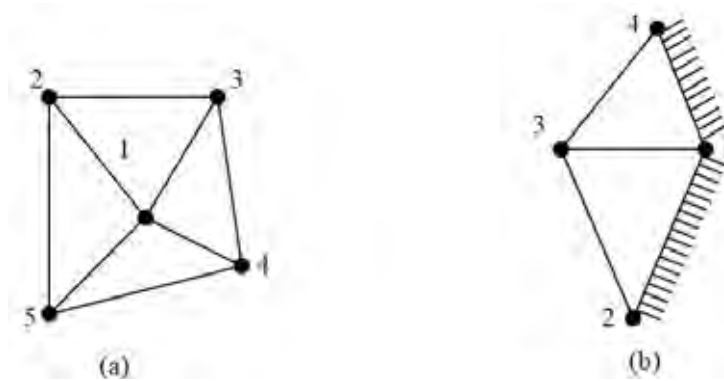


Figura 4.4: Elementos de exemplo para o cálculo dos desvios de pressão, (a) um nó interno; e (b) um nó no contorno.

Da Eq. (4.5), aplicada ao caso bidimensional da Fig. 4.4 pode ser dado que:

$$S_1 = \frac{|4p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5|}{|p_1 - p_2| + |p_1 - p_3| + |p_1 - p_4| + |p_1 - p_5|} \quad (4.6)$$

para o caso de um nó interno no domínio (Fig. 4.4(a)), e

$$S_1 = \frac{|5p_1 - 2p_2 - p_3 - 2p_4|}{2|p_1 - p_2| + |p_1 - p_3| + 2|p_1 - p_4|} \quad (4.7)$$

para um nó no contorno (Fig. 4.4(b)).

4.2 Refinamento e Adaptação de Malhas

Na seção anterior foi dito que utilizando o método de elementos finitos, as descontinuidades, como por exemplo, uma onda de choque, podem ser representadas como regiões de altíssimos gradientes. Para representar essas regiões numericamente, é necessária a utilização de malhas muito refinadas. Tal tarefa pode ser bem mais simples

quando se conhece previamente as seções para o refinamento, sendo possível assim com o uso de uma malha não estruturada, fazer um refinamento local e aperfeiçoar a solução final.

Entretanto, existem casos como em escoamentos compressíveis de altíssimas velocidades, para os quais a posição das ondas de choque não é conhecida à priori. A opção de refinar todo o domínio é muito cara computacionalmente, e em vista disso, cada vez mais a técnica de refinamento adaptativo é empregada.

Entre as vantagens de utilização do método estão: maior precisão nas soluções, economia no número total de pontos (nós) do domínio, levando à necessidade de menores tempos de processamento e de armazenamento computacionais. Existem duas formas principais para esse tipo de refinamento: por deslocamento de nós (ou *h-refinement*), (SCALABRIN et al., 2004) e por enriquecimento de malha (*adição de novos nós à malha*) (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000a). Segundo Löhner et al. (1986), a primeira forma é mais simples de implementação e é geralmente utilizada quando o analista já possui um conhecimento prévio da solução final.

Para o caso transiente de escoamentos de fluidos, cujo comportamento exige que porções diferentes da malha no domínio sejam refinadas e refeitas a cada passo de tempo, o método prova ser ainda mais benéfico. Este processo adaptativo de refino é feito com base em um erro, que no caso de elementos finitos, pode estar associado aos nós e/ou elementos em um processo de solução qualquer. A malha é então refinada de modo que esses erros sejam distribuídos igualmente por todo o domínio analisado, como representado pela Eq. (4.8).

$$\max_{\Omega} |\phi - \phi'| < \varepsilon \quad (4.8)$$

Na Equação (4.8), Ω é o domínio analisado, ϕ' é uma solução aproximada para a variável ϕ , e ε é uma tolerância apropriada. Quanto a forma na qual esse erro é medido, várias possibilidades existem, e são apresentadas em Babuska et al. (1986). Será utilizado aqui uma forma baseada na derivada segunda da variável ϕ , dado em Peraire et al. (1987) como:

$$e = \phi - \phi' \approx ch^2 \frac{d^2\phi}{dx^2} \quad (4.9)$$

onde c é uma constante definida pelo usuário. Assim, uma vez obtida a solução por meio de uma malha inicial (ou grosseira), calcula-se o erro e pela Eq. (4.9) e se refina a malha novamente até que o seguinte critério seja satisfeito sobre todo o domínio:

$$h^2 \frac{d^2 \phi}{dx^2} \leq e_p \quad (4.10)$$

Na Equação (4.10), e_p é um erro permissível, definido previamente e ϕ pode ser escolhida como qualquer uma das variáveis conhecidas do escoamento, como a pressão p , a velocidade u ou a densidade ρ . A escolha das variáveis influencia muito no refinamento obtido e é melhor discutida em Zienkiewicz (2000a) e ainda, nesta mesma referência, o erro dado pela Eq. (4.10) é aproximado da seguinte maneira: Assume-se que a derivada segunda pode ser interpolada exatamente da mesma forma que a função principal e aproximada como:

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \right)^* = \mathbf{N} \left(\overline{\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}} \right)^* \quad (4.11)$$

Esta aproximação pode ser escrita como uma aproximação por mínimos quadrados (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000a) como:

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \left[\mathbf{N} \left(\overline{\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}} \right)^* - \frac{\partial^2 \phi^h}{\partial x_i \partial x_j} \right] d\Omega = 0 \quad (4.12)$$

que, integrando por partes dá:

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \right)^* = \mathbf{M}^{-1} \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \frac{\partial^2 \phi^h}{\partial x_i \partial x_j} d\Omega \right) = -\mathbf{M}^{-1} \left(\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} d\Omega \right) \tilde{\phi} \quad (4.13)$$

No presente trabalho, \mathbf{M} é utilizada como a matriz de massa concentrada como dada na Equação 3.37. Uma vez que neste trabalho é utilizado o método de refinamento de malha por enriquecimento, a forma tensorial de cálculo do erro dado pela Eq. 4.13, necessária principalmente para determinação das direções principais de alongamento de um elemento finito, é substituída por:

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_i} \right)^* = -\mathbf{M}^{-1} \left(\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} d\Omega \right) \tilde{\phi} \quad (4.14)$$

Dois exemplos de adaptação de malhas obtidas com esse método são mostrados nas Figs. 4.5 e 4.6. Nota-se nas duas figuras a auto-adaptação nas regiões próximas à ocorrência de ondas de choque.

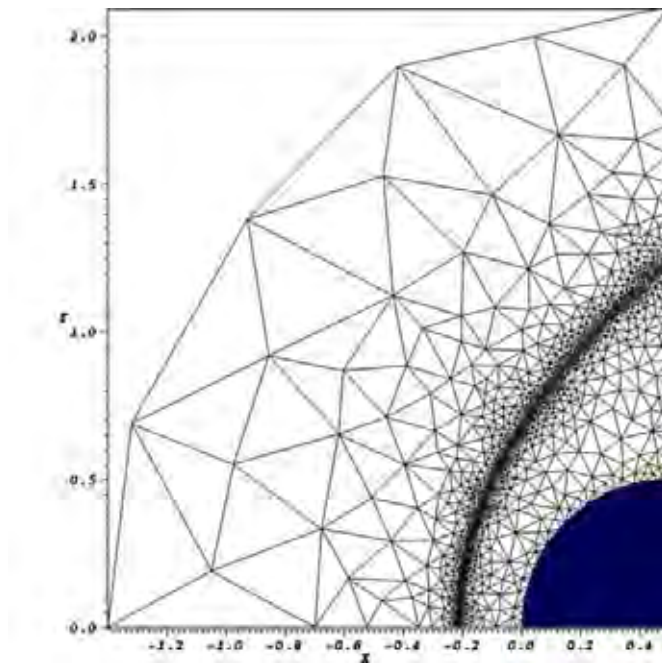


Figura 4.5: Malha para escoamento hipersônico com $M = 6$ ao redor de um cilindro infinito.

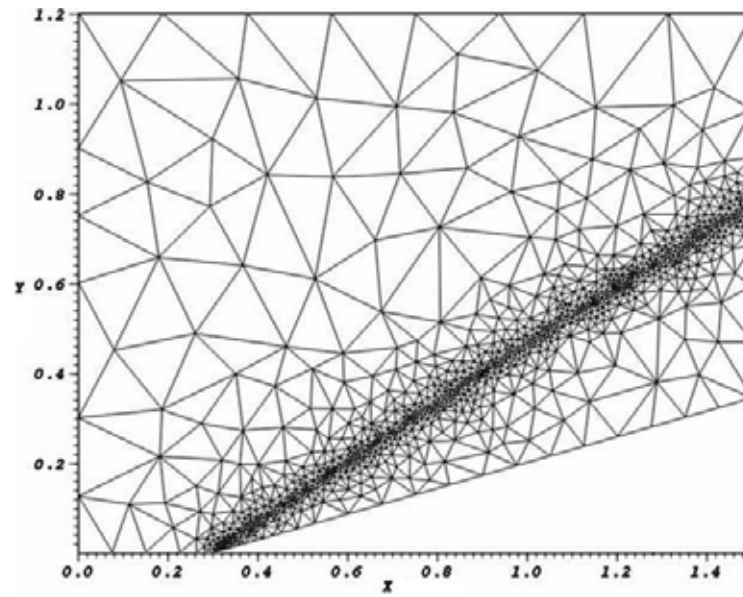


Figura 4.6: Malha para o problema de escoamento supersônico sobre uma rampa a $M = 3$.

5 O Aplicativo Computacional

Nos capítulos 2 e 3 foram apresentados, respectivamente, um modelo matemático e um modelo numérico para a solução das equações de Euler. Existem muitas maneiras de implementação computacional para o modelo numérico, que dependem das ferramentas computacionais disponíveis e, principalmente da linguagem de programação empregada. Devido ao alto custo envolvido com o licenciamento de softwares comerciais, e principalmente à possibilidade de não se estar trabalhando com programas computacionais em que não se tem acesso ao código fonte, no presente trabalho são utilizados softwares livres, na sua maioria, de código fonte aberto.

As possibilidades são muitas, observadas em nomes já consagrados, que vão desde sistemas operacionais, como o Linux, utilitários como Gimp[©] e até mesmo linguagens de programação de uso geral, como Perl e Python. Programas de código livre permitem ainda uma melhor integração entre si, além do fato de poderem ser melhorados, estendidos, para melhor se adequar a determinado problema. Para a solução das equações de Euler, foi criado um aplicativo de código livre, a saber, *pySolver*, cujos componentes e características são resumidas a seguir.

5.1 Ferramentas de Código Livre

Esta seção apresenta um aplicativo para a solução de problemas de condução de calor e de escoamentos de fluidos compressíveis pelo método de elementos finitos. Trata-se de uma seqüência do trabalho de Lourenço et al. (2006), onde foi apresentado uma primeira versão do código computacional *pySolver*, para a solução de problemas elípticos. Assim como naquele caso, esta nova versão conta com uma eficiente interface gráfica para o usuário, bem como utiliza orientação a objetos e métodos otimizados para a obtenção da solução do sistema de equações.

O programa, escrito nas linguagens Python e C, utiliza Blender e os códigos *Triangle* (SHEWCHUK, 1996), escrito também em C e *TetGen* em C++. Blender é um

aplicativo em código aberto para desenvolvimento e representação gráfica de objetos bi e tridimensionais. Embora seja escrito em linguagem C, possui internamente um interpretador da linguagem Python, permitindo, entre outras coisas, a criação, o acesso e a manipulação dos objetos de Blender por meio de scripts, que são arquivos para entrada de comandos em Python.

Triangle é um gerador de malhas bidimensionais, por triangularização de Delaunay, como descrito em Shewchuk (1996). De forma semelhante, *TetGen* é um gerador de malhas tridimensionais, por Tetraedralização Forçada de Delaunay (CDT). Esses dois códigos computacionais são abertos e geram malhas não estruturadas, de alta qualidade e são apropriados para geração de malhas adaptativas, uma vez que possuem formas de entrada de parâmetros como valores máximos para lados, áreas e volumes dos elementos. Dois exemplos dados estão nas Figs. 5.1(a) e 5.1(b), nas quais são mostradas, respectivamente, uma tetragonalização feita com o programa *TetGen* e uma triangularização do programa *Triangle*.

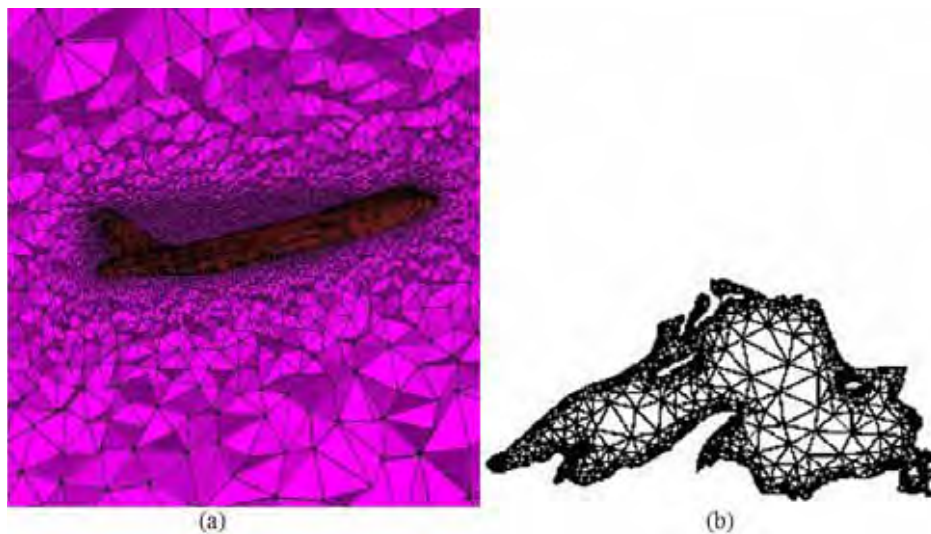


Figura 5.1: Discretização de domínios em elementos finitos, (a) Exemplo de tetragonalização ao redor de um Boeing 747; e (b) um exemplo simples de triangularização com refinamento no contorno.

Fontes: <http://tetgen.berlios.de> e <http://www.cs.cmu.edu/quake/triangle.html>, respectivamente.

Para examinar os resultados, utilizou-se Visit[©], que é uma ferramenta livre, paralelizada, que faz análises gráficas e visualizações de dados científicos em 2D e 3D e que, assim como Blender, aceita scripts em Python para manipulação de objetos, tornando-a eficientemente interativa para o usuário. Todas essas ferramentas

apresentadas são disponíveis para a maioria dos sistemas operacionais, ou seja são multiplataforma, assim como Python a linguagem de programação que as integra e que será discutida no item seguinte.

5.1.1 A Linguagem Python

Python é uma linguagem de programação clara e expressiva, que permite uma maior concentração do programador sobre o algoritmo e não sobre o código. É dinamicamente tipada, interpretada e orientada a objetos. Sendo de altíssimo nível, sua utilização não é condicionada por detalhes, tais como gerenciamento de memória, tipos de dados ou outras funcionalidades características das linguagens convencionais.

Sua estrutura orientada a objetos permite a construção de algoritmos complexos e com alta legibilidade, contribuindo para um melhor reaproveitamento de código, assim como para sua extensão e otimização. Devido a tais características, é utilizada por grandes corporações como Google e instituições como a agência espacial norte americana NASA e o laboratório Livermore, e como linguagem de script em softwares científicos como o Fluent[©].

O interpretador mais comum de Python (*Cpython*), é escrito em C, o que permite que códigos também escritos nessa linguagem sejam compilados em módulos e carregados na forma de uma biblioteca dentro de um script, com perda de desempenho computacional muito baixa. Existem até mesmo formas automatizadas de se compilar um arquivo C ou Fortran[©] para Python, conforme as referências Beazley e Lomdahl (1997), para o primeiro caso e Peterson et al (2001) para o segundo.

Uma vez carregado, este módulo se torna um objeto de Python, associando o desempenho de C com o alto nível de estruturas próprias de Python, como, por exemplo, os dicionários, que são estruturas altamente otimizadas de mapeamento de objetos. No presente trabalho, dicionários são extensivamente utilizados para a referência às condições de contorno das equações, assim como para o armazenamento dos termos das matrizes esparsas resultantes do sistema de equações.

5.1.2 Estrutura do Programa

No aplicativo criado, Python atua como um elemento integrador de todo o aplicativo que incorpora, além de uma versão especialmente modificada do programa Triangle, outros módulos escritos na linguagem C com o objetivo de otimizar a velo-

cidade de execução de estruturas de baixo nível, principalmente estruturas computacionais como laços. Enquanto que o alto nível de Python permite rápidas alterações, assim também como aperfeiçoamentos no programa.

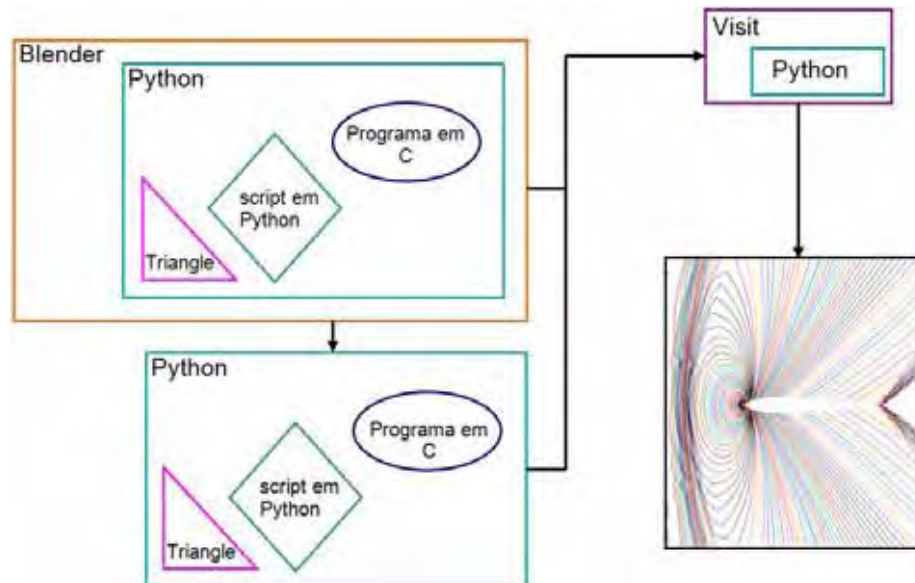


Figura 5.2: Representação esquemática da estrutura do aplicativo.

