

NADJARA DOS SANTOS

PERTURBAÇÕES ORBITAIS DEVIDAS A MARÉ TERRESTRE

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para a obtenção do título de Mestre em Física na área de Dinâmica Orbital e Planetologia.

Orientador: Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes.

Guaratinguetá

2002

Santos, Nadjara dos
S237p Pertubações orbitais devidos a maré terrestre / Nadjara dos Santos . –
Guaratinguetá : [s.n.], 2002
87f. : il.

Bibliografia: f. 72
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade
de Engenharia de Guaratinguetá, 2002
Orientador: Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes

1. Satélites artificiais I. Título

CDU 629.783

*Há duas formas para viver sua vida.
Uma é acreditar que não existe milagre.
A outra é acreditar, que todas as coisas
são um milagre.
(Albert Einstein 1879- 1955)*

*De modo especial, aos meus pais por
existirem em minha vida e ao Wagner
pelo grande incentivo.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, por sempre ter me dado forças necessárias na minha caminhada.

Ao Professor Rodolpho Vilhena, pela orientação, incentivo, apoio e amizade.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Aos professores do grupo de Dinâmica Orbital e Planetologia, pelo profissionalismo e pelo muito que me ensinaram.

Aos colegas da Pós Graduação pela amizade, ajuda, compreensão e principalmente incentivo, que foi relevante para o desenvolvimento deste trabalho.



Este trabalho contou com o apoio financeiro da entidade:

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científica e Tecnologia

DADOS CURRICULARES

NADJARA DOS SANTOS

NASCIMENTO	01.12.1973 – CAÇAPAVA / SP
FILIAÇÃO	Ubirajara dos Santos. Maria José Cardoso dos Santos.
1994 / 1999	Curso de Graduação Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá – UNESP
2000 / 2002	Curso de Pós Graduação em Física, nível de Mestrado, na Universidade Estadual Paulista.

SANTOS,N. **Perturbações orbitais devido à maré terrestre**. 2002, 87f. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá.

RESUMO

Aplicações recentes de satélites artificiais, principalmente aquelas com finalidades geodinâmicas e altimétricas, requerem órbitas determinadas com bastante precisão. Em particular as marés terrestres alteram o geopotencial, causando perturbações adicionais no movimento do satélite. Tais perturbações, apesar de pequenas, têm sido detectadas. O presente trabalho trata de perturbações de órbitas de satélites artificiais devidas às marés terrestres. Ênfase é dada aos termos seculares e de longo período. O potencial foi desenvolvido em termos dos elementos orbitais e substituídos nas equações planetárias de Lagrange. Soluções analíticas estão apresentadas para casos particulares considerando os números de Love constantes. Um programa foi elaborado, e colocado a disposição do usuário, permitindo calcular, para um dado satélite, a amplitude e o período dos termos perturbadores mais significativos.

PALAVRAS- CHAVE: Marés terrestres, perturbações orbitais, satélites artificiais.

SANTOS,N. Orbit Perturbations due to Terrestrial Tides. 2002, 87f.
Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de
Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá.

ABSTRACT

Recent applications of artificial satellites, mainly those of geodynamics and altimetric purposes, requires high precise orbit determination. Particularly, Earth tides change the geopotential causing additional perturbation in the satellite orbital motion. In spite of being very small such perturbations, has been detected. The present work concerns about orbit perturbations of artificial satellites due do terrestrial tides. Treatment of secular and long period terms is emphasized. The potential was developed in terms of the orbital elements and substituted in the Lagrange equations. Analytical solutions are presented for particular cases considering the Love's number as constant. A computer enabling to compute, for a given satellite, the amplitude and period of the more significant disturbing terms, was constructed and it is, at the disposal for users.

KEYWORDS: Earth tides , orbit perturbations, artificial satellites.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS

1	INTRODUÇÃO E OBJETIVO	18
1.1	INTRODUÇÃO.....	18
1.2	OBJETIVO	21
2	CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS	23
2.1	INTRODUÇÃO.....	23
2.2	MARÉS.....	23
2.3	MECANISMO BÁSICO DO BOJO DEVIDO À MARÉ.....	24
2.4	DESCRIÇÃO QUALITATIVA.....	33
2.4.1	Caso ideal	33
2.4.2	Caso real I	34
2.4.3	Caso real II	35
3	POTENCIAL DEVIDO À MARÉ	37
3.1	INTRODUÇÃO.....	37
3.2	INTRODUÇÃO AO POTENCIAL.....	37
3.3	O POTENCIAL.....	38
4	EQUAÇÕES DO MOVIMENTO	42
4.1	INTRODUÇÃO.....	42
4.2	O POTENCIAL CONSIDERADO.....	42
4.3	EQUAÇÕES DE LAGRANGE.....	46
5	INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES	47
5.1	INTRODUÇÃO.....	47
5.2	INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES.....	47
5.3	CASO 1.....	50
5.4	CASO 2.....	52
5.5	CASO 3.....	54
5.6	CASO 4.....	54
5.7	RESSONÂNCIAS.....	55
6	RESULTADOS	56

6.1	INTRODUÇÃO.....	56
6.2	O SATÉLITE CONSIDERADO.....	56
6.3	ANÁLISE DOS CASOS.....	57
6.3.1	Características das Soluções.....	57
6.3.1.1	Elementos orbitais considerados.....	58
6.3.1.2	Caso 4.....	64
7	CONCLUSÕES.....	69
7.1	TRABALHOS FUTUROS.....	70
7.1.1	Modelo de Balmino (Balmino, 1974).....	71
7.1.2	Modelo de IERS (IERS, 1996).....	71
	REFERÊNCIAS.....	72
	APÊNDICE	

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1- Vetor de posição $\vec{R}_T = R\vec{R}$ de uma partícula P na superfície da Terra.....	25
FIGURA 2.2- Diagrama da aceleração devido à maré na componente x.....	30
FIGURA 2.3- Diagrama da aceleração devido à maré na componente y.....	31
FIGURA 2.4- Diagrama da aceleração devido à maré sob a ação das componentes x e y....	32
FIGURA 2.5- Diagrama da aceleração devido à maré de uma forma geral.....	32
FIGURA 2.6- Figura referente ao caso Ideal, tendo a velocidade angular exatamente igual a velocidade do movimento médio orbital do satélite.....	34
FIGURA 2.7- Figura referente ao caso Real I, tendo a velocidade angular maior que a velocidade do movimento médio do satélite.....	35
FIGURA 2.8- Figura referente ao caso Real II, tendo a velocidade angular menor que a velocidade do movimento médio orbital do satélite.....	36
FIGURA 3.1- Distância geocêntrica r_1 da superfície da Terra até suas vizinhanças, o raio da superfície da Terra R, e a distância Δ do ponto P até o corpo perturbador.....	38
FIGURA 6.1- Representação da variação da excentricidade.....	59
FIGURA 6.2- Representação da variação da inclinação, para o caso 1 e 2.....	60
FIGURA 6.3- Representação da variação da inclinação para o caso	61

FIGURA 6.4- Representação da variação da longitude, para os casos 1 e 2.....62

FIGURA 6.5- Representação da variação da longitude para o caso 3.....63

FIGURA 6.6- Representação da variação do argumento do perigeu para os casos,1,2 3.....64

FIGURA A.1- Representação do sistema de coordenadas, sendo L o argumento da latitude, i é a inclinação e Ω é a longitude do nodo ascendente.....76

FIGURA A.2- Distância geocêntrica \vec{r}' da superfície da Terra até o corpo perturbador, distância geocêntrica \vec{r} da superfície da Terra até o satélite e Ψ é o ângulo geocêntrico entre \vec{r}' e \vec{r} 78

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Semi- eixo maior da órbita do satélite ao redor da Terra
a'	Semi- eixo maior da Lua do satélite ao redor da Terra
a_0	Semi- eixo maior inicial da órbita do satélite ao redor da Terra
\vec{a}_0	Atração newtoniana
\vec{a}_m	Aceleração da maré
\vec{a}_p	Aceleração inercial
e	Excentricidade da órbita do satélite ao redor da Terra
e_0	Excentricidade inicial da órbita do satélite ao redor da Terra
e'	Excentricidade da órbita da Lua ao redor da Terra
$F_{\ell mp}$	Funções da inclinação
\vec{F}_e	Aceleração de reação
GM_j	Parâmetro gravitacional da Lua ($j = M$) e do Sol ($j = S$)
G	Constante gravitacional
$G_{\ell pq}$	Funções da excentricidade
\vec{g}_e	Aceleração da gravidade
i	Inclinação da órbita do satélite ao redor da Terra
i'	Inclinação da órbita da Lua ao redor da Terra
i_0	Inclinação inicial da órbita do satélite ao redor da Terra
J_2	Coefficiente do achatamento
J	Inclinação lunar
$k_\ell(\phi, \lambda)$	Números de Love
ℓ'_0	Anomalia média inicial da Lua
ℓ'	Anomalia média da Lua
L	Argumento da latitude

m'	Massa da Lua
m_{terra}	Massa da Terra
M	Massa (planeta)
m	Massa (satélite)
M_i	Massa do corpo perturbador
n	Movimento médio orbital do satélite
N	Longitude do nodo ascendente referente a eclíptica
P	Partícula
P_ℓ	Polinômios de Legendre
\vec{R}_T	Vetor posição
r_i	Distância geocêntrica do corpo perturbador
R	Raio da Terra
r'	Distância da Lua ao centro da Terra
\vec{r}	Vetor geocêntrico do satélite
\vec{r}'	Vetor geocêntrico da Lua
r	Distância do centro da Terra ao satélite
r, ϕ, λ	Coordenadas esféricas do satélite
r', ϕ', λ'	Coordenadas esféricas da Lua
w	Velocidade angular
ω	Argumento do perigeu da órbita do satélite ao redor da Terra
ω'	Argumento do perigeu da órbita da Lua ao redor da Terra
ω_0	Argumento do perigeu inicial da órbita do satélite ao redor da Terra
ω'_0	Argumento do perigeu inicial da órbita da Lua ao redor da Terra
Ω'_0	Longitude do nodo ascendente inicial da órbita da Lua ao redor da Terra.

