

**JULIANA VIEIRA PINTO**

**COMPARAÇÃO DE MODELOS PARA O CÁLCULO DE  
PERTURBAÇÕES ORBITAIS DEVIDAS À MARÉ TERRESTRE**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para a obtenção do título de Mestre em Física na área de Dinâmica Orbital e Planetologia.

**Orientador: Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes**

Guaratinguetá  
2005

**UNESP**  **UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá

**COMPARAÇÃO DE MODELOS PARA O CÁLCULO DE  
PERTURBAÇÕES ORBITAIS DEVIDAS À MARÉ TERRESTRE**

***JULIANA VIEIRA PINTO***

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE  
“MESTRE EM FÍSICA”

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-  
GRADUAÇÃO

Prof. Dr. DENIS DALMAZI  
Coordenador

***BANCA EXAMINADORA:***

**Prof. Dr. RODOLPHO VILHENA DE MORAES**  
Orientador/UNESP-FEG

**Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. M<sup>a</sup> CECÍLIA FRANÇA P. S. ZANARDI**  
UNESP/FEG

**Prof. Dr. HÉLIO K. KUGA**  
INPE

Julho de 2005

## **DADOS CURRICULARES**

**JULIANA VIEIRA PINTO**

NASCIMENTO	18.09.1967 – SÃO PAULO / SP
FILIAÇÃO	Júlio Vieira Rosa Bokor Vieira Xavier
1985/1988	Curso de Graduação Matemática - UNITAU
1993/1997	Curso de Graduação Engenharia Civil - UNITAU
2003/2005	Curso de Pós-Graduação em Física, nível de Mestrado, na Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá – UNESP.

*Aos meus queridos filhos, Gustavo e  
Guilherme, fontes de minha inspiração.*

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a *Deus*, fonte da vida e da graça. Agradeço pela minha vida, minha família e meus amigos,

ao meu orientador, *Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes* que jamais deixou de me incentivar. Sem a sua orientação, dedicação, auxílio e carinho, o estudo aqui apresentado seria praticamente impossível;

aos meus pais, *Júlio e Rosa*, pelo exemplo de coragem, determinação, humildade e amor. Obrigada por sempre incentivarem meus estudos e por sempre me ajudarem nas horas mais difíceis de minha vida;

aos meus irmãos, *Vera (i.m.), Júlia e Julinho*, por tudo que fizeram e ainda fazem por mim;

ao *Luiz Américo*, especialmente, pelo grande apoio que me deu para que essa monografia fosse concluída;

à *Andresa Fernanda*, pela sua amizade e dedicação;

às minhas amigas *Denise e Ana Lúcia*, pelo grande incentivo;

aos *Professores da Feg*, pelo muito que me ensinaram;

aos *Colegas da Pós Graduação*, pela grande amizade e carinho que sempre tiveram por mim.



Este trabalho contou com o apoio financeiro da CNPq:

CONSELHO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO E  
TECNOLÓGICO

*“Diante da vastidão do tempo e  
da imensidão do espaço é uma alegria para mim  
compartilhar uma época e um planeta com você”*

*(Carl Sagan)*

PINTO, J. V. **Comparação de modelos para o cálculo de perturbações orbitais devidas à maré terrestre.** 2005, 201f. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá.

## **RESUMO**

Aplicações recentes de satélites artificiais da Terra com finalidades geodinâmicas requerem órbitas determinadas com bastante precisão. Em particular, marés terrestres influenciam o potencial terrestre causando perturbações adicionais no movimento de satélites artificiais, as quais têm sido medidas por diversos processos. A atração exercida pela Lua e pelo Sol sobre a Terra produz deslocamentos elásticos em seu interior e uma protuberância em sua superfície. O resultado é uma pequena variação na distribuição da massa na Terra, conseqüentemente alterando o geopotencial. As perturbações nos elementos orbitais de satélites artificiais terrestres devidas à maré terrestre podem ser estudadas a partir das equações planetárias de Lagrange, considerando-se um potencial conveniente. Alguns modelos têm sido propostos para o cálculo de perturbações orbitais devidas à maré, tais como os modelos de Kaula, de Kozai, de Balmino e o utilizado pelo IERS. Os resultados encontrados na literatura são, em geral difíceis de serem comparados, pois os cálculos são feitos com diferentes modelos. Neste trabalho são apresentadas, para os potenciais mencionados, as expressões analíticas em forma expandida. Alguns cenários são propostos mostrando, para tais modelos, as diferenças nas perturbações de longo período e seculares, nos elementos orbitais de satélites artificiais, devidas à maré terrestre.

**PALAVRAS-CHAVE:** Marés terrestres, perturbações orbitais, satélites artificiais.



**PINTO, J. V. Comparison of models for the calculation of orbital perturbation due to the terrestrial tide.** 2005, 201f. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá.

## **ABSTRACT**

Recent applications of artificial Earth's satellites, as for instance with geodynamics purposes, require very high precision orbit determination. In particular, terrestrial tides affects the geopotential causing additional orbital perturbations that can be measured by several methods. The Sun and Moon attraction on the Earth produces both an elastic displacements in the Earth's interior and a bulge in its surface. The resulting effect is a small variation in the Earth's mass distribution. The perturbations in the orbital elements due to the terrestrial tides can be analysed using the Lagrange planetary equations considering a convenient potential. Some models have been proposed to compute orbital perturbations due to the terrestrial tides, such as the models proposed by Kozai, Kaula, Balmino and the model used by the IERS. The results found in the literature about orbit perturbations due to terrestrial tides were obtained using different models being difficult to be compared. In this work the above-referred models are presented. Expanded analytical expressions are presented. Some scenarios are proposed showing, for such models, the differences in the secular and long period perturbations of the orbital elements, due to the terrestrial tides.

**KEYWORDS:** Earth tides, orbit perturbations, artificial satellites.

# SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	
LISTA DE SÍMBOLOS	
LISTA DE TABELAS	
<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	20
<b>2. CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS</b> .....	23
2.1. MARÉS.....	23
2.2. PERTURBAÇÕES EM SATÉLITES ARTIFICIAIS DEVIDO À MARÉ.....	31
2.3. OS NÚMEROS DE LOVE.....	33
2.4. RELEVÂNCIA DA PESQUISA.....	35
<b>3. OBJETIVO</b> .....	37
3.1. METODOLOGIA.....	38
<b>4. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	39
<b>5. MECANISMO BÁSICO DO BOJO DEVIDO À MARÉ</b> .....	42
<b>6. POTENCIAL DEVIDO À MARÉ</b> .....	46
<b>7. MÉTODOS FUNDAMENTAIS DE PERTURBAÇÃO</b> .....	57
7.1. EQUAÇÕES PLANETÁRIAS DE LAGRANGE.....	59
<b>8. MODELO DE KOZAI</b> .....	61
8.1. POTENCIAL TERRESTRE DEVIDO À MARÉ.....	61
<b>9. FUNÇÃO PERTURBADORA – MODELO DE KOZAI</b> .....	68
9.1. PERTURBAÇÕES SECULARES.....	69
9.2. VARIAÇÕES NOS ELEMENTOS ORBITAIS.....	71
9.2.1. RESULTADOS.....	74
<b>10. MODELO DE KAULA</b> .....	87
10.1. EFEITOS EM ÓRBITAS DE SATÉLITES PRÓXIMOS A TERRA.....	91
<b>11. FUNÇÃO PERTURBADORA – MODELO DE KAULA</b> .....	94
11.1. PERTURBAÇÕES SECULARES.....	94
11.2. VARIAÇÕES DOS ELEMENTOS ORBITAIS.....	95
11.2.1. RESULTADOS.....	97
<b>12. MODELO DE BALMINO</b> .....	107
<b>13. FUNÇÃO PERTURBADORA – MODELO DE BALMINO</b> .....	111
13.1. VARIAÇÕES NOS ELEMENTOS ORBITAIS.....	111
13.1.1. RESULTADOS.....	113
<b>14. MODELO DO IERS</b> .....	115
<b>15. VARIAÇÕES NOS ELEMENTOS ORBITAIS – MODELO DO IERS</b> .....	118

15.1. RESULTADOS.....	120
<b>16. APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS</b> .....	132
<b>17. CONSIDERAÇÕES</b> .....	133
17.1. RESSONÂNCIAS.....	133
<b>18. CONCLUSÃO</b> .....	136
18.1. TRABALHOS FUTUROS.....	139
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	140
<b>APÊNDICE A</b> .....	144
<b>APÊNDICE B</b> .....	158
<b>APÊNDICE C</b> .....	197
<b>APÊNDICE D</b> .....	200

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1 -</b>	O Space Shuttle é um excelente exemplo de um satélite de órbita terrestre baixa. Sua órbita cerca de 100 km a 200 km à superfície da Terra.....	22
<b>Figura 2.1.1 -</b>	Sistema de rotação Terra-Lua.....	24
<b>Figura 2.1.2 -</b>	Rotação Terra - Lua.....	25
<b>Figura 2.1.3 -</b>	Bojo devido à maré.....	26
<b>Figura 2.1.4 -</b>	(a) Forças gravitacionais exercidas pela Lua na Terra. (b) Força da maré.....	27
<b>Figura 2.1.5 -</b>	Bojo devido à maré(a) marés vivas. (b) marés mortas.....	28
<b>Figura 2.1.6 -</b>	Variação da declinação da Lua: ciclo de 18,6 anos.....	30
<b>Figura 5.1 -</b>	A existência de forças gravitacionais diferentes consoantes à posição de cada ponto em relação à Lua implica na existência da força de maré.....	42
<b>Figura 5.2 -</b>	Referente ao caso ideal, sendo a velocidade angular do planeta exatamente igual ao movimento orbital do satélite....	44
<b>Figura 5.3 -</b>	Referente ao caso real do sistema Terra-Lua, sendo a velocidade angular da Terra é maior que a velocidade do movimento médio orbital da Lua.....	44
<b>Figura 5.4 -</b>	Velocidade angular do planeta sendo menor que a velocidade do movimento angular do satélite. Esse caso é real para alguns planetas do Sistema Solar.....	45

<b>Figura 6.1 -</b>	Um planeta e satélite movendo ao redor de um centro de massa em órbita circular. O semi-eixo maior do planeta e do satélite, em relação ao centro de massa é $a_p$ e $a_s$ , respectivamente, enquanto que o semi-eixo maior do satélite em relação ao planeta é $a=a_p+a_s$ .....	47
<b>Figura 6.2 -</b>	Toda partícula do planeta move em círculos similares de raios idênticos $a_p$ , mas com centros diferentes. As partículas $P_1$ e $P_2$ estão nos círculos com centros $C_1$ e $C_2$ , respectivamente.....	48
<b>Figura 6.3 -</b>	Superfície equipotencial.....	50
<b>Figura 6.4 -</b>	(a) O eixo de simetria da distorção da maré passa através dos centros da Terra e da Lua, embora a Terra gire sobre o eixo $z$ com velocidade angular $\omega$ , a Lua tem movimento $n$ e uma inclinação orbital $I$ , com relação ao plano equatorial da Terra. (b) As co-latitudes e longitudes da Lua ( $\phi_m, \lambda_m$ ) e o ponto $P(\phi_p, \lambda_p)$ na superfície da Terra. Note que a longitude $\lambda_p$ (e $\lambda_m$ ) é medida por uma direção fixa no espaço e não por uma direção que gira com a Terra.....	53
<b>Figura 6.5 -</b>	Forças de marés num ponto da superfície terrestre.....	54
<b>Figura 6.6 -</b>	Potencial terrestre.....	55
<b>Figura 8.1 -</b>	Triângulo – órbita – equador – meridiano.....	64
<b>Figura 9.1 -</b>	Variação da longitude do nodo ascendente, levada em conta à inclinação da Lua.....	75
<b>Figura 9.2 -</b>	Variação do argumento do perigeu, levada em conta à inclinação da Lua.....	75
<b>Figura 9.3 -</b>	Representação da variação da excentricidade (caso1).....	77
<b>Figura 9.4 -</b>	Representação da variação da excentricidade (caso2).....	77
<b>Figura 9.5 -</b>	Representação da variação da inclinação (caso 1).....	78

<b>Figura 9.6 -</b>	Representação da variação da inclinação (caso2) com período de aproximadamente 6800 dias.....	76
<b>Figura 9.7 -</b>	Representação da variação da inclinação (caso2) com período de aproximadamente $2.4 \times 10^6$ dias.....	79
<b>Figura 9.8 -</b>	Representação da variação da inclinação (caso2) com período de aproximadamente $2.4 \times 10^6$ dias, desconsiderando-se o termo de maior amplitude.....	79
<b>Figura 9.9 -</b>	Representação da variação da inclinação (caso2) com menor período de aproximadamente 3400 dias.....	80
<b>Figura 9.10 -</b>	Representação da variação da longitude do nodo ascendente (caso1).....	80
<b>Figura 9.11 -</b>	Representação da variação da longitude do nodo ascendente (caso2), com um período de aproximadamente 6800 dias.....	81
<b>Figura 9.12 -</b>	Representação da variação da longitude do nodo ascendente (caso2), com um período de $2.4 \times 10^6$ dias.....	81
<b>Figura 9.13 -</b>	Representação da variação da longitude do nodo ascendente (caso2) com período de aproximadamente $2.4 \times 10^6$ dias, desconsiderando-se o termo de maior amplitude.....	82
<b>Figura 9.14 -</b>	Representação da variação da inclinação (caso2) com menor período de aproximadamente 3400 dias.....	82
<b>Figura 9.15 -</b>	Representação da variação do argumento do perigeu (caso1).	83
<b>Figura 9.16 -</b>	Representação da variação do argumento do perigeu (caso2).	83
<b>Figura 9.17 -</b>	Representação da variação do argumento do perigeu (caso2), na região de máximo, com menor período de aproximadamente 6800 dias.....	84
<b>Figura 9.18 -</b>	Representação da variação do argumento do perigeu (caso2), na região de mínimo, com menor período de aproximadamente 6800 dias.....	84

<b>Figura 11.1</b> -	Variação secular da longitude do nodo ascendente, levada em conta à inclinação da Lua.....	98
<b>Figura 11.2</b> -	Variação secular do argumento do perigeu, levada em conta à inclinação da Lua.....	98
<b>Figura 11.3</b> -	Representação da variação da excentricidade (caso1).....	100
<b>Figura 11.4</b> -	Representação da variação da excentricidade (caso2).....	100
<b>Figura 11.5</b> -	Representação da variação da inclinação (caso1).....	101
<b>Figura 11.6</b> -	Representação da variação da inclinação (caso2).....	101
<b>Figura 11.7</b> -	Representação da variação da inclinação (caso2), desconsiderando-se termos de maior amplitude.....	102
<b>Figura 11.8</b> -	Representação da variação da longitude do nodo ascendente (caso1).....	102
<b>Figura 11.9</b> -	Representação da variação da longitude do nodo ascendente (caso2).....	103
<b>Figura 11.10</b> -	Representação da variação da longitude do nodo ascendente (caso2), desconsiderando-se os termos de maior amplitude...	103
<b>Figura 11.11</b> -	Representação da variação do argumento do perigeu (caso1).	104
<b>Figura 11.12</b> -	Representação da variação do argumento do perigeu (caso2).	104
<b>Figura 11.13</b> -	Representação da variação do argumento do perigeu (caso2), na região de máximo.....	105
<b>Figura 11.14</b> -	Representação da variação do argumento do perigeu (caso2), na região de mínimo.....	105
<b>Figura 13.1</b> -	Variação secular do nodo ascendente, levada em conta à inclinação da Lua.....	114
<b>Figura 13.2</b> -	Variação secular do argumento do perigeu, levada em conta	

	à inclinação da Lua.....	114
<b>Figura 15.1</b> -	Representação da variação da excentricidade.....	121
<b>Figura 15.2</b> -	Representação da variação da inclinação.....	121
<b>Figura 15.3</b> -	Representação da longitude do nodo ascendente.....	122
<b>Figura 15.4</b> -	Representação do argumento do perigeu.....	122



## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$	Semi-eixo maior da órbita do satélite ao redor da Terra
$a_0$	Semi-eixo maior inicial do satélite ao redor da Terra
$a_p$	Semi-eixo maior da órbita do planeta
$a_s$	Semi-eixo maior da órbita do satélite
$e$	Excentricidade da órbita do satélite ao redor da Terra
$e_0$	Excentricidade inicial da órbita do satélite ao redor da Terra
$E$	Anomalia excêntrica
$e^*$	Excentricidade da órbita da Lua ao redor da Terra
$\vec{F}_c$	Força centrífuga
$\vec{F}_g$	Força gravitacional
$\vec{F}_m$	Força da maré
$F_{\ell mp}$	Funções da inclinação
$G$	Constante gravitacional
$GE$	Parâmetro Gravitacional da Terra
$Gm^*$	Parâmetro Gravitacional da Lua
$G_{\ell pq}$	Funções da excentricidade
$i$	Inclinação da órbita do satélite ao redor da Terra
$i_0$	Inclinação inicial da órbita do satélite ao redor da Terra
$i^*$	Inclinação da órbita do satélite ao redor da Terra
$k_\ell$	Números de Love
$m^*$	Massa da Lua
$m_t$	Massa da Terra
$M$	Anomalia Média do satélite
$M_0$	Anomalia Média inicial do satélite
$m_s$	Massa do satélite
$m_p$	Massa do planeta
$N$	Longitude do nodo ascendente referente a eclíptica
$n$	Movimento médio orbital do satélite
$n^*$	Movimento médio orbital do Lua
$n_\Omega$	Movimento médio orbital da longitude do nodo ascendente
$n_\omega$	Movimento médio orbital do argumento do perigeu
$P_\ell(\cos \Psi)$	Polinômio de Legendre de ordem $\ell$

$r$	Distância geocêntrica do satélite
$r^*$	Distância do centro da Terra à Lua
$R_t$	Raio da Terra
$R_p$	Raio do Planeta
$\omega$	Argumento do perigeu da órbita do satélite ao redor da Terra
$\omega_0$	Argumento do perigeu da órbita do satélite ao redor da Terra
$\omega^*$	Argumento do perigeu da órbita da Lua ao redor da Terra
$\beta$	Razão da massa da Lua pela massa da Terra
$\Psi$	Ângulo entre a distância geocêntrica do satélite à direção da Lua
$\Omega$	Longitude do nodo ascendente da órbita do satélite ao redor da Terra
$\Omega_0$	Longitude do nodo ascendente da órbita do satélite ao redor da Terra
$\Omega^*$	Longitude do nodo ascendente da órbita da Lua ao redor da Terra
$\phi$	Latitude do satélite
$\lambda$	Longitude do satélite
$\lambda^*$	Longitude da Lua
$\theta$	Tempo sideral
$\upsilon$	Anomalia verdadeira
$\varepsilon_h$	Ângulo de atraso
$\Delta\bar{C}_{nm}, \Delta\bar{S}_{nm}$	Perturbações nos coeficientes do geopotencial
$\delta e$	Variação da excentricidade
$\delta i$	Variação da inclinação
$\delta\Omega$	Variação da longitude do nodo ascendente
$\delta\omega$	Variação do argumento do perigeu

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 14.1</b> - Tabela de correção da maré diurna usando para $A_m \delta K_s H_s$ uma amplitude de $5 \times 10^{-12}$ .....	117
<b>Tabela 16.1</b> - Tabela dos resultados dos movimentos médios dos modelos de Kozai, Kaula, Balmino e IERS.....	126
<b>Tabela 16.2</b> - Tabela dos resultados das excentricidades para os modelos de Kozai, Kaula, Balmino e IERS.....	126
<b>Tabela 16.3</b> - Tabela dos resultados das inclinações para os modelos de Kozai, Kaula, Balmino e IERS.....	127
<b>Tabela 16.4</b> - Tabela dos resultados das longitudes do nodo ascendente para os modelos de Kozai, Kaula, Balmino e IERS.....	127
<b>Tabela 16.5</b> - Tabela dos resultados dos argumentos do perigeu para os modelos de Kozai, Kaula, Balmino e IERS.....	128

## 1. INTRODUÇÃO

A História da Astronomia e Astronáutica, nestes últimos anos, tem apresentado avanços revolucionários no modo de explorar o Universo. Conquistas sensíveis mudaram, radicalmente, nossa maneira de olhar o Cosmo, e, a cada avanço, novas questões e modelos a serem testados. Os avanços foram grandes do ponto de vista tecnológico e igualmente na percepção, na interpretação e principalmente em aceitar e testar novas idéias.

O nosso Sistema Solar nunca foi tão explorado como nos últimos cinquenta anos do Século XX, graças aos satélites e as sondas interplanetárias. O ano de 1957 foi um ano marcante na história da Astronáutica; em outubro desse ano foi lançado o Sputnik 1, primeiro objeto feito pelo homem colocado em órbita terrestre, em outras palavras, o primeiro satélite artificial lançado pelo homem.

Muitos satélites passaram então a ser lançados, sendo que os primeiros foram desenvolvidos para fins militares. Em 1962, foi lançado o primeiro satélite para transmissão de televisão intercontinental, e para que eles pudessem ser realmente eficientes, foram desenvolvidos os satélites geoestacionários: satélites que parecem estar parados no céu. Eles são, na verdade colocados em órbitas bem altas ao redor do equador, e giram junto com a rotação da Terra, estando então em posição fixa em relação a quem estiver na superfície da terrestre.

Colocar e operar em órbita um satélite artificial representa um desafio científico e tecnológico superado hoje por poucos países que detém esse conhecimento. O desafio consiste na construção de um aparelho capaz de funcionar ininterruptamente durante um longo intervalo de tempo, em ambiente hostil, gerando sua própria energia, identificando entre milhares de transmissões aquelas a ele dirigidas, interpretando e executando centenas de comandos diferentes, orientando-se no espaço e, sobretudo, cumprindo a missão a qual se destina.

O conhecimento da dinâmica de um satélite artificial é importante em todas as fases de seu desenvolvimento. Todo o trabalho precisa estar condicionado ao ambiente espacial, ou corre-se o risco da perda de alguns milhões de dólares.

No ambiente espacial, as forças atuantes sobre um satélite artificial, por menor que sejam, dentro de certas circunstâncias, podem ter efeitos drásticos, alterando movimentos e funções do satélite. O estudo da dinâmica de satélites artificiais abrange a natureza, a causa e os efeitos de tais “perturbações”, que atuam sobre a órbita e a orientação desses aparelhos no espaço.

As órbitas dos primeiros satélites lançados mostraram alterações em suas trajetórias, o que não ocorreria se a gravidade fosse a única responsável pelo movimento orbital (considerando-se uma distribuição uniforme da massa da Terra). A busca para explicações para esse comportamento dos satélites levou ao estudo dessas perturbações.

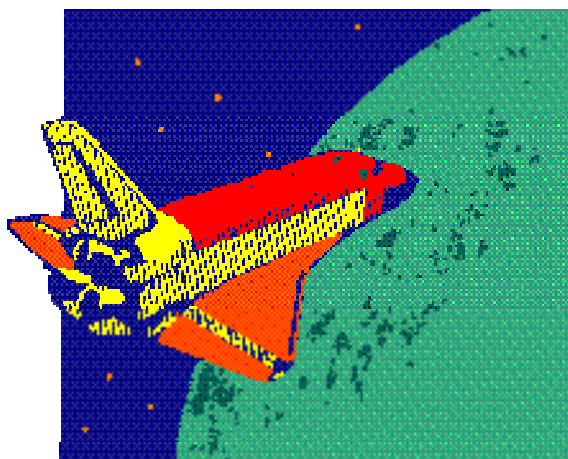
Se a Terra fosse perfeitamente simétrica, esférica e homogênea com respeito a distribuição de massa, o efeito da força gravitacional sobre os satélites próximos produziria um movimento kepleriano. A Terra, entretanto, apresenta achatamento nos pólos, irregularidade ao longo do equador e outros tipos de assimetria em sua forma e em sua massa, que acarretam perturbações na órbita dos satélites, distorcendo periodicamente alguns de seus parâmetros.

As forças gravitacionais do Sol e da Lua atuam na massa da Terra, resultando numa deformação do tipo protuberância de sua forma (superfície) na direção do corpo perturbador (Sol e Lua). Essa distribuição de massa causa um potencial gravitacional adicional (diferente do potencial natural da Terra) que perturba o espaço exterior à Terra. A força deduzida desse potencial é chamada força da maré e afeta o movimento dos satélites artificiais.

Outros fatores também modificam a órbita dos satélites artificiais, tais como:

1. Perturbações devidas à pressão de radiação solar (direta ou refletida e re-emissão térmica), decorrente da absorção, reflexão ou re-emissão de fótons solares pela superfície externa do satélite;

2. Perturbações devidas à distribuição não uniforme da massa da Terra;
3. Perturbações devidas ao arrasto atmosférico, sendo essa a principal força não gravitacional que atua nos satélites de baixa altitude, devida ao atrito ou fricção com a atmosfera.
4. Efeito Poynting-Robertson, um efeito relativístico, que leva em consideração a composição da velocidade da luz com a velocidade do satélite.
5. Efeito Yarkosky, um efeito diferencial resultante do aquecimento assimétrico do satélite.
6. Além dessas influências, que decorrem do satélite artificial no ambiente espacial, a órbita pode ser alterada por forças provocadas pelo próprio satélite. Algumas são voluntárias, como a atuação dos motores dos foguetes necessários à correção da órbita ou da altitude. Outras são involuntárias, como escapamentos de gases, e imprecisões no tempo ou na direção do disparo de um motor.



**Figura 1** - O Space Shuttle é um excelente exemplo de um satélite de órbita terrestre baixa. Sua órbita está à cerca de 100 km a 200 km da superfície da Terra.

## 2. CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

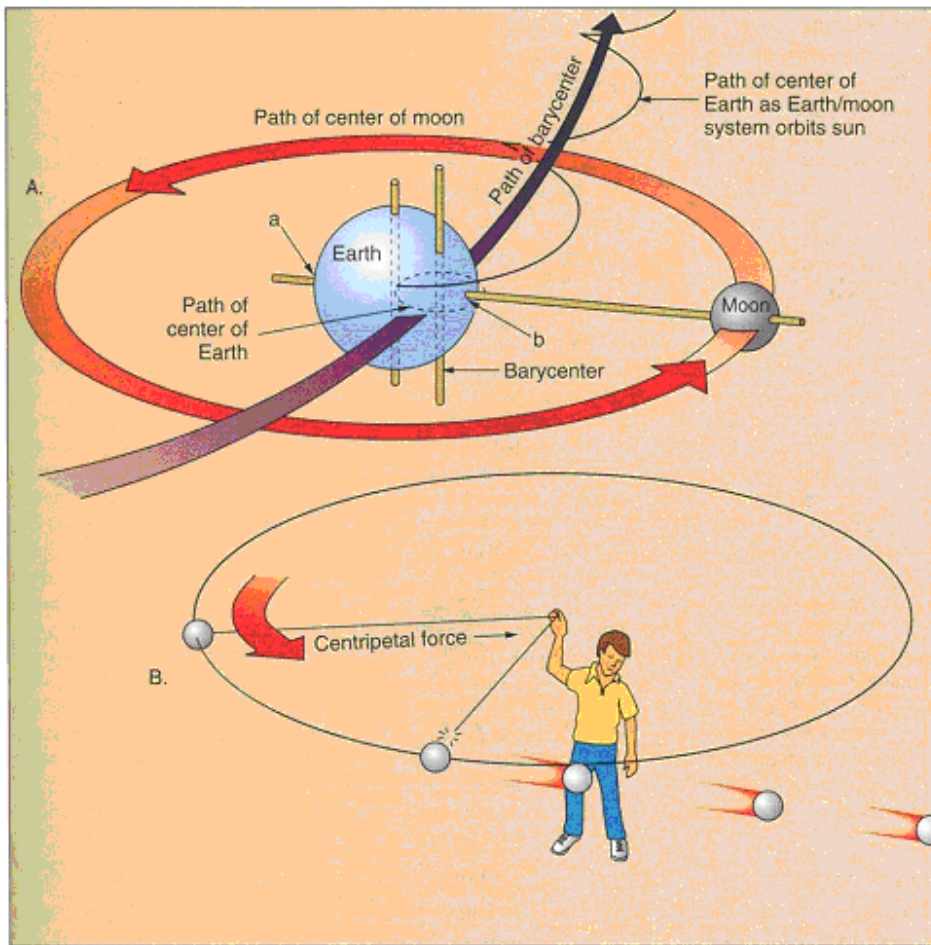
### 2.1. MARÉS

Todos nós nos apercebemos de um fluxo e refluxo das águas do mar junto à costa. Quase sempre duas vezes por dia e com uma relação com o ciclo lunar. São as marés.

Este fenômeno já era conhecido na Antiguidade, mas a explicação do fato só foi possível depois de Newton ter formulado a Lei da Gravitação Universal (1687).

A força exercida pela Lua e pelo Sol atrai as águas dos oceanos (e também dos continentes) provocando o fenômeno das marés. Mas, apesar da imensa massa do Sol, 27 milhões de vezes, maior que a da Lua, o fato desta se encontrar mais próxima da Terra faz com que a influência da Lua seja mais que o dobro do que a força do Sol.

A Terra e a Lua formam um conjunto que gira em torno do Sol. Nesse movimento de translação o conjunto Terra-Lua (fig.2.1.1) pode ser representado pelo centro comum de gravidade, ou baricentro, que se situa dentro do manto terrestre, a 4700 km de distância do centro da Terra. É este baricentro que descreve, desconsiderando-se perturbações, uma órbita elíptica em relação ao Sol. Tanto a Terra como a Lua descrevem órbitas mais complexas e relativamente sinuosas. Todos os pontos dentro da Terra descrevem círculos de raios iguais, à volta do baricentro (fig 2.1.2).

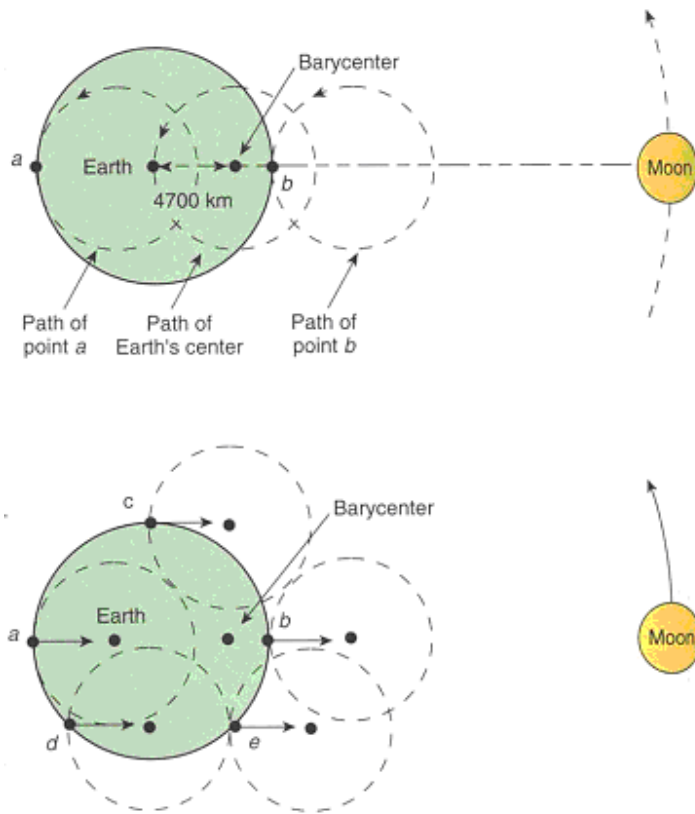


**Figura 2.1.1 – Sistema de rotação Terra-Lua**

(Figura extraída de H. V. Thurman, 1997)

Terra e Lua se movem em torno de um centro de gravidade comum (baricentro) que está dentro de Terra. **A**, a linha que atravessa o centro de Terra é o caminho seguido por seu centro conforme ela se move ao redor do centro de gravidade comum do sistema de Terra-Lua. Os caminhos circulares seguidos pelos pontos **a** e ponto **b** têm o mesmo raio daquele do centro de Terra. **B**, se você amarra um fio a uma pedra e balança em um círculo em volta de sua cabeça, a órbita fica circular porque o fio exerce uma força centrípeta na pedra. Essa força puxa a pedra para o centro do círculo. Se o fio quebrar com a pedra na posição mostrada, a pedra sairá da órbita ao longo de um caminho direto, tangente ao círculo.





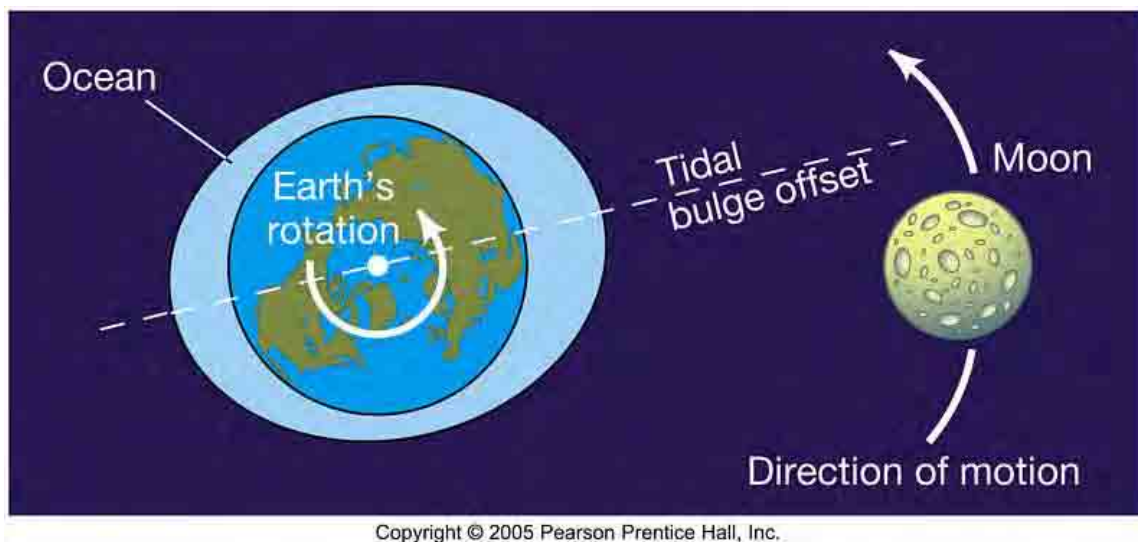
### Figura 2.1.2-Rotação Terra-Lua

(Figura extraída de H. V. Thurman, 1997)

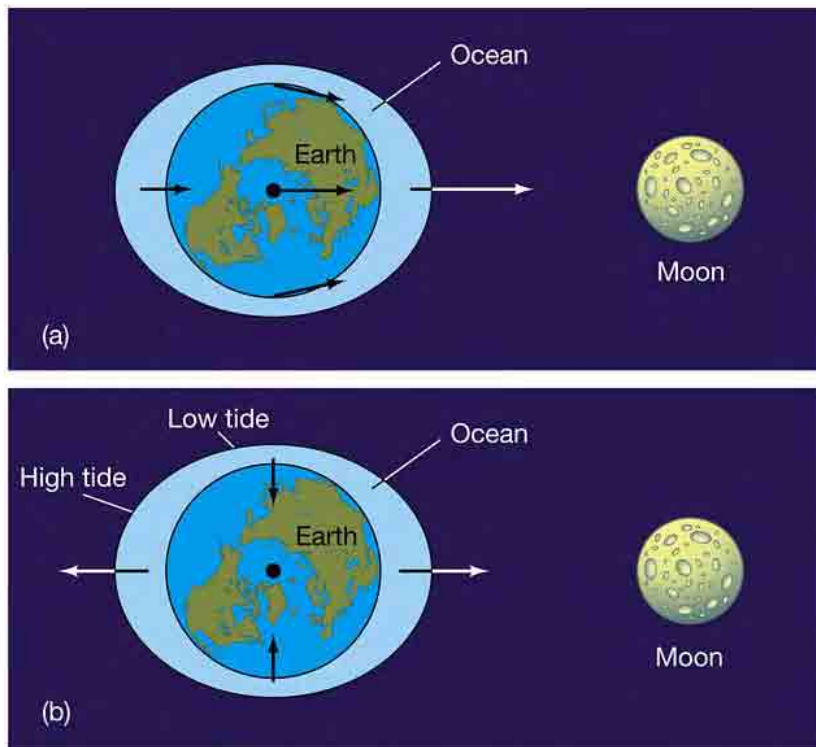
Todos os pontos da Terra descrevem trajetórias idênticas em torno do baricentro. A força centrípeta que mantém o sistema em rotação conjunta é igual em todos os pontos da Terra.