O aplicativo pode ser melhor esquematizado conforme ilustrado na Fig. 5.2. As estruturas em verde escuro são repetidas devido à possibilidade de que, após a definição de um problema, este possa ser resolvido com ou sem a execução do programa Blender, visando uma maior economia de memória computacional. No esquema, nas cores magenta e azul escuro estão programas em C convertidos em módulos para Python. O losango em verde claro contém scripts em Python e as estruturas em verde escuro correspondem ao aplicativo controlador escrito em Python. Este pode tanto ser invocado internamente ao Blender ou através de uma linha de comando. Um exemplo de utilização contendo informações adicionais do programa é encontrado no Apêndice A enquanto que no Apêndice B é mostrado um pouco da estrutura de dados do programa.

6 Resultados e Discussão

Nesta seção são apresentados resultados determinados com o aplicativo desenvolvido. Todos eles tratam de escoamentos compressíveis, com $\gamma = 1,4$, e são determinados utilizando as Equações de Euler. Todas as malhas são do tipo não-estruturadas, e são apresentadas somente depois de terem sido auto-refinadas para cada problema. Para os exemplos bidimensionais foram utilizados elementos finitos triangulares lineares e no caso tridimensional foram utilizados tetraedros também lineares. Os casos bidimensionais levaram em média cerca de 3,5 horas de relógio para cada simulação, no sistema operacional Windows XP[®], em um computador AMD Athlon[®] 64 X2 Dual, 2,51 GHz, 3,25 GB de RAM. O caso tridimensional foi computado no sistema operacional Linux Debian, em um computador pessoal, AMD64 - 2,1 GHz, 2,0 GB de RAM, utilizando um tempo médio de execução de 5,5 horas de relógio. A obtenção de resultados em um menor tempo de processamento computacional é esperada à partir da paralelização do código, ainda não implementada.

6.1 Escoamento Supersônico Sobre uma Rampa

Neste exemplo é mostrado a simulação de um escoamento supersônico a $M_\infty = 4$ sobre uma rampa inclinada de 20° em relação ao eixo x . Na Figura 6.1 é mostrada a malha triangular não estruturada utilizada para a simulação, composta de 3785 nós e 7465 triângulos. O campo de pressão para o problema é ilustrado na Fig. 6.2. A Fig. 6.3 mostra a distribuição de densidade sobre a rampa. A comparação do ângulo da onda de choque determinado numericamente neste trabalho, de $\alpha = 32^\circ$, concorda muito bem com o valor de $\alpha = 32,5^\circ$, determinado no trabalho de Anderson (1984), onde α é calculado em função do número de Mach na corrente livre e do ângulo de inclinação da rampa.

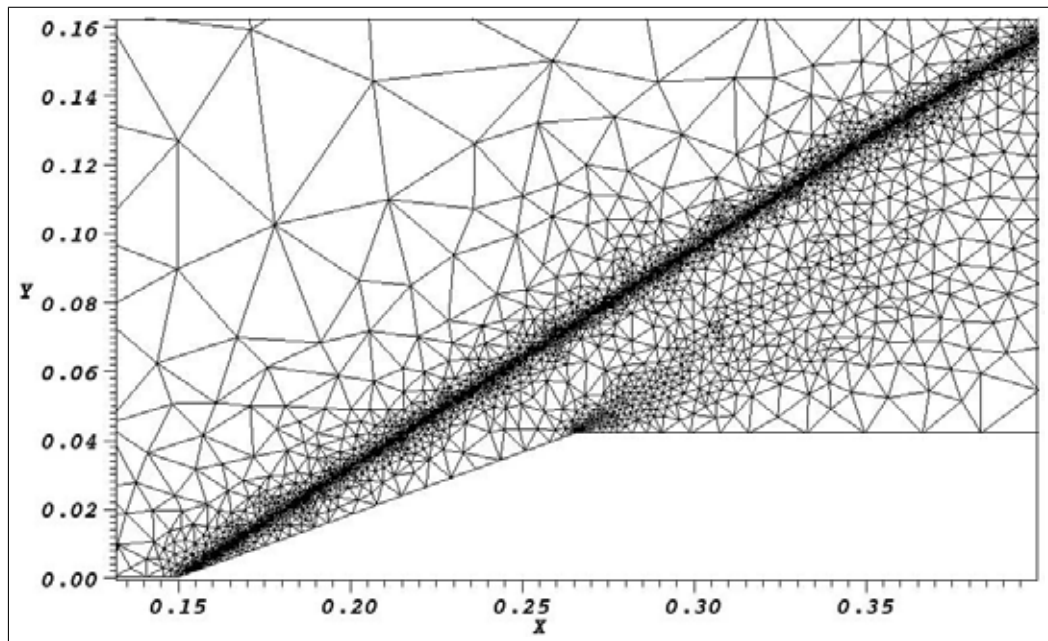


Figura 6.1: Malha não-estruturada para o escoamento supersônico sobre rampa.

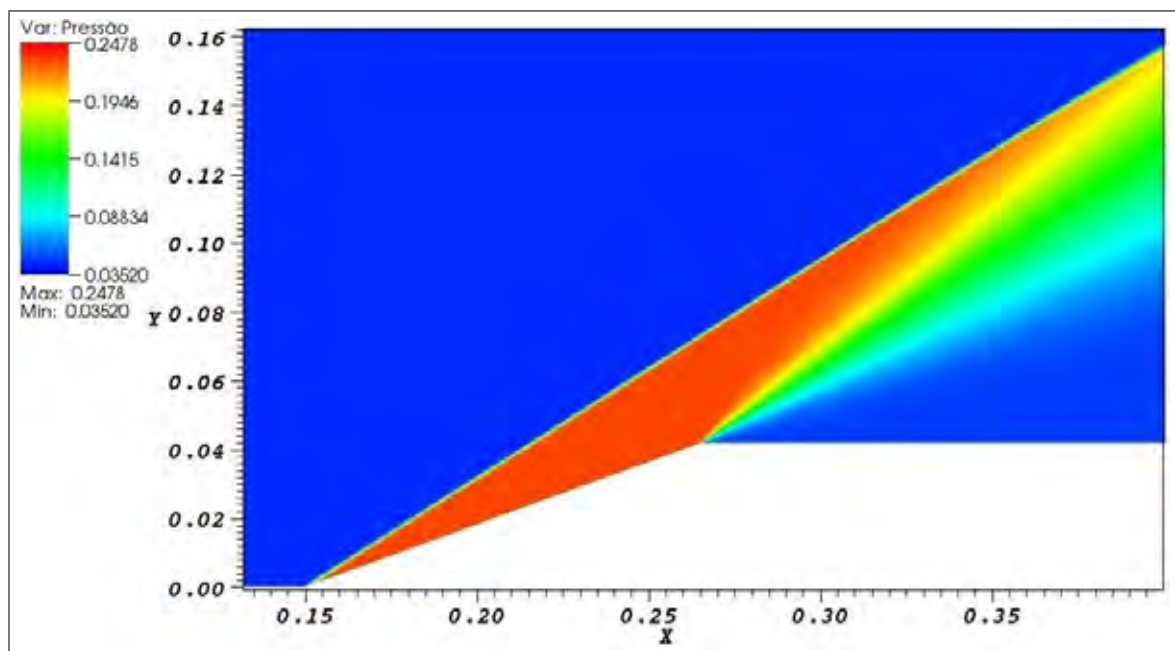


Figura 6.2: Distribuição de pressão sobre a rampa.

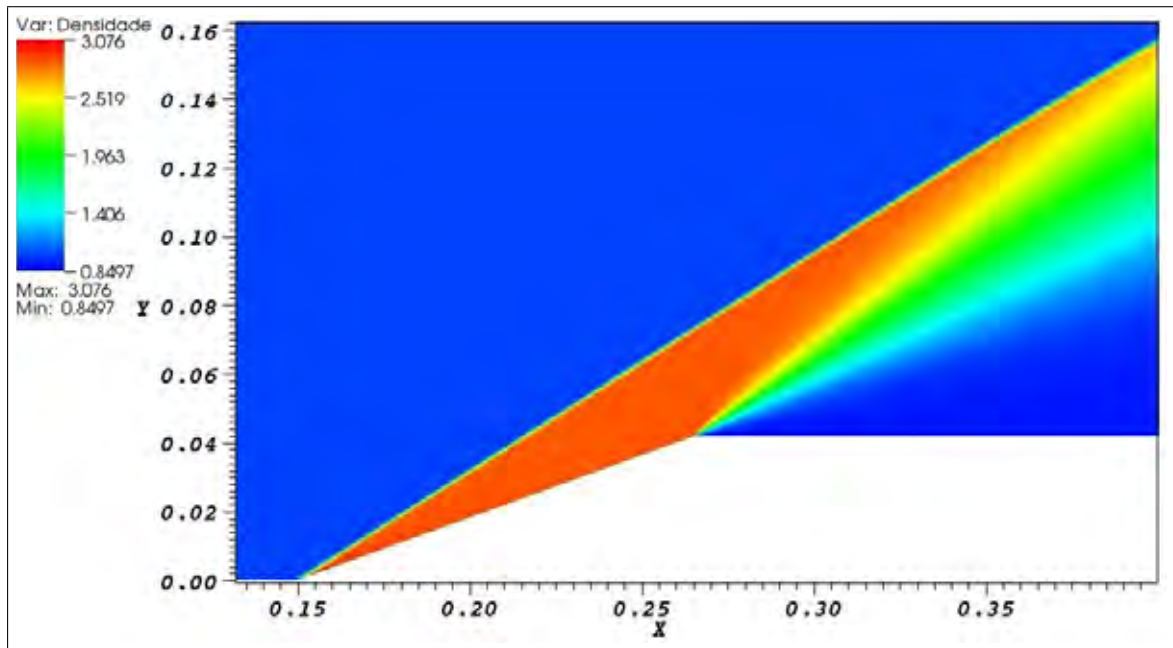


Figura 6.3: Distribuição de densidade sobre a rampa.

Na Figura 6.4 é apresentado o número de Mach no escoamento, enquanto que na Fig. 6.5 tem-se uma comparação do campo de pressão ao longo de uma linha com aqueles obtidos nos trabalhos de Jameson e Mavriplis (1986) e de Frink et al. (1991).

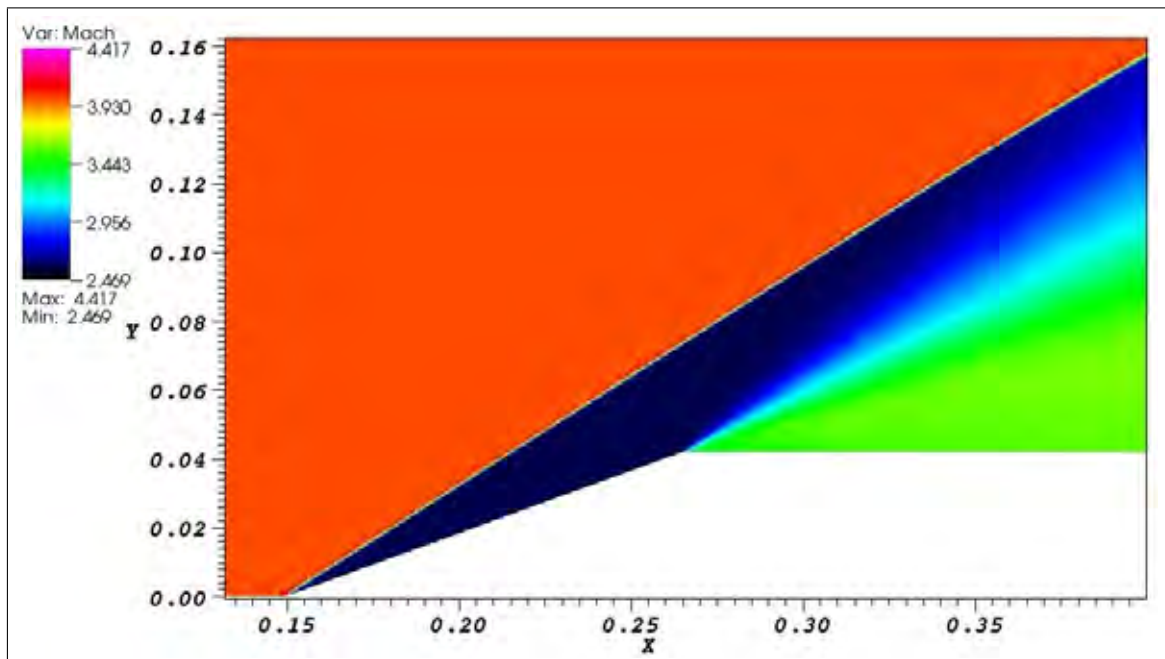


Figura 6.4: Distribuição do número de Mach sobre a rampa.

Observando a Figura 6.5 pode ser visto que o salto na pressão ocorre de uma maneira mais realista, sem muita dissipação, no presente trabalho do que nos trabalhos de Jameson e Mavriplis (1986) e de Frink et al. (1991), de acordo com a descrição para problemas supersônicos sobre corpos de formas simples na referência (HUGHES, 1967). Pode ser visto, a partir dos resultados obtidos, um ângulo de choque de $32,3^\circ$.

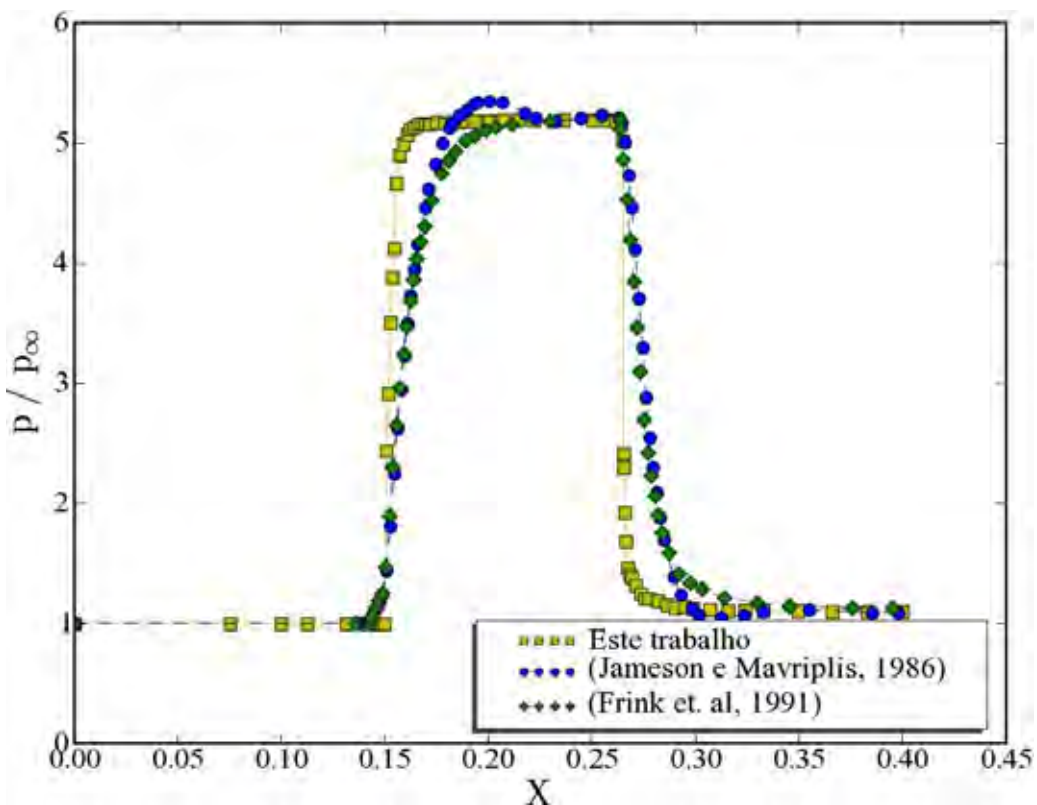


Figura 6.5: Comparação entre o valor de p/p_∞ deste trabalho com os resultados de Jameson e Mavriplis (1986) e de Frink et al. (1991), ao longo da superfície da cunha.

Assim como em Jameson e Mavriplis (1986), esse resultado é comparado com o ângulo de $32,5^\circ$ calculado em Anderson (1984) mostrando assim uma boa concordância. Sendo assim o presente problema foi útil para demonstrar a capacidade de refino do aplicativo, de forma a capturar a posição correta do choque.

6.2 Escoamento Supersônico ao Redor de um Corpo Rombo

Para este problema é utilizada uma malha não-estruturada com 7617 nós e 15133 elementos triangulares, ilustrada na Fig. 6.6a. Aqui, o escoamento hipersônico é

caracterizado por um número de Mach $M_\infty = 10$ na corrente livre e ângulo de ataque zero. A Figura 6.6b mostra o campo de pressão para este problema.

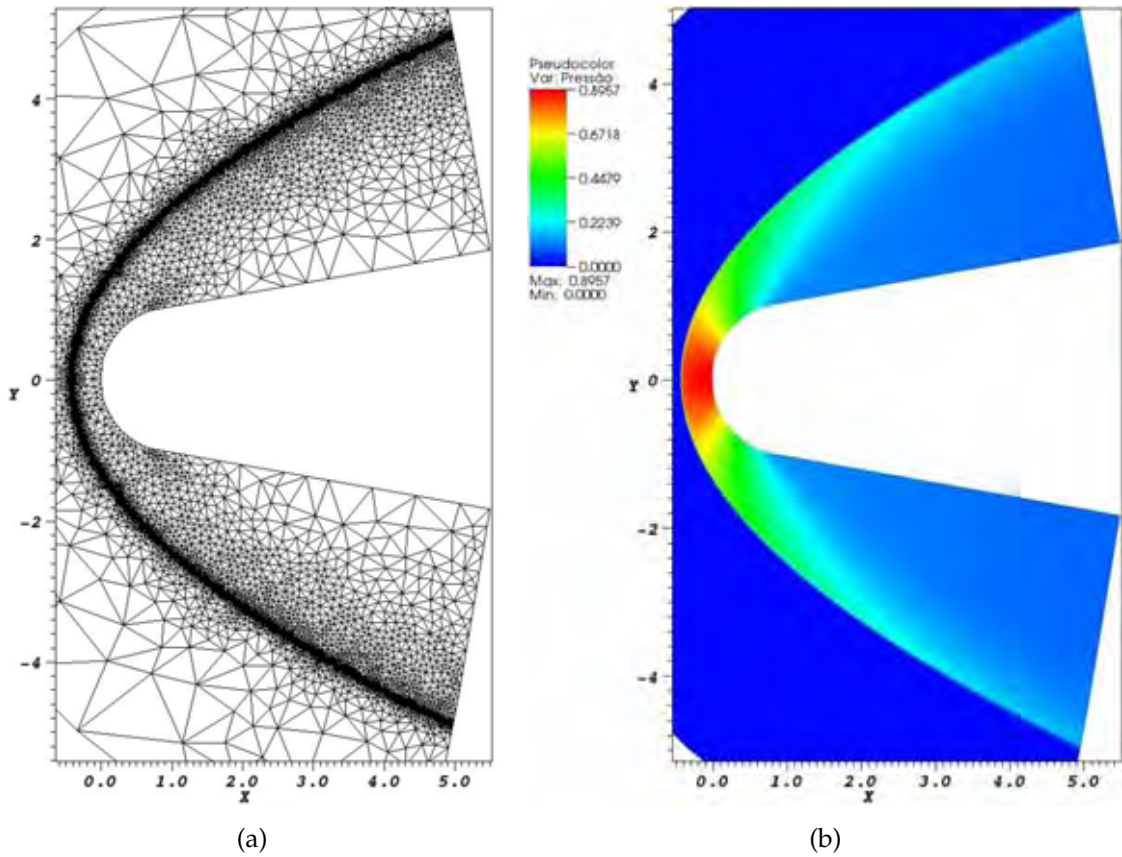


Figura 6.6: Resultados para o corpo rombudo. (a) Malha refinada para o problema; e (b) Distribuição de pressão ao redor de um corpo rombudo.

