



Unesp – Universidade Estadual Paulista

“Júlio de Mesquita Filho”

Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

**Um Panorama sobre *Roll Waves* em Escoamentos
Laminares e Turbulentos com Superfície Livre**

ADRIANA SILVEIRA VIEIRA

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, da Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Dr. Geraldo de Freitas Maciel

Ilha Solteira, Dezembro – 2007

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP - Ilha Solteira.

V658p Vieira, Adriana Silveira.
Um panorama sobre roll waves em escoamentos laminares e turbulentos com
superfície livre / Adriana Silveira Vieira. -- Ilha Solteira : [s.n.], 2007
112 f. : il., fots. (algumas color.)

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de
Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Ciências Térmicas, 2007

Orientador: Geraldo de Freitas Maciel
Bibliografia: p. 90-95

1. Escoamento. 2. Fluidos não-newtonianos. 3. Reologia. 4. Roll waves.
5. Herschel Bulkley.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

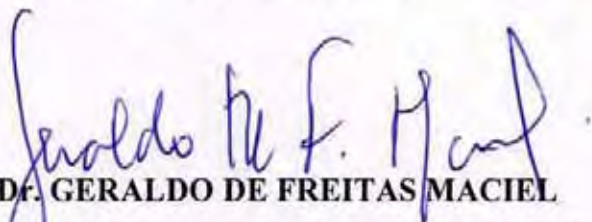
TÍTULO: *Um Panorama sobre Roll Waves em escoamentos Laminares e Turbulentos com Superfície Livre*

AUTOR: *ADRIANA SILVEIRA VIEIRA*

ORIENTADOR: Prof. Dr. GERALDO DE FREITAS MACIEL

DATA DA REALIZAÇÃO: 07 DE DEZEMBRO DE 2007

Aprovada com parte das exigências para obtenção do Título de MESTRE em ENGENHARIA MECÂNICA pela Comissão Examinadora:



Prof. Dr. GERALDO DE FREITAS MACIEL

Departamento de Engenharia Civil/ Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. ANDRÉ LUIZ SEIXLACK

Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. LUÍS MIGUEL CHAGAS DA COSTA GIL

Departamento de Engenharia Mecânica e Industrial / Universidade Nova de Lisboa / Portugal

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a meus pais, Antonio e Zoraide e ao meu irmão Aylton pelo incentivo, apoio e confiança que em mim depositaram. Sem vocês, nada disso jamais teria sido feito.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus pela vida, pelas oportunidades, força e coragem.

A toda minha família pelo apoio, amor, carinho, confiança, disponibilidade em todos os momentos, e paciência.

Ao professor Dr. Geraldo de Freitas Maciel, por toda paciência e orientação, na execução desse trabalho, e também, pelo aprendizado na qualidade de amigo e conselheiro.

A professora Dra. Mônica Pinto Barbosa pela confiança desde o início e apoio dado durante todo o processo.

Ao professor Titular João Batista Aparecido pelas horas de dedicação em momentos de dúvidas.

À banca examinadora, por aceitar contribuir na discussão e certamente no enriquecimento deste trabalho.

A CAPES pelo apoio fornecido, na forma de bolsa de mestrado, que possibilitou a realização desta pesquisa.

Ao meu querido amigo Tayguara que esteve presente durante todos esses anos, e que por acaso do destino deixou este mundo.

A minha grande amiga Fabiana por todos os momentos que passamos juntos, pela amizade e companheirismo.

A todos os meus amigos por todos os momentos felizes que passamos juntos, que de forma direta e indireta contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, professores e funcionários.

*“Deus nunca nos dá problemas cujas
soluções não estão a nosso alcance”*

(J.Paul Schmitt)

RESUMO

VIEIRA, A.S. (2007). Um Panorama sobre *Roll Waves* em escoamentos Laminares e Turbulentos com Superfície Livre. Ilha Solteira, 112p. Dissertação de Mestrado – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”.

Os escoamentos na superfície livre que se processam sobre forte declividade podem desenvolver instabilidades ao cabo de tempo finito. Tais instabilidades aparecem sob formas de ondas tipo “hydraulic jumps” bem espaçadas e são denominadas *Roll Waves*. Estas ondas, longas e periódicas, podem ser contínuas ou descontínuas; contínuas em problema *Shallow Water* viscoso e descontínuas para o caso não viscoso. Tal fenômeno pode ser observado tanto em escoamentos naturais como em canais artificiais e vertedouros de barragens. Tratando-se de escoamento de Fluidos não newtonianos, tal fenômeno pode ser visto facilmente em lavas torrenciais, avalanchas ou “debris flows”. Nesta dissertação foram analisados matematicamente e numericamente o comportamento e as condições de existência para a formação de *Roll Waves* em escoamentos laminares e turbulentos. Em escoamentos turbulentos toma-se como referência os trabalhos realizados por Maciel (2001) numa reologia Binghamiana. Para escoamentos laminares, cita-se o trabalho de Mei (1994) em uma reologia tipo *Power Law*. No plano numérico, para escoamentos turbulentos, foram utilizadas rotinas do MATLAB[®] versão 6.5 e, para escoamentos laminares, rotinas em FORTRAN 90; onde pôde-se analisar e comparar resultados para diversas reologias. O foco desta dissertação foi tratar o problema *Roll Waves* como uma instabilidade na vizinhança do regime uniforme para Fluidos não newtonianos, em regimes turbulentos e laminares. A reologia tratada e representativa de diversos escoamentos na natureza foi a de Herschel Bulkley. A partir desta dissertação deixa-se, como perspectiva futura, um estudo mais aprofundado sob formação de ondas em fluidos hiperconcentrados tipo Herschel Bulkley com abordagem experimental a fim de validar resultados apontados nesta pesquisa.

Palavras-chave: *Roll Waves*, Fluidos newtonianos, Fluidos não newtonianos, Herschel Bulkley, Bingham.

ABSTRACT

VIEIRA, A.S. (2007). A View about *Roll Waves* in Laminar and Turbulent Flows with Free Surface. Ilha Solteira, 112p. Master Degree Dissertation – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”.

Flows that happen over strong slope with free surface can develop instabilities after some finite time. Such wave shaped instabilities appear in the flow and are of the type “hydraulic jumps” well spaced and they are called *Roll Waves*. Those waves are long and periodic, continuous or discontinuous, continuous in viscous *Shallow Water* problems, and discontinuous for the inviscid case. *Roll Waves* are uncommon in natural flows, but they are common in man made channels and dams spillway. For flows of non Newtonian fluids such phenomenon can be seen easily in lava torrent, avalanche and debris flow. In this work it were mathematically and numerically analyzed the behavior and the existence conditions for the generation of *Roll Waves* within laminar and turbulent flows. For turbulent flows it is taken as reference the works done by Maciel (2001) dealing with a Bingham rheology. For laminar flows the reference is the work done by Mei (1994) using a *Power Law* rheology. Numerically, for turbulent flows it were used MATLAB[®] 6.5 procedures and for laminar flows FORTRAN 90 procedures were developed. Using these reference procedures it was obtained compared and analyzed results for several rheologies. This work left as future perspective a deeper study about the generation of waves in hipper concentrated fluids such as Herschel Bulkley fluid, with an experimental approach aiming to validate results produced. The focus of this work was to treat the so called *Roll Waves* problem as an instability in the vicinity of the uniform flow regime for non Newtonian fluids under laminar and turbulent flow regimes. The Herschel Bulkley rheology that was treated in this work is representative of several flows that happen in nature.

Keywords: *Roll Waves*, Newtonian fluid, Non Newtonian fluid, Herschel Bulkley, Bingham.

LISTA DE FIGURAS

<i>Figura 1: Roll Waves observadas no córrego (O Grönnbach, Merlingem)</i>	<i>18</i>
<i>Figura 2: Roll Waves encontradas na natureza (Noruega).....</i>	<i>19</i>
<i>Figura 3: Roll Waves geradas com lama em laboratório.....</i>	<i>19</i>
<i>Figura 4: Roll Waves contínuas.....</i>	<i>20</i>
<i>Figura 5: Roll Waves descontínuas.....</i>	<i>20</i>
<i>Figura 6: Diferentes etapas de desenvolvimento de Roll Waves.....</i>	<i>21</i>
<i>Figura 7: (a) escoamento laminar, (b) escoamento turbulento</i>	<i>25</i>
<i>Figura 8: Escoamento de água, óleo, mel e lama.....</i>	<i>28</i>
<i>Figura 9: Escoamento de lama (não-Newtoniana) e água com corante (Newtoniana).....</i>	<i>28</i>
<i>Figura 10: Reograma de diferentes fluidos.....</i>	<i>33</i>
<i>Figura 11: Tipo de solução de Roll Waves.....</i>	<i>35</i>
<i>Figura 12: Formação de Roll Waves, variando a velocidade de Propagação, adotando Re = 10.....</i>	<i>38</i>
<i>Figura 13: Formação de Roll Waves variando o número de Reynolds e adotando $Fr^2 = 6.25$ e</i>	<i>39</i>
<i>Figura 14: Formação de Roll Waves variando o número de Froude, adotando Re = 10 e</i>	<i>40</i>
<i>Figura 15: (a) visão típica experimental da formação de Roll Waves. (b) visão detalhada de um par de ondas, (c) formação de um trem de ondas com a variação da inclinação do canal.</i>	<i>45</i>
<i>Figura 16: (a) Roll Waves com amido de milho dois dias depois de preparado, (b) Roll Waves</i>	<i>46</i>
<i>Figura 17: Fluxograma.....</i>	<i>71</i>
<i>Figura 18: Resultado numérico $h(z)$, para: $Fr = 2,5$; $U = 1,39$; $\alpha = 1,0$, $\theta = 16^0$,</i>	<i>74</i>
<i>Figura 19: Resultado numérico $h(z)$, para: $Re = 10$; $\alpha = 1,0$; $\theta = 16^0$; $\varepsilon = 0,001$; $C^* = 0$.</i>	<i>75</i>
<i>Figura 20: Resultado numérico $h(z)$, para: $Re = 10$; $Fr = 2,5$; $\alpha = 1,0$; $\theta = 16^0$; $\varepsilon = 0,001$.</i>	<i>76</i>
<i>Figura 21: Resultado numérico $h(z)$, para: $Re = 10$, $Fr = 2,5$; $\alpha = 1,0$; $\theta = 16^0$;.....</i>	<i>77</i>

<i>Figura 22: Efeito da coesão antecipando e aumentando a amplitude das Roll Waves.</i>	77
<i>Figura 23 : Roll Waves para fluido tipo Herschel Bulkley.</i>	78
<i>Figura 24: Roll Waves para fluido tipo Herschel Bulkley.</i>	78
<i>Figura 25: Roll Waves para fluido tipo Herschel Bulkley.</i>	79
<i>Figura 26: Roll Waves para fluido tipo Herschel Bulkley.</i>	79
<i>Figura 27: Roll Waves em Fluido de Bingham.</i>	79
<i>Figura 28: Roll Waves em Fluido de Bingham.</i>	79
<i>Figura 29: Roll Waves em Fluido de Bingham.</i>	80
<i>Figura 30: Roll Waves em Fluido de Bingham.</i>	80
<i>Figura 31: Roll Waves em fluido tipo Power Law.</i>	80
<i>Figura 32: Roll Waves em fluido tipo Power Law.</i>	80
<i>Figura 33: Roll Waves em fluido tipo Power Law.</i>	81
<i>Figura 34: Roll Waves em fluido tipo Power Law.</i>	81
<i>Figura 35: Roll Waves em Fluidos Newtonianos.</i>	82
<i>Figura 36: Roll Waves em Fluidos Newtonianos.</i>	82
<i>Figura 37: Roll Waves em Fluido tipo Herschel Bulkley.</i>	82
<i>Figura 38: Roll Wave em Fluido de Bingham.</i>	82
<i>Figura 39: Roll Wave em Fluido de Herschel Bulkley.</i>	83
<i>Figura 40: Roll Wave em Fluido tipo Power Law.</i>	83
<i>Figura 41: Roll Waves em Fluido de Herschel Bulkley.</i>	83
<i>Figura 42: Roll Waves em Fluidos Newtonianos.</i>	83
<i>Figura 43: Bomba helicoidal Geremias - 7,5 CV.</i>	84
<i>Figura 44: Plataforma de ensaios de lama.</i>	85
<i>Figura 45: Plataforma equipada com sensores ultrasônicos e septo divisório na seção.</i>	85

LISTA DE SÍMBOLOS

α	coeficiente de distribuição de velocidade
β	constante em função do número de Froude
ζ	comprimento de onda no sistema móvel de coordenadas
θ	ângulo de inclinação do canal
λ	comprimento da <i>Roll Wave</i>
μ	viscosidade dinâmica ou absoluta de fluido newtoniano
μ_n	índice de escoamento para fluido do tipo <i>Power Law</i>
μ_B	viscosidade plástica (fluido de Bingham)
ρ	massa específica
τ	tensão de cisalhamento
τ^*	tensão de cisalhamento adimensional
τ_c	tensão crítica ou rigidez inicial
τ_p	tensão na parede
τ_{xx}	tensão normal atuante na direção x
τ_{yy}	tensão normal atuante na direção y
τ_{zz}	tensão normal atuante na direção z
τ_{xy}	tensão cisalhante atuante no eixo x na direção y
τ_{yx}	tensão cisalhante atuante no eixo y na direção x
τ_{xz}	tensão cisalhante atuante no eixo x na direção z
τ_{zx}	tensão cisalhante atuante no eixo z na direção x
ϕ	ângulo de atrito interno
ω	frequência das perturbações
C	coeficiente de Chézy
g	aceleração da gravidade
n	índice de escoamento do fluido
U	velocidade de propagação da <i>Roll Wave</i>

Fr	número de Froude
C^*	coesão do fluido (em função da tensão crítica)
U_i	componente de velocidade em notação indicial
X_i	eixos do sistema de coordenadas em notação indicial
F_i	forças de corpo
T_{ij}	tensor de tensões
t	escala de tempo
z	cota no sistema de coordenadas cartesianas
K_n	índice de consistência do fluido de Herschel-Bulkley
h_o	cota no fundo do canal
h_f	cota na superfície livre do escoamento
Ox	escala de comprimento na direção x
Oy	escala de comprimento na direção y
Oz	escala de comprimento na direção z
L	comprimento característico
x^*	abscissa adimensional no sistema de coordenadas cartesianas
y^*	ordenada adimensional no sistema de coordenadas cartesianas
z^*	cota adimensional no sistema de coordenadas cartesianas
u^*	componente de velocidade adimensional na direção x
v^*	componente de velocidade adimensional na direção y
w^*	componente de velocidade adimensional na direção z
P	pressão
P^*	pressão na forma adimensional
\bar{u}	velocidade média do escoamento
h	profundidade total do escoamento
z_0	profundidade do escoamento na região cisalhada
l_0	comprimento da onda em regime uniforme
h_0	profundidade do escoamento em regime uniforme
u_0	componente da velocidade na direção para escoamento em regime uniforme

\bar{u}_0	velocidade média do escoamento em regime uniforme
H	valor infinitesimal para altura quando o escoamento é perturbado
V	valor infinitesimal para a velocidade do escoamento quando perturbado
$I(\omega)$	taxa média de crescimento das instabilidades
x'	abscissa no sistema móvel de coordenadas
c	constante em função da velocidade de propagação da <i>Roll Wave</i>
$h_1 = y_0$	profundidade do escoamento antes do choque
h_2	profundidade de escoamento depois do choque
h_c	profundidade crítica do escoamento
Re	número de Reynolds
R	raio hidráulico
$\dot{\gamma}$	taxa de deformação (s^{-1})
\bar{v}	módulo da velocidade média do escoamento
A	seção transversal
b	largura superficial
h_m	altura média do escoamento
C_f	coeficiente de resistência local
r	termo de resistência tipo Chézy
ν	viscosidade cinemática
U_c	velocidade crítica
$\frac{\tau_c}{\rho}$	tensão crítica de cisalhamento reduzida
u	velocidade média na vertical
w	velocidade de propagação na frente do escoamento
$g \sin \theta$	termo da gravidade
$\frac{gu^2}{C^2 h}$	termo representativo dos efeitos dissipativos na interface entre o escoamento e a parede do canal
W	velocidade adimensional de propagação da frente do escoamento
$h(z)$	perfil da <i>Roll Wave</i>
ε	esbeltez da onda
C_v	concentração em volume

P' perímetro molhado da seção transversal do canal

J declividade da linha de energia

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	Objetivos	22
1.2	Fundamentação Teórica	22
1.2.1	Fluido Newtoniano	22
1.2.2	Fluido Não Newtoniano	23
1.2.3	Número de Reynolds	24
1.2.4	Número de Froude	26
1.2.5	Fórmula de Chézy	26
1.2.6	Viscosidade	27
1.2.7	Equações <i>Shallow Water</i> (águas rasas)	28
2	MODELOS REOLÓGICOS	31
3	ESTADO DA ARTE	34
4	MODELO MATEMÁTICO	48
4.1	Condições de existência de <i>Roll Waves</i> para Fluidos Newtonianos em Regimes Turbulentos.	48
4.2	Condições de existência de <i>Roll Waves</i> para Fluidos Newtonianos em Regime Turbulento com introdução de difusão na corrente.	56
4.3	Condições de existência de <i>Roll Waves</i> para Fluidos não newtonianos	62
4.3.1	Estudo de Casos	64
4.3.2	Estabelecimento de condições de Choque e comprimento de onda	66
4.3.2.1	Determinação de h_2 segundo valor β :	67
4.3.3	Estabelecimento da velocidade de Propagação da <i>Roll Wave</i> .	67
5	RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DAS ROLL WAVES	69
5.1	Considerações Gerais	69
6	RESULTADOS NUMÉRICOS	73
6.1	Resultados numéricos com reologia de Bingham para escoamentos turbulentos	73
6.2	Resultados Numéricos utilizando a Reologia de Herschel Bulkley para escoamentos laminares	77
6.2.1	Resultados Numéricos com reologia de Bingham em escoamentos laminares	79
6.2.2	Resultados Numéricos com reologia de <i>Power Law</i> em escoamentos laminares	80
6.2.3	Resultados Numéricos para um fluido Newtoniano em escoamentos laminares	81
6.2.4	Relações entre os Fluidos tipo Herschel Bulkley e outras reologias.	82
7	PROPOSTA DE EXPERIMENTAÇÃO FÍSICA COM ROLL WAVES	84
8	DISCUSSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	87
9	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	90
	ANEXO A	96
	Equacionamento matemático para elaboração da equação da <i>Roll Waves</i> na Reologia Herschel-Bulkley, segundo Ferreira (2006).	96
	Equações utilizadas:	96
	Modelo Reológico de Herschel-Bulkley:	96

Condições de contorno _____	96
Pressão hidrostática _____	97
Modelo Matemático _____	101
Perfil de velocidade do escoamento: _____	101
Adimensionalização das Equações: _____	103
Equação das <i>Roll Waves</i> : _____	105
<i>APENDICE A</i> _____	107
Programas: _____	107
Programa Elaborado em Fortran para formação de Roll Waves em Escoamentos Laminares. _____	107
Rotinas elaboradas em Matlab para determinar o valor da velocidade de propagação U em função das demais variáveis. _____	112

ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Para a elaboração desta dissertação realizou-se uma análise mais aprofundada, com abordagem matemática e numérica, de estudo de casos que consistem na adequabilidade e aplicação do grupo de equações *Shallow Water* (águas rasas), ao diagnóstico sobre condições de existência, unicidade e controle de ondas tipo *Roll Waves* evoluindo em canais.

Capítulo 1: Introdução

Este capítulo refere-se à motivação pela execução deste trabalho; aborda-se também uma fundamentação teórica importante, bem como os objetivos desta dissertação.

Capítulo 2: Estado da Arte

Trata-se de um levantamento bibliográfico realizado sobre o fenômeno *Roll Waves*, abordado em diferentes reologias, tanto em escoamentos laminares como em escoamentos turbulentos e seus avanços até o presente momento.

Capítulo 3: Modelos Reológicos

Neste capítulo foram estudados os diferentes modelos reológicos para a formação de *Roll Waves* tanto em Fluidos newtonianos como em Fluidos não newtonianos.

Capítulo 4: Modelo Matemático

Consta neste capítulo o desenvolvimento das equações governantes e tratamento matemático para a formação de *Roll Waves*, em Fluidos newtonianos e não newtonianos, tanto para escoamento laminar como para escoamentos turbulentos. Determinam-se as condições de existência do fenômeno.

Capítulo 5: Procedimentos e Métodos Numéricos

Apresenta-se neste capítulo um fluxograma que ilustra os passos percorridos na elaboração do programa feito em Fortran responsável para a simulação de *Roll Waves*. Para a resolução da

equação motriz do fenômeno utilizou-se um esquema numérico de Runge e Kutta de 5º ordem.

Capítulo 6: Resultados Numéricos

Apresentam-se neste capítulo resultados numéricos obtidos através da resolução da equação de *Roll Waves* utilizando uma reologia binghamiana para escoamentos turbulentos, bem como a análise do fenômeno em diversas situações e em diversas reologias e condições de escoamento, notadamente a reologia de Herschel Bulkley em condições de escoamento laminar.

Capítulo 7: Proposta de Experimentação Física com *Roll Waves*

Constam neste capítulo propostas para a realização de ensaios experimentais no Laboratório de Hidrologia e Hidrometria da UNESP de Ilha Solteira, com intuito de formação de *Roll Waves* em canais com escoamento de lama.

Capítulo 8: Discussões e Perspectivas Futuras.

As perspectivas deste trabalho estão associadas à necessidade de realização de ensaios físicos a fim de validar estimativas numéricas apontadas nesta dissertação.

Capítulo 9: Referências Bibliográficas.

Apresenta-se a bibliografia utilizada na elaboração deste trabalho.

CAPÍTULO 1

1 INTRODUÇÃO

Os escoamentos que se processam sobre fortes declividades podem desenvolver instabilidades. O aspecto caótico presente na natureza desses fenômenos instáveis parece tender, a cabo finito, para um escoamento estacionário, mais estável, com o aparecimento de ondas longas e periódicas em forma de ressalto hidráulico móvel ou *Bore Waves*. Tais perturbações são denominadas *Roll Waves*. Estas ondas podem ser observadas em escoamentos naturais, e com maior frequência em canais artificiais e vertedouros de barragens. As Figuras 1 e 2 ilustram o fenômeno em canal natural e a Figura 3 ilustra *Roll Waves* em canal de laboratório.



Figura 1: *Roll Waves* observadas no córrego (O Grünnbach, Merlingem) de Vaughan Cornish (1934)¹.

¹ Fotografia cedida pela imprensa universitária de Cambridge, observadas por Vaughan Cornish (1934).
“Um Panorama sobre *Roll Waves* em Escoamentos Laminares e Turbulentos com Superfície Livre”.



Figura 2: *Roll Waves* encontradas na natureza (Noruega).

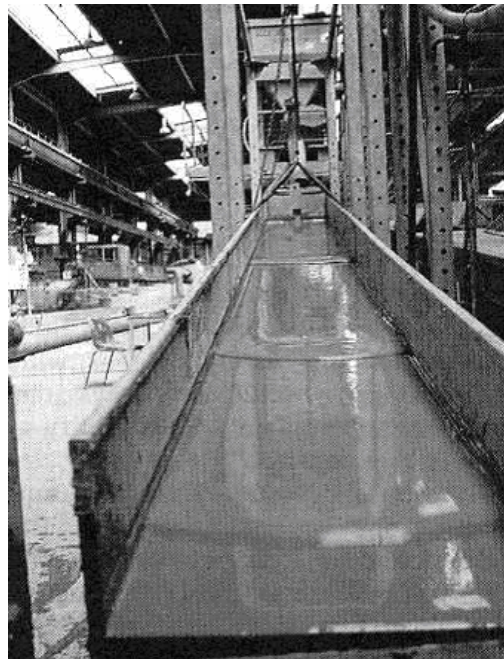


Figura 3: *Roll Waves* geradas com lama em laboratório².

Estuda-se neste trabalho de forma analítica e numérica, o aparecimento de instabilidades na vizinhança do regime uniforme em situações laminares e turbulentas de escoamentos sobre uma rampa de declividade variável.

Dentre as diversas naturezas reológicas existentes esta dissertação faz alusão às lamas, que apresentam propriedades reológicas de fluido de Herschel-Bulkley que, quando em

² Figura ilustrada por Maciel (2001).

“Um Panorama sobre *Roll Waves* em Escoamentos Laminares e Turbulentos com Superfície Livre”.

escoamento, exibem, via de regra, propriedades laminares. Não obstante, escoamentos de detritos e deslizamentos podem, muitas das vezes, se processarem em condições de regime turbulento.