Ω	Longitude do nodo ascendente da órbita do satélite ao redor da Terra
Ω'	Longitude do nodo ascendente da órbita da Lua ao redor da Terra
ΔU_ℓ	Potencial perturbador
δ_{m0}	Delta de Kronecker
Θ	Tempo sideral
ε	Obliquidade da eclíptica
$\varepsilon_{\ell mpq}(\phi, \lambda)$	Defasagem
$\Psi_{\ell mjs}$	Frequência dos argumentos dos termos da função perturbadora referente a Terra
$\Psi'_{\ell mpq}$	Frequência dos argumentos dos termos da função perturbadora referente a Lua
Ψ	Ângulo geocêntrico entre r e r'
ϕ	Latitude do Satélite
λ	Longitude do satélite
λ'	Longitude da Lua

1 INTRODUÇÃO E OBJETIVO

1.1 INTRODUÇÃO

Antes do lançamento de satélites artificiais a influência das marés terrestres era considerada apenas para planetas e satélites naturais. A necessidade de determinar órbitas de satélites artificiais, cada vez mais precisas levou os pesquisadores a aperfeiçoarem os modelos para as perturbações. A precisão das observações de satélites artificiais tem alcançado um estágio onde devem ser considerados os efeitos, não só a perturbação orbital causada pela maré terrestre como também a influência da deformação da maré na Terra sobre a posição da estação de observação.

Desde o começo da segunda metade do século passado os efeitos de perturbações luni- solares sobre órbitas de satélites artificiais tem sido considerados sendo um dos trabalhos pioneiros o artigo de Kozai (1959a). Neste artigo Kozai desenvolve o potencial em termos dos elementos orbitais de um satélite próximo da Terra e desenvolve, através das equações de Lagrange, expressões para as principais perturbações seculares. A expressão do potencial de Kozai para tal problema contém apenas termos seculares e de longo período. Ressalte-se que na época não havia dados observacionais para comprovar e nem sequer aplicar os resultados do trabalho de Kozai.

Tentando explicar algumas flutuações nas inclinações das órbitas dos satélites 1959 Alpha 1, 1959 Eta e 1960 Iota 2, Kozai suspeitou, pelo período, que tais flutuações poderiam ser provocadas pela maré. Entretanto, as amplitudes obtidas pela observação eram muito grandes. Motivado por tal fato, em 1965, Kozai (1965), considerando os números de Love, acrescenta ao seu trabalho anterior os efeitos da deformação da Terra devida a maré e mostra que tal perturbação adicional poderia causar um acréscimo da ordem de 10 por cento nas perturbações luni-solares. Mostrou também que, se não forem considerados termos de curto período, as marés não provocam perturbações no semi-eixo e na excentricidade da órbita de satélites artificiais. Quanto às flutuações

observadas nas inclinações, nada pode concluir em vista da constatação posterior de inconsistência dos dados observacionais.

As suspeitas de Kozai levaram a publicação de um outro trabalho em 1967 (Kozai, 1967), sobre determinação dos Números de Love baseados nas observações dos satélites 1959 Alpha 1, 1959 Eta e 1960 Iota 2. Kozai determinou o número de Love como sendo 0.29 ± 0.03 e o tempo de atraso como sendo 10 ± 5 minutos.

Kaula (1969), ao estudar a dependência do atrito da maré com a latitude, introduz na perturbação devido a maré terrestre, os números de Love e a defasagem, ambas dependendo da latitude ϕ e longitude λ . Expressa também a latitude e longitude do satélite em termos dos elementos Keplerianos e funções de potências da excentricidade e inclinação da órbita.

Kaula (1969) deduziu uma expressão para o potencial de maré na superfície da Terra, independentemente da natureza da resposta da maré, seja da crosta, do núcleo, da parte sólida, supondo que não haja termos devidos à maré interagindo com outros termos devido à maré. Observou ainda que tal desenvolvimento envolve produtos de harmônicos tesserais sendo mais conveniente uma representação em termos de números complexos. Supôs que os números de Love $k_\ell(\mathbf{f}, \mathbf{I})$ e a defasagem $e_{\ell mpq}(\mathbf{f}, \mathbf{I})$ variam lentamente em função da posição, e que sejam representáveis em harmônicos esféricos, o que é certamente verdadeiro para a porção cujo efeito afeta órbitas de satélites. Aplicou os resultados para o estudo da evolução do sistema Terra-Lua. Mostrou que os números de Love k_ℓ não são constantes, mas sim funções de latitude e de longitude $k_\ell(\phi, \lambda)$, porém a dependência com λ deva ser eliminada pela rotação da Terra.

Musen e Estes (1972), de forma diferente de Kozai (1965b), desenvolveram um método geral de perturbações utilizando elementos elípticos e vetoriais para estudar os efeitos de marés sobre o movimento de satélites artificiais. Descartando expansões trigonométricas usuais para o potencial da maré sugeriram expansões da perturbação baseadas na teoria lunar de Hill-Brown. Os argumentos elípticos da órbita da Lua variam

aproximadamente de forma linear com o tempo e com isso a integração das equações do movimento ficam mais simples de serem realizadas. A expansão do potencial da maré foi feita como a soma de duas funções harmônicas, uma dependendo da posição do satélite e outra dependendo da posição da Lua (Sol). Mostraram ainda que o achatamento produzirá um efeito de ressonância na vizinhança para alguns ângulos críticos, como $46,4^\circ$, $56,1^\circ$, $63,4^\circ$, 69° e $73,1^\circ$. Ao observar estas ressonâncias, não é possível separá-las das ressonâncias similares causadas pela atração direta da Lua.

Balmino (1974), generaliza os resultados de Kaula e também admite que as defasagens ϵ sejam funções da latitude, pois produzem perturbações de longo período no movimento dos satélites, enquanto aquelas dependentes da longitude, produzem perturbações de curto período ou mistos. Há também tentativas de tratar o problema pelo método das respostas não harmônicas, substituindo os números de Love por funções dependentes do tempo.

Mignard (1980), apresenta um modelo para a evolução das marés terrestres para um sistema de dois corpos isolados, aonde foram incluídos a dissipação do planeta, do satélite, a frequência dependendo do modelo de atraso. As equações diferenciais obtidas são válidas para grandes excentricidades, bem como para todas as inclinações.

Brosch e Sundermann (1982), mostram que a deformação devido à maré, tanto a terrestre quanto à oceânica, provoca variações na força gravitacional perturbando a trajetória de satélites artificiais. Mostram também que as marés, tanto diurnas como semi- diurnas, produzem perturbações orbitais sobre um largo espectro de frequência, sendo as maiores as de longo período (por exemplo, as semi-diurnas provocam perturbações com período de aproximadamente 14 dias).

Sant'Anna e Afonso (2001), levando em consideração observações paleontológicas apresentam uma expressão para o atraso de resposta das marés da Terra. Um modelo semi - empírico para a dinâmica do sistema Terra-Lua é obtido, considerando que a dissipação de energia e o atraso de resposta não são constantes em relação ao tempo. Foi

feita uma comparação entre essa descrição e a que considera o atraso de resposta da maré constante em relação ao tempo e mostrou-se que o modelo deste trabalho é consistente com as modernas teorias sobre a formação do sistema Terra-Lua.

Em todos esses trabalhos, não são feitas aplicações numéricas, mostrando quer para satélites reais ou hipotéticos, explicitamente, variações dos elementos orbitais de satélites artificiais. Sendo assim, essa linha de trabalho apresenta-se favorável à pesquisa, quando busca mostrar aplicações numéricas para a perturbação devido à maré e seus casos aqui apresentados.

Uso de satélites artificiais como, por exemplo, aquelas com finalidades geodinâmicas, requerem que as órbitas sejam determinadas com bastante precisão. Com isso, nos cálculos de tais órbitas devem ser consideradas diversas perturbações simultaneamente, sendo ainda necessário, para uma análise criteriosa dos resultados, que os efeitos de cada perturbação considerada isoladamente sejam conhecidos com detalhe.

É um fato bastante conhecido que órbitas de satélites artificiais sofrem entre outras, as seguintes perturbações:

a) devidas aos harmônicos zonais e tesserais, temos perturbações orbitais em todos elementos Keplerianos. As principais perturbações seculares se dão nas variáveis angulares que também sofrem perturbações periódicas. As variáveis métricas sofrem somente perturbações periódicas.

b) o arrasto atmosférico provoca perturbações seculares no semi-eixo maior e na excentricidade, porém a inclinação, só sofrerá perturbação secular se for considerada rotação da atmosfera. As variáveis angulares sofrem perturbações seculares devido ao arrasto atmosférico, mas somente em segunda ordem (da ordem do quadrado da perturbação considerada).

c) a pressão de radiação solar direta, considerando a sombra da Terra, também perturba todos os elementos orbitais, inclusive secularmente nos elementos angulares.

d) a atração luni-solar provoca perturbações periódicas em todos os elementos orbitais.

Só para mencionar outras perturbações, citamos: pressão de radiação solar refletida, efeito Poynting-Robertson, efeito Lense-Thirring, marés terrestres e oceânicas, etc.

Nos casos usuais um satélite é perturbado por mais de uma das perturbações já mencionadas, sendo muitas vezes difícil de desacoplá-las. Em particular, a maré terrestre está associada ao geopotencial, mas poderá também estar, devido aos seus efeitos, acoplada a outras perturbações.

1.2 OBJETIVO

O objetivo deste projeto é estudar os efeitos de uma destas perturbações orbitais, a maré. Em particular marés terrestres alteram o geopotencial causando perturbações adicionais no movimento de satélites artificiais, as quais tem sido detectada por diversos processos.

A metodologia para o cálculo dos efeitos de maré inclui a introdução de parâmetros de elasticidade deduzidos por Love, que podem ser colocados em termos de esféricos harmônicos na expansão do potencial, e a consideração de uma defasagem entre a posição máxima de maré e a posição do corpo que a produz maré. Tal ângulo de defasagem também pode ser desenvolvido em termos de polinômios de Legendre. Simplificações poderão conduzir a soluções analíticas.