A Figura 6.7a apresenta a distribuição de densidade e o campo do número de Mach é mostrado na Fig. 6.7b. Na Figura 6.8 é mostrada uma comparação entre valor de C_p do presente trabalho com os resultados numéricos de Jameson e Mavriplis (1986), apresentando uma excelente concordância.

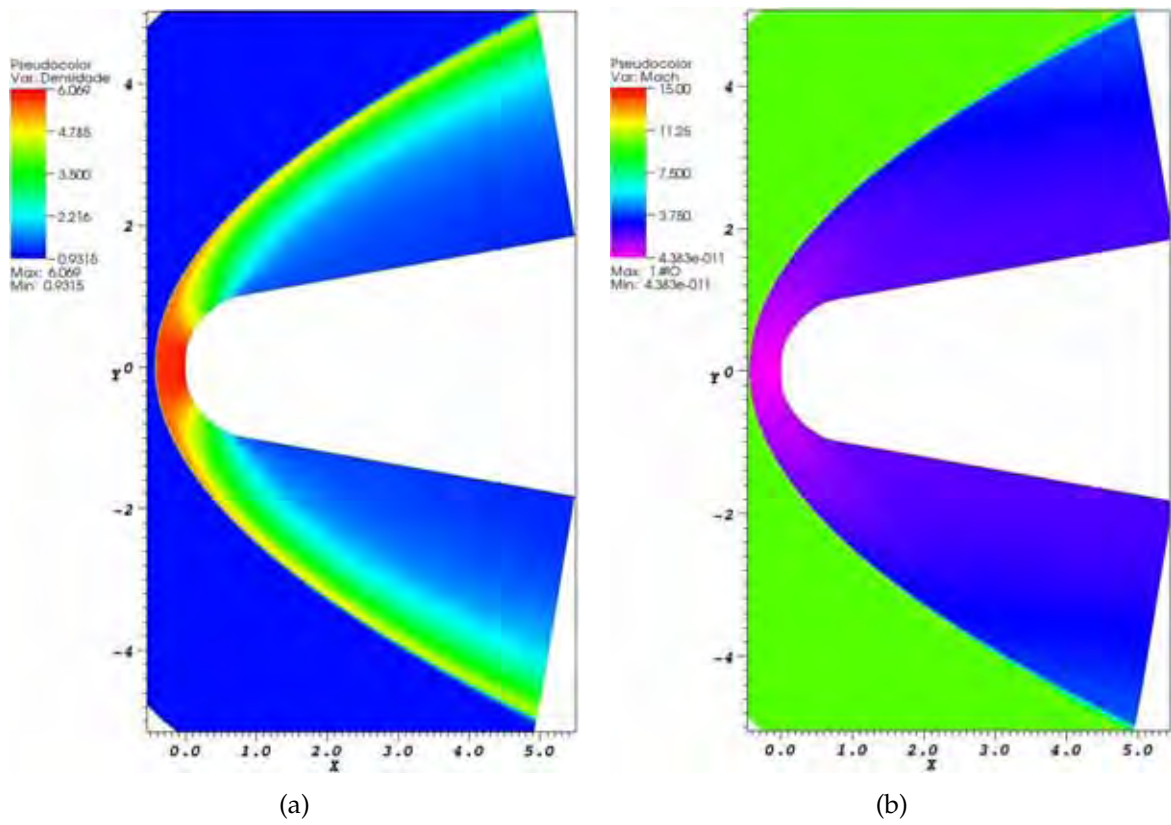


Figura 6.7: Escoamento ao redor de um corpo rombudo. (a) Distribuição de densidade; e (b) Distribuição do número de Mach.

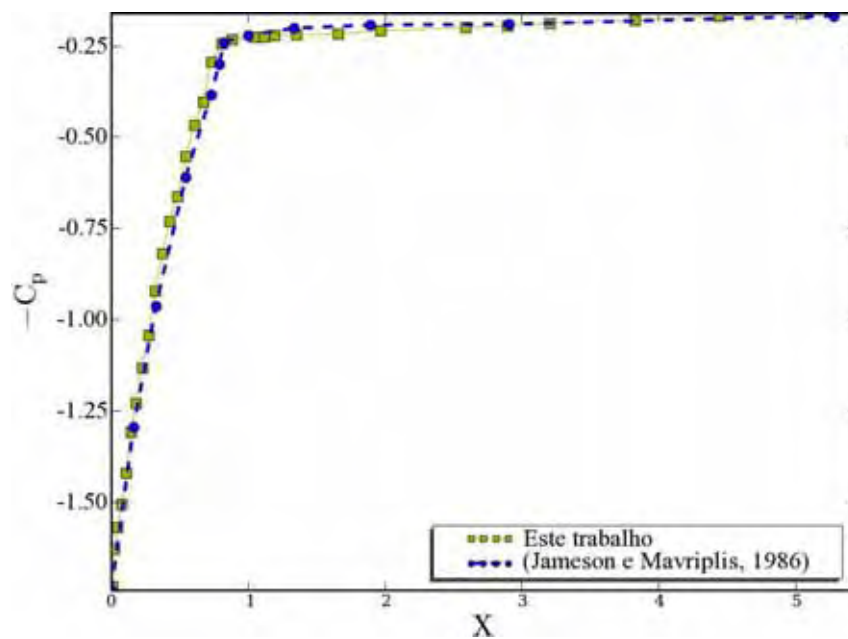


Figura 6.8: Comparação entre o valor de C_p do presente trabalho com os resultados de Jameson e Mavriplis (1986).

6.3 Escoamento Hipersônico ao Redor de um Duplo Elipsóide

Nesta seção apresentam-se resultados para o escoamento a Mach $M_\infty = 15$, ao redor de um duplo elipsóide com ângulo de ataque igual a zero. A malha triangular não-estruturada utilizada é mostrada na Fig. 6.9a e o campo de pressão na Figura 6.9b. A malha é composta de 7487 nós e 14808 triângulos.

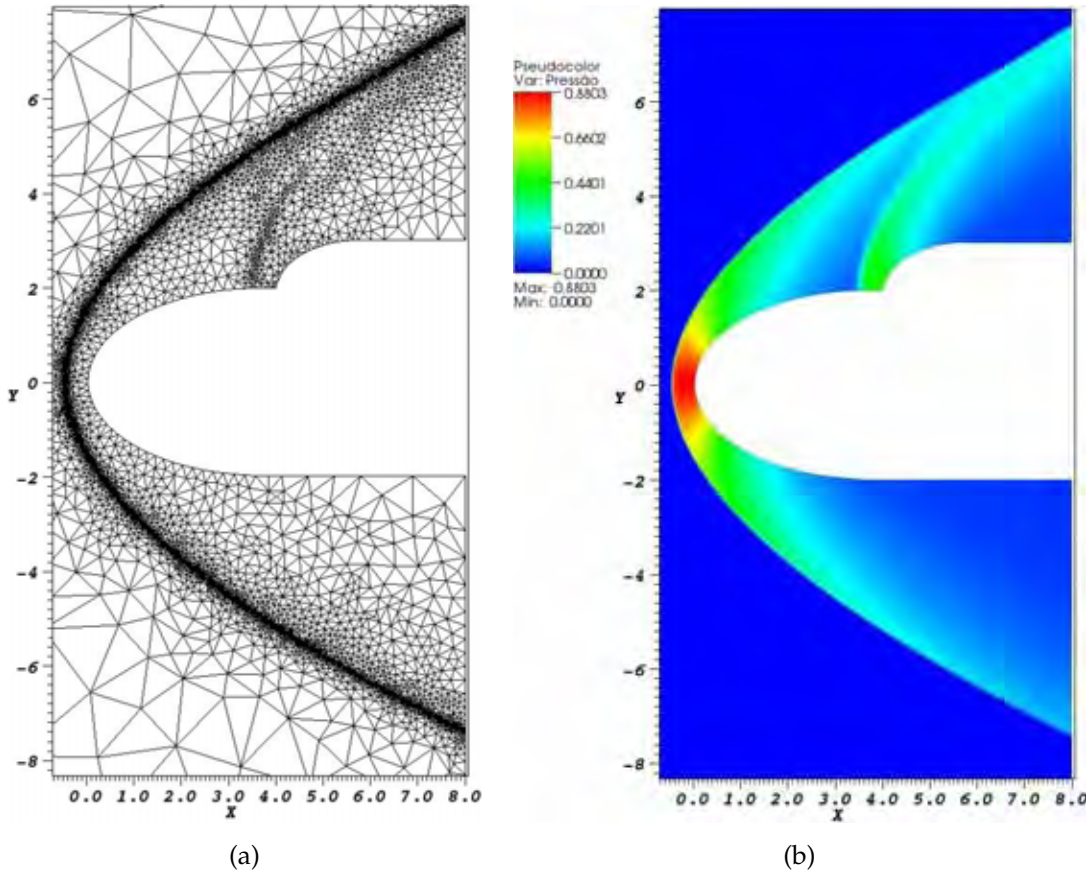


Figura 6.9: Escoamento hipersônico sobre o duplo elipsóide. (a) Malha não-estruturada; e (b) Distribuição de pressão.

A Figura 6.10a apresenta a distribuição de densidade e o campo do número de Mach é mostrado na Fig. 6.10b. Na Fig. 6.11 é mostrada uma comparação entre o valor de C_p obtido no presente trabalho com os resultados numéricos de Jameson e Mavriplis (1986).

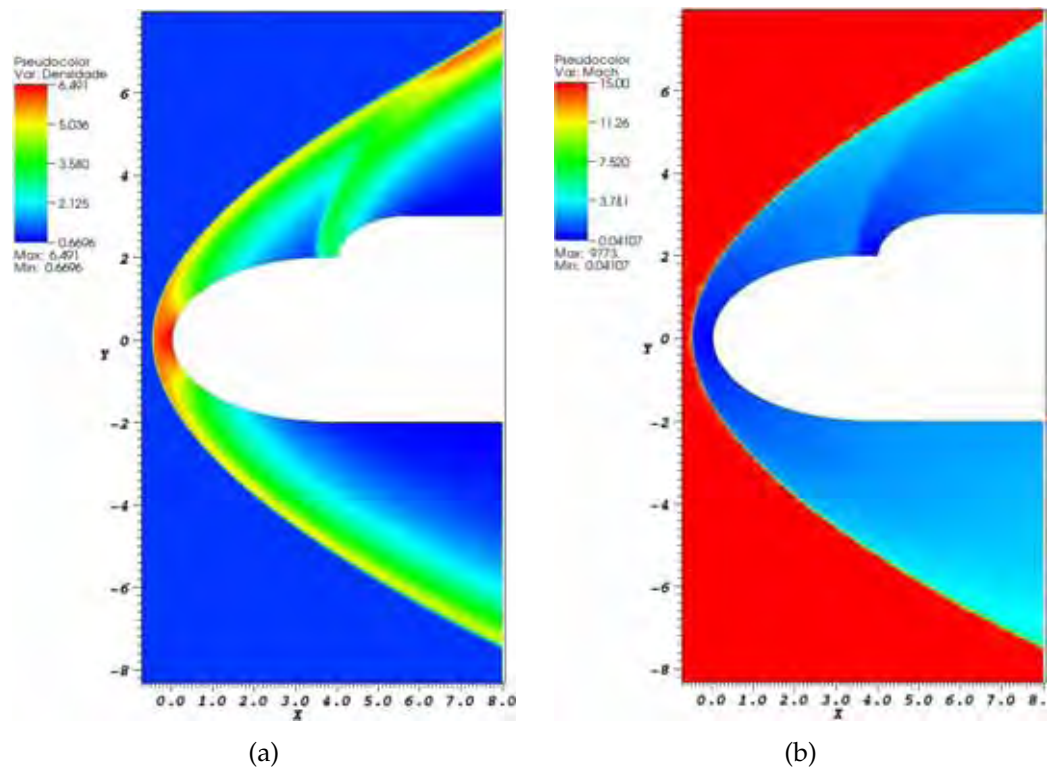


Figura 6.10: Escoamento hipersônico sobre o duplo elipsóide. (a) Distribuição de densidade; e (b) Distribuição do número de Mach.

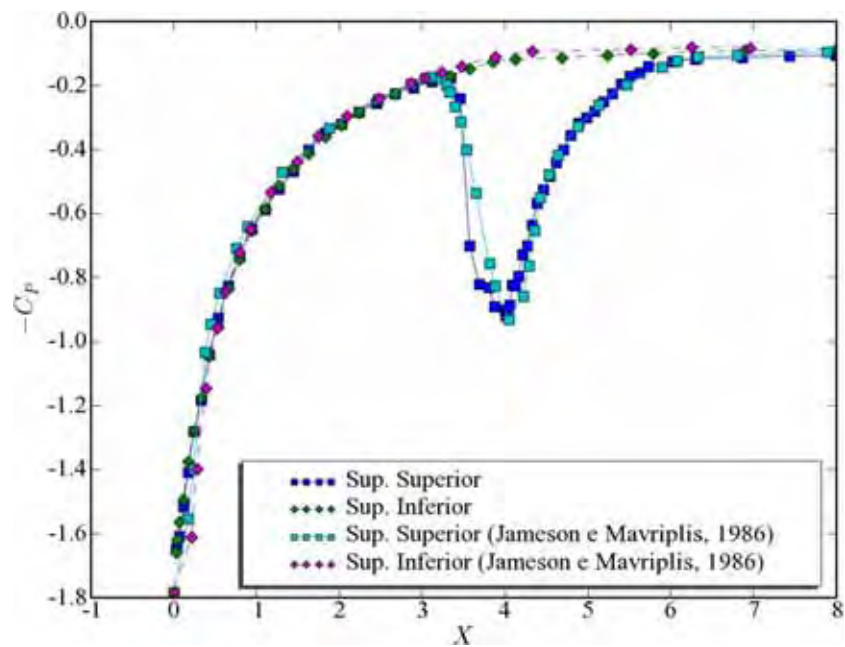


Figura 6.11: Comparação entre o valor de C_p com os resultados de Jameson e Mavriplis (1986).

6.4 Escoamento Supersônico ao Redor de uma Forma Simplificada do VLS

Esta seção trata da simulação de um escoamento supersônico com número de Mach $M_\infty = 4$ ao redor de uma configuração simplificada do Veículo Lançador de Satélites (VLS). A malha não-estruturada utilizada, com 7785 nós e 15371 elementos triangulares, é mostrada na Fig. 6.12a. O campo de pressão para o escoamento é apresentado na Fig. 6.12b.

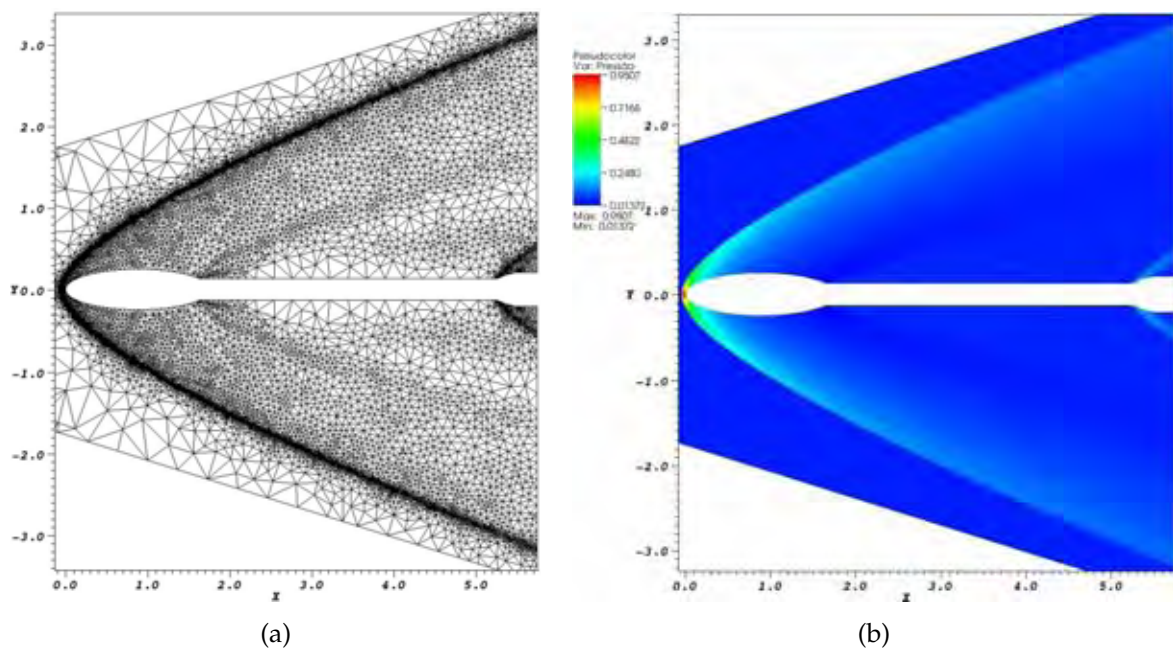


Figura 6.12: Escoamento supersônico ao redor de um esquema simplificado do VLS. (a) Malha não-estruturada utilizada; e (b) Campo de pressão.

As distribuições de densidade e do número de Mach do escoamento são mostrados, respectivamente, na Figuras 6.13 e 6.14, enquanto que a Fig. 6.15 apresenta a distribuição de C_p para o problema, que comparou bem com os resultados obtidos por Jameson e Mavriplis (1986) e de Frink et al. (1991). Deve ser lembrado aqui que a geometria do problema estudado nesta seção não foi a mesma daquela utilizada nos trabalhos de Jameson e Mavriplis (1986) e sim uma aproximada. Mesmo assim, a comparação dos resultados mostrou uma grande semelhança no comportamento da pressão superficial, além da suavidade adicional na Fig. 6.15, quando comparado aos resultados de Jameson e Mavriplis (1986). O destaque do nariz do VLS na Figura 6.13 mostra a semelhança dos resultados com àqueles do corpo rombudo.