Quando a concentração de sedimentos aumenta, em especial para sedimentos contendo partículas de argila, a mistura deixa de se comportar como newtoniana conferindo, propriedades não newtonianas. Esta concentração passa a variar com a granulometria e a composição do mineral do sedimento, bem como com a qualidade da água contida na mistura (SANTOS, 2003 e KIRYU, 2006).

As Figuras 4, 5 e 6 ilustram o comportamento das *Roll Waves* em suas diferentes etapas, até a sua formação, podendo estas serem “contínuas” ou “descontínuas”.

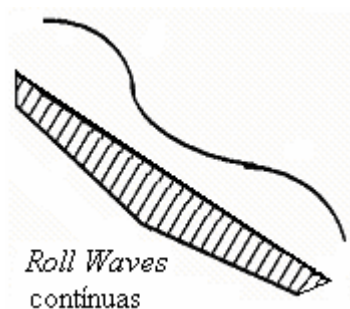


Figura 4: *Roll Waves* contínuas.

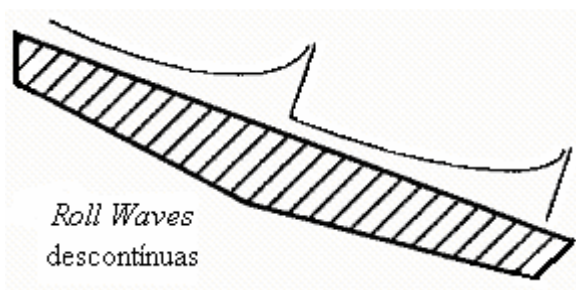


Figura 5: *Roll Waves* descontínuas.

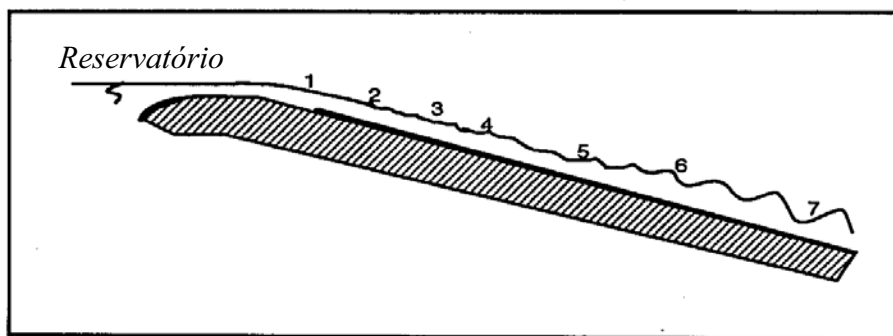


Figura 6: Diferentes etapas de desenvolvimento de *Roll Waves*.

Na Figura 6, podem-se especificar as características do desenvolvimento destas ondas da seguinte forma:

1 : superfície livre lisa, escoamento ainda uniforme;

2 : Pequenas oscilações senoidais;

3 e 4 : Início do desenvolvimento de instabilidades;

5 : Início do aparecimento de *Roll Waves*;

6 : Ondas maiores e mais rápidas absorvem as menores e mais lentas;

7 : *Roll Waves* continuam a crescer em velocidade, amplitude e comprimento de onda.

Santos (2003) e Kiryu (2006) investigaram de maneira mais refinada e consistente, e com compromissos de engenharia, as propriedades e a cinemática da matriz argilosa não newtoniana (misturas de água+argila, água+areia fina+argila) que durante as cheias urbanas transportam detritos e lixos, provocando grandes alagamentos, prejuízos de infra-estrutura e perdas de vidas humanas, notadamente durante a estação chuvosa, nas grandes capitais do país. Esses pesquisadores observaram, em algumas situações de regime uniforme, o aparecimento de *Roll Waves* sobre a plataforma de ensaios no laboratório de Hidrologia e Hidrometria da UNESP de Ilha Solteira.

Trabalhos de Santos (2003) e Kiryu (2006) enfatizam que foram feitas várias tentativas na busca de melhor explicar a dinâmica global e intrínseca desses escoamentos

“Um Panorama sobre Roll Waves em Escoamentos Laminares e Turbulentos com Superfície Livre”.

nesta última década. Pode-se citar, a partir da literatura, desde as tentativas de modelagem a partir dos raros dados de campo, passando por séries de ensaios de laboratório, até chegar à modelagem numérica, onde diversas leis de comportamento reológico têm sido tratadas. Dentre estas tentativas, o modelo de Bingham é o que mais figura na literatura. No entanto, com base em estudos mais recentes, tendo a experimentação física como base de decisão, verifica-se que todas estas suspensões de matriz argilosa e hiperconcentrada obedecem, de uma maneira geral, ao modelo reológico não-linear viscoplástico do tipo Herschel-Bulkley (cf. Coussot (1992, 1996, 1997), Piau (1996), Huang e Garcia (1996)) para as quais uma proposta “Binghamiana” torna-se um caso particular, não obstante às vezes interessante e conveniente em certas aplicações da engenharia (Maciel, 1997).

A possibilidade de modelagem matemática a fim de prever propriedades permitindo descrever a dinâmica desses escoamentos é, contudo, ainda limitada, dada a nossa frágil compreensão no que diz respeito aos aspectos fundamentais da dinâmica do escoamento da mistura sólido+líquido.

1.1 Objetivos

O presente trabalho tem por objetivos:

- Ilustrar todo o processo matemático e computacional para a formação de *Roll Waves* em fluidos newtonianos e não newtonianos tanto para escoamentos laminares como para escoamentos turbulentos.
- Desenvolver um programa computacional capaz de simular *Roll Waves* em escoamentos laminares utilizando-se do modelo reológico tipo Herschel-Bulkley.

1.2 Fundamentação Teórica

1.2.1 Fluido Newtoniano

Fluido newtoniano é uma substância que, cada componente da velocidade é

proporcional ao gradiente de velocidade na direção normal a esta componente. A constante de proporcionalidade é o índice de viscosidade. O comportamento de um fluido está relacionado com o comportamento realizado através da relação Tensão *versus* Taxas de deformação.

Exemplos de Fluidos Newtonianos:

Água, alguns óleos do motor, a maioria de óleos minerais, gasolina, querosene, a maioria de soluções de sal na água, suspensões claras do material da tintura, etc.

1.2.2 Fluido Não Newtoniano

Os Fluidos não newtonianos não seguem o comportamento linear, a relação entre a viscosidade e a velocidade de deformação depende do tipo fluido: pseudoplástico, viscoplástico. Há diversas leis de comportamento para analisar a lei da viscosidade de Fluidos não newtonianos.

Os Fluidos não newtonianos podem suportar pequenas tensões de cisalhamento aplicadas, sem o aparecimento de nenhuma deformação. Esta tensão, a qual o fluido pode resistir sem se deformar, é chamada tensão crítica de cisalhamento, tensão inicial de escoamento ou de corte.

Para fluidos viscosos newtonianos tem-se a seguinte relação:

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (1.1)$$

e para os não newtonianos (viscoplásticos), tem-se:

$$\tau = \tau_c + K_n \dot{\gamma}^n \quad (1.2)$$

onde:

τ : tensão de cisalhamento (Pa);

τ_c : tensão crítica (Pa);

$\dot{\gamma}$: taxa de deformação (s^{-1});

n : índice de escoamento;

K_n : índice de consistência (Pas'').

1.2.3 Número de Reynolds

Quando a velocidade de um fluido que escoar em um tubo ou junto a uma superfície excede certo valor crítico, o regime de escoamento passa de laminar para turbulento, exceto em uma camada extremamente fina junto à parede do tubo, chamada camada limite, onde o escoamento permanece laminar. Além da camada limite, onde o escoamento é turbulento, o movimento do fluido é altamente irregular, caracterizado por vórtices locais e um grande aumento na resistência ao escoamento.

O regime de escoamento, se laminar ou turbulento, é determinado pela quantidade adimensional, chamada Número de Reynolds, definida pela razão entre as forças de inércia e as forças viscosas.

$$Re = \frac{\bar{v}L}{\nu} ; \quad \nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.3)$$

Onde ρ é a massa específica do fluido, μ , seu coeficiente de viscosidade dinâmica, \bar{v} , o módulo da sua velocidade média de escoamento e L , o comprimento característico. Esta velocidade média é definida como a velocidade uniforme em toda a seção reta do tubo que produziria a mesma vazão.

Em escoamentos em canais, segundo o Número de Reynolds (Re) tem-se:

- Se $Re < 500$, tem-se um escoamento laminar, onde a trajetória e as linhas de corrente são bem definidas, o movimento é organizado, estável e admite resistência ao escoamento somente por tensões tangenciais de origem viscosa.
- Se $500 < Re < 2000$, tem-se um escoamento de transição, onde o escoamento é instável, podendo mudar de um regime para outro.

- Se $Re > 2000$, tem-se um escoamento turbulento, onde as trajetórias são indefinidas, o movimento desorganizado, a difusão é muito rápida, ocorre à existência de turbilhões e a resistência ao escoamento pela existência de tensões de origem turbulenta (devido à troca de energia entre as partículas).

Com a lei de Stokes, verifica-se que a força resistiva sobre uma esfera que se move em um fluido viscoso com uma velocidade não muito grande é proporcional ao módulo desta velocidade. Por outro lado, a força resistiva sobre qualquer objeto sólido que se move em um fluido viscoso com velocidades maiores é aproximadamente proporcional ao módulo da velocidade ao quadrado.

Reynolds, estudando a causa destas duas diferentes leis de atrito nos fluidos, descobriu que a mudança da lei de primeira potência para a de segunda potência não era gradual, mas sim, brusca, e ocorria, para qualquer fluido dado e qualquer aparato de medida, sempre na mesma velocidade crítica. Reynolds mostrou experimentalmente que esta mudança ocorria simultaneamente com a mudança no regime do escoamento no aparato de medida, de laminar para turbulento.

O experimento consistia em introduzir um fio de líquido colorido no centro de um tubo através do qual o mesmo líquido, sem corante, escoava com uma velocidade controlada como mostra a Figura 7(a). As baixas velocidades de escoamento, o fio de líquido colorido permanecia reto e contínuo pelo comprimento do tubo e quando certa velocidade crítica era atingida, a linha colorida era violentamente agitada e sua continuidade destruída por curvas e vórtices, como mostra a Figura 7(b), revelando assim fluxo turbulento. Exatamente nesta velocidade é que a lei de atrito no fluido passava de uma lei de primeira potência para uma de segunda potência.

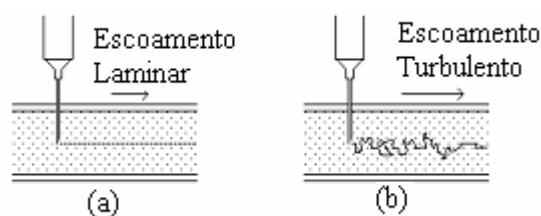


Figura 7: (a) escoamento laminar, (b) escoamento turbulento

1.2.4 Número de Froude

O Número de Froude exprime a importância das forças de inércia em relação às forças de gravidade, a saber:

$$Fr = \frac{\text{Forças}_{inércia}}{\text{Forças}_{gravidade}} \propto \frac{\rho h_m^2 U^2}{\rho g h_m^3} \Rightarrow Fr = \frac{U}{\sqrt{g h_m}} \quad (1.4)$$

Em escoamentos em canais, h_m é a altura média do escoamento (profundidade hidráulica), $h_m = \frac{A}{b}$, sendo A a seção transversal do canal e b a largura superficial.

Seja $c = \sqrt{g h_m}$ a celeridade ou velocidade de propagação de pequenas perturbações.

Se $Fr < 1 \Rightarrow$ regime lento: comandado por jusante; perturbações propagam-se para montante e jusante.

Se $Fr > 1 \Rightarrow$ regime rápido: comandado por montante; perturbações propagam-se para jusante.

Se $Fr = 1 \Rightarrow$ regime crítico com aparecimento de ondas estacionárias.

Regimes rápidos podem ocorrer em rios de montanha e em zonas singulares (descarregadores, quedas bruscas, etc.), sendo o mais comum, em rios, o regime lento.

1.2.5 Fórmula de Chézy

A Fórmula empírica de Chézy é representada pela tensão média de arrastamento numa dada seção e é dada por:

$$\tau_0 = C_f \rho \frac{U^2}{2} \quad (1.5)$$

em que C_f é o coeficiente de resistência local.

Para o regime turbulento rugoso uniforme com $\tau_0 = \rho g R J$, a velocidade do

escoamento é dada por:

$$U = C\sqrt{RJ} \quad (1.6)$$

onde,

$$C = \sqrt{\frac{2g}{C_f}} \quad (1.7)$$

é o Coeficiente de Chézy ($L^{1/2}T^{-1}$), e o mesmo, depende do material do fundo e da profundidade do escoamento,

$$R = \frac{A}{P'} \quad (1.8)$$

R é o Raio Hidráulico e P' o perímetro molhado da seção transversal do canal e J a declividade da linha de energia.

1.2.6 Viscosidade

Percebe-se a viscosidade de um fluido a partir da resistência que ele oferece ao movimento. A água é um fluido com pequena viscosidade. Substâncias como xampu ou xaropes possuem viscosidades maiores. A viscosidade também depende da temperatura. O óleo de um motor, por exemplo, é muito menos viscoso a temperaturas mais altas do que quando o motor está frio.

Quando um fluido sofre uma deformação, ocorre uma interação interna entre as partículas, mas sabe-se que há diferentes comportamentos para esta interação em diferentes tipos de fluidos. Tomando-se como exemplo básico dois fluidos diferentes escoando num plano inclinado sob as mesmas condições, o tempo de queda provavelmente será diferente para os mesmos, dependendo da resistência interna da interação das partículas. Esta maior ou menor resistência interna das partículas está diretamente ligada à noção de viscosidade. Outra definição clássica sobre a noção de viscosidade é dizer que a mesma é a razão entre a tensão cisalhante e a variação da taxa de deformação, a qual se mantém constante, em um fluido newtoniano.

Analisando-se, por exemplo, quatro escoamentos de fluidos diferentes, como mostra a Figura 8, nota-se que cada fluido requer maior tempo para escoar, respectivamente da esquerda para a direita. No entanto, o resultado final do tempo necessário para escoar dos três primeiros é de mesma ordem. Já, o quarto fluido, apresenta-se diferente dos demais. A explicação para esse fenômeno é a presença de uma tensão de cisalhamento crítica (τ_c) limitante para a deformação do fluido. Já a Figura 9 mostra o escoamento de Fluidos newtonianos e não newtonianos.

Em suma, uma maior ou menor viscosidade de um fluido não implica na condição de não newtoniedade, e sim na velocidade de deformação.

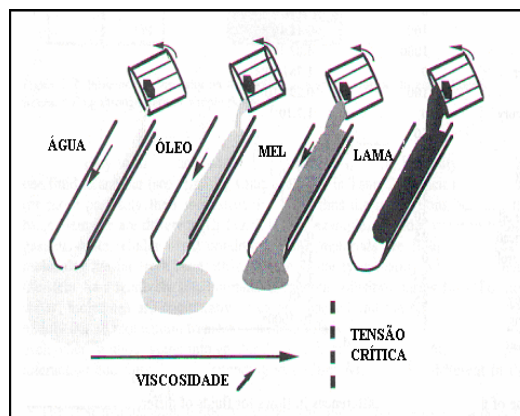


Figura 8: Escoamento de água, óleo, mel e lama.
(Coussot, P – Mudflow Rheology and Dynamics)



Figura 9: Escoamento de lama (não-Newtoniana) e água com corante (Newtoniana).

1.2.7 Equações *Shallow Water* (águas rasas)

Os escoamentos não permanentes gradualmente variados são regidos pelas equações *Shallow Water* (sistema de Saint-Venant), formado de duas equações a derivadas parciais, quasi-linear, que traduzem a aplicação dos princípios de conservação de massa e quantidade de movimento ao escoamento em rios e canais.

A eventual descontinuidade do perfil da superfície livre, provocando o fenômeno que se convencionou denominar onda de choque pode caracterizar as ondas de ruptura como escoamentos não permanentes em torno da região onde se localiza a descontinuidade. Nestes casos as equações de Saint-Venant perdem a sua validade e devem ser utilizadas em seu lugar as relações denominadas equações de Rankine-Hugoniot, resultantes da aplicação dos mesmos princípios de conservação na região do choque.

Uma das principais hipóteses implícitas nas equações de Saint-Venant, a da distribuição hidrostática de pressões em uma seção transversal do escoamento, é particularmente violada, de forma drástica, na zona de choque ou descontinuidade, pelo aparecimento de acelerações verticais não desprezíveis.

Existem métodos que asseguram o uso das equações de Saint-Venant através da descontinuidade na superfície livre pela introdução de artifícios matemáticos e numéricos na simulação dos processos físicos existentes na onda de choque. Os dois principais métodos de cálculo encontrados na literatura são: Métodos Pseudoviscosos (consiste em um incremento na viscosidade) e Soluções Fracas das Equações de Saint-Venant.

Do ponto de vista numérico, a separação da descontinuidade e sua propagação traduz-se em problemas de resolução, gerando instabilidades, chegando até mesmo a uma “explosão” do esquema numérico.

As equações de Barré de Saint-Venant, se apresentam, na sua forma conservativa, como:

Conservação da Massa:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0$$

Quantidade de Movimento:

$$\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu^2}{\partial x} + g h \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} = g h \sin \theta - \frac{g u^2}{C^2}$$

onde:

h : profundidade do escoamento;

u : velocidade média na vertical;

C : coeficiente de Chézy;

θ : declividade do canal;

ρ : massa específica do fluido;

α : coeficiente do perfil de velocidade.

CAPÍTULO 2

2 MODELOS REOLÓGICOS

A seguir são apresentados alguns modelos matemáticos que representam diferentes tipos de comportamentos reológicos. Esses modelos são válidos para escoamentos simples e expressam a relação entre τ e $\dot{\gamma}$ (tensão cisalhante em função da taxa de deformação).

O modelo mais simples que se tem é o do fluido newtoniano em que a tensão de cisalhamento é diretamente proporcional à taxa de deformação. A constante de proporcionalidade é a viscosidade do fluido. Matematicamente, tem-se:

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (2.1)$$

Este tipo de comportamento é observado, por exemplo, com o ar, água, óleos e álcoois.

Um modelo um pouco mais complexo é o modelo “potência” (Oswald, 1925):

$$\tau = a \dot{\gamma}^n \Rightarrow \mu = a \dot{\gamma}^{n-1} \quad (2.2)$$

onde a e n são parâmetros do fluido.

Para alguns fluidos, para taxas de deformação próximas a zero ou valores infinitos, o valor μ tende a um valor constante (μ_0 e μ_∞ respectivamente). Neste caso o modelo mais recomendado é:

$$\frac{\mu - \mu_{\infty}}{\mu_0 - \mu_{\infty}} = f(\dot{\gamma}) \quad (2.3)$$

onde $\mu_0 > \mu_{\infty}$ e f é uma função decrescente de $\dot{\gamma}$ que tem que ser escolhida de tal forma que $f(\dot{\gamma}) \rightarrow 1$ quando $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ e $f(\dot{\gamma}) \rightarrow 0$ quando $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$. Powell-Eyring, Carreau e Ellis são exemplos desse modelo.

No caso de Fluidos não newtonianos (com presença de tensão crítica), os modelos são da forma:

$$\tau = \tau_c + f(\dot{\gamma}) \quad (2.4)$$

Alguns exemplos importantes são:

$$\text{(Bingham e Green – 1920)} \quad \tau = \tau_c + \mu_B \dot{\gamma} \quad (2.5)$$

$$\text{(Herschel e Bulkley – 1926)} \quad \tau = \tau_c + K_n \dot{\gamma}^n \quad (2.6)$$

$$\text{(Casson – 1959)} \quad \sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_c} + \sqrt{K_n \dot{\gamma}} \quad (2.7)$$

Em cada caso, os parâmetros τ_c (tensão crítica), μ_B (viscosidade plástica), K_n (índice de consistência) e n (índice de escoamento) são diferentes e devem ser determinados experimentalmente. Esses modelos são aplicáveis, por exemplo, a concreto fresco, lamas, tintas e misturas hiperconcentradas.

A Figura 10 ilustra alguns dos diferentes tipos de modelos reológicos encontrados na literatura.

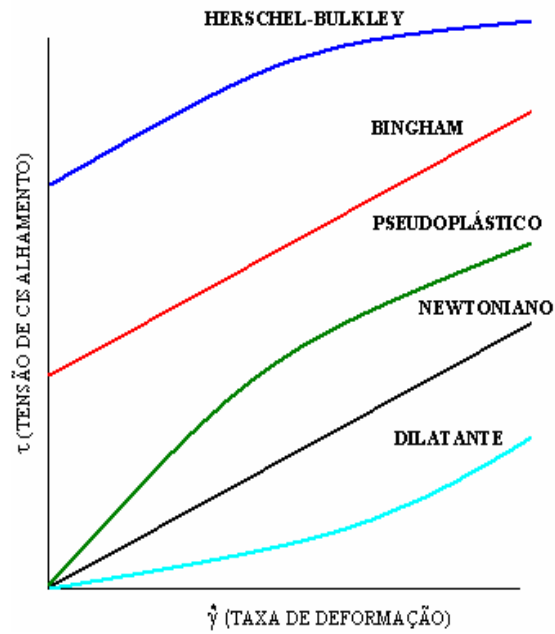


Figura 10: Reograma de diferentes fluidos.

onde:

- O fluido dilatante obedece o modelo reológico tipo *Power Law* para $n > 1$ e $\tau_c = 0$
- O fluido é Newtoniano quando $n = 1$ e $\tau_c = 0$.
- O fluido Pseudoplástico obedece o modelo reológico tipo *Power Law* para $n < 1$ e $\tau_c = 0$.
- O fluido é dito Binghamiano quando $n \neq 1$ e $\tau_c \neq 0$.
- O fluido admite as características da reologia tipo Herschel Bulkley se $n < 1$ e $\tau_c \neq 0$.

CAPÍTULO 3

3 ESTADO DA ARTE

Uma primeira tentativa de cunho teórico consistiu em aproximar as equações *Shallow Water* com difusão as *Roll Waves*; o que nos permitiu definir critérios de formação e estabilidade (Maciel *et al.*, 1997). Uma segunda tentativa, de cunho numérico, consistiu no desenvolvimento de programa computacional com base na teoria de sistemas hiperbólicos não lineares e utilização de esquemas numéricos tipo Godunov-VanLeer (Maciel, 1998, VanLeer, 1981).

Quanto à formação de *Roll Waves* em escoamentos de fluido newtoniano e não newtoniano. Estudos anteriores foram realizados na busca de explicar a ocorrência do fenômeno.

As observações detalhadas foram apresentadas primeiramente por (Cornish, 1910), embora existam relatos de que estas ondas possam ter sido vistas mais cedo, pois suas observações aparecem em desenhos artísticos antigos (Montes, 1998).

O primeiro pesquisador a estabelecer um critério sobre a formação de *Roll Waves* a partir de uma análise de estabilidade linear foi Jeffreys (1925). Deduziu que o escoamento uniforme tornava-se instável se o número de Froude fosse superior a 2.

Dando seqüência aos estudos realizados por Jeffreys, Thomas (1939) verifica a formação de *Roll Waves* de grande amplitude como sendo um trem de ondas que se formam na superfície das águas obedecendo a uma velocidade constante.

Dressler (1949) tentou delinear o perfil da superfície livre e verificou a formação de *Roll Waves*, descrevendo o fenômeno como sendo uma série de ondas de comprimentos bem definidos, separadas por descontinuidades da superfície livre, na verdade esta análise foi

“Um Panorama sobre Roll Waves em Escoamentos Laminares e Turbulentos com Superfície Livre”.

baseada na formulação de Saint Venant (*shallow water equations*) sem os termos de difusão, combinada à equação do ressalto hidráulico.

O segundo membro da equação da quantidade de movimento a ser apresentado no capítulo 4 compreende o efeito da gravidade adicionado ao termo que modela a turbulência via coeficiente de Chézy (C). Através da técnica da adimensionalização das variáveis, Dressler (1949) mostra que se $tg \theta > 4g / C^2$, onde θ é a declividade do canal, soluções regulares, periódicas e separadas por descontinuidades ou picos da superfície livre aparecem, porém, esta análise sintética eminentemente correta não permite determinar o comprimento destas ondas. Através desses estudos realizados por Dressler (1949) sobre o fenômeno *Roll Waves* observa-se:

- A relação $tg \theta > 4g/C^2$, ou ainda $4r < \theta$, onde r é o termo de resistência tipo Chézy $\left(r = \frac{g}{C^2} \right)$, é conhecida como condição necessária para a existência de *Roll Waves*, mostrando que se o efeito de resistência da parede é grande, ondas periódicas tipo *Roll Waves* não deverão se formar, o mesmo acontecendo para efeitos muito pequenos.