São as variações das posições do Sol e da Lua que comandam o ciclo das marés. Cada vez que a Lua passa pelo meridiano do lugar o efeito da maré, a preamar, só se faz sentir um pouco mais tarde devido ao atrito das massas (água e fundo) e à necessidade de vencer a inércia. Por exemplo, numa Lua nova ou Lua cheia a maré de maior amplitude só ocorre no dia seguinte, período que pode ir até 36 horas e tem o nome de “idade da maré”. Sempre que a Lua nasce ou se põe, relativamente a esse mesmo lugar, dá-se uma baixa-mar.

Num dado momento há sempre duas marés altas na Terra. A maré direta, no lado que está voltado para a Lua e a maré indireta no lado oposto.



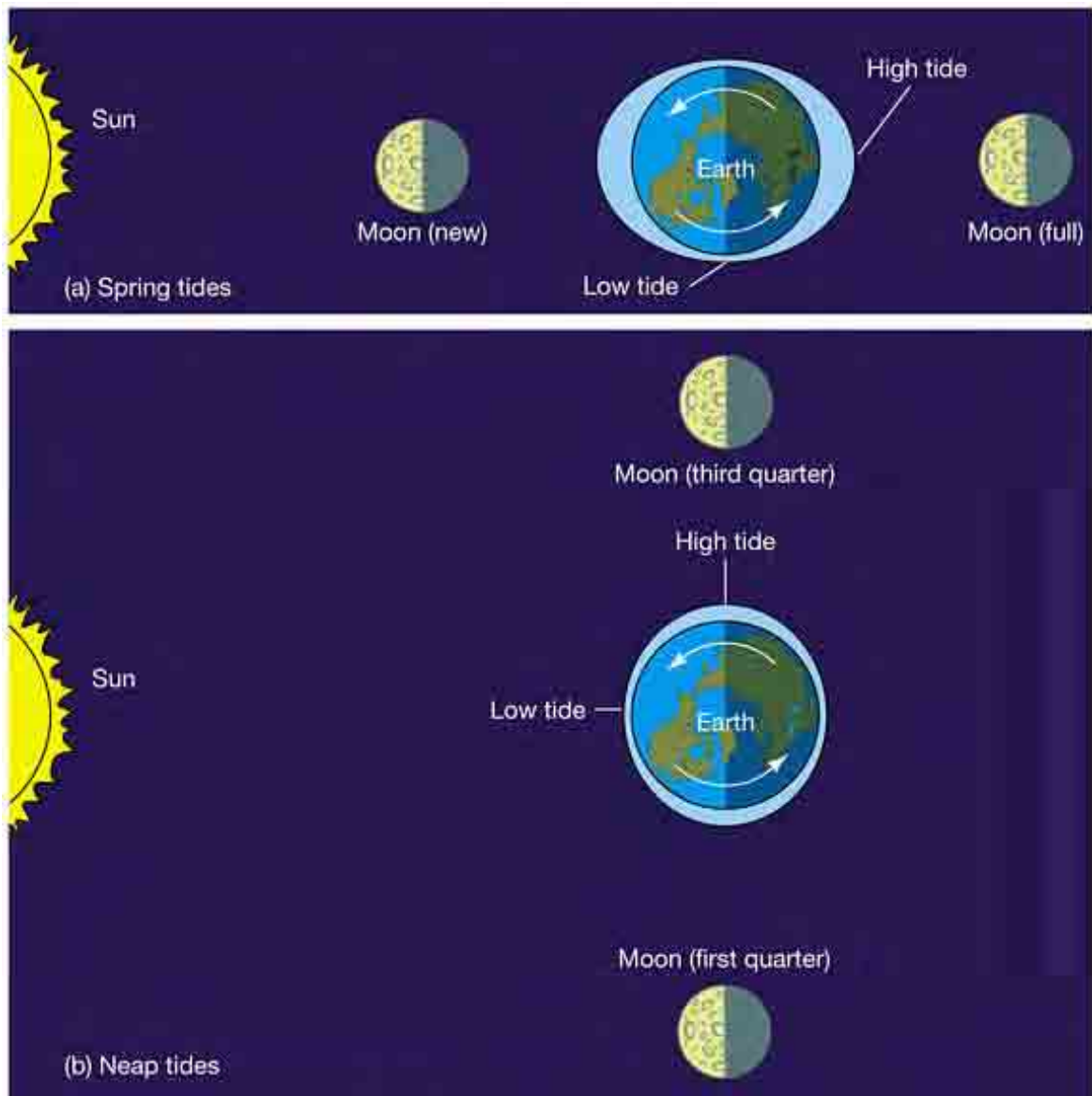
**Figura 2.1.3-** Bojo devido à maré.



Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

**Figura 2.1.4-** (a) Forças gravitacionais exercidas pela Lua na Terra. (b) Força da maré.

As grandes marés, ou marés vivas são aquelas cuja amplitude é a maior do ciclo lunar e correspondem ao momento de concordância das atrações solares e lunares, na lua cheia e lua nova. O Sol e a Lua encontram-se em quadratura quando as forças atrativas se encontram defasadas em  $90^\circ$ . É durante este período, quarto minguante e quarto crescente, que as marés atingem a amplitude mínima chamando-se assim de marés mortas.



Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

**Figura 2.1.5-** Bojo devido à maré. (a) marés vivas. (b) marés mortas

### ***O desenvolvimento deste "efeito"***

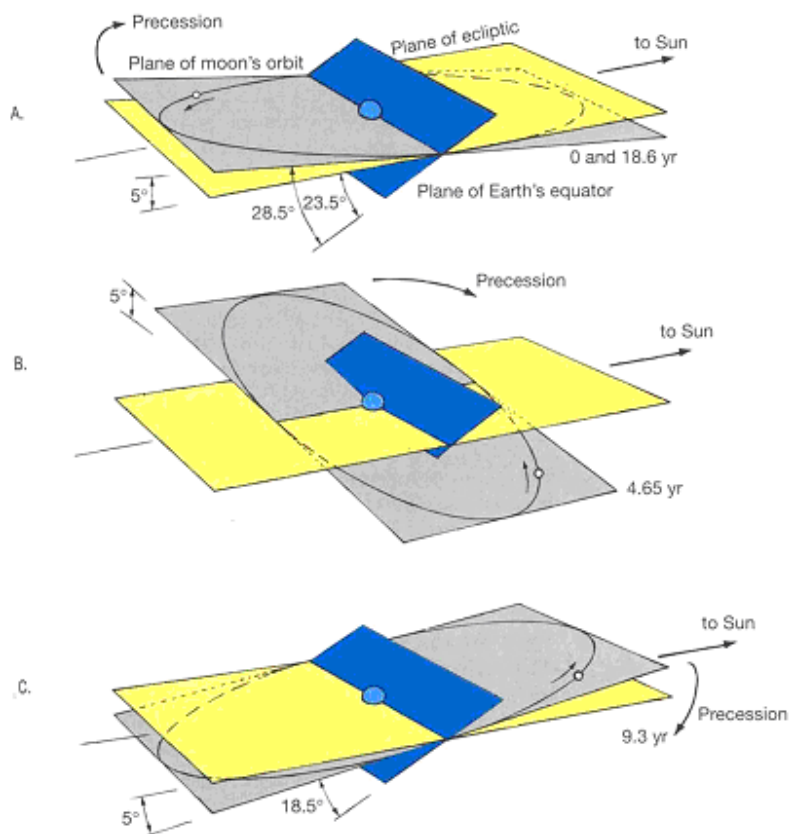
*Imagina que dás a mão a um (a) amigo (a) e, com os braços esticados, se põem a correr em círculo, sendo a união das vossas mãos o centro e eixo desse rodopio! Se o fizerem com certa velocidade, irão sentir dois tipos de força a atuarem em cada um de vocês: a força centrípeta e a força centrífuga. A primeira é sentida através do braço, a puxar-te em direção ao eixo (à mão). A segunda puxa-te para trás, tentando arrancar-te desse rodopio. Agora imagina que o outro companheiro que te segura é bastante mais forte e pesado. Há alterações neste movimento? De fato, há; ele roda muito mais devagar do que tu, sentindo mais fracas as tais forças. Isto acontece, porque o eixo de rotação está muito mais perto dele - praticamente no corpo dele - e não na união das mãos, como anteriormente.*

*Põe-te no lugar de cada um dos intervenientes, e reflète bem na situação. É exatamente nesta situação em que estão, continuamente, a Terra - mais "pesada", i. é., com maior massa -, e a Lua - mais "leve", i. é., com menor massa. É devido a este binário em rotação, que se formam as marés. As duas forças criadas puxam, cada uma para seu lado, as grandes e facilmente deformáveis quantidades de água oceânica. Duas "corcundas" de água são, então, formadas sobre o planeta, ambas no alinhamento da Lua: as marés altas. Nos dois pontos onde se verificam depressões da água, por esta ter sido puxada para as "corcundas", são as marés rasas.*

### **Declinação da Lua**

Uma vez que as amplitudes da maré são maiores quando a Terra está mais próximo do Sol ou da Lua, as variações na distância da Terra a cada um deles acabam por interferir na amplitude das marés.

No entanto, existem ainda outros fatores a levarmos em conta. O plano da órbita da Lua faz um ângulo de cerca de  $5^\circ$  com o plano da eclíptica. Isto significa que a Lua pode atingir uma declinação máxima de  $28,5^\circ$  para Norte ou Sul do Equador ( $23,5+5^\circ$ ). Como o plano da órbita da Lua sofre um movimento de precessão com a duração de 18,6 anos, o resultado acaba por produzir variações complexas, em que, por exemplo, a declinação máxima da Lua pode atingir apenas  $18,5^\circ$ , 9,3 anos depois do início do ciclo. Este ciclo deve ser levado em conta para a avaliação das variações do nível do mar (fig. 2.1.6).



**Figura 2.1.6-**Variação da declinação da Lua: ciclo de 18,6 anos.  
(Figura extraída de H. V. Thurman, 1997)

## 2.2. PERTURBAÇÕES EM SATÉLITES ARTIFICIAIS DEVIDO À MARÉ

A atração gravitacional comum entre dois corpos provoca um aumento nas deformações devido à maré, as quais são geralmente pequenas quando comparadas às dimensões dos corpos. Quando estas condições são repetitivas, estas deformações são periódicas. Entretanto, como as deformações jamais são perfeitamente elásticas, a energia é dissipada, causando processos de evoluções irreversíveis nas órbitas e nas rotações dos corpos.

No sistema Terra-Lua, as marés têm vários efeitos. A princípio elas se apresentam como flutuações periódicas nos oceanos e na superfície terrestre. Uma consequência direta desse fato é uma mudança periódica no plano da gravidade. Mudanças no tensor de inércia da Terra causadas pelas deformações periódicas originam um aumento destas flutuações na velocidade de rotação da Terra, observados com a frequência de 14 e 28 dias. As deformações devidas às marés geram também uma força que perturba o movimento dos satélites artificiais. Finalmente as marés são responsáveis por um aumento secular ao longo do dia e da desaceleração da órbita lunar.

Basicamente, as observações dos vários fenômenos da maré levaram a descoberta dos parâmetros elásticos da Terra e da Lua (números de Love) e da quantidade de energia dissipada pela parte sólida da Terra, oceanos e na Lua.

Este é o principal aspecto que têm motivado os recentes estudos sobre maré. Para determinar a dissipação, três processos complementares são necessários:

- a) Análise das perturbações orbitais dos satélites da Terra;
- b) Desenvolvimento de modelos numéricos para maré oceânica;
- c) Análise do ajuste do alcance do laser lunar para a Lua (se raios laser forem utilizados).

O método (a) informa a dissipação total na Terra (terrestre mais oceânica), enquanto que o método (b) informa somente a quantidade de energia dissipada nos oceanos; a dissipação total do sistema Terra-Lua pode ser deduzida pelo método (c).

A trajetória dos satélites artificiais é perturbada pelas deformações, tanto da maré terrestre como da maré oceânica. As marés semidiurnas e diurnas produzem perturbações orbitais relevantes, mas as maiores perturbações são essencialmente as de longo período (por exemplo, as marés semidiurnas geram uma perturbação orbital em um período de 14 dias), (Brosche e Sundermann, 1983).

O conhecimento da maré oceânica, em geral, não é o suficiente para retirarmos toda a contribuição da carga oceânica. Hendershott e Munk (1970), em sua análise sobre maré oceânica, concluem que uma melhora nos resultados da maré terrestre pode levar a um maior conhecimento das marés oceânicas.

Neste trabalho, nos restringiremos apenas ao estudo da influência da maré terrestre nas perturbações das órbitas dos satélites artificiais.



## 2.3. OS NÚMEROS DE LOVE

O termo técnico aplicado à “medição” de maré planetária chama-se número de Love, referência a Augustus E. H. Love (1909), matemático de Oxford, pioneiro em teorias de elasticidade há mais de um século.

A magnitude do bojo devido à maré é determinada em parte pela distribuição da densidade interna no planeta, e, portanto, a medição da amplitude da maré nos leva a determinação de sua estrutura interna.

O primeiro corpo celeste a ter analisada sua estrutura interna foi o satélite da Terra, ou seja, a Lua. Para sabermos o que há no coração da Lua, usamos a distorção da maré lunar. Os números de Love mostram quão elástico é a Lua, dando indícios de sua estrutura interna, e, indica a mudança no seu campo de gravidade de acordo com as relações Terra-Sol. Uma conclusão recente é que a superfície da Lua encolhe e expande até 10 cm, em resposta às diferenças da força de gravidade da Terra. Essa elasticidade indica que a Lua é maleável.

Os números de Love foram calculados dos dados recolhidos de experiências variando o laser lunar utilizando refletores na superfície da Lua. Bastam dois segundos e meio para um raio laser ir da Terra a Lua e voltar. Mas foram necessários 33 anos de experiências para se ter uma visão fugaz do que talvez seja o maior segredo da Lua: que bem por baixo de suas crateras frias e paisagem rochosa pode existir um coração quente e generoso. A hipótese, se confirmada, pode fortalecer a teoria de que a Lua nasceu de uma violenta colisão. A suspeita é que uma considerável zona de rocha derretida se oculta sob a acidentada superfície lunar que resulta dessas experiências com raios laser, cuja precisão vem aumentando desde que os astronautas na nave Apollo colocaram pela primeira vez refletores a laser na Lua em 1969. Há décadas, vem sendo analisado o tempo de ida e volta dos

lampejos dos raios para fazer medições cada vez mais exatas da distância entre a Terra e a Lua, sua forma, suas oscilações e aspectos físicos.

Ciência raramente tem algo a ver com poesia. Mas nesse caso chega perto. Quando escreveram o primeiro relatório sobre a descoberta, os cientistas do Laboratório de Propulsão a Jato de Pasadena (Califórnia), não conseguiram resistir à metáfora:

*“O coração da Lua derreteu, dizem os números de Love lunares”.*

## 2.4. RELEVÂNCIA DA PESQUISA

Esta pesquisa visa como aplicação à determinação de órbita de satélites artificiais terrestres (Kuga, H. K., 2004). A determinação de uma órbita de satélites artificiais é essencial para o bom desempenho da missão. Por exemplo, na fase de lançamento para uma órbita terrestre, a espaçonave deve ser transferida de uma órbita de transferência, na qual foi injetada pelo lançador, até uma órbita final. O cálculo preciso destas órbitas intermediárias é crucial para a precisão do posicionamento e definição da órbita final. Na fase de rotina, a determinação de órbita deve oferecer meios para o rastreamento e controle do satélite, bem como fornecer informações orbitais para os usuários dos experimentos científicos e tecnológicos a bordo do satélite, além de realizar previsões orbitais estendidas para longos períodos. Além destas fases, existem as chamadas manobras corretivas de órbita. Devido ao fato da órbita sofrer perturbações que a afastam da órbita nominal desejada, são necessárias correções periódicas ao longo da vida útil do satélite. Estas fases críticas abrangem correções orbitais de fasagem, de deriva, de assincronia de tempo de passagem, etc. Neste caso, os sistemas de determinações de órbita devem oferecer os meios de se verificarem o desempenho dos equipamentos (e.g. motores de empuxo) utilizados para se executar (em) a(s) manobra(s) e com isso se calibrarem curvas de eficiência resultando numa maior economia de combustível. O efeito líquido é o prolongamento da vida útil da missão. Além disso, um sistema para determinação de órbita com baixo custo, exige compulsoriamente a diminuição dos custos dos equipamentos necessários à coleta de dados orbitais para posterior processamento. Portanto justifica-se o aprimoramento da tecnologia de satélites artificiais, principalmente com o intuito de obter cálculos de órbitas cada vez mais precisos, e para isso desenvolvemos modelos analíticos, que nos dá condições de aprimorar o controle do satélite e realizar previsões por um período de tempo cada vez maior.

Os efeitos da maré terrestre são extremamente relevantes levando em conta longos períodos de tempo e podem ser significativos para certas aplicações em geodinâmicas e do sistema GPS.

Atualmente, por exemplo, os efeitos da maré terrestre nos elementos orbitais têm sido considerados para o satélite LAGEOS, para as missões GRACE, GOCE, Mars, no estudo de constelações de satélites (Constelação Galileu) e no estudo de evolução de debris espaciais.

De fato, como está demonstrado neste trabalho, que algumas perturbações de termos de período muito longo, características de evoluções geodinâmicas, podem ser consideradas, para frações razoáveis de tais períodos (adaptáveis para cada aplicação específica) como perturbações seculares e que devem ser adicionadas às já conhecidas.

É importante também ressaltar, analisando trabalhos já realizados (vide capítulo 4) que a magnitude das perturbações devidas à maré, obtidas por diferentes modelos, não foram comparadas.

### 3. OBJETIVO

O objetivo deste projeto é estudar e comparar modelos para o cálculo de perturbações orbitais em satélites artificiais, devida à maré terrestre. Em particular marés terrestres influenciam o potencial terrestre causando perturbações adicionais no movimento de satélites artificiais, as quais têm sido medidas por diversos processos. A atração exercida pela Lua e pelo Sol sobre a Terra produz deslocamentos elásticos em seu interior e uma protuberância em sua superfície. O resultado é uma pequena variação na distribuição da massa na Terra, conseqüentemente no geopotencial. As perturbações nos elementos orbitais de satélites artificiais terrestres devidas à maré terrestre podem ser estudadas a partir das equações de Lagrange, considerando-se um potencial conveniente. Diversos modelos têm sido propostos para o geopotencial. Analisaremos aqui os modelos de Kozai (Kozai, 1959 e 1965), de Kaula (Kaula, 1969), de Balmino (Balmino, 1974) e o do IERS (1996). Estes modelos sugerem que haja um número de Love e uma defasagem para cada excitação expandindo tais parâmetros em séries de harmônicos esféricos. Por outro lado, como tem sido feito pelo IERS, as mudanças induzidas pela maré terrestre no geopotencial podem ser convenientemente modeladas como variações nos coeficientes  $C_{nm}$  e  $S_{nm}$  do geopotencial.

O objetivo mais geral da pesquisa é adquirir e solidificar o conhecimento científico e tecnológico necessário para aprimorar os sistemas de navegação e de determinação de órbita de satélites artificiais, com características de precisão necessária para navegação em tempo real, manutenção de trajetória, e operação de satélites. Análises relevantes deverão ser executadas de modo a permitir a efetiva avaliação do desempenho de tais modelos analíticos para utilização realística na área aeroespacial.

Como um dos resultados dessa pesquisa pretende-se também dotar o DMA-FEG de fórmulas e programas já prontos para testar numericamente, para diversos cenários, os modelos supracitados.

### 3.1.METODOLOGIA

As variações nos elementos orbitais devidos à maré serão calculadas analiticamente pelas equações de Lagrange, substituindo-se nestas equações os potenciais de cada modelo. As equações serão integradas analiticamente pelo método das aproximações sucessivas. As variações dos elementos orbitais calculadas para cada modelo serão comparadas.

## 4. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A necessidade de determinar órbitas de satélites artificiais cada vez mais precisas levou os pesquisadores a aperfeiçoarem os modelos de perturbações, onde não só são considerados os seus efeitos, como também a influência da deformação da maré na Terra sobre a posição da estação de observação.

Apresentaremos a seguir, resumidamente, algumas abordagens feitas nos estudos de perturbações orbitais de satélites artificiais devido à maré terrestre.

Embora não aplicado a satélites artificiais, Love, A (1909), foi o primeiro a introduzir constantes de grau  $n$  ao potencial da maré. Essas constantes são coeficientes de elasticidade que definem a deformação simétrica e elástica da Terra. Para esses coeficientes deu-se o nome de números de Love.

Kozai (1959), desenvolve o potencial em termos de elementos orbitais de um satélite próximo a Terra, como também as expressões para as principais perturbações seculares, através das equações de Lagrange. Tentando explicar algumas flutuações nas inclinações das órbitas dos satélites 1959 Alpha 1, 1959 Eta e 1960 Iota 2, Kozai suspeitou pelo período, que tais flutuações poderiam ser provocadas pela maré. Entretanto, as amplitudes obtidas pela observação foram muito grandes. Motivado por tal fato, Kozai (1965), considerando os números de Love, acrescenta ao seu trabalho anterior os efeitos da deformação da Terra devida à maré e mostra que tal perturbação adicional poderia causar um acréscimo de 10 por cento nas perturbações luni-solares. Mostrou também que, se não forem considerados termos de curto período, as marés não provocam perturbações no semi-eixo e na excentricidade da órbita de satélites artificiais. Quanto às flutuações observadas nas inclinações, nada pode concluir em vista da constatação posterior de inconsistência dos dados observacionais.

Kaula (1969), desenvolvendo o potencial em termos de elementos orbitais, ao estudar a fricção das marés, introduz na função perturbadora o fator de amplitude  $k_\ell$ , chamados números de Love e o ângulo de atraso  $\varepsilon$ , que são expressados como somas

dos harmônicos esféricos zonais, ou seja, uma função dependente somente da latitude e que produzem perturbações de longo período. As perturbações de curto período são negligenciadas.

Musen e Estes (1971), desenvolveram um método geral de perturbações utilizando elementos elípticos e vetoriais para estudar os efeitos da maré sobre o movimento de satélites artificiais. Essas perturbações são desenvolvidas através de séries trigonométricas nos argumentos elípticos da teoria lunar de Hill-Brown e nos elementos equatoriais  $\omega$  e  $\Omega$  do satélite. A integração das equações diferenciais para variação dos elementos do satélite é simples devido à todos os argumentos serem lineares ou quase lineares no tempo. A expansão trigonométrica permite um entendimento sobre a significância relativa das amplitudes e períodos das diferentes “ondas” da maré sobre um longo período de tempo.

Musen e Felsentreger (1972), estenderam as idéias de perturbações de maré em satélites artificiais, formulados por Musen e Estes, estabelecendo a forma Maxwelliana da expansão do potencial de maré dentro de uma série de produtos de harmônicos esféricos e, seguindo os passos de Kaula (1969), as perturbações de curto período também são desconsideradas. A expansão do potencial da maré é obtido usando o teorema de Dirichlet e as equações diferenciais para perturbações da maré são obtidas dos elementos elípticos fazendo um exame no desvio de  $k_2$  e  $k_3$ .

B.C. Douglas , S. M. Klosko, J.G. Marsh e R.G. Williamson (1973), fazem uma análise da perturbação da maré luni-solar de inclinação na órbita dos satélites GEOS-1 (1965-89A) e GEO-2 (1968-002A) , que tem fornecidos os valores  $k_2 = 0,22$  e  $0,31$  respectivamente. Para o satélite GEOS-1 um novo método numérico envolvendo elementos osculadores foi empregado. Para o satélite GEOS-2 foi necessário para a obtenção desses valores a análise das variações dos elementos médios devido a longos períodos (450 dias) da maré solar dominante.

Balmino (1974), generaliza os resultados de Kaula e admite que o ângulos de atraso  $\varepsilon$  e os números de Love sejam funções da latitude e longitude. As funções



dependentes da latitude produzem perturbações de longo período no movimento dos satélites, enquanto aquelas dependentes da longitude, produzem perturbações de curto período ou mistos. Há também tentativas de tratar o problema pelo método das respostas harmônicas, substituindo os números de Love por funções dependentes do tempo.

S. Cassoto (1990), faz uma investigação completa da estrutura de classe de equivalência induzidas pela combinação de todos os índices (l,m,p,q) em que são dependentes os termos do geopotencial, perturbação da maré oceânica e terrestre num satélite. Os resultados são algoritmos provenientes dessa combinação com a mesma frequência na expansão da perturbação na teoria linear.

Em IERS (1996) é mostrado que a influência no movimento de um satélite pode ser considerado em termos de perturbações nos coeficientes  $\bar{C}_{nm}$  e  $\bar{S}_{nm}$  do geopotencial. O potencial é expressado em termos não dimensionais  $\Delta\bar{C}_{2m}$ ,  $\Delta\bar{S}_{2m}$ .

Santos, N. (2002), desenvolve o potencial em termos de elementos orbitais e o substitui nas equações planetárias de Lagrange. Soluções analíticas estão apresentadas para casos particulares considerando os números de Love constantes. Três casos foram estudados, o primeiro quando a Lua é estática, segundo, quando a Lua estiver em órbita circular kepleriana e o terceiro, a Lua em órbita circular precessionada. Foi dada ênfase aos termos seculares e de longo período. Um programa foi elaborado, permitindo calcular, para um dado satélite, a amplitude e o período dos termos perturbadores mais significativos.

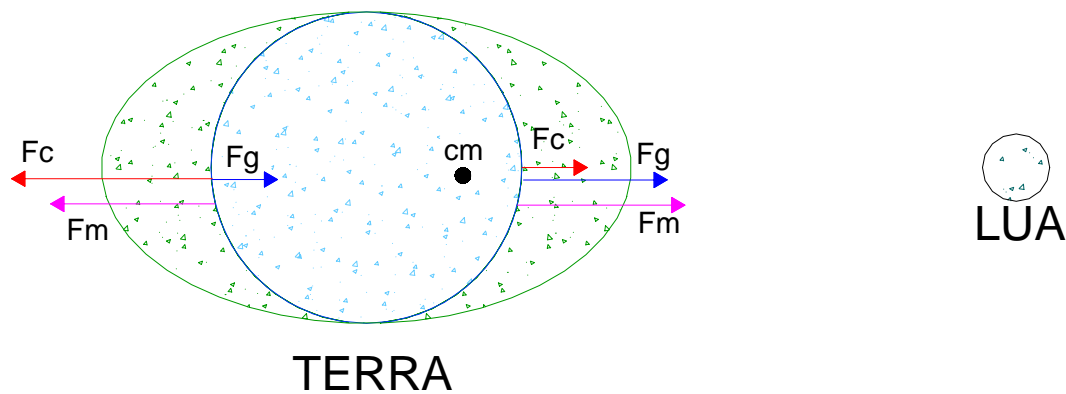
Serão analisados, neste trabalho, os modelos de Kozai (Kozai, 1959 e 1965), de Kaula (Kaula,1969), de Balmino (Balmino, 1974) e o do IERS (1996).

## 5. MECANISMO BÁSICO DO BOJO DEVIDO À MARÉ

Neste capítulo, baseado nos trabalhos de Broucke (1987) e Murray e Dermott (1999), dar-se-á uma idéia qualitativa sobre o fenômeno da maré, como ela aparece, e quais são seus efeitos mútuos nos corpos perturbado e perturbador.

Sabe-se que as marés são devidas a uma combinação dos seguintes fatores

1. Força de atração que o Sol e a Lua exercem sobre a Terra;
2. Movimento de rotação da Terra;
3. O movimento da Terra ao redor do centro de massa do sistema Terra-Lua.

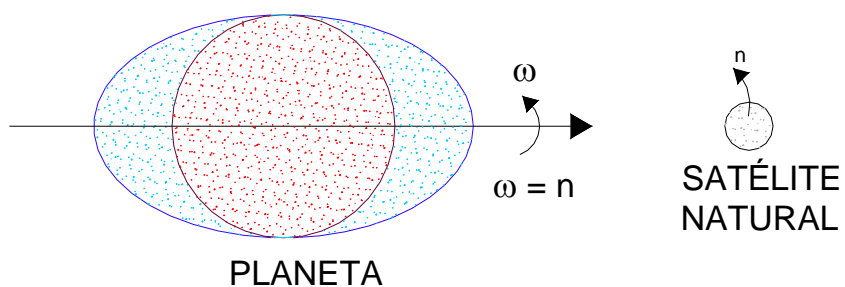


**Figura 5.1-A** existência de forças gravitacionais diferentes consoantes à posição de cada ponto em relação à Lua implica na existência da força de maré.

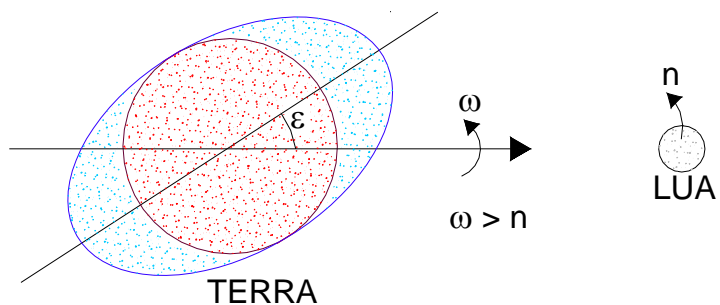
À parte da Terra mais próxima à Lua sofre maior força gravitacional  $\vec{F}_g$  do que àquela mais distante, no entanto ambas sofrem a ação da força centrífuga  $\vec{F}_c$ , que age dos dois lados do planeta, como mostra a figura 5.1. Do lado esquerdo da Terra mais distante da Lua, há uma maior força centrífuga que é parcialmente cancelada pela ação da força de gravidade da Lua. Do outro lado, há uma menor força centrífuga que se adiciona à força de gravidade da Lua. A força da maré  $\vec{F}_m$  é causada por essa força diferencial que “estica” a Terra criando dois altos de cada lado. Por esse motivo existem duas marés altas e duas marés baixas semelhantes todos os dias, de ambos os lados.

Considerando materiais perfeitos (fig.5.2), a resposta do planeta seria instantânea e nenhum momento angular ou energia seria transferida para a órbita de seu satélite natural, já que a deformação (campo gravitacional) é simétrica em relação à linha dos centros. Mas o material do planeta não sendo elástico nem fluido, haverá necessariamente perda de energia por causa do atraso na resposta do planeta em formar o bojo, sendo  $\varepsilon$  o ângulo de atraso. Na figura 5.3, que é o caso do binário Terra-Lua, temos o caso onde a velocidade de rotação da Terra ( $\omega$ ) é maior que o movimento médio do orbital da Lua ( $n$ ). Assim o bojo se forma um certo tempo após o instante em que a Terra sofreu a perturbação e notamos que ele está formando um ângulo  $\varepsilon$  com a linha dos centros. Na figura 5.4 temos a situação oposta,  $\omega < n$ , e o bojo está atrasado em relação à posição do satélite. Na figura 5.3, o desalinhamento do bojo causa um torque, o qual tende alinhá-lo. Como  $\omega > n$ , então o efeito é tal que a Terra é freada. A energia cinética de rotação é então dissipada parte em forma de calor e parte é passada ao movimento orbital da Lua. Para que haja conservação do momento angular total, a Lua ao ganhar este adicional, é então “empurrada” para fora de sua órbita, isto é, seu semi-eixo tende a crescer. O processo continua e o equilíbrio ocorre quando  $\omega = n$ . No caso da figura 5.4, o torque faz com que o planeta ganhe mais energia de rotação e para que haja conservação do momento angular, a órbita do satélite se contrai (semi-eixo

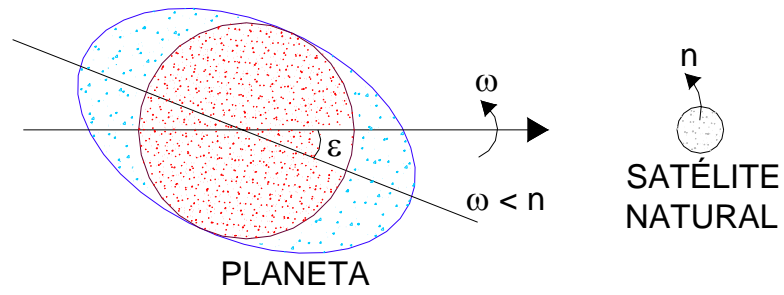
diminui). Este é o caso de Phobos e de alguns satélites retrógrados, os quais estão decaindo e poderão no futuro, colidir com o planeta.



**Figura 5.2-**Referente ao caso ideal, sendo a velocidade angular do planeta exatamente igual ao movimento orbital de seu satélite natural.



**Figura 5.3-**Referente ao caso real do sistema Terra-Lua, sendo a velocidade angular da Terra é maior que a velocidade do movimento médio orbital da Lua.



**Figura 5.4-** Velocidade angular do planeta sendo menor que a velocidade do movimento angular do seu satélite natural. Esse caso é real para alguns planetas do Sistema Solar.