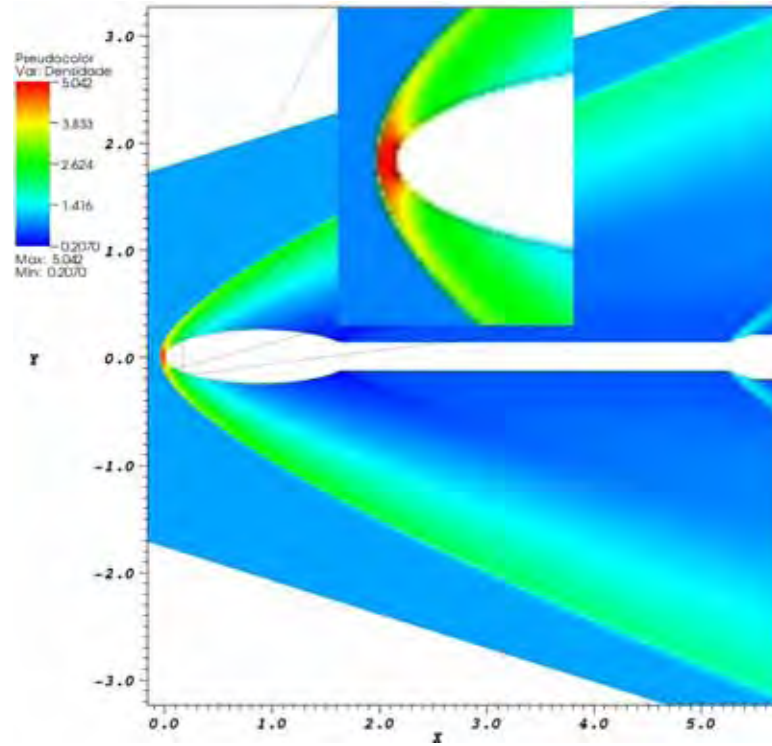


Figura 6.13: Distribuição de densidade ao redor do VLS.

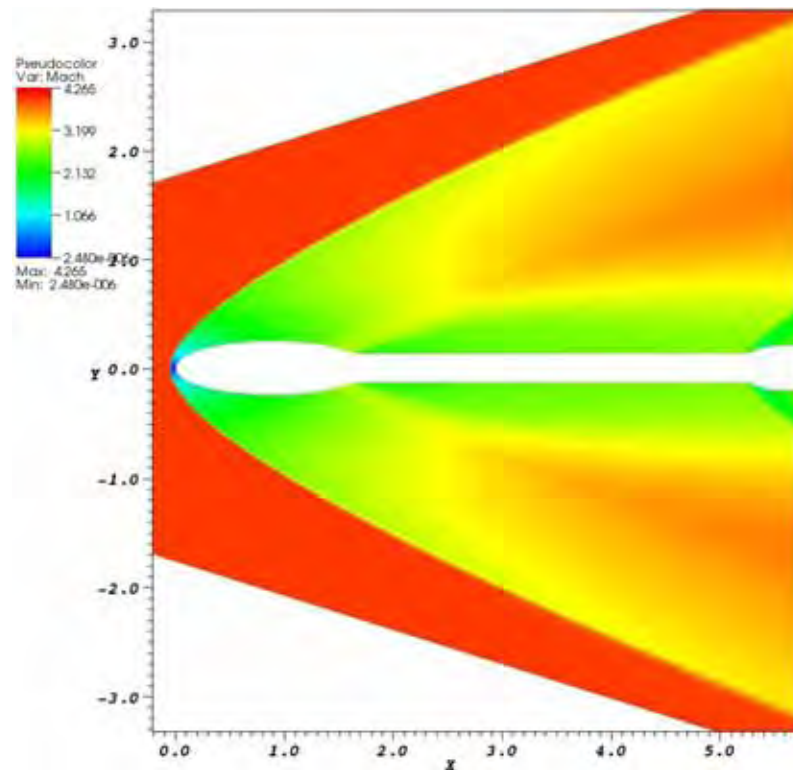


Figura 6.14: Distribuição do número de Mach ao redor do VLS.

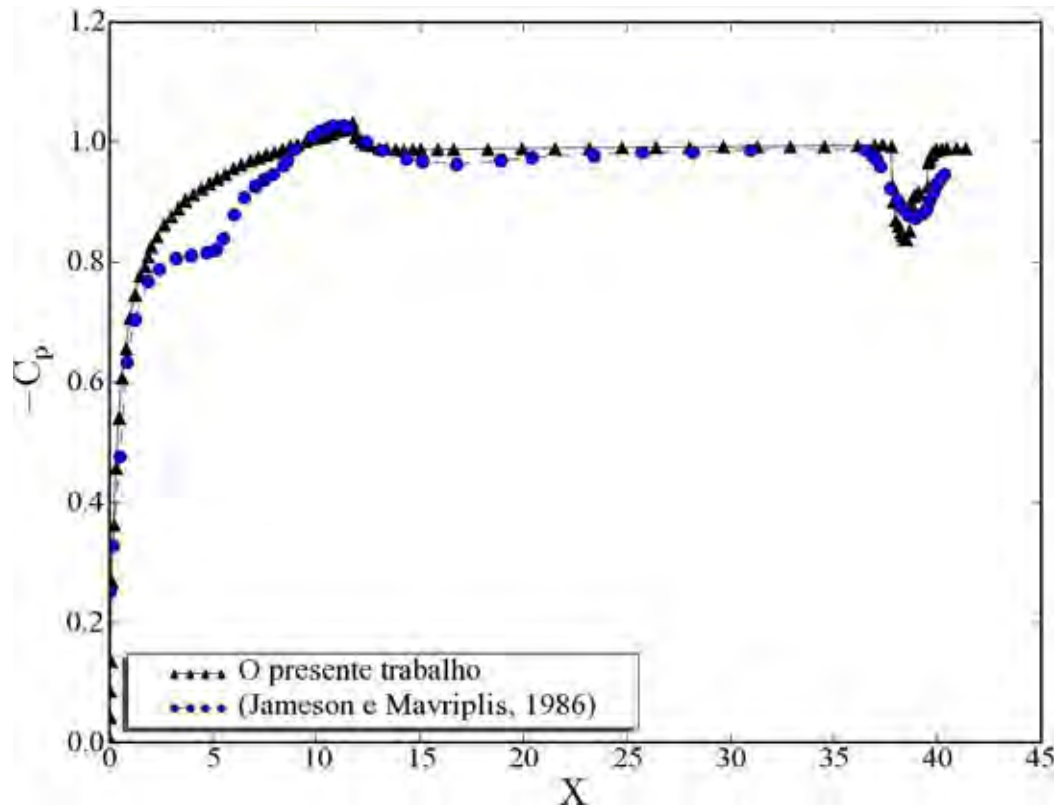


Figura 6.15: Distribuição de C_p ao redor do VLS.

6.5 Escoamento Hipersônico Axissimétrico ao Redor de uma Esfera

Resultados numéricos para o escoamento hipersônico axissimétrico tridimensional ao redor de uma esfera para $M_\infty = 5, 8$ são apresentados nesta seção. Resultados da convergência do algoritmo para esse problema são mostrados na Tabela 6.1 e esboçados no gráfico da Figura 6.16, que são dados em função dos coeficientes como o fator CFL e da viscosidade artificial μ_a . Comparados àqueles do caso bidimensional, para os mesmos valores de CFL e μ_a , a convergência, quando possível, mostrou-se mais lenta, além de ocorrer uma maior dependência com os valores de CFL e μ_a no caso axissimétrico. Isso pode ser devido principalmente ao método de integração aproximado utilizado para fazer as integrações nos elementos finitos. O caso bidimensional para esse problema é dado como aquele do escoamento hipersônico compressível ao redor de um cilindro infinito e a comparação pode ser feita com a Tabela 6.2 e esboçados no gráfico da Figura 6.17.

Tabela 6.1: Processo de convergência para o refinamento de malha para o problema de escoamento axissimétrico ao redor de uma esfera.

Iteração	Medida do erro $\left(e = h^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)$				
	$\mu_a = 0,98$ $CFL = 0,05$	$\mu_a = 0,95$ $CFL = 0,1$	$\mu_a = 0,95$ $CFL = 0,05$	$\mu_a = 0,99$ $CFL = 0,2$	$\mu_a = 0,7$ $CFL = 0,02$
1	7.30E-1	6.73E-1	6.73E-1	6.30E-01	7.93E-01
2	1.55E-1	1.50E-1	1.77E-1	1.44E-01	1.61E-01
3	1.64E-1	1.06E-1	8.05E-2	9.83E-02	9.73E-02
4	6.67E-2	3.51E-2	2.29E-2	9.98E-02	5.71E-02
5	9.89E-3	1.56E-2	1.50E-2	4.82E-02	3.04E-02
6	3.15E-2	1.50E-2	6.13E-3	8.07E-03	3.09E-02

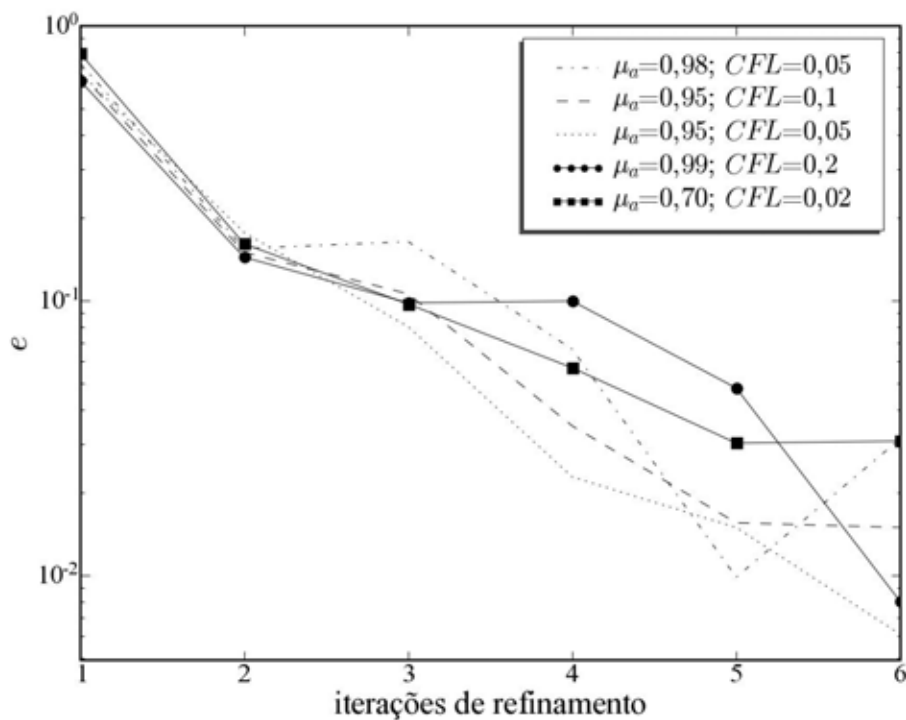


Figura 6.16: Processo de convergência para o refinamento de malha para o problema de escoamento axissimétrico ao redor de uma esfera para 5 combinações de valores de CFL e do coeficiente de viscosidade artificial μ_a .

Tabela 6.2: Processo de convergência para o refinamento de malha para o problema de escoamento bidimensional ao redor de um cilindro.

Iteração	Medida do erro $\left(e = h^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)$		
	$\mu_a = 0,98$	$\mu_a = 0,95$	$\mu_a = 0,95$
	$CFL = 0,05$	$CFL = 0,1$	$CFL = 0,05$
1	2.13E+0	1.84E+0	1.89E+0
2	9.36E-1	8.86E-1	9.07E-1
3	5.90E-1	4.74E-1	4.89E-1
4	4.26E-1	3.86E-1	3.91E-1
5	1.93E-1	1.77E-1	1.79E-1
6	8.72E-2	1.22E-1	1.34E-1

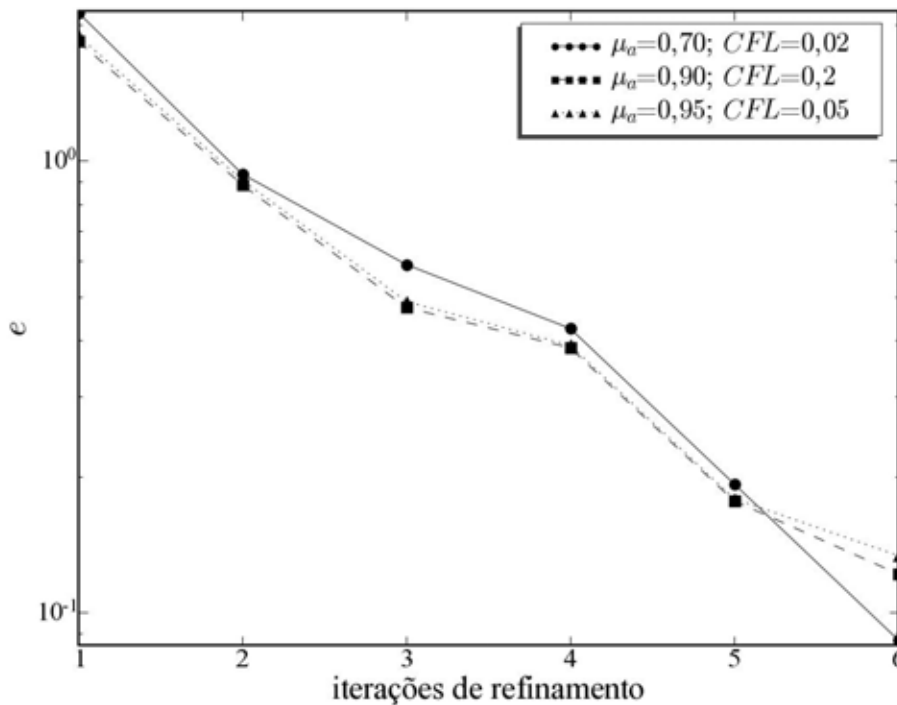
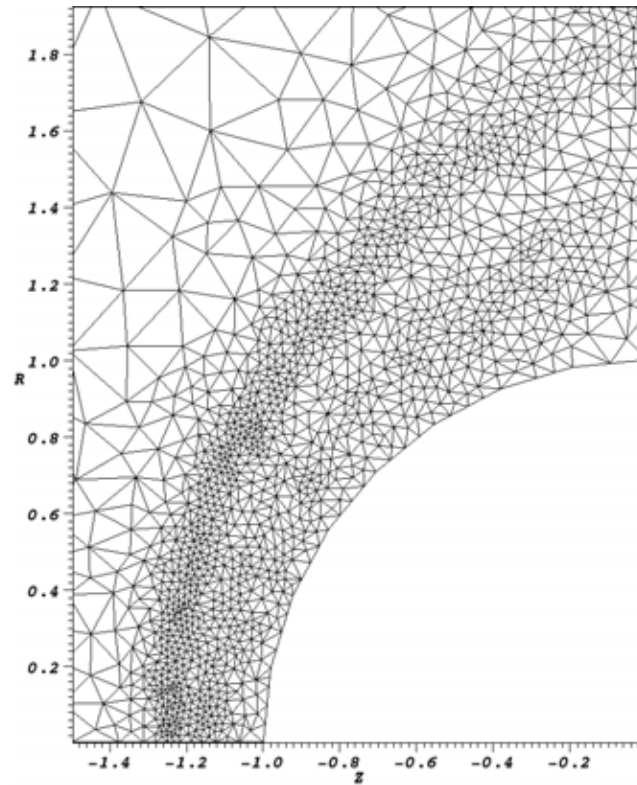
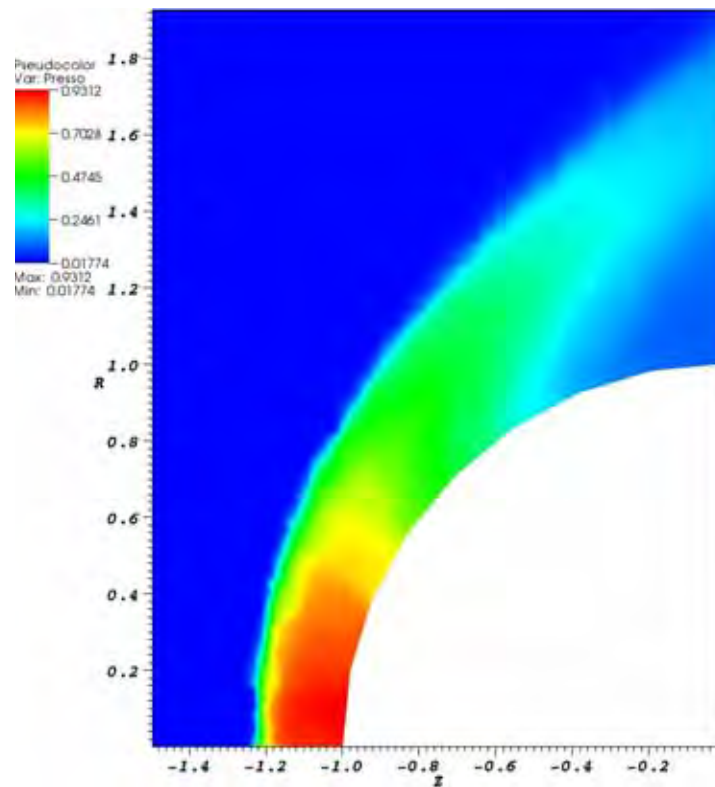


Figura 6.17: Processo de convergência para o refinamento de malha para o problema de escoamento bidimensional ao redor de um cilindro para 3 combinações de valores de CFL e do coeficiente de viscosidade artificial μ_a .