- Em todos os casos, o valor de θ e r poderiam ser fixados anteriormente, pois conhece-se a natureza das paredes do canal e sua declividade. Se uma velocidade de propagação foi ainda prescrita, tem-se, segundo Dressler (1949), uma família de soluções periódicas a um parâmetro com relação ao comprimento de onda. Se somado a isto, fixa-se também o comprimento de onda, a solução é única. A Figura 11 ilustra um trem de *Roll Waves*, segundo Dressler.

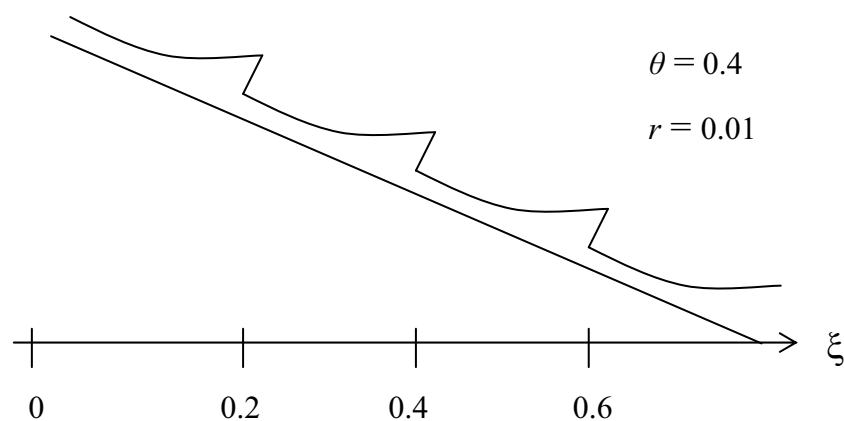


Figura 11: Tipo de solução de *Roll Waves*.

Kapitza (1949) verificou que *Roll Waves* em fluidos hiperconcentrados ocorreriam quando o número de Reynolds, $Re = \frac{UH}{\nu}$, onde U é a velocidade de superfície, H é a profundidade e ν a viscosidade cinemática, excede-se um valor crítico $Re_c = 1$.

Ishihara *et al* (1954) realizaram estudos teóricos e experimentais para a formação de *Roll Waves* em Fluidos newtonianos e descobriram que as cristas destas ondas não são verticais, porém são bem íngremes.

Benjamin (1957) e Yih (1963) descobriram que para a formação de *Roll Waves* em escoamentos laminares, utilizando-se das equações de Navier Stokes, adotando perturbações senoidais infinitesimais na superfície livre, seria necessário que o número de Froude fosse maior que 0.5. Além disso, observaram a formação de tais instabilidades tanto em canais artificiais como em canais naturais, onde tem-se propriedades teóricas bem estabelecidas em termos de instabilidade linear de um fluxo uniforme.

Em seqüência aos trabalhos de Yih (1963), Montuori (1963), descobriu-se que se o canal tiver um comprimento muito pequeno, existe a possibilidade de não formação destas ondas.

Brock (1969) inicia pesquisas sobre a formação de *Roll Waves* e observa, de forma experimental, que tais ondas podiam ser formadas utilizando o número de Froude = 3.2 e o número de Reynolds da ordem de 10^4 . Já em 1970, mais familiarizado com o assunto, Brock analisou os trabalhos realizados por Dressler (1949) e a partir de então, utilizando as equações *Shallow Water*, desenvolveu uma teoria para a formação de *Roll Waves* fazendo uma comparação com seus resultados experimentais obtidos no ano anterior. Brock incorporou a profundidade normal em sua teoria e derivou expressões para forma de onda, velocidade de propagação e período das ondas, entretanto, suas soluções não se mostraram aplicáveis em situações práticas.

Yoon e Wenzel (1971) e Emmett (1978), analisando a existência de *Roll Waves* em fluxo de lama em canais naturais, verificaram que o fluxo é instável e não uniforme, e a intensidade do fluxo aumenta o potencial para a erosão do solo.

Bakhvalov e Eglit (1977-1983), estudando avalanchas densas, efetuaram análise análoga a de Dressler, quando introduzem um termo dissipativo suplementar modelado por um atrito sólido. Chegaram à relação:

$$(\tan \theta - \tan \phi) > 4g / C^2 \quad (3.1)$$

onde,

C : coeficiente de Chézy;

g : gravidade;

θ : declividade do canal;

ϕ : ângulo de atrito interno.

A equação (3.1) teve pouca contribuição, a não ser numa mera modificação da declividade.

Needham e Merkin (1983), introduzindo os efeitos viscosos, estendem o estudo de Dressler (1949) e verificam que a inclusão deste termo não altera a condição de estabilidade do escoamento uniforme; e mais, quando o escoamento torna-se instável, uma família de soluções quase periódicas aparecem, tendo como parâmetro de controle a velocidade da perturbação. Na seqüência, consideram um escoamento em canal inclinado e, utilizando as equações de águas rasas, mostraram que um escoamento uniforme se tornava instável para $Fr > 2$. Assim, foi possível construir soluções periódicas a partir de soluções contínuas interconectadas por choques.

Needham e Merkin (1983) realizaram testes numéricos utilizando o método de Runge e Kutta, para $2 < Fr < Fr^*$ (onde $Fr^{*2} = 13.928$) e $U < U_c = 1 + Fr^{-1}$, onde Fr é o número de Froude e U é a velocidade de propagação da onda. Isto é interpretado e deve resultar de uma bifurcação de Hopf do escoamento uniforme para uma velocidade crítica U_c .

A Figura 12 ilustra testes realizados na formação de *Roll Waves* variando a velocidade de propagação das ondas.

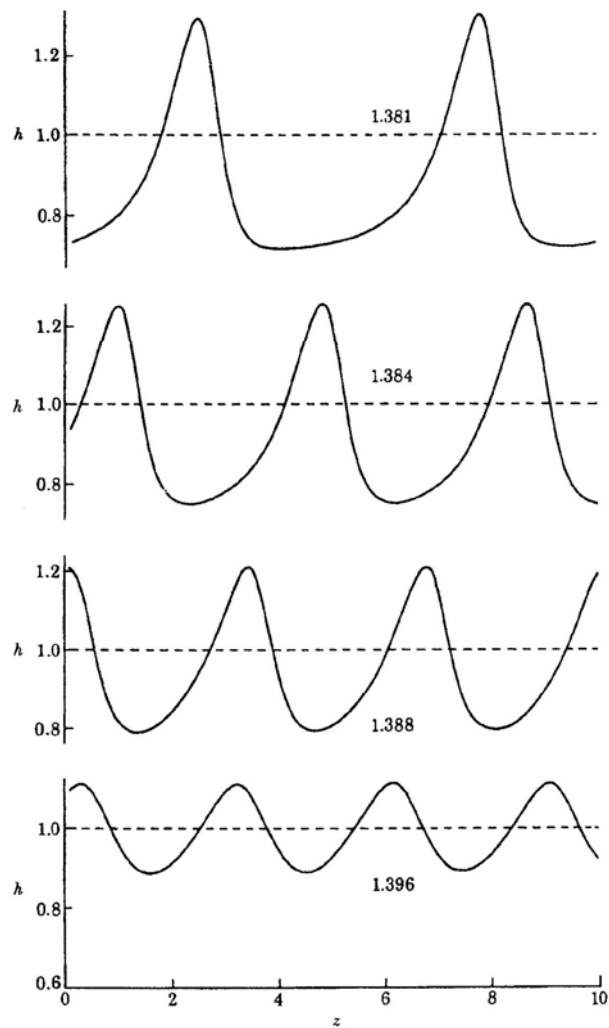


Figura 12: Formação de *Roll Waves*, variando a velocidade de Propagação, adotando $Re = 10$ e $Fr^2 = 6.25$.

Pode-se observar na Figura 12 que com o aumento da velocidade, ocorre uma diminuição tanto no comprimento de onda como também em sua amplitude.

A Figura 13 ilustra testes realizados para a formação de *Roll Waves*, desta vez variando o Número de Reynolds.

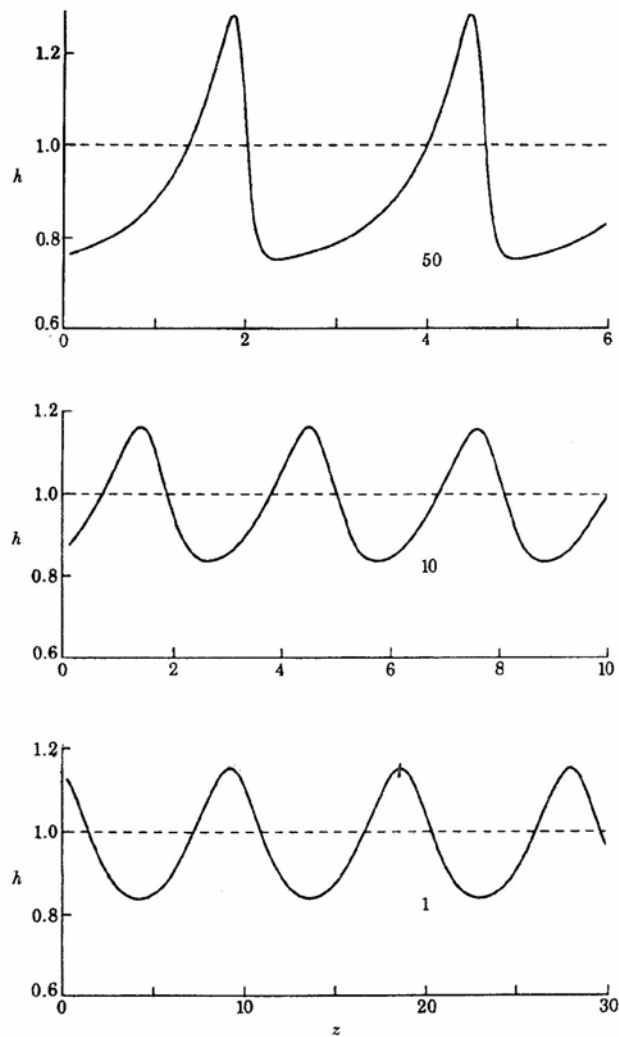


Figura 13: Formação de *Roll Waves* variando o número de Reynolds e adotando $Fr^2 = 6.25$ e $U = 1.392$.

Observa-se na Figura 13 que com o aumento do número de Reynolds, ocorre um aumento na amplitude das ondas e também no comprimento da mesma.

A Figura 14 ilustra testes realizados para a formação de *Roll Waves*, variando o Número de Froude.

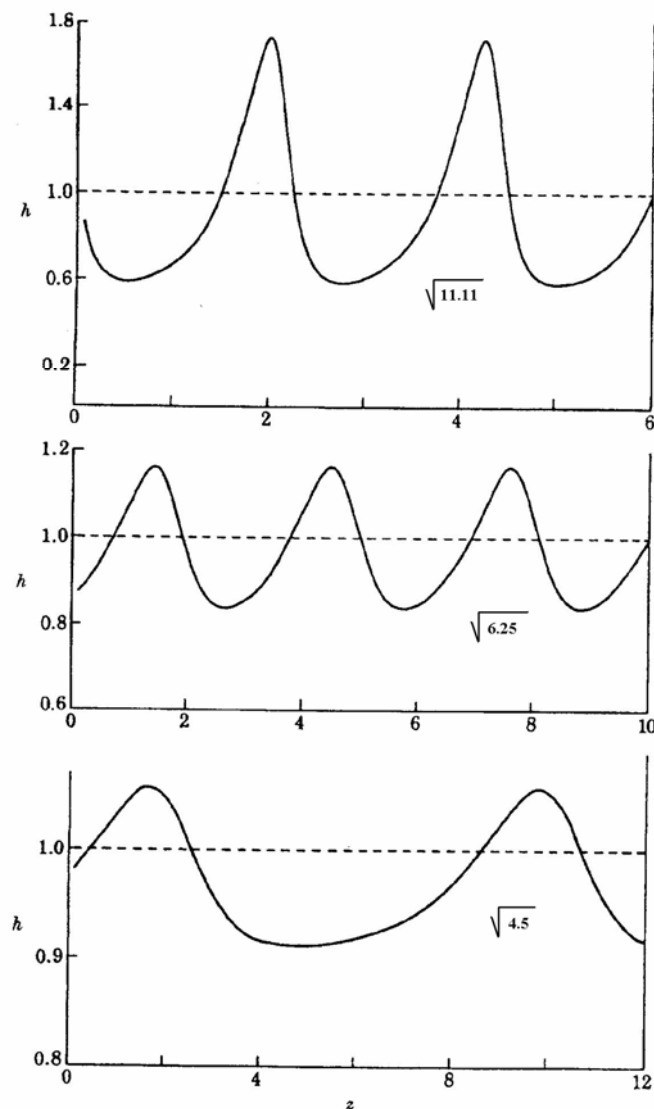


Figura 14: Formação de *Roll Waves* variando o número de Froude, adotando $Re = 10$ e $U_c - U = 0.008$.

Na Figura 14, observa-se que como o aumento do número de Froude, ocorre também um aumento na amplitude das ondas, porém, uma diminuição no comprimento da mesma.

Needham e Merkin (1986) obtiveram informações sobre o comprimento das perturbações, incluindo no equacionamento os termos da difusão, ainda que o termo difusivo no equacionamento não estivesse corretamente adaptado ao grupo *Shallow Water*, isto sem levar em conta uma certa complexidade de aplicação direta de seus resultados a um problema de engenharia.

Julien e Hartley (1986) observaram que em escoamentos viscosos, escoando em

canais íngremes, a formação de *Roll Waves* assemelha-se aos resultados obtidos por Montuori em 1961.

Hwang e Chang (1987) passam a estudar, sob um plano eminentemente teórico, a formação de *Roll Waves* através da teoria da Bifurcação e observaram a formação de *Roll Waves* periódicas com velocidade constante, cujos resultados eram semelhantes aos de Merkin e Needhan (1983) para $Fr = 2$.

Chen (1992) obteve resultados semelhantes aos de Benjamin (1957) e Yih (1963) para um modelo reológico tipo *Power Law*, partindo das equações *Shallow Water*.

Kranenburg (1992) utilizou-se do grupo *Shallow Water*, verificando a condição de existência para as *Roll Waves* já estabelecidas por Dressler em 1949 e pôde verificar que para perturbações de diversos comprimentos de ondas a que prevalecia sobre a *Roll Wave* gerada era a de maior comprimento.

Yu e Kevorkian (1992) *apud* Pascal (2006) analisam a evolução de perturbações inicialmente periódicas, entretanto verificam que tal evolução não é válida tratando-se de soluções sob condições de fluxos instáveis.

Liu e Mei (1994) verificam a formação de *Roll Waves* em locais cujas misturas de lama originam-se de rios e são transportados em suspensão para o estuário. Assim, esta floclula-se ao se misturar com a água salgada. Isto é importante para a administração de engenharia de portos, pois afeta a geomorfologia do litoral. Além disso, verificaram que este tipo de fluido obedecia a propriedades reológicas do modelo Binghamiano.

Ng e Mei (1994) partindo de uma proposta reológica tipo *Power Law*, observaram que a formação de *Roll Waves* em ondas longas de grande amplitude surgem quando $n < \frac{1}{\sqrt{2}}$, onde n é o índice de escoamento do fluido.

Hwang *et al.* (1994), adotando o modelo reológico tipo *Power Law*, incluem o efeito de tensão superficial e executam uma análise de estabilidade linear de filmes finos evoluindo

em canais inclinados.

Maciel *et al.* (1997), com base em uma quantidade finita de material isotrópico, admitindo que a massa específica não varia, partindo das equações *Shallow Water* e considerando um escoamento de um fluido sob um plano infinito, determinou que *Roll Waves* se formariam se $Fr > 2$ em fluidos newtonianos com condição de estabilidade $1 < U < \frac{3}{2}$, sendo U a velocidade de propagação da *Roll Wave*.

Simpson (1999), analisando *Roll Waves* formadas em amido de milho, observa que tais ondas aparecem com maior frequência quando o número de Reynolds (definido em termos de uma viscosidade efetiva) está distante do valor crítico apropriado para um fluido newtoniano.

Lamberti e Longo (2000) realizaram o cálculo da dissipação da energia sugerido por Dressler em 1949 e encontraram a dissipação devido à fricção no choque (suposto de comprimento finito) com saldo de energia nulo, o que corresponde a uma situação onde a dissipação pela fricção no perfil permanente da onda mais a dissipação no salto iguale a energia adquirida pela gravidade.

Maciel (2001) verificou que, em se tratando de Fluidos não newtonianos (fluidos de Bingham), a condição necessária para a formação de *Roll Waves* é escrita da seguinte forma:

$$2\beta \left(\frac{1 - \sqrt{\beta + \frac{C^*(1-\beta)}{W^2}}}{-\beta + \sqrt{\beta + \frac{C^*(1-\beta)}{W^2}}} \right) < 1 \quad (3.2)$$

$$C^* = \frac{\tau_c}{\rho g h_0 \sin \theta} \quad (3.3)$$

$$\beta = \frac{g}{C^2 \tan \theta} \quad (3.4)$$

E a condição de estabilidade definida por:

$$1 < U < \frac{3 - 2C^*}{2(1 - C^*)} \quad (3.5)$$

onde:

Fr : Número de Froude;

U : velocidade de propagação da *Roll Wave*;

C^* : coesão do fluido (parâmetro de Bingham);

h_0 : profundidade do escoamento uniforme;

g : gravidade;

C : coeficiente de Chézy;

θ : declividade do canal;

ρ : massa específica do fluido;

$\frac{\tau_c}{\rho}$: tensão crítica de cisalhamento reduzida.

Ou ainda escrevendo esta condição de formação em função do Número de Froude, tem-se:

$$\frac{1}{Fr^2} \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{1}{Fr^2} + \frac{C^* \left(1 - \frac{1}{Fr^2}\right)}{W^2}}}{-\frac{1}{Fr^2} + \sqrt{\frac{1}{Fr^2} + \frac{C^* \left(1 - \frac{1}{Fr^2}\right)}{W^2}}} \right) < 1 \quad (3.6)$$

A equação (3.6) é dita condição de existência para formação de *Roll Waves* em fluidos binghamianos.

Numericamente, (Maciel, 2001) analisou a influência dos parâmetros determinados para a formação de *Roll Waves* e observou que, aumentando a velocidade de propagação da

“Um Panorama sobre *Roll Waves* em Escoamentos Laminares e Turbulentos com Superfície Livre”.

Roll Wave, ocorria uma diminuição da amplitude; aumentando o número de Froude, ocorria um aumento na amplitude e uma diminuição no comprimento da *Roll Wave*. Tratando-se da influência da coesão do fluido C^* , observou que com o aumento da coesão, ocorria um aumento na amplitude da onda, acarretando uma antecipação na formação das ondas geradas.

Noble e Travadel (2001), a partir de uma base matemática rigorosa, investigaram a existência de soluções periódicas no caso de fluidos com pouca viscosidade.

Zanutti e Lamberti (2002) *apud* Pascal (2006) fazem uma análise de estabilidade não linear utilizando-se de equações de águas rasas, adotando uma aproximação entre a relação do número de Reynolds e a inclinação do canal conforme obtido por Ng e Mei (1994). Aqueles autores puderam obter, assim, as condições necessárias para a existência de *Roll Waves* em fluidos newtonianos. Já para Fluidos não newtonianos, fizeram uma análise de estabilidade não linear de forma numérica, que se mostrou capaz de resolver equações não lineares, as quais determinam a evolução de perturbações pequenas impostas ao fluxo uniforme e fixo.

Longo (2003) verificou que o critério proposto por Kapitza (1949) e Ng & Mei (1994), isto é, que o comprimento de onda observado correspondente à dissipação zero no choque, não era aplicável para líquidos dilatantes em condições laminares.

Balmforth e Mandre (2004) desenvolveram uma pesquisa sobre a dinâmica das *Roll Waves*. Inicialmente exploraram o efeito de topografia do fundo do canal, utilizando para isso, uma análise de estabilidade linear em fluxo turbulento; exploraram também a dinâmica da não linearidade das *Roll Waves* com soluções numéricas utilizando as equações *Shallow Water* e verificaram que a formação de ressaltos hidráulicos desestabilizavam o escoamento próximo ao número de Froude Crítico.

Di Cristo e Vacca (2005), partindo de uma base teórica, investigaram o processo de formação de *Roll Waves* para um escoamento unidimensional tomando como base as equações de águas rasas. Em seguida, fizeram uma análise de estabilidade linear considerando a velocidade média e a profundidade do escoamento, onde verificou-se a formação de *Roll Waves* em termos de instabilidades do modelo unidimensional linearizado do escoamento. Observaram a evolução das *Roll Waves* somente a partir do número de Froude e do comprimento adimensional do canal, parâmetros geralmente adotados em critérios hidráulicos

de engenharia.

Balmforth *et al.* (2005), com base nos estudos realizados por Simpson (1999) e Kaptiza (1949), verificam a formação de *Roll Waves* em suspensões aquosas concentradas de amido de milho, constatando que as observações experimentais eram difíceis de serem comparadas com previsões teóricas, baseando-se em modelos reológicos simples que indicam que fluxos são estáveis para um número de Reynolds pequeno. Tratando-se de uma reologia Não Newtoniana, observam, experimentalmente, que o fluido possui uma resistência para fluir e isso aumenta com o fluxo.

Dando continuidade, Balmforth *et al.* (2005) realizaram ensaios experimentais em laboratório utilizando um canal retangular de 10cm de largura por 1,5m de comprimento, alimentado na parte superior por um reservatório cujo nível foi mantido aproximadamente constante. Mudando o ângulo de inclinação pôde-se variar a velocidade do fluxo e a profundidade, a espessura do fluido que era da ordem de 0.5 a 1 cm e a velocidade de 1 a 10cm/s.

Outros testes foram realizados mudando a concentração do amido de milho, com suspensões de diferentes concentrações amido/água. Assumindo que o fluxo é controlado por uma tensão cisalhante (origem viscosa), observaram ondas com números de Reynolds efetivos da ordem de 0.1 ou menos. A Figura 15 ilustra as perturbações observadas no canal.



Figura 15: (a) visão típica experimental da formação de *Roll Waves*. (b) visão detalhada de um par de ondas, (c) formação de um trem de ondas com a variação da inclinação do canal.

“Um Panorama sobre *Roll Waves* em Escoamentos Laminares e Turbulentos com Superfície Livre”.

Observa-se na Figura 15 (a) que inicialmente as ondas são regulares e bastante uniformes, espaçadas com um comprimento de onda de alguns centímetros. Elas crescem rapidamente alcançando amplitude relativamente grande. A altura das cristas podem ser uma fração significativa da profundidade fluida. Na Figura 15 (c), nota-se a colisão de duas ondas, ocorrendo assim à fusão entre elas, dando origem a uma onda maior. Assim, o trem de ondas sofre um processo de engrossamento, que é típico de muitos problemas de propagação de ondas não lineares.

Outras observações também foram feitas. Os testes observados na Figura 15 foram realizados com o material que havia sido preparado uma hora antes; em seguida deixando esse material descansar por cerca de dois dias, ocorreu uma separação parcial entre o amido de milho e o fluido. Assim, quando os experimentos foram refeitos, observou-se que as *Roll Waves* que apareciam eram totalmente diferentes, o ângulo crítico da rampa aumentou, o comprimento da *Roll Wave* era visivelmente menor e também havia pouco sinal de engrossamento das frentes, como pode-se observar na Figura 16.



Figura 16: (a) *Roll Waves* com amido de milho dois dias depois de preparado, (b) *Roll Waves* com amido de milho dois dias depois de preparados com uma inclinação maior do que na figura 16 (a)

Liu *et al* (2005) realizaram estudos sobre o impacto ambiental provocado por *Roll*

Waves que se propagam em regiões montanhosas em direção a riachos, observando que o fenômeno influencia muito no processo de erosão do solo. Os seus resultados, com base nas equações de Saint Venant, estão em consonância com a dinâmica das ondas periódicas obtidas no trabalho de Dressler (1949) e Brock (1970).