## 6. POTENCIAL DEVIDO À MARÉ

Consideramos então, (Murray e Dermott, 1999) a rotação de um corpo elástico e um satélite orbital, girando em órbita circular. Chamaremos de *maré*, a saliência de um corpo causado pelo efeito do gradiente gravitacional ou variação da força gravitacional de um lado e do outro do corpo.

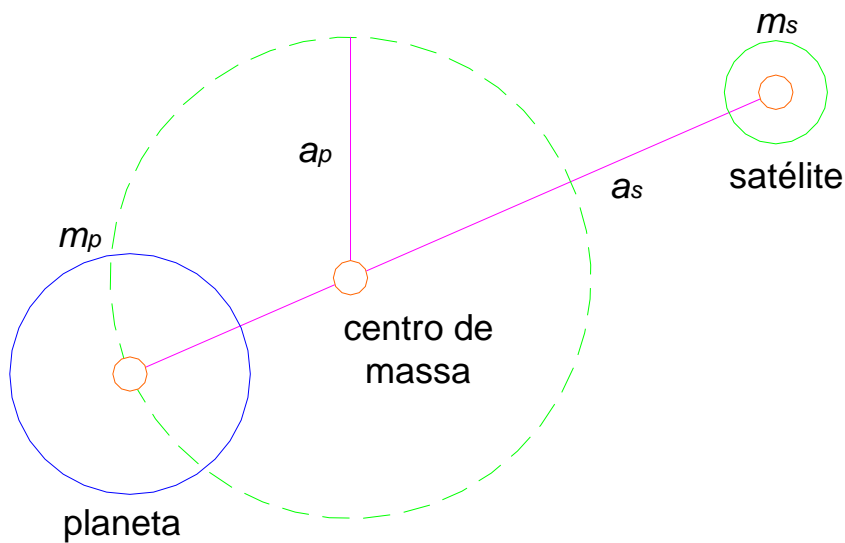
Considere o caso do aumento da maré em um planeta de massa  $m_p$  devido a um satélite de massa  $m_s$ . Se nós representarmos os objetos sendo pontos de massas, então a Lei da Gravitação de Newton nos dá:

$$\langle F \rangle = G \frac{m_s m_p}{r^2} \quad (6.1)$$

em que  $r$  é a distância dos centros. Se assumirmos que o corpo move-se em órbitas circulares sobre seu centro de massa comum (fig. 6.1), então, o semi-eixo maior das órbitas é relativo às massas:

$$\frac{a_s}{a_p} = \frac{m_p}{m_s} \quad (6.2)$$

sendo,  $a = a_p + a_s$ .



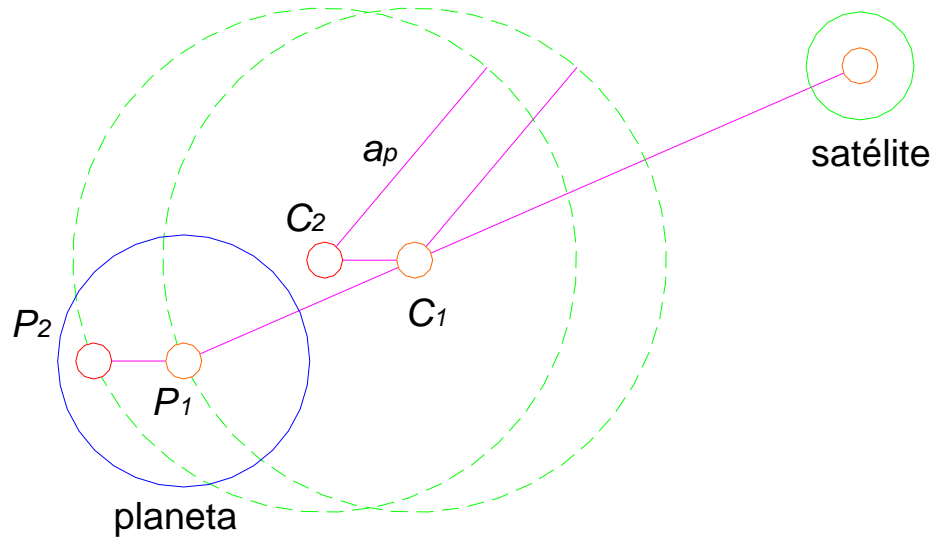
**Figura 6.1** – Um planeta e satélite movendo ao redor de um centro de massa em órbita circular. O semi-eixo maior do planeta e do satélite, em relação ao centro de massa é  $a_p$  e  $a_s$ , respectivamente, enquanto que o semi-eixo maior do satélite em relação ao planeta é  $a = a_p + a_s$ .

O movimento da partícula  $P_1$  no centro do planeta com relação ao centro de massa,  $C_1$ , é um círculo de raio  $a_p$ . Se omitirmos essa rotação, o movimento passará em qualquer outro ponto  $P_2$ , de mesmo raio, mas com centro em  $C_2$ , em posição diferente de  $C_1$ , mas com a mesma distância de  $P_2$  à  $P_1$  (fig. 6.2). Isto acontece porque todas as partículas que pertencem ao planeta agem iguais (em magnitude e direção) às forças centrífugas, mas diferentes das forças gravitacionais,  $\mathbf{F}$ . A força centrífuga comum é igual à da força gravitacional média,  $\langle \mathbf{F} \rangle$ , que é,

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \text{força centrífuga} \neq \mathbf{F} \quad (6.3)$$

A força de geração de maré,  $\mathbf{F}_{\text{maré}}$ , que deforma o planeta é definida por:

$$\mathbf{F}_{\text{maré}} = \mathbf{F} - \langle \mathbf{F} \rangle \quad (6.4)$$



**Figura 6.2** – Toda partícula do planeta move em círculos similares de raios idênticos  $a_p$ , mas com centros diferentes. As partículas  $P_1$  e  $P_2$  estão nos círculos com centros  $C_1$  e  $C_2$ , respectivamente.



Considerando agora, o sistema Terra-Lua, o problema será abordado determinando a distribuição de massa do bojo devido à maré na Terra considerando o potencial  $U$  gerado por um corpo perturbador (Lua) de massa  $m^*$ , em algum ponto P na superfície da Terra, temos:

$$U = -G \frac{m^*}{\Delta} \quad (6.5)$$

em que  $m^*$  é a massa da Lua,  $\Delta$  é a distância do ponto P ao centro da Lua. Da lei dos cossenos temos, fig (6.3):

$$\Delta = a \left[ 1 - 2 \left( \frac{R_t}{a} \right) \cos \psi + \left( \frac{R_t}{a} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (6.6)$$

Expandindo o binômio da equação 6.6 obtemos:

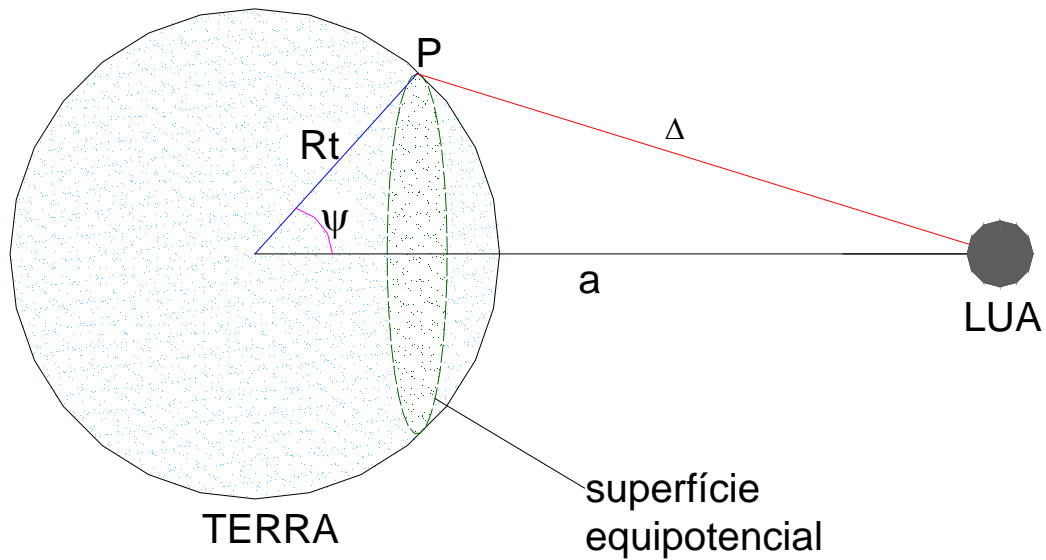
$$U = -G \frac{m^*}{a} \left[ 1 + \left( \frac{R_t}{a} \right) \cos \psi + \left( \frac{R_t}{a} \right)^2 \frac{1}{2} \left( 3 \cos^2 \psi - \frac{1}{2} \right) + \dots \right] \approx U_1 + U_2 + U_3 \quad (6.7)$$

O primeiro termo da equação (6.7),  $U_1 = -G \frac{m^*}{a}$ , é uma constante desde que

$\frac{\vec{F}}{m^*} = -\nabla U$ , este termo não produz força no planeta.

$$\frac{\partial U_2}{\partial (R_t \cos \psi)} = \frac{m^*}{a^2} = \frac{F_g}{m_t} \quad (6.8)$$

sendo  $m_t$  a massa da Terra.



**Figura 6.3** - Superfície equipotencial

O segundo termo da equação (6.7),  $U_2 = -G \left( \frac{m^*}{a^2} \right) R_t \cos \psi$ , faz aumentar a força em algum ponto P descrevendo um movimento circular e formando uma superfície equipotencial ( $U_2 = \text{constante}$ ), conforme figura (6.3).

O bojo devido à maré se deve ao potencial descrito a partir da terceira potência da equação (6.7), podendo ser escrita como:

$$U_3 = -G \frac{m^*}{a^3} R_t^2 P_2(\cos \psi) \quad (6.9)$$

A equação (6.9) está associada a um polinômio de Legendre de grau dois em  $\cos \psi$ , ou seja:

$P_2(\cos \psi) = \frac{1}{2}(3\cos^2 \psi - 1)$ , em que:

$$\frac{\vec{F}_{maré}}{m_t} = \frac{\vec{F}_g}{m_t} - \frac{\vec{F}_c}{m_t} = -\nabla U - \frac{\vec{F}_c}{m_t} \approx -\nabla U_3(\psi) \quad (6.10)$$

A equação (6.10) representa o aumento do potencial maré.

Então, nós podemos escrever  $U_3 = -\xi g P_2(\cos \psi)$ , em que:

$$\xi = \frac{M^*}{M_t} \left( \frac{R_t}{a} \right)^3 R_t \quad (6.11)$$

$$\text{e} \quad g = \frac{Gm_t}{R_t^2} \quad (6.12)$$

é a aceleração gravitacional, ou superfície gravitacional da Terra. Neste caso  $\xi P_2(\cos \psi)$  é a amplitude da maré de equilíbrio para qualquer valor de  $\psi$  na superfície do planeta. Note que  $P_2(\cos \psi)$  é o máximo para  $\phi = 0$  ou  $\phi = \pi$  e mínimo para  $\phi = \frac{\pi}{2}$  ou  $\phi = \frac{3\pi}{2}$ . Como a Terra dá uma volta com relação ao seu eixo a cada 24 horas, isto explica porque a Lua produz duas marés baixas e duas marés altas na Terra todos os dias.

A deformação da maré na Terra é mais complexa pelo fato de que (i) o Sol e a Lua aumentam a sua significância (ii) numa ordem geocêntrica, esses corpos definem órbitas excêntricas e inclinadas com respeito ao equador da Terra.

Usando a lei dos cossenos na trigonometria esférica podemos mostrar que o ângulo  $\psi$  entre o vetor posição OP e OM é dado por (fig 6.4b):

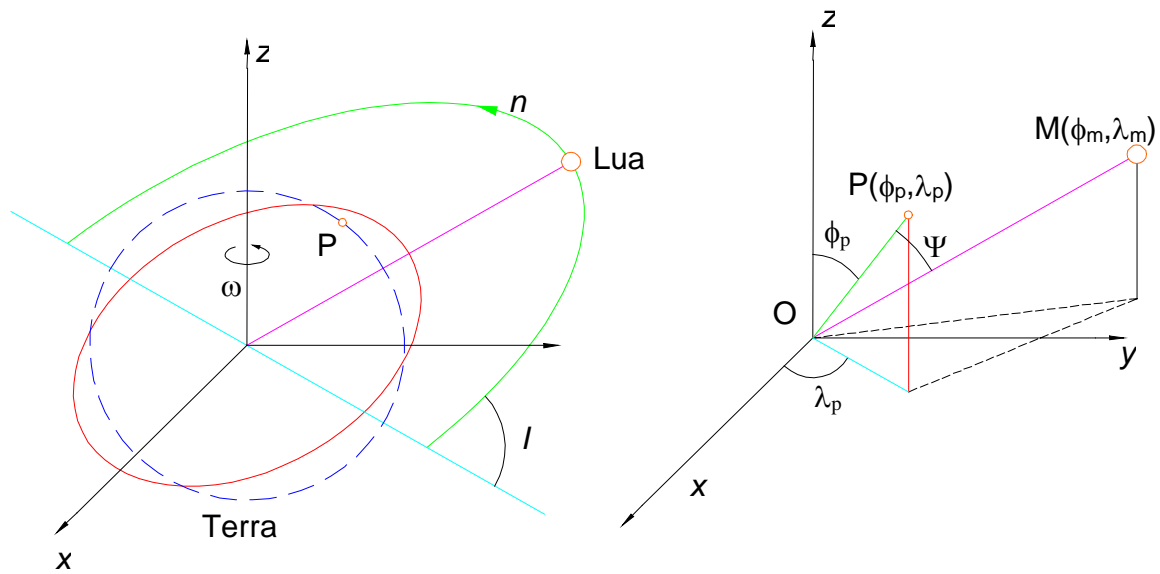
$$\cos \psi = \cos \phi_p \cos \phi_m + \sin \phi_p \sin \phi_m \cos(\lambda_p + \lambda_m) \quad (6.13)$$

em que  $\phi_p, \phi_m, \lambda_p, \lambda_m$  estão representadas pela figura 6.4.

conseqüentemente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(3 \cos^2 \psi - 1) &= \frac{1}{2}(3 \cos^2 \phi_p - 1) \frac{1}{2}(3 \cos^2 \phi_m - 1) + \\ &+ \frac{3}{4} \sin^2 \phi_p \sin^2 \phi_m \cos 2(\lambda_p - \lambda_m) + \\ &+ \frac{3}{4} \sin 2\phi_p \sin 2\phi_m \cos(\lambda_p - \lambda_m) \end{aligned} \quad (6.14)$$

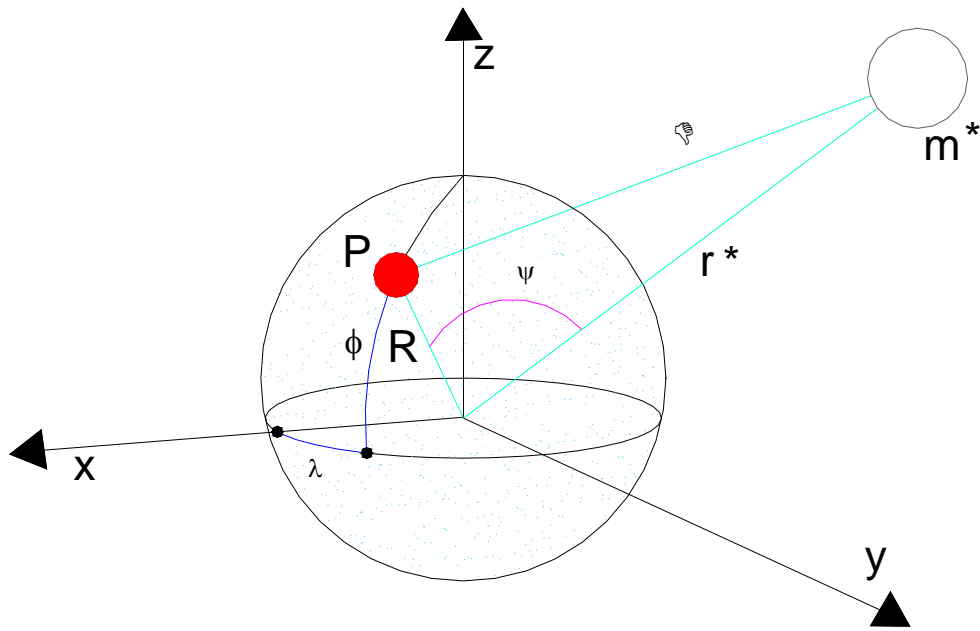
Sendo que a co-latitude  $\phi_p$  de um ponto fixo a Terra é uma constante, a amplitude da maré em P varia com  $\lambda_p, \phi_m, \lambda_m$ . A variação no 1º termo da equação (6.14) é determinada pela variação no tempo de  $\cos^2 \phi_m = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\phi_m)$ . Conseqüentemente, esse termo varia com freqüência  $2n$  e origina a formação de uma *maré quinzenal*. O 2º termo varia com freqüência  $2(\omega - n) \approx 2\omega$  e origina a formação de uma *maré semidiurna*, e o 3º termo varia com freqüência  $(\omega - n) \approx \omega$  e origina a formação de uma *maré diurna*.



**Figura 6.4** – (a) O eixo de simetria da distorção da maré passa através dos centros da Terra e da Lua, embora a Terra gire sobre o eixo  $z$  com velocidade angular  $\omega$ , a Lua tem movimento  $n$  e uma inclinação orbital  $I$ , com relação ao plano equatorial da Terra. (b) As co-latitudes e longitudes da Lua ( $\phi_m, \lambda_m$ ) e o ponto  $P(\phi_p, \lambda_p)$  na superfície da Terra. Note que a longitude  $\lambda_p$  (e  $\lambda_m$ ) é medida por uma direção fixa no espaço e não por uma direção que gira com a Terra.

Assim, o potencial gerado pelo corpo perturbador (Lua) de massa  $m^*$  num ponto  $P$ , localizado na longitude  $\lambda$ , e latitude  $\phi$  e distância geocêntrica  $R$  da superfície terrestre, conforme a figura 6.5 é dado por (equação 6.7 escrita de forma genérica):

$$U(\vec{R}) = \frac{Gm^*}{r^*} \sum_{\ell=2}^{\infty} \left( \frac{R}{r^*} \right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \psi) \quad (6.15)$$



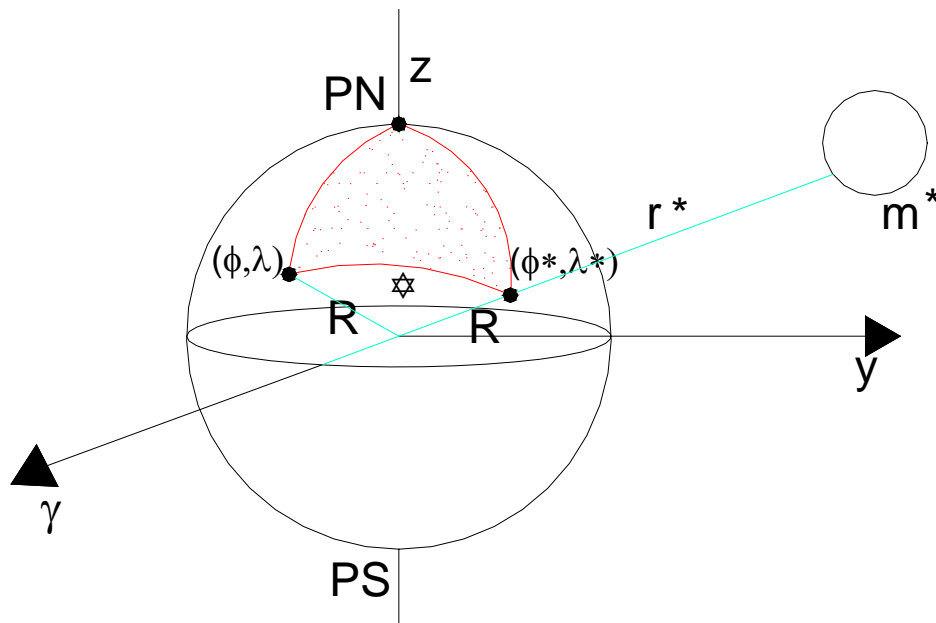
**Figura 6.5** – Potencial gerado pela Lua em um ponto da superfície da Terra.

em que  $r^*$  é a distância geocêntrica até a massa  $m^*$ ,  $\Delta$  é a distância geocêntrica de  $P$  até o corpo perturbador,  $\psi$  é o ângulo geocêntrico entre  $P$  e  $m^*$  e  $P_{\ell}$  são os polinômios de Legendre.

Aplicando o teorema da adição de Legendre, na expressão 6.15, tem-se:

$$U(\bar{R}) = \frac{Gm^*}{r^*} \sum_{\ell} \left( \frac{R}{r^*} \right)^{\ell} \sum_m (2 - \delta_{0m}) \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} \times P_{\ell m}(\sin \phi) P_{\ell m}(\sin \phi^*) \cos m(\lambda - \lambda^*) \quad (6.16)$$

em que,  $P_{\ell m}$  são os polinômios associados de Legendre,  $R$  o raio da Terra,  $r^*$  a distância do centro da Terra ao corpo perturbador,  $G$  a constante gravitacional,  $(\phi, \lambda)$  e  $(\phi^*, \lambda^*)$  são as extremidades do arco  $\Psi$ , onde  $\phi, \phi^*$  são as latitudes,  $\lambda, \lambda^*$  as longitudes e  $\delta_{0m}$  o delta de Kronecker.



**Figura 6.6** – Potencial terrestre

Sabendo-se que a Terra é plástica, isto é, não é perfeitamente rígida e nem completamente elástica, considera-se que a distorção do potencial, causado pelo potencial perturbador, consiste apenas de um parâmetro  $k_{\ell}$ , que é o coeficiente de

elasticidade de grau  $\ell$ , os quais são denominados de *Números de Love*. Na superfície da Terra em que  $r=R$  o potencial é dado por:

$$\Delta U(\vec{R}) = \sum_{\ell} k_{\ell} U_{\ell}(\vec{R}) \quad (6.17)$$

Considerando, como corpo perturbador a Lua (raciocínio análogo pode ser feito pelo Sol), de massa  $m^*$  e orbitando a uma distância  $r^*$  do centro da Terra, o potencial na superfície da Terra, causado pela Lua, é dado por Pilchowski (1981):

$$\Delta U(\vec{R}) = G \frac{m^*}{r^*} \sum_{\ell} k_{\ell} \left( \frac{R}{r^*} \right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \psi) \quad (6.18)$$

O potencial devido a Lua, num ponto externo à Terra ( $r > R$ ), em um satélite artificial situado a uma distância geocêntrica  $r$ , é proporcional à razão  $\left( \frac{R}{r} \right)^{\ell+1}$  tal que na superfície da Terra essa razão é 1. Portanto, pelo teorema de Dirichlet, o potencial perturbador das marés, no exterior da Terra, pode ser representado segundo a equação dada por Pilchowski (1981):

$$\Delta U(\vec{r}) = G \frac{m^*}{r^*} \sum_{\ell=2}^{\ell} k_{\ell} \left( \frac{R}{r^*} \right)^{\ell} \left( \frac{R}{r} \right)^{\ell+1} P_{\ell}(\cos \psi) \quad (6.19)$$

em que,  $r$  é a distância do satélite ao centro da Terra.



## 7. MÉTODOS FUNDAMENTAIS DE PERTURBAÇÃO

Segundo K. Rama Rao (1986) diversas teorias de órbitas de satélites são classificadas em três métodos fundamentais. O primeiro é o “método analítico”, ou seja, o “método geral de perturbação”. Neste método, a derivação da teoria envolve o uso de aproximações, expansões em séries e integração analítica. O estado do satélite é dado em função do tempo a partir das soluções fechadas. Embora as soluções que ficam, às vezes, na forma paramétrica necessitem do computador, não envolvem nenhuma integração numérica em computador.

As características principais dos métodos analíticos são: (a) manipulações matemáticas laboriosas na formulação; (b) modelos simples de forças perturbadoras, com aplicação restrita, a fim de obter soluções fechadas; (c) melhor visualização dos efeitos de várias perturbações, mesmo na derivação da teoria, assim facilitando a compreensão do comportamento físico de um satélite em geral, mesmo antes de ser aplicada a um satélite específico; (d) pouco tempo computacional; (e) muito geral, por natureza; (f) precisão razoável de cálculo; (g) cálculos feitos num só passo, independentemente do período.

Os métodos analíticos tendem a ser complexos quando se requer alta precisão, mas, em geral, são econômicos. A estimação da trajetória pode ser precisa em intervalos de curto tempo, mas se torna menos precisa com o tempo.

O segundo método fundamental é o “método numérico”, ou seja, o “método especial de perturbação”. Neste método, a derivação da teoria resulta num programa de computador que integra diretamente as equações de movimento de satélite perturbado usando um procedimento numérico apropriado. A solução é obtida só depois de considerar um satélite específico.

As características principais dos métodos numéricos são: (a) simples na sua formulação; (b) modelos complexos e mais realísticos de forças perturbadoras, como aplicação num campo amplo e com flexibilidade de mudar modelos facilmente sem

nenhuma perda na precisão; (c) visualização difícil dos efeitos de várias perturbações no sentido de que várias trajetórias triviais devem ser integradas cada vez que um parâmetro é variado, para anotar sua influência; (d) grandes tempos de computação; (e) muito específicos, por natureza; (f) melhor precisão, embora os erros de truncamento e arredondamento sejam significativos nas previsões de longos períodos; (g) cálculos feitos passo por passo.

Os métodos numéricos tendem a ser dispendiosos ao longo do tempo. Na estimação da trajetória, estes métodos são muito eficientes.

O terceiro método fundamental é o método semianalítico, que surgiu como um compromisso entre o método analítico e o método numérico. Quando a complexidade de modelo da força perturbadora torna impossível a implementação da teoria analítica e muito dispendiosa a teoria numérica, a tática é resolver uma parte do problema analiticamente e a outra, numericamente. Seguindo esta idéia, foram desenvolvidos os métodos semianalíticos que combinam a precisão dos métodos numéricos com a eficiência dos métodos analíticos.

Os principais problemas na teoria de determinação de órbitas de satélites são (Lafontaine, 1979): (a) dificuldade em derivar modelos matemáticos mais precisos de fenômenos físicos relevantes; (b) a complexidade teórica e computacional dos modelos mais realísticos; (c) a identificação de novos fenômenos físicos junto com modelos apropriados. A tendência presente da teoria orbital é tentar resolver estes problemas e usar mais frequentemente os métodos semianalíticos.

A teoria analítica, em geral, depende do método das médias, que basicamente separa o movimento periódico longo e secular. Neste processo, o espaço de elementos osciladores é transformado num espaço de elementos médios usando um conjunto de equações analíticas. As equações de transformação envolvem funções periódicas curtas da função perturbadora e as taxas e elementos médios contêm somente o movimento de longo período e secular. A integração das equações de elementos médios é feita numericamente e, a seguir a transformação analítica inversa é feita em sentido contrário para elementos osciladores.

O método usado neste trabalho será o método analítico.

## 7.1. AS EQUAÇÕES PLANETÁRIAS DE LAGRANGE

As expansões das funções perturbadoras de Kozai, Kaula e Balmino, como efetuadas, fornecem explicitamente a dependência do potencial perturbador em relação aos elementos orbitais. As variações orbitais, do corpo perturbado, serão obtidas através das Equações Planetárias de Lagrange:

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial U}{\partial M} \\
 \frac{de}{dt} &= \frac{-\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial U}{\partial \omega} + \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial U}{\partial M} \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{-1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial U}{\partial \Omega} + \frac{\operatorname{cos} i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial U}{\partial \omega} \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial U}{\partial i} \\
 \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial U}{\partial e} - \frac{\operatorname{cos} i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial U}{\partial i} \\
 \frac{dM}{dt} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial U}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial U}{\partial e}
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

As equações de Lagrange, já considerando os efeitos do achatamento na maré são dadas por Kozai (1959b):

As variações de  $e$  e de  $i$  são obtidas conforme as equações:

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt} &= \frac{-\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial U}{\partial \omega} + \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial U}{\partial M} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{-1}{na^2\sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial U}{\partial \Omega} + \frac{\operatorname{cos} i}{na^2\sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i}\end{aligned}\quad (7.2)$$

Usando as variações  $\delta e$  e  $\delta i$ , pode-se derivar  $\delta \omega$  e  $\delta \Omega$  pelas fórmulas:

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial U}{\partial i} + \frac{d\dot{\Omega}}{de} \delta e + \frac{d\dot{\Omega}}{di} \delta i \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial U}{\partial e} - \frac{\operatorname{cos} i}{na^2\sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial U}{\partial i} + \frac{d\dot{\omega}}{de} \delta e + \frac{d\dot{\omega}}{di} \delta i\end{aligned}\quad (7.3)$$

## 8. MODELO DE KOZAI

Desde o começo da segunda metade do século passado os efeitos de perturbações luni-solares sobre órbitas de satélites artificiais têm sido considerados, sendo um dos trabalhos pioneiros o artigo de Kozai (1959<sup>a</sup>). Neste trabalho Kozai desenvolve o potencial em termos de elementos orbitais de um satélite próximo da Terra e escreve, através das equações de Lagrange, expressões para as principais perturbações seculares. A expressão do potencial de Kozai para tal problema contém apenas termos seculares e de longo período, que será apresentada nos capítulos posteriores. Em um trabalho posterior, Kozai (1959<sup>b</sup>), baseado em observações de satélites, determina os números de Love como sendo uma constante com uma pequena variação de  $0.29 \pm 0.03$  e o tempo de atraso como sendo  $10 \pm 5$  minutos.

### 8.1.POTENCIAL TERRESTRE DEVIDO À MARÉ (KOZAI, 1965)

O potencial lunar da Terra, usando polinômios de Legendre pode ser expandido como:

$$U = \frac{Gm^* R^2}{r^{*3}} \left( P_2(\cos \psi) + \frac{R}{r^*} P_3(\cos \psi) + \dots \right), \quad (8.1)$$

em que :  $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$  e  $P_3(x) = (5x^2 - 3x)/2$ .

Assumindo que o raio da Terra  $R$  é constante, a deformação da maré na Terra devido à atração da Lua, definida na equação (6.18) como:

$$\frac{RkU}{G} = \frac{m^* R^4}{m_t r^{*3}} \left\{ k_2 P_2(\cos \Psi) + k_3 \frac{R}{r^*} P_3(\cos \Psi + \dots) \right\} \quad (8.2)$$

de um modo semelhante pode-se introduzir a atração do Sol. Fazendo as correções para o potencial de um satélite devido à maré terrestre, temos:

$$U = \frac{G\beta R^5}{r^3 r^{*3}} \left( k_2 P_2(\cos \Psi) + k_3 \frac{R^2}{rr^*} P_3(\cos \Psi) + \dots \right) \quad (8.3)$$

em que  $G$  é a constante gravitacional,  $\beta$  é a razão da massa da Lua pela massa da Terra,  $r$  é a distância geocêntrica do satélite,  $r^*$  é a distância do centro da Terra à Lua e  $P_2(\cos \Psi)$  é o polinômio de Legendre de grau dois e  $\Psi$  é o ângulo entre a distância geocêntrica do satélite à direção da Lua.

Expressaremos essa função em termos de coordenadas esféricas e depois em função de elementos orbitais:  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$  e  $M$ . Para isso usaremos as relações clássicas do problema de dois corpos.

a) Do triângulo de Neper dada a figura 8.1, temos:

$$\operatorname{sen}^2 \phi = \operatorname{sen}^2 i - \frac{1 - \cos(2\omega + 2v)}{2} \quad (8.4)$$

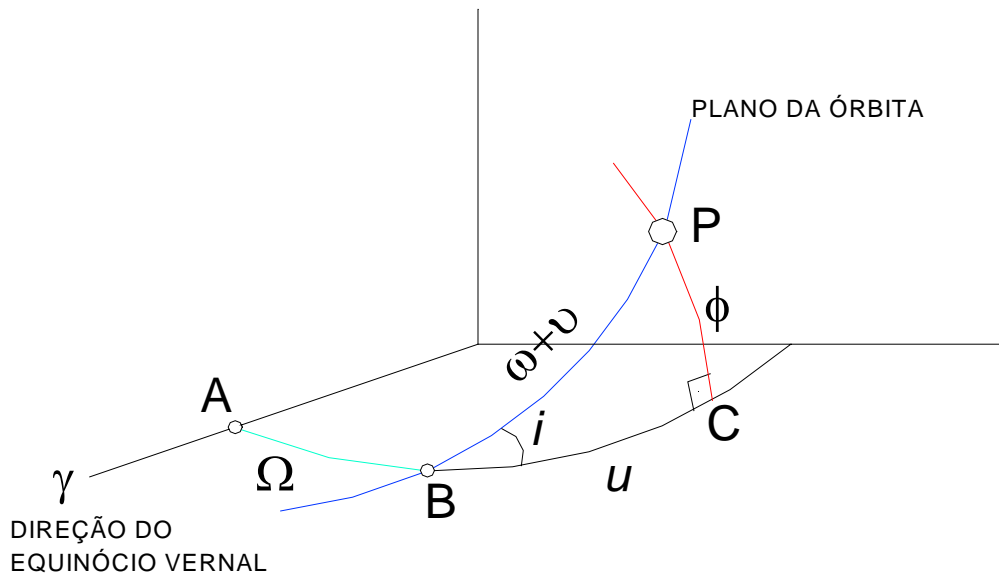
b) Da relação entre a anomalia verdadeira e anomalia excêntrica, temos:

$$\frac{r}{a} \cos v = \cos E - e \quad (8.5)$$

c) Utilizando as Tábuas de Cailey, podemos colocar a anomalia verdadeira em termos da anomalia média:

$$\frac{a^n}{r^n} \cos(pv + \varphi) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p + b_p}{2} \cos(pM + \varphi) + \frac{a_p - b_p}{2} \cos(pM - \varphi) \quad (8.6)$$

em que  $a_p$  e  $b_p$  são tabelados.