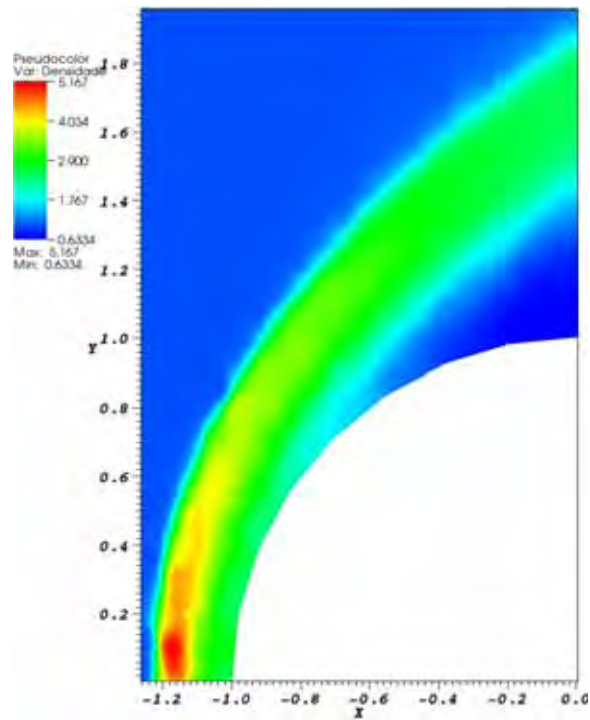
(a)



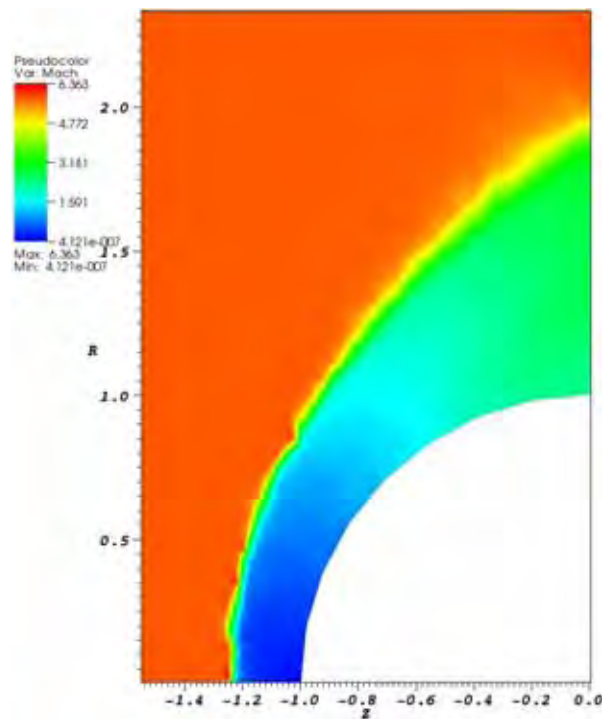
(b)

Figura 6.18: Escoamento hipersônico axissimétrico ao redor da esfera. (a) Malha não-estruturada utilizada; e (b) Campo de pressão.

As distribuições de densidade e do número de Mach obtidos para o problema são mostrados, respectivamente, na Figuras 6.19a e 6.19b.



(a)



(b)

Figura 6.19: Escoamento hipersônico axissimétrico ao redor da esfera. (a) Distribuição de densidade; e (b) Número de Mach.

Na Figura 6.20 é apresentado o campo de temperatura e a Figura 6.21 apresenta a distribuição de C_p para o problema, que é comparada com os resultados experimentais de Oliver (1956). Os resultados se mostraram em boa concordância.

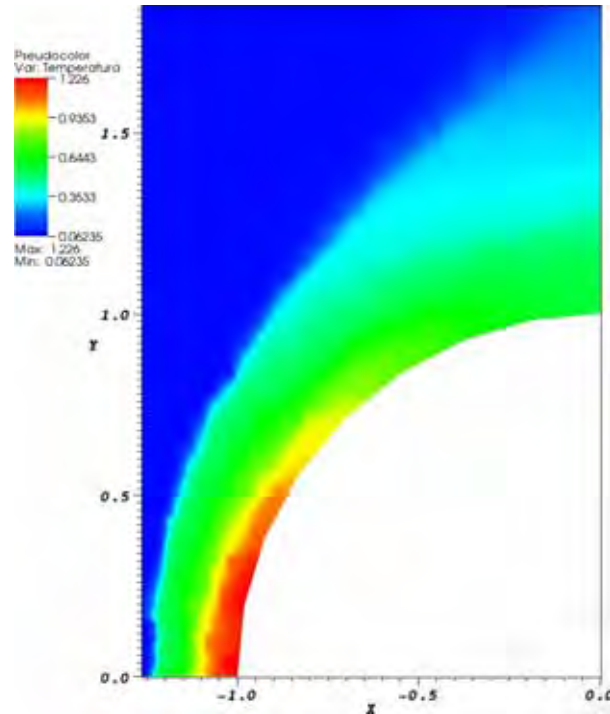


Figura 6.20: Distribuição de temperatura para o problema do escoamento hipersônico axissimétrico ao redor da esfera.

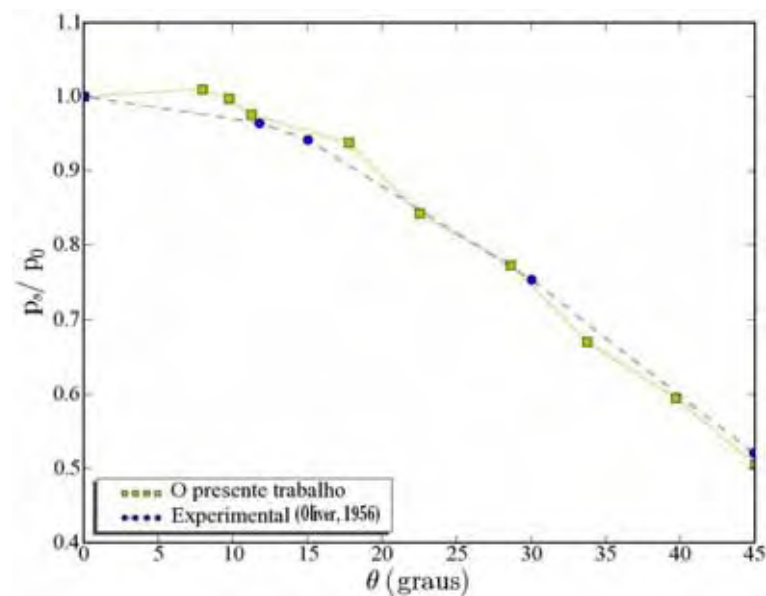


Figura 6.21: Distribuição de C_p ao longo da superfície da esfera em função do ângulo θ e comparação com valores experimentais (OLIVER, 1956).

Os resultados apresentados nesta seção mostraram que a análise tridimensional axissimétrica para o problema do escoamento hipersônico compressível ao redor da esfera utilizando o aplicativo é possível, como pode ser visto pela boa comparação esboçada na Fig. 6.21. Nesta mesma figura é possível ver que os resultados não se mostram tão regulares, como àqueles para o problema bidimensional. Mais uma vez isso se deve principalmente à forma de integração aproximada (utilizando \bar{r}) no caso axissimétrico.

6.6 Escoamento Hipersônico ao Redor de uma Esfera

Nesta seção são mostrados alguns resultados numéricos para o escoamento hipersônico tridimensional ao redor de uma esfera a $M_\infty = 5,8$. Na Figura 6.22a é mostrada a malha utilizada neste problema. O campo de pressão é ilustrado na Fig. 6.22b.

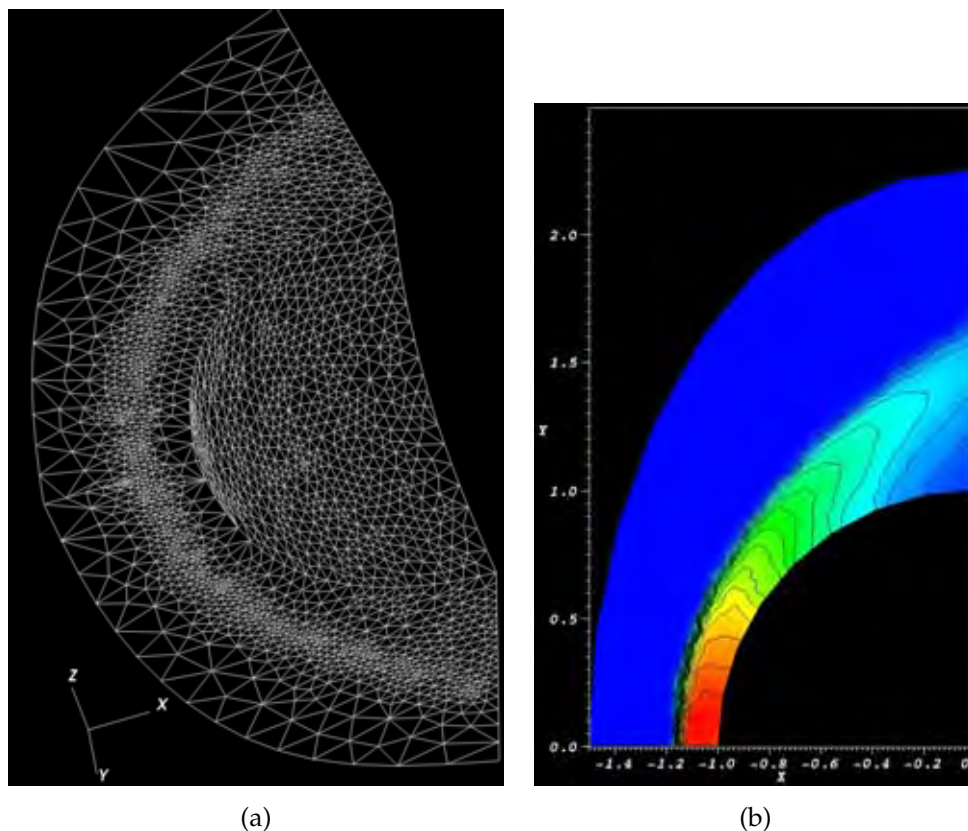


Figura 6.22: Escoamento hipersônico tridimensional sobre uma esfera. (a) Malha não-estruturada tetraédrica; e (b) Campo de pressão na face perpendicular ao eixo Z.

As distribuições de densidade e do número de Mach do escoamento são mos-

trados, respectivamente, na Figs. 6.23a e 6.23b. Na Figura 6.24 é ilustrada a distribuição de pressão na superfície da esfera em função do ângulo θ para $\gamma = 1,4$. Nessa mesma figura também estão os dados de Oliver (1956), para fins de comparação.

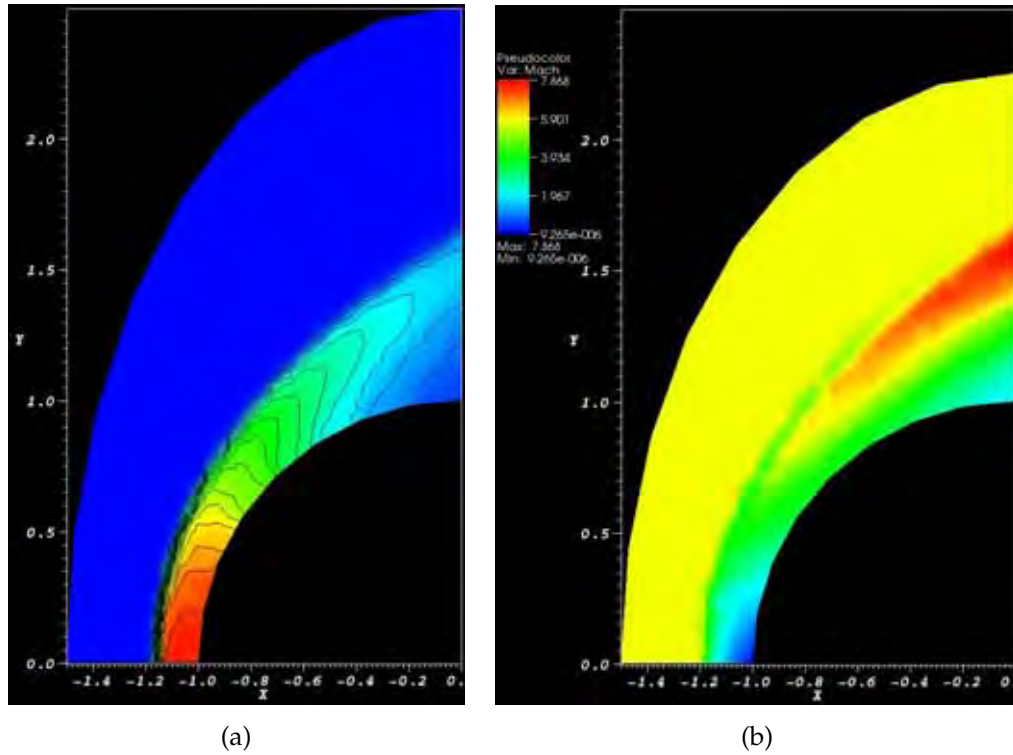


Figura 6.23: Escoamento hipersônico sobre a esfera. (a) Distribuição de densidade; e (b) Distribuição do número de Mach.

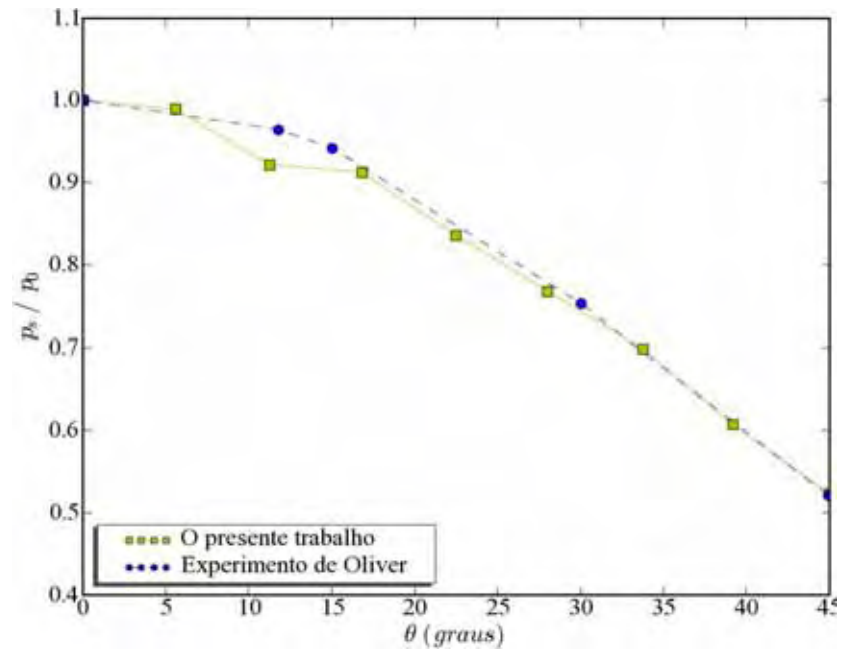


Figura 6.24: Distribuição de pressão ao redor de esfera e comparação com valores experimentais (OLIVER, 1956).

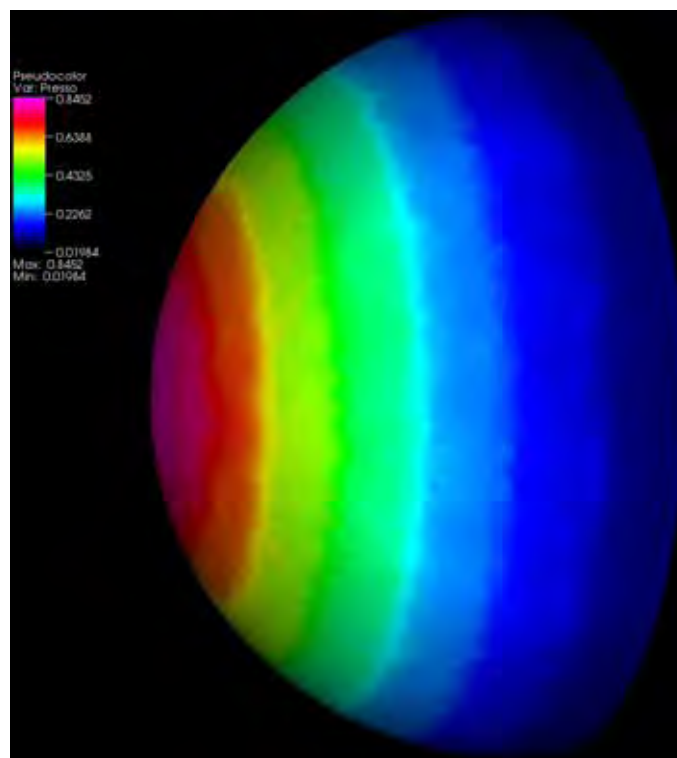


Figura 6.25: Distribuição de pressão na superfície da esfera.

7 Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros

Foram determinados resultados numéricos para escoamentos compressíveis, nos regimes supersônico e hipersônico, invíscidos e não-difusivos e em regime permanente, regidos pelas equações de Euler utilizando o método de elementos finitos, FEM. Para isso o esquema CBS foi utilizado, com inserção de termos artificiais de viscosidade para lidar com as características ondas de choque que surgem em tais escoamentos. Além disso, um procedimento para o refinamento adaptativo de malhas por enriquecimento foi implementado utilizando conceitos coerentes com aqueles encontrados na literatura.

Como visto nos resultados comparativos entre os casos bidimensional do cilindro infinito e axissimétrico da esfera, as constantes para o controle da viscosidade artificial exercem grande influência no processo de convergência e na qualidade dos resultados, o que demonstra o grande cuidado a ser tomado na utilização dessas constantes. O esquema implementado para adição de viscosidade numérica controlada por pressão (*pressure switch*), em conjunto com a técnica de refinamento, contribuiu muito na determinação dos bons resultados.

Pôde ser visto que o refinamento adaptativo também melhorou de forma muito significativa os resultados, principalmente em locais próximo às ondas de choque. A técnica de enriquecimento mostrou-se bastante vantajosa, desde que associada à uma efetiva forma de controle para restrição das áreas, no caso bidimensional ou axissimétrico, ou dos volumes para o caso tridimensional. Isso, de modo a evitar o refinamento excessivo dos elementos à tamanhos próximos de zero, principalmente em regiões de ocorrência de ondas de choque.

Os softwares integrantes ou utilizados para realização do trabalho são todos livres, ou seja, publicamente acessíveis. Essa integração demonstrou, por meio dos resultados obtidos, as possibilidades e facilidades de se trabalhar com código livre. Dessa maneira o código serve de continuidade àqueles que o integraram, uma vez que uma outra pessoa também pode modificar ou dar continuidade ao aplicativo feito neste

trabalho. A interface gráfica, criada em Python, mostrou-se muito versátil, servindo como uma ferramenta prática ao usuário em todo o pré-processamento, como por exemplo no estabelecimento interativo das condições de contorno.

Mesmo existindo uma diversidade de bibliotecas para criação de interfaces gráficas em Python, Blender se adequou muito bem para esse propósito. De fato, Blender já possui um grande número de recursos gráficos, o que facilita a manipulação de dados referentes a objetos do método de elementos finitos, como por exemplo, os nós e as faces dos elementos.

Na verdade, o aplicativo por si mesmo constituiu umas das grandes metas deste trabalho. Nele, procurou-se incorporar versatilidade e flexibilidade, de forma a tornar-se um aplicativo portátil para uma possível incrementação em seu código fonte. E tudo isso foi possível principalmente à linguagem integrante do aplicativo, Python, que permitiu ligar uma interface de pré-processamento de alto nível criada em Python e utilizada *dentro* de Blender, ao códigos nas linguagens C e C++ para criação e manipulação das malhas não-estruturadas utilizadas.