Para tais fluxos que escoam em regiões montanhosas, o movimento da *Roll Wave* é de difícil análise, devido à existência de muitas chuvas sobre a superfície dos rios. Para compreender as características desta formação de ondas, as *Roll Waves* foram observadas em um canal de laboratório com chuva artificial no Salão do Instituto de Conservação de Água e do Solo da Academia Chinesa da Ciência. O Canal media 130 cm de comprimento, 50 cm de largura e 10 cm de altura contendo um fundo liso feito de vidro orgânico. A inclinação do canal era ajustável em inclinações diferentes. Quando uma *Roll Wave* ocorre no fluxo de lama num canal natural inclinado, o fluxo exibe características hidráulicas diferentes. Observou-se que quando ocorria à formação de *Roll Waves* em canal natural inclinado, aumentava-se a probabilidade da erosão no solo, proporcionado a formação de riachos.

Baseando-se em estudos realizados por Dressler (1949) e Brock (1970), notou-se que a ocorrência de *Roll Waves* em canais naturais inclinados tem um importante efeito no desenvolvimento da erosão do solo. Tal observação baseia-se nas propriedades dinâmicas das *Roll Waves*, como soluções do problema Saint Venant e lei de resistência de Chézy.

Pascal (2006) realizou uma análise de estabilidade linear para fluidos do tipo *Power Law*, observando a formação de *Roll Waves* em um plano inclinado, para Fluidos Newtonianos e não Newtonianos. Determinou, numericamente, algumas características tais como velocidade de propagação da onda, comprimento e altura.

CAPÍTULO 4

4 MODELO MATEMÁTICO

4.1 Condições de existência de *Roll Waves* para Fluidos Newtonianos em Regimes Turbulentos.

Maciel (2001), com base em uma quantidade finita de material isotrópico, admitindo que a massa específica não varie, e supondo que a profundidade do escoamento é grande quando comparada ao diâmetro das partículas constituintes, admite que um modelo incompressível pode ser adotado a partir das equações da conservação da massa e quantidade de movimento. As equações *Shallow Water* com choque (dada à natureza dos escoamentos com frentes íngremes) são obtidas a partir das equações clássicas da mecânica dos fluidos. O sistema fica então constituído de uma equação da conservação da massa (4.1), equações representativas da quantidade de movimento (4.2) a (4.5) e duas relativas ao ressalto hidráulico ((4.6) e (4.7)), a saber:

Conservação da massa:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \quad (4.1)$$

Quantidade de movimento:

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + gh \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} = gh \sin \theta - \frac{gu^2}{C^2} \quad (4.2)$$

Trabalhando a equação (4.2) tem-se:

$$u \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial(hu)}{\partial x} + hu \frac{\partial u}{\partial x} + gh \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} = gh \sin \theta - \frac{gu^2}{C^2} \quad (4.3)$$

Trabalhando a equação (4.3) obtém-se:

$$u \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} \right) + h \frac{\partial u}{\partial t} + hu \frac{\partial u}{\partial x} + gh \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} = gh \sin \theta - \frac{gu^2}{C^2} \quad (4.4)$$

Dividindo-se a equação (4.4) por h , resulta:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} = g \sin \theta - \frac{gu^2}{C^2 h} \quad (4.5)$$

Das condições de choque, obtém-se:

$$\rho h(w - u) = \rho_0 h_0 w \quad (4.6)$$

$$\rho_0 h_0 w u = \frac{1}{2} \rho g h^2 \cos \theta \quad (4.7)$$

sendo:

h : profundidade do escoamento;

h_0 : profundidade do escoamento uniforme;

u : velocidade média na vertical;

w : velocidade de propagação da frente do escoamento;

C : coeficiente de Chézy;

θ : declividade do canal;

ρ : massa específica do fluido.

O 2º membro da equação (4.5) é composto de dois termos:

$g \sin \theta$: termo da gravidade;

$\frac{gu^2}{C^2 h}$: termo representativo dos efeitos dissipativos acrescentados na interface entre o escoamento e as paredes do canal.

A partir daí vêm-se estabelecer e elucidar as condições necessárias e suficientes para a formação de *Roll Waves*, como solução das equações *Shallow Water*.

Considerando o escoamento de um fluido sobre um plano infinito, definem-se, a princípio, as variáveis de interesse e, por conseguinte, as escalas de trabalho; a saber:

$$\text{escala de comprimento: } H = \frac{h}{h_0} \quad \text{e} \quad X = \frac{x \tan \theta}{h_0}$$

$$\text{escala de velocidades: } U = \frac{u}{\sqrt{gh_0 \cos \theta}} \quad \text{e} \quad W = \frac{w}{\sqrt{gh_0 \cos \theta}}$$

$$\text{escala de tempo: } T = \frac{t}{\frac{h_0}{\tan \theta} \frac{1}{\sqrt{gh_0 \cos \theta}}}$$

onde $\sqrt{gh_0 \cos \theta}$ é a velocidade de propagação das ondas gravitacionais.

Introduzindo-se estas novas variáveis adimensionais nas equações (4.1) e (4.2), e desprezando-se as variações da massa específica, tem-se:

Trabalhando com a equação (4.1):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (h u)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial (H h_0)}{\partial \left(\frac{T h_0}{\tan \theta \sqrt{g h_0 \cos \theta}} \right)} + \frac{\partial (H h_0 U \sqrt{g h_0 \cos \theta})}{\partial \left(\frac{X h_0}{\tan \theta} \right)} = 0$$

$$tg\theta\sqrt{gh_0\cos\theta}\frac{\partial H}{\partial T} + tg\theta\sqrt{gh_0\cos\theta}\frac{\partial(HU)}{\partial X} = 0$$

Como $h_0 > 0$

$$\frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial(HU)}{\partial X} = 0 \quad (4.8)$$

Trabalhando com a equação (4.2), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + g\cos\theta\frac{\partial h}{\partial x} &= g\sin\theta - \frac{gu^2}{C^2h} \\ \frac{\partial\left(\frac{U\sqrt{gh_0\cos\theta}}{tg\theta\sqrt{gh_0\cos\theta}}\right)}{\partial\left(\frac{Th_0}{tg\theta\sqrt{gh_0\cos\theta}}\right)} + U\sqrt{gh_0\cos\theta}\frac{\partial\left(\frac{U\sqrt{gh_0\cos\theta}}{tg\theta}\right)}{\partial\left(\frac{Xh_0}{tg\theta}\right)} + g\cos\theta\frac{\partial(Hh_0)}{\partial\left(\frac{Xh_0}{tg\theta}\right)} &= \\ = g\sin\theta - \frac{gU^2gh_0\cos\theta}{C^2Hh_0} \\ \frac{\sqrt{gh_0\cos\theta}tg\theta\sqrt{gh_0\cos\theta}}{h_0}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right) + \frac{\sqrt{gh_0\cos\theta}tg\theta\sqrt{gh_0\cos\theta}}{h_0}\left(U\frac{\partial U}{\partial X}\right) + \frac{g\cos\theta h_0 tg\theta}{h_0}\left(\frac{\partial H}{\partial X}\right) &= g\sin\theta - \frac{gU^2g\cos\theta}{C^2H} \\ g\cos\theta tg\theta\left(\frac{\partial U}{\partial T} + U\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial H}{\partial X}\right) &= g\sin\theta - \frac{g^2U^2\cos\theta}{C^2H} \\ \left(\frac{\partial U}{\partial T} + U\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial H}{\partial X}\right) &= 1 - \beta\frac{U^2}{H} \quad ; \quad \beta = \frac{g}{C^2\tan\theta} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Trabalhando com a equação (4.6) e (4.7), tem-se:

$$\rho h(w-u) = \rho_0 h_0 w$$

$$\rho H h_0 (W \sqrt{g h_0 \cos \theta} - U \sqrt{g h_0 \cos \theta}) = \rho_0 h_0 W \sqrt{g h_0 \cos \theta}$$

$\rho = \text{constante e } h_0 \neq 0$

$$H(W - U) = W \quad (4.10)$$

$$\rho_0 h_0 W \sqrt{g h_0 \cos \theta} U \sqrt{g h_0 \cos \theta} = \frac{1}{2} \rho g H^2 h_0^2 \cos \theta$$

$$WU = \frac{1}{2} H^2 \quad (4.11)$$

Assim, resulta:

$$\frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial(HU)}{\partial X} = 0$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T} + U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial H}{\partial X} \right) = 1 - \beta \frac{U^2}{H}$$

$$W = H(W - U) \quad \text{e} \quad WU = \frac{1}{2} H^2$$

A determinação do critério de formação de *Roll Waves* requer, antes de tudo, uma solução para a equação da superfície livre. Primeiramente reescrevem-se as equações em um sistema móvel de coordenadas. Seja, por hipótese, $\xi = X - WT$, onde W representa a velocidade adimensional de propagação da frente de escoamento (celeridade). A partir destas premissas, podem-se estabelecer as relações para as funções derivadas, conforme se segue:

$$\frac{\partial H}{\partial T} = \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial T} = -H'W$$

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial T} = -U'W$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} = U' \cdot 1$$

$$\frac{\partial H}{\partial X} = \frac{\partial H}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial X} = H' 1$$

ou seja:

$$\frac{\partial U}{\partial T} = -WU' \quad \frac{\partial U}{\partial X} = U' \quad \frac{\partial H}{\partial T} = -WH' \quad \frac{\partial H}{\partial X} = H'$$

Substituindo nas equações (4.8) e (4.9), tem-se:

$$-WH' + H'U + U'H = 0$$

$$H'(U - W) + U'H = 0$$

$$-WU' + UU' + H' = 1 - \beta \frac{U^2}{H}$$

$$U'(U - W) + H' = 1 - \beta \frac{U^2}{H}$$

O que resulta no sistema:

$$\begin{cases} HU' + (U - W)H' = 0 \\ (U - W)U' + H' = 1 - \beta \frac{U^2}{H} \end{cases}$$

$$\text{Com } \beta = \frac{g}{C^2 \tan \theta}$$

Obtêm-se então, duas equações lineares a duas incógnitas (U' e H'). A resolução desse sistema fornecerá duas equações diferenciais com U' e H' e suas respectivas derivadas de 1ª ordem; a saber:

$$H' = \frac{\partial H}{\partial \zeta} = - \frac{H \left(1 - \beta \frac{U^2}{H} \right)}{(U - W)^2 - H} \quad (4.12)$$

$$U' = \frac{\partial U}{\partial \zeta} = \frac{(U-W) \left(1 - \beta \frac{U^2}{H} \right)}{(U-W)^2 - H} \quad (4.13)$$

A relação entre estas duas equações permite verificar que a vazão específica é uma constante, ou seja:

$$\frac{H'}{U'} = \frac{H}{W-U}$$

$$H(W-U) = K = \text{constante} \quad (4.14)$$

Aplicando a equação (4.14) na expressão de H'(equação (4.12)), obtém-se finalmente uma equação não linear de 1ª ordem, conforme explicitado em (4.15):

$$\frac{\partial H}{\partial \zeta} = - \frac{H \left(1 - \beta \frac{(HW-K)^2}{H^3} \right)}{\left(\frac{K}{H} \right)^2 - H} \quad (4.15)$$

A resolução desta equação vai fornecer o perfil desejado da superfície livre. Verifica-se, entretanto, que para esta equação não existe solução periódica. A proposta seria então tentar “construir” soluções periódicas a partir de soluções contínuas intercaladas por ressaltos hidráulicos, por exemplo. Para isso, precisa-se encontrar soluções contínuas que apresentem a propriedade que em uma determinada seção o escoamento seja supercrítico e numa outra posterior seja subcrítico. Por continuidade, deve existir um ponto de abscissa ξ_0 , de profundidade H_0 , e velocidade U_0 , onde o Número de Froude seja igual a unidade (escoamento crítico). Assim, tem-se que $W - U_0 = \sqrt{H_0}$. Para este ponto, em particular, o denominador da equação (4.15) é nulo, o que significa uma descontinuidade, salvo para o caso em que o numerador também é nulo. Por outro lado, a experiência mostra que na vizinhança do ponto crítico, o perfil da superfície livre é praticamente horizontal e não vertical. Assim exposto, este ponto crítico é, portanto necessariamente diferente daquele onde ocorre o ressalto hidráulico, de maneira que só é possível “construir” *Roll Waves* quando o numerador e o denominador se anulam concomitantemente. Esta condição fornece dois parâmetros: U_0 e H_0 como funções de variáveis de interesse (integrando as equações (4.12) e

(4.13)), conforme mostrados abaixo:

$$H_0 = \left(\frac{-\beta W + \sqrt{\beta W^2}}{1-\beta} \right)^2$$

$$U_0 = \frac{W - \sqrt{\beta W^2}}{1-\beta}$$

$$K = (W - U_0)H_0 = (H_0)^{\frac{3}{2}}$$

Por conseguinte, a relação (4.14) é então substituída na equação (4.15). Assim:

$$\frac{\partial H}{\partial \zeta} = - \frac{H \left(1 - \beta \frac{(HW - K)^2}{H^3} \right)}{\left(\frac{K}{H} \right)^2 - H} = \frac{H^3 - \beta \left(WH - H^{\frac{3}{2}} \right)^2}{H^3 - H_0^3} \quad (4.16)$$

Os polinômios do numerador e denominador têm como raiz H_0 ; pode-se assim reescrever a equação na forma:

$$\frac{\partial H}{\partial \zeta} = \frac{(H - H_0)(H^2 + H(H_0 - W^2\beta) + \beta H_0^2)}{(H - H_0)(H_0^2 + HH_0 + H^2)} \quad (4.17)$$

A equação diferencial para a superfície livre no intervalo contínuo é então dada por:

$$\frac{\partial H}{\partial \zeta} = \frac{H^2 + H(H_0 - W^2\beta) + \beta H_0^2}{(H_0^2 + HH_0 + H^2)} \quad (4.18)$$

Enfim, para se gerar *Roll Waves*, a partir da equação (4.18), é necessário que

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \zeta} \right)_{(H=H_0)} > 0, \text{ que implica em:}$$

$$2\beta \frac{1 - \sqrt{\beta}}{-\beta + \sqrt{\beta}} < 1 \quad (4.19)$$

Trabalhando no primeiro termo da inequação (4.19), tem-se:

$$2 \left(\frac{\beta - \beta\sqrt{\beta}}{-\beta + \sqrt{\beta}} \right) = 2 \left(\frac{\beta - \beta\sqrt{\beta}}{-\beta + \sqrt{\beta}} \right) \left(\frac{-\beta - \sqrt{\beta}}{-\beta - \sqrt{\beta}} \right) = 2 \left(\frac{-\beta^2 - \beta\sqrt{\beta} + \beta^2\sqrt{\beta} + \beta^2}{\beta^2 + \beta\sqrt{\beta} - \beta\sqrt{\beta} - \beta} \right)$$

$$= 2 \frac{\beta\sqrt{\beta}(-1 + \beta)}{\beta(\beta - 1)} = 2\sqrt{\beta}$$

$$\text{então: } 2\sqrt{\beta} < 1 \Rightarrow \beta < \frac{1}{4} \quad (4.20)$$

$$\beta = \frac{g}{C^2 \tan \theta} \quad (4.21)$$

$$\text{mas } u^2 = C^2 \tan \theta h \quad e \quad Fr^2 = \frac{u^2}{gh} = \frac{C^2 \tan \theta h}{gh} = \frac{C^2 \tan \theta}{g}$$

$$\text{então: } \beta = \frac{1}{Fr^2} \Rightarrow Fr > 2 \quad (4.22)$$

4.2 Condições de existência de *Roll Waves* para Fluidos Newtonianos em Regime Turbulento com introdução de difusão na corrente.

Needham e Merkin (1983), introduzindo os efeitos viscosos, estendem o estudo de Dressler (1949) e verificam que a inclusão deste termo não altera a condição de estabilidade do escoamento uniforme, e mais, quando o escoamento torna-se instável, uma família de soluções (a 1-parâmetro) quase periódicas aparecem (tendo como parâmetro de controle a velocidade U da perturbação). Isto é interpretado e deve resultar de uma bifurcação de HOPF do escoamento uniforme para uma velocidade crítica da ordem de $U_c = 1 + \frac{1}{Fr}$.

Maciel (2001) segue os passos seguidos por Needham e Merkin (1983) levando ainda em consideração os termos viscosos modificados, aqui adaptados ao grupo de equações *Shallow Water*, de maneira mais apropriada e, por conseguinte, mais consistente. Para tanto, uma análise matemática mais afinada poderá esclarecer sobre o novo termo a ser considerado

“Um Panorama sobre Roll Waves em Escoamentos Laminares e Turbulentos com Superfície Livre”.

no modelo viscoso. Na verdade, uma nova discussão matemática do termo viscoso deverá ser empreendida, conforme apresentado no item subseqüente.

Needham e Merkin (1984, 1986) em seus trabalhos sobre *Roll Waves* adotam um sistema *Shallow Water* viscoso da forma:

$$\begin{cases} h_t + (hu)_x = 0 \\ u_t + \left(\frac{u^2}{2} + g \cos \theta h \right)_x = g \sin \theta - C_f \frac{u^2}{h} + \nu_0 u_{xx} \end{cases} \quad (4.23)$$

Para uma discussão mais direcionada despreza-se, nesse caso, os termos de atrito e as constantes. Retoma-se então o sistema (4.23), na seguinte forma:

$$\begin{cases} h_t + (hu)_x = 0 \\ u_t + \left(\frac{u^2}{2} + g \cos \theta h \right)_x = \nu_0 u_{xx} \end{cases} \quad (4.24)$$

para o qual o binômio entropia-fluxo (\mathbf{U}, \mathbf{F}) é dado respectivamente por:

$$\begin{cases} \mathbf{U}(h, u) = \frac{h u^2}{2} + g \cos \theta \frac{h^2}{2} \\ \mathbf{F}(h, u) = h u^2 + g \cos \theta \frac{h^2}{2} \end{cases} \quad (4.25)$$

Além disso, neste caso, a viscosidade adotada não tem representatividade física no contexto do grupo *Shallow Water* (termo viscoso inadaptado), ou seja, não escreve-se corretamente a equação da quantidade de movimento, não obtendo assim, as “boas” condições de choque. De outra maneira pode-se dizer que o sistema escrito nas variáveis (h, u) , tal como em (4.24) não verifica a *entropia convexa*. De fato, a partir do cálculo do Hessiano $D^2(\mathbf{U})(h, u)$ verifica-se que:

$$D^2(\mathbf{U})(h, u) = \begin{pmatrix} g \cos \theta & u \\ u & h \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

Observa-se, pois, que o produto dos autovalores é positivo apenas na condição de

Froude $Fr \leq 1$. Nesse caso, retoma-se o sistema (4.23) reescrevendo-o e adaptando o termo viscoso ali presente, às condições *Shallow Water* (termo viscoso com maior representatividade física), a saber:

$$\begin{cases} h_t + (hu)_x = 0 \\ (hu)_t + \left(hu^2 + g \cos \theta \frac{h^2}{2} \right)_x = g h \sin \theta - C_f u^2 + \nu_0 (hu_x)_x \end{cases} \quad (4.27)$$

As condições de Rankine-Hugoniot são dadas nesse caso por:

$$h_+ (c-u)_+ = h_- (c-u)_- \equiv K_0 \quad (4.28)$$

$$K_0 [u] = g \cos \theta \left[\frac{h^2}{2} \right] \quad (4.29)$$

A partir do sistema escrito na sua forma conservativa e fazendo $q=hu$, o novo binômio de entropia (\mathbf{U}, \mathbf{F}) é dado por:

$$\begin{cases} \mathbf{U}(h, q) = \frac{q^2}{2h} + g \cos \theta \frac{h^2}{2} \\ \mathbf{F}(h, q) = \frac{q^3}{2h^2} + g \cos \theta \frac{h^2}{2} \end{cases} \quad (4.30)$$

De maneira análoga ao procedimento anterior, Maciel (2001) verificou que a entropia é convexa nas novas variáveis (h, q) - matriz Hessiana é definida positiva para uma função convexa e toda forma quadrática tem os autovalores da matriz simétrica positivos. O conceito de entropia convexa corresponde, na verdade, a energia do sistema, que deverá decrescer de montante para jusante. Neste caso específico, as condições de entropia são equivalentes às conclusões de choque de Lax (1971), ou seja:

$$u_+ - c < \sqrt{gh} < u_- - c ;$$

resultado este em conformidade com o artigo clássico de Dressler (1949). Desta maneira, encerra-se aqui a “boa seleção” de choques.

Para a análise de estabilidade linear propriamente dita, parte-se do seguinte sistema *Shallow Water*:

- Equação de conservação da massa:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \quad (4.31)$$

- Equação da quantidade de movimento modificada:

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha hu^2)}{\partial x} + g \cos\theta h \frac{\partial h}{\partial x} = g h \sin\theta - \frac{g u^2}{C^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(h\nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (4.32)$$

sendo:

ν : viscosidade do fluido;

α : coeficiente de distribuição de velocidade.

A fim de se determinar os parâmetros que colocam em evidência o desenvolvimento de instabilidades, torna-se necessário uma adimensionalização das equações governantes, a saber:

- escala de comprimento: $x = L x^*$; L representa o comprimento de onda e $h = h_n h^*$;

- escala de velocidades: $u = u_n u^*$.

- escala de tempo: $t = t_n t^* = (L / u_n) t^*$

O índice n representa às condições de escoamento uniforme e o asterisco (*) as variáveis adimensionais.

Introduzindo estas variáveis e omitindo os asteriscos (*), obtém-se:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} - (\alpha - 1) \frac{u}{h} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{Fr^2} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\tan \theta}{\varepsilon Fr^2} \left(1 - \frac{u^2}{h}\right) + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{h} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x}\right) \quad (4.34)$$

A fim de analisar o estudo quase permanente do sistema *Shallow Water*, fazendo $z = x - U t$, onde U é uma velocidade constante de propagação, tem-se:

$$z = x - U t$$

Donde a equação da conservação da massa torna-se:

$$h(u - U) = 1 - U \quad (4.35)$$

e a equação da quantidade de movimento:

$$\begin{aligned} -U \frac{\partial u}{\partial z} + \alpha U \frac{\partial u}{\partial z} - (\alpha - 1) \frac{u}{h} U \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{1}{Fr^2} \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\tan \theta}{\varepsilon Fr^2} \left(1 - \frac{u^2}{h}\right) + \\ + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{h} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial z}\right) \end{aligned} \quad (4.36)$$

Substituindo a equação da conservação da massa em (4.36), pode-se eliminar a variável u e obter uma equação diferencial de segunda ordem em h , a saber:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - \frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2 + \frac{Re}{Fr^2(1-U)} \left\{ h^3 - \alpha Fr^2(1-U)^2 + \alpha \left[U^2 h^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \right] \right\} \frac{\partial h}{\partial z} \\ + \frac{\tan \theta (h-1)(h-h_1)(h-h_2)}{\varepsilon Fr^2 (U-1)h} = 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

sendo:

$$h_1 = \frac{1}{2}(U-1) \left\{ [U+1] - \sqrt{(U+3)(U-1)} \right\}$$

$$h_2 = \frac{1}{2}(U-1) \left\{ [U+1] + \sqrt{(U+3)(U-1)} \right\}$$

Verifica-se que para se obter h_1 e h_2 reais, é necessário que $U > 1$.

No objetivo de verificar a existência de soluções periódicas para a equação

(4.37), a nossa proposição é de verificar a existência de tais soluções no plano de fases. Para tanto, tem-se:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial z} = w = F_1(h, w) \\ \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = F_2(h, w) \end{cases} \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{h} w^2 + \frac{Re}{(1-U)hFr^2} \left\{ h^3 - \alpha Fr^2 (1-u)^2 + \alpha \left[U^2 h^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \right\} w - \frac{\tan\theta (h-1)(h-h_1)(h-h_2)}{\varepsilon Fr^2 (U-1)h}$$

Estudo dos pontos de equilíbrio:

$$F_1(h, w) = 0 \rightarrow w = 0$$

$$F_2(h, w) = 0 \rightarrow h = 1$$

Donde verifica-se que o escoamento uniforme ($h = 1$ e $w = 0$) é um ponto de equilíbrio.

Pode-se então pensar em verificar a existência ou não de órbitas fechadas ao redor deste ponto de equilíbrio. Assim sendo, deverão existir soluções periódicas para o problema pesquisado.