**Figura 8.1** – Triângulo – órbita – equador - meridiano

Sendo a longitude média é dada por:

$$\lambda = \omega + \Omega + M \quad (8.7)$$

$$e \quad n^2 = G \frac{m}{a^3} \quad (8.8)$$

Contudo, a expressão de Kozai para o potencial fica:



$$U = n^{*2} \beta a^2 k_2 \left[ \begin{array}{l} \left\{ 1 + 3e^* \cos(\lambda^* - \omega^* - \Omega^*) \right\} \times \left\{ \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \right) A + \frac{15}{8} e^2 B \right\} - \\ - 4e^* \operatorname{sen}(\lambda^* - \omega^* - \Omega^*) \times \\ \times \left\{ \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \right) A^* + \frac{15}{8} e^2 B^* \right\} \end{array} \right] \quad (8.9)$$

em que,

$$\beta = \frac{m^*}{m_T} = 0.0121835 \quad (8.10)$$

e,

$$\begin{aligned} A = & \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i \right) \left( 1 - \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i^* \right) \\ & + \frac{3}{16} \operatorname{sen} 2i \operatorname{sen} 2i^* \cos(\Omega - \Omega^*) \\ & + \frac{3}{16} \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}^2 i^* \cos 2(\Omega - \Omega^*) \\ & + \frac{3}{8} \operatorname{sen}^2 i^* \left( 1 - \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i \right) \cos 2(\lambda^* - \Omega^*) \\ & + \frac{3}{8} \operatorname{sen}^2 i \cos^4 \frac{i^*}{2} \cos 2(\lambda^* - \Omega) \\ & - \frac{3}{8} \operatorname{sen} 2i \operatorname{sen} i^* \cos^2 \frac{i^*}{2} \cos(2\lambda^* - \Omega - \Omega^*) \\ & + \frac{3}{8} \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}^4 \frac{i^*}{2} \cos 2(\lambda^* - 2\Omega + \Omega) \\ & + \frac{3}{8} \operatorname{sen} 2i \operatorname{sen} i^* \operatorname{sen}^2 \frac{i^*}{2} \cos(2\lambda^* + \Omega - 3\Omega^*) \end{aligned} \quad (8.11)$$

$$\begin{aligned}
B = & \cos^4 \frac{i}{2} \cos^4 \frac{i^*}{2} \cos 2(\lambda^* - \omega - \Omega) \\
& + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 i \left( 1 - \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i^* \right) \cos 2\omega \\
& + \frac{1}{2} \cos^4 \frac{i}{2} \operatorname{sen}^2 i^* \cos 2(\omega + \Omega - \Omega^*) \\
& + \operatorname{sen}^4 \frac{i}{2} \cos^4 \frac{i^*}{2} \cos 2(\omega - \Omega + \lambda^*) \\
& + \cos^4 \frac{i}{2} \operatorname{sen}^4 \frac{i^*}{2} \cos 2(\omega + \Omega + \lambda^* - 2\Omega^*) \\
& + \operatorname{sen}^4 \frac{i}{2} \operatorname{sen}^4 \frac{i^*}{2} \cos 2(\lambda^* - 2\Omega^* - \omega + \Omega) \\
& + \frac{3}{8} \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}^2 i^* \cos 2(\lambda^* - \Omega^* - \omega) \\
& + \frac{3}{8} \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}^2 i^* \cos 2(\lambda^* + \omega - \Omega^*) \\
& + \operatorname{sen} i \cos^2 \frac{i}{2} \operatorname{sen}' \cos^2 \frac{i^*}{2} \cos(2\lambda^* - \Omega^* - 2\omega - \Omega) \\
& - \frac{1}{2} \operatorname{sen} i \cos^2 \frac{i}{2} \operatorname{sen} 2i^* \cos(2\omega + \Omega - \Omega^*) \\
& + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^4 \frac{i}{2} \operatorname{sen}^2 i^* \cos 2(\omega - \Omega + \Omega^*) \\
& + \frac{1}{2} \operatorname{sen} i \operatorname{sen}^2 \frac{i}{2} \operatorname{sen} 2i^* \cos(2\omega - \Omega + \Omega^*) \\
& + \operatorname{sen} i \operatorname{sen}^2 \frac{i}{2} \operatorname{sen} i^* \cos^2 \frac{i^*}{2} \cos(2\lambda^* + 2\omega - \Omega - \Omega^*) \\
& - \operatorname{sen} i \cos^2 \frac{i}{2} \operatorname{sen} i^* \operatorname{sen}^2 \frac{i^*}{2} \cos(2\lambda^* + 2\omega + \Omega - 3\Omega^*) \\
& + \operatorname{sen} i \operatorname{sen}^2 \frac{i}{2} \operatorname{sen} i^* \operatorname{sen}^2 \frac{i^*}{2} \cos(2\lambda^* - 3\Omega^* - 2\omega + \Omega)
\end{aligned} \tag{8.12}$$

Nas equações (8.11) e (8.12) acima,  $\lambda^*$  é a longitude a Lua,  $\Omega$  e  $\Omega^*$  referem-se as longitudes do nodo ascendente do satélite e da Lua respectivamente, e  $\omega$ ,  $\omega^*$  são os respectivos argumentos do perigeu.

Selecionando todos os termos dependentes de  $\lambda^*$  e trocando *cos* por *sen*, tem-se as expressões para  $A^*$  e  $B^*$ , a partir de  $A$  e  $B$ .

## 9. FUNÇÃO PERTURBADORA - MODELO DE KOZAI

Efetuada expansões em harmônicos esféricos e em sistemas de coordenadas convenientes, escrevem-se usando o modelo de Kozai alguns termos do potencial devido à maré agindo sobre o satélite.

Considerando a Lua como corpo perturbador, desconsiderando-se a defasagem, restringindo-se aos termos seculares e de longo período, devido apenas ao segundo harmônico, o potencial pode ser expresso conforme a equação abaixo:

$$\begin{aligned}
 U = n^{*2} \beta \frac{R^5}{a^3} k_2 \{ & (1-e^2)^{-3/2} \left( \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 i \right) \left( 1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 i^* \right) + \right. \\
 & \frac{3}{16} \text{sen} 2i \text{sen} 2i^* \cos(\Omega - \Omega^*) + \frac{3}{16} \text{sen} i \text{sen}^2 i \cos 2(\Omega - \Omega^*) \Big) + \\
 & \frac{15}{8} e^2 \left( \frac{1}{2} \text{sen}^2 i \left( 1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 i^* \right) \cos 2\omega + \frac{1}{2} \cos^4 \left( \frac{i}{2} \right) \text{sen}^2(i^*) \cos 2(\omega + \Omega - \Omega^*) - \right. \\
 & \left. \frac{1}{2} \text{sen} i \cos^2 \left( \frac{i}{2} \right) \text{sen} 2i^* \cos(2\omega + \Omega + \Omega^*) + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2} \text{sen}^4 \left( \frac{i}{2} \right) \text{sen}^2 i^* \cos 2(\omega - \Omega + \Omega^*) + \frac{1}{2} \text{sen} i \text{sen}^2 \left( \frac{i}{2} \right) \text{sen} 2i^* \cos(2\omega - \Omega + \Omega^*) \Big) \}
 \end{aligned}
 \tag{9.1}$$

## 9.1. PERTURBAÇÕES SECULARES

A parte secular da função perturbadora devido às marés para o modelo de Kozai é:

$$U = n^{*2} \beta \frac{R^5}{a^3} k_2 (1-e^2)^{-3/2} \left( \frac{1}{4} \right) \left( 1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 i \right) \left( 1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 i^* \right) \quad (9.2)$$

Deve-se considerar que a inclinação da Lua varia continuamente devido ao geopotencial e à atração do Sol, segundo a equação (Kozai, 1965):

$$\text{sen}^2 i^* = 0.1644 + 0.0652 \cos(N) - 0.0006(2N) \quad (9.3)$$

$$N = 259.183^\circ - 0.0529539^\circ t + 1.55747^\circ \times 10^{-12} t^2 + 4.56055^\circ \times 10^{-20} t^3 \quad (9.4)$$

em que  $t$  é dado em graus/dia, sendo  $N$  a longitude do nodo ascendente em relação a eclíptica.

Estes termos são muito importantes para analisar observações de satélites por um longo período de tempo. Como os movimentos seculares devido às marés, que são as marés permanentes não podem ser distinguidas do valor do  $J_2$  (coeficiente que representa as deformações zonais da Terra, denominado de **primeiro harmônico zonal do geopotencial**), isto é, os efeitos seculares já são incluídos na

análise para a determinação do  $J_2$ , a relação da contribuição da maré permanente para esse harmônico, é a grosso modo  $0.29k_2 \times 10^{-4}$ .

É importante ressaltar que sendo o fator perturbador  $\frac{1.63 \times 10^{-5}}{n^2}$  para a Lua ( $\frac{0.75 \times 10^{-5}}{n^2}$  para o Sol), em que o movimento médio  $n$  do satélite é expressado em revoluções por dia, algumas das amplitudes para os termos perturbadores podem ficar bastante altas.

## 9.2. VARIAÇÕES DOS ELEMENTOS ORBITAIS

Foram calculadas as variações dos elementos orbitais, através das equações de Lagrange, pelo método das aproximações sucessivas. O potencial devido à maré foi desenvolvido de forma geral pelo programa Mathematica e alguns casos foram especificados.

Considerando apenas os **termos seculares**, temos o potencial descrito pela expressão (10.2). Como não existem variáveis angulares em tal expressão, temos:

$$\frac{\partial U}{\partial M} = \frac{\partial U}{\partial \omega} = \frac{\partial U}{\partial \Omega} = 0 \quad (9.5)$$

e, portanto:

$$\dot{a} = 0, \dot{e} = 0 \text{ e } \dot{i} = 0 \quad (9.6)$$

Integrando, temos:

$$a = a_0, e = e_0 \text{ e } i = i_0 \quad (9.7)$$

Para a variação secular da longitude do nodo ascendente, temos:

$$\Omega = n_{\Omega}t + \Omega_0 \quad (9.8)$$

em que:

$$n_{\Omega} = -\frac{3R^5\beta\cos i(1-3\cos 2i^*)k_2n^{*2}}{16a^5(-1-e^2)^2n} \quad (9.9)$$

Para a variação secular do argumento do perigeu, temos:

$$\omega = n_{\omega}t + \omega_0 \quad (9.10)$$

em que:

$$n_{\omega} = \frac{3R^5\beta(3+5\cos 2i)(1+3\cos 2i^*)k_2n^{*2}}{64a^5(-1+e^2)^2n} \quad (9.11)$$

Para a variação secular da anomalia média, temos:

$$M = n_Mt + M_0 \quad (9.12)$$

em que:

$$n_M = \frac{3R^5\beta(1+3\cos 2i)(1+3\cos 2i^*)k_2n^{*2}}{64a^5(1-e^2)^{3/2}n} \quad (9.13)$$



Considerando-se agora a influência da **inclinação da Lua** para o cálculo das variações seculares da longitude do nodo ascendente, do argumento do perigeu e da anomalia média, descrita pela fórmula (9.3), temos apenas a parte secular do potencial:

$$U = n^{*2} \beta \frac{R^5}{a^3} k_2 (1-e^2)^{-3/2} \left( \frac{1}{4} \right) \left( 1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 i \right) \left( 1 - \frac{3}{2} \left( \begin{array}{l} 0.1644 + 0.0652 \cos(N) - \\ 0.0006 \cos(2N) \end{array} \right) \right) \quad (9.14)$$

### 9.2.1 RESULTADOS

Embora teoricamente, perturbações geopotenciais se estendam até o infinito, elas diminuem com a altura do satélite. Também as perturbações devidas ao arrasto atmosférico, diminuem com a altura. Assim, por exemplo, um satélite a uma altura de 200 km, daria poucas revoluções ao redor da Terra antes de cair, ao passo que a uma altura de 600km, ele ficaria em órbita, ainda por dezenas de anos. Acima de 700 km, a perturbação devido a pressão de radiação solar direta é maior do que a perturbação devido ao arrasto atmosférico. Para satélites altos, por exemplo, geostacionários a perturbação luni-solar é da ordem da perturbação devido ao geopotencial.

A escolha de uma órbita para se medir efeitos perturbadores devidos à maré, deve ser tal que, não seja muito baixa para que seu efeito não seja totalmente mascarado pelo arrasto e nem muito alto para não ser mascarado pela atração luni-solar.

Assim, para exemplificar a ordem dos efeitos devidos à perturbação da maré terrestre, escolhe-se um satélite em uma órbita com as seguintes características:

$$a = 7000Km;$$

$$e = 0.01;$$

$$i = 30^\circ;$$

$$\Omega = 60^\circ;$$

$$\omega = 30^\circ.$$

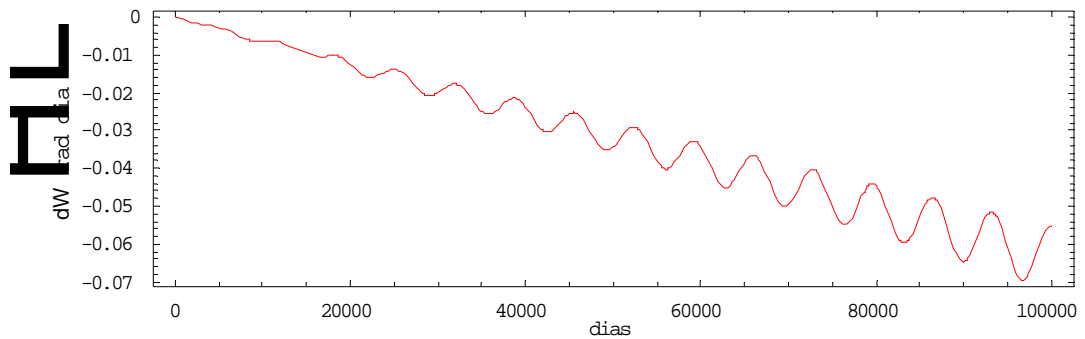
Nas integrações das equações do movimento para os casos considerados, foi desenvolvido um programa em linguagem de programação Mathematica. Este programa gera um arquivo de saída, onde dadas às condições iniciais do satélite artificial, são obtidos as variações dos elementos orbitais para cada caso a ser apresentado.

Segundo o método das aproximações sucessivas, encontramos para as variações da longitude do nodo ascendente e do argumento do perigeu, dadas pelas equações (9.9) e (9.11), os seguintes valores:

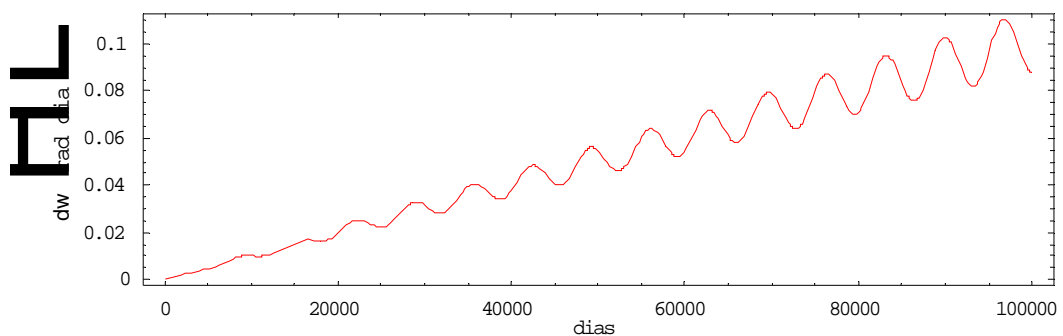
$$n_{\Omega} = -8.33781 \times 10^{-7} \text{ rad / dia}$$

$$n_{\omega} = 1.3238 \times 10^{-6} \text{ rad / dia}$$

Considerando-se a variação da inclinação da Lua, em que as expressões são encontradas no apêndice A, temos os seguintes resultados:



**Figura 9.1** – Variação da longitude do nodo ascendente, levando em conta a inclinação da Lua.



**Figura 9.2** – Variação do argumento do perigeu, levando em conta a inclinação da Lua.

Considerando agora, os termos de **longo período**, descrito pela fórmula (9.1), obtemos as expressões das variações nos elementos orbitais para as seguintes situações:

**CASO 1:**

Considerando a Lua em movimento elíptico, não precessionada:

$$\Omega^* = \Omega_0^*$$

$$\omega^* = \omega_0^*$$

$$\Omega = n_{\Omega}t + \Omega_0$$

$$\omega = n_{\omega}t + \omega_0$$

**CASO 2:**

Considerando a Lua em órbita elíptica precessionada ao redor da Terra:

$$\Omega^* = n_{\Omega^*}t + \Omega_0^*$$

$$\omega^* = n_{\omega^*}t + \omega_0^*$$

$$\Omega = n_{\Omega}t + \Omega_0$$

$$\omega = n_{\omega}t + \omega_0$$

As expressões das variações nos elementos orbitais, encontram-se no apêndice A.

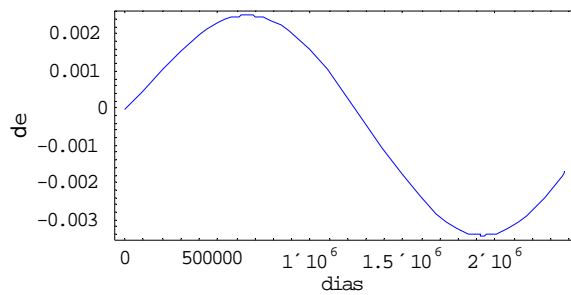
Aplicando as equações de Lagrange e considerando as variações devidas à longitude do nodo ascendente e o argumento do perigeu, temos:

**Para a variação da excentricidade:**

**Caso 1:**

Maior Amplitude: 0.00227218

Período:  $2.37316 \times 10^6$  dias

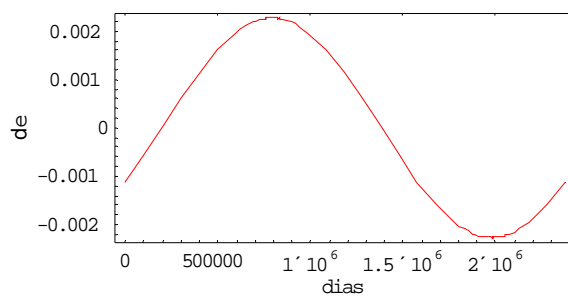


**Figura 9.3-**Representação da variação da excentricidade (caso1)

**Caso 2:**

Maior Amplitude: 0.00227218

Período:  $2.37316 \times 10^6$  dias



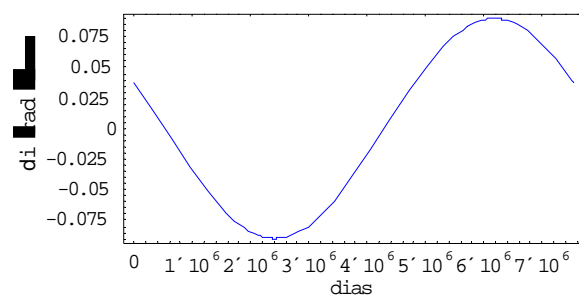
**Figura 9.4-**Representação da variação da excentricidade (caso2)

**Para a variação da inclinação:**

**Caso 1:**

Maior Amplitude: 0.0899087 rad

Período:  $7.53577 \times 10^6$  dias

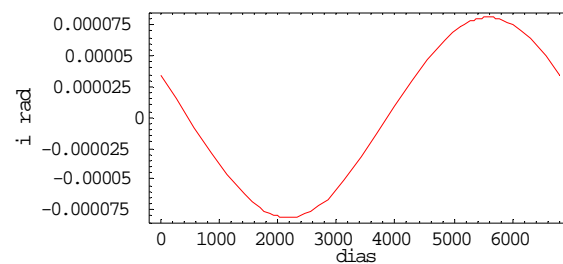


**Figura 9.5-**Representação da variação da inclinação (caso 1)

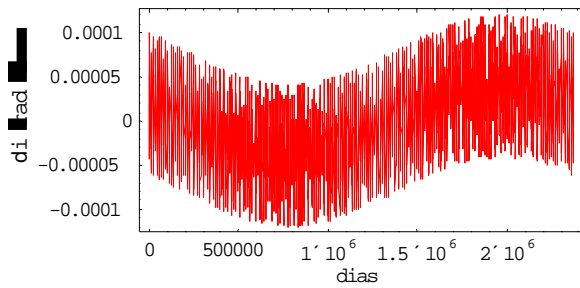
**Caso 2:**

Maior Amplitude: 0.000081215 rad

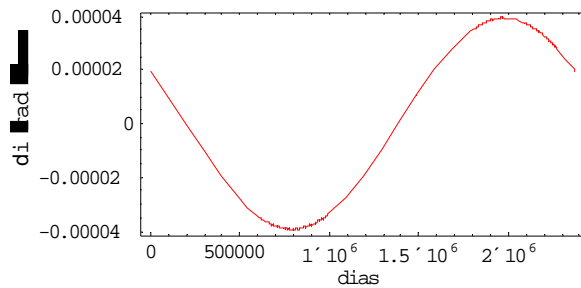
Período: 6807.10 dias



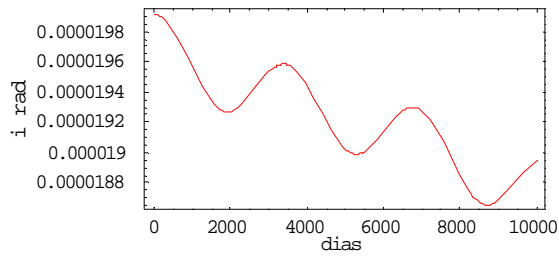
**Figura 9.6-**Representação da variação da inclinação (caso 2) com período de aproximadamente 6800 dias.



**Figura 9.7-**Representação da variação da inclinação (caso2) com período de aproximadamente  $2.4 \times 10^6$  dias.



**Figura 9.8-**Representação da variação da inclinação (caso2) com período de aproximadamente  $2.4 \times 10^6$  dias, desconsiderando-se o termo de maior amplitude.



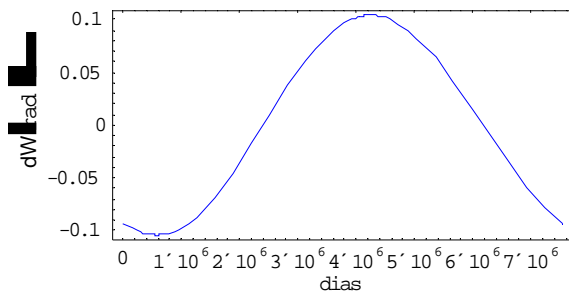
**Figura 9.9-**Representação da variação da inclinação (caso2) com menor período de aproximadamente 3400 dias

**Para a longitude do nodo ascendente:**

**Caso 1:**

Maior Amplitude: 0.103817 rad

Período:  $7.53577 \times 10^6$  dias



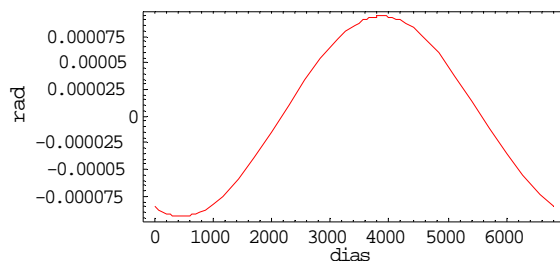
**Figura 9.10-**Representação da variação da longitude do nodo ascendente (caso1)



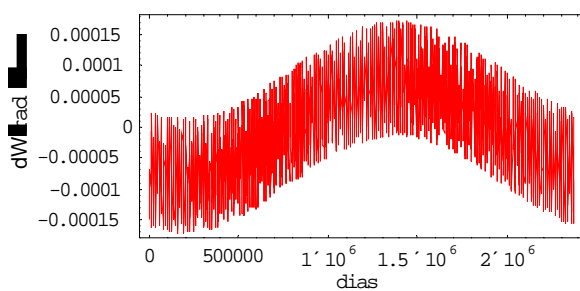
**Caso 2:**

Maior Amplitude: 0.0000937784 rad

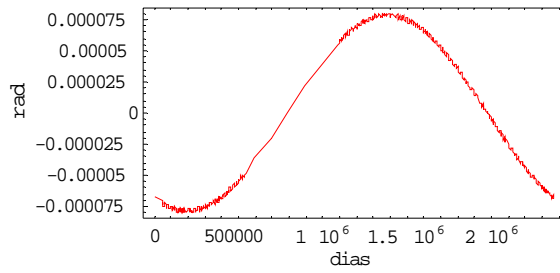
Período: 6807.10dias



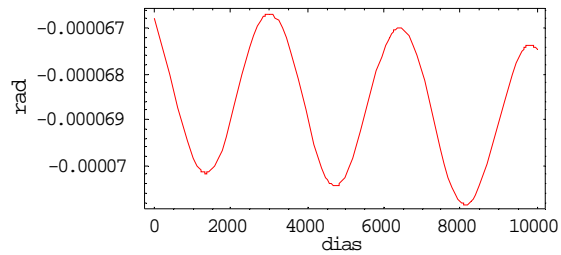
**Figura 9.11**-Representação da variação da longitude do nodo ascendente (caso2), com um período de aproximadamente 6800 dias.



**Figura 9.12**-Representação da variação da longitude do nodo ascendente (caso2), com um período de  $2.4 \times 10^6$  dias.



**Figura 9.13**-Representação da variação da longitude do nodo ascendente (caso2) com período de aproximadamente  $2.4 \times 10^6$  dias, desconsiderando-se o termo de maior amplitude.



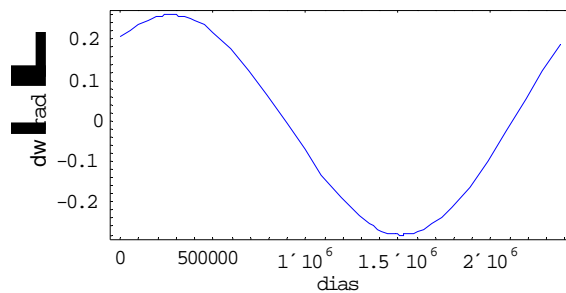
**Figura 9.14**-Representação da variação da inclinação (caso2) com menor período de aproximadamente 3400 dias

**Para o argumento do perigeu:**

**Caso 1:**

Maior Amplitude: 0.22715 rad

Período:  $2.37316 \times 10^6$  dias

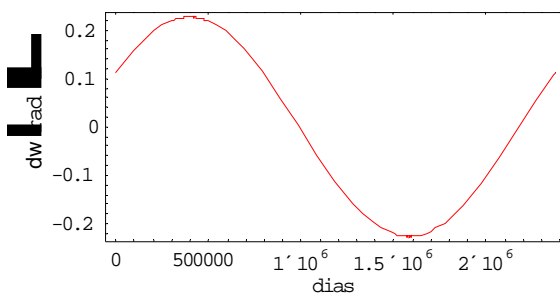


**Figura 9.15-**Representação da variação do argumento do perigeu (caso1)

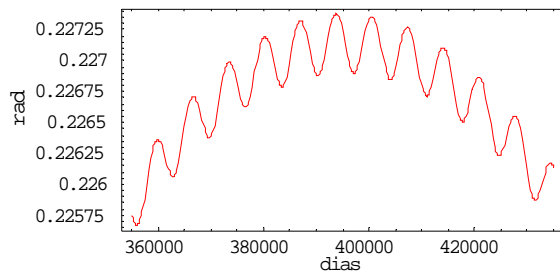
**Caso 2:**

Maior Amplitude: 0.22715 rad

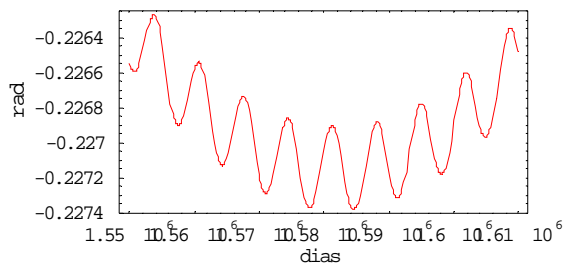
Período:  $2.37316 \times 10^6$  dias



**Figura 9.16-**Representação da variação do argumento do perigeu (caso2)



**Figura 9.17-**Representação da variação do argumento do perigeu (caso2), na região de máximo, com menor período de aproximadamente 6800 dias.



**Figura 9.18-**Representação da variação do argumento do perigeu (caso2), na região de mínimo, com menor período de aproximadamente 6800 dias.

## 9.2.2 ANÁLISE DOS RESULTADOS – KOZAI

Através dos resultados obtidos para o modelo de Kozai, verifica-se que para a variação da *excentricidade* não existem diferenças nos termos de maior amplitude (cerca de 0.002) e períodos (cerca de  $2.4 \times 10^6$  dias) para os casos 1 e 2 (figuras 9.3 e 9.4), isto significa que a excentricidade não sofre uma influência significativa da precessão da Lua.

Para a *inclinação* verifica-se que a influência da precessão da Lua é bastante significativa, pois foi encontrado um período bem menor (cerca de 6800 dias), com seu termo de maior amplitude igual à aproximadamente 0.00008 radianos (figura 9.6). Esse período é gerado pelo termo na função perturbadora que contém  $\cos(\Omega - \Omega^*)$  (vide equação 9.1). Existe um segundo termo de maior amplitude (0.00004 radianos) que corresponde a um período de aproximadamente  $2.4 \times 10^6$  dias (figura 9.7). Esse período é gerado pelo termo na função perturbadora que contém  $\cos(2\omega)$  (vide equação 9.1). Com o objetivo de visualizar melhor o efeito dessas perturbações, desconsidera-se da variação da inclinação seu termo de maior amplitude. Encontra-se, neste caso, uma amplitude da ordem de aproximadamente  $2 \times 10^{-7}$  rad, com um menor período de cerca de 3400 dias (figura 9.9).

Um comportamento semelhante verifica-se para a variação da *longitude do nodo ascendente*, em que a influência da precessão da Lua torna-se também bastante significativa. O termo de maior amplitude é de aproximadamente 0.00009 radianos com um período de cerca de 6800 dias (figura 9.11). O segundo termo de maior amplitude é de aproximadamente 0.00008 radianos, que corresponde ao período de cerca da  $2.4 \times 10^6$  dias (figura 9.12). Desconsiderando-se o termo de maior

amplitude (figura 9.13), encontra-se uma amplitude de aproximadamente  $2 \times 10^{-6} \text{ rad}$ , com um menor período de cerca de 3400 dias (figura 9.14).

Para a variação do *argumento do perigeu*, em que o termo de maior amplitude é de aproximadamente 0.2 radianos com um período de cerca de  $2.4 \times 10^6 \text{ dias}$  (figura 9.16), verificam-se ondulações menores nas regiões de máximos e mínimos (figuras 9.17 e 9.18), com uma amplitude de cerca de  $2 \times 10^{-4} \text{ rad}$ , correspondente a um período de 6800 dias.

## 10. MODELO DE KAULA

Kaula (1969), desenvolveu a função perturbadora devida à maré, sendo que o fator de amplitude  $k$  e o ângulo de atraso  $\varepsilon$  são expressados como somas de harmônicos esféricos zonais. Com respeito à evolução atual da órbita da Lua, Kaula considerou a existência de um harmônico de grau dois para o ângulo de atraso, com objetivo de avaliar uma contribuição significativa na transferência de energia para a Lua, embora, seja improvável que esse efeito seja importante na escala de tempo total da evolução da órbita. Se a órbita da Lua fosse equatorial, a fricção devida à maré não alteraria a inclinação de sua órbita. Uma vez que a órbita é inclinada, a fricção da maré faz com que ela ganhe uma inclinação adicional, desde que, a razão entre a rotação da Terra e a revolução da Lua seja comensurável. A variação latitudinal nas propriedades da maré tem efeitos calculáveis na órbita de satélites próximos a Terra. Um harmônico de grau dois para o ângulo de atraso se faz necessário para conciliar os dados de avaliação com a desaceleração da órbita da Lua.

Pode-se expressar a função perturbadora em termos de coordenadas esféricas e depois em função de elementos orbitais. Levando em conta o ângulo de atraso  $\varepsilon$ , Kaula (1969) obtém cada termo como uma série infinita com coeficientes em função da inclinação e da excentricidade da órbita:

$$U(R, \phi, \lambda) = \sum_{\ell m p q} k_{\ell}(\phi, \lambda) R^{\ell} B_{\ell m}^{*} C_{\ell m p q}^{*} P_{\ell m}(\sin \phi) \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} \begin{cases} (\ell-m)par \\ (\ell-m)ímpar \end{cases} \times \quad (10.1)$$

$$\times \left\{ \upsilon_{\ell m p q}^{*} - \varepsilon_{\ell m p q}(\phi, \lambda) - m(\lambda + \theta) \right\}$$

em que  $r, \phi$  e  $\lambda$  são raio, latitude e longitude, respectivamente;  $\theta$  é o ângulo sideral de Greenwich,  $P_{\ell m}(\sin \phi)$  são os polinômios associados de Legendre, e

$$B_{\ell m}^* = Gm^* \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} (2 - \delta_{0m}), \quad (10.2)$$

$$C_{\ell mpq}^* = \frac{1}{a^{*\ell+1}} F_{\ell mp}(I^*) G_{\ell pq}(e^*), \quad (10.3)$$

$$\upsilon_{\ell mpq}^* = (\ell - 2p)\omega^* + (\ell - 2p + q)M^* + m\Omega^*, \quad (10.4)$$

em que,  $G$  é a constante gravitacional;  $m^*, a^*, e^*, I^*, M^*, \omega^*, \Omega^*$  são massas e elementos keplerianos da Lua; e

$$\begin{aligned} F_{\ell mp}(I^*) &= \sum_{t=0}^{p,k} \frac{(2\ell - 2t)!}{t!(\ell - t)!(\ell - m - 2t)! 2^{2\ell - 2t}} \text{sen}^{\ell - m - 2t} I^* \\ &\times \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \cos^s I^* \sum_{c=2}^{\left[ \frac{\ell - p - t}{2} \right]} \binom{\ell - m - 2t + s}{c} \times \\ &\binom{m - s}{p - t - c} (-1)^{c-k}, \end{aligned} \quad (10.5)$$

$$G_{\ell pq}(e^*) = (-1)^{|q|} (1 + \beta)^{2\ell} \beta^{|q|} \sum_{k=0}^{\infty} P_{\ell pqk} Q_{\ell pqk} \beta^{2k}, \quad \text{em que,} \quad (10.6)$$

$$\beta = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \quad (10.7)$$



$$P_{\ell pqk} = \sum_{r=0}^h \binom{2p'-2\ell}{h-r} \frac{(-1)^r}{r!} \left[ \frac{(\ell-2p'+q')e}{2\beta} \right]^r p' \begin{cases} h = k + q' \text{ se } q' > 0 \\ h = k \text{ se } q' < 0 \end{cases} \quad (10.8)$$

$$Q_{\ell pqk} = \sum_{r=0}^h \binom{-2p'}{h-r} \frac{1}{r!} \left[ \frac{(\ell-2p'+q')e}{2\beta} \right]^r p' \begin{cases} h = k \text{ se } q' > 0 \\ h = k - q' \text{ se } q' < 0 \end{cases} \quad (11.9)$$

em que  $p'$  e  $q'$  são definidos da seguinte maneira:

$$\begin{cases} p' = p \\ q' = q \end{cases} \text{ se } p \leq \frac{\ell}{2} \quad \text{e} \quad \begin{cases} p' = \ell - p \\ q' = -q \end{cases} \text{ se } p > \frac{\ell}{2} \quad (10.10)$$

Para propósito da análise orbital, o modelo de Kaula, assume que  $k_\ell$  e  $\varepsilon_{\ell mpq}$  sejam somente funções da latitude, pois são elas que produzem perturbações de longo período no movimento dos satélites e, representando-os por harmônicos esféricos:

$$k_\ell = \sum_h \kappa_{\ell h} P_{h0}(\text{sen } \phi) \quad (10.11)$$

e

$$\varepsilon_{\ell mpq} = \sum_n \varepsilon_{n(\ell mpq)} P_{n0}(\text{sen } \phi) \quad (10.12)$$

Então a função perturbadora pode ser escrita:

$$U = \sum_{\ell m p q h k j g} K_{\ell m p q} \left( \frac{R}{a} \right)^{k+1} F_{kmj}(i) G_{kjg}(e) Q_{lhkm} \times \left[ \kappa_{\ell h} \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ (-1)^m \text{sen} \end{array} \right\}_{(k-\ell)\text{ímpar}}^{(k-\ell)\text{par}} + (\kappa_{\ell} \varepsilon)_h \left\{ \begin{array}{c} -\text{sen} \\ (-1)^m \cos \end{array} \right\}_{(k-\ell)\text{ímpar}}^{(k-\ell)\text{par}} \times \left\{ \mathfrak{U}_{kmjg} - \mathfrak{U}_{\ell m p q}^* \right\} \right] \quad (10.13)$$

em que,

$$K_{\ell m p q} = R^{\ell} B_{\ell m}^* C_{\ell m p q}^* \quad (10.14)$$

É importante enfatizar que os polinômios  $F_{\ell m p}(i^*)$  e  $G_{\ell p q}(e^*)$  são relativos à Lua, e os polinômios  $F_{kmj}(i)$  e  $G_{kjg}(e)$  são relativos ao satélite. Os valores de  $Q_{\ell j k m}$ , que são fatores para produtos de conversão dos polinômios associados de Legendre estão tabelados.