O aplicativo foi processado em dois sistemas operacionais diferentes, a saber, o Microsoft Windows XP[®] e o Linux GNU Debian e, sem nenhuma modificação que possa ser considerada relevante, os resultados puderam ser reproduzidos em ambos os sistemas. O tempo de processamento para um problema em regime permanente, independentemente se bi ou tridimensional, incluindo o tempo gasto com as iterações para refinamento, com ≈ 3000 nós é de 2,5 horas de relógio. Este mostrou-se função principalmente do número de nós e conseqüentemente, de elementos.

A paralelização do aplicativo é algo pensado como um futuro trabalho, assim como a inserção dos termos viscosos e de difusão de calor nas equações de Euler, para então poder se trabalhar com as Equações de Navier-Stokes. Na verdade, este resolvidor das Equações de Euler pode ser estendido para estudar escoamentos de não-equilíbrio termoquímico. Antes, é necessário que outros resultados sejam tomados para uma validação mais geral do aplicativo resolvendo as Equações de Euler, e estes podem ser obtidos do grande número de problemas nas áreas da supersônica e hipersônica de escoamentos.

Referências

- AIT-ALI-YAHIA, D. *A finite element segregated method for thermo-chemical equilibrium and nonequilibrium hypersonic flows using adapted grids*, 1996. 167 f. Tese (Doutorado) — Concordia University, Dezembro 1996.
- ANDERSON, J. D. *Fundamentals of aerodynamics*. 2. ed. New York: McGraw-Hill, Inc., 1984. 563 p.
- BABUSKA, I. et al. *Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computations*. Londres: John Wiley & Sons, 1986. 281–297 p.
- BüCHNER, S.; LIESEBERG, A.; MAUL, J. Density measurements in ballistic reentry. *J. Braz. Soc. Mech. Sci. & Eng.*, Rio de Janeiro, v. 26, n. 2, p. 137–149, Junho 1996.
- BEAZLEY, D. M.; LOMDAHL, P. S. Feeding a large-scale physics application to python. In: INTERNATIONAL PYTHON CONFERENCE, 6., 1997, San Jose. *Anais...* San Jose: PSF, 1997. p. 21–29.
- CAMPOS, M. D. de. *Simulação numérica de escoamentos de fluidos pelo método de elementos finitos baseado em volumes de controle com a técnica de passo fracionado*, 2005. 91 f. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2005.
- Campos Silva, J. B. *Simulação numérica de escoamento de fluidos pelo método de elementos finitos baseado em volumes de controle*, 1998. 159 f. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade de Campinas, Campinas, 1998.
- CANDLER, G. V. *The computation of weakly ionized hypersonic flows in thermo-chemical nonequilibrium*, 1988. 204 f. Tese (Doutorado) — Department of Aeronautics and Astronautics, Stanford University, Stanford, 1988.
- CHORIN, A. J. Numerical solution of the navier-stokes equations. *Mathematics of Computation*, v. 22, n. 104, p. 745–762, 1968.
- CHORIN, A. J. On the convergence of discrete approximation to the navier-stokes equations. *Mathematics of Computation*, v. 23, p. 341–353, 1969.
- CINNELLA, P.; GROSSMAN, B. Upwind techniques for flows with multiple translational temperatures. In: FLUID DYNAMICS, PLASMA DYNAMICS AND LASERS CONFERENCE, 21., 1990, Seattle. *Anais...* Seattle: AIAA Paper 90-1 660, 1990. p. 14.
- CONNOR, J. J.; BREBBIA, C. A. *Finite element techniques for fluid flow*. London: Butterworth and Co, 1976. 330 p.
- DONEA, J. A taylor-galerkin method for convective transport problems. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, v. 20, p. 101–119, Janeiro 1984.

- DUBROCA, B. An extension of roe's riemann solver applied to reactive viscous flows for the computation of laminar hypersonic wake. In: TAYLOR, C. (Ed.). *Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flows*. Swansea: Wiley, 1993. p. 1168–1179.
- FALEMPIN, F. Propulsion systems for hypersonic flight. In: CRITICAL TECHNOLOGIES FOR HYPERSONIC VEHICLE DEVELOPMENT, 2004, Rhode-St-Genèse. *Anais...* Rhode-St-Genèse: von Kármán Institute, 2004. p. 10–14.
- FRINK, N. T.; PARIKH, P.; PIRZADEH, S. Aerodynamic analysis of complex configurations using unstructured grids. *AIAA Journal*, p. 91–3292–CP, 1991.
- GLAISTER, P. An approximate linearised riemann solver for the euler equations for real gases. *Journal of Computational Physics*, San Diego, v. 74, p. 382–408, Fevereiro 1988.
- GODUNOV, S. K. Finite difference method for numerical computations of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Matematicheskii Sbornik*, p. 271–306, 1959. Transl. Cornell Aeronautical Laboratory.
- GOKCEN, T. *Computation of hypersonic low density flows with thermo-chemical nonequilibrium*, 1989. 200 f. Tese (Doutorado) — Department of Aeronautics and Astronautics, Stanford University, Stanford, 1989.
- GROSSMAN, B.; MORETTI, G. Time-dependent computation of transonic flow. In: *AIAA Annual Meeting*. Houston: AIAA, 1970. 70-1322.
- GROSSMAN, B.; WALTERS, R. Analysis of flux-split algorithms for euler's equations with real gases. *AIAA Journal*, Reston, v. 27, n. 5, p. 524–531, Fevereiro 1989.
- GRUNDMANN, R. Introduction of the physical aspects of hypersonic aerodynamics. In: MURTHY, T. K. S. (Ed.). *Computational Methods in Hypersonic Aerodynamics*. [S.l.]: Klumer Academic Publishers, 1991. p. 1–28.
- HAYES, W. D.; PROBSTEIN, R. F. *Hypersonic flow theory*. New York: Academic Press, 1959.
- HIRSCH, C. Numerical computation of internal and external flows. In: _____. Chichester: Wiley and Sons, 1990. p. 708.
- HUGHES, J. A. B. W. F. *Schaum's outline of theory and problems of fluid dynamics*. New York: Schaum Publishing Company, 1967. 219–248 p.
- HUGHES, T. J. R. Recent progress in the development and understanding of supg methods with special reference to the compressible euler and navier–stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 7, p. 1261–1275, 1987.
- HäUSER, J. et al. Computational aerothermodynamics for 2d and 3d space vehicles. *Computational Methods in Hypersonic Aerodynamics*, Noordwijk, v. 25, n. 2, p. 447–490, 1991.
- JAMESON, A. Solution of the euler equations by a multi-grid method. *Applied Mathematics and Computations*, Houston, v. 13, p. 327–356, Março 1983.
- JAMESON, A.; MAVRIPLIS, D. J. Finite volume solution of the two-dimensional euler equations on a regular triangular mesh. *AIAA Journal*, v. 24, n. 4, p. 611–618, 1986.

- JAMESON, A.; SCHMIDT, W.; TURKEL, E. Numerical solution of the euler equations by finite volume methods using runge-kutta time stepping schemes. In: FLUID AND PLASMA DYNAMICS CONFERENCE, 1981, Palo Alto. *Hypersonic Flows for Reentry Problems*. Palo Alto: AIAA, 1981. p. 15.
- JOHNSTON, I. A. *Simulation of flow around hypersonic blunt-nosed vehicles for the calibration of air data system*, 1999. 204 f. Tese (Doutorado) — The University of Queensland, 1999.
- KEENAN, J. A. Simulation of ablation in earth atmospheric entry. In: THERMOPHYSICS CONFERENCE, 28., 1993, Orlando. *Anais...* Orlando: AIAA, 1993. p. 101–113.
- LAX, P. D.; WENDROFF, B. Systems of conservation laws. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, v. 13, n. 2, p. 217–237, Maio 1960.
- LECLERCQ, M. P.; STOUFFLET, B. Characteristic multigrid method application to solve the euler equations with unstructured and unnested grids. *Journal of Computational Physics*, Saint-Cloud, v. 104, p. 329–346, Fevereiro 1992.
- LEWIS, R. W.; NITHIARASU, P.; SEETHARAMU, K. N. *Fundamentals of the finite element method for heat and fluid flow*. Chichester: Wiley, 2004. 333 p. (Fluid Dynamics).
- LÖHNER, R.; MORGAN, K.; ZIENKIEWICZ, O. C. The solution of non-linear hyperbolic equation systems by the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 4, p. 1043–1063, 1984.
- LIMA, R. C. de. *Simulação de grandes escalas de escoamentos incompressíveis com transferência de calor e massa por um método de elementos finitos de subdomínio*, 2005. 153 f. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2005.
- LOURENÇO, M. A. de S. et al. Numerical simulation of elliptical and parabolic heat transfer problems by a solver based on python language and free softwares. In: IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 27., 2006, Belém. *Anais...* Belém: Proc. 27th Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE 2006, 2006.
- LYRA, P. R. M. et al. Tvd algorithms for the solution of the compressible euler equations on unstructured meshes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 19, p. 827–847, 1994.
- MACCORMACK, R. W. Current status of numerical solutions of the navier-stokes equations. In: AEROSPACE SCIENCES MEETING, 23., 1985, Reno. *Anais...* Reno, 1985. p. 14.
- MAGNUS, R.; YOSHIHARA, H. Inviscid transonic flow over airfoils. *AIAA J.*, v. 8, p. 2157–2162, 1970.
- MANZARI, M. *An unstructured grid finite element algorithm for compressible turbulent flow computations*, 1996. 173 f. Tese (Doutorado) — University of Wales Swansea, Swansea, 1996.

MASSAROTTI, M.; NITHIARASU, P.; ZIENKIEWICZ, O. C. Characteristic-based-split (cbs) algorithm for incompressible flow problems with heat transfer. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, v. 8, n. 8, p. 969–990, Agosto 1998.

MORGAN, K.; PERAIRE, J. Unstructured grid finite–element methods for fluid mechanics. *Reports on Progress in Physics*, Cambridge, p. 569–638, 1998.

NI, R. H. A multiple grid scheme for solving the euler equations. In: COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS CONFERENCE, 5., 1981, Palo Alto. *Hypersonic Flows for Reentry Problems*. [S.l.]: AIAA, 1981. p. 257–264.

NITHIARASU, P.; CODINA, R.; ZIENKIEWICZ, O. C. The characteristic-based split (cbs) scheme - a unified approach to fluid dynamics. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, v. 66, n. 10, p. 1514–1546, Junho 2006.

NITHIARASU, P. et al. Shock capturing viscosities for the general fluid mechanics algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 28, p. 1325–1353, Dezembro 1998.

ODEN, J. T. et al. Adaptive grid refinement for the compressible euler and navier-stokes equations. In: LÖHNER, R.; MORGAN, K.; ZIENKIEWICZ, O. C. (Org.). *Accuracy estimates and adaptive refinement in finite element computations*. [S.l.: s.n.], 1986. p. 281–297.

OLIVER, R. E. An experimental investigation of flow over simple blunt bodies at a nominal mach number of 5.8. *J. Aero. Sci.*, v. 23, p. 177–179, 1956.

PARK, C.; YOON, S. Fully coupled implicit method for thermochemical nonequilibrium air at suborbital flight speeds. *Journal of Spacecraft and Rockets*, v. 28, p. 31–39, 1991.

PEETERS, M. F. et al. Finite element solutions of the navier-stokes equations for compressible internal flows. *Journal of Propulsion and Power*, v. 8, p. 192–198, Fevereiro 1992.

PERAIRE, J. et al. Adaptive remeshing for compressible flow computations. *Journal of Computational Physics*, v. 72, p. 449–466, 1987.

PEREIRA, V. D. *Simulação numérica de escoamentos de fluidos pelo método de elementos finitos de mínimos quadrados*, 2005. 178 f. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2005.

PETERSON, P.; MARTINS, J. R. R. A.; ALONSO, J. J. Fortran to python interface generator with an application to aerospace engineering. In: INTERNATIONAL PYTHON CONFERENCE, 9., 2001, Long Beach. Long Beach: Conference proceedings, 2001. p. 19.

RACHOWICZ, W.; ODEN, J. T.; DEMKOWICZ, L. Toward a universal h-p adaptive finite element strategy parte 3 design of h–p meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 77, p. 181–212, Dezembro 1989.

ROE, P. Approximate riemann solvers, parameter vectors and difference scheme. *Journal of Computational Physics*, Royal Aircraft Establishment, Bedford, v. 43, p. 357–372, Outubro 1981.

SCALABRIN, L. C. F. et al. Three dimensional flow simulations with the finite element technique over a multi-stage rocket. *J. Braz. Soc. Mech. Sci. & Eng.*, Rio de Janeiro, v. 26, n. 2, Abril 2004.

SEGERLIND, L. J. *Applied finite element analysis*. 2. ed. London: John Wiley & Sons, 1984. 330 p.

SHEWCHUK, J. R. Triangle – a two-dimensional quality mesh generator and delaunay triangulator. In: _____. NSERC 1967 Science and Engineering Scholarship and NSF Grant CMS-9318163, 1996. Disponível em: <<http://www.cs.cmu.edu/quake/triangle.html>>. Acesso em: 28 fev. 2008.

SHUEN, J. S.; YOON, S. Numerical study of chemically reacting flows using an lu scheme. In: AEROSPACE SCIENCES MEETING, 26., 1988, Reno. *Anais...* Reno, 1988. p. 22.

SI, H. On refinement of constrained delaunay tetrahedralizations. In: INTERNATIONAL MESHING ROUNDTABLE, 15., 2006, Berlin. [S.l.], 2006.

STEGER, J.; WARMING, R. Flux-vector splitting of the inviscid gas dynamics equations with applications to finite difference methods. *Journal of Computational Physics*, v. 40, p. 263–293, 1981.

STEINHOFF, J.; JAMESON, A. Multiple solutions of the transonic potential flow equation. *AIAA Journal*, v. 20, n. 1521–5, 1982.

THOMAS, J. L.; DWOYER, D. L.; KUMAR, A. Computational fluid dynamics for hypersonic airbreathing aircraft. In: DÉSIDÉRI, J. A.; GLOWINSKI, R.; PÉRIAUX, J. (Ed.). *Hypersonic Flows for Reentry Problems*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1990. v. 1, p. 55–71.

TORO, P. G. P. *Hypersonic laminar boundary layer with adiabatic wall condition*. São José dos Campos, 1997.

TSIEN, H. S. Similarity laws of hypersonic flows. *Journal of Mathematics and Physics*, v. 25, n. 2, p. 247–251, 1946.

TWORZYDLO, W. W.; ODEN, J. T.; THORNTON, E. A. Adaptive implicit–explicit finite element method for compressible viscous flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 95, p. 397–440, Março 1992.

Van Leer, B. Flux-vector splitting for the euler equations. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON NUMERICAL METHODS IN FLUID DYNAMICS, 8., 1982, Aachen. *Anais...* Aachen, 1982. p. 507–512.

VONNEUMANN, T.; RICHTMYER, R. D. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks. *Journal of Applied Physics*, Princeton, v. 21, p. 232–237, Março 1950.

WALBERG, G. D. A review of aero-assisted orbit transfer. In: ATMOSPHERIC FLIGHT MECHANICS CONFERENCE, 9., 1982, San Diego. *Anais...* San Diego, 1982. v. 25, p. 24.

WALBERG, G. D. Aero-assisted orbit transfer window opens on missions. *Progress in Aeronautics and Astronautics*, New York, v. 21, p. 36–43, 1983.

WILLIAMS, R. M. National aero-space plane. *Aerospace America*, Washington DC, v. 24, p. 18–22, Novembro 1987.

WOODWARD, P.; COLELLA, P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *Journal of Computational Physics*, v. 54, p. 115–173, Abril 1984. (ISSN 0021-9991).

YOON, S.; KWAK, D. Artificial dissipation models for hypersonic external flow. In: ASME, SAE, AND ASEE, JOINT PROPULSION CONFERENCE, 24., 1988, Boston. *Anais...* Boston, 1988. p. 9.

ZIENKIEWICZ, O. C.; CODINA, R. Search for a general fluid mechanics algorithm. In: _____. *Frontiers of Computational Fluid Dynamics*. New York: Wiley, 1995. v. 31, p. 101–113.

ZIENKIEWICZ, O. C. et al. *Finite element in fluid mechanics - A decade of progress*. Wichester: Wiley, 1984. 1–26 p. (Finite Elements in Fluids, v. 5).

ZIENKIEWICZ, O. C. et al. The characteristic-based-split procedure: an efficient and accurate algorithm for fluid problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 31, p. 359–392, Maio 1999.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. *The finite element method*. 5. ed. [S.l.]: Butterworth Heinemann, 2000. (Fluid Dynamics, v. 3).

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. *The finite element method*. 5. ed. [S.l.]: Butterworth Heinemann, 2000. (The Basis, v. 1).

APÊNDICE A - Exemplo de Utilização do Aplicativo

Na Figura A.1 é ilustrado o problema bidimensional de escoamento supersônico a Mach 3 sobre uma rampa. Trata-se de um domínio simples, mas classicamente estudado em problemas supersônicos e hipersônicos. Nesta seção segue um exemplo de utilização do aplicativo neste problema. Blender, que será utilizado aqui, pode ser baixado gratuitamente na internet, tanto em seu código fonte quanto na forma executável, é um programa para criação e manipulação de formas geométricas tridimensionais. Existe um grande número de ótimos tutoriais de Blender disponíveis na internet. Dessa forma, é recomendado que o leitor tenha alguma familiarização com o software Blender, ao menos com a criação de formas simples como retas, círculos e retângulos e com os comandos do programa.

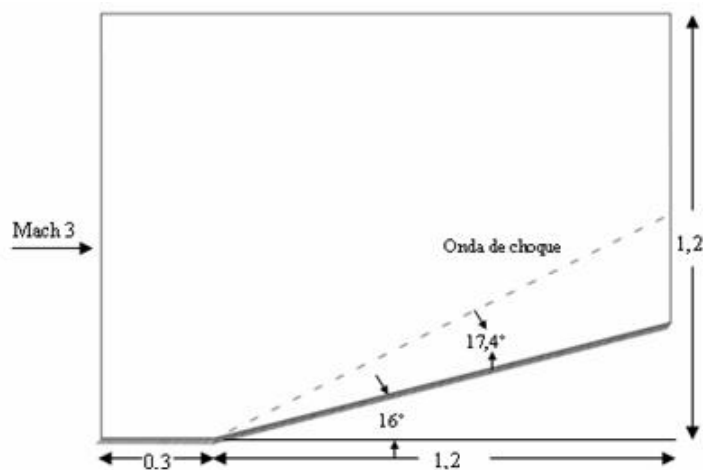


Figura A.1: Escoamento supersônico sobre uma rampa.