Através de um processo de linearização do sistema (4.38) na vizinhança do ponto de equilíbrio $(h, w) = (1, 0)$, obtém-se o sistema linear de equações, a saber:

$$h = 1 + \eta \bar{h} \quad \text{e} \quad w = \varphi \bar{w} \quad \text{onde,} \quad \varphi \ll 1 \quad \text{e} \quad \eta \ll 1.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{h}}{\partial z} = \bar{w} \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = -\frac{Re}{(1-U)Fr^2} \left\{ 1 - \alpha Fr^2 (1-U)^2 + \alpha U^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right\} \bar{w} - \frac{\tan\theta}{\varepsilon Fr^2 (U-1)} \{ 1 + 2(1-U) \} \end{cases} \quad (4.39)$$

Isto posto, passa-se a determinar os autovalores λ_i ($i = 1, 2$) do sistema (4.39), a saber:

O determinante Δ é dado por:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\tan \theta}{\varepsilon Fr^2 (U-1)} \{1+2(1-U)\} & \frac{Re}{(1-U)Fr^2} \left\{ 1 - \alpha Fr^2 (1-U)^2 + \alpha U^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \right\} \end{bmatrix}$$

O que resulta na equação quadrática em λ , conforme se segue:

$$\lambda^2 - \frac{Re}{(1-U)Fr^2} \left\{ 1 - \alpha Fr^2 (1-U)^2 + \alpha U^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \right\} \lambda - \frac{\tan \theta}{\varepsilon Fr^2 (U-1)} \{1+2(1-U)\} \lambda^0 = 0$$

Para se obter autovalores reais e distintos e, por conseguinte órbitas fechadas (ou soluções periódicas) torna-se necessário que o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ seja estritamente superior a zero. Assim sendo, tem-se:

$$\left(-\frac{Re}{(1-U)Fr^2} \left\{ 1 - \alpha Fr^2 (1-U)^2 + \alpha U^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \right\} \right)^2 - 4 \left(-\frac{\tan \theta}{\varepsilon Fr^2 (U-1)} \{1+2(1-U)\} \right) > 0$$

$$4 \frac{\tan \theta}{\varepsilon Fr^2 (U-1)} \{1+2(1-U)\} > 0$$

ou seja:

$$1+2(1-U) > 0 \quad \Rightarrow \quad U < \frac{3}{2}$$

$$U-1 > 0 \quad \Rightarrow \quad U > 1$$

O que resulta:

$$1 < U < \frac{3}{2} \tag{4.40}$$

4.3 Condições de existência de *Roll Waves* para Fluidos não newtonianos

Após uma demonstração extensa e cuidadosa, Ferreira (2006) determinou a equação para formação de *Roll Waves*, a partir de um processo de integração na vertical das equações

de Navier-Stokes, incluindo o modelo reológico de Herschel-Bulkley no tensor de tensões.

Conforme demonstrado no Anexo A tem-se:

Equação da conservação da massa:

$$\frac{\partial \bar{u}h}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}h}{\partial t} = 0 \quad (4.41)$$

Equação da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial \bar{u}h}{\partial t} + \frac{\partial \alpha \bar{u}^2 h}{\partial x} + \frac{1}{2} g \cos \theta \frac{\partial h^2}{\partial x} = gh \sin \theta - \frac{\tau_c}{\rho} - \frac{\mu_n}{\rho} \left[\frac{\bar{u}(\rho g \sin \theta)^2 (n+1)(2n+1).h}{(h \rho g \sin \theta - \tau_c)(n(n+1)\rho g \sin \theta - n^2 \tau_c)} \right]^n \quad (4.42)$$

onde,

h : profundidade do escoamento;

\bar{u} : velocidade média na seção transversal;

θ : Declividade do canal;

ρ : massa específica do fluido;

μ : viscosidade dinâmica do fluido;

τ_c : tensão crítica de cisalhamento;

$\alpha = \frac{\bar{u}^2}{\frac{-2}{u}}$ (coeficiente de distribuição de velocidade na vertical).

Na seqüência, foram realizados os processos de adimensionalização do sistema, chegando-se à determinação da equação geral de *Roll Waves* em regime quase permanente mostrado na equação (4.43).

$$\left((\alpha - 1)U^2 - \frac{\alpha(1-U)^2}{h^2} + \beta h \right) \frac{dh}{dz} = h - C^* - (1 - C^*) \left[\left(\frac{(1+U)(h-1)(1-C^*)}{(h-C^*)} \right) \left(\frac{(n+1) + nC^*}{(n+1)h + nC^*} \right) \right]^n \quad (4.43)$$

Ou ainda,

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{h - C^* - (1 - C^*) \left[\left(\frac{(1+U)(h-1)(1-C^*)}{(h-C^*)} \right) \left(\frac{(n+1) + nC^*}{(n+1)h + nC^*} \right) \right]^n}{\left((\alpha - 1)U^2 - \frac{\alpha(1-U)^2}{h^2} + \beta h \right)} \quad (4.44)$$

Onde:

$$\beta = \frac{g \cos \theta h_0}{u_o^2} = \frac{1}{(Fr)^2} \quad (4.45)$$

$$\alpha = \frac{(2(n+1)^2 h + C^*(4n+3)n)(2n+1)}{\left((n+1)^2 h + 2(n+1)nC^* + n^2(C^*)^2/h \right)(3n+2)} \quad (4.46)$$

$$C^* = \frac{\tau_c}{h_0 \rho g \sin \theta} \quad (4.47)$$

A partir da equação (4.44) foi implementado um modelo numérico que verifica a existência de instabilidades em escoamentos num canal inclinado, para um fluido do tipo Herschel-Bulkley.

4.3.1 Estudo de Casos

Através da equação (4.44), estabelecida por Ferreira (2006), foi possível analisar os diferentes casos:

Caso 1: Para que a equação (4.44) satisfaça ao modelo reológico tipo *Power Law*, tem-se que a tensão crítica deve ser nula, ou seja: $\tau_c = 0$, assim, a equação (4.44) torna-se:

$$\frac{dh}{dz} = \frac{\left[h - \left(\frac{(1-U)}{h^2} + \frac{U}{h} \right)^n \right]}{\left((\alpha-1)U^2 - \frac{\alpha(1-U)^2}{h^2} + \beta h \right)} \quad (4.48)$$

Com

$$\alpha = \frac{2(2n+1)}{(3n+2)} \quad (4.49)$$

Caso 2: Para que a equação (4.44) seja representativa de um fluido Newtoniano, a tensão crítica do fluido deve ser nula ($\tau_c = 0$) e o índice do comportamento do fluido deve ser $n = 1$. Assim a equação (4.44) torna-se:

$$\frac{dh}{dz} = \frac{\left[h - \frac{(1-U)}{h^2} + \frac{U}{h} \right]}{\left((\alpha-1)U^2 - \frac{\alpha(1-U)^2}{h^2} + \beta h \right)} \quad (4.50)$$

Com

$$\alpha = \frac{6}{5} \quad (4.51)$$

Caso 3: Para que a equação (4.44) seja representativa de um fluido de Bingham, a tensão crítica deve ser diferente de zero ($\tau_c \neq 0$) e o índice de comportamento do fluido ser $n = 1$. Assim a equação (4.44) torna-se:

$$\frac{dh}{dz} = \frac{h - C^* - (I - C^*) \left[\left(\frac{(1+U(h-I))(I-C^*)}{(h-C^*)} \right) \left(\frac{2+nC^*}{2h+nC^*} \right) \right]}{\left((\alpha-1)U^2 - \frac{\alpha(1-U)^2}{h^2} + \beta h \right)} \quad (4.52)$$

Com

$$\alpha = \frac{3(8h + 7C^*)}{5\left(4h + 4C^* + \frac{(C^*)^2}{h}\right)} \quad (4.53)$$

4.3.2 – Estabelecimento de condições de Choque e comprimento de onda

Segundo Ferreira (2007), a equação (4.54) é capaz de prever características do perfil da onda e muito do seu comportamento, a saber:

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{h - C^* - (1 - C^*) \left[\left(\frac{(1 + U(h-1))(1 - C^*)}{(h - C^*)} \right) \left(\frac{(n+1) + nC^*}{(n+1)h + nC^*} \right) \right]^n}{\left((\alpha - 1)U^2 - \frac{\alpha(1-U)^2}{h^2} + \beta h \right)} \equiv \frac{F(h)}{G(h)} \quad (4.54)$$

Assim,

$$F(h) = h - C^* - (1 - C^*) \left[\left(\frac{(1 + U(h-1))(1 - C^*)}{(h - C^*)} \right) \left(\frac{(n+1) + nC^*}{(n+1)h + nC^*} \right) \right]^n \quad (4.55)$$

e,

$$G(h) = \left((\alpha - 1)U^2 - \frac{\alpha(1-U)^2}{h^2} + \beta h \right) \quad (4.56)$$

A integração da equação (4.54) é responsável pela determinação do perfil da *Roll Wave*, ou seja:

$$h(z) = \int \frac{F(h)}{G(h)} dz \quad (4.57)$$

Para se determinar o comprimento da onda é necessário primeiro estabelecer as condições de choque, de modo a descobrir os limites de integração a serem utilizados.

Analisando os estudos feitos por Ferreira (2007), observa-se que tais condições de choque são derivadas da equação da conservação da massa e da equação da quantidade de

movimento, ou seja:

$$U[h]_1^2 = \left[\bar{u} h \right]_1^2 \quad (4.58)$$

$$U \left[\bar{u} h \right]_1^2 = \left[\alpha \bar{u}^2 h + \frac{1}{2} \beta h^2 \right]_1^2 \quad (4.59)$$

Com: $[h]_1^2 = h_2 - h_1$ representando o salto das propriedades, é possível determinar a relação existente entre as alturas h_1 e h_2 da seguinte forma:

$$\alpha(1-U)^2 - h_1 h_2 U^2 (\alpha - 1) - \frac{1}{2} \beta h_1^2 h_2 - \frac{1}{2} \beta h_1 h_2^2 = 0 \quad (4.60)$$

4.3.2.1 – Determinação de h_2 segundo valor o de β :

a) Se $\beta > 0$,

$$h_2 = \left\{ \left[\frac{h_1}{2} + (\alpha - 1) \frac{U^2}{\beta} \right]^2 + \frac{2\alpha(1-U)^2}{h_1 \beta} \right\}^{\frac{1}{2}} - \frac{h_1}{2} - (\alpha - 1) \frac{U^2}{\beta} \quad (4.61)$$

b) Se $\beta = 0$,

$$h_2 = \frac{(1-U)^2 \alpha}{(\alpha - 1) U^2 h_1} \quad (4.62)$$

A partir daí, com os limites de integração já determinados e de acordo com as equações (4.61) e (4.62) é possível determinar, através da equação (4.54), o comprimento da onda, da seguinte forma:

$$\lambda = \int_{h_1}^{h_2} \frac{G(h)}{F(h)} dh \quad (4.63)$$

4.2.3 Estabelecimento da velocidade de Propagação da *Roll Wave*.

Com o intuito de determinar a velocidade de propagação das *Roll Waves*, Ferreira (2007) verificou que seria necessário encontrar uma equação do tipo:

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{F(h)}{G(h)} > 0 \quad (4.64)$$

Para isso, utilizando os mesmos caminhos percorridos por Ng e Mei em 1994, foi possível determinar a velocidade de propagação da *Roll Wave* em um ponto crítico, utilizando-se de um (h_c), onde h_c é a altura crítica, e a mesma deve estar entre h_1 e h_2 , de modo que, $h_1 < h_c < h_2$.

Adotando $c = 1-U$, pode-se expressar a equação 4.55 e 4.56 da seguinte forma:

$$F(h_c) = h_c - C^* - (1 - C^*) \left\{ \left[\frac{(c + Uh_c)(1 - C^*)}{(h_c - C^*)} \right] \left[\frac{(n+1) + nC^*}{(n+1)h_c + nC^*} \right] \right\}^n \quad (4.65)$$

$$G(h_c) = \left((\alpha - 1)U^2 - \frac{\alpha c^2}{h_c^2} + \beta h_c \right) = 0 \quad (4.66)$$

o que resulta em:

$$c = - \left(\frac{h_c - C^*}{1 - C^*} \right)^{\frac{1+n}{n}} \left[\frac{(n+1)h_c + nC^*}{(n+1) + nC^*} \right] (\alpha - 1) + \left\{ \alpha(\alpha - 1) \left(\frac{h_c - C^*}{1 - C^*} \right)^{\frac{2(1+n)}{n}} \left[\frac{(n+1)h_c + nC^*}{(n+1) + nC^*} \right] + \beta h_c^3 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.67)$$

Fazendo $F(h_c) = 0$, tem-se a velocidade de propagação em função de h_c , da seguinte forma:

$$U = \left(\frac{h_c - C^*}{1 - C^*} \right)^{\frac{1+n}{n}} \left[\frac{(n+1)h_c + nC^*}{(n+1) + nC^*} \right] \frac{1}{h_c} - \frac{c}{h_c} \quad (4.68)$$

CAPÍTULO 5

5 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DAS *ROLL WAVES*

5.1 - Considerações Gerais

Dentro da proposta inicial, de perseguir o problema no eixo matemático e numérico, a proposta de simulação numérica deve adotar um método de integração que melhor se adapte à solução da equação (4.54) governante do fenômeno.

Dentre os métodos de integração, verificou-se que o método que melhor se adaptava ao problema é o de Runge e Kutta de 5º ordem.

O método de Runge-Kutta-Fehlberg ou Runge-Kutta de 5ª ordem é um dos mais populares métodos utilizados na solução de PVI. Este método necessita de seis avaliações da função, obtendo um erro global de ordem 5 e um erro local de ordem 6.

Considera-se o problema de valor inicial (PVI):

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (5.1)$$

O problema consiste em resolver um PVI de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem (com condição inicial em $x = x_0$), expressa na forma normal, no intervalo fechado $[a, b]$.

O Método de Runge-Kutta-Fehlberg é estabelecido pelas equações dadas por:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= hf(x_i, y_i) \\
 f_2 &= hf\left(x_i + \frac{h}{4}, y_i + \frac{f_1}{4}\right) \\
 f_3 &= hf\left(x_i + \frac{3h}{8}, y_i + \frac{3f_1}{32} + \frac{9f_2}{32}\right) \\
 f_4 &= hf\left(x_i + \frac{12h}{13}, y_i + \frac{1932f_1}{2197} - \frac{7200f_2}{2197} + \frac{7296f_3}{2197}\right) \\
 f_5 &= hf\left(x_i + h, y_i + \frac{439f_1}{216} - 8f_2 + \frac{3680f_3}{513} - \frac{854f_4}{4104}\right) \\
 f_6 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i - \frac{8f_1}{27} + 2f_2 - \frac{3544f_3}{2565} - \frac{1859f_4}{4104} - \frac{11f_5}{40}\right) \\
 y_{i+1} &= y_i + \left(\frac{16f_1}{135} + \frac{6656f_3}{12835} + \frac{28561f_4}{56430} - \frac{9f_5}{50} - \frac{2f_6}{55}\right) \text{ com erro global } O(h^5) \\
 E &= \frac{f_1}{360} - \frac{128f_3}{4275} - \frac{2197f_4}{75240} + \frac{f_5}{50} + \frac{2f_6}{55} \text{ (erro local)}
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Onde o erro (E) apresentado é o erro local de cada passo (h), do método.

A equação apresentada pode ser utilizada com passo (h) constante ou com passo (h) adaptativo, o qual apresenta melhor eficiência devido à utilização de passos que atendam a um erro local estipulado.

O maior inconveniente do passo adaptativo é, justamente, como controlar o passo, ou seja, quando deve ser aumentado ou reduzido.

Para a formação de *Roll Waves* em escoamentos laminares, o projeto computacional foi elaborado em Fortran 90 (versão 6.1). O fluxograma que representa todas as passagens da elaboração do programa para formação de *Roll Waves* está ilustrado na Figura 17. O programa completo encontra-se no Apêndice A.

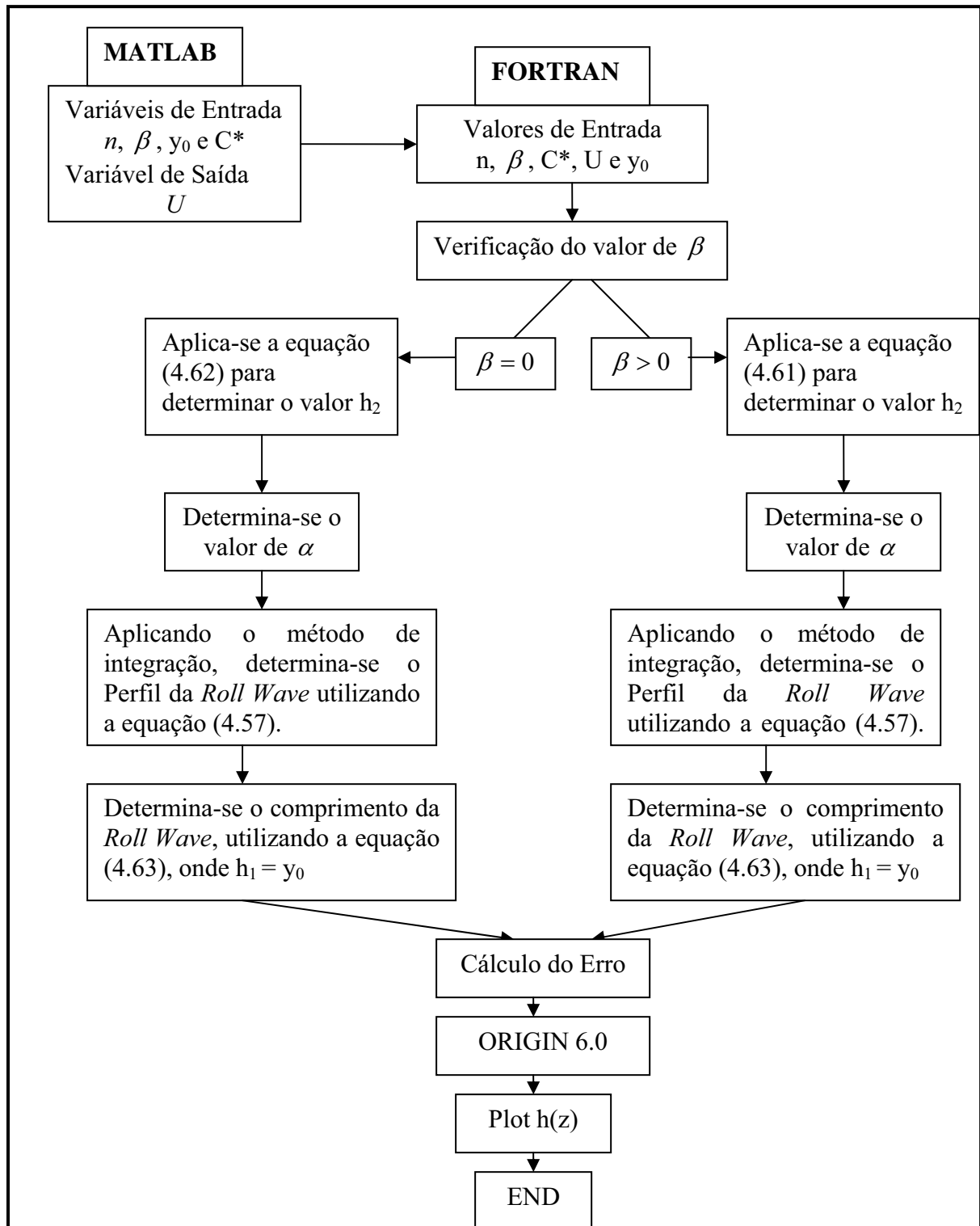


Figura 17: Fluxograma.

A primeira etapa realizada foi a partir da equação (4.68) determinar o valor da velocidade de propagação da *Roll Wave*, utilizando o do Software MATLAB® versão 6.5., com os dados de entrada β , C^* e n . Este programa encontra-se no apêndice A. A partir de então, utilizando do programa elaborado em Fortran, foram construídas as funções

“Um Panorama sobre *Roll Waves* em Escoamentos Laminares e Turbulentos com Superfície Livre”.

necessárias para a resolução da EDO (4.54) e em seguida, implementou-se o método de integração Runge-Kutta-Fehlberg (5^a ordem), a fim de verificar e analisar resultados obtidos para a formação de *Roll Waves* em fluidos newtonianos e não newtonianos. Cabe aqui ressaltar que o procedimento numérico realizado é capaz de gerar *Roll Waves* em diversas reologias, pois trata-se de um modelo global. Para a plotagem gráfica dos resultados, utilizou-se o software Origin 6.0.

Para a formação de *Roll Waves* em escoamentos turbulentos, numa reologia Binghamiana, o projeto computacional foi desenvolvido a partir de rotinas em MATLAB[®] versão 6.5.

CAPÍTULO 6

6 RESULTADOS NUMÉRICOS

6.1 Resultados numéricos com reologia de Bingham para escoamentos turbulentos

Maciel (2001) partiu do modelo global viscoso apresentados nas equações (4.31) e (4.32), na reologia não newtoniana, para resolver a equação de *Roll Waves*.

Os resultados obtidos apresentados na seqüência mostram a evolução da amplitude destas ondas em função do número de Reynolds, do número de Froude, da velocidade de propagação ou celeridade, deixando nítido o efeito marcante do efeito viscoso sob o perfil, ou seja, o desaparecimento dos perfis contínuos, em caso de problema invíscido.

A equação para formação de *Roll Waves* para Fluidos não newtonianos, em escoamentos turbulentos, utilizando a reologia de Bingham, é dada por (Maciel, 2001):

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - \frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 + \frac{Re}{Fr^2(1-U)} \left\{ h^3 - \alpha Fr^2 (1-U)^2 + \alpha \left[U^2 h^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \right\} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\tan \theta (h-1)(h-h_1^*)(h-h_2^*)}{\varepsilon Fr^2 (U-1)h} = 0 \quad (6.1)$$

sendo:

$$h_1^* = \frac{1}{2}(U-1) \left\{ |U+1| - \sqrt{\left((U+1) + \sqrt{\left(1 + \frac{3+C^*}{1-C^*} \right)} \right) \left((U+1) - \sqrt{\left(1 + \frac{3+C^*}{1-C^*} \right)} \right)} \right\} \quad (6.2)$$

$$h_2^* = \frac{1}{2}(U-1) \left\{ \left| U+1 \right| - \sqrt{\left((U+1)+\sqrt{\left(1+\frac{3+C^*}{1-C^*}\right)}\right) \left((U+1)-\sqrt{\left(1+\frac{3+C^*}{1-C^*}\right)}\right)} \right\} \quad (6.3)$$

$$C^* = \frac{\tau_c}{\rho g h \sin(\theta)} \quad (6.4)$$

Dentre os testes realizados, Maciel (2001) ilustrou:

a) Variando número de Reynolds:

Fixando-se os valores de U , do número de Froude, α (coeficiente de distribuição de velocidade), θ (declividade do canal) e ε (esbeltez da onda) e aumentando o número de Reynolds, nota-se um aumento da amplitude e uma diminuição do comprimento das *Roll Waves*, como mostra a Figura 18.

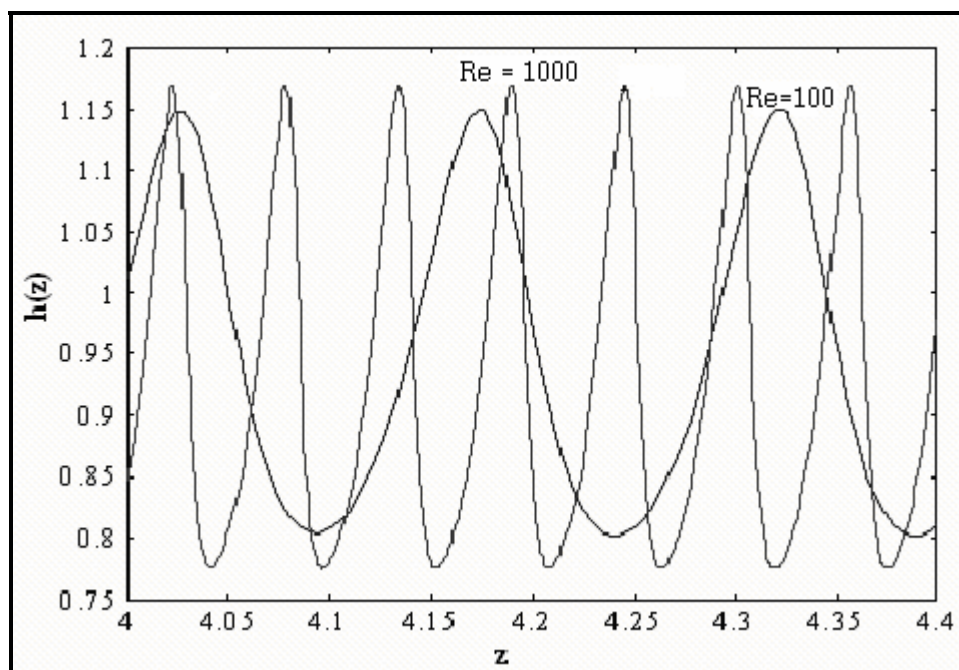


Figura 18: Resultado numérico $h(z)$, para: $Fr = 2,5$; $U = 1,39$; $\alpha = 1,0$, $\theta = 16^\circ$, $\varepsilon = 0,001$ e $C^* = 0$.

b) Variando o número de Froude

Fixando-se os valores de U , do número de Reynolds, α (coeficiente de distribuição de velocidade), θ (declividade do canal) e ε (esbeltez da onda) e aumentando o número de Froude, observa-se um aumento da amplitude e uma diminuição do comprimento das *Roll*

Waves, como mostra a Figura 19.