No potencial equação (10.13) podemos distinguir três tipos de termos periódicos, ver equação (10.4): longos períodos quando  $m=0$ , períodos diurnos quando  $m=1$ , e períodos semi-diurnos quando  $m=2$ . Como os  $G_{\ell p q}(e^*)$  são proporcionais à  $e^{|q|}$ , são considerados valores baixos para grandes valores de  $q$ , isto é,  $q = 0, \pm 1, \pm 2$ . Para  $\ell$ , consideramos o valor 2, pois o fator no potencial  $\left( \frac{R}{a^*} \right)^{\ell} \cong \left( \frac{1}{60} \right)^{\ell}$  é pequeno para a Lua e muito menor para o Sol.

Para análise da perturbação da maré em um satélite artificial, exige-se que não haja termos de curto período, ou seja,  $g=2j-k$ . Então a equação (10.13), transforma-se:

$$U = \sum_{mpqhkjg} K_{2mpq} \left(\frac{R}{a}\right)^{k+1} F_{kmj}(i) G_{kj(2j-k)}(e) Q_{2hkm} \times$$

$$\left[ \kappa_{2h} \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ (-1)^m \text{sen} \end{array} \right\}_{k-\text{ímpar}}^{k-\text{par}} + (\kappa_{2\varepsilon})_h \left\{ \begin{array}{c} -\text{sen} \\ (-1)^m \cos \end{array} \right\}_{k-\text{ímpar}}^{k-\text{par}} \times \left\{ \mathcal{U}_{kmj(2j-k)} - \mathcal{U}_{2mpq}^* \right\} \right]$$

(10.15)

Para obtermos no potencial termos seculares, devemos fazer na equação (10.4),  $\ell - 2p = 0$ ,  $\ell - 2p + q = 0$  e  $m=0$ , isto é termos que não tenham  $\omega^*$ ,  $\Omega^*$  e  $M^*$ . Para obtermos termos de longo período, devemos fazer  $\ell - 2p + q = 0$ , isto é termos que não contém  $M^*$ .

### 10.1. EFEITOS EM ÓRBITAS DE SATÉLITES PRÓXIMOS A TERRA

Kaula (1969), examinou o comportamento de satélites artificiais para pequenos valores de  $\left(\frac{a}{R}\right)$  e a sua influência na função perturbadora dada pela equação (10.15), com o objetivo de especificar melhor as órbitas futuras para a determinação das propriedades da maré terrestre.

Com o mesmo objetivo, Kozai (1968) determinou  $k$  e  $\varepsilon$  para perturbações da inclinação  $\delta i$  e do argumento  $\Omega$ . Para isso, ele utilizou somente os termos  $mpqhkj=110021$  da equação (10.15), que tem como resultado a função:

$$U_2 = K_{2100} \left( \frac{R}{a} \right)^3 \left[ -\frac{3}{2} \text{sen } i \cos i \right] (1 - e^2)^{-3/2} \kappa_{20} (\cos - \varepsilon_0 \text{sen}) (\Omega - \Omega^*) \quad (10.16)$$

Segundo Kaula(1969), Newton (1968) determinou  $k$  e  $\varepsilon$  para perturbações da inclinação  $\delta i$  e para o nodo  $\delta \Omega$  com os argumentos contendo  $\Omega$  e  $2\Omega$ , e obteve os fatores da órbita lunar por integração numérica, o qual seria equivalente usar os termos  $m = 1, 2$  e  $p = 0, 1, 2$ , com  $qhkj = 0021$  na equação (10.15), que tem como resultado a função:

$$U_2 = \sum_{mp} K_{2mp0} \left( \frac{R}{a} \right)^3 F_{2m1}(i) (1 - e^2)^{-3/2} \kappa_{20} (\cos - \varepsilon_0 \text{sen})^m (\Omega - \Omega^*) \quad (10.17)$$

Pode-se perceber que nas equações (10.16) e (10.17), o argumento  $\omega$  é inexistente pois Kaula considera  $j = \frac{k}{2}$ . As variações zonais são pares, isto é  $h = 0, 2, 4, \dots$ , para que  $k$  e  $\varepsilon$  tenham perturbações de mesmo período, como as equações (10.16) e (10.17).

Como, neste trabalho, tem-se o objetivo de comparar os modelos de Kaula com o de Kozai, é necessário que se encontre a função perturbadora com os mesmo períodos contidos na equação (9.12), termos em que aparecem o argumento  $2\omega$ , para isso é necessário considerar  $m = 0, 1, 2$ ,  $h = 0, 2$ ,  $j = 1$  e  $k = 2, 4$ . Então a função perturbadora, para termos de longo período fica:

$$U = \sum_{mhk} K_{2m10} \left( \frac{R}{a} \right)^{k+1} F_{km1}(i) G_{k1(2-k)}(e) Q_{2hkm} \left[ \kappa_{2h} (\cos - \varepsilon_h \text{sen}) (v_{km1(2-k)} - v_{2m10}^*) \right] \quad (10.18)$$

Com o objetivo de simplificar a notação, Kaula (1969) formula a seguinte equação, para expressar os números de Love e o ângulo de atraso:

$$(k\delta)_2 = \sum_{\ell h} (\kappa_2 \varepsilon)_h P_{2h} \quad (10.19)$$

Utilizando os dados obtidos por Newton (1968) na análise dos parâmetros da maré, tem-se:

$$k_2 = 0.351 - 0.055 P_{20} \quad (10.20)$$

em que  $\kappa_{20} = 0.351$  e  $\kappa_{22} = -0.055$ ,

e, para os dados de Newton referentes a Lua, temos:

$$(k\delta)_2 = 0.0072 - 0.0121 P_{20} - 0.0004 P_{40} \quad (10.21)$$

em que,  $(\kappa_2 \varepsilon)_0 = 0.0072$ ,  $(\kappa_2 \varepsilon)_2 = -0.0121$  e  $(\kappa_2 \varepsilon)_4 = -0.0004$ .

## 11. FUNÇÃO PERTURBADORA - MODELO DE KAULA

Efetuada expansões em harmônicos esféricos e em sistemas de coordenadas convenientes, escrevem-se usando o modelo de Kaula alguns termos do potencial devido à maré agindo sobre o satélite.

Considerando a Lua como corpo perturbador, considerando-se a defasagem, restringindo-se aos termos seculares e de longo período, devido apenas ao segundo harmônico, o potencial pode ser expresso conforme a expressão (B.1), disposta no apêndice B.

### 11.1. PERTURBAÇÕES SECULARES

A parte secular da função perturbadora devido às marés para o modelo de Kaula está disposta no apêndice B, expressão (B.2).

## 11.2. VARIAÇÕES DOS ELEMENTOS ORBITAIS

Foram calculadas as variações dos elementos orbitais, através das equações de Lagrange, pelo método das aproximações sucessivas. O potencial devido à maré foi desenvolvido de forma geral pelo programa Mathematica e alguns casos foram especificados.

Considerando apenas os **termos seculares**, temos o potencial descrito pela expressão (B.2). Como não existem variáveis angulares em tal expressão, temos:

$$\frac{\partial U}{\partial M} = \frac{\partial U}{\partial \omega} = \frac{\partial U}{\partial \Omega} = 0 \quad (11.1)$$

e, portanto:

$$\dot{a} = 0, \dot{e} = 0 \text{ e } \dot{i} = 0 \quad (11.2)$$

Integrando, temos:

$$a = a_0, e = e_0 \text{ e } i = i_0 \quad (11.3)$$

Para a variação secular da longitude do nodo ascendente, temos:

$$\Omega = n_{\Omega}t + \Omega_0 \quad (11.4)$$

em que:

$$n_{\Omega} = -\frac{3R^5 \cos i (1 + 3 \cos 2i^*) (7\kappa_{20} + 2\kappa_{22}) Gm^*}{112a^5 (-1 + e^2)^2 n(a^*)^3 (1 - (e^*)^2)^{3/2}} \quad (11.5)$$

Para a variação secular do argumento do perigeu:

$$\omega = n_{\omega} t + \omega_0 \quad (11.6)$$

em que:

$$n_{\omega} = -\frac{3R^5 (3 + 5 \cos 2i) (1 + 3 \cos 2i^*) (7\kappa_{20} + 2\kappa_{22}) Gm^*}{448a^5 (-1 + e^2)^2 n(a^*)^3 (1 - (e^*)^2)^{3/2}} \quad (11.7)$$



### 11.2.1 RESULTADOS

Para exemplificar e comparar a ordem dos efeitos devidos à perturbação da maré terrestre é escolhido um satélite em uma órbita com as mesmas características do capítulo 9.

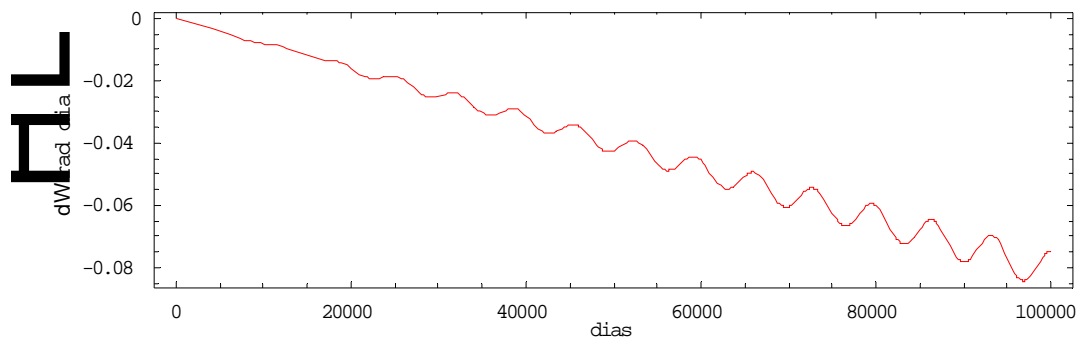
Nas integrações das equações do movimento para os casos considerados, foi desenvolvido um programa em linguagem de programação Mathematica. Este programa gera um arquivo de saída, onde dadas às condições iniciais do satélite artificial, são obtidos as variações dos elementos orbitais para cada caso a ser apresentado.

Segundo o método das aproximações sucessivas, encontramos para as variações da longitude do nodo ascendente e do argumento do perigeu, dadas pelas equações (11.5) e (11.7), os seguintes valores:

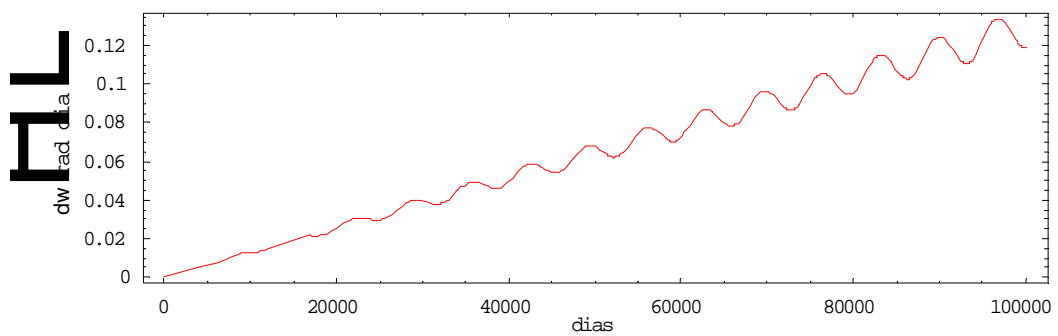
$$n_{\Omega} = -9.37006 \times 10^{-7} \text{ rad / dia}$$

$$n_{\omega} = 1.48769 \times 10^{-6} \text{ rad / dia}$$

Considerando-se a influência da inclinação da Lua, em que as expressões se encontram no apêndice B, temos os seguintes resultados:



**Figura 11.1** – Variação secular da longitude do nodo ascendente, levando em conta a inclinação da Lua.



**Figura 11.2** – Variação secular do argumento do perigeu, levando em conta a inclinação da Lua.

Considerando agora, os termos de **longo período**, obtém-se as expressões das variações nos elementos orbitais para as seguintes situações:

**CASO 1:**

Considerando a Lua em movimento elíptico, não precessionada:

$$\Omega^* = \Omega_0^*$$

$$\omega^* = \omega_0^*$$

$$\Omega = n_{\Omega}t + \Omega_0$$

$$\omega = n_{\omega}t + \omega_0$$

**CASO 2:**

Considerando a Lua em órbita elíptica precessionada ao redor da Terra:

$$\Omega^* = n_{\Omega^*}t + \Omega_0^*$$

$$\omega^* = n_{\omega^*}t + \omega_0^*$$

$$\Omega = n_{\Omega}t + \Omega_0$$

$$\omega = n_{\omega}t + \omega_0$$

As expressões das variações nos elementos orbitais são encontradas no apêndice B.

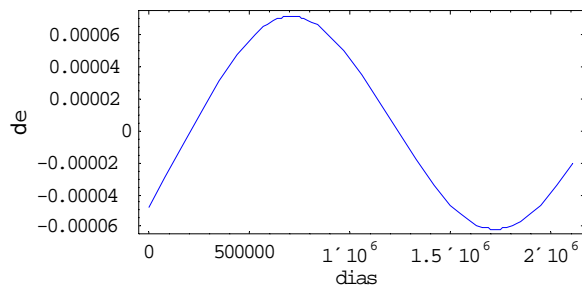
Aplicando as equações de Lagrange e considerando as variações devidas à longitude do nodo ascendente e o argumento do perigeu, temos:

**Para a variação da excentricidade:**

**Caso 1:**

Maior Amplitude: 0.000078526

Período:  $2.11172 \times 10^6$  dias

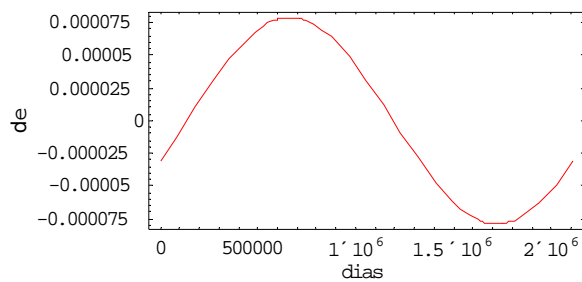


**Figura 11.3-**Representação da variação da excentricidade (caso1)

**Caso 2:**

Maior Amplitude: 0.000078526

Período:  $2.11172 \times 10^6$  dias



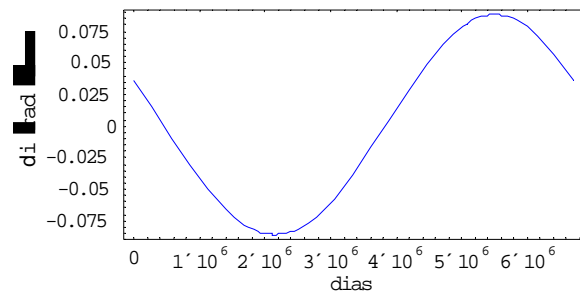
**Figura 11.4-**Representação da variação da excentricidade (caso2)

**Para a variação da inclinação:**

**Caso 1:**

Maior Amplitude:  $0.0787884rad$

Período:  $6.7056 \times 10^6 dias$

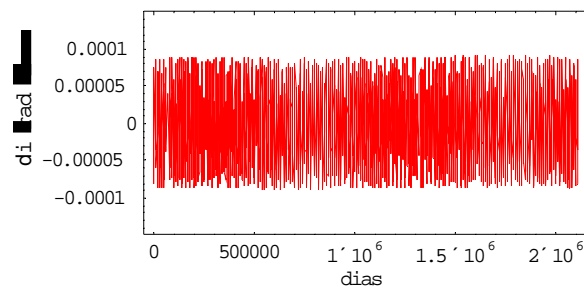


**Figura 11.5-**Representação da variação da inclinação (caso1)

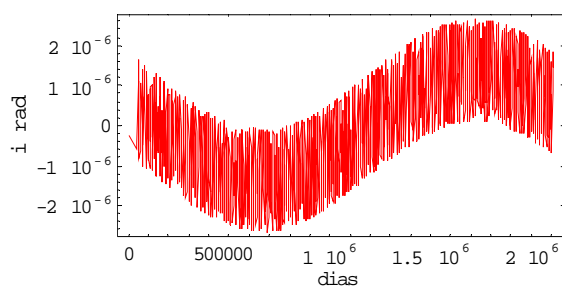
**Caso 2:**

Maior Amplitude:  $0.0000799721 rad$

Período:  $6806.34dias$



**Figura 11.6-**Representação da variação da inclinação (caso2)



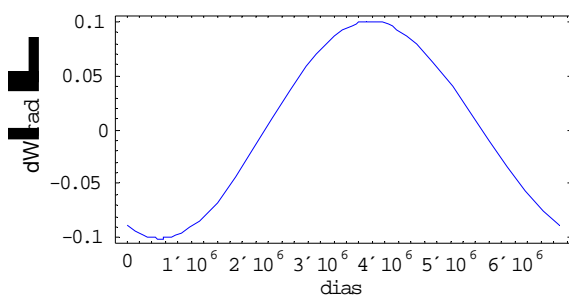
**Figura 11.7**-Representação da variação da inclinação (caso2), desconsiderando-se termos de maior amplitude.

**Para a longitude do nodo ascendente:**

**Caso 1:**

Maior Amplitude: 0.0909762 *rad*

Período:  $6.7056 \times 10^6$  *dias*

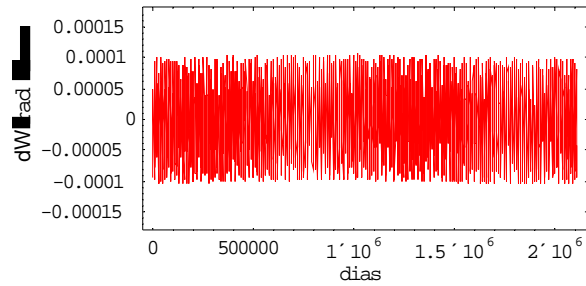


**Figura 11.8**-Representação da variação da longitude do nodo ascendente (caso1)

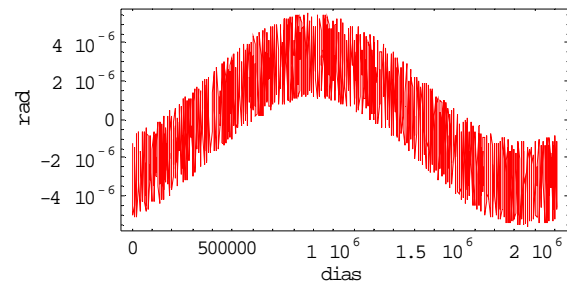
**Caso 2:**

Maior Amplitude: 0.0000923433 rad

Período: 6806.34dias



**Figura 11.9-**Representação da variação da longitude do nodo ascendente (caso2)



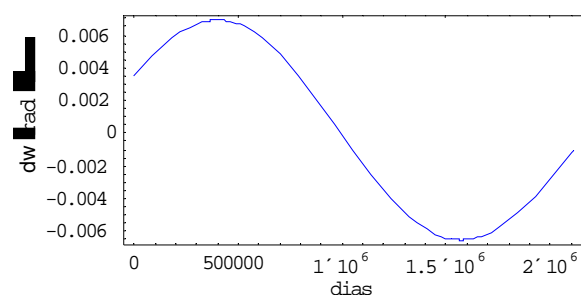
**Figura 11.10-**Representação da variação da longitude do nodo ascendente (caso2), desconsiderando-se os termos de maior amplitude.

**Para o argumento do perigeu:**

**Caso 1:**

Maior Amplitude: 0.00435505 *rad*

Período:  $2.11173 \times 10^6$  *dias*

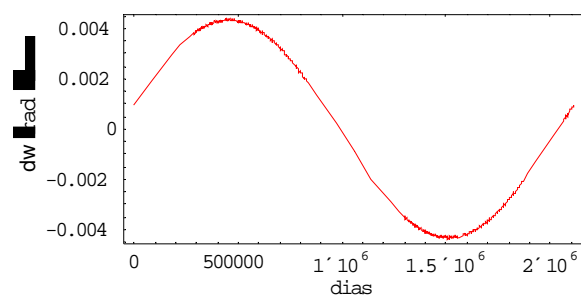


**Figura 11.11-**Representação da variação do argumento do perigeu (caso1)

**Caso 2:**

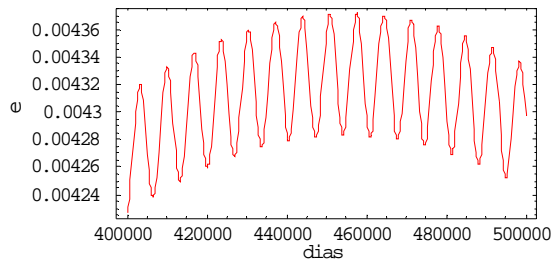
Maior Amplitude: 0.00422646 *rad*

Período:  $2.11173 \times 10^6$  *dias*

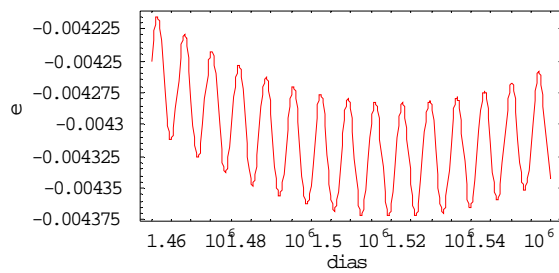


**Figura 11.12-**Representação da variação do argumento do perigeu (caso2)





**Figura 11.13-**Representação da variação do argumento do perigeu (caso2), na região de máximo.



**Figura 11.14-**Representação da variação do argumento do perigeu (caso2), na região de mínimo.

### 11.2.2 ANÁLISE DOS RESULTADOS – KAULA

Através dos resultados obtidos para o modelo de Kaula, verifica-se que para a variação da *excentricidade* não existem diferenças nos termos de maior amplitude (cerca de 0.000078) e períodos (cerca de  $2.11 \times 10^6$  dias), para os casos 1 e 2 (figuras 11.3 e 11.4), isto significa que a excentricidade não sofre uma influência significativa da precessão da Lua.

Para a variação da *inclinação*, verifica-se que a influência da precessão da Lua é bastante significativa, pois foi encontrado um período bem menor (cerca de 6800 dias), com dois termos de maior amplitude iguais a aproximadamente 0.00008 radianos e 0.00004 radianos (figura 11.6). Desconsiderando-se esses termos, encontramos um período de aproximadamente  $2.11 \times 10^6$  dias com uma amplitude total de aproximadamente  $2.6 \times 10^{-6}$  rad (figura 11.7).

Um comportamento semelhante foi encontrado para a variação da *longitude do nodo ascendente*, pois se tem para os termos de maior amplitude (cerca de 0.00009 radianos e 0.00004 radianos) um período de cerca de 6800 dias. Desconsiderando-se esses termos, encontramos um período de aproximadamente  $2.11 \times 10^6$  dias, com uma amplitude total de aproximadamente  $4.5 \times 10^{-6}$  rad (figura 11.10).

Para a variação do *argumento do perigeu*, em que o termo de maior amplitude é de aproximadamente 0.04 radianos, com um período de aproximadamente  $2.11 \times 10^6$  dias (figura 11.12), verificou-se ondulações menores nas regiões de máximos e mínimos, com uma amplitude total de aproximadamente  $4 \times 10^{-5}$  rad (figura 11.13 e 11.14).

## 12. MODELO DE BALMINO

Balmino generaliza o desenvolvimento analítico das perturbações das marés terrestres, considerando  $k_\ell$  função da longitude  $\lambda$  e latitude  $\Phi$ , e  $\varepsilon_\ell$  função da latitude  $\Phi$ .

Por definição, conservando as notações de Kaula, o potencial perturbador  $T$  devido à maré, na superfície terrestre é dado por:

$$T(R, \phi, \lambda) = G \frac{M^*}{a^*} \sum_{\ell mpq} \left( \frac{R}{a^*} \right)^\ell (2 - \delta_{0m}) \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} F_{\ell mp}(i^*) G_{\ell pq}(e^*) \times k_{\ell mpq}(\phi, \lambda) P_{\ell m}(\sin \phi) \begin{bmatrix} \cos \\ \sin \end{bmatrix} \left[ \upsilon_{\ell mpq}^* m(\lambda + \theta) + \varepsilon_{\ell mpq}(\phi, \lambda) \right] \quad (12.1)$$

em que,  $F_{\ell mp}(i^*)$  e  $G_{\ell pq}(e^*)$  são funções da inclinação da excentricidade,  $P_{\ell m}$  é um polinômio associado de Legendre, de grau  $\ell$  e ordem  $m$ ,  $\theta$  é o tempo sideral e,

$$\upsilon_{\ell mpq}^* = (\ell - 2p + q)M^* + (\ell - 2p)\omega^* + m\Omega^* \quad (12.2)$$

O potencial perturbador  $T(r, \phi, \lambda)$  em um ponto P exterior ( $r > R$ ), se obtém de uma aplicação do teorema de Dirichlet, em uma multiplicação de seus termos respectivamente por:

$$\left( \frac{R}{r} \right)^{k+1} \text{ e } \left( \frac{R}{r} \right)^{s+1} \quad (12.3)$$

em que  $k$  e  $s$  representam a ordem dos Polinômios de Legendre.

Após cálculos algébricos, a função perturbadora no satélite, fica:

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{Gm^*}{R} \sum_{\ell=2}^{\infty} \left( \frac{R}{a^*} \right)^{\ell+1} \sum_{m=0}^{\ell} \frac{(2-\delta_{om})(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \sum_{p=0}^{\ell} F_{\ell pq}(\mathbf{I}^*) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{\ell pq}(\mathbf{e}^*) \times \\
 & \times \left[ \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^h \frac{K_{\ell mpq}^{h\mu}}{2} \sum_{+}^{-} \sum_{k=|m\pm\mu|}^{\ell+h} Q_{\ell hkm}^{\pm} \times \right. \\
 & \left. \left\{ \sum_{j=0}^k \left( \frac{R}{a} \right)^{k+1} F_{k|m\pm\mu|j}(\mathbf{I}) \sum_{g=-\infty}^{+\infty} G_{kjg}(\mathbf{e}) \begin{pmatrix} 1 \\ \xi_{\mu}^m \end{pmatrix}_{\ell-m:\text{ímpar}}^{\ell-m:\text{par}} \begin{bmatrix} \cos & \\ (-1)^{k-|m\pm\mu|+1} & \end{bmatrix}_{k-|m\pm\mu|-(\ell-m):\text{par}}^{k-|m\pm\mu|-(\ell-m):\text{ímpar}} (\mathbf{W}^{\pm})_+ \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{\ell mpq}^n \sum_{s=|m\pm\mu|}^{k+n} \tilde{Q}_{kns,|m\pm\mu|} \left( \frac{R}{a} \right)^{s+1} \sum_{j=0}^s F_{s|m\pm\mu|j} \sum_{g'=-\infty}^{+\infty} G_{s,j'g'}(\mathbf{e}) \begin{bmatrix} \xi_{\mu}^{-m} \\ 1 \end{bmatrix}_{\ell-m:\text{ímpar}}^{\ell-m:\text{par}} \right. \right. \\
 & \left. \left. \begin{bmatrix} -\text{sen} & \\ (-1)^{s-|m\pm\mu|} & \cos \end{bmatrix}_{s-|m\pm\mu|-(\ell-m):\text{ímpar}}^{s-|m\pm\mu|-(\ell-m):\text{par}} (\mathbf{W}'^{\pm}) \right\} \right] \quad (12.4)
 \end{aligned}$$

em que,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W}^{\pm} = & \left( \mathbf{v}_{k,|m\pm\mu|,j,g} - \xi_{\mu}^{-m} \mathbf{v}^*_{\ell mpq} \right) \pm \xi_{\mu}^{-m} \mu \lambda_{\ell mpq}^{h\mu} - (|m\pm\mu|\theta - \xi_{\mu}^{-m} m\theta) \\
 \mathbf{W}'^{\pm} = & \left( \mathbf{v}_{s,|m\pm\mu|,j',g'} - \xi_{\mu}^{-m} \mathbf{v}^*_{\ell mpq} \right) \pm \xi_{\mu}^{-m} \mu \lambda_{\ell mpq}^{h\mu} - (|m\pm\mu|\theta - \xi_{\mu}^{-m} m\theta) \quad (12.5)
 \end{aligned}$$

$$\xi_{\mu}^{-m} = \left[ \begin{array}{l} 1 \text{ se o sinal de } \sum_{+}^{-} \text{ for } + \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ para } m \geq \mu \\ -1 \text{ para } m \leq \mu \end{array} \right\} \text{ se o sinal se } \sum_{+}^{-} \text{ for } - \end{array} \right] \quad (12.6)$$

No modelo de Balmino para o potencial, é importante ressaltar que o coeficiente de elasticidade é função dependente da latitude  $\phi$  e da longitude  $\lambda$ .

Escrevemos então:

$$K_{\ell mpq}(\phi, \lambda) = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^h K_{\ell mpq}^{h\mu} \cos \mu(\lambda - \lambda_{\ell mpq}^{h\mu}) P_{h\mu}(\text{sen } \phi) \quad (12.7)$$

A equação (12.7) é o desenvolvimento do  $K_{\ell mpq}$  em harmônicos esféricos zonais e tesserais.

O ângulo de atraso continua sendo função somente da latitude:

$$\varepsilon_{\ell mpq}(\phi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{\ell mpq}^n P_{\ell}(\text{sen } \phi) \quad (12.8)$$

Balmino utiliza os seguintes dados na análise dos parâmetros da maré, independentes de  $m, p, q$ .

$$k_2 = 0.3 + 0.05P_{20}(\text{sen } \varphi) - 0.01P_{22}(\text{sen } \varphi)\cos 2(\lambda - 70^\circ) + 0.001P_{40}(\text{sen } \varphi) + 0.005P_{42}(\text{sen } \varphi)\cos 2(\lambda + 150^\circ) \quad (12.9)$$

$$k_3 = 0.1 + 0.02P_{20}(\text{sen } \varphi) \quad (12.10)$$

em que  $K_2^{00} = 0.3$  e  $K_2^{20} = 0.05$ ,

$$\varepsilon_2 = 2^\circ - 0.5^\circ P_{20}(\text{sen } \varphi) + 0.1^\circ P_{40}(\text{sen } \varphi) \quad (12.11)$$

$$\varepsilon_3 = -0.2^\circ \quad (12.13)$$

em que  $\varepsilon_2^0 = 2^\circ$  e  $\varepsilon_2^2 = -0.5^\circ$ .

### 13. FUNÇÃO PERTURBADORA - MODELO DE BALMINO

Efetuada expansões em harmônicos esféricos e em sistemas de coordenadas convenientes, escrevem-se usando o modelo de Balmino alguns termos do potencial devido à maré agindo sobre o satélite.

Considerando a Lua como corpo perturbador, considerando-se a defasagem, restringindo-se aos termos seculares, devido apenas ao segundo harmônico, o potencial pode ser expresso conforme a expressão C.1, disposta no apêndice C.

#### 13.1. VARIAÇÕES DOS ELEMENTOS ORBITAIS

Foram calculadas as variações dos elementos orbitais, através das equações de Lagrange, pelo método das aproximações sucessivas. O potencial devido à maré foi desenvolvido de forma geral pelo programa Mathematica e alguns casos foram especificados.

Considerando apenas os **termos seculares**, temos o potencial descrito pela expressão (C.1). Como não existem variáveis angulares em tal expressão, temos:

$$\frac{\partial U}{\partial M} = \frac{\partial U}{\partial \omega} = \frac{\partial U}{\partial \Omega} = 0 \quad (13.1)$$

e, portanto:

$$\dot{a} = 0, \dot{e} = 0 \text{ e } \dot{i} = 0 \quad (13.2)$$

Integrando, temos:

$$a = a_0, \quad e = e_0 \quad e \quad i = i_0 \quad (13.3)$$

Para a variação secular da longitude do nodo ascendente, temos:

$$\Omega = n_\Omega t + \Omega_0 \quad (13.4)$$

em que:

$$n_\Omega = -\frac{3R^5 \cos i (1 + 3 \cos 2i^*) (7K_{20} + 2K_{22}) Gm^*}{112a^5 (-1 + e^2)^2 n(a^*)^3 (1 - (e^*)^2)^{3/2}} \quad (13.5)$$

Para a variação secular do argumento do perigeu, temos:

$$\omega = n_\omega t + \omega_0 \quad (13.6)$$

em que:

$$n_\omega = -\frac{3R^5 (3 + 5 \cos 2i) (1 + 3 \cos 2i^*) (7K_{20} + 2K_{22}) Gm^*}{448a^5 (-1 + e^2)^2 n(a^*)^3 (1 - (e^*)^2)^{3/2}} \quad (13.7)$$



### 13.1.1. RESULTADOS

Para exemplificar e comparar a ordem dos efeitos devidos à perturbação da maré terrestre é escolhido um satélite em uma órbita com as mesmas características do capítulo 9.