Pela literatura pode ser observado que as variações de alguns elementos orbitais pelos efeitos de maré tem sido estudadas através de diferentes modelos e para diferentes

satélites, Musen e Estes (1972) e Kozai (1965). Como um dos resultados desta pesquisa para cálculo de perturbações orbitais de satélites artificiais devidas a marés, programas computacionais serão elaborados.

No presente trabalho, é adotada a seqüência descrita a seguir.

No Capítulo 2 são apresentados alguns conceitos básicos e uma descrição qualitativa do efeito da maré, bem como suas características. É feito um estudo quanto a criação do bojo devido à maré na superfície da Terra. Consideramos aqui os efeitos da Lua.

No Capítulo 3 é apresentado o potencial devido à maré e conceitos sobre o mesmo, além de apresentar alguns efeitos utilizados no problema da maré.

No Capítulo 4 descreve-se o problema a ser estudado e as equações do movimento consideradas, além da expressão do potencial adotado.

No Capítulo 5 o potencial devido à maré foi desenvolvido de um modo geral e alguns casos foram especificados.

No Capítulo 6 estão apresentadas os resultados dos casos considerados.

No Capítulo 7 estão apresentados as conclusões finais e as sugestões para trabalhos futuros.

2 CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

2.1 INTRODUÇÃO

Neste Capítulo apresentamos alguns conceitos básicos da maré, bem como, o mecanismo básico do bojo devido à maré terrestre. Primeiramente, é feita uma breve explanação sobre o conceito da maré e em seguida, baseado nos trabalhos de Burns e Matthews (1986) e Broucke (1987), mostramos uma idéia qualitativa sobre o fenômeno da maré, como ela aparece, seus efeitos e os efeitos nos corpos perturbado e perturbador.

2.2 MARÉS

Várias pessoas que olham o mar já tiveram a curiosidade de saber o porque ocorre o vai-e-vem periódico das águas na terra, além da ocorrência de marés altas e baixas. Observa-se também que quando ocorrem as marés altas e baixas elas não têm sempre a mesma elevação. Assim, por exemplo, as marés vão crescendo e alcançam duas vezes no mês, em geral um dia depois da Lua cheia e da Lua nova, o nível mais alto. Caso análogo ocorre com as marés baixas.

As marés são mais altas quando o Sol, a Lua e a Terra se acham aproximadamente alinhados e mais baixas, se estiverem em quadratura. As marés sobem a maior altura possível, se no mesmo tempo a Lua ou o Sol ou ambos se acharem no perigeu, e as marés baixam se os astros estiverem no apogeu. O Sol e a Lua produzem também marés terrestres tanto quanto oceânicas, e seus efeitos são perceptíveis por observações.

Devido às inclinações dos planos orbitais da Lua e do Sol, em relação ao plano do Equador, as marés altas e baixas são mínimas nas regiões polares, maiores nas equatoriais e máximas nos lugares cujo zênite passa pelo plano da órbita da Lua. Se o eixo de rotação da Terra não estivesse inclinado com relação ao plano da órbita, não

existiria a desigualdade. Com a evolução do sistema Terra-Lua o seu estado fundamental vem sendo modificado pela ação do atrito das marés (Burns,1977).

Da mesma forma que a Lua, o Sol provoca maré. Apesar da sua massa ser muito maior, mas por se encontrar muito mais distante, sua força de maré é aproximadamente um terço da Lua. Na seção seguinte, baseada nos trabalhos de Burns e Matthews (1986) e Broucke (1987), dar-se uma idéia qualitativa sobre o fenômeno da maré, como ela aparece quais são seus efeitos mútuos nos corpos perturbados e perturbador.

2.3 MECANISMO BÁSICO DO BOJO DEVIDO À MARÉ

Sabe-se que as marés são devidas a uma combinação dos seguintes fatores:

- a) Força de atração que o Sol e a Lua exercem sobre a Terra;
- b) O movimento de rotação da Terra;
- c) O movimento da Terra ao redor do centro de gravidade do sistema Terra-Lua-Sol.

Analisaremos agora os princípios fundamentais na criação do bojo devido à maré na superfície da Terra. Consideraremos aqui apenas os efeitos da Lua.

Sejam P uma partícula na superfície da Terra e \vec{R} e \vec{S} dois vetores- unitários que estão orientados positivamente, respectivamente, do centro O da Terra para P e de P para o centro da Lua, como mostra a Figura 2.1 abaixo:

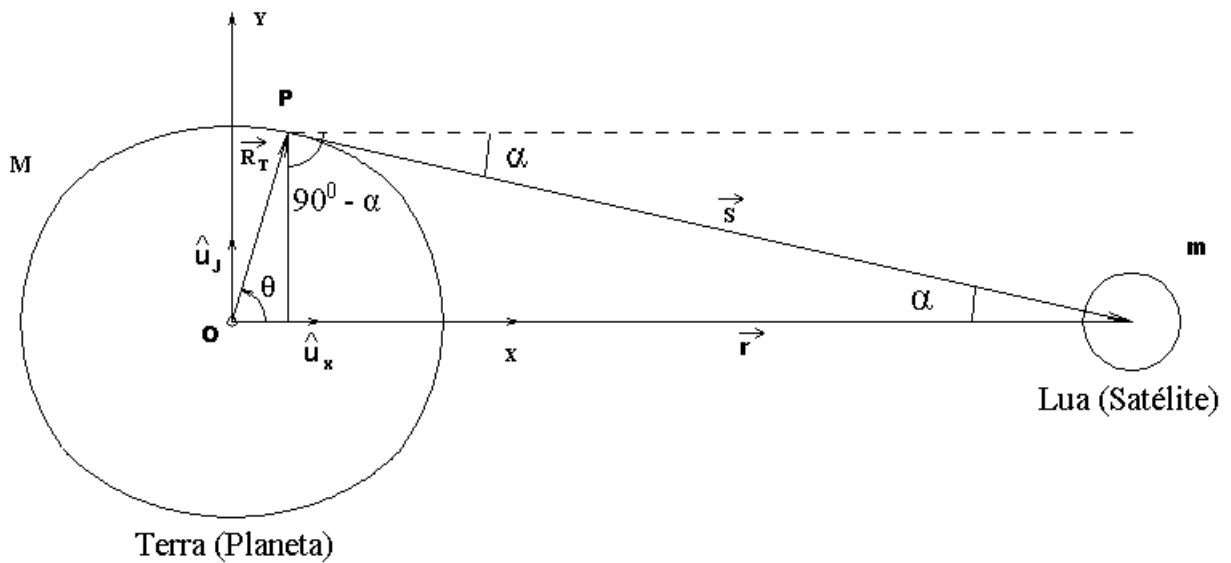


Figura 2.1-Vetores de posição $\vec{R}_T = R\vec{R}$ de uma partícula P na superfície da Terra e vetor $\vec{s} = s\vec{S}$.

Considera-se a Terra como ligeiramente plástica e a partícula P que está na Terra como não livre, ou seja, não se move e nem pode escapar. No entanto há uma força de reação da partícula P. Logo, o oposto da aceleração de reação \vec{F}_e é essencialmente a aceleração de gravidade \vec{g}_e , neste ponto P.

As duas forças mais importantes, além da força de reação, agindo na partícula P são:

- a) Força gravitacional da Terra;
- b) Força de atração da Lua.

Logo a aceleração inercial total em P é a soma das três acelerações mencionadas:

$$\vec{a}_P = -\frac{GM}{R^2}\vec{R} + \frac{Gm}{s^2}\vec{S} + \vec{F}_e \quad (2.1)$$

Sendo M a massa da Terra e m a massa da Lua.

Observemos que a aceleração provocada pela Lua sobre uma massa unitária colocada no centro da Terra é dada pela newtoniana:

$$\vec{a}_O = \frac{Gm}{r^2} \vec{u}_x \quad (2.2)$$

sendo \vec{u}_x o vetor unitário que aponta do centro de massa da Terra para o centro de massa da Lua. Devido à formação plástica da Terra surge um bojo no planeta.

Assumindo que depois da formação do pequeno bojo na superfície da Terra, todas as partículas da Terra estejam em repouso, uma em relação as outras e em particular com respeito centro da Terra, não possui uma aceleração diferencial entre O e P. Portanto, $\vec{a}_P = \vec{a}_O$. Conseqüentemente pode-se subtrair a equação (2.1) e (2.2):

$$0 = -\frac{GM}{R^2} \vec{R} + \left(\frac{Gm}{s^2} \vec{s} - \frac{Gm}{r^2} \vec{u}_x \right) + \vec{F}_e \quad (2.3)$$

ou

$$\vec{g}_e = -\frac{GM}{R^2} \vec{R} + \left(\frac{Gm}{s^2} \vec{s} - \frac{Gm}{r^2} \vec{u}_x \right)$$

A partir de agora teremos uma nova expressão para a aceleração da gravidade em P. O primeiro termo é devido a atração da Terra. Portanto a soma dos termos que estão entre parênteses corresponde à aceleração da maré \vec{a}_m devida a Lua. Esta diferença entre os dois termos relativos à Lei do inverso do quadrado, da atração da Lua na superfície da Terra e da atração da Lua no centro da Terra, é dada por:

$$\vec{a}_m = \frac{Gm}{s^2} \vec{S} - \frac{Gm}{r^2} \vec{u}_x \quad (2.4)$$

O próximo passo é simplificar esta expressão, considerando \vec{u}_x e \vec{s} aproximadamente paralelos, devida à distância Terra-Lua, versus, distância centro-superfície da Terra.