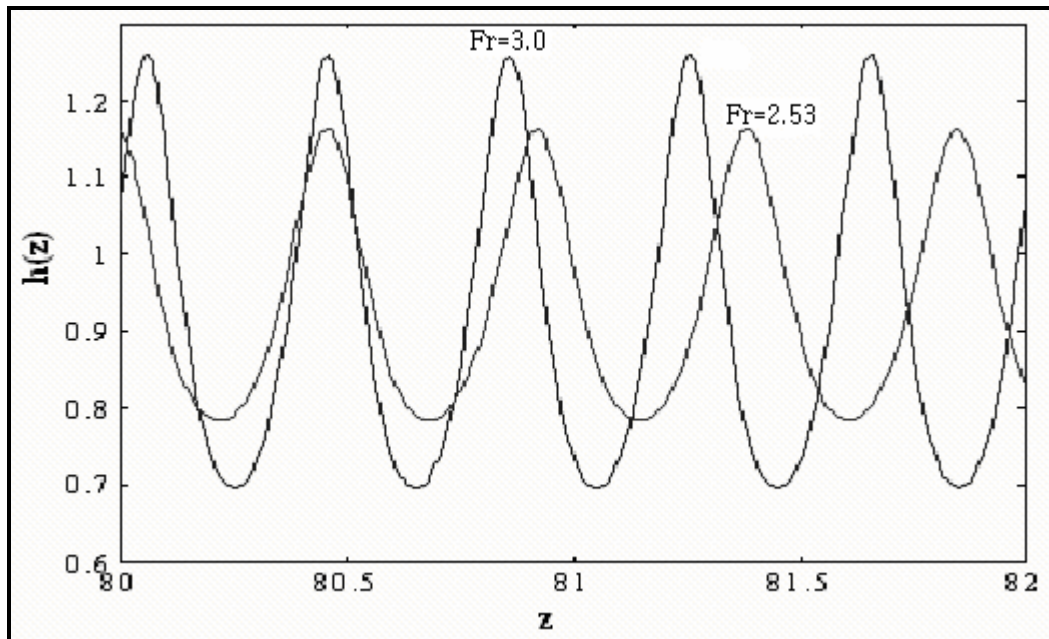


Figura 19: Resultado numérico $h(z)$, para: $Re = 10$; $\alpha = 1,0$; $\theta = 16^\circ$; $\varepsilon = 0,001$; $C^* = 0$.

c) Variando a velocidade de propagação ou celeridade das ondas (U):

Fixando-se os valores do número de Reynolds, do número de Froude, α (coeficiente de distribuição de velocidade) θ (declividade do canal) e ε (esbeltez da onda) e aumentando a velocidade de propagação (U), nota-se uma diminuição da amplitude e do comprimento das *Roll Waves*, como mostra a Figura 20.

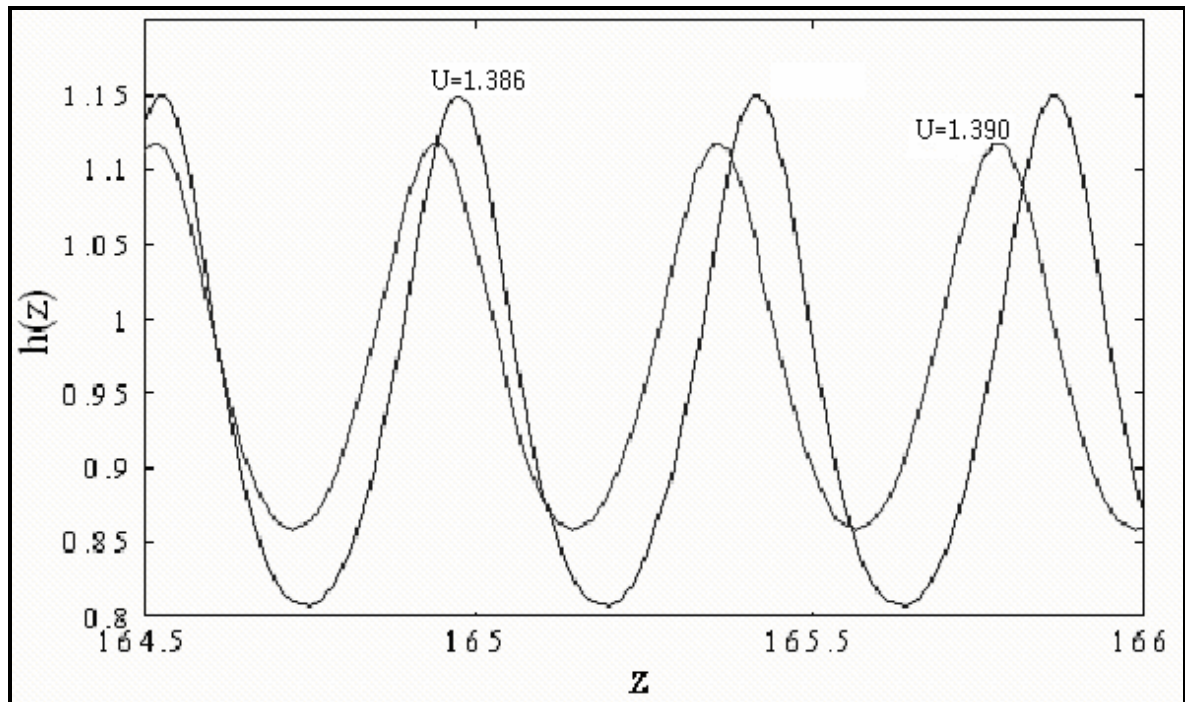


Figura 20: Resultado numérico $h(z)$, para: $Re = 10$; $Fr = 2,5$; $\alpha = 1,0$; $\theta = 16^\circ$; $\varepsilon = 0,001$.

Considerando a reologia Não Newtoniana ($C^* \neq 0$), a análise numérica aponta para o seguinte resultado obtido:

d) Variando a coesão C^*

Com base na Figura 21 e 22, observa-se que:

- um aumento no parâmetro de Bingham (C^*) causa um aumento na amplitude e uma ligeira modificação no comprimento das ondas geradas ;
- um aumento no parâmetro de Bingham (C^*) acarreta uma antecipação na formação das ondas geradas, o que vai ao encontro dos estudos matemáticos anteriores que prediziam a antecipação da formação de *Roll Waves* para a reologia binghamiana.

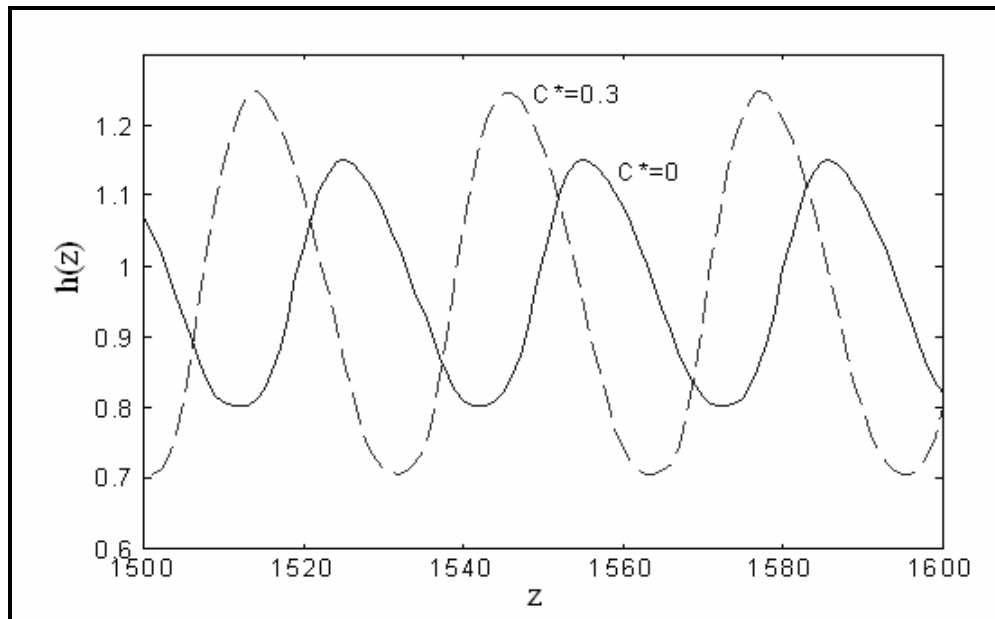


Figura 21: Resultado numérico $h(z)$, para: $Re = 10$, $Fr = 2,5$; $\alpha = 1,0$; $\theta = 16^0$; $\varepsilon = 0,001$.

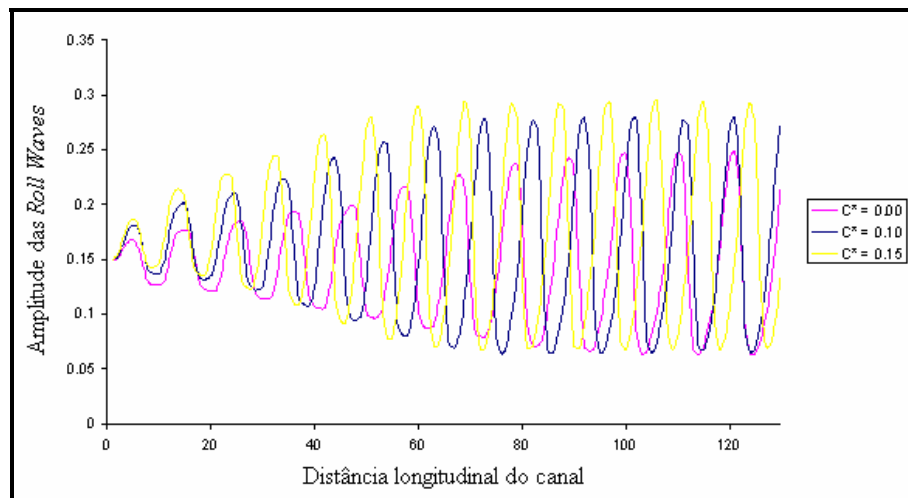


Figura 22: Efeito da coesão antecipando e aumentando a amplitude das *Roll Waves*. (Maciel, 1999).

6.2 Resultados Numéricos utilizando a Reologia de Herschel Bulkley para escoamentos laminares

A partir das equações obtidas no item 4.3, a proposta deste item é ilustrar os resultados obtidos utilizando o programa computacional elaborado em Matlab e Fortran, o

qual é capaz de reproduzir, neste caso, *Roll Waves* em escoamento de Fluidos newtonianos e Não newtonianos, utilizando o modelo reológico de Herschel Bulkley implementado no código, que é global, e que permite, portanto, calcular *Roll Waves* em outras reologias.

Tratando-se de fluidos tipo Herschel Bulkley, tem-se as seguintes condições de existência: $\tau_c \neq 0$ e $n \neq 1$. Através de estudos realizados, nota-se que fixando os valores de n e C^* , variando o valor de β , automaticamente ocorre uma mudança no valor da velocidade de propagação, com isso, verifica-se que para $\beta = 1$, como ilustra a Figura 23, as *Roll Waves* geradas possuem uma menor amplitude, porém o comprimento de onda é maior, quando comparado com a Figura 24, cujo valor é de $\beta = 0$. Observa-se também que com a diminuição de β na Figura 24, nota-se que a velocidade de propagação das ondas aumenta.

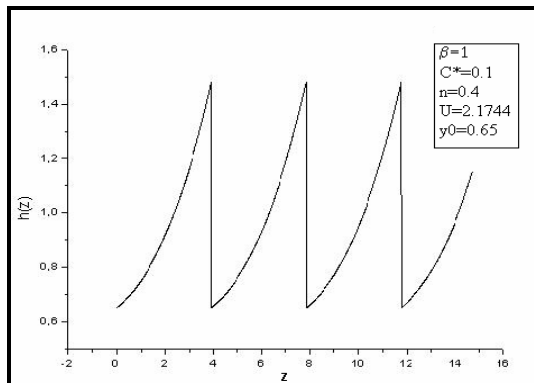


Figura 23: *Roll Waves* para fluido tipo Herschel Bulkley.

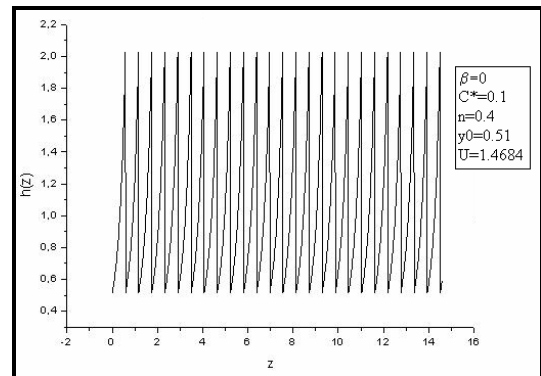


Figura 24: *Roll Waves* para fluido tipo Herschel Bulkley.

Uma segunda análise mostra que fixando os valores de C^* e β , e alterando o valor de n , ocorre uma mudança no valor da velocidade de propagação da onda, que pode ser observada na Figura 25 onde $n = 0.2$. As *Roll Waves* tem grande amplitude, porém ocorre uma diminuição no comprimento de onda, quando comparadas com a Figura 26 onde $n = 0.6$. Além disso, com o aumento do índice n , pode-se perceber que ocorre um aumento na velocidade de propagação da onda.

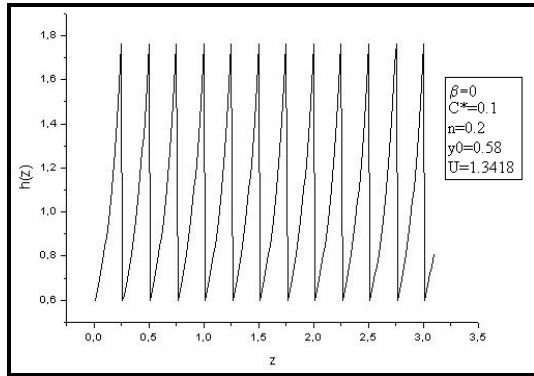


Figura 25: *Roll Waves* para fluido tipo Herschel Bulkley.

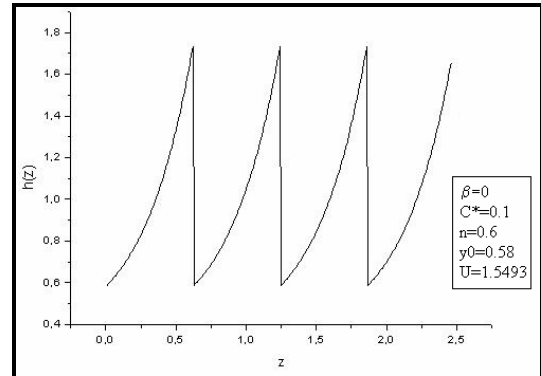


Figura 26: *Roll Waves* para fluido tipo Herschel Bulkley.

6.2.1 Resultados Numéricos com reologia de Bingham em escoamentos laminares

Tratando-se de fluidos Binghamianos, sabe-se que sua condições são: $\tau_c \neq 0$ e $n = 1$, assim forma realizados alguns testes numéricos a fim de analisar seu comportamento, estabelecidos alguns critérios.

Fixando os valores de C^* e n , foi observado que com $\beta = 0$, o comprimento da *Roll Wave* observado na Figura 27, é menor, porém, ocorre um aumento em sua amplitude quando comparada com a Figura 28, onde $\beta = 1$. Além disso, com $\beta = 1$ ocorreu um aumento na velocidade de propagação desta ondas.

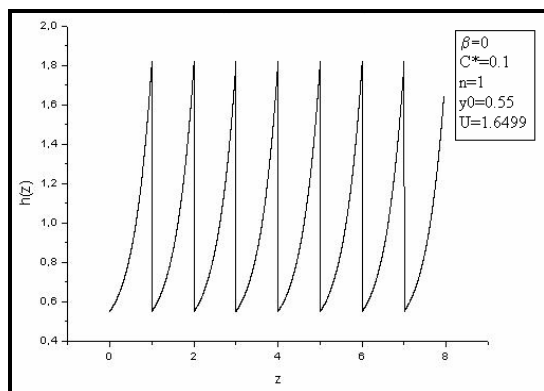


Figura 27: *Roll Waves* em Fluido de Bingham.

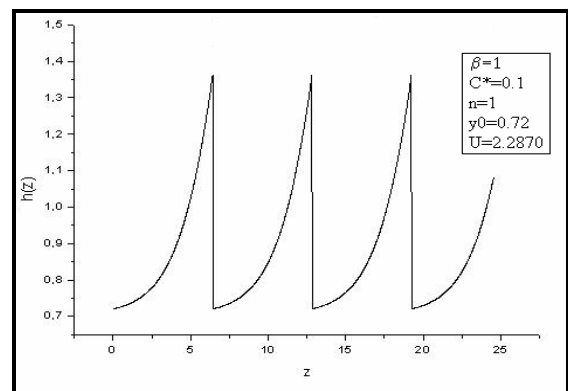


Figura 28: *Roll Waves* em Fluido de Bingham.

Fixando os valores de β e n , variando o valor de C^* , observa-se que quando $C^* = 0.2$, como ilustra a Figura 29, o comprimento de onda é menor, porem sua amplitude é

maior, quando comparada com a Figura 30, onde $C^* = 0.4$. Observa-se também que com o aumento de C^* , ocorre uma pequena diminuição na velocidade de propagação da onda.

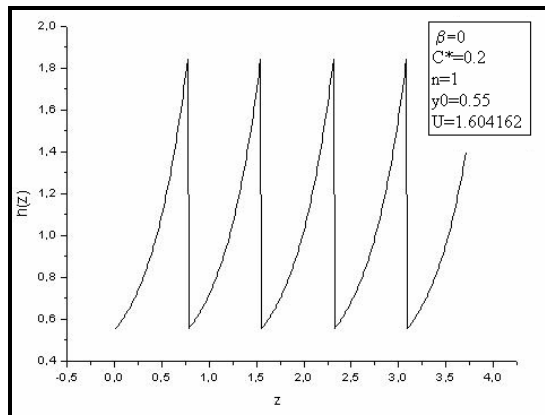


Figura 29: Roll Waves em Fluido de Bingham.

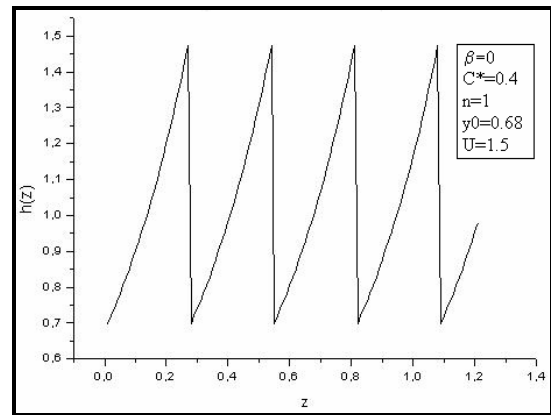


Figura 30: Roll Waves em Fluido de Bingham.

6.2.2 Resultados Numéricos com reologia de Power Law em escoamentos laminares

Tratando-se de Fluidos tipo *Power Law*, tem-se que as condições necessárias para sua existência são: $\tau_c = 0$ e $n \neq 1$, assim foram feitos alguns teste no intuito de avaliar o seu comportamento com a variação de alguns parâmetros.

Fixando-se os valores de C^* e n , e variando o valor de β , observa-se que para $\beta = 0$, como ilustrado na Figura 31, ocorre um aumento na amplitude e uma diminuição no comprimento de onda quando comparada com a Figura 32, onde $\beta = 1$. Observa-se também que como aumento de β , ocorre um aumento na velocidade de propagação das ondas.

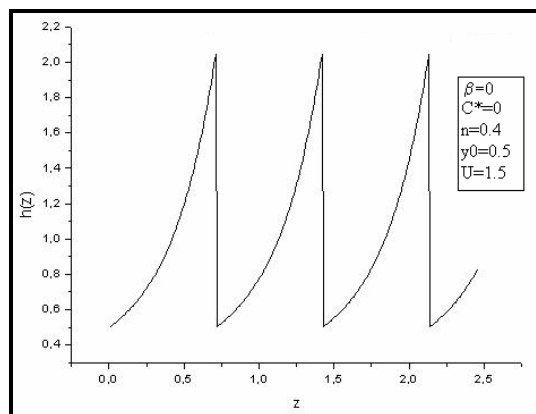


Figura 31: Roll Waves em fluido tipo Power Law.

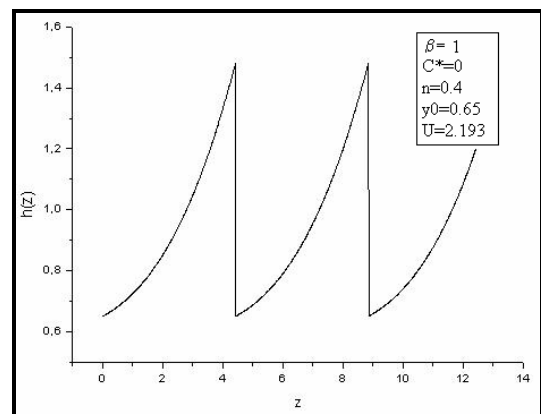


Figura 32: Roll Waves em fluido tipo Power Law.

Fixando-se os valores de β e C^* , variando n , observa-se que quando $n = 0.4$ como ilustra a Figura 34, nota-se que ocorre uma pequena diminuição no comprimento da onda e um aumento na amplitude da mesma, quando comparada com a Figura 33 onde $n = 1$. Observa-se também que com o aumento do índice n , ocorre um aumento na velocidade de propagação da onda.

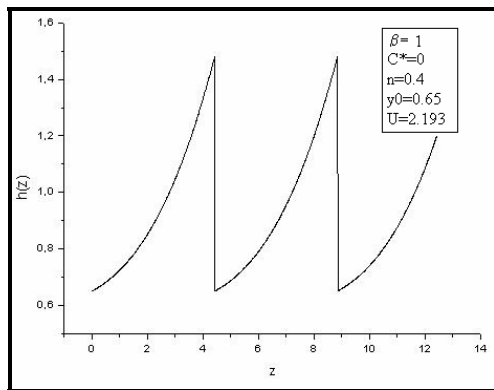


Figura 33: Roll Waves em fluido tipo Power Law.

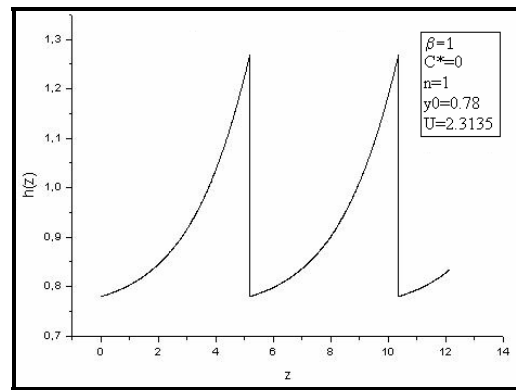


Figura 34: Roll Waves em fluido tipo Power Law.

6.2.3 Resultados Numéricos para um fluido Newtoniano em escoamentos laminares

Tratando-se de Fluidos Newtonianos, tem-se que as condições de existências deste fluidos são: $\tau_c = 0$ e $n = 1$. Assim, foram feitos alguns testes numéricos no intuito de analisar o comportamento destes fluidos com a variação de alguns parâmetros.

Fixando-se os valores de n e C^* , variando valor de β , observa-se que quando $\beta = 1$ como ilustra a Figura 35, nota-se que a velocidade de propagação da onda aumenta, o comprimento de onda aumenta, porém, ocorre uma diminuição na amplitude da onde quando comparada com a Figura 36, onde a velocidade de propagação da onde é maior e $\beta = 0$.