O primeiro passo é criar pré-processar o problema em Blender. Para isso se inicializa o arquivo *pySolver.bat*, que se encontra no diretório de instalação. Ele inicializa Blender, já configurado para a utilização de *pySolver*. Feito isso, será apresentada na tela uma imagem parecida com a esboçada na Fig. A.2. No centro há a tela de visualização 3D (*3D View*) de Blender e abaixo dela existem dois botões, que são as interfaces para solução de problemas bi e tridimensionais respectivamente.

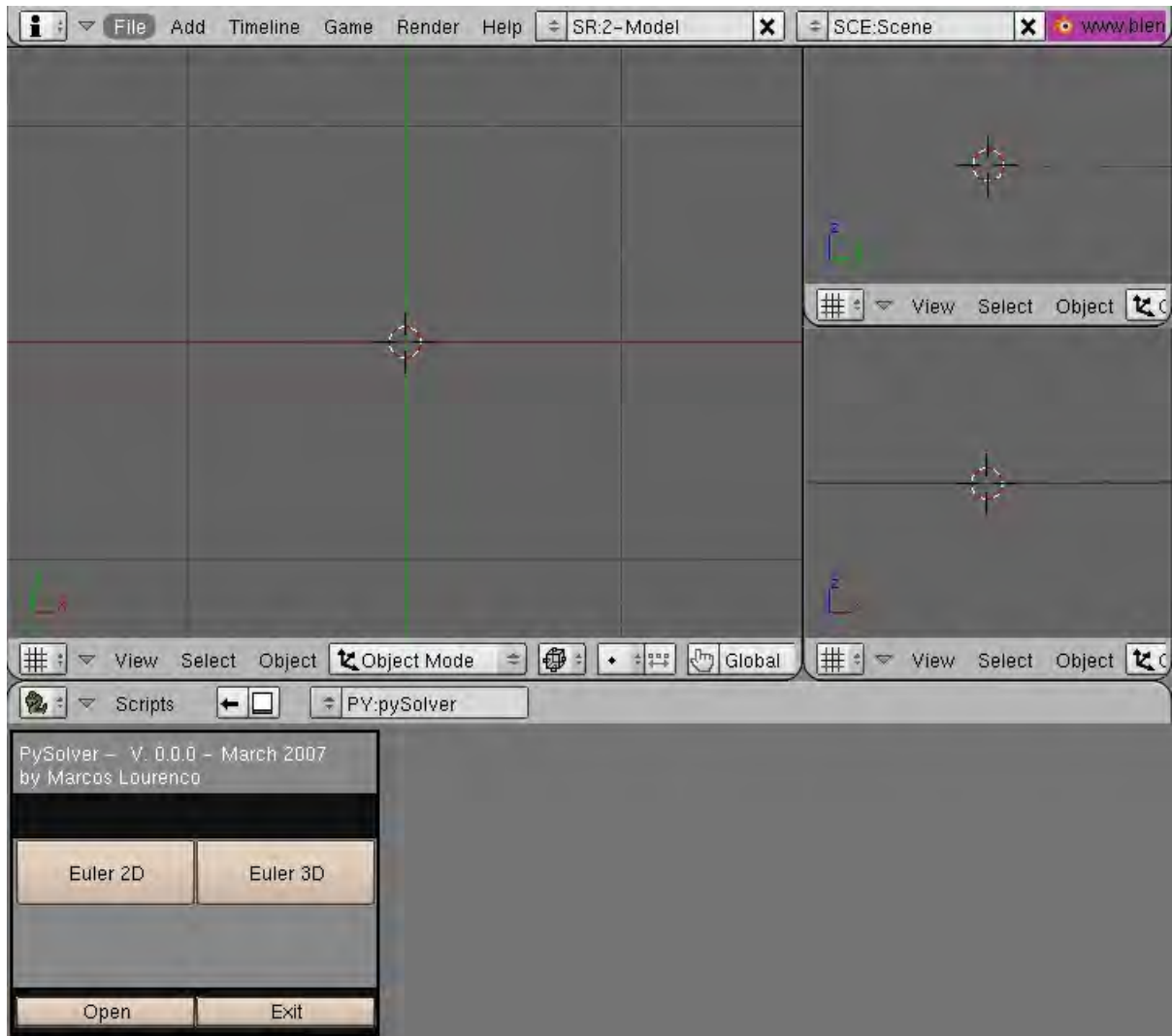


Figura A.2: Criando o domínio com o auxílio de Blender. escoamento supersônico sobre uma rampa.

Escolhendo o botão para o caso bidimensional a seguinte janela se abre, ilustrada na Figura A.3. No lugar dos dois botões agora existem 12 botões. Cada um deles possui uma função, especificada na Tabela A.1. Utilizando a opção *Constants* é mostrado um menu com as constantes e parêtros para o escoamento analisado. Esse menu é mostrado na Figura A.4.

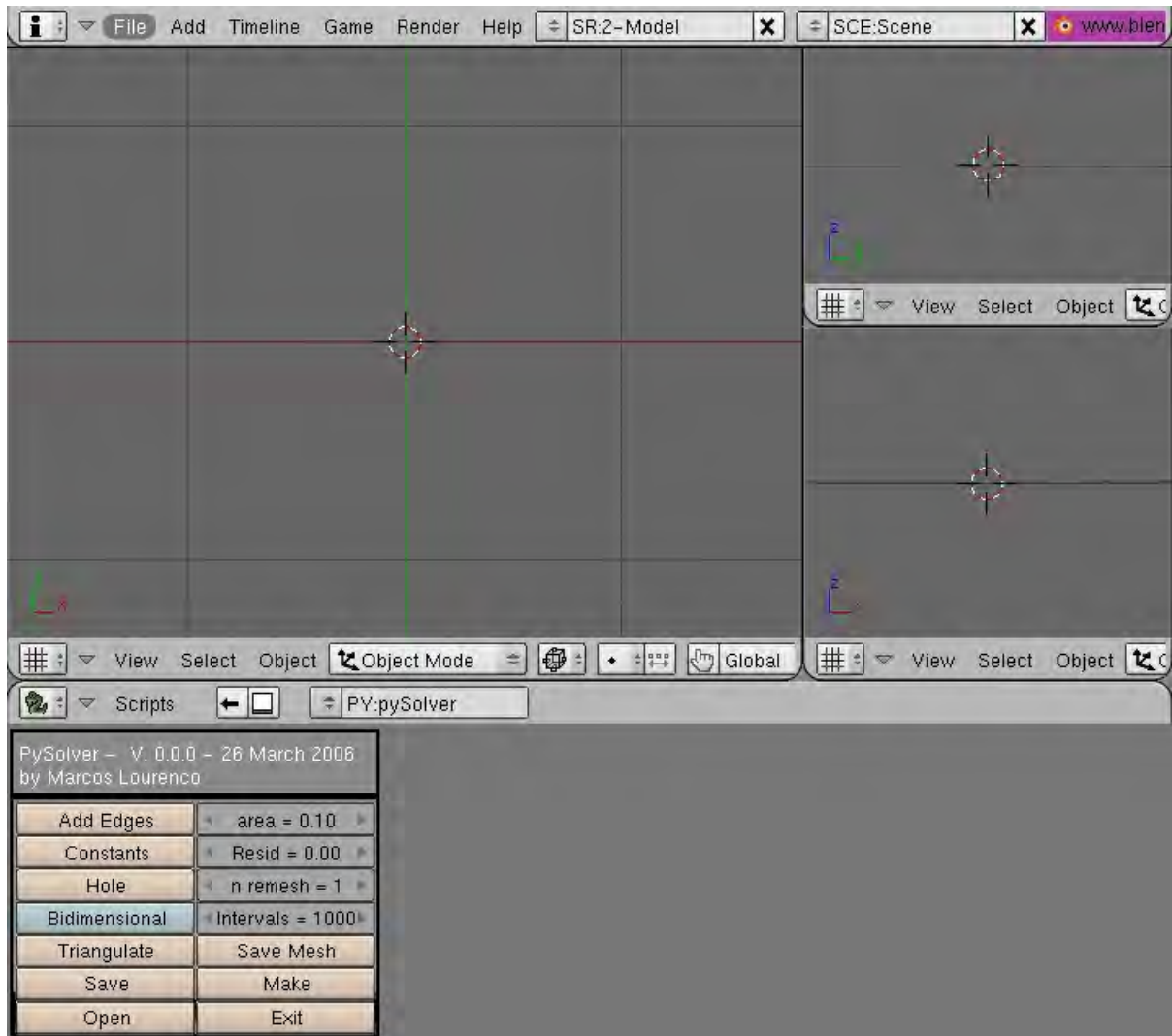


Figura A.3: Menu Principal da interface em Blender.

Tabela A.1: Resumo das funções do usuário da interface apresentada na Figura A.3.

Add Edges	<i>Adiciona uma fronteira selecionada e define sua condição de contorno</i>
Constants	<i>Apresenta os valores das principais propriedades e constantes utilizadas</i>
Hole	<i>Adiciona uma fronteira interna como buraco ou parede</i>
Bidimensional	<i>Alterna entre os modos Bidimensional e Axissimétrico</i>
Triangulate	<i>Uma vez selecionadas todas as fronteiras triangulariza o dominio</i>
Save	<i>Salva as configuração atual</i>
Save Mesh	<i>Salva a malha criada (Após usar Triangulate)</i>
Make	<i>Salva o problema com a extensão .datsolve</i>



Figura A.4: Parte do menu de constantes e parâmetros.

Apresentadas algumas características principais da interface, é hora de começar a resolver o problema proposto neste apêndice. O domínio criado na Janela 3D de Blender é constituído de cinco linhas retas nas proporções conforme Figura A.1 e é mostrado na Figura A.5.

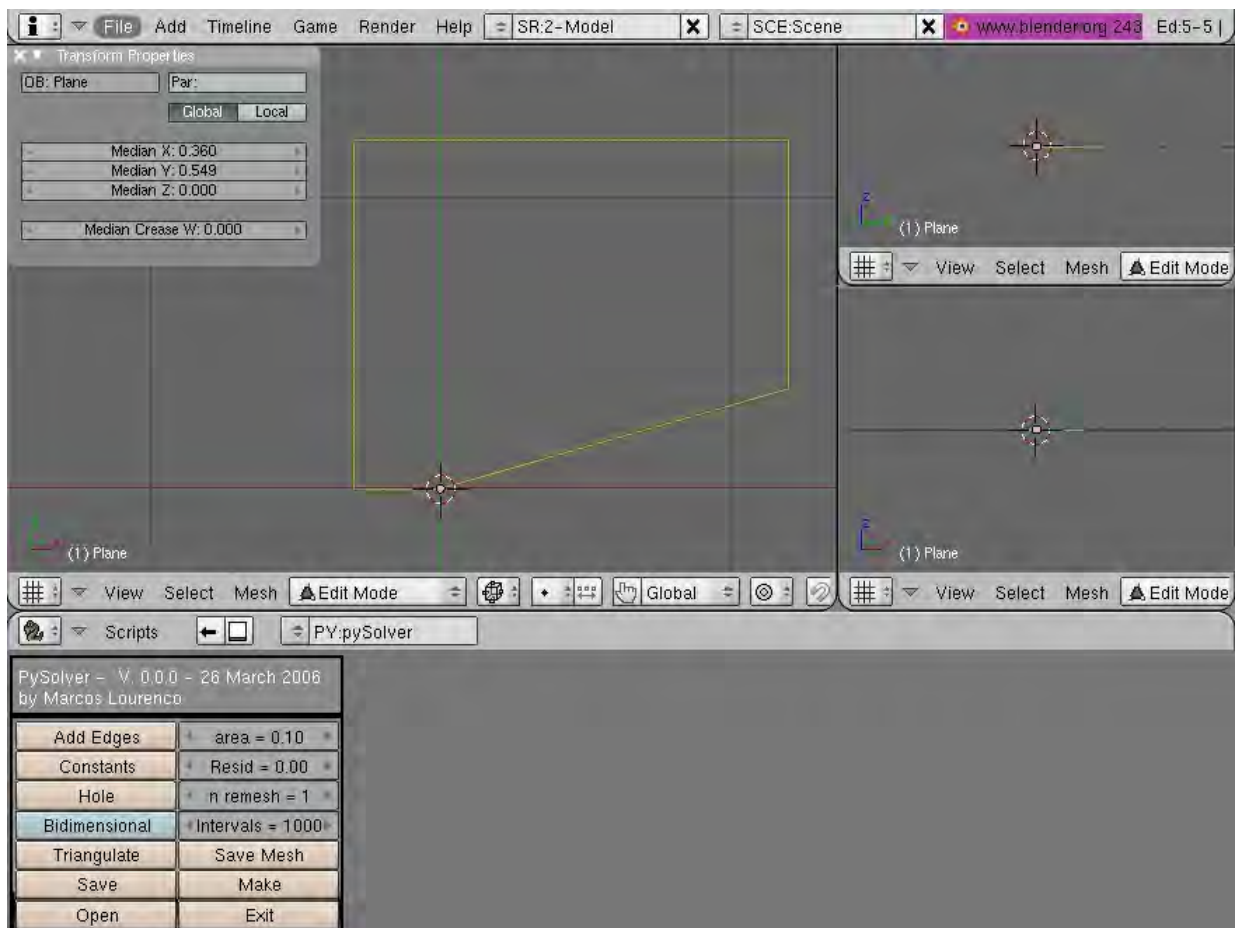


Figura A.5: Domínio criado em Blender.

O próximo passo agora é definir numericamente esse domínio, colocando as

condições de contorno. Como exemplo, seleciona-se somente o lado (*edge*) correspondente à saída (*jusante*) do escoamento. Depois de selecionado clica-se no botão *Add Edges* e escolhendo então a condição de contorno de saída (*Outlet*), como ilustrado na Figura A.6.

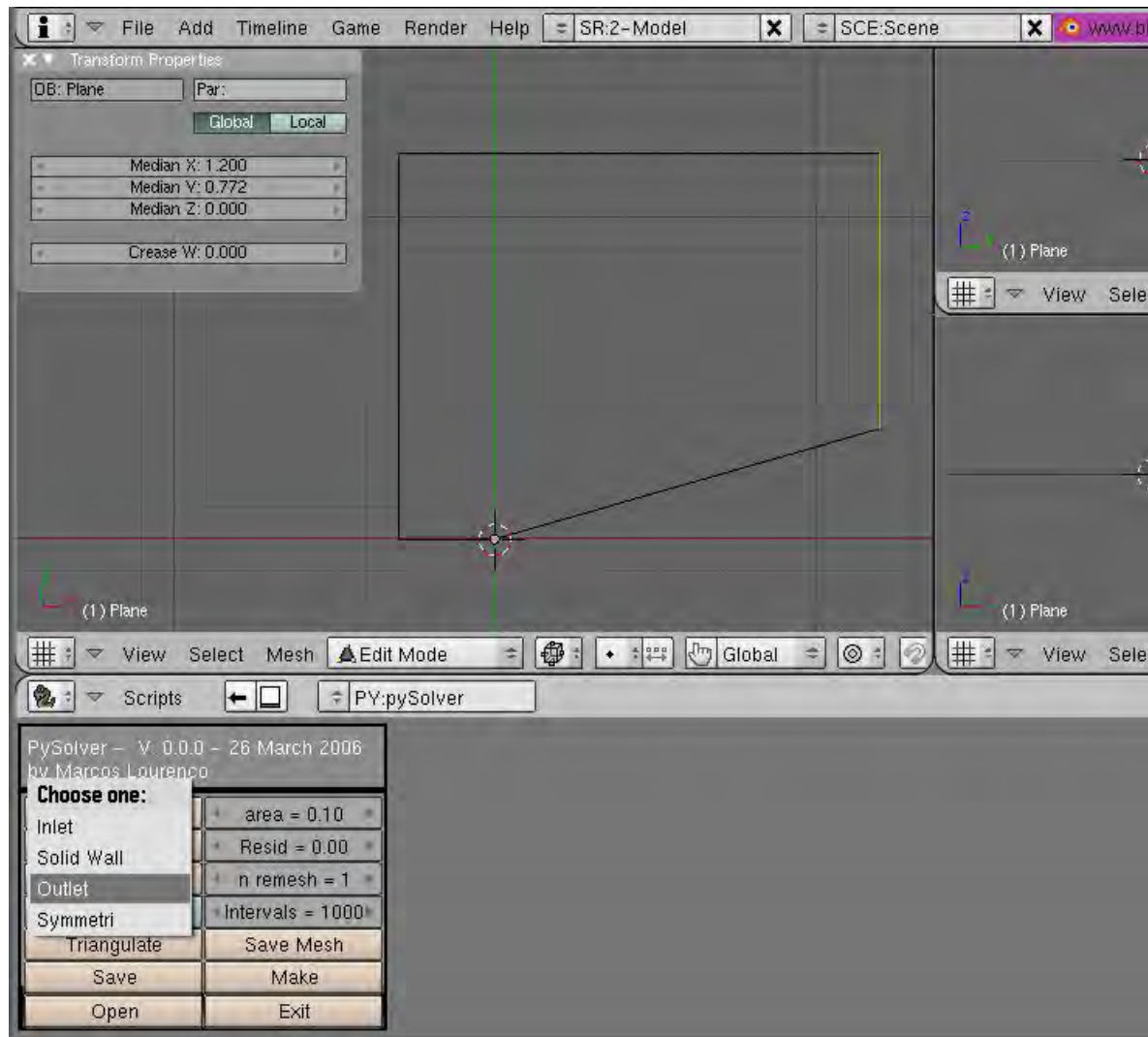


Figura A.6: Colocando a condição de contorno de saída.

Procedendo similarmente, são colocadas as condições de contorno de parede (*Solid Wall*), de simetria (*Symmetri*), e de entrada (*Inlet*). Dessa forma, o domínio está pronto pra ser triangularizado, o que é feito pressionando o botão *Triangulate*. Verificadas as constantes e parâmetros, cria-se o problema com o botão *Make*, sendo então solicitado um caminho para salvar o arquivo de solução do programa. Nesse caso, o arquivo foi salvo como *rampa.datsolve*.

Executando o script *pySolver.py*, será solicitado um caminho para o arquivo a

ser resolvido, que aqui se chama *rampa.datsolve*. Antes, porém, alguns parâmetros ainda podem ser modificados no arquivo que é salvo automaticamente, *nome-do-arquivo.conf*, que nesse caso será *rampa.conf*. Uma vez executado o script, os resultados são salvos com a extensão *.plt*, e contém a maioria das informações a respeito do escoamento. O arquivo *.plt* é utilizado aqui com o aplicativo open-source Visit. Resultados do refinamento da malha e do campo de pressão são respectivamente apresentados nas Figuras A.7 e A.8.