Da Figura 2.1 tem-se:

$$\begin{aligned} |\vec{x}| &= |s| |u_x| \cos \alpha = |\vec{s}| |\vec{u}_x| \cos \alpha \\ |\vec{y}| &= |s| |u_y| \cos(90 - \alpha) = |\vec{s}| |\vec{u}_y| \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \quad (2.5)$$

Também,

$$\vec{s} = u_x \cos \alpha - u_y \operatorname{sen} \alpha \quad (2.6)$$

Observando que na Figura 2.1 tem-se:

$$PQ = R \operatorname{sen} \theta = s \operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{R \operatorname{sen} \theta}{s} \quad (2.7)$$

$$r = s \cos \alpha + R \cos \theta$$

$$\cos \alpha = \frac{r - R \cos \theta}{s} \quad (2.8)$$

Pode-se escrever:

$$\vec{s} = \vec{u}_x \cos \alpha - \vec{u}_y \sin \alpha = \frac{r - R \cos \theta}{s} \vec{u}_x - \frac{R \sin \theta}{s} \vec{u}_y \quad (2.9)$$

O termo da aceleração da maré será então:

$$\begin{aligned} \vec{a}_m &= \frac{Gm}{s^2} \left[\left(\frac{r - R \cos \mathbf{q}}{s} \vec{u}_x - \frac{R \sin \mathbf{q}}{s} \vec{u}_y \right) \right] - \frac{Gm}{r^2} \left(\frac{r - R \cos \mathbf{q}}{s} \vec{u}_x \right) \\ \vec{a}_m &= Gm \left[\left(\frac{r - R \cos \mathbf{q}}{s^3} \vec{u}_x - \frac{R \sin \mathbf{q}}{s^3} \vec{u}_y \right) - \frac{1}{r^2} \left(\frac{r - R \cos \mathbf{q}}{s} \vec{u}_x \right) \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\vec{a}_m = Gm \left[\left(\frac{r - R \cos \mathbf{q}}{s^3} \right) \vec{u}_x - \frac{1}{r^2} \left(\frac{r - R \cos \mathbf{q}}{s} \right) \vec{u}_x - \left(\frac{R \sin \mathbf{q}}{s^3} \vec{u}_y \right) \right]$$

$$\vec{a}_m = Gm \left[\left(\frac{r - R \cos \theta}{s^3} - \frac{1}{r^2} \right) \vec{u}_x - \frac{R \sin \theta}{s^3} \vec{u}_y \right] \quad (2.11)$$

Pode-se notar que na expressão acima não houve nenhuma expansão, porém iremos fazer na próxima expressão:

$$s^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta \quad (2.12)$$

$$\frac{1}{s^3} = \frac{1}{r^3} \left[1 - 2 \frac{R}{r} \cos \theta + \frac{R^2}{r^2} \right]^{-3/2} \quad (2.13)$$

Como $R/r \ll 1$ e expandindo a expressão (2.13) em potências de R/r , tem-se, em primeira ordem:

$$\frac{1}{s^3} = \frac{1}{r^3} \left[1 + 3 \frac{R}{r} \cos \theta \right] \quad (2.14)$$

Logo substituindo (2.14) em (2.11) chegamos a seguinte expressão da aceleração, em primeira ordem, da maré:

$$\bar{a}_m = \frac{GmR}{r^3} [2 \cos \theta \bar{u}_x - \text{sen } \theta \bar{u}_y] \quad (2.15)$$

Verifica-se assim que embora a aceleração gravitacional diminua com o inverso do quadrado da distância, a aceleração devido a maré varia com o inverso da terceira potência da distância entre o satélite e o planeta. Interpretemos tal expressão:

a primeira componente em x dada por:

$$a_x = \frac{2GMR}{r^3} \cos \mathbf{q} \quad (2.16)$$

Mostra que a Terra está sujeita a uma tensão que pode ser representada conforme a Figura 2.2:

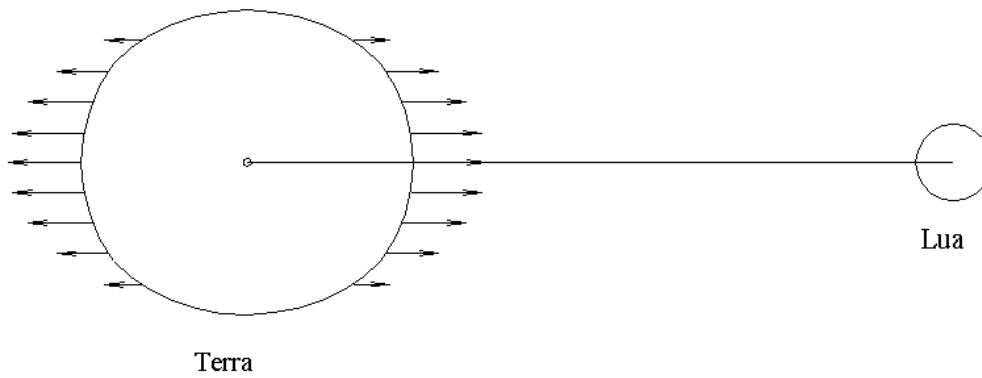


Figura 2.2- Diagrama da aceleração devido à maré na componente x.

Por outro lado, na direção perpendicular do eixo Terra-Lua, a componente y , é dada por:

$$a_y = -\frac{GMR}{r^3} \text{sen } \boldsymbol{q} \quad (2.17)$$

Que pode ser interpretada como uma compressão, conforme mostra a Figura 2.3 dada a seguir:

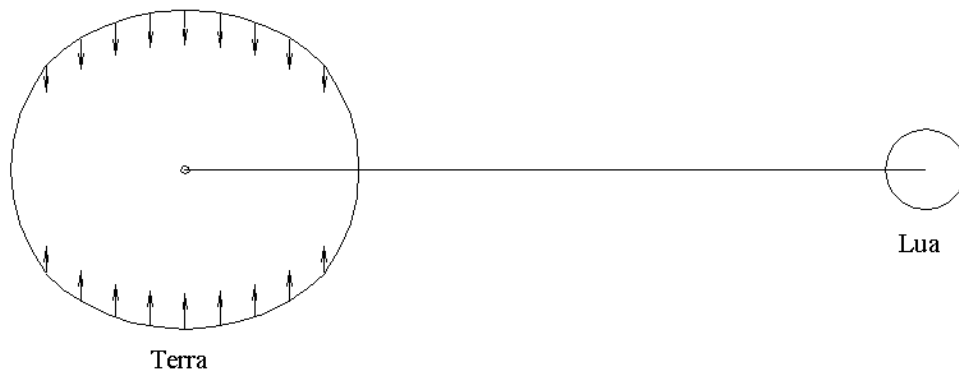


Figura 2.3- Diagrama da aceleração devido a maré na componente y.

O resultado da ação de ambas as componentes em cada ponto da superfície pode ser mostrado na Figura 2.4:

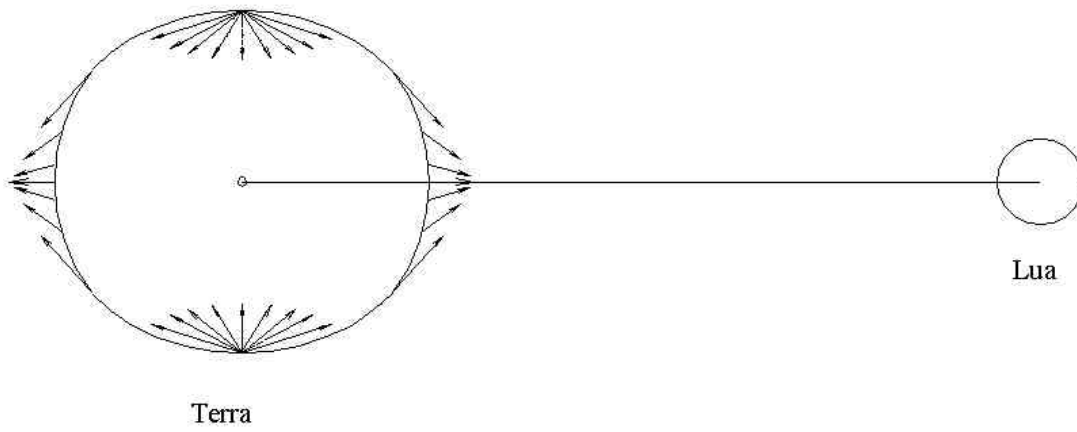


Figura 2.4- Diagrama da aceleração devido à maré sob a ação das componentes x e y .

A Figura 2.5 mostra esquematicamente a forma geral na superfície da Terra sob o efeito da maré.

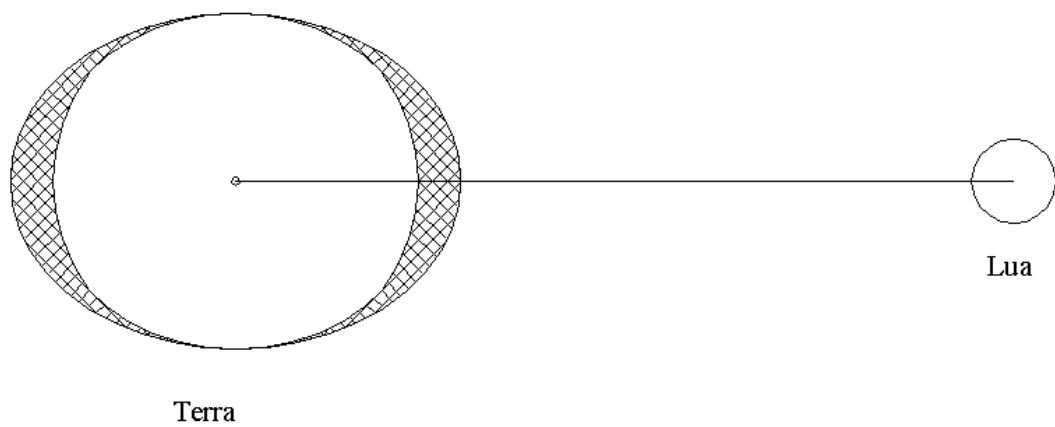


Figura 2.5- Diagrama da aceleração devido à maré de uma forma geral.