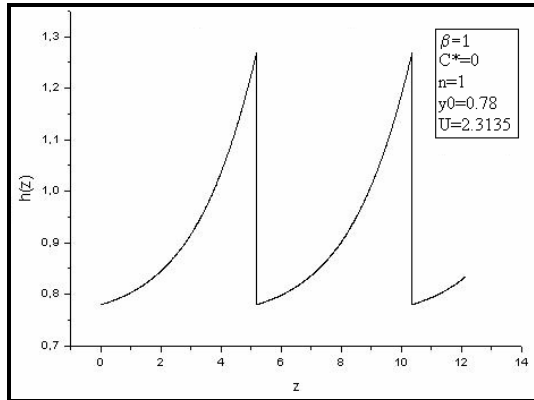


Figura 35: Roll Waves em Fluidos Newtonianos.

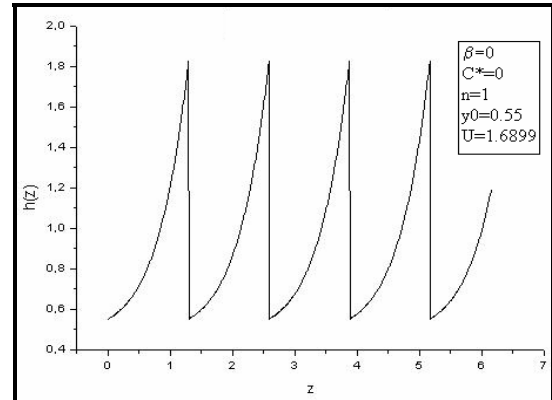


Figura 36: Roll Waves em Fluidos Newtonianos.

6.2.4 Relações entre os Fluidos tipo Herschel Bulkley e outras reologias.

Neste item mostra-se uma comparação entre os fluidos tipo Herschel Bulkley e os modelos reológicos de Bingham, *Power Law* e Newtoniano, com o intuito de verificar a diferença de comportamento entre eles.

Fazendo uma comparação entre *Roll Waves* em fluido tipo Herschel Bulkley e fluido de Bingham, fixando o valor de β e variando os outros parâmetros, pode-se observar que com o aumento de C^* e diminuição do índice n , como ilustra a Figura 37, ocorre uma pequena diminuição na velocidade de propagação da onda; nota-se uma pequena diminuição na comprimento da onda e um pequeno aumento em sua amplitude, quando comparada com a Figura 38.

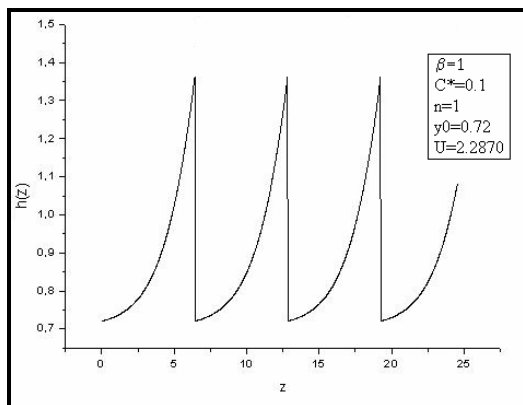


Figura 37: Roll Waves em Fluido tipo Herschel Bulkley.

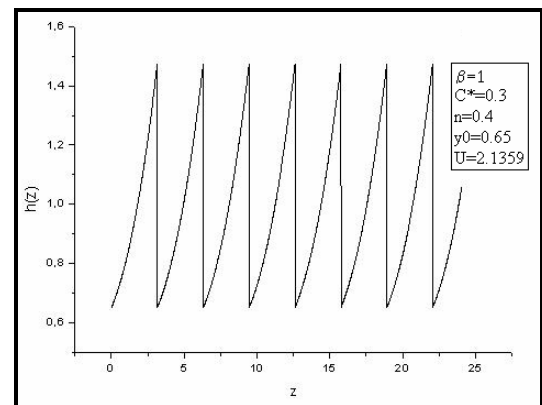


Figura 38: Roll Wave em Fluido de Bingham.

Fazendo uma comparação entre um fluido tipo Herschel Bulkley e um fluido do tipo

Power Law, fixando-se os valores de n e variando os demais parâmetros, observa-se que com a diminuição de β e aumento de C^* como ilustra a Figura 39, nota-se que ocorre uma diminuição na velocidade de propagação da onda, diminui-se o comprimento de onda e aumenta a amplitude da onda quando comparada com a Figura 40.

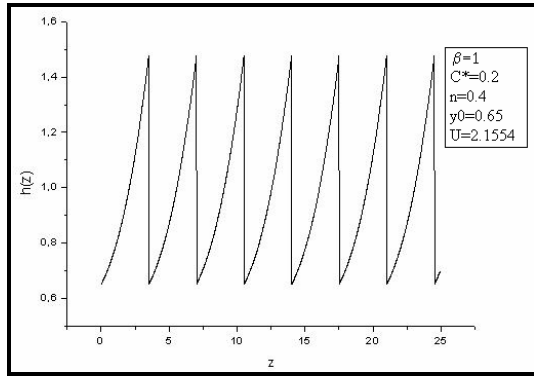


Figura 39: Roll Wave em Fluido de Herschel Bulkley.

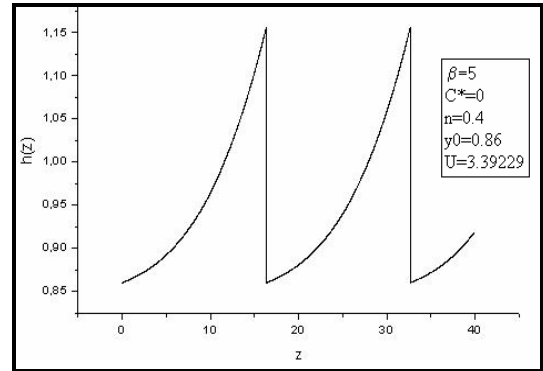


Figura 40: Roll Wave em Fluido tipo Power Law.

Fazendo uma comparação entre fluidos tipo Herschel Bulkley e Fluidos Newtonianos, fixando-se o valor de β , e variando os demais parâmetros, observa-se na Figura 42 que quando diminui-se o valor de C^* e diminui-se também o valor de n , ocorre um aumento na velocidade de propagação da onda, aumenta-se a amplitude e o comprimento de onda quando comparado com a Figura 41.

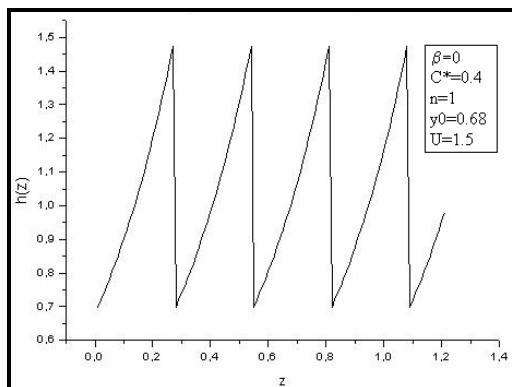


Figura 41: Roll Waves em Fluido de Herschel Bulkley.

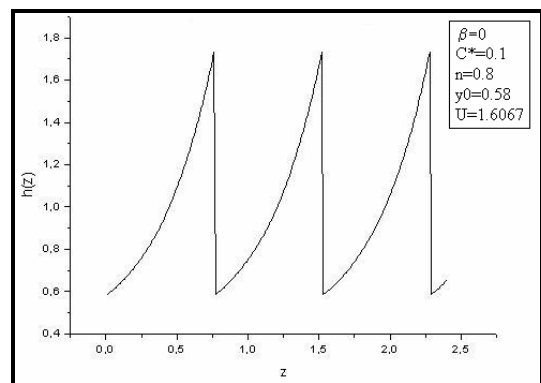


Figura 42: Roll Waves em Fluidos Newtonianos.

CAPÍTULO 7

7 PROPOSTA DE EXPERIMENTAÇÃO FÍSICA COM ROLL WAVES

O aparato experimental pretendido consiste num sistema fechado onde a recirculação do fluxo hiperconcentrado será garantida por intermédio de uma bomba, de reservatório de nível constante a montante e no controle de vazão (ver Figura 43). Esses experimentos podem ser realizados no canal com diferentes declividades, diversas vazões, para duas misturas sólido+líquido, sob diferentes concentrações em volume (C_v).



Figura 43: Bomba helicoidal Geremias - 7,5 CV.

As propriedades reológicas (viscosidade aparente, tensão crítica, etc) desses materiais podem ser facilmente obtidas através de análise realizadas no próprio laboratório.

O aparato experimental específico consiste em uma plataforma de ensaios de lama, de estrutura metálica e paredes de vidro, 10 metros de comprimento e até 0,60 metros de largura, apoiada num pilar central de 3 m de altura. Possui dispositivo que permite a variação da seção transversal interna, que pode ser retangular ou trapezoidal. Com o auxílio de um macaco hidráulico, pode-se também variar a declividade, com boas condições operacionais

até 30% (16^0), como pode ser observado através da Figura 44.



Figura 44: Plataforma de ensaios de lama.

Tem-se um sistema de recirculação onde o fluxo hiperconcentrado é garantido por intermédio de uma bomba (Moto-Bomba Helicoidal 7,5 CV) que recalca lama para um reservatório de nível constante, e que é laminada por orifícios na etapa subsequente adentrando pelo canal. O controle de vazão é feito por um inversor de frequência que controla a rotação da bomba e por medida volumétrica e tempo de enchimento de um recipiente graduado a cada 500ml. As lâminas normais são aferidas tanto por régua metálica, quanto pelos sensores ultra-sônicos (Figura 45). As lâminas normais geralmente são tomadas em 3 pontos numa faixa de 2 m (da ordem de pelo menos 40 vezes a lâmina normal do ensaio).



Figura 45: Plataforma equipada com sensores ultra-sônicos e septo divisorio na seção.

Em se desprezando as flutuações de massa específica e assumindo erros relativos máximos na declividade, τ_c (tensão crítica) K_n (índice de consistência), n (índice de

escoamento), velocidades, etc; o erro experimental máximo seria da ordem de 30 % conforme (SANTOS, 2003).

Utilizando-se da infra-estatura apresentada neste capítulo e, pautando-se no modelo matemático estabelecido, nas hipóteses de validade e condições de existência do fenômeno, poder-se-ão gerar *Roll Waves* em Fluidos não newtonianos em laboratório e comparar com os resultados numéricos obtidos nesta pesquisa.

CAPÍTULO 8

8 DISCUSSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Este trabalho apresentou todo o processo de cálculo para formação de *Roll Waves* em escoamentos turbulentos e laminares, tanto para Fluidos Newtonianos como para Fluidos não newtonianos, dos equacionamentos matemáticos às implementações numéricas globais.

Observou-se que *Roll Waves* podem se desenvolver tanto em Fluidos newtonianos e não newtonianos, e em diversas reologias.

Tratando-se de Fluidos não newtonianos em escoamentos laminares, o comportamento das *Roll Waves* está relacionado com os parâmetros utilizados para sua formação, como num caso comparativo entre as Figura 23 e 24 que trata o fenômeno *Roll Waves* numa reologia Herschel Bulkley, onde observa-se que para $\beta = 0$, ocorre uma antecipação na formação da onda. Já para fluidos de Bingham em escoamentos turbulentos, nota-se que variando o Número de Froude, como ilustrado na Figura 18, ocorre uma antecipação na formação da *Roll Wave* gerada com o aumento do Número de Froude, além de aumentar a amplitude e diminuir o comprimento da onda.

Pode-se notar, que, de modo geral, para uma reologia binghamiana, existe uma grande influência nos parâmetros determinados para a formação de *Roll Waves*, onde aumentando o número de Froude, ocorre um aumento na amplitude e uma diminuição no comprimento da onda. Já um aumento na velocidade de propagação da *Roll Wave*, implica uma diminuição de amplitude. Quanto a influência da coesão do fluido (C^*) - tensão crítica -, nota-se que com o aumento da coesão, ocorre um aumento na amplitude da onda, acarretando uma antecipação na formação das ondas geradas.

Observou-se que para fluidos newtonianos, cuja condição de existência é $Fr > 2$ e

condições de estabilidade $1 < U < \frac{3}{2}$ que:

- um aumento na amplitude da perturbação causa uma antecipação na formação da *Roll Wave*, mas não altera sua amplitude;
- um aumento no termo resistivo (Chézy) causa um aumento na amplitude e uma diminuição no comprimento da *Roll Wave* gerada;
- a perturbação de maior período caracteriza o comprimento da *Roll Wave* gerada.

Já para Fluidos não newtonianos cuja condição de existência é, dada por:

$$2\beta \left(\frac{1 - \sqrt{\beta + \frac{C^*(1-\beta)}{W^2}}}{-\beta + \sqrt{\beta + \frac{C^*(1-\beta)}{W^2}}} \right) < 1$$

E a condição de estabilidade é $1 < U < \frac{3 - 2.C^*}{2.(1 - C^*)}$:

Assim, pode-se comentar:

- o período da *Roll Wave* é definido pelo período da perturbação imposta;
- um aumento na amplitude da perturbação causa uma antecipação na formação da *Roll Wave*, mas não altera sua amplitude;
- um aumento no termo resistivo (Chézy) causa um aumento na amplitude e uma diminuição no comprimento da *Roll Wave* gerada;
- a perturbação de maior período caracteriza o comprimento da *Roll Wave* gerada;
- um aumento no termo de Bingham antecipa a formação e eleva a amplitude da *Roll Wave*;
- um aumento no número de Reynolds leva a um aumento da amplitude e

comprimento da onda gerada;

- um aumento na velocidade de propagação U leva a uma diminuição da amplitude e comprimento da onda gerada.

Assim exposto, conclui-se que em posse dos modelos desenvolvidos e código de cálculo global, os resultados apontados neste trabalho poderão ser validados a partir de ensaios físicos, se bem controlados tanto na sua fase reológica quanto na sua fase dinâmica.

CAPÍTULO 9

9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAKHVALOV, N.S.; EGLIT, M.E. Investigation of the solutions to snow avalanche movement equations. In: WORLD Data Center for Glaciology, Soviet Research Avalanche bibliography update, 1977-1983. p. 117-128.

BALMFORTH, N.J.; BUSH, J.W.; CRASTER, R.V. *Roll waves* on flowing cornstarch suspensions. **Physics Letters**, Amsterdam, v.338, p. 479-484, 2005.

BALMFORTH, N.J.; LIU, J.J. Roll Waves in mud. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v.519, p. 33-54, 2004.

BALMFORTH, N.J.; MANDRE, S. Dynamics of roll waves. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v.514, p. 1-33, 2004.

BENJAMIN, T. B. Wave formation in laminar flow down an inclined plane. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v.2, p.554–574, 1957.

BERNARDI, C.; PIRONNEAU, O. On the shallow water equations at low Reynolds number. **Communication In Partial Differential Equations**, p. 59-104, 1991.

BROCK, R. R. Development of roll wave trains in open channels. **Journal of Hydraulic Division**, New York, v.95, HY4, p. 1401–1427, 1969.

BROCK, R.R. Periodic permanent roll waves. **Journal of Hydraulic Division**, New York, ASCE 95 (HY12) p. 2565–2580, 1970.

BROCK, R. R. Development of the roll waves in the report opened no. KH-R-16 of the cantilenas. In: KECK, W. M. **Laboratory of the hydraulics and of the resources of water**.

California: California Institute of Technology, 1967.

CORNISH, V. **Ocean waves and lindred geophysical phenomena**. London: Cambridge University Press, 1934.

COUSSOT, P.; PIAU J.M. On the behavior of mud suspensions. **Rheologica Acta**, Darmstadt, v.33, n.3, p. 175-184, 1994.

COUSSOUT, P. **Mudow rheology and dynamics**. Balkema: Rotterdam, 1997. (IAHR Monograph Series).

DI CRISTO, C.; VACCA, A. On the convective nature of roll waves instability. **Journal Applied Mathematics**, London, v.3, p. 259-271, 2005.

DRESSLER, R.F. Mathematical solution of the problem of roll waves in inclined open channels. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, New York, v.2, p. 149-194, 1949.

EGLIT, M.E. Theorical approches to avalanche dynamics. In: WOLD Data Center for Glaciology. S.L.: Soviet Avalanche Research-Avalanche Bibliography update, 1984. p. 63-116.

EMMETT, W. W. Overland flow. **Hillslope hydrology**. KIRKBY, M. J. (Ed.). New York: Wiley, New York, 1978. p.145-175.

ENOS, P. Flow regimes in debris flow. **Sedimentology**, Oxford, v.24, p. 133-142.

FERREIRA, F.O. **Abordagem matemática de Roll Waves em escoamentos hiperconcentrados com superfície livre**. Ilha Solteira: Unesp/FEIS, 2006. (Trabalho de Estudos Especiais. Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, Brasil, 2006).

FERREIRA, F.O. **Abordagem matemática de Roll Waves em escoamentos hiperconcentrados com superfície livre**. 2007. 125 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Solteira, 2007.

GODUNOV, S.K. A difference method for numerical calculation of discontinuous equations of hydrodynamics. **Math. Sb**, p. 271-300, 1959.

GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. **Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields**. New York: Springer-Verlag, 1983.

HAIRER, E. et al. **Solving differential equations I**. New York: Springer Verlag, 1987. (Series in Computational Mathematics, 8).

HUANG, X.; GARCIA, M.H. A herschel-bulkley model for mud flow down a slope. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v.374, p. 305-333, 1998.

HWANG, S. H.; CHANG, H.C. Turbulent and inertial *roll waves* in inclined film flow. **Physics of Fluids**, New York, v.30, p. 1259-1268, 1987.

HWANG, C.; CHEN, J.; WANG, J.; LIN, J. Linear stability of power law liquid film flows down an inclined plane. **Journal of Physics D: Applied Physics**, London, v.27, p. 2297-2301, 1994.

IOSS, G.; JOSEPH, D.D. **Elementary stability and bifurcation theory**. New York: Springer-Verlag, 1980.

JEFFREYS, H. The flows of water in a inclined channel of rectangular section. **Philosophical Magazine**, London, v.49, p.793-807, 1925.

JULIEN, P.Y.; HARTLEY, D.M. Formation of roll waves in laminar sheet flow. **Journal of Hydraulic Research**, Delft, v.24, p. 5-17, 1986.

KIRYU, H. S. **Investigação reológica e análise mecânica de compósitos não Newtonianos**. 2006. 204f. Dissertação (Mestrado em Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2006.

KRANENBURG, C. On the evolution of roll waves. **Journal of Hydraulic Research**, Delft, v. 245, p. 249-261, 1992.

LAMBERTI, A. ; LONGO, S. Dissipation of the waves and of the roll in the flow of the remains of the nei of the idriche and of the correnti (the roll waves and dissipation in over of the water and in the flow of the remains. In: PROCEEDINGS OF CONFERENCE OF THE

NATIONAL ON THE HYDRAULICS, GNDCI, 27, 2000, S.l. **Proceedings of the...** S.l.: S.n., 2000. v.1, p. 85-94.

LAX, P.D. Shock waves an entropy. In: ZERANTONELLO, E.H. (Ed.). **Contribution to non-linear functional analysis**. New York: Academic Press, 1971.

LIU, K.; MEI, C.C. Roll waves on a layer of a muddy fluid flowing down a gentle slope: a bingham model. **Physics of Fluids**, New York, v.6, p. 2577-2590, 1994.

LIU, Q.; CHEN, L., LI, J.; SINGH, V. Roll waves in overland flow. **Journal of Hydrology Engineering**, Reston, v.10, p.110 -117, 2005.

LONGO, S. The **roll waves in a shallow layer of remains modeled as a liquid dilatant**. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON IT REST-FLOWS MITIGATION OF THE DANGERS, 3, 2003, Davos. **Conferencia...** Davos: S.n., 2003.

MACIEL,G.F. **1º Relatório de atividades de pós-doutorado**. São Paulo: FAPESP, 1997. (FAPESP/INSA Toulouse - fevereiro/97).

MACIEL,G.F. **2º Relatório de atividades de pós-doutorado**. São Paulo: FAPESP, 1997. (FAPESP/INSA Toulouse - junho/97).

MACIEL,G.F. **3º Relatório de atividades de pós-doutorado**. São Paulo: FAPESP/INSA, 1997. (FAPESP/INSA Toulouse - junho/97).

MACIEL, G.F.; VILA, J.P.; MARTINET, G. **Roll Wave formation in the non Newtonian flows**. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, COBEM, 14, 1997, Bauru. **Anais...** Bauru: ABCM, 1997. p.98.

MACIEL,G.F. **Roll Waves evoluindo em canais de forte declividade: uma abordagem matemática com aproximação numérica**. Tese (Livre Docência) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2001.

MAYER, P.G.W. **A study of roll waves and slug flows in inclined open channels**. 1957. Dissertation (Dissertation) - Cornell University, Cornell, 1957.

MERKIN, J.H.; NEEDHAM, D.J. An infinite period bifurcation arising in roll waves down

open inclined channel. **Proceedings of the Royal Society London A**, London, v.405, p. 103-116, 1985/1986.

MERKT, F.S. et al. **Physical Review Letters**, New York, v.92, 184501, 2004.

MONTES, S. **Hydraulics of open channel flow**. Reston: ASCE, 1998.

MONTUORI, C. Discussion: stability aspect of flow in open channels. **Journal Hydraulics Division**, New York, v.89, p. 264-273, 1963.

NEEDHAM, D.; MERKIN, J. On roll waves down an open inclined channel. **Proceedings of the Royal Society London A**, London, v.394, p. 259- 278, 1983.

NG. C.; MEI.C.C . Roll waves on a shallow layer of mud modeled as a power-law fluid. **Journal Fluid Mechanics**, Cambridge, v.263, p.151-183, 1994.

NOBLE, P.; TRAVADEL, S. Non-persistence of roll-waves under viscous perturbations. **Discrete and Continuous Dynamical Systems . Series B**, Springfield, v.1, p. 61-70, 2001.

PASCAL, J.P. A two-layer model for a non-Newtonian gravity current subjected to wind shear. **Acta Mechanica**, New York, v.162, p. 83-98, 2003.

PASCAL, J.P.; D’ALESSIO, S.J.D. Instability of power-law fluid flows down an incline subjected to wind stress. **Applied Mathematical Modeling**, Canada, v.31, p.1229-1248, 2007.

PIAU, J.M. Flow of a yield stress fluid in a long domain, application to flow on an inclined plane. **Journal of Rheology**, New York, v.40, p. 711-723, 1996.

PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W.T.; FLANNERY, B. P. **Numerical recipes in C: the art of scientific computing**. 2.ed. Cambridge: Cambridge University, 1997.

SANTOS, L.F. **Estudo teórico – experimental em via de determinação de lei de atrito em escoamentos de fluidos hiperconcentrados**. 2003. 116 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2003

SIMPSON, J.E. **Gravity currents in the environment and the laboratory**. 2.ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.

STOKER, J.J. Mathematical hydraulics. In: __. **Water waves**. New York: Wiley Interscience, 1957. p. 451-509.

THOMAS, H. A. The propagation of the waves in canalizations steep prismatic. In: PROCEEDINGS OF THE HYDRAULIC CONFERENCE, 1939, Iowa. **Proceedings of the...** Iowa: Univ. Of Iowa, 1939. p. 214-229.

VANLEER B. Toward the ultimate conservative difference scheme. **Journal of Comp. Phys.** v.32, p.101-136, 1981.

VILA, J.P. Simplified godounov schemes for (2,2) systems of conservation laws. **SIAM Journal Numerical Anal**, Philadelphia, v.23, n.6, p.1173-1192, 1986.

YIH, S.C. Stability of liquid ow down an inclined plane. **Physics of Fluids**, New York, v.6, p.321, 1963.

YOON, Y. N.; WENZEL JR., H. G. Mechanics of sheet flow under simulated rainfall. **Journal Hydraulic Division**, New York, v. 979, p.1367–1386, 1971

YU, J.; KEVORKIAN, J.; Nonlinear evolution old small disturbances into roll waves in a inclined open channel. **Journal of Fluids Mechanics**, Cambridge, v.243, p. 575-594, 1992.

ZANUTTIGH, B.; LAMBERTI, A. Roll Waves simulation using shallow water equations and weighted average flux method. **Journal of Hydraulic Research**, Delft, v.40, p. 610-622, 2002.

ANEXO A

Equacionamento matemático para elaboração da equação da *Roll Waves* na Reologia Herschel-Bulkley, segundo Ferreira (2006).