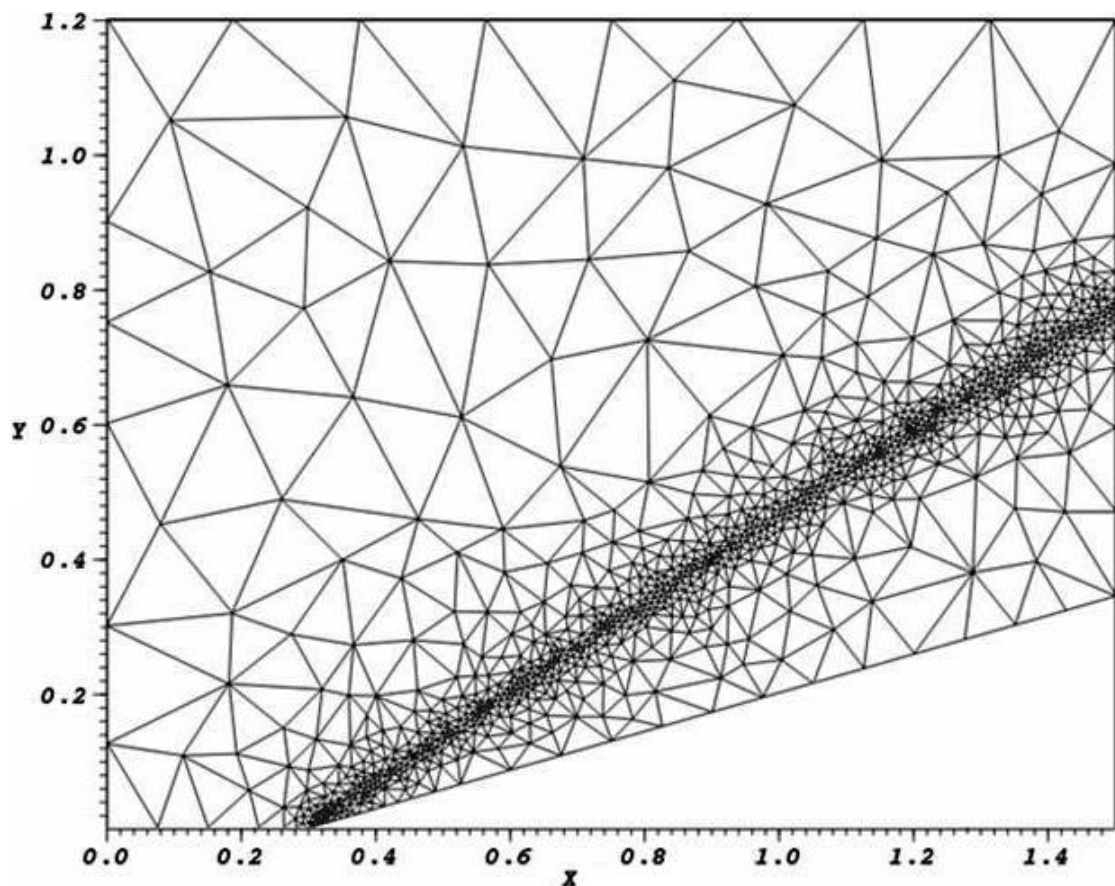


Figura A.7: Malha refinada.

O refinamento próximo às regiões críticas do escoamento depende tanto do número de iterações de refinamento quanto da razão de erro, necessária para que ele não refine em pontos desnecessários. Estes dois parâmetros podem ser previamente escolhidos antes da solução de um determinado problema, tanto na construção do problema em Blender, quanto por meio da alteração do arquivo *nome-do-arquivo.conf*. Na Figura A.8 foi apresentado o campo de pressão para esse problema, mas outras variáveis como velocidade e energia, através dos quais são calculadas outras variáveis como temperatura por exemplo, estão contidas no arquivo de resultados. O código

pode ainda ser prontamente alterado para salvar outras propriedades e parâmetros nos resultados.

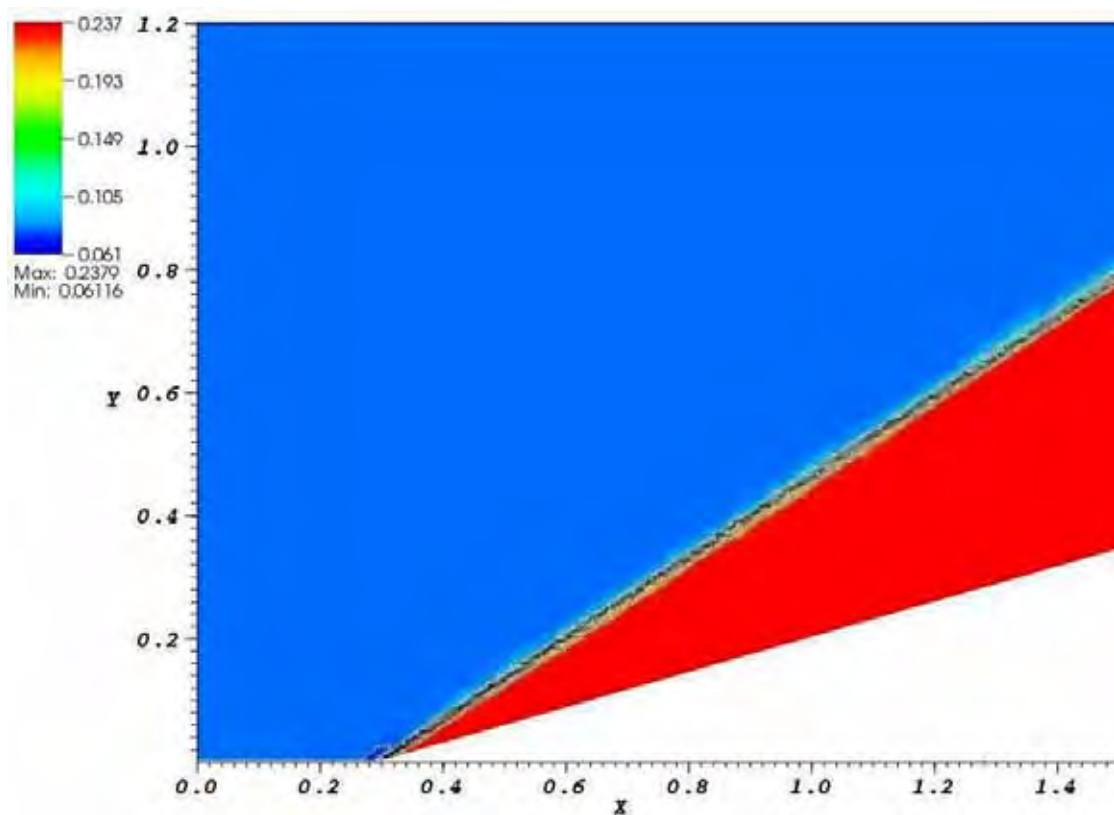


Figura A.8: Campo de pressão para o escoamento em rampa ilustrado na Figura A.1.

A utilização proposta aqui tentou ser a mais dinâmica possível. Espera-se, que a interface criada aqui, utilizando a ótima interface de Blender, seja melhorada continuamente com a contribuição de outros usuários ou então que esta possa servir de base ou exemplo para utilização em outro aplicativo.

APÊNDICE B – Estrutura do Aplicativo

Com relação à estrutura, ao *framework* criado, o aplicativo possui as características dos códigos para discretização espacial em C e C++, Triangle e TetGen respectivamente. As estruturas para o armazenamento de dados como nós e elementos de Triangle e TetGen são utilizados e outras novas foram criadas para armazenar as variáveis do escoamento como, por exemplo, as velocidades, a energia e pressão.

O alocamento e desalocamento dinâmico de memória são constantemente usados, devido principalmente ao refinamento adaptativo da malha, que exige que muitos nós se desloquem de suas antigas posições e que os novos nós, e conseqüentemente os novos elementos, adicionados obedçam as regras de conectividade entre eles. Dessa maneira, novas arrays (que constituem o principal tipo de estrutura utilizado) são criadas a cada iteração de refinamento tanto para as propriedades da malha, como nós e elementos quanto para as variáveis trabalhadas no escoamento.

Para “agrupar” estas arrays de acordo com suas propriedades, conseguindo uma melhor organização do programa, foram criadas *structs* em C para um determinado grupo de variáveis e que apontam (*pointer structs*) para estas variáveis. Isso facilita seu acesso, tanto em C quanto na hora de utilizar estas variáveis em Python onde, como objetos, estas podem ser tratadas em objetos de alto nível como classes e dicionários.

Com relação à documentação, Python possui um passo à frente em relação às linguagens convencionais, devido ao seu mecanismo de ajuda via interpretador. Além disso, o código em Python, uma vez que não necessita de compilação, e devido à sua simplicidade de leitura e principalmente dos vários comentários no código, não será discutido neste apêndice.

Para o código em C, a Tabela B.1 apresenta as principais estruturas utilizadas no aplicativo desenvolvido. Com relação às estruturas das malhas, são indicadas as referências (SHEWCHUK, 1996) e (SI, 2006). Todas as arrays estão contidas em uma

struct, chamada *globais*, uma vez que contém variáveis globais, e por isso estas são apresentadas na Tabela B.1 com os caracteres *globais*. no início do nome.

Tabela B.1: Arrays utilizadas no aplicativo.

Variável	Array com os valores nodais
globais.R	<i>Densidade.</i>
globais.U	<i>Velocidade na direção x.</i>
globais.V	<i>Velocidade na direção y.</i>
globais.W	<i>Velocidade na direção z.</i>
globais.P	<i>Pressão.</i>
globais.E	<i>Energia.</i>

As variáveis mostradas na Tabela B.1 e as outras variáveis utilizadas estão descritas também no arquivo *header frame.h*, contido no código fonte. Todas as estruturas de dados seguem aquelas apresentadas na Tabela B.1. Após compilado, na forma de uma extensão em Python, as funções são interpretadas em um simples script em Python. Sendo assim os passos para solução das equações, discutidos na Seção 3.3, são chamados através de métodos em Python, que por sua vez executam funções em C para realizar estes passos. Estas funções estão nomeadas e comentadas adequadamente no código em C e C++. Além disso, a análise dos resultados pode ser feita diretamente em Python.

A convergência da solução é baseada nas diferenças entre o valor das variáveis no passo atual e no anterior, e um valor máximo é especificado, definindo o regime permanente. A solução de um problema no aplicativo segue o diagrama ilustrado na Figura B.1.

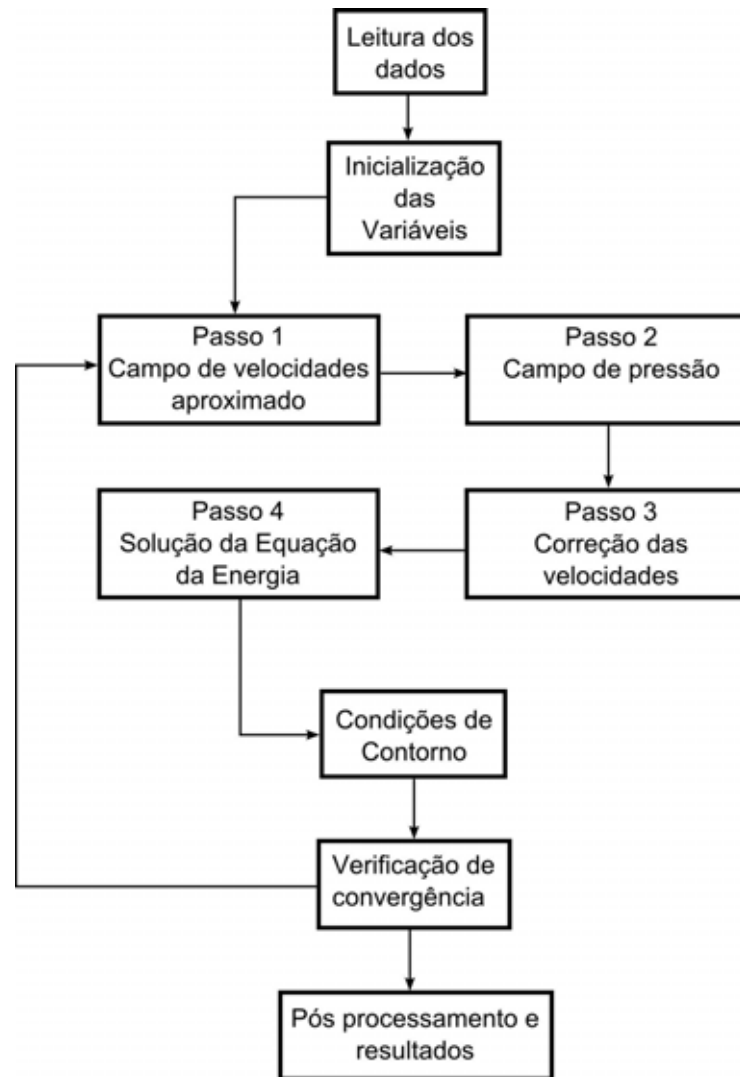


Figura B.1: Diagrama simplificado do funcionamento interno aplicativo.

O código desenvolvido neste trabalho, utilizando o algoritmo CBS, é open-source e foi baseado no programa CBSflow, apresentado em (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000a). Uma vez que muitos outros problemas de dinâmicas dos fluidos além de escoamentos supersônicos e hipersônicos, como escoamento em meios porosos e turbulência entre outros, já foram simulados utilizando o esquema CBS, espera que esse aplicativo possa ser utilizado, depois das devidas alterações e extensões, para se resolver problemas de naturezas diferentes daqueles estudados neste trabalho.

Índice Remissivo

- Algoritmo, 2, 10, 12, 47
 CBS, 13, 25, 32
- Aproximação
 de Godunov, 38
 em série de Taylor, 26
 espacial, 25
 por Galerkin, 26
- Atmosfera, 7
 circundante, 4
 de Marte, 2
 densa, 9
 rarefeita, 9
 terrestre, 2, 3
- Atrito, 6–8
- Camada, 20
 adjacente, 4
 de choque, 4, 8
 de entropia, 8
 de vorticidade, 8
 limite, 4, 5, 7, 12, 37
 subsônica, 5
- Captura de choque, 14
- Característica, 1, 7, 24, 47
 ao longo da, 37
 coordenada, 26
 escala, 20
 física, 1
 linear, 26
 não-linear, 28
- Corrente
 linha de, 8
 livre, 4, 22, 53
- Descolamento, 4
 da camada limite, 5
- Descontinuidade, 8, 10, 38, 40
 física, 12
- Dissipação, 3
- Distribuição, 3
 de densidade, 55, 65
 de pressão, 55, 65
- Equação
 auto adjunta, 25
 da continuidade, 31
 da energia, 31
 da quantidade de movimento, 15
 de convecção-difusão, 25
 de discretização, 11
 de estado, 17
 de Euler, 10
 de Navier-Stokes, 12
 de Poisson, 25
 diferencial parcial, 13
 não-lineares, 12
 unidimensional, 11, 26
- Equilíbrio, 6, 9, 17
 químico, 1, 7, 12, 15
- Escoamento, 1, 4
 à jusante, 6
 aerodinâmico, 13
 altamente energético, 8
 axissimétrico, 34
 compressível, 13, 15
 contínuo, 1, 7
 de altíssima velocidade, 1, 2
 de altíssima velocidade., 3
 de entrada, 5
 de fluidos, 15
 em turbomáquinas, 2
 externo, 21
 hipersônico, 1, 2, 6, 7, 11, 24
 incompressível, 13, 38
 invíscido, 8, 11, 20
 isoentrópico, 7
 molecular livre, 9
 quimicamente reagente, 1
 reagente, 12
 regimes de, 4
 sobre rampa, 49

- subsônico, 5
 - supersônico, 1, 5, 76
 - unidimensional, 10
 - uniforme, 4
- Foguete, 3
- Força
- de arrasto, 2, 8
 - de corpo, 18
 - externa, 16
- Fronteira, 8, 21
- computacional, 21
- Gás, 5
- caloricamente perfeito, 4
 - ideal, 5
 - perfeito, 4, 19
 - quimicamente reagente, 9
- Hermes
- programa, 10
- Interface, 5, 12
- gráfica, 45, 69
- Método, 9
- anisotrópico, 13, 38
 - computacional, 37
 - das Características de Galerkin, 13, 25
 - de Bubnov-Galerkin, 24
 - de captura de choque, 37
 - de colocação, 24
 - de diferenças centradas, 11, 24
 - de diferenças finitas, 12
 - de elementos finitos, 12, 40, 69
 - de Galerkin, 24, 33
 - de Godunov, 12
 - de Goodman, 24
 - de malhas múltiplas, 11
 - de Rayleigh-Ritz, 24
 - de resíduos ponderados, 24
 - de Ritz, 24
 - de Runge-Kutta, 10
 - de separação, 13
 - de Steger e Warming, 12
 - de Taylor-Galerkin, 25
 - de viscosidade artificial, 38
 - de volumes finitos, 10, 12
 - do Variacional, 24
- Malha
- múltiplas*, 11
 - adaptação de, 13
 - grosseira, 11
 - não-estruturada, 14
 - refinada, 11
 - refinamento da, 10
- Meio
- contínuo, 9, 15
- Modelo, 2
- de dissipação, 11
 - matemático, 1, 15, 45
 - numérico, 24, 45
- Número
- de Mach, 1, 4, 7, 53
 - de Reynolds, 4, 7, 20
- número
- de nós, 69
- Onda
- de choque, 1, 3, 4, 8, 10, 11
- Otimização, 1, 47
- Ponto
- de estagnação, 5
 - sônico, 12
- Pressão, 3, 7, 17, 25, 31, 42
- campo de, 8, 20, 51
 - distribuição de, 66
 - gradiente de, 12, 38
 - ondas de, 5
 - superficial, 2
- Regime
- subsônico, 4
- Rombudo, 1, 3
- corpo, 6, 21, 52
- Similaridade, 9
- Simulação, 2, 13, 21, 49, 57
- bidimensional, 10
 - computacional, 1
 - numérica, 2
- Sonda, 2
- Superfície, 6
- adiabática, 5
 - da esfera, 66

- do corpo, 4, 8
- do veículo, 20
- sônica, 5
- Sustentação, 8
- Temperatura, 4, 19
 - gradiente de, 4
 - superficial, 2, 7
 - translacional, 9
 - vibracional, 9
- Transferência
 - de calor, 4
 - térmica de energia, 7
- Transição, 4, 6, 9
- Velocidade
 - de propagação, 5
 - de vôo, 3
 - do som, 4
 - hipersônica, 3
 - local, 4
 - subsônica, 3
 - superorbital, 3