Um outro caminho para determinar os efeitos devido à maré em ambas as componentes, é colocar um ponto qualquer (x, y) na superfície da Terra e calcular as componentes perpendiculares :

$$a_x x + a_y y = \frac{GMR}{r^3} (3 \cos^2 \mathbf{q} - 1) = \frac{2GMR}{r^3} P_2(\cos \mathbf{q}) \quad (2.18)$$

Sendo P_2 chamado de Polinômio de Legendre de segunda ordem.

Visualizando as equações e as figuras, podemos observar que poderemos completar o problema expandindo o potencial em termos dos Polinômios de Legendre, Broucke (1987).

2.4 DESCRIÇÃO QUALITATIVA

Agora, numa descrição qualitativa, considerar-se-á algumas características básicas da maré terrestre. Tomam-se dois corpos relativamente próximos, um orbitando ao redor do outro. Chamando - os de satélite (Lua) ou Sol e planeta (Terra), suporemos que um deles tem massa bem maior que o outro, ambos tem tamanhos considerável, além de não serem rígidos. Aqui será considerado a Lua.

2.4.1 Caso ideal

Primeiramente consideraremos o caso ideal, isto é, o satélite e o planeta movendo-se numa órbita circular, com velocidade angular exatamente igual a velocidade do movimento médio orbital do satélite como mostra a Figura 2.6 abaixo:

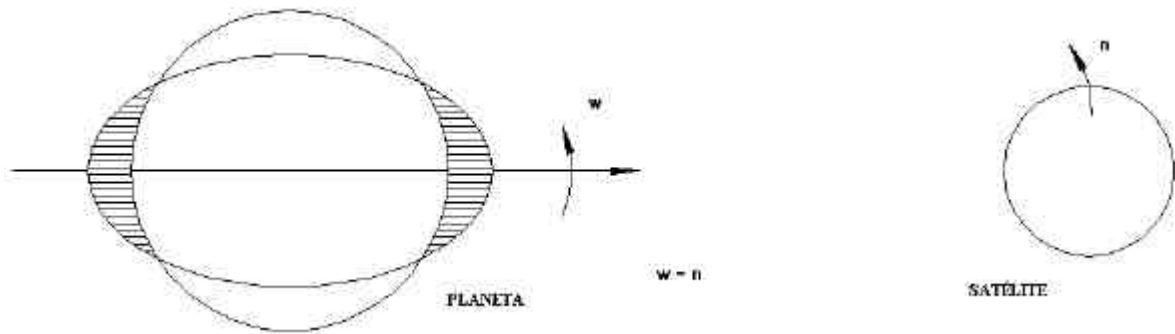


Figura 2.6 - Figura referente ao caso ideal, tendo a velocidade angular exatamente igual a velocidade do movimento médio orbital do satélite.

Devido à interação do satélite sobre a forma não rígida do planeta, surge então um bojo no planeta. O bojo surge nos dois lados, já que as partes do planeta mais próximas do satélite sofrem maior aceleração gravitacional do que aquelas do lado oposto, porém, a aceleração centrífuga age dos dois lados.

Verificando mais a fundo veremos que a força gravitacional do satélite distorce o planeta internamente como um elipsóide com o eixo maior no plano do Equador na direção do satélite. A distorção aumenta devida a atração gravitacional do satélite que é maior na parte perto do planeta.

Porém temos também as forças restauradoras que limitam a altura das marés. Considerando materiais perfeitos, a resposta do planeta seria instantânea e nenhum momento angular ou energia cinética seria transferida para a órbita do satélite, já que a deformação é simétrica em relação à linha dos centros.

2.4.2 Caso real I

Assumiremos agora que a velocidade de rotação do planeta (w) é maior que a velocidade do movimento médio orbital do satélite (n), como é o caso do sistema Terra-Lua, e que o planeta é plástico, como indicado na Figura 2.7 a seguir:

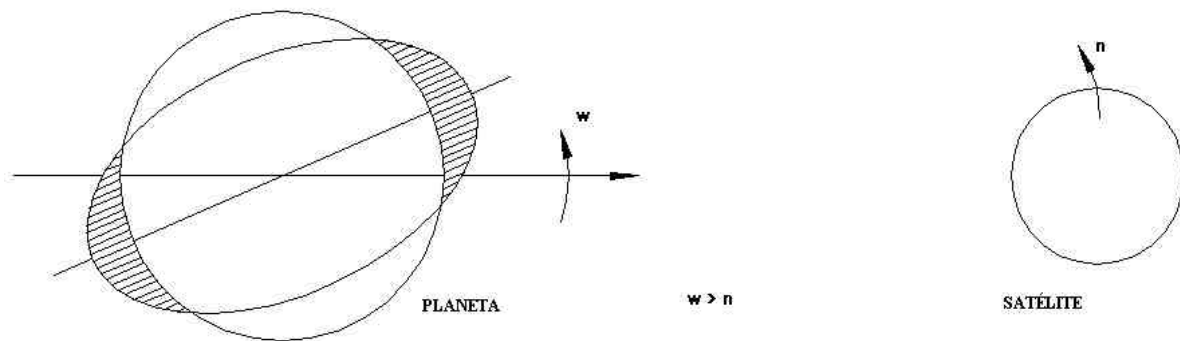


Figura 2.7- Figura referente ao caso real I, tendo a velocidade angular maior que a velocidade do movimento médio orbital do satélite.

O bojo se forma um certo tempo após o instante em que o planeta sofreu perturbação, formando assim um ângulo. Sendo o ângulo ϵ uma medida do grau da não elasticidade do planeta que é denominado ângulo de atraso ou defasagem. Em outras palavras, o planeta não responde instantaneamente às mudanças da força externa do satélite. Logo, o planeta é freado e a energia cinética de rotação é dissipada, parte em forma de calor e parte é passada ao movimento orbital do satélite. Para que haja conservação do momento angular total, o satélite ao ganhar energia é empurrado para fora de sua órbita e seu semi-eixo maior tende a crescer.

Esta situação ocorre também na rotação do corpo em relação ao movimento orbital do planeta, com a diferença que neste caso é mais rápido. Isto explica o freqüente sincronismo existente em vários satélites dos planetas do sistema solar.

2.4.3 Caso real II

Tem-se agora o caso em que a velocidade de rotação do planeta é menor que a velocidade do movimento médio orbital do satélite, portanto o bojo está atrasado em relação a posição do satélite, como indicado na Figura 2.8 abaixo:

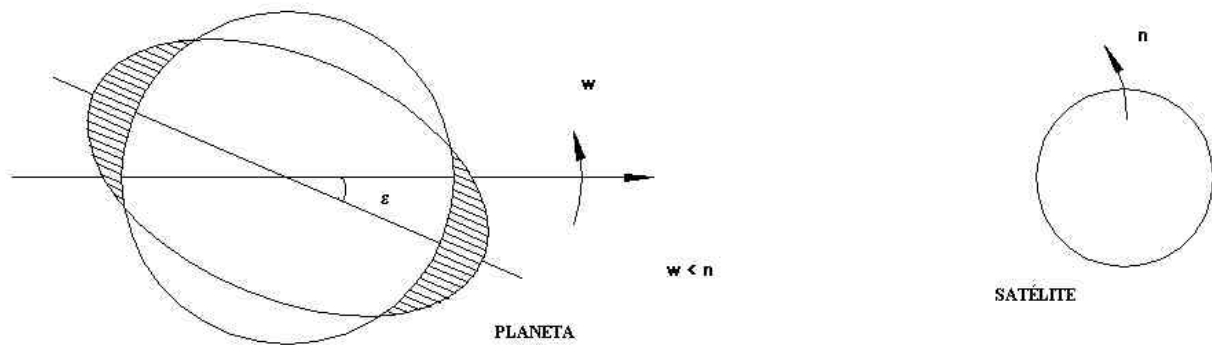


Figura 2.8- Figura referente ao caso Real II, tendo a velocidade angular menor que a velocidade do movimento médio orbital do satélite.

Logo o planeta ganha mais energia de rotação, conseqüentemente para que haja conservação do momento angular, a órbita do satélite se contrai, o semi-eixo diminui. Este é o caso de Phobos, satélite de Marte, e de alguns satélites retrógrados, os quais estão decaindo e poderão no futuro, colidir com o planeta. No caso de Marte a duração do dia é de 24,62 horas enquanto o período sideral de Phobos é somente de 7,65 horas.

3 POTENCIAL DEVIDO À MARÉ

3.1 INTRODUÇÃO

Neste Capítulo é apresentada uma breve introdução ao potencial de maré. Também são apresentados alguns acréscimos no potencial, como os Números de Love, o ângulo de atraso e o potencial perturbador de maré.

3.2 INTRODUÇÃO AO POTENCIAL

Para se determinar às perturbações no movimento de satélites artificiais devidas à maré, deve-se ter presente o potencial de marés. Como a Terra não é perfeitamente rígida, ela se deforma sob a ação deste potencial, e com isso a própria distribuição de massa da Terra é alterada.