Equações utilizadas:

- Equação da conservação da massa:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

- Equação da quantidade de movimento:

Na direção x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right)$$

Na direção y :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right)$$

Na direção z :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) - g$$

Modelo Reológico de Herschel-Bulkley:

$$\tau = \tau_c + K_n \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^n$$

Condições de contorno

Condições de impermeabilidade

No fundo do canal:

$$w(h_1) = \frac{\partial h_1}{\partial t} + u h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x}$$

Na superfície livre:

$$w(h_2) = \frac{\partial h_2}{\partial t} + u h_2 \frac{\partial h_2}{\partial x}$$

Sendo:

h_1 : cota no fundo do canal

h_2 : cota na superfície livre

Pressão hidrostática

Pode-se definir as seguintes grandezas adimensionais, a saber:

escala de comprimento: $(Ox, Oy, Oz) = (L x^*, \lambda y^*, H z^*)$

escala de velocidades: $(u, v, w) = \left[(\sqrt{gL}) u^*, \left(\frac{\lambda}{L} \sqrt{gL} \right) v^*, \left(\frac{H}{L} \sqrt{gL} \right) w^* \right]$

escala de tempo: $t = \sqrt{\frac{L}{g}} t^*$

Pressão: $P = \rho g H \cos(\theta) P^*$

Tensão de cisalhamento: $\tau_c = \rho g H \cos(\theta) \tau_c^*$

Sendo:

θ : declividade média

Inserindo os grupos adimensionais na equação da quantidade de movimento, na direção z, tem-se:

1º) Membro:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial u w}{\partial x} + \frac{\partial v w}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} &= \\ &= \left(\frac{h}{L} \sqrt{gL} \sqrt{\frac{g}{L}} \right) \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \sqrt{gL} \frac{h}{L^2} \sqrt{gL} \frac{\partial u^* w^*}{\partial x^*} + \frac{\lambda}{L} \sqrt{gL} \frac{h}{L} \frac{\sqrt{gL}}{\lambda} \frac{\partial v^* w^*}{\partial y^*} + \frac{h^2}{L^2} g \frac{L}{h} \frac{\partial w^{*2}}{\partial z} = \\ &= \frac{hg}{L} \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \frac{hg}{L} \frac{\partial u^* w^*}{\partial x^*} + \frac{hg}{L} \frac{\partial v^* w^*}{\partial y^*} + \frac{hg}{L} \frac{\partial w^{*2}}{\partial z^*} = \\ &= \frac{hg}{L} \left(\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^* w^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^* w^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^{*2}}{\partial z^*} \right) \end{aligned}$$

2º) Membro:

$$= -g + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}$$

Introduzindo os tensores , tem-se:

$$\begin{aligned} &= -g + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_c + K_n \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^n \right) \right] + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_c + K_n \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^n \right) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho + 2K_n \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

Admitindo que K e τ_c são independentes de x,y e z, tem-se:

$$= -g + \frac{K_n}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^n \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_c}{\partial y} + \frac{K_n}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^n \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{2K_n}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (*)$$

Introduzindo os adimensionais em (*), tem-se:

$$\begin{aligned} & -g + \left(\frac{h^2}{L} \sqrt{gL} \right) v^* n \left(\frac{h \sqrt{gL}}{L} \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + \frac{\sqrt{gL}}{h} \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right)^{n-1} \left(\frac{h \sqrt{gL}}{L} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\sqrt{gL}}{Lh} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^* \partial z^*} \right) + \\ & + \left(\frac{h^2}{L} \sqrt{gL} \right) v^* n \left(\frac{\lambda \sqrt{gL}}{Lh} \frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{h \sqrt{gL}}{L} \frac{\partial w^*}{\partial y^*} \right)^{n-1} \left(\frac{\lambda \sqrt{gL}}{Lh\lambda} \frac{\partial v^*}{\partial y^* \partial z^*} + \frac{h \sqrt{gL}}{L\lambda^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} \right) - \\ & - \frac{1}{\rho} \frac{\rho g h \cos(\theta)}{h} \frac{\partial P}{\partial z^*} + 2 \frac{h^2 \sqrt{gL}}{L} \frac{h \sqrt{gL}}{Lh^2} v^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} \quad (**)$$

Considerando:

$$a = n \left(\frac{h \sqrt{gL}}{L} \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + \frac{\sqrt{gL}}{h} \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right)^{n-1}$$

$$b = n \left(\frac{\lambda \sqrt{gL}}{Lh} \frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{h \sqrt{gL}}{L} \frac{\partial w^*}{\partial y^*} \right)^{n-1}$$

A relação (**), fica:

$$\begin{aligned} & -g + av^* \frac{h^2}{L} \sqrt{gL} \left(\frac{h \sqrt{gL}}{L^3} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\sqrt{gL}}{Lh} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^* \partial z^*} \right) + \\ & + bv^* \frac{h^2}{L} \sqrt{gL} \left(\frac{\sqrt{gL}}{Lh} \frac{\partial v^*}{\partial y^* \partial z^*} + \frac{h \sqrt{gL}}{L} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} \right) - g \cos(\theta) \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + 2 \frac{hg}{L} v^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} \end{aligned}$$

$$-g + av^* \left[g \left(\frac{h}{L} \right)^3 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{hg}{L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^* \partial z^*} \right] + bv^* \left[\frac{hg}{L} \frac{\partial v^*}{\partial y^* \partial z^*} + \frac{hg}{L} \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} \right] -$$

$$-g \frac{\partial P^*}{\partial z^*} + 2 \frac{hg}{L} v^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}}$$

Considerando a hipótese $\frac{H}{L} \ll 1$ e $\left(\frac{H}{\lambda} \right) \ll 1$ e dividindo todos os termos por g. A

igualdade fica:

$$0 = -1 - \cos(\theta) \frac{\partial P^*}{\partial z^*}$$

Retornando as variáveis dimensionais, têm-se:

$$P^* = \frac{P}{\rho g H \cos(\theta)}, \quad z^* = \frac{z}{H}$$

$$\frac{1}{\rho g H \cos \theta} H \frac{\partial P}{\partial z} = -1 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \cos(\theta)$$

Portanto:

$$\int_{h_1}^{h_2} dP = -\rho g \cos(\theta) \int_{h_1}^{h_2} dz = -\rho g \cos(\theta) (h_2 - h_1)$$

$$P(z) = -\rho g \cos \theta (h_2 - h_1)$$

Sendo:

h_2 : profundidade do escoamento

h_1 : cota no fundo do canal

Modelo Matemático

Integrando as equações da conservação da massa e da quantidade de movimento, aplicando as condições de contorno e o conceito de pressão hidrostática, o sistema de equações é dado por:

Conservação da massa

$$\frac{\partial \bar{u}h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

Conservação da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial \bar{u}h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2 h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-g \cos(\theta) \frac{h^2}{2} \right) + g h \operatorname{sen}(\theta) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \int_{h_i}^{h_f} T_{xz} dz$$

Aplicando a condição de contorno $T_{xz} = 0$, na superfície livre, tem-se:

$$\frac{\partial \bar{u}h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2 h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-g \cos(\theta) \frac{h^2}{2} \right) + g h \operatorname{sen}(\theta) + \frac{1}{\rho} [-\tau_p]$$

onde:

h : profundidade do escoamento;

\bar{u} : velocidade média na vertical;

θ : declividade do canal;

ρ : massa específica do fluido;

τ_p : tensão cisalhamento.

Perfil de velocidade do escoamento:

Para um escoamento permanente, uniforme, laminar de um fluido incompressível,

em um canal inclinado, usando o modelo reológico de Herschel-Bulkley, tem-se:

$$\rho g \operatorname{sen}(\theta)(h-z) = \tau_c + K_n \left(\frac{du}{dz} \right)^n$$

Integrando:

Região Cisalhada:

$$u(z) = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\rho g \operatorname{sen}(\theta) z_0^{n+1}}{K_n} \right)^{\frac{1}{n}} \left[1 - \left(1 - \frac{z}{z_0} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad 0 \leq z \leq z_0$$

Região não Cisalhada:

$$u(z) = u(z_0) = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\rho g \operatorname{sen}(\theta)}{K_n} \right) z_0^{1+n/n} \quad z_0 \leq z \leq h$$

onde:

$$z_0 = h - \frac{\tau_c}{\rho g \operatorname{sen}(\theta)}$$

Velocidade Média:

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u dz$$

$$\bar{u} = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\rho g \operatorname{sen}(\theta)}{K_n} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{h \rho g \operatorname{sen}(\theta) - \tau_c}{\rho g \operatorname{sen}(\theta)} \right)^{\frac{n+1}{n}} \left[1 - \frac{n}{2n+1} \left(\frac{h \rho g \operatorname{sen}(\theta) - \tau_c}{h \rho g \operatorname{sen}(\theta)} \right) \right]$$

Sendo n o índice de escoamento do fluido e K_n o índice de consistência do fluido.

Portanto o modelo matemático é dado por:

Conservação da massa:

$$\frac{\partial \bar{u}h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

Conservação da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial \bar{u}h}{\partial t} + \frac{\partial \alpha \bar{u}^2 h}{\partial x} + \frac{1}{2} g \cos \theta \frac{\partial h^2}{\partial x} = g h \operatorname{sen} \theta - \frac{\tau_c}{\rho} -$$

$$- \frac{K_n}{\rho} \left[\frac{\bar{u} (\rho g \operatorname{sen} \theta)^2 (n+1)(2n+1) h}{(h \rho g \operatorname{sen} \theta - \tau_c)(n(n+1)\rho g \operatorname{sen} \theta + n^2 \tau_c)} \right]^n$$

Sendo:

h : profundidade do escoamento;

\bar{u} : velocidade média na vertical;

θ : declividade do canal;

ρ : massa específica do fluido;

μ : viscosidade do fluido;

τ_c : tensão crítica (rigidez inicial);

$\alpha = \frac{\overline{u^2}}{\bar{u}^2}$ (coeficiente de distribuição de velocidade).

Adimensionalização das Equações:

- escala de comprimento: $x = l_0 x^*$ e $(h, z) = h_0 (h^*, z^*)$

- escala de velocidades: $u = u_0 u^*$

- escala de tempo: $t = \frac{l_0}{u_0} t^*$

- número de froude: $Fr = \frac{\bar{u}_0^2}{(gh_0)}$

onde:

$$l_0 = \frac{\bar{u}_0^2}{g \sin \theta}$$

$$\bar{u}_0 = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\rho g \sin \theta}{K_n} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{h_0 \rho g \sin \theta - \tau_c}{\rho g \sin \theta} \right)^{\frac{n+1}{n}} \left[1 - \frac{n}{2n+1} \left(\frac{h_0 \rho g \sin \theta - \tau_c}{h_0 \rho g \sin \theta} \right) \right]$$

Introduzindo as variáveis adimensionais no sistema de equações determinado, tem-se:

Conservação da massa

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} = 0$$

Conservação da quantidade de movimento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} - (\alpha - 1) \frac{u}{h} \frac{\partial h}{\partial t} + \beta \frac{\partial h}{\partial x} = \\ = 1 - C^* - (1 - C^*) \left\{ \left[\frac{u(1 - C^*)}{h - C^*} \right] \left[\frac{((n+1) + nC^*)h}{(n+1)h + nC^*} \right] \right\}^n \end{aligned}$$

Onde:

$$C^* = \frac{\tau_c}{h_0 \rho g \sin \theta}$$

$$\alpha = \frac{(2n+1)}{(3n+2)} \frac{\left[2(n+1)^2 h^* h_0 \rho g \sin \theta + \tau_c n (4n+3) \right]}{\left[(n+1)^2 h^* h_0 \rho g \sin \theta + 2(n+1)n \tau_c + \frac{n^2 \tau_c^2}{h^* h_0 \rho g \sin \theta} \right]}$$

Equação das *Roll Waves*:

Por hipótese, tem-se:

$z = x - UT$, sendo que U representa uma velocidade constante de propagação (celeridade), podendo estabelecer as seguintes relações:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} = -U \frac{\partial u}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial \zeta} = 1 \frac{\partial u}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} = -U \frac{\partial h}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial \zeta} = 1 \frac{\partial h}{\partial x'}$$

Assim o sistema de equações fica:

Conservação da massa:

$$h(u - U) = 1 - U$$

Conservação da quantidade de movimento:

$$-U \frac{\partial u}{\partial x'} + \alpha u \frac{\partial h}{\partial x'} + (\alpha - 1) U \frac{u}{h} \frac{\partial h}{\partial x'} + \beta \frac{\partial h}{\partial x'} = 1 - \frac{\tau_c}{h \rho g \sin \theta} - \frac{1}{h} \left(1 - \frac{\tau_c}{h_0 \rho g \sin \theta} \right) \times$$

$$\times \left\{ \left[\frac{u(h_0 \rho g \sin \theta - \tau_c)}{h_0 \rho g \sin \theta - \tau_c} \right] \left[\frac{((n+1)h_0 \rho g \sin \theta + n \tau_c)h}{(n+1)h_0 h \rho g \sin \theta + n \tau_c} \right] \right\}^n$$

Eliminando a variável u e substituindo a equação da conservação da massa na equação da conservação da quantidade de movimento, tem-se:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h - C^* - (1 - C^*) \left\{ \left[\frac{(1+U(h-1))(1-C^*)}{(h-C^*)} \right] \left[\frac{(n+1)+n^*C^*}{(n+1)h+n^*C^*} \right] \right\}^n}{\left((\alpha-1)U^2 - \frac{\alpha(1-U)^2}{h^2} + \beta h \right)}$$

Sendo:

$$\beta = \frac{gh_0 \cos \theta}{\bar{u}_0^2} = \frac{1}{Fr^2}$$

$$C^* = \frac{\tau_c}{h_0 \rho g \sin \theta}$$

$$\alpha = \frac{(2n+1)}{(3n+2)} \left[\frac{2(n+1)^2 h + C^* (4n+3)n}{(n+1)^2 h + 2(n+1)nC^* + n^2 (C^*)^2 / h} \right]$$

APÊNDICE A

Programas:

Programa Elaborado em Fortran para formação de Roll Waves em Escoamentos Laminares.

! ENTRADA DE DADOS

```
module dados
implicit none
```

```
real(8), parameter :: fltN = 0.4d0, fltBeta = 1.d0 , fltU = 2.1744d0, fltCStar = 0.1d0,
fltH_ZAO = 1.d0, fltY0 = 0.65d0
```

```
end module dados
```

```
program prgAdriana01
use numerical_libraries
use dados, only : fltY0
```

```
implicit none
```

```
external sbrtFCN, fctK
```

```
integer(4) :: intI, intIDO, irule
```

```
integer(4), parameter :: intN = 1_4, intSTEPS = 10000
```

```
real(8), parameter :: fltT_INIC = 0.0d0, fltT_MAX = 100.d0, fltTol = 1.d-6
```

```
real(8)          :: fltT, fltT_END, fltDelta, fltH1, fltH2, fctH2
real(8)          :: errabs, errel, lambda, errest
```

```
real(8), dimension(intN) :: fltY, fltYPRIME
```

```
real(8), parameter    :: fltHINIT = 1.d-3, fltHMIN = 1.d-10, fltHMAX = 0.1d0, &
                        fltMXSTEP = 8000, fltMXFCN = 10000, fltINORM = 1.d0
```

```
real(8), dimension(50) :: fltPARAM
```

```
irule = 2
errabs = 1.d-7
errel = 1.d-7

open (unit = 1, file = "adriana.dat")

fltPARAM(1) = fltHINIT
fltPARAM(2) = fltHMIN
fltPARAM(3) = fltHMAX
fltPARAM(4) = fltMXSTEP
fltPARAM(5) = fltMXFCN
fltPARAM(10) = fltINORM

intIDO = 1

fltH1 = fltY0
fltH2 = fcth2()

call dqdag(fctK, fltH1, fltH2, errabs, errel, irule, lambda, errest)

write(*,*) "lambda = ", lambda

fltDelta = (fltT_MAX - fltT_INIC)/ real(intSTEPS - 1)

fltT = fltT_INIC
fltT_END = fltT + fltDelta

fltY(1) = fltY0

do intI = 1, intSTEPS
    call divprk(intIDO, intN, sbtrFCN, fltT, fltT_END, fltTOL, fltPARAM, fltY)
    write(*,*) intI, fltT, fltY(1)
    write(1,*) fltT, fltY(1)

    fltT = fltT_END
    fltT_END = fltT + fltDelta
    intIDO = 2

    if(fltY(1) >= fltH2) fltY(1) = fltY0

end do

close(1)

stop
end program
```

! ROTINA PARA CALCULAR O VALOR DE ALFA

subroutine sbrtFCN(intN, fltT, fltY, fltYPRIME)

use numerical_libraries

use dados, only : fltN, fltH_ZAO, fltCStar, fltU, fltBeta

implicit none

integer(4), intent(in) :: intN

real(8), intent(in) :: fltT

real(8), dimension(1) :: fltY

real(8), dimension(1) :: fltYPRIME

real(8) :: fltAlfa, fltAux1, fltAux2, fltAux3, fltAux4, fltAux5, fltAux6, fltAux4x

real(8), parameter :: fltT_INIC = 0.0d0, fltT_MAX = 100.d0, fltTol = 1.d-7

fltAux1 = (2.d0*((fltN + 1.d0)**2)*fltH_ZAO + fltCStar*(4.d0*fltN +
3.d0)*fltN)*(2.d0*fltN + 1.d0)

fltAux2 = ((fltN + 1.d0)**2)*fltH_ZAO + 2.d0*(fltN + 1.d0)*fltN*fltCStar +
((fltN*fltCStar)**2)/fltH_ZAO

fltAux3 = 3.d0*fltN + 2.d0

fltAlfa = fltAux1/(fltAux2*fltAux3)

fltAux4x = 1.d0 + fltU*(fltY(1) - 1.d0)

fltAux4 = fltAux4x*(1.d0 - fltCStar)/(fltY(1) - fltCStar)

fltAux5 = (fltN + 1.d0 + fltN*fltCStar)/((fltN + 1.d0)*fltY(1) + fltN*fltCStar)

fltAux6 = ((fltAlfa - 1.d0)*fltU**2) - (fltAlfa*((1.d0 - fltU)**2)/(fltY(1)**2)) +
fltBeta*fltY(1)

fltYPRIME(1) = (fltY(1) - fltCStar - (1.d0 - fltCStar)*((fltAux4*fltAux5)**fltN))/fltAux6

return

end subroutine sbrtFCN

! ROTINA UTILIZADA PARA DETERMINAR O LIMITE DE INTEGRAÇÃO h_2

```
real(8) function fcth2()
```

```
use dados, only : fltN, fltH_ZAO, fltCStar, fltU, fltBeta, fltY0
```

```
implicit none
```

```
real(8)          :: fltAlfa, fltAux1, fltAux2, fltAux3, fltAux4, fltAux5, fltAux6, fltAux4x
```

```
real(8), parameter :: fltT_INIC = 0.0d0, fltT_MAX = 100.d0, fltTol = 1.d-7
```

```
fltAux1 = (2.d0*((fltN + 1.d0)**2)*fltH_ZAO + fltCStar*(4.d0*fltN +  
3.d0)*fltN)*(2.d0*fltN + 1.d0)
```

```
fltAux2 = ((fltN + 1.d0)**2)*fltH_ZAO + 2.d0*(fltN + 1.d0)*fltN*fltCStar +  
((fltN*fltCStar)**2)/fltH_ZAO
```

```
fltAux3 = 3.d0*fltN + 2.d0
```

```
fltAlfa = fltAux1/(fltAux2*fltAux3)
```

```
if (fltBeta == 0.d0) then
```

```
    fcth2 = (fltAlfa*(1.d0 - fltU)**2)/((fltAlfa - 1.d0)*fltY0*fltU**2)
```

```
else
```

```
    fltAux4 = ((fltY0/2.d0 + (fltAlfa - 1.d0)*(fltU**2)/fltBeta))**2 + (2.d0*fltAlfa*(1.d0-  
fltU)**2)/(fltY0*fltBeta)
```

```
    fltAux5 = -fltY0/2.d0 -(fltAlfa - 1.d0)*(fltU**2)/fltBeta
```

```
    fcth2 = dsqrt(fltAux4) + fltAux5
```

```
end if
```

```
return
```

```
end function fcth2
```

! ROTINA UTILIZADA PARA DETERMINAR O VALOR DE G(h)

```
real(8) function fctG(fltX)
```

```
use dados, only : fltN, fltH_ZAO, fltCStar, fltU, fltBeta, fltY0
```

```
real(8)          :: fltAlfa, fltAux1, fltAux2, fltAux3, fltAux4, fltAux5, fltAux6, fltAux4x
```

```
real(8) :: fltX
```

```
real(8), parameter :: fltT_INIC = 0.0d0, fltT_MAX = 100.d0, fltTol = 1.d-7
```

```
fltAux1 = (2.d0*((fltN + 1.d0)**2)*fltH_ZAO + fltCStar*(4.d0*fltN +  
3.d0)*fltN)*(2.d0*fltN + 1.d0)
```

```
fltAux2 = ((fltN + 1.d0)**2)*fltH_ZAO + 2.d0*(fltN + 1.d0)*fltN*fltCStar +
```

“Um Panorama sobre Roll Waves em Escoamentos Laminares e Turbulentos com Superfície Livre”.

```
((fltN*fltCStar)**2)/fltH_ZAO  
fltAux3 = 3.d0*fltN + 2.d0  
fltAlfa = fltAux1/(fltAux2*fltAux3)  
fctG = ((fltAlfa - 1.d0)*fltU**2) - (fltAlfa*((1.d0 - fltU)**2)/(fltX**2)) + fltBeta*fltX  
return  
end function fctG
```

! ROTINA UTILIZADA PARA DETERMINAR O VALOR DE F(h)

```
real(8) function fctF(fltX)  
use dados, only : fltN, fltH_ZAO, fltCStar, fltU, fltBeta, fltY0  
  
real(8)      :: fltAlfa, fltAux1, fltAux2, fltAux3, fltAux4, fltAux5, fltAux6, fltAux4x  
  
real(8) :: fltX  
real(8), parameter :: fltT_INIC = 0.0d0, fltT_MAX = 100.d0, fltTol = 1.d-7  
  
fltAux1 = (2.d0*((fltN + 1.d0)**2)*fltH_ZAO + fltCStar*(4.d0*fltN +  
3.d0)*fltN)*(2.d0*fltN + 1.d0)  
  
fltAux2 = ((fltN + 1.d0)**2)*fltH_ZAO + 2.d0*(fltN + 1.d0)*fltN*fltCStar +  
((fltN*fltCStar)**2)/fltH_ZAO  
  
fltAux3 = 3.d0*fltN + 2.d0  
  
fltAlfa = fltAux1/(fltAux2*fltAux3)  
  
fltAux4x = 1.d0 + fltU*(fltX - 1.d0)  
  
fltAux4 = fltAux4x*(1.d0 - fltCStar)/(fltX - fltCStar)  
  
fltAux5 = (fltN + 1.d0 + fltN*fltCStar)/((fltN + 1.d0)*fltX + fltN*fltCStar)  
  
fctF = (fltX - fltCStar - (1.d0 - fltCStar)*((fltAux4*fltAux5)**fltN))  
  
return  
end function fctF
```

! ROTINA UTILIZADA PARA DETERMINAR O VALOR DO COMPRIMENTO DA ONDA

```
real(8) function fctK(fltX)  
implicit none
```



```
real(8) :: fctF, fctG, fltX  
  
fctK = fctG(fltX)/fctF(fltX)  
  
return  
end function fctK
```

! Utilizando-se dos valores deteminados por este programa, foi utilizado o software Origin 6.0 para plotar os gráficos.

Rotinas elaboradas em Matlab para determinar o valor da velocidade de propagação U em função das demais variáveis.

```
%Programa para calcular a velocidade de propagação da Roll Wave num ponto  
%critico hc a ser utilizado em escoamentos laminares.  
clear  
clc  
  
h=1;  
beta=1;  
ce=0.1;  
n=0.2;  
alfa = (((2*h*(n+1)^2)+ce*(4*n+3)*n)*(2*n+1))/((((h*(n+1)^2))+2*ce*n*(n+1)+  
+((n*ce)^2)/h)*(3*n+2));  
alfa  
c = -((h-ce/1-ce)^(1+n/n))*((h*(n+1)+n*ce)/((n+1)+n*ce))*(alfa-1)-(alfa*(alfa-1))*((h-ce/1-  
ce)^(2*(1+n)/n))*((h*(n+1)+n*ce)/(n+1+n*ce))+beta*h^3)^0.5;  
c  
U = ((h-ce/1-ce)^(1+n/n))*((h*(n+1)+n*ce)/((n+1)+n*ce))*(1/h)-(c/h);  
U
```