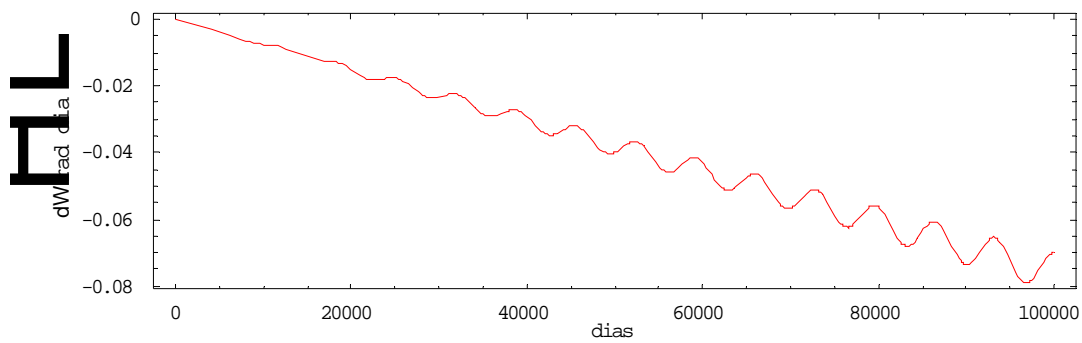
Nas integrações das equações do movimento para os casos considerados, foi desenvolvido um programa em linguagem de programação Mathematica. Este programa gera um arquivo de saída, onde dadas às condições iniciais do satélite artificial, são obtidos as variações dos elementos orbitais para cada caso a ser apresentado.

Segundo o método das aproximações sucessivas, encontramos para as variações da longitude do nodo ascendente e do argumento do perigeu, dadas pelas equações (13.5) e (13.7), os seguintes valores:

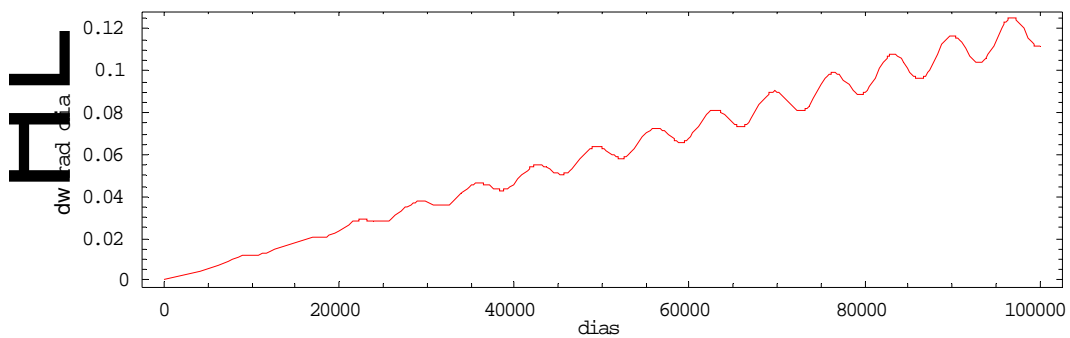
$$n_{\Omega} = -9.78318 \times 10^{-7} \text{ rad / dia}$$

$$n_{\omega} = 1.39452 \times 10^{-6} \text{ rad / dia}$$

Considerando-se a influência da inclinação da Lua, em que as expressões se encontram no apêndice C, temos os seguintes resultados:



**Figura 13.1** – Variação secular do nodo ascendente, levada em conta à inclinação da Lua.



**Figura 13.2** – Variação secular do argumento do perigeu, levada em conta à inclinação da Lua.

**Observação:** Não foram encontrados outros resultados para o modelo de Balmino.



## 14. MODELO DO IERS

O modelo de IERS, diferentemente dos outros, considera a influência no movimento de um satélite em termos de perturbações nos coeficientes  $\bar{C}_{nm}$  e  $\bar{S}_{nm}$  do geopotencial.

Sabemos que a função perturbadora devida à maré gerada pelo corpo perturbador de massa  $M_j$ , num ponto  $P$ , localizado a distância geocêntrica  $R_0$  da superfície terrestre é:

$$\Delta V = K_2 R_0^2 \sum_{j=S,L} \frac{GM_j}{r_j^3} P_{20}(\cos \psi_j) \quad (14.1)$$

Em que a função perturbadora devida à maré no exterior da Terra é:

$$\Delta V = K_2 \frac{R_0^5}{r^3} \sum_{j=S,L} \frac{GM_j}{r_j^3} P_{20}(\cos \psi_j) \quad (14.2)$$

em que  $R_0$  é o raio médio da Terra e  $GM_j$  é o parâmetro gravitacional da Lua ( $j=L$ ) ou do Sol ( $j=S$ ).

Neste trabalho considera-se apenas  $j=L$ .

Para expressar  $\Delta V$  de forma adimensional  $\Delta \bar{C}_{2m}$ ,  $\Delta \bar{S}_{2m}$ , um fator  $GEa_e^2$  é aplicado. Sendo  $a_e$  o raio equatorial da Terra.

Considera-se neste trabalho  $R_0 = a_e$ .

Assim, as perturbações no satélite dadas pelas mudanças no coeficiente do geopotencial de grau 2 são:

$$\Delta\bar{C}_{20} = \frac{1}{\sqrt{5}} K_2(0) \frac{R_0^5}{a_e^2 GE} \sum_{j=S,L} \frac{GM_j}{r_j^3} P_{20}(\text{sen } \phi_j) \quad (14.3)$$

$$\Delta\bar{C}_{21} - i\Delta\bar{S}_{21} = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{5} K_2(1) \frac{R_0^5}{a_e^2 GE} \sum_{j=S,L} \frac{GM_j}{r_j^3} P_{21}(\text{sen } \phi_j) e^{-i\lambda_j} \quad (14.4)$$

$$\Delta\bar{C}_{22} - i\Delta\bar{S}_{22} = \frac{1}{12} \frac{\sqrt{12}}{5} K_2(2) \frac{R_0^5}{a_e^2 GE} \sum_{j=S,L} \frac{GM_j}{r_j^3} P_{22}(\text{sen } \phi_j) e^{-i2\lambda_j} \quad (14.5)$$

em que,

$K_2(0) = 0.299$ , longo-período de 2° grau do número de Love;

$K_2(1) = 0.3$ , maré diurna de 2° grau do número de Love;

$K_2(2) = 0.302$ , maré semidiurna de 2° grau do número de Love;

$GE$  = parâmetro gravitacional da Terra;

$R_j$  = distância geocêntrica da Lua ou do Sol;

$\phi_j, \lambda_j$  = latitude e longitude geocêntricas da Lua e do Sol.

As mudanças dos coeficientes são:

$$\Delta\bar{C}_{nm} - i\Delta\bar{S}_{nm} = A_m \sum_{S(n,m)} \delta K_s H_s \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}_{n+m(\text{par})}^{n+m(\text{ímpar})} e^{i\theta} \quad (14.6)$$

sendo,

$$A_m = \frac{(-1)^m}{R_0 \sqrt{4\pi(2 - \delta_{0m})}}, \delta_{0m} = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 0 \\ 0 & \text{se } m \neq 0 \end{cases} \quad (14.7)$$

$\theta_s$  = argumentos astronômicos, calculados por números Doodson.

$\delta K_s = K_2^s(1) - K_2(1)$ , diferença entre a frequência atual dependendo do número de Love e do primeiro número.

Sendo  $\delta K_s = 0$  para marés de longo período e semidiurnas, somente as marés diurnas necessitam das correções acima mencionadas. Essas correções estão mostradas na tabela abaixo:

Números de Doodson	$A_m \delta K_s H_s \times 10^{12}$
145.555( $O_1$ )	-16.4
163.555( $P_1$ )	-48.5
165.545	-8.8
165.555( $K_1$ )	-472.6
165.565	-68.3
166.554( $\Psi_1$ )	-19.7

**Tabela 14.1** – Tabela de correção da maré diurna usando para  $A_m \delta K_s H_s$  uma amplitude de  $5 \times 10^{-12}$ .

## 15. VARIAÇÕES DOS ELEMENTOS ORBITAIS - MODELO DO IERS

Para o cálculos elemento orbitais, usaremos as expressões de Brouwer e Clemence (1961), em que temos os termos seculares e de longo período da ordem de  $J_2^2$ :

$$\delta e = e_0 + \frac{1}{8} \gamma_2' e \eta^2 [1 - 11\theta^2 - 40\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-1}] \cos 2\omega \quad (15.1)$$

$$\delta i = i_0 - \frac{1}{8} \gamma_2' e^2 \cot i [1 - 11\theta^2 - 40\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-1}] \cos 2\omega \quad (15.2)$$

$$\begin{aligned} \delta \Omega = \Omega_0 + nt \{ & -3\gamma_2' \theta + \frac{3}{8} \gamma_2'^2 [(-5 + 12\eta + 9\eta^2)\theta + (-35 - 36\eta - 5\eta^2)\theta^3] \} \\ & - \frac{1}{8} \gamma_2' e^2 \theta [11 + 80\theta^2 (1 - 5\theta^2)^{-1} + 200\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-2}] \sin 2\omega \end{aligned} \quad (15.3)$$

$$\begin{aligned} \delta \omega = \omega_0 + nt \{ & \frac{3}{2} \gamma_2' (-1 + 5\theta^2) + \frac{3}{32} \gamma_2'^2 [(-35 + 24\eta + 25\eta^2) + (90 - 192\eta - 126\eta^2)\theta^2 + \\ & (385 + 360\eta + 45\eta^2)\theta^4] \} \\ & - \frac{1}{16} \gamma_2' [(2 + e^2) - 11(2 + 3e^2)\theta^2 - 40(2 + 5e^2)\theta^4 (1 - 5\theta^2)^{-1} \\ & - 40e^2 \theta^6 (1 - 5\theta^2)^{-2}] \sin 2\omega \end{aligned} \quad (15.4)$$

em que  $\eta = (1 - e^2)^{1/2}$ ,  $\theta = \cos i$ ,  $\gamma_2' = a_e^2 J_2 / 2a^2 \eta^4$  e  $n = \mu^{1/2} a^{-3/2}$ .

Considerando apenas a parte **secular** das expressões (15.3) e (15.4), chegamos nas expressões que representam o movimento médio da longitude do nodo ascendente e do argumento do perigeu:

$$\begin{aligned}
 n_{\Omega} = & (GE)^{1/2} a^{-3/2} \left\{ -3 \frac{R^2 \Delta \bar{C}_{20}}{2a^2 (1-e^2)^2} \cos i + \frac{3}{8} \left( \frac{R^2 \Delta \bar{C}_{20}}{2a^2 (1-e^2)^2} \right)^2 \right. \\
 & \left. \left[ \left( -5 + 12(1-e^2)^{1/2} + 9(1-e^2) \right) \cos i + \left( -35 - 36(1-e^2)^{1/2} - 5(1-e^2) \right) \cos^3 i \right] \right\}
 \end{aligned}
 \tag{15.5}$$

$$\begin{aligned}
 n_{\omega} = & (GE)^{1/2} a^{-3/2} \left\{ -3 \frac{R^2 \Delta \bar{C}_{20}}{2a^2 (1-e^2)^2} \left( -1 - 5 \cos^2 i \right) + \frac{3}{32} \left( \frac{R^2 \Delta \bar{C}_{20}}{2a^2 (1-e^2)^2} \right)^2 \right. \\
 & \left. \left[ \left( -35 + 24(1-e^2)^{1/2} + 25(1-e^2) + \left( 90 - 192(1-e^2)^{1/2} - 126(1-e^2) \right) \right) \cos^2 i + \right. \right. \\
 & \left. \left. \left( 385 - 360(1-e^2)^{1/2} - 45(1-e^2) \right) \cos^4 i \right] \right\}
 \end{aligned}
 \tag{15.6}$$



## 15.1. RESULTADOS

Para exemplificar e comparar a ordem dos efeitos devidos à perturbação da maré terrestre é escolhido um satélite em uma órbita com as mesmas características da citada no capítulo 9.

Através das expressões (15.5) e (15.6) encontramos para as variações da longitude do nodo ascendente e do argumento do perigeu os seguintes valores:

$$n_{\Omega} = -3.60365 \times 10^{-7} \text{ rad / dia}$$

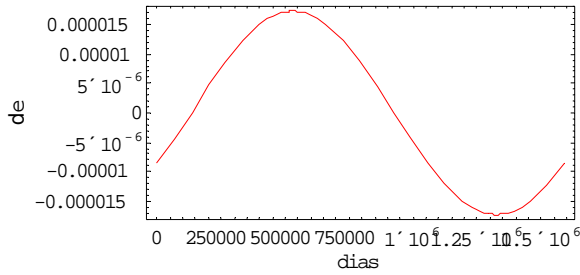
$$n_{\omega} = 1.97654 \times 10^{-6} \text{ rad / dia}$$

Considerando agora, os termos de **longo período**, obtem-se as expressões das variações nos elementos orbitais, através das expressões (15.1), (15.2), (15.3) e (15.4), que são encontradas no apêndice D. Considerando as variações devidas apenas ao argumento do perigeu, temos:

**Para a excentricidade:**

Maior amplitude: 0.0000172631

Período:  $1.58944 \times 10^6$  dias

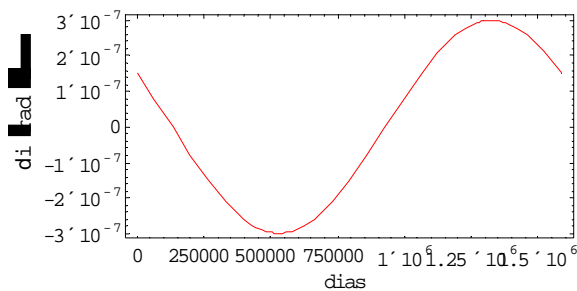


**Figura 15.1** – Representação da variação da excentricidade.

**Para a inclinação:**

Maior amplitude:  $2.99035 \times 10^{-7}$  rad

Período:  $1.58944 \times 10^6$  dias

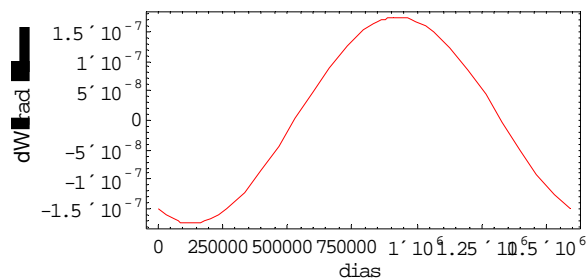


**Figura 15.2** – Representação da variação da inclinação

**Para a longitude do nodo ascendente:**

Maior amplitude:  $1.74324 \times 10^{-7} \text{ rad}$

Período:  $1.58944 \times 10^6 \text{ dias}$

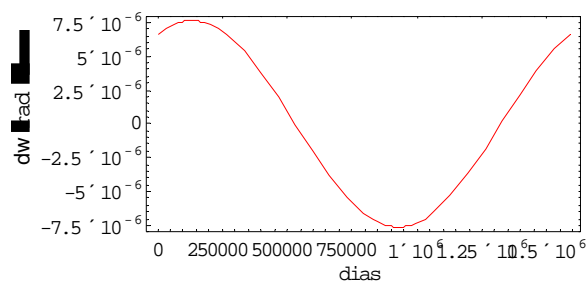


**Figura 15.3** – Representação da longitude do nodo ascendente.

**Para o argumento do perigeu:**

Maior amplitude:  $7.62191 \times 10^{-6} \text{ rad}$

Período:  $1.58944 \times 10^6 \text{ dias}$



**Figura 15.4** – Representação do argumento do perigeu.

**Observação:** A análise dos resultados do IERS se encontra na conclusão deste trabalho.

## 16. APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo é feita uma exposição ordenada dos resultados analíticos e numéricos, visando exprimir com clareza as diferenças de cada modelo utilizado e as conclusões obtidas neste estudo.

### EXPRESSÕES PARA O MOVIMENTO MÉDIO:

MODELO DE KOZAI:

$$n_{\Omega} = -\frac{3R^5 \beta \cos i (1 - 3 \cos 2i^*) k_2 n^{*2}}{16a^5 (-1 - e^2)^2 n}$$
$$n_{\omega} = \frac{3R^5 \beta (3 + 5 \cos 2i) (1 + 3 \cos 2i^*) k_2 n^{*2}}{64a^5 (-1 + e^2)^2 n}$$

em que  $k_2$  (número de Love) é uma constante.

MODELO DE KAULA:

$$n_{\Omega} = -\frac{3R^5 \cos i (1 + 3 \cos 2i^*) (7\kappa_{20} + 2\kappa_{22}) Gm^*}{112a^5 (-1 + e^2)^2 n (a^*)^3 (1 - (e^*)^2)^{3/2}}$$
$$n_{\omega} = -\frac{3R^5 (3 + 5 \cos 2i) (1 + 3 \cos 2i^*) (7\kappa_{20} + 2\kappa_{22}) Gm^*}{448a^5 (-1 + e^2)^2 n (a^*)^3 (1 - (e^*)^2)^{3/2}}$$

em que  $k_2$  é uma função da latitude.

## MODELO DE BALMINO

$$n_{\Omega} = -\frac{3R^5 \cos i (1 + 3 \cos 2i^*) (7K_{20} + 2K_{22}) Gm^*}{112a^5 (-1 + e^2)^2 n(a^*)^3 (1 - (e^*)^2)^{3/2}}$$

$$n_{\omega} = -\frac{3R^5 (3 + 5 \cos 2i) (1 + 3 \cos 2i^*) (7K_{20} + 2K_{22}) Gm^*}{448a^5 (-1 + e^2)^2 n(a^*)^3 (1 - (e^*)^2)^{3/2}}$$

em que  $k_2$  é uma função da latitude e da longitude.

## MODELO DO IERS

$$n_{\Omega} = (GE)^{1/2} a^{-3/2} \left\{ -3 \frac{R^2 \Delta \bar{C}_{20}}{2a^2 (1 - e^2)^2} \cos i + \frac{3}{8} \left( \frac{R^2 \Delta \bar{C}_{20}}{2a^2 (1 - e^2)^2} \right)^2 \times \right. \\ \left. \left[ (-5 + 12(1 - e^2)^{1/2} + 9(1 - e^2)) \cos i + (-35 - 36(1 - e^2)^{1/2} - 5(1 - e^2)) \cos^3 i \right] \right\}$$

$$n_{\omega} = (GE)^{1/2} a^{-3/2} \left\{ -3 \frac{R^2 \Delta \bar{C}_{20}}{2a^2 (1 - e^2)^2} (-1 - 5 \cos^2 i) + \frac{3}{32} \left( \frac{R^2 \Delta \bar{C}_{20}}{2a^2 (1 - e^2)^2} \right)^2 \times \right. \\ \left. \left[ (-35 + 24(1 - e^2)^{1/2} + 25(1 - e^2) + (90 - 192(1 - e^2)^{1/2} - 126(1 - e^2))) \cos^2 i + \right. \right. \\ \left. \left. (385 - 360(1 - e^2)^{1/2} - 45(1 - e^2)) \cos^4 i \right] \right\}$$

sendo este modelo diferenciado dos outros três, em que o  $k_2$  é uma constante para o cálculo de  $\Delta \bar{C}_{20}$  (variação do coeficiente  $\bar{C}_{20}$  do geopotencial).

**VALORES ENCONTRADOS:**

	Plano da órbita da Lua coincidente com o plano da eclíptica		Considerando a influência da inclinação da Lua	
	$n_{\Omega}(rad / dia)$	$n_{\omega}(rad / dia)$	$n_{\Omega}(rad / dia)$	$n_{\omega}rad / dia)$
<b>KOZAI</b>	$-8.33781 \times 10^{-7}$	$1.3238 \times 10^{-6}$	$-6.35757 \times 10^{-7}$	$1.0094 \times 10^{-6}$
<b>KAULA</b>	$-9.37006 \times 10^{-7}$	$1.48769 \times 10^{-6}$	$-8.12171 \times 10^{-7}$	$1.28949 \times 10^{-6}$
<b>BALMINO</b>	$-8.78318 \times 10^{-7}$	$1.39452 \times 10^{-6}$	$-7.61302 \times 10^{-7}$	$1.20873 \times 10^{-6}$
<b>IERS</b>	$-3.60365 \times 10^{-7}$	$1.97654 \times 10^{-6}$	$-3.60365 \times 10^{-7}$	$1.97654 \times 10^{-6}$

**Tabela 16.1** – Tabela dos resultados dos movimentos médios dos modelos de Kozai, Kaula, Balmino e IERS.

EXCENTRICIDADE	LUA NÃO PRECESSIONADA CASO1		LUA PRECESSIONADA CASO2	
	Maior amplitude	Período (dias)	Maior amplitude	Período (dias)
<b>KOZAI</b>	0.00227218	$2.37316 \times 10^6$	0.00227218	$2.37316 \times 10^6$
<b>KAULA</b>	0.000078526	$2.11172 \times 10^6$	0.000078526	$2.11172 \times 10^6$
<b>IERS</b>	0.0000172631	$1.58944 \times 10^6$	0.0000172631	$1.58944 \times 10^6$

**Tabela 16.2** – Tabela dos resultados das excentricidades para os modelos de Kozai, Kaula, Balmino e IERS.

<b>INCLINAÇÃO</b>	<b>LUA NÃO PRECESSIONADA CASO1</b>		<b>LUA PRECESSIONADA CASO2</b>	
	Maior amplitude (rad)	Período (dias)	Maior amplitude (rad)	Período (dias)
<b>KOZAI</b>	0.0899087	$7.53577 \times 10^6$	0.000081215	6807.10
<b>KAULA</b>	0.0787884	$6.7056 \times 10^6$	0.0000799721	6806.34
<b>IERS</b>	$2.99035 \times 10^{-7}$	$1.58944 \times 10^6$	$2.99035 \times 10^{-7}$	$1.58944 \times 10^6$

**Tabela 16.3** – Tabela dos resultados das inclinações para os modelos de Kozai, Kaula, Balmino e IERS.

<b>NODO ASC.</b>	<b>LUA NÃO PRECESSIONADA CASO1</b>		<b>LUA PRECESSIONADA CASO2</b>	
	Maior amplitude (rad)	Período (dias)	Maior amplitude (rad)	Período (dias)
<b>KOZAI</b>	0.103817	$7.53577 \times 10^6$	0.0000937784	6807.10
<b>KAULA</b>	0.0909762	$6.7056 \times 10^6$	0.0000923433	6806.34
<b>IERS</b>	$1.74324 \times 10^{-7}$	$1.58944 \times 10^6$	$1.74324 \times 10^{-7}$	$1.58944 \times 10^6$

**Tabela 16.4** – Tabela dos resultados das longitudes do nodo ascendente para os modelos de Kozai, Kaula, Balmino e IERS.



<b>ARG. PERIGEU</b>	<b>LUA NÃO PRECESSIONADA CASO1</b>		<b>LUA PRECESSIONADA CASO2</b>	
	Maior amplitude (rad)	Período (dias)	Maior amplitude (rad)	Período (dias)
<b>KOZAI</b>	0.22715	$2.37316 \times 10^6$	0.22715	$2.37316 \times 10^6$
<b>KAULA</b>	0.00435505	$2.11173 \times 10^6$	0.00422646	$2.11173 \times 10^6$
<b>IERS</b>	$7.62191 \times 10^{-6}$	$1.58944 \times 10^6$	$7.62191 \times 10^{-6}$	$1.58944 \times 10^6$

**Tabela 16.5** – Tabela dos resultados dos argumentos do perigeu para os modelos de Kozai, Kaula, Balmino e IERS.

Para uma melhor visualização do comportamento físico de cada modelo, será feita abaixo uma exposição dos gráficos que representam as variações de longo período dos elementos orbitais considerados.

### **GRÁFICOS ENCONTRADOS:**

## EXCENTRICIDADE

### KOZAI - CASO 1

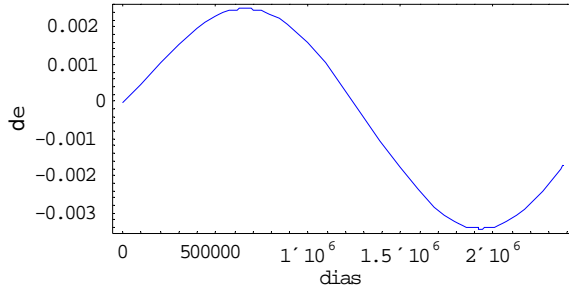


Figura 9.5

### KOZAI - CASO 2

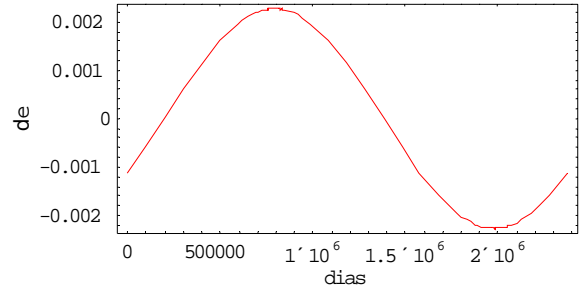


Figura 9.6

### KAULA - CASO 1

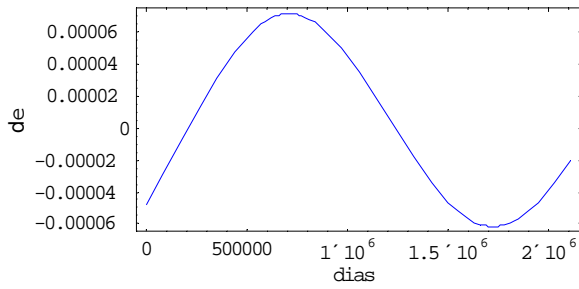


Figura 11.3

### KAULA - CASO 2

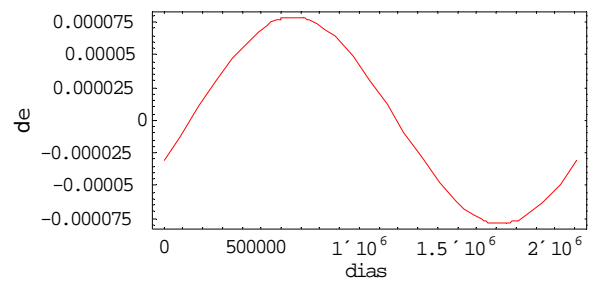


Figura 11.4

### IERS

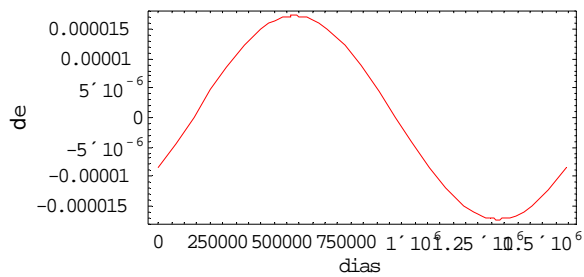


Figura 15.1

## INCLINAÇÃO

### KOZAI - CASO 1

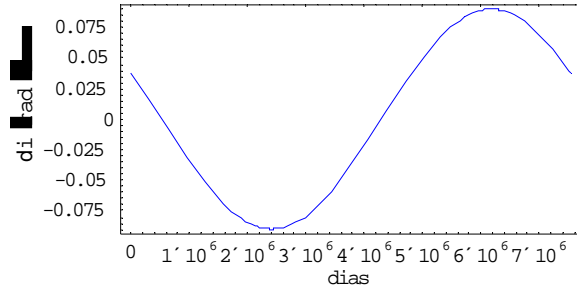


Figura 9.5

### KOZAI - CASO 2

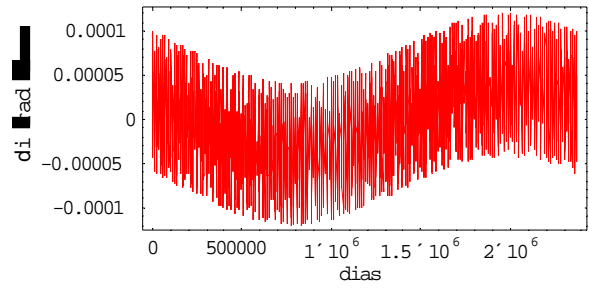


Figura 9.7

### KAULA - CASO 1

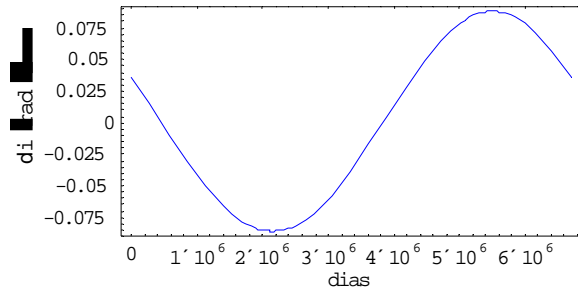


Figura 11.5

### KAULA - CASO 2

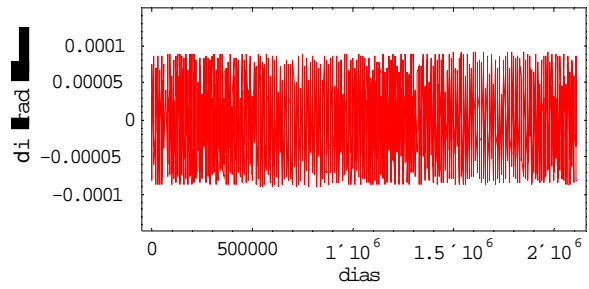


Figura 11.6

### IERS

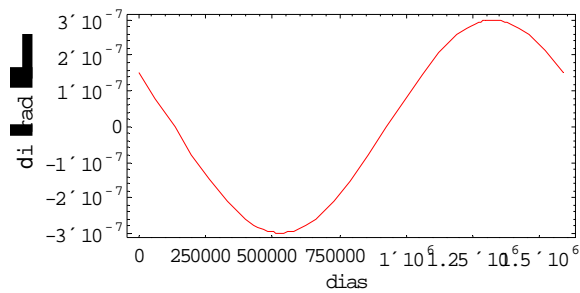


Figura 15.2

## LONGITUDE DO NODO ASCENDENTE

### KOZAI - CASO 1

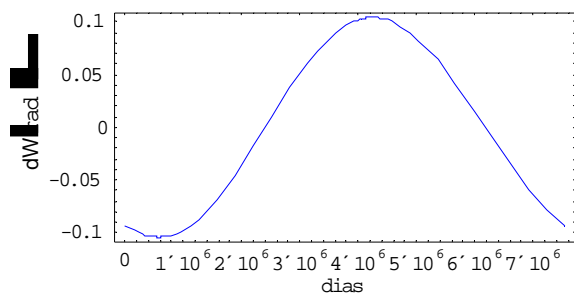


Figura 9.10

### KOZAI - CASO 2

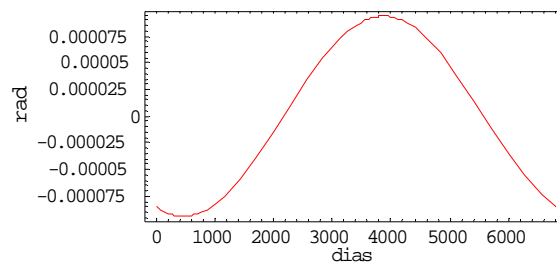


Figura 9.11

### KAULA - CASO 1

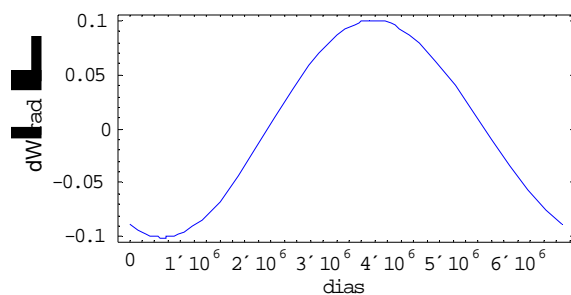


Figura 11.8

### KAULA - CASO 2

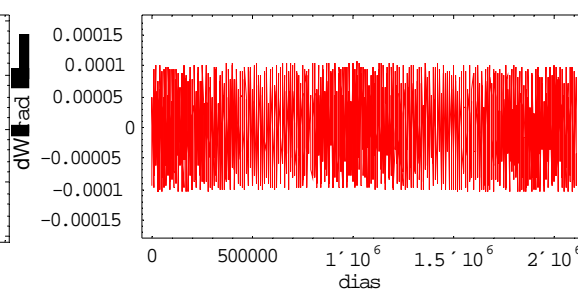


Figura 11.9

### IERS

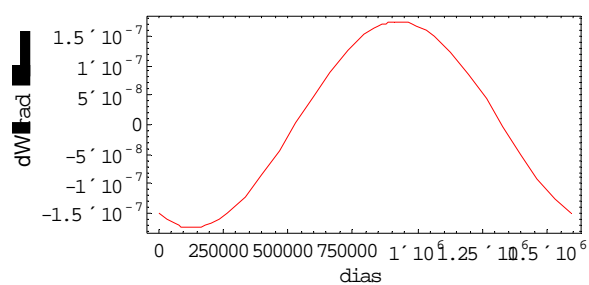


Figura 15.3

## LONGITUDE DO NODO ASCENDENTE

### KOZAI - CASO 1

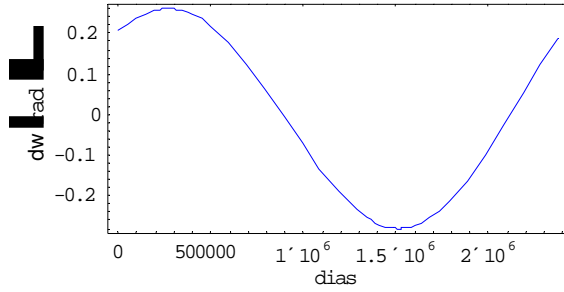


Figura 9.15

### KOZAI - CASO 2

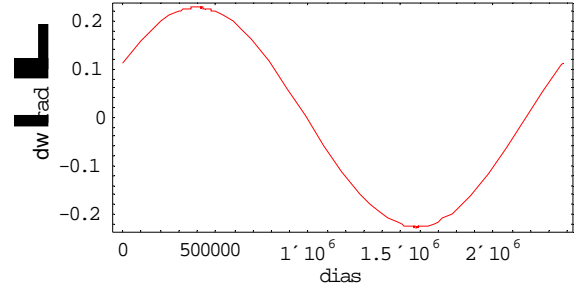


Figura 9.16

### KAULA - CASO 1

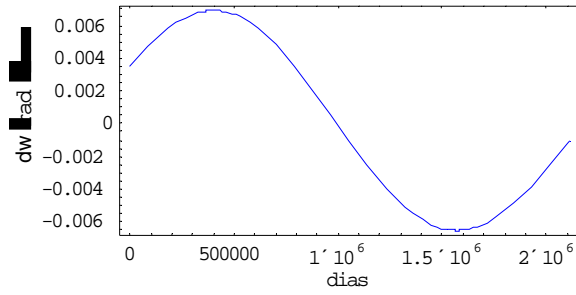


Figura 11.11

### KAULA - CASO 2

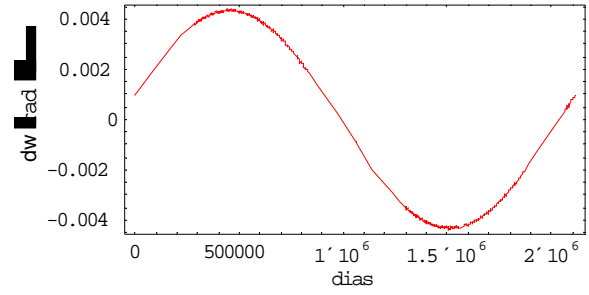


Figura 11.12

### IERS

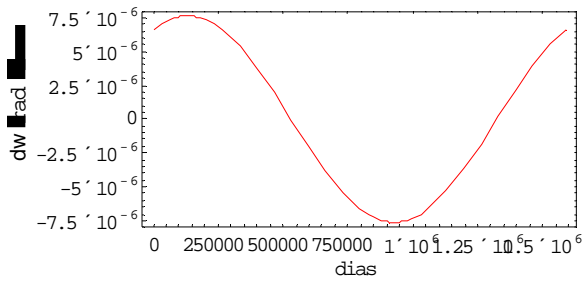


Figura 15.3

## 17. CONSIDERAÇÕES

### 17.1. RESSONÂNCIAS

A ressonância ocorre quando o período de revolução de um satélite é um múltiplo inteiro do período de rotação da Terra, levando a uma amplificação de certos coeficientes dos harmônicos  $C_{nm}$  e  $S_{nm}$ , resultando em uma perturbação nos elementos orbitais, maior do que o normal. Deste modo, um satélite com  $m$  revoluções/dia estará sensivelmente afetado pela ressonância.