Para modelar o efeito introduzido pela presença de um terceiro corpo (Sol ou Lua) no potencial da Terra, assume-se inicialmente que a massa do corpo perturbador esteja concentrada no seu centro de massa, ou melhor dizendo, despreza-se o tamanho do corpo perturbador, em face da distância deste corpo até a Terra. Assim, o potencial gerado pelo corpo perturbador de massa M_i num ponto P, localizado na longitude λ , latitude ϕ e na distância geocêntrica r_i da superfície terrestre, nas vizinhanças da Terra, é dado por Balmino (1974):

$$U = \frac{GM_i}{r_i} \sum_{\ell=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r_i} \right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \Psi) = \sum_{\ell} U_{\ell} \quad (3.1)$$

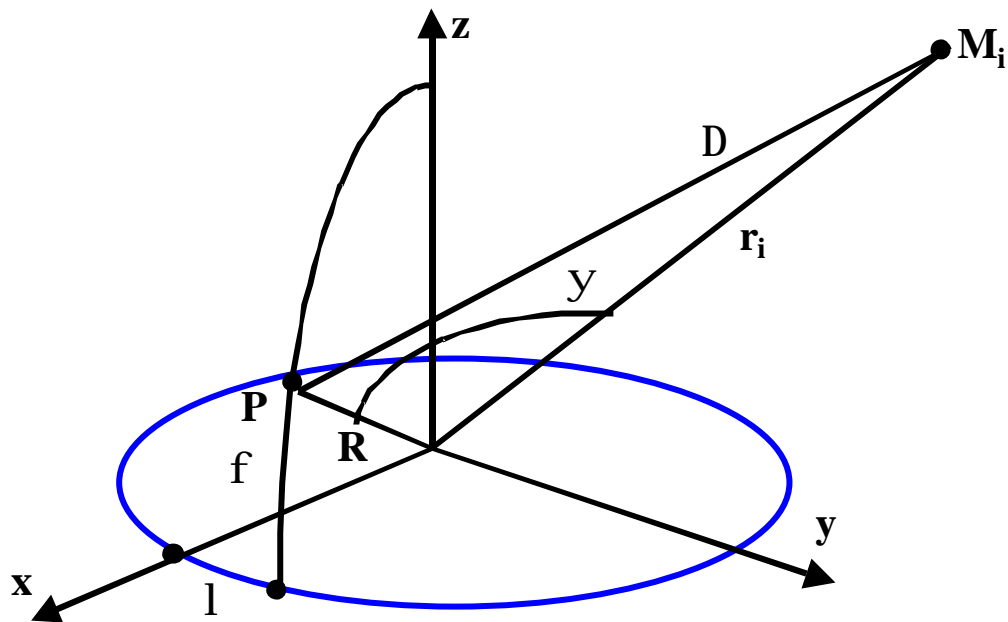


Figura 3.1- Distância geocêntrica r_i da superfície da Terra até suas vizinhanças, o raio da superfície da Terra R , e a distância Δ do ponto P até o corpo perturbador.

em que P_ℓ é o polinômio de Legendre de ordem ℓ , G é a constante gravitacional, Δ é a distância de P até o corpo perturbador, R é o raio da Terra, ψ é o ângulo geocêntrico entre P e M_i .

A ação das marés distorce tanto o corpo plástico da Terra quanto a sua parte líquida, produzindo um potencial externo adicional conhecido como **potencial de maré**.

3.3 O POTENCIAL

Sabendo-se que a Terra é plástica, isto é, não é perfeitamente rígida e nem completamente elástica, considera-se que a distorção do potencial, causado pelo potencial perturbador, consiste apenas de um parâmetro k_ℓ na forma (Kuga et al., 2000):

$$\Delta U_{\ell} = k_{\ell} U_{\ell}, \quad (3.2)$$

k_{ℓ} é o coeficiente de elasticidade de grau ℓ , os quais são denominados de **Números de Love**, (Lambeck, 1980).

As deformações da Terra causadas por marés, devidas à atração do Sol e da Lua, podem produzir perturbações observáveis na órbita e satélites. A magnitude destas perturbações depende de propriedades elásticas da Terra, representadas pelos números de Love, que não são constantes para toda a Terra, mas dependem de cada ponto. Na superfície da Terra ($r_i = R$) o potencial é dado por

$$\Delta U(\vec{R}) = \sum_{\ell} k_{\ell} U_{\ell}(\vec{R}) \quad (3.3)$$

Considerando, como corpo perturbador a Lua (raciocínio análogo pode ser feito para o Sol), de massa m' e orbitando a uma distância r' do centro da Terra, o potencial na superfície da Terra, causado pela Lua, é dado por Balmino (1974):

$$\Delta U(\vec{R}) = \frac{Gm'}{r'} \sum_{\ell} k_{\ell} \left(\frac{R}{r'} \right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \Psi) \quad (3.4)$$

O potencial devido a Lua, num ponto externo à Terra, por exemplo, em um satélite artificial situado a uma distância geocêntrica r , é proporcional à razão $\left(\frac{R}{r} \right)^{\ell+1}$ tal que na superfície essa razão é 1. Portanto, pelo teorema de Dirichlet, o potencial perturbador de marés, no exterior da Terra, pode ser representado segundo a equação, Balmino (1974), que pode ser encontrada com clareza em Pilchowski (1981):

$$\Delta U(\vec{r}) = \left(\frac{Gm'}{r'} \right) \sum_{\ell=2}^{\infty} k_{\ell} \left(\frac{R}{r'} \right)^{\ell} \left(\frac{R}{r} \right)^{\ell+1} P_{\ell}(\cos \Psi), \quad (3.5)$$

em que r é a distância do centro da Terra ao satélite.

Observemos que, se, em um determinado instante, (r, ϕ, λ) forem as coordenadas esféricas do satélite e (r', ϕ', λ') forem as coordenadas esféricas da Lua, então, pelo teorema de adição de Legendre, tem-se

$$P_{\ell}(\cos \Psi) = \sum_{m=0}^{\ell} (2 - \delta_{m0}) \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} P_{\ell m}(\cos \phi) P_{\ell m}(\cos \phi') \cos m(\lambda - \lambda') \quad (3.6)$$

sendo δ_{m0} o delta de Kronecker e $P_{\ell m}$ os polinômios associados de Legendre. As coordenadas (ϕ, λ) e (ϕ', λ') são, respectivamente, as coordenadas do satélite e da Lua.

No tratamento do ângulo de atraso da maré com relação a Terra há uma considerável controvérsia entre a dissipação de energia das marés terrestres e das marés oceânicas, pois a distribuição da temperatura interna e a sua estrutura são diferentes, a amplitude e a perda de energia das marés oceânicas foram modificadas pela distribuição continental e morfologia litorânea, porém com relação as marés terrestres suas amplitudes são dadas de acordo com alguns modelos teóricos, de acordo com alguns modelos teóricos que tratam de influências referentes a dissipação de energia (Burns, 1977).

Formas de se obter o ângulo de atraso podem ser encontradas em Munk e MacDonald (1960) e McDonald (1964).

Levando em conta os fatores acima mencionados, efetuando-se expansões em termos de harmônicos esféricos e substituindo-se (r, ϕ, λ) e (r', ϕ', λ') em termos dos

elementos orbitais do satélite e do corpo perturbador, respectivamente, o potencial devido a maré pode ser expresso na seguinte forma, (Balmino, 1974):

$$\begin{aligned}\Psi'_{\ell mpq} &= (\ell - 2p)\omega' + (\ell - 2p + q)M' + m\Omega' \\ \Psi_{\ell mjs} &= (\ell - 2j)\omega + (\ell - 2j + s)M + m\Omega \\ \varepsilon_{\ell mpq} &= -(\ell - 2p + q)\dot{M}' \Delta t + m\dot{\Theta} \Delta t \approx m\dot{\Theta} \Delta t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta U(\vec{r}) &= \frac{Gm'}{a'} \sum_{\ell} k_{\ell} \left(\frac{R}{a'}\right)^{\ell} \left(\frac{R}{a}\right)^{\ell+1} \sum_{m=0}^{\ell} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} (2-\delta_m) \times \\ &\sum_{p=0}^{\ell} F_{\ell mp}(I') \sum_q G_{\ell pq}(e') \sum_{j=0}^{\ell} F_{\ell mj}(I) \sum_s G_{\ell js}(e) \cos(\Psi'_{\ell mpq} - \Psi_{\ell mjs} + \varepsilon_{\ell mpq})\end{aligned}$$

Em que o sobrescrito refere-se ao corpo perturbador (Sol ou Lua). Sendo que neste será considerada a Lua como corpo perturbador.

Nesta expressão, a , e , i , ω , Ω , e M são os elementos keplerianos da órbita do satélite, $G_{\ell pq}$ são funções da excentricidade e $F_{\ell mp}$ são funções da inclinação, definidas por Kaula (Kaula, 1969), (analogamente os assinalados com ', referem-se aos elementos da órbita da Lua), Θ é o tempo sideral e $\varepsilon_{\ell mpq}$ é a defasagem da maré.

4 EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

4.1 INTRODUÇÃO

A função perturbadora devida tanto ao Sol quanto à Lua são similares, neste presente trabalho será desenvolvido apenas o potencial com relação à Lua. Efetuando expansões em harmônicos esféricos e em sistemas de coordenadas convenientes, escrevem-se alguns termos do potencial devido à maré agindo sobre o satélite.

4.2 O POTENCIAL CONSIDERADO

Considerando a Lua como corpo perturbador, desconsiderando a defasagem e restringindo-se aos termos seculares e de longo período, devidos apenas ao segundo harmônico, o potencial pode ser expresso conforme as equações (4.1), (4.2) e (4.3), apresentados neste capítulo. Observa-se que a expressão do potencial considerado, deduzida por Kozai (1959), pode ser obtida, fazendo-se a restrição mencionada, tanto a partir da equação (3.5), quanto à forma apresentada no apêndice A.

$$U = \frac{m'}{m_{terra}} n'^2 \left(1 + 3 e' \cos(\lambda' - \omega' - \Omega') \right) \frac{R^5}{a^3} k_2 \left\{ (1 - e^2)^{-3/2} A + \frac{15}{8} e^2 B \right\} \quad (4.1)$$

em que,

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i \right) \left(1 - \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i' \right) \\
&+ \frac{3}{16} \operatorname{sen} 2i \operatorname{sen} 2i' \cos(\Omega - \Omega') \\
&+ \frac{3}{16} \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}^2 i' \cos 2(\Omega - \Omega') \\
&+ \frac{3}{8} \operatorname{sen}^2 i' \left(1 - \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i \right) \cos 2(\lambda' - \Omega') \\
&+ \frac{3}{8} \operatorname{sen}^2 i \cos^4 \frac{i'}{2} \cos 2(\lambda' - \Omega) \\
&- \frac{3}{8} \operatorname{sen} 2i \operatorname{sen} i' \cos^2 \frac{i'}{2} \cos(2\lambda' - \Omega - \Omega') \\
&+ \frac{3}{8} \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}^4 \frac{i'}{2} \cos 2(\lambda' - 2\Omega' + \Omega) \\
&+ \frac{3}{8} \operatorname{sen} 2i \operatorname{sen} i' \operatorname{sen}^2 \frac{i'}{2} \cos(2\lambda' + \Omega - 3\Omega')
\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}
B = & \cos^4 \frac{i}{2} \cos^4 \frac{i'}{2} \cos 2(\lambda' - \omega - \Omega) \\
& + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 i \left(1 - \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i' \right) \cos 2\omega \\
& + \frac{1}{2} \cos^4 \frac{i}{2} \operatorname{sen}^2 i' \cos 2(\omega + \Omega - \Omega') \\
& + \operatorname{sen}^4 \frac{i}{2} \cos^4 \frac{i'}{2} \cos 2(\omega - \Omega + \lambda') \\
& + \cos^4 \frac{i}{2} \operatorname{sen}^4 \frac{i'}{2} \cos 2(\omega + \Omega + \lambda' - 2\Omega') \\
& + \operatorname{sen}^4 \frac{i}{2} \operatorname{sen}^4 \frac{i'}{2} \cos 2(\lambda' - 2\Omega' - \omega + \Omega) \\
& + \frac{3}{8} \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}^2 i' \cos 2(\lambda' - \Omega' - \omega) \\
& + \frac{3}{8} \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}^2 i' \cos 2(\lambda' + \omega - \Omega') \\
& + \operatorname{sen} i \cos^2 \frac{i}{2} \operatorname{sen} i' \cos^2 \frac{i'}{2} \cos (2\lambda' - \Omega' - 2\omega - \Omega) \\
& - \frac{1}{2} \operatorname{sen} i \cos^2 \frac{i}{2} \operatorname{sen} 2i' \cos (2\omega + \Omega - \Omega') \\
& + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^4 \frac{i}{2} \operatorname{sen}^2 i' \cos 2(\omega - \Omega + \Omega') \\
& + \frac{1}{2} \operatorname{sen} i \operatorname{sen}^2 \frac{i}{2} \operatorname{sen} 2i' \cos (2\omega - \Omega + \Omega') \\
& + \operatorname{sen} i \operatorname{sen}^2 \frac{i}{2} \operatorname{sen} i' \cos^2 \frac{i'}{2} \cos (2\lambda' + 2\omega - \Omega - \Omega') \\
& - \operatorname{sen} i \cos^2 \frac{i}{2} \operatorname{sen} i' \operatorname{sen}^2 \frac{i'}{2} \cos (2\lambda' + 2\omega + \Omega - 3\Omega') \\
& + \operatorname{sen} i \operatorname{sen}^2 \frac{i}{2} \operatorname{sen} i' \operatorname{sen}^2 \frac{i'}{2} \cos (2\lambda' - 3\Omega' - 2\omega + \Omega)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Na equação (4.3) acima, λ' é a longitude da Lua, Ω e Ω' referem-se as longitudes do nodo ascendente do satélite e da Lua respectivamente, e ω , ω' são os respectivos argumentos do perigeu. Nas equações (4.2) e (4.3) devem considerar-se que a

inclinação da Lua varia continuamente devido ao geopotencial e à atração do Sol, segundo a equação (Kozai, 1965):

$$\begin{aligned} \dot{i} = & \frac{1}{2} \sin^2 J (1 + \cos^2 \varepsilon) + \sin^2 \varepsilon \cos^2 J \\ & + \frac{1}{2} \sin 2\varepsilon \sin 2J \cos N - \frac{1}{2} \sin^2 J \sin^2 \varepsilon \cos 2N \end{aligned} \quad (4.4)$$

Aqui, J e N são a inclinação lunar e a longitude do nodo ascendente, respectivamente, referentes a eclíptica; e ε é a obliquidade da eclíptica. Os valores J , N e λ podem ser encontrados no American Ephemeris (<http://www.ellipticmotion.com>). A inclinação da órbita da Lua pode ser considerada constante para períodos de aproximadamente um ano.

Para integrar as equações, em alguns casos, irá considerar-se, também, a influência das variações seculares de Ω e ω , devidas ao achatamento da Terra, da maré terrestre. Tais variações seculares são dadas por Morando (1974):

$$\begin{aligned} \dot{\omega} = & n J_2 \left(\frac{a_e}{a} \right)^2 \frac{1}{(1-e^2)^2} \left(-\frac{3}{4} + \frac{15}{4} \cos^2 i \right) \\ \dot{\Omega} = & -n J_2 \left(\frac{a_e}{a} \right)^2 \frac{1}{(1-e^2)^2} \left(\frac{3}{2} \cos i \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

em que J_2 é o segundo zonal, devido ao coeficiente do achatamento ($J_2 = 1,08268 \cdot 10^{-3}$) e n é o movimento médio do satélite.

4.3 EQUAÇÕES DE LAGRANGE

A expansão da função perturbadora, como efetuada, fornece explicitamente a dependência do potencial perturbador em relação aos elementos orbitais. As variações orbitais, do corpo perturbado, serão obtidas através das Equações Planetárias de Lagrange. As equações de Lagrange, já considerando os efeitos do achatamento na maré são dadas por Kozai (1959b):

(4.6)

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial U}{\partial M}$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{-\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial U}{\partial \omega} + \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial U}{\partial M}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{-1}{na^2\sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial U}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial U}{\partial \omega}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial U}{\partial i} + \frac{d\dot{\Omega}}{de} \delta e + \frac{d\dot{\Omega}}{di} \delta i$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial U}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial U}{\partial i} + \frac{d\dot{\omega}}{de} \delta e + \frac{d\dot{\omega}}{di} \delta i$$

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial U}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial U}{\partial e}$$

5 INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES

5.1 INTRODUÇÃO

Neste Capítulo, é feita uma análise dos efeitos da maré terrestre sobre órbitas de satélites artificiais, com o modelo considerado, isto é, efetuando-se o cálculo da variação dos elementos orbitais através das equações de Lagrange. O potencial devido à maré foi desenvolvido de forma geral e alguns casos foram especificados.

5.2 INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES

Considerando-se apenas termos seculares e de longo período, as equações a serem integradas são da forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{e} &= E \sum_{\alpha, \beta, \alpha', \beta', \gamma'} B_{(\alpha, \beta, \alpha', \beta', \gamma')} (a, e, i, a', e', i') \frac{\text{sen}}{\text{cos}} (\alpha \Omega + \alpha' \Omega' + \beta \omega + \beta' \omega' + \gamma' \ell') \\
 \dot{i} &= E \sum_{\alpha, \beta, \alpha', \beta', \gamma'} C_{(\alpha, \beta, \alpha', \beta', \gamma')} (a, e, i, a', e', i') \frac{\text{sen}}{\text{cos}} (\alpha \Omega + \alpha' \Omega' + \beta \omega + \beta' \omega' + \gamma' \ell') \\
 \text{em} & \\
 \dot{\Omega} &= E D_{(a, e, i, a', e', i')} (a, e, i, a', e', i') + E \sum_{\alpha, \beta, \alpha', \beta', \gamma'} E_{(a, e, i, a', e', i')} (a, e, i, a', e', i') \\
 E &= \frac{\text{sen}}{\text{cos}} (\alpha \Omega + \alpha' \Omega' + \beta \omega + \beta' \omega' + \gamma' \ell') \\
 \dot{\omega} &= E F_{(a, e, i, a', e', i')} (a, e, i, a', e', i') + E \sum_{\alpha, \beta, \alpha', \beta', \gamma'} G_{(a, e, i, a', e', i')} (a, e, i, a', e', i') \\
 & \frac{\text{sen}}{\text{cos}} (\alpha \Omega + \alpha' \Omega' + \beta \omega + \beta' \omega' + \gamma' \ell')
 \end{aligned} \tag{.2}$$

O método a ser utilizado, é o método das aproximações sucessivas. Considera-se que o movimento da Lua seja conhecido, (incluindo apenas termos seculares devidos à precessão da longitude do nodo ascendente e do argumento do perigeu) isto é:

Para dia Juliano = J2000,0

$$a' = a'_0 = 384748,981 \text{ km}$$

$$e' = e'_0 = 0,0548$$

$$i' = i'_0 = 5,117^0$$

$$\Omega' = \Omega'_0 = 125,033^0$$

$$\omega' = \omega'_0 = 83,35^0$$

$$\ell' = \ell'_0 = 218,183^0$$

$$\ell' = n_{\ell_{ua}} t + \ell'_0$$

$$\Omega' = n_{\Omega} t + \Omega'_0 \tag{5.3}$$

$$\omega' = n_{\omega} t + \omega'_0$$

$$n_{\ell_{ua}} = 13,176^0 / \text{dia}$$

$$n_{\Omega} = 0,0529^0 / \text{dia}$$

$$n_{\omega} = 0,1114^0 / \text{dia}$$

Fazendo $E = 0$ na equação (5.1), tem-se a seguinte solução para as variáveis a, e e i :

$$a = a_0$$

$$e = e_0 \tag{5.4}$$

$$i = i_0,$$

as quais, quando substituídas na parte secular das equações, que descrevem as variáveis angulares, fornecem a equação abaixo:

$$\begin{aligned}\Omega &= ED(a_0, e_0, i_0, a', e', i')t + \bar{\Omega}_0 \\ \mathbf{w} &= EF(a_0, e_0, i_0, a', e', i')t + \bar{\mathbf{w}}_0\end{aligned}\quad (5.5)$$

as equações (5.4) e (5.5) serão substituídas na equação (5.1). A equação resultante deverá ser integrada em função do tempo e a seguir repetiremos o processo.

Vamos examinar alguns casos particulares.