Levando em conta os efeitos da maré terrestre, Kaula (1969) na análise da evolução orbital da Lua, considera a equação (10.13), e impõe as seguintes condições:

(i) razão zero:

$$\dot{\nu}_{kmjg} - \dot{\nu}_{\ell mpq}^* = 0 \quad (17.1)$$

ou, para a equação (10.4),

$$j = \frac{1}{2}(k - \ell) + p, \quad (17.2)$$

$$g = q; \quad (17.3)$$

(ii) um pequeno fator “amortecedor”  $\left(a^{*\ell+1} a^{k+1}\right)^{-1}$ , ou:

$$\ell k = 20,22,24,33 \text{ ou } 42 \quad (17.4)$$

A combinação 31 para  $\ell k$  é excluída devido a um harmônico de primeiro grau, que representaria um deslocamento da origem, o centro de massa da Terra.

Para a evolução da órbita lunar, escreve-se:

$$T = T_0 + T_2 + T_4 \quad (17.5)$$

em que:

$$\begin{aligned} T_0 &= \sum_{qh} K_{201q} \left(\frac{R}{a}\right) F_{000} G_{00q} Q_{2h00} \Psi_{201hq}, \\ T_2 &= \sum_{qlmp} K_{2mpq} \left(\frac{R}{a}\right)^3 F_{2mp} G_{2pq} Q_{2h2m} \Psi_{22mphq}, \\ T_4 &= \sum_{\ell=2}^4 \sum_{qlmp} K_{\ell mpq} \left(\frac{R}{a}\right)^{7-\ell} F_{(6-\ell)mj} G_{2jg} Q_{(6-\ell)h\ell mphq} \end{aligned} \quad (17.6)$$

em que:

$$\Psi_{\ell kmphq} = \left(\kappa_{\ell h} \cos - (k_{\ell} \varepsilon)_h \operatorname{sen}\right) \left(\nu_{kmjq} - \nu_{\ell mpq}^*\right) \quad (17.7)$$

e  $j$  está relacionado com  $k, \ell$  e  $p$  pela equação (17.2).

Para que haja uma alteração na inclinação da função perturbadora (17.6), a combinação  $F_{\ell mp} F_{kmj} [(k-2j)\cot i - m \csc i]$  deve ser diferente de zero (ver Kaula, 1966, pág.40).

Para  $i=0$ , isto jamais ocorre:  $F_{\ell mp} F_{kmj}$  contém um fator diferente de zero somente para  $m = k - 2j$ .

Se  $m \neq k - 2j$ ,  $F_{\ell mp} F_{kmj}$  é pelo menos da ordem de  $i^2$ .

Diante disto, podemos dizer que variações meramente latitudinais nas propriedades da maré jamais poderão deslocar a Lua para fora de uma órbita equatorial. Faz-se necessária uma interação, tal que:

$$[(k-2j) - (\ell-2p)](\dot{\omega} + \dot{M}) + (s-m)(\dot{\Omega} - \dot{\theta}) \approx 0 \quad (17.8)$$

com  $s \neq m$ , isto é, uma ressonância.

Para manter uma ressonância suficientemente longa e com um efeito significativo,  $\frac{\dot{n}}{\dot{\theta}}$  deve ser igual a  $\frac{n}{\theta}$ , em que  $n$  é o movimento médio do satélite.



## 18. CONCLUSÃO

Nesta pesquisa, apresentou-se uma revisão sobre o efeito das marés na Terra, as suas variações de acordo com as posições do Sol e da Lua, e principalmente como esse efeito perturba a órbita dos satélites artificiais. Apresentou-se também o mecanismo do bojo devido à maré, como também, o potencial devido à maré terrestre, sendo este descrito tanto em um ponto da superfície da Terra como num ponto externo a Terra, considerando-se apenas a influência da Lua. Mostrou-se que a distorção causada nesse potencial consiste num parâmetro denominado *número de Love*.

Quatro modelos de maré terrestre foram estudados e comparados. Começamos com o modelo mais simples que é o de Kozai, em que o potencial considerado contém apenas os termos seculares e de longo período, que Kozai já havia determinado em seu artigo em 1959. O número de Love para o potencial de Kozai é uma constante, que consideramos ser  $k_2 = 0.299$ .

O modelo de Kaula (1969), que é um modelo mais atualizado que o de Kozai, foi expandido em séries de polinômios, e, depois de um trabalho laborioso, em que algumas condições foram impostas, encontram-se os termos convenientes para que a comparação fosse possível. A expressão encontrada que contém esses termos é a (10.18). Kaula escreve os números de Love e o ângulo de atraso como funções da latitude, representando-os por harmônicos esféricos.

O modelo de Balmino (1974), é muito parecido com o de Kaula, apesar de ter uma notação muito complexa. Os termos de curto período são idênticos aos de Kaula, variando apenas o número de Love, que Balmino representa não apenas como função da latitude, mas também da longitude.

Obteve-se, pelo método das aproximações sucessivas as expressões das variações seculares da longitude do nodo ascendente e do argumento do perigeu,

levando em conta também à influência da inclinação da Lua, para os três modelos citados acima.

Obteve-se também pelo método das aproximações sucessivas as expressões das variações da excentricidade, inclinação, longitude do nodo ascendente e argumento do perigeu para os modelos de Kozai e Kaula. Para o modelo de Balmino os termos de longo período foram encontrados, mas o programa usado (Mathematica) integrou as equações, devido ao grande número de termos de sua função perturbadora.

O modelo do IERS (1996), sendo hoje o modelo padrão, diferentemente dos outros três, considera a influência no movimento orbital de um satélite em termos de perturbações nos coeficientes  $C_{nm}$  e  $S_{nm}$  do geopotencial.

Para exemplificar a ordem dos efeitos das perturbações, foi escolhido um satélite com as características descritas no capítulo 9. Verifica-se que as marés provocam perturbações seculares e de longo período na longitude do nodo ascendente e no argumento do perigeu. Os resultados encontrados mostram que os modelos utilizados levam a resultados diferentes, embora com a mesma ordem de grandeza. Isto pode ser importante para análises de perturbações de longo período. Verifica-se também que os resultados dos modelos de Kozai, Kaula e Balmino são bem aproximados, enquanto que o resultado do modelo padrão (IERS) se distancia bastante desses três.

Foram mostrados gráficos das variações de cada elemento orbital (para os modelos de Kozai e de Kaula), para dois casos específicos: caso 1: Lua em órbita elíptica não precessionada; caso 2: Lua em órbita elíptica precessionada.

Verifica-se que para a **variação da excentricidade** não existem diferenças nos termos de maior amplitude e no período para o caso 1 e para o caso 2, isto significa que a excentricidade do satélite considerado não sofre uma influência significativa da precessão da Lua.

Para a **inclinação e longitude do nodo ascendente**, verifica-se que a influência da precessão da Lua é bastante significativa, pois encontramos períodos

bem menores (cerca de 6800 dias) para o caso 2, nos dois modelos. As ondulações são bem definidas para o modelo de Kozai, pois os termos com amplitudes altas apresentam períodos da ordem de  $2 \times 10^6$  dias. Já para o modelo de Kaula os termos de grandes períodos ( $2 \times 10^6$  dias) apresentam amplitudes bastante pequenas, que são “mascarados” pelos termos de grandes amplitudes, que apresentam períodos menores (cerca de 6800 dias).

Para o **argumento do perigeu**, verifica-se que existe a influência da Lua embora não seja muito significativa. As ondulações aparecem nas regiões de máximos e mínimos.

Conclui-se também que a maré, em primeira ordem provoca perturbações de longo período em todos os elementos orbitais, como exceção do semi-eixo maior, sendo que essas perturbações podem ser consideradas, para períodos de alguns anos, como perturbações seculares, pelo fato desse efeito apresentar períodos muito grandes.

Os resultados do modelo de Kaula são os que mais se aproximam dos resultados do modelo padrão (IERS), embora se distanciem muito ainda quando comparados.

Kaula acredita e isso confirma-se com essa pesquisa, que os termos que contém o argumento do perigeu podem ser desconsiderados devido ao fato do período das variações na excentricidade serem muito grandes, então  $\frac{de}{dt}$  pode ser

igual a zero, sendo inútil o cálculo de  $\frac{\partial U}{\partial \omega}$ . Kaula expressa isso em sua expressão

(10.17), em que considera apenas termos dependentes do nodo ascendente. Essa expressão simplificada fornece apenas as variações da inclinação e da longitude do nodo ascendente, os quais apresentam variações significativas.

## 18.1. TRABALHOS FUTUROS

Para trabalhos futuros convém aprimorar os trabalhos de Kaula e Balmino para a maré terrestre, investigando mais profundamente vários cenários, com o objetivo de excluir os efeitos não significativos e incluir aqueles que dão uma maior contribuição para o fenômeno da maré, causando perturbações significativas nos satélites artificiais. Também, no modelo do IERS, só utilizamos correção no  $S_{20}$  e  $C_{20}$ . Ora, a missão que utiliza o satélite LAGEOS, por exemplo, analisa a evolução dos seus elementos orbitais por mais de 20 anos, levando em consideração termos do geopotencial até  $J_{40}$ . Vemos assim que, para casos práticos, é necessário considerar correções devidas à maré terrestre nos tesserais de alto grau e ordem. A influência do Sol deverá ser incluída. Um modelo melhor para o movimento da Lua deve ser considerado. Convém também investigar a influência de ressonâncias nas variações longitudinais, acreditando-se que isso ajudaria a promover mais as variações da inclinação. Modelos para marés oceânicas também devem ser considerados, comparados e acrescentados ao programa.

## REFERÊNCIAS

- BALMINO G. **Analytical expressions for Earth tides perturbations on artificial satellites in:** Groupe de Rech. de Gedesie S. Patiale, 1974.
- BROSCHE P., SUNDERMANN J. **Tidal friction and the Earth's rotation.** Berlin: Ed. Springer, 1982.
- BROSCHE P., SUNDERMANN J. **Tidal friction and the Earth's rotation II.** Berlin: Ed. Springer, 1983.
- BROUCKE R. **Tidal evolution: Some simple models.** University of Texas at Austin (1987). Apostila.
- CAYLEY, A. **Tables of the developments of functions in the theory of elliptic motion.** London: Mem. Roy. Astron., Soc. V. 29, p. 191, 1861.
- CASOTTO S. **Spectral decomposition of geopotential, earth and ocean tidal perturbation in linear satellite theory.** Center for Space Research, The University of Texas at Austin, Austin, Texas, USA, 1990.
- HENDERSHOTT M. C., MUNK W. **Tides.** Annual Review of Fluid Mechanics, 1970.
- IERS ( INTERNATIONAL EARTH ROTATION AND REFERENCE SYSTEMS SERVICE). **Solid earth tides.** German, 1996.

- K. RAMA RAO. **Métodos fundamentais de perturbação**. São José dos Campos. INPE, 1986.
- KAULA, W. M. **Analysis of Gravitational and Geometric Aspects or Geodetic Utilization of Satellites**. Los Angeles: Institute of Geophysics and Planetary Physics, University of California, 1960.
- KAULA, W. M. **Tidal dissipation by solid friction and the resulting orbital evolution**. Los Angeles: Institute of Geophysics and Planetary Physics, University of California, 1964.
- KAULA, W. M. **Theory of Satellite Geodesy**. Los Angeles: Institute of Geophysics and Planetary Physics, University of California, 1966.
- KAULA, W. M. **Tidal friction with latitude- dependent amplitude and phase angle**. Seattle: Astr. Journal, v. 74, p. 1108-1114, 1969.
- KOZAI, Y. **The Earth's gravitational potential derived from the motion of satellite**. Washington D. C. : Smithsonian Inst. Astrophysical Observatory, Special Report. 52, March, 1958.
- KOZAI, Y. **On the effects of the sun and the moon upon the motion of a close-earth satellite**. Washington D. C. : Smithsonian Inst. Astrophysical Observatory, Special Report. 52, March, 1959a.
- KOZAI, Y. **The motion of a close earth satellite**. Washington D. C. : Smithsonian Inst. Astrophysical Observatory, Special Report. 52, March, 1959b.

- KOZAI, Y. **Effects of the deformation of the earth on the motion of close earth satellites.** Tokio: Publ. Astro. Soc. of Japan ,v. 17, n° 4, 1965.
- KOZAI, Y. **Love's number of the earth derived from satellite observations.** Massachusetts: Smithsonian Inst. Astrophysical Observatory, Cambridge, 1967.
- KOZAI, Y. **A new method to compute lunisolar perturbations in satellite motions.** Massachusetts: Smithsonian Inst. Astrophysical Observatory, Cambridge, 1973.
- KUGA, H. K., RAO, R. K., CARRARA, V. **Satélites Artificiais - Movimento Orbital.** São José dos Campos: INPE, 2000. Apostila.
- KUGA H. K. **Investigação sobre navegação e determinação de órbita via GPS, parte 2.** INPE, SJC, 2004.
- LAMBECK, K. **The earth's variable rotation: geophysical causes and consequences.** Ed. Cambridge, 1980.
- LOVE A. [http://www.jpl.nasa.gov/releases/2002/release\\_2002\\_37.html](http://www.jpl.nasa.gov/releases/2002/release_2002_37.html)  
e <http://scienceworld.wolfram.com/physics/topics/Tides.html>
- MORANDO, B. **Mouvement d'un satellite artificiel de la terre.** Cambridge: Ed. Gordon & Breach, UK, 1974.

- MURRAY,C.D.,DERMOTT, S.F. **Solar Sistem Dynamics**. Cambridge: University Press, 1999.
- MUSEN P. , ESTES R. **On the tidal effects in the motion of artificial satellites**. Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Md. USA, 1971.
- MUSEN P. , FELSENTREGER T. **On the determination of the long period tidal perturbation in the elements of artificial earth satellites**. Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Md. USA, 1971.
- PILCHOWSKI, U. H. **Perturbação na órbita de satélites artificiais devido à maré**. São José dos Campos: INPE, 1981.
- PRADO, A. F. B. A., KUGA, H. K. **Fundamentos de tecnologia espacial**. São José dos Campos: INPE, 2001.
- SANTOS, N. **Perturbações orbitais devidas à maré terrestre**. Guaratinguetá: UNESP, 2002.



## APÊNDICE A – EXPRESSÕES DO MODELO DE KOZAI

Considerando-se a influência da inclinação da Lua, encontramos as seguintes expressões para a variação secular da longitude do nodo ascendente e para o argumento do perigeu:

$$\begin{aligned}
 \dot{\omega}_w = & - \frac{3}{2} n_w^2 \cos i \left[ \frac{1}{2} \cos 2\omega + \frac{3}{4} \cos 4\omega + \frac{1}{8} \cos 6\omega \right] \\
 & + 0.0652^\circ \cos 253.183^\circ - 0.0529539^\circ t + \\
 & 1.557^\circ \times 10^{-12} t^2 + 4.56055^\circ \times 10^{-20} t^3 \\
 & + 0.0006^\circ \cos 209.18^\circ - 0.0529539^\circ t + \\
 & 5.447^\circ \times 10^{-12} t^2 + 4.56055^\circ \times 10^{-20} t^3
 \end{aligned}
 \tag{A.1}$$

$n_w =$

$$\frac{1 - e^2}{na} \left[ \frac{3}{2} L - 1644' + 0.0652' \cos 59.183^\circ - 0.0529539^\circ t + 1.55747^\circ \cdot 10^{-12} t^2 + 4.56055^\circ \cdot 10^{-20} t^3 \right] - \frac{1 - e^2}{na} \left[ \frac{3}{2} L - 1644' + 0.0652' \cos 59.183^\circ - 0.0529539^\circ t + 1.55747^\circ \cdot 10^{-12} t^2 + 4.56055^\circ \cdot 10^{-20} t^3 \right]$$

(A.2)





Inclinação:

Caso 1:

$\alpha =$

The diagram illustrates a vertical stack of layers with the following mathematical expressions and symbols:

- Top layer:  $1$
- Second layer:  $8 a \frac{1 - e^2 n}{R^5}$
- Third layer:  $2 n_w$
- Fourth layer:  $2 n_w$
- Fifth layer:  $Si$
- Sixth layer:  $2 n_w$
- Seventh layer:  $W_0 + W_0$
- Eighth layer:  $Si$
- Ninth layer:  $2 n_w$
- Tenth layer:  $W_0 - W_0$
- Eleventh layer:  $Co$
- Twelfth layer:  $2 n_w$
- Thirteenth layer:  $W_0 + W_0$
- Fourteenth layer:  $Co$
- Fifteenth layer:  $2 n_w$
- Sixteenth layer:  $2 n_w + n_w$



Caso 2:

$d_i =$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{8a} \sqrt{1 - e^2} \frac{R^5 b}{\dots} \\
 & \frac{\cos 2(\dots)}{2n_w} \\
 & \frac{\sin 2(\dots)}{2} \\
 & \frac{\cos 2(\dots)}{2} \\
 & \frac{\sin 2(\dots)}{2} \\
 & \frac{\cos 2(\dots)}{2}
 \end{aligned}$$

The diagram illustrates a vertical sequence of nodes, likely representing a discretization of a domain. Each node is associated with various mathematical parameters and symbols. From top to bottom, the nodes are labeled with the following symbols and expressions:

- Node 1:  $1$ ,  $1 - e^2$ ,  $k$ ,  $H$ ,  $W_0 - \tau_0$ ,  $n_w - n_w^*$
- Node 2:  $15$ ,  $e^2$ ,  $k$ ,  $H$ ,  $W_0 - \tau_0$ ,  $n_w - n_w^*$
- Node 3:  $1$ ,  $2 \cos 2$ ,  $k$ ,  $H$ ,  $W_0 - \tau_0$ ,  $n_w - n_w^*$
- Node 4:  $1$ ,  $2 \cos 2$ ,  $k$ ,  $H$ ,  $W_0 - \tau_0$ ,  $n_w - n_w^*$
- Node 5:  $1$ ,  $2 \cos 2$ ,  $k$ ,  $H$ ,  $W_0 - \tau_0$ ,  $n_w - n_w^*$
- Node 6:  $1$ ,  $2 \cos 2$ ,  $k$ ,  $H$ ,  $W_0 - \tau_0$ ,  $n_w - n_w^*$
- Node 7:  $1$ ,  $2 \cos 2$ ,  $k$ ,  $H$ ,  $W_0 - \tau_0$ ,  $n_w - n_w^*$

The diagram is labeled (A.6) on the right side.

Longitude do nodo ascendente:

Caso 1:



$$\begin{aligned}
dW = & \frac{1}{a} \left[ \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos^2 i} \right. \\
& - \frac{3}{16} \frac{\cos^2 i}{1 - e^2 \cos^2 i} \left( \frac{2n_w + W_0}{a} \right) \\
& - \frac{3}{8} \frac{\cos^2 2i}{1 - e^2 \cos^2 i} \left( \frac{2n_w + W_0}{a} \right) \\
& - \frac{15}{8} \frac{e^2 \cos^2 i}{1 - e^2 \cos^2 i} \left( \frac{2n_w + W_0}{a} \right) \\
& + \frac{1}{2} \frac{\cos^2 i}{1 - e^2 \cos^2 i} \left( \frac{2n_w + W_0}{a} \right) \\
& + \frac{1}{2} \frac{\cos^2 2i}{1 - e^2 \cos^2 i} \left( \frac{2n_w + W_0}{a} \right) \\
& + \frac{1}{2} \frac{\cos^2 i}{1 - e^2 \cos^2 i} \left( \frac{2n_w + W_0}{a} \right) \\
& \left. + \frac{1}{2} \frac{\cos^2 i}{1 - e^2 \cos^2 i} \left( \frac{2n_w + W_0}{a} \right) \right]
\end{aligned} \tag{A.7}$$



Argumento do perigeu:

Caso 1:

$$\begin{aligned}
 dw = & \frac{1}{a^5 e} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{2a^2 R^5 h k_2}{l} \right) \left( \frac{3 \sin i}{16} \right) \left( \frac{\sin i}{2} \right) \left( \frac{3 \sin 2i}{16} \right) \left( \frac{15}{4} e l \right) \left( \frac{1}{2} \sin \frac{n}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \sin \frac{n}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \sin \frac{n}{2} \right) \right. \\
 & \left. \left( \frac{1}{2} \sin \frac{n}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \sin \frac{n}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \sin \frac{n}{2} \right) \right] \left( \frac{2n_w}{2n_w + n_w} \right)
 \end{aligned}$$







## **APÊNDICE B – EXPRESSÕES DO MODELO DE KAULA**

A função perturbadora devido às marés para o modelo de Kaula, pode ser expressa como:

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{3 \sin i}{4} \left[ \frac{3}{16} \cos W \frac{W}{e} + \frac{3}{16} \cos 2W \frac{W^2}{e^2} \right. \\
 & \left. + \frac{3}{16} \sin 2i \frac{W^3}{e^3} + \frac{3}{5} \sin i \frac{W^4}{e^4} \right] \\
 & + \frac{3 \sin i}{4} \left[ \frac{5}{56} \cos W \frac{W}{e} + \frac{3}{56} \cos 2W \frac{W^2}{e^2} \right. \\
 & \left. + \frac{17}{7} \frac{2a^5}{e^2 R^7} \cos 2W \frac{W}{e} + 2 \cos W \frac{W}{e} + \cos i \frac{W}{e} + 18 \cos W \frac{W}{e} \right. \\
 & \left. + 7 \cos i \frac{W}{e} + 7 \cos i \frac{W}{e} + 21 \cos W \frac{W}{e} + 6 \cos 2W \frac{W^2}{e^2} + 7 \cos 2W \frac{W^2}{e^2} \right. \\
 & \left. + 14 \cos W \frac{W}{e} + 3 \cos 2W \frac{W^2}{e^2} \right]
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{48} a^3 \left[ \frac{1}{56} \sin 2\omega + \frac{3}{56} \sin i \cos 2\omega \right] \\
 & \frac{1}{1728} a^5 \left[ \frac{18}{56} \sin 2\omega + \frac{2}{56} \cos 2\omega + \frac{7}{56} \cos i \sin 2\omega + \frac{7}{56} \cos i \sin 2\omega + \frac{12}{56} \cos i \sin 2\omega + \frac{14}{56} \cos i \sin 2\omega + \frac{6}{56} \sin i \cos 2\omega \right] \\
 & \frac{1}{448} a^5 \left[ \frac{1}{2} \cos 2\omega + \frac{3}{2} \cos i \sin 2\omega \right] + \frac{1}{2} \cos 2\omega + \frac{3}{2} \cos i \sin 2\omega
 \end{aligned}$$

(B.1)

A parte secular da função perturbadora pode ser expressa como:

$$U = \frac{R^5}{448 a^3} \left[ \frac{1}{2} \cos 2\omega + \frac{3}{2} \cos i \sin 2\omega \right] + \frac{1}{2} \cos 2\omega + \frac{3}{2} \cos i \sin 2\omega$$

(B.2)

Considerando-se agora a influência da inclinação da Lua, foram encontradas as seguintes expressões para a variação secular da longitude do nodo ascendente e para o argumento do perigeu:

$$\begin{aligned}
 \dot{\omega} = & - \frac{3}{2} n_w \left[ \frac{5}{3} \left( \frac{a}{a_0} \right)^2 - \frac{1}{3} \right] + \frac{3}{2} n_w \left[ \frac{5}{3} \left( \frac{a}{a_0} \right)^2 - \frac{1}{3} \right] \left[ \frac{5}{3} \left( \frac{a}{a_0} \right)^2 - \frac{1}{3} \right] \\
 & - 8356'' - 0.0652'' \cos 59.183^\circ - 0.0529539^\circ t + 1.55747^\circ \cdot 10^{-12} t^2 - 4.56055^\circ \cdot 10^{-20} t^3 \\
 & + 1644'' + 0.0652'' \cos 59.183^\circ - 0.0529539^\circ t + 1.55747^\circ \cdot 10^{-12} t^2 + 4.56055^\circ \cdot 10^{-20} t^3 \\
 & - 0.0006'' \cos 59.83^\circ - 0.0529539^\circ t + 1.55747^\circ \cdot 10^{-12} t^2 + 4.56055^\circ \cdot 10^{-20} t^3 \\
 & - 0.0006'' \cos 59.83^\circ - 0.0529539^\circ t + 1.55747^\circ \cdot 10^{-12} t^2 - 4.56055^\circ \cdot 10^{-20} t^3 \\
 \text{Sin } 2\omega = & \frac{2k_{2,2}}{4a} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{a}{a_0} \right)^2 - e^2 \right] \sin 2\omega
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

$$\begin{aligned}
& n_w \left[ R^5 + \cos 2\theta \left( \frac{3}{3} L^3 - 8356' - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 0.0652' \cos 59.183^\circ - 0.0529539^\circ t + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 1.55747^\circ \cdot 10^{-12} t^2 + 4.56055^\circ \cdot 10^{-20} t^3 \right) \right. \\
& \quad \left. 1644' + 0.0652' \cos 59.183^\circ - 0.0529539^\circ t + \right. \\
& \quad \left. 1.55747^\circ \cdot 10^{-12} t^2 + \right. \\
& \quad \left. 4.56055^\circ \cdot 10^{-20} t^3 \right) \\
& \quad \left. 0.0006' \cos 59.183^\circ - 0.0529539^\circ t + \right. \\
& \quad \left. 1.55747^\circ \cdot 10^{-12} t^2 + \right. \\
& \quad \left. 4.56055^\circ \cdot 10^{-20} t^3 \right) \\
& \quad \left. 0.0006' \cos 59.183^\circ - 0.0529539^\circ t + 1.55747^\circ \cdot 10^{-12} t^2 + \right. \\
& \quad \left. 4.56055^\circ \cdot 10^{-20} t^3 \right) \\
& \quad \left. k_{2,0} - 2k_{2,2} \left[ \frac{3}{3} L^3 - 8356' - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 0.0652' \cos 59.183^\circ - 0.0529539^\circ t + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 1.55747^\circ \cdot 10^{-12} t^2 + 4.56055^\circ \cdot 10^{-20} t^3 \right) \right. \\
& \quad \left. 1644' + 0.0652' \cos 59.183^\circ - 0.0529539^\circ t + \right. \\
& \quad \left. 1.55747^\circ \cdot 10^{-12} t^2 + \right. \\
& \quad \left. 4.56055^\circ \cdot 10^{-20} t^3 \right) \\
& \quad \left. 0.0006' \cos 59.183^\circ - 0.0529539^\circ t + \right. \\
& \quad \left. 1.55747^\circ \cdot 10^{-12} t^2 + \right. \\
& \quad \left. 4.56055^\circ \cdot 10^{-20} t^3 \right) \\
& \quad \left. 0.0006' \cos 59.183^\circ - 0.0529539^\circ t + 1.55747^\circ \cdot 10^{-12} t^2 + \right. \\
& \quad \left. 4.56055^\circ \cdot 10^{-20} t^3 \right) \\
& \quad \left. 24a^5 - e^2 \ln \left( \frac{3}{3} L^3 - 8356' - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 0.0652' \cos 59.183^\circ - 0.0529539^\circ t + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 1.55747^\circ \cdot 10^{-12} t^2 + 4.56055^\circ \cdot 10^{-20} t^3 \right) \right. \\
& \quad \left. 1644' + 0.0652' \cos 59.183^\circ - 0.0529539^\circ t + \right. \\
& \quad \left. 1.55747^\circ \cdot 10^{-12} t^2 + \right. \\
& \quad \left. 4.56055^\circ \cdot 10^{-20} t^3 \right) \\
& \quad \left. 0.0006' \cos 59.183^\circ - 0.0529539^\circ t + \right. \\
& \quad \left. 1.55747^\circ \cdot 10^{-12} t^2 + \right. \\
& \quad \left. 4.56055^\circ \cdot 10^{-20} t^3 \right) \\
& \quad \left. 0.0006' \cos 59.183^\circ - 0.0529539^\circ t + 1.55747^\circ \cdot 10^{-12} t^2 + \right. \\
& \quad \left. 4.56055^\circ \cdot 10^{-20} t^3 \right)
\end{aligned}
\tag{B.4}$$

Considerando-se os termos de longo período, descrito pela expressão (B.1), apresentamos as variações nos elementos orbitais para o **caso 1** e para o **caso 2**, descritas no capítulo 9:

**Excentricidade:**

**Caso1:**

$$de = \frac{1}{1792} e^2$$

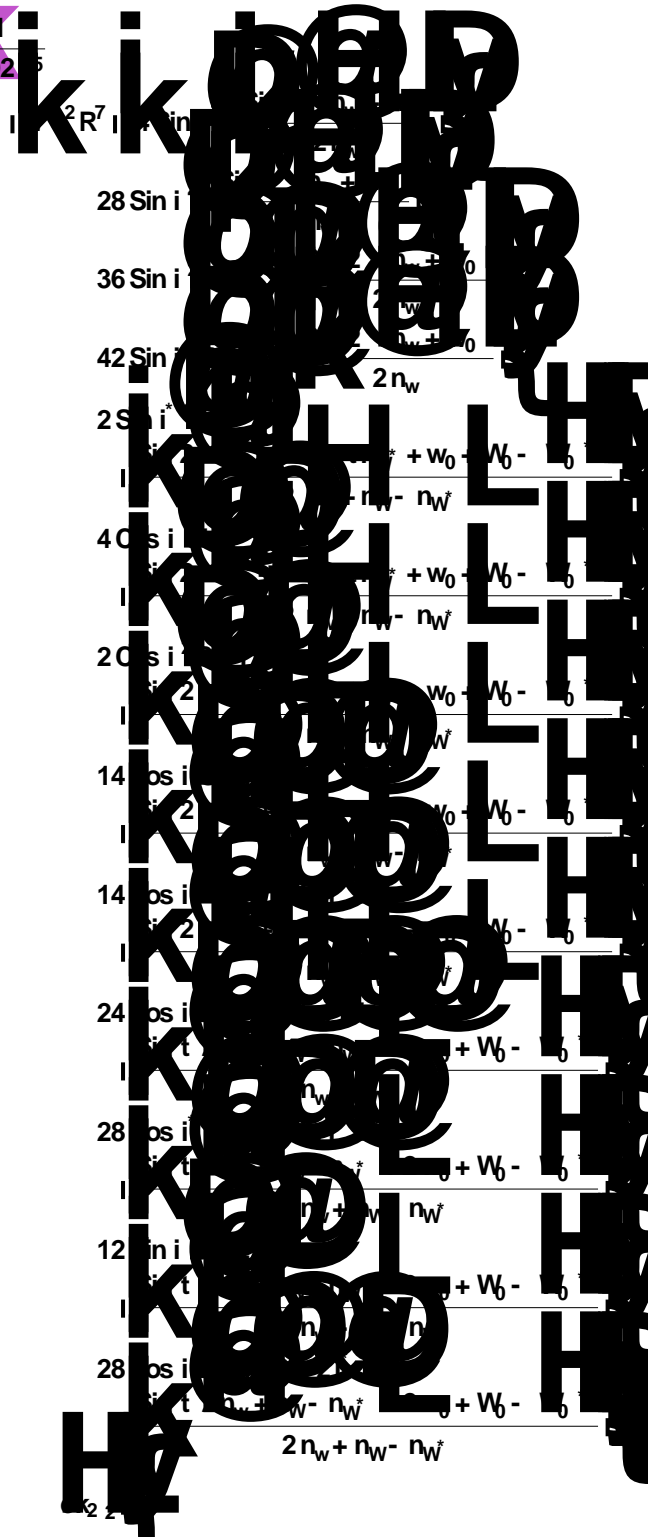
$k^2 R^7$   
 $28 \sin i$   
 $36 \sin i$   
 $42 \sin i$   
 $2 \sin i$   
 $40 \sin i$   
 $20 \sin i$   
 $14 \cos i$   
 $14 \cos i$   
 $24 \cos i$   
 $28 \cos i$   
 $12 \sin i$   
 $28 \cos i$   
 $2n_w + n_w$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{1792} \frac{k_1}{R^7} I_{k_1} \left[ \dots \right] \\
 & 28 \sin i \left[ \dots \right] \\
 & 36 \sin i \left[ \dots \right] \\
 & 42 \sin i \left[ \dots \right] \\
 & 2 \sin i \left[ \dots \right] \\
 & 4 \cos i \left[ \dots \right] \\
 & 2 \cos i \left[ \dots \right] \\
 & 14 \cos i \left[ \dots \right] \\
 & 14 \cos i \left[ \dots \right] \\
 & 12 \sin i \left[ \dots \right] \\
 & 14 \sin i \left[ \dots \right] \\
 & 28 \cos i \left[ \dots \right] \\
 & 6 \sin i \left[ \dots \right] \\
 & k_{2,2} E G_m^* \dots
 \end{aligned}$$

(B.5)

Caso 2:

$$de = \frac{1}{1792} e^2$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{1792} \frac{k_i^2 R^7}{I} \\
& 28 \sin i \frac{k_i^2 R^7}{I} \\
& 36 \sin i \frac{k_i^2 R^7}{I} \\
& 42 \sin i \frac{k_i^2 R^7}{I} \\
& 2 \sin i \frac{k_i^2 R^7}{I} \\
& 4 \cos i \frac{k_i^2 R^7}{I} \\
& 2 \cos i \frac{k_i^2 R^7}{I} \\
& 14 \cos i \frac{k_i^2 R^7}{I} \\
& 14 \cos i \frac{k_i^2 R^7}{I} \\
& 12 \sin i \frac{k_i^2 R^7}{I} \\
& 14 \sin i \frac{k_i^2 R^7}{I} \\
& 28 \cos i \frac{k_i^2 R^7}{I} \\
& 6 \sin 2i \frac{k_i^2 R^7}{I} \\
& \text{en } \frac{k_i^2 R^7}{I}
\end{aligned}$$

(B.6)

**Inclinação:**

**Caso 1:**





$$\begin{aligned}
& \frac{1}{17} \frac{2a^5}{k^2 R^7} \left[ \frac{42 \sin i}{2 \sin i} \left( \frac{2n_w + n_w}{2n_w + n_w} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{4 \cos i}{2 \cos i} \left( \frac{2n_w + n_w}{2n_w + n_w} \right) \right] \\
& \quad \left[ \frac{14 \cos i}{2 \sin i} \left( \frac{2n_w + n_w}{2n_w + n_w} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{4 \cos i}{12 \sin i} \left( \frac{2n_w + n_w}{2n_w + n_w} \right) \right] \\
& \quad \left[ \frac{28 \cos i}{2 \cos i} \left( \frac{2n_w + n_w}{2n_w + n_w} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{2 \cos i}{\cos 2i} \left( \frac{2n_w + n_w}{2n_w + n_w} \right) \right] \\
& \quad \left[ \frac{1}{a^2} \left( \frac{2n_w + n_w}{2n_w + n_w} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{3}{16} \frac{\sin 2i}{\sin i} \left( \frac{2n_w + n_w}{2n_w + n_w} \right) \right] \\
& \quad \left[ \frac{1}{a^2} \left( \frac{2n_w + n_w}{2n_w + n_w} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{5}{56} \frac{\sin 2i}{\sin i} \left( \frac{2n_w + n_w}{2n_w + n_w} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{1792} k_i k_j \dots \\
& 28 \sin i \dots \\
& 36 \sin i \dots \\
& 42 \sin i \dots \\
& 2 \sin i \dots \\
& 4 \cos i \dots \\
& 2 \cos i \dots \\
& 14 \cos i \dots \\
& 14 \cos i \dots \\
& 12 \sin i \dots \\
& 14 \sin i \dots \\
& 28 \cos i \dots \\
& 6 \sin i \dots \\
& k_{2,2} G_m^* \dots 1 - e^2 n \dots
\end{aligned}
\tag{B.7}$$

Caso 2:

$$d = \frac{1}{a^3} \left[ \frac{1}{8} \sin^2 i \frac{W_0 - W_0'}{n_w - n_w'} + \frac{3}{8} \sin^2 2i \frac{W_0 - W_0'}{n_w - n_w'} + \frac{5}{8} \sin^2 3i \frac{W_0 - W_0'}{n_w - n_w'} + \frac{7}{8} \sin^2 4i \frac{W_0 - W_0'}{n_w - n_w'} + \frac{9}{8} \sin^2 5i \frac{W_0 - W_0'}{n_w - n_w'} + \frac{11}{8} \sin^2 6i \frac{W_0 - W_0'}{n_w - n_w'} + \frac{13}{8} \sin^2 7i \frac{W_0 - W_0'}{n_w - n_w'} + \frac{15}{8} \sin^2 8i \frac{W_0 - W_0'}{n_w - n_w'} + \frac{17}{8} \sin^2 9i \frac{W_0 - W_0'}{n_w - n_w'} + \frac{19}{8} \sin^2 10i \frac{W_0 - W_0'}{n_w - n_w'} + \frac{21}{8} \sin^2 11i \frac{W_0 - W_0'}{n_w - n_w'} + \frac{23}{8} \sin^2 12i \frac{W_0 - W_0'}{n_w - n_w'} + \frac{25}{8} \sin^2 13i \frac{W_0 - W_0'}{n_w - n_w'} + \frac{27}{8} \sin^2 14i \frac{W_0 - W_0'}{n_w - n_w'} + \frac{29}{8} \sin^2 15i \frac{W_0 - W_0'}{n_w - n_w'} + \frac{31}{8} \sin^2 16i \frac{W_0 - W_0'}{n_w - n_w'} + \frac{33}{8} \sin^2 17i \frac{W_0 - W_0'}{n_w - n_w'} + \frac{35}{8} \sin^2 18i \frac{W_0 - W_0'}{n_w - n_w'} + \frac{37}{8} \sin^2 19i \frac{W_0 - W_0'}{n_w - n_w'} + \frac{39}{8} \sin^2 20i \frac{W_0 - W_0'}{n_w - n_w'} \right]$$

$a^3 + e$   
 $1 - \frac{3}{8} \sin^2 i$   
 $\frac{3}{8} \sin^2 i$   
 $1 - \frac{1}{2} \sin^2 i$   
 $\frac{5}{8} \sin^2 i$   
 $k_{2,2}$   
 $1 - \frac{1}{2} \sin^2 i$   
 $4 \cos^2 i$   
 $2 \cos^2 i$   
 $14 \cos^2 i$   
 $14 \cos^2 i$   
 $6 \sin^2 i$   
 $7 \sin^2 i$   
 $14 \cos^2 i$   
 $3 \sin^2 i$   
 $G_m^+$

$\frac{1}{2} a^3$   
 $\frac{1}{8} \sin^2 i$   
 $\frac{3}{8} \sin^2 i$   
 $\frac{1}{2} \sin^2 i$   
 $\frac{5}{8} \sin^2 i$   
 $k_{2,2}$   
 $1 - \frac{1}{2} \sin^2 i$   
 $4 \cos^2 i$   
 $2 \cos^2 i$   
 $14 \cos^2 i$   
 $14 \cos^2 i$   
 $6 \sin^2 i$   
 $7 \sin^2 i$   
 $14 \cos^2 i$   
 $3 \sin^2 i$   
 $G_m^+$

$\frac{1}{2} a^3$   
 $\frac{1}{8} \sin^2 i$   
 $\frac{3}{8} \sin^2 i$   
 $\frac{1}{2} \sin^2 i$   
 $\frac{5}{8} \sin^2 i$   
 $k_{2,2}$   
 $1 - \frac{1}{2} \sin^2 i$   
 $4 \cos^2 i$   
 $2 \cos^2 i$   
 $14 \cos^2 i$   
 $14 \cos^2 i$   
 $6 \sin^2 i$   
 $7 \sin^2 i$   
 $14 \cos^2 i$   
 $3 \sin^2 i$   
 $G_m^+$

$\frac{1}{2} a^3$   
 $\frac{1}{8} \sin^2 i$   
 $\frac{3}{8} \sin^2 i$   
 $\frac{1}{2} \sin^2 i$   
 $\frac{5}{8} \sin^2 i$   
 $k_{2,2}$   
 $1 - \frac{1}{2} \sin^2 i$   
 $4 \cos^2 i$   
 $2 \cos^2 i$   
 $14 \cos^2 i$   
 $14 \cos^2 i$   
 $6 \sin^2 i$   
 $7 \sin^2 i$   
 $14 \cos^2 i$   
 $3 \sin^2 i$   
 $G_m^+$

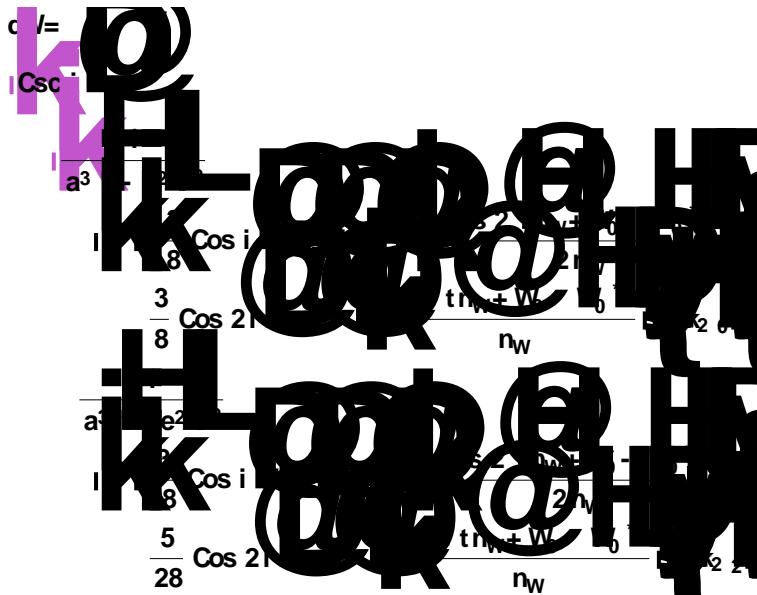


$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{1792} \left[ \dots \right] \\
& 28 \sin i \left[ \dots \right] \\
& 36 \sin i \left[ \dots \right] \\
& 42 \sin i \left[ \dots \right] \\
& 2 \sin i \left[ \dots \right] \\
& 4 \cos i \left[ \dots \right] \\
& 2 \cos i \left[ \dots \right] \\
& 14 \cos i \left[ \dots \right] \\
& 14 \cos i \left[ \dots \right] \\
& 12 \sin i \left[ \dots \right] \\
& 14 \sin i \left[ \dots \right] \\
& 28 \cos i \left[ \dots \right] \\
& 6 \sin 2i \left[ \dots \right] \\
& \dots
\end{aligned}$$

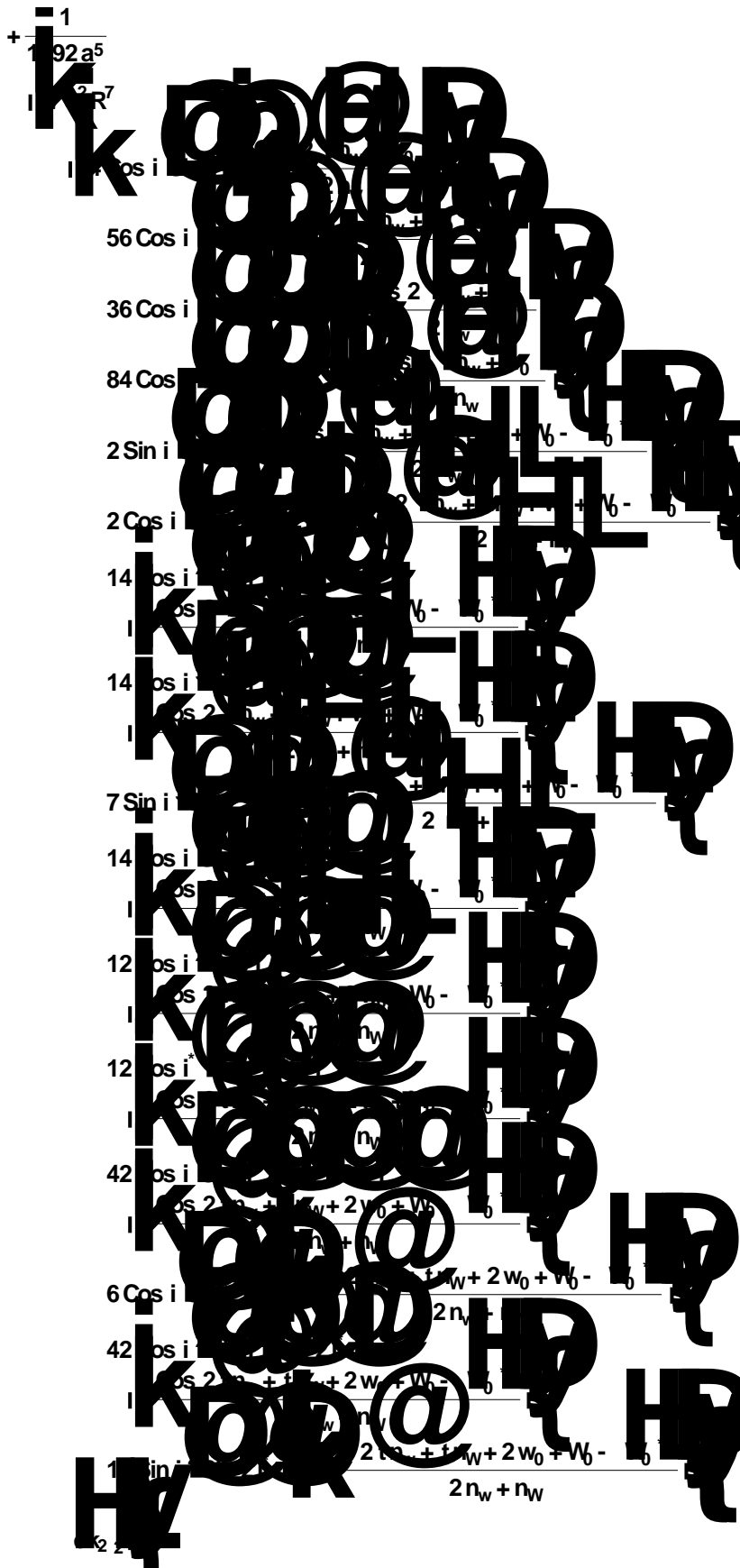
(B.8)

Longitude do nodo ascendente:

Caso 1:







$$\begin{aligned}
 & + \frac{a^3}{12} \left[ \frac{3}{8} \cos^2 i \left( \frac{2n_w + W}{n_w} \right) \right. \\
 & \left. - \frac{3}{8} \cos^2 2i \left( \frac{2n_w + W}{n_w} \right) \right] \\
 & + \frac{a^3}{12} \left[ \frac{3}{28} \cos^2 i \left( \frac{2n_w + W}{n_w} \right) \right. \\
 & \left. - \frac{5}{28} \cos^2 2i \left( \frac{2n_w + W}{n_w} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{1792 a^5} \left\{ \right. \\
& \quad \left. \begin{aligned}
& 56 \cos^2 i \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{w}{b} \right)^3 + \frac{2}{3} \left( \frac{w}{b} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + 36 \cos^2 i \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{w}{b} \right)^3 + \frac{2}{3} \left( \frac{w}{b} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + 84 \cos^2 i \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{w}{b} \right)^3 + \frac{2}{3} \left( \frac{w}{b} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + 2 \sin^2 i \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{w}{b} \right)^3 + \frac{2}{3} \left( \frac{w}{b} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + 2 \cos^2 i \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{w}{b} \right)^3 + \frac{2}{3} \left( \frac{w}{b} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + 14 \cos^2 i \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{w}{b} \right)^3 + \frac{2}{3} \left( \frac{w}{b} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + 14 \cos^2 i \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{w}{b} \right)^3 + \frac{2}{3} \left( \frac{w}{b} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + 7 \sin^2 i \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{w}{b} \right)^3 + \frac{2}{3} \left( \frac{w}{b} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + 14 \cos^2 i \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{w}{b} \right)^3 + \frac{2}{3} \left( \frac{w}{b} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + 6 \cos^2 i \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{w}{b} \right)^3 + \frac{2}{3} \left( \frac{w}{b} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + 6 \cos^2 i \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{w}{b} \right)^3 + \frac{2}{3} \left( \frac{w}{b} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + 21 \cos^2 i \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{w}{b} \right)^3 + \frac{2}{3} \left( \frac{w}{b} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + 42 \cos^2 i \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{w}{b} \right)^3 + \frac{2}{3} \left( \frac{w}{b} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + 14 \sin^2 i \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{w}{b} \right)^3 + \frac{2}{3} \left( \frac{w}{b} \right) \right] \right\} \\
& \quad \left. + \frac{1}{1792 a^5} \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{w}{b} \right)^3 + \frac{2}{3} \left( \frac{w}{b} \right) \right] \right\} \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{w}{b} \right)^3 + \frac{2}{3} \left( \frac{w}{b} \right) \right]
\end{aligned}$$

(B.9)

Caso 2:

$dV =$   
C*i*  
 $a^3$

$\frac{1}{8} \cos i$   
 $\frac{1}{8} \cos 2$   
 $\sin 2$   
 $\frac{3}{8} \cos 2$   
 $\frac{1}{8} \cos t$   
 $\sin t$

$\Omega_W - \Omega_W^*$   
 $\Omega_W - \Omega_W^*$

$\frac{5}{2} \cos 2$   
 $\frac{1}{2} \cos t$   
 $\Omega_W - \Omega_W^*$

$k_2$   
 $k_2$   
 $k_2$

$\frac{1}{192a^5}$   
 $k^2 R^7$   
 56 Cos i  
 36 Cos i  
 84 Cos i  
 2 n i  
 2 Cos i  
 14 Cos i  
 14 Cos i  
 7 n i  
 14 Cos i  
 12 Cos i  
 12 Cos i  
 42 Cos i  
 6 Cos i  
 42 Cos i  
 14 Sin i  
 $2n_w + n_w - n_w$



$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1792 a^2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^2 R^7 \right] \\
& 56 \cos i \\
& 36 \cos i \\
& 84 \cos i \\
& 28 \sin i \\
& 20 \cos i \\
& 14 \cos i \\
& 14 \cos i \\
& 7 \sin i \\
& 14 \cos i \\
& 6 \cos i \\
& 6 \cos 2i \\
& 21 \cos i \\
& 42 \cos i \\
& 14 \sin i \\
& \frac{Gm^*}{1 - e^2} \left[ \frac{1}{2} \right]
\end{aligned}
\tag{B.10}$$

**Argumento do perigeu:**

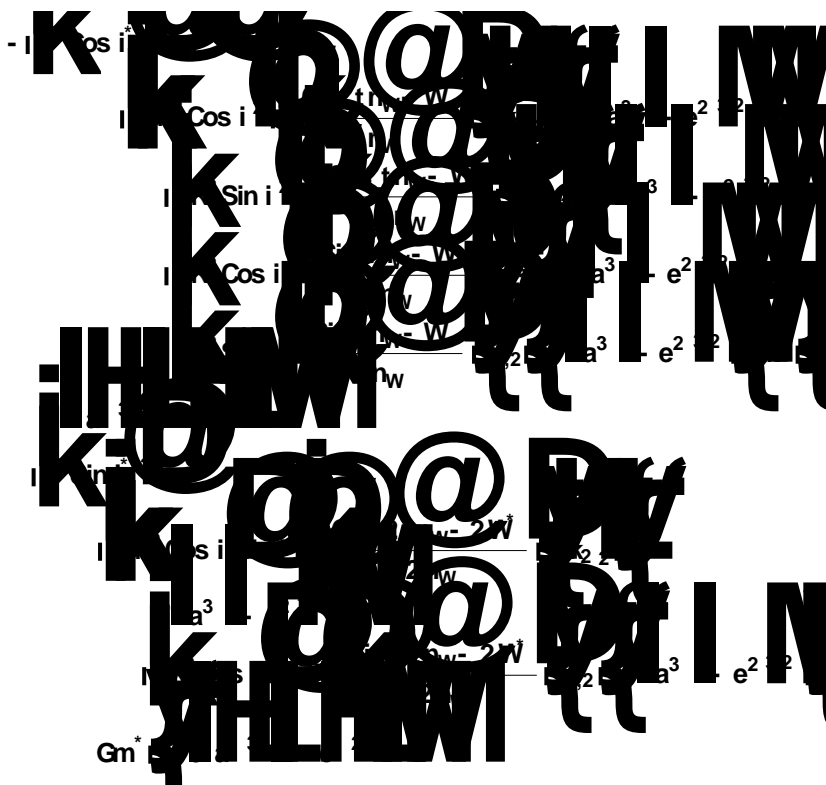
**Casos 1 e 2:**













$$\begin{aligned}
& -I^2 R^5 \cos i \frac{1}{24 a^5} \left[ \frac{1}{2} (2n_w + n_w - W) \right] \\
& I^2 R^5 \cos i \frac{1}{24 a^5} \left[ \frac{1}{2} (2n_w + n_w - W) \right] \\
& I^2 R^5 \cos i \frac{1}{24 a^5} \left[ \frac{1}{2} (2n_w + n_w - W) \right] \\
& I^2 R^5 \sin i \frac{1}{24 a^5} \left[ \frac{1}{2} (2n_w + n_w - W) \right] \\
& I^2 R^5 \cos i \frac{1}{64 a^5} \left[ \frac{1}{2} (2n_w + n_w - W) \right] \\
& I^2 R^5 \cos i \frac{1}{32 a^5} \left[ \frac{1}{2} (2n_w + n_w - W) \right] \\
& I^2 R^5 \sin i \frac{1}{32 a^5} \left[ \frac{1}{2} (2n_w + n_w - W) \right] \\
& I^2 R^5 \cos i \frac{1}{224 a^5} \left[ \frac{1}{2} (2n_w + n_w - W) \right] \\
& I^2 R^5 \cos i \frac{1}{224 a^5} \left[ \frac{1}{2} (2n_w + n_w - W) \right] \\
& I^2 R^5 \sin i \frac{1}{224 a^5} \left[ \frac{1}{2} (2n_w + n_w - W) \right] \\
& I^2 R^5 \cos i \frac{1}{64 a^5} \left[ \frac{1}{2} (2n_w + n_w - W) \right] \\
& I^2 R^5 \cos i \frac{1}{32 a^5} \left[ \frac{1}{2} (2n_w + n_w - W) \right] \\
& I^2 R^5 \sin i \frac{1}{32 a^5} \left[ \frac{1}{2} (2n_w + n_w - W) \right] \\
& I^2 R^5 \sin i \frac{1}{32 a^5} \left[ \frac{1}{2} (2n_w + n_w - W) \right] \\
& I^2 R^5 \sin i \frac{1}{32 a^5} \left[ \frac{1}{2} (2n_w + n_w - W) \right]
\end{aligned}$$

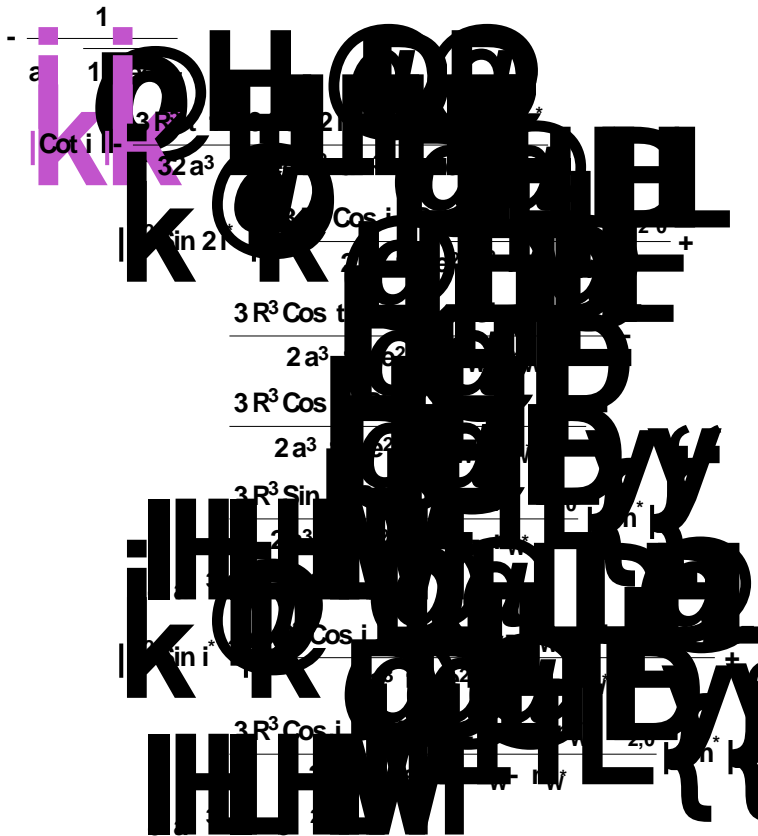
(B.11)



$$\begin{aligned}
& + |K| \sin i \frac{R^5 \cos^2 \theta}{22 a^5} \frac{2 \pi \omega}{\omega - \omega^*} \frac{t \pi \omega}{\omega - \omega^*} \\
& 27 e R^5 \cos i \frac{R^5 \cos^2 \theta}{11 a^5} \frac{2 \pi \omega}{\omega - \omega^*} \frac{t \pi \omega}{\omega - \omega^*} \\
& 27 e R^5 \cos i \frac{R^5 \cos^2 \theta}{22 a^5} \frac{2 \pi \omega}{\omega - \omega^*} \frac{t \pi \omega}{\omega - \omega^*} \\
& \frac{R^5 \cos^2 \theta}{2 a^5} \frac{2 \pi \omega}{\omega + \omega^*} \frac{t \pi \omega}{\omega - \omega^*} \\
& \frac{R^5 \cos^2 \theta}{2 a^5} \frac{2 \pi \omega}{\omega + \omega^*} \frac{t \pi \omega}{\omega - \omega^*} \\
& 27 e R^5 \sin^2 \theta \frac{R^5 \cos^2 \theta}{22 a^5} \frac{2 \pi \omega}{\omega - \omega^*} \frac{t \pi \omega}{\omega - \omega^*} \\
& 27 e R^5 \cos i \frac{R^5 \cos^2 \theta}{11 a^5} \frac{2 \pi \omega}{\omega - \omega^*} \frac{t \pi \omega}{\omega - \omega^*} \\
& 27 e R^5 \cos i \frac{R^5 \cos^2 \theta}{22 a^5} \frac{2 \pi \omega}{\omega - \omega^*} \frac{t \pi \omega}{\omega - \omega^*} \\
& \frac{R^5 \cos^2 \theta}{2 a^5} \frac{2 \pi \omega}{\omega + \omega^*} \frac{t \pi \omega}{\omega - \omega^*} \\
& \frac{R^5 \cos^2 \theta}{2 a^5} \frac{2 \pi \omega}{\omega + \omega^*} \frac{t \pi \omega}{\omega - \omega^*}
\end{aligned}$$



$-|K| \cos^*$   
 $81 e R^5 \cos t$   
 $112$   
 $81 e R^5 \cos i$   
 $27 e R^5 \cos t$   
 $32$   
 $e R^5 \cos t$   
 $5 a^5 \ln_w$   
 $81 e R^5 \sin i$   
 $112 a$   
 $81 e R^5 \cos i$   
 $1$   
 $27 e R^5 \sin i$   
 $32 a$   
 $27 e R^5 \cos i$   
 $112 a$



$3R^5 t$   
 $1 a^3 + e^2$   
 $+ 3 \cos 2i$   
 $1 R^5 \cos i$   
 $27 e^2 R^5 \cos i$   
 $81 e^2 R^5 \cos i$   
 $27 e^2 R^5 \cos i$   
 $5 R^3 \cos i$   
 $7 a^3$   
 $5 R^3 \cos t$   
 $7 a^3$   
 $5 R^3 \cos$   
 $7 a^3$   
 $5 R^3 \sin$   
 $3 R^3 \cos i$



$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \frac{e^2 R^5 \cos^2 i}{224 a^5 n_w^*} \frac{1}{a^5 n_w^*} \\
 & \frac{81 e^2 R^5 \cos i}{224 a^5 n_w^*} \frac{1}{a^5 n_w^*} \\
 & \frac{81 e^2 R^5 \cos i}{224 a^5 n_w^*} \frac{1}{a^5 n_w^*} \\
 & \frac{81 e^2 R^5 \cos t}{224 a^5 n_w^*} \frac{1}{a^5 n_w^*} \\
 & \frac{27 e^2 R^5 \cos t}{32 a^5 n_w^*} \frac{1}{a^5 n_w^*} \\
 & \frac{81 e^2 R^5 \cos i}{224 a^5 n_w^*} \frac{1}{a^5 n_w^*} \\
 & \frac{81 e^2 R^5 \cos i}{224 a^5 n_w^*} \frac{1}{a^5 n_w^*} \\
 & \frac{81 e^2 R^5 \sin i}{224 a^5 n_w^*} \frac{1}{a^5 n_w^*} \\
 & \frac{81 e^2 R^5 \cos i}{6 a^5 n_w^*} \frac{1}{a^5 n_w^*} \\
 & \frac{81 e^2 R^5 \cos i}{6 a^5 n_w^*} \frac{1}{a^5 n_w^*} \\
 & \frac{27 e^2 R^5 \sin i}{6 a^5 n_w^*} \frac{1}{a^5 n_w^*}
 \end{aligned}$$

(B.12)

## APÊNDICE C – EXPRESSÕES DO MODELO DE BALMINO

A parte secular da função perturbadora devido às marés para o modelo de Balmino, pode ser expressa como:

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{R^5}{2} \left[ \frac{3 \sin^2 i}{4} \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} e^2 \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} e^2 \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} e^2 \right) \right] \frac{Gm^*}{a^3} + \\
 & \frac{2 R^5}{7 a^3} \left[ \frac{3 \sin^2 i}{4} \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} e^2 \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} e^2 \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} e^2 \right) \right] \frac{Gm^*}{a^3}
 \end{aligned}
 \tag{C.1}$$

Considerando-se agora a influência da inclinação da Lua, foram encontradas as seguintes expressões para a variação secular da longitude do nodo ascendente e para o argumento do perigeu:

$$\begin{aligned}
 & \text{nw} \\
 & - R \\
 & + 3 \\
 & 8356 - 0.0652 \\
 & \cos 2 \cdot 183^\circ - 0.0529539^\circ t + \\
 & 1.5747 \cdot 10^{-12} t^2 + 4.6055 \cdot 10^{-20} t^3 \\
 & 1644 + 0.0652 \cos 253^\circ \\
 & 0.0529539^\circ t - 1.5747 \cdot 10^{-12} t^2 + \\
 & 4.56055 \cdot 10^{-20} t^3 \\
 & 0.0006 \cos 2 \cdot 19.18^\circ - 0.0529539^\circ t + \\
 & 1.55747 \cdot 10^{-12} t^2 + \\
 & 4.56055 \cdot 10^{-20} t^3 \\
 & 0.0006 \cos 2 \cdot 19.18^\circ - 0.0529539^\circ t + 1.55747 \cdot 10^{-12} t^2 + \\
 & 4.56055 \cdot 10^{-20} t^3 \\
 & \text{Csc} \\
 & 4 a^5 - e^2
 \end{aligned}$$

(C.2)

$$\begin{aligned}
& n_w R^5 \left[ \frac{1}{t^3} - \frac{3356}{t^3} \right] \\
& \quad 0.0652 \left[ \cos 25.183^\circ - 0.0529539 t + \right. \\
& \quad \quad 1.55747 \cdot 10^{-12} t^2 - 4.56055 \cdot 10^{-20} t^3 \left. \right] \\
& \quad + 1644 \left[ \frac{1}{t^3} - \frac{3356}{t^3} \right] \\
& \quad 0.0652 \left[ \cos 25.183^\circ - 0.0529539 t + \right. \\
& \quad \quad 1.55747 \cdot 10^{-12} t^2 - 4.56055 \cdot 10^{-20} t^3 \left. \right] \\
& \quad 0.0006 \left[ \cos 29.18^\circ - 0.0529539 t + \right. \\
& \quad \quad 1.55747 \cdot 10^{-12} t^2 - 4.56055 \cdot 10^{-20} t^3 \left. \right] \\
& \quad 0.0006 \left[ \cos 29.18^\circ - 0.0529539 t + \right. \\
& \quad \quad 1.55747 \cdot 10^{-12} t^2 - 4.56055 \cdot 10^{-20} t^3 \left. \right] \\
& \quad K_2 \left[ \frac{1}{t^3} - \frac{3356}{t^3} \right] \\
& \quad R^5 \left[ \frac{1}{t^3} - \frac{3356}{t^3} \right] \\
& \quad 0.0652 \left[ \cos 25.183^\circ - 0.0529539 t + \right. \\
& \quad \quad 1.55747 \cdot 10^{-12} t^2 - 4.56055 \cdot 10^{-20} t^3 \left. \right] \\
& \quad + 1644 \left[ \frac{1}{t^3} - \frac{3356}{t^3} \right] \\
& \quad 0.0652 \left[ \cos 25.183^\circ - 0.0529539 t + \right. \\
& \quad \quad 1.55747 \cdot 10^{-12} t^2 - 4.56055 \cdot 10^{-20} t^3 \left. \right] \\
& \quad 0.0006 \left[ \cos 29.18^\circ - 0.0529539 t + \right. \\
& \quad \quad 1.55747 \cdot 10^{-12} t^2 - 4.56055 \cdot 10^{-20} t^3 \left. \right] \\
& \quad 0.0006 \left[ \cos 29.18^\circ - 0.0529539 t + \right. \\
& \quad \quad 1.55747 \cdot 10^{-12} t^2 - 4.56055 \cdot 10^{-20} t^3 \left. \right] \\
& \quad Cot \left[ \frac{1}{t^3} - \frac{3356}{t^3} \right] \\
& \quad 4 a^5 \left[ \frac{1}{t^3} - \frac{3356}{t^3} \right]
\end{aligned}$$

(C.3)



## APÊNDICE D – EXPRESSÕES DO MODELO DO IERS

As expressões das variações dos elementos orbitais são:

$$de = \frac{1}{8} \left[ \frac{R^2}{2a^2} - e^2 - 1 \cos i \cos \omega - 2e \cos i \cos \omega \cos 2(\omega t - \omega_0) \right] \quad (D.1)$$

$$di = \frac{1}{8} \left[ \frac{R^2}{2a^2} - e^2 - 11 \cos i \cos \omega - 2e \cos i \cos \omega \cos 2(\omega t - \omega_0) \right] \quad (D.2)$$

$$d\omega = \frac{1}{8} \left[ \frac{R^2}{2a^2} - e^2 + 12e^2 \cos i \cos \omega - 35e^2 \cos^2 i \cos \omega - 36e^2 \cos i \cos \omega \cos 2(\omega t - \omega_0) \right] \quad (D.3)$$

$$\frac{dV}{dR} = \frac{1}{3} \pi R^2 h + \frac{1}{3} \pi R^2 \frac{dh}{dR} + 2 \pi R h + 2 \pi R \frac{dh}{dR} + 2 \pi R^2 \frac{d\theta}{dR}$$

$$\frac{dV}{dR} = \frac{1}{3} \pi R^2 (1 + \frac{dh}{dR}) + 2 \pi R (h + \frac{dh}{dR}) + 2 \pi R^2 \frac{d\theta}{dR}$$

$$\frac{dV}{dR} = \frac{1}{3} \pi R^2 (1 + \frac{dh}{dR}) + 2 \pi R (h + \frac{dh}{dR}) + 2 \pi R^2 \frac{d\theta}{dR}$$

$$\frac{dV}{dR} = \frac{1}{3} \pi R^2 (1 + \frac{dh}{dR}) + 2 \pi R (h + \frac{dh}{dR}) + 2 \pi R^2 \frac{d\theta}{dR}$$

(D.4)