5.3 CASO 1

Supõe-se a Lua estática ($n_{lua} = n_{\Omega'} = n_{\omega'} = 0$) e a Terra com distribuição uniforme de massa. Nestas condições, após a integração, tem-se:

$$\begin{aligned}e &= E \sum_{\alpha, \beta, \alpha', \beta'} B_{(\alpha, \beta, \alpha', \beta')} \frac{1}{N_{\alpha, \beta} - sen} \cos(\alpha\Omega + \alpha'\Omega' + \beta\omega + \beta'\omega') + \bar{e}_0 \\ \text{em que } i &= E \sum_{\alpha, \beta, \alpha', \beta'} C_{(\alpha, \beta, \alpha', \beta')} \frac{1}{N_{\alpha, \beta} - sen} \cos(\alpha\Omega + \alpha'\Omega' + \beta\omega + \beta'\omega') + \bar{i}_0 \\ \text{dos arg } \Omega &= ED_{(\alpha, \beta, \alpha', \beta')} t + \bar{\Omega}_0 + \\ \Omega &= n_t + E \sum_{\alpha, \beta, \alpha', \beta'} E_{(\alpha, \beta, \alpha', \beta')} \frac{1}{N_{\alpha, \beta} - sen} \cos(\alpha\Omega + \alpha'\Omega' + \beta\omega + \beta'\omega') \\ \mathbf{w} &= n_v \\ \omega &= EF_{(\alpha, \beta, \alpha', \beta')} t + \bar{\omega}_0 + \\ &+ E \sum_{\alpha, \beta, \alpha', \beta'} G_{(\alpha, \beta, \alpha', \beta')} \frac{1}{N_{\alpha, \beta} - sen} \cos(\alpha\Omega + \alpha'\Omega' + \beta\omega + \beta'\omega')\end{aligned}\quad (5.7)$$

$$\alpha' \Omega' = \alpha' \Omega_0 = \text{constante} = 0$$

$$\beta' \omega' = \beta' \omega_0 = \text{constante} = 0$$

em que:

$$\begin{aligned} n_{\Omega} &= ED(a_0, a_0', e_0, e_0', i_0, i_0') \\ n_{\omega} &= EF(a_0, a_0', e_0, e_0', i_0, i_0') \end{aligned} \quad (5.8)$$

em que os $N_{\alpha, \beta}$, são combinações da forma

$$\alpha n_{\Omega} + \beta n_{\omega},$$

que são os termos seculares na integração dos elementos orbitais.

No caso específico, da função perturbadora considerada, as expressões analíticas para as precessões de n_{Ω} e n_{ω} são dadas por:

$$\begin{aligned} n_w &= \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{n e} \right) \left(\frac{m_{lua}}{m_{terra}} \right) \left(\frac{R}{a} \right)^5 k_2 n_{lua}^2 \left(\frac{3 e}{(1-e^2)^{5/2}} \right) \left(\frac{1}{4} \right) (\text{sen } i)^2 \\ &\left(1 - \left(\frac{3}{2} \right) (\text{sen } i)^2 \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

que são os termos seculares da integração que fornecem, devido ao efeito da maré, a precessão da longitude e do argumento do perigeu do satélite.

5.4 CASO 2

Supõe-se a Lua em movimento elíptico, não precessionando, ($\ell' = n_{lua} t + \ell'_0, \Omega' = \Omega'_0, \omega' = \omega'_0$) e a Terra com distribuição uniforme de massa. Nestas condições, após a integração, tem-se:

$$\begin{aligned}
 e &= E \sum_{\alpha, \beta, \alpha', \beta', \gamma'} B_{(\alpha, \beta, \alpha', \beta', \gamma')} \frac{1}{N_{\alpha, \beta, \gamma'}} \frac{\cos}{-sen} (\alpha \Omega + \alpha' \Omega' + \beta \omega + \beta' \omega' + \gamma' \ell') + \bar{e}_0 \\
 i &= E \sum_{\alpha, \beta, \alpha', \beta', \gamma'} C_{(\alpha, \beta, \alpha', \beta', \gamma')} \frac{1}{N_{\alpha, \beta, \gamma'}} \frac{\cos}{-sen} (\alpha \Omega + \alpha' \Omega' + \beta \omega + \beta' \omega' + \gamma' \ell') + \bar{i}_0 \\
 \Omega &= E D_{(\alpha, \beta, \alpha', \beta', \gamma')} t + \bar{\Omega}_0 + \\
 &+ E \sum_{\alpha, \beta, \alpha', \beta', \gamma'} E_{(\alpha, \beta, \alpha', \beta', \gamma')} \frac{1}{N_{\alpha, \beta, \gamma'}} \frac{\cos}{-sen} (\alpha \Omega + \alpha' \Omega' + \beta \omega + \beta' \omega' + \gamma' \ell') \\
 \omega &= E F_{(\alpha, \beta, \alpha', \beta', \gamma')} t + \bar{\omega}_0 + \\
 &+ E \sum_{\alpha, \beta, \alpha', \beta', \gamma'} G_{(\alpha, \beta, \alpha', \beta', \gamma')} \frac{1}{N_{\alpha, \beta, \gamma'}} \frac{\cos}{-sen} (\alpha \Omega + \alpha' \Omega' + \beta \omega + \beta' \omega' + \gamma' \ell')
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

em que os coeficientes B , C , D , E , F e G dependem das condições iniciais e, dentro dos argumentos devem substituir-se

$$\begin{aligned}
 \Omega &= n_{\Omega} t + \bar{\Omega}_0 \\
 \omega &= n_{\omega} t + \bar{\omega}_0 \\
 \ell' &= n_{lua} t + \ell'_0
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

sendo n_{Ω} e n_{ω} dada pela equação (5.9) e os $N_{\alpha,\beta,\gamma}$, significam combinações da forma

$$\alpha n_{\Omega} + \beta n_{\omega} + \gamma' n_{lua}$$

5.5 CASO 3

Neste caso, considera-se a Lua em órbita elíptica precessionando ao redor da Terra, a última é considerada esférica.

Com tais hipóteses:

$$\begin{aligned} \ell' &= n_{lua} t + \ell_0 \\ \Omega' &= n_{\Omega} t + \Omega_0 \\ \omega' &= n_{\omega} t + \omega_0 \end{aligned} \tag{5.12}$$

As equações serão análogas às do Caso 2, deverão ser substituídos os $N_{\alpha,\beta,\gamma}$ por $N_{\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta'}$, sendo os $N_{\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta'}$ combinações da forma

$$\alpha n_{\Omega} + \beta n_{\omega} + \gamma' n_{lua} + \alpha' n_{\Omega'} + \beta' n_{\omega'}$$

5.6 CASO 4

Agora se considera a influência do achatamento da Terra na maré para os casos 1, 2 e 3, incluindo tal efeito, as equações de Lagrange que fornecem as variações devidas à longitude do nodo ascendente e o argumento do perigeu, (Kozai, 1959):

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial U}{\partial i} + \frac{d\dot{\Omega}}{de} \delta e + \frac{d\dot{\Omega}}{di} \delta i$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial U}{\partial e} - \frac{\operatorname{cos} i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} \frac{\partial U}{\partial i} + \frac{d\dot{\omega}}{de} \delta e + \frac{d\dot{\omega}}{di} \delta i$$

(5.13)

(5.13)

(5.13)

5.7 RESSONÂNCIAS

Nos casos acima mencionados, se fossem considerados os termos de curto período, poderiam ocorrer combinações, de acordo com a equação (3.10), da forma:

$$\Psi'_{\ell mpq} - \Psi_{\ell mjs} + \varepsilon_{\ell mpq} \approx 0.$$

(5.14)

Mas tal caso não será considerado neste trabalho.

6 RESULTADOS

6.1 INTRODUÇÃO

Com a finalidade de verificar a ordem de grandeza das perturbações, nos exemplos a seguir foram considerados apenas alguns termos da função perturbadora, sugeridos por Brosch e Sundermann (1982). Para a variação da longitude do nodo ascendente e do argumento do perigeu foram considerados apenas os termos seculares e de longo período. A influência da defasagem da maré terrestre não foi considerada e o número de Love foi considerado constante. As derivadas e a integração foram efetuadas analiticamente.

6.2 O SATÉLITE CONSIDERADO

Perturbações geopotenciais, embora teoricamente, se estendam até o infinito, elas diminuem com a altura do satélite. Também as perturbações devidas ao arrasto atmosférico, diminuem com a altura. Assim, por exemplo, um satélite a uma altura de 200 km, o mesmo daria poucas revoluções ao redor da Terra antes de cair, ao passo que a uma altura de 600 km, ele ficaria em órbita, ainda por dezenas de ano. Acima de 700 km, a perturbação devido a pressão de radiação solar direta é maior do que a perturbação devido ao arrasto atmosférico. Para satélites altos, por exemplo, geostacionários a perturbação luni-solar é da ordem das perturbações devido ao geopotencial.

A escolha de uma órbita para se medir efeitos perturbadores devidos à maré, deve ser tal que, não seja muito baixa para que seu efeito não seja totalmente mascarado pelo arrasto e nem muito alto para não ser mascarado pela atração luni-solar.

No desenvolvimento das equações foram feitos truncamentos nas potências da excentricidade, o que implica que a órbita não poderá ser muito excêntrica. Além disso, se a órbita for muito excêntrica, o efeito de maré só se fará sentir quando o satélite estivesse próximo do perigeu.

Assim, para exemplificar a ordem dos efeitos devidos à perturbação da maré terrestre, escolhe-se um satélite em uma órbita com as seguintes características:

$$a = 7000 \text{ km};$$

$$e = 0,01;$$

$$i = 30^0;$$

$$\Omega = 60^0;$$

$$\omega = 30^0.$$

6.3 ANÁLISES DOS CASOS

Nas integrações das equações do movimento para os casos considerados, foi desenvolvido um programa em linguagem de programação Mathematica. Este programa gera um arquivo de saída, onde dadas as condições iniciais do satélite artificial, são obtidos as variações dos elementos orbitais considerados e para cada caso apresentado.

6.3.1 Características das soluções

Analisando as equações do movimento, para os elementos orbitais considerados, nota-se primeiramente que para a excentricidade e para a inclinação, as perturbações devidas à maré terrestre não provocam variações seculares, nesses elementos métricos.

Segundo o método das aproximações sucessivas, encontramos para a variação de Ω e ω , devido ao efeito da maré terrestre, dada pela equação (5.9), os seguintes valores:

$$n_{\Omega} = -8.40519 \times 10^{-7} \text{ rad / dia}$$

$$n_{\omega} = 6.06592 \times 10^{-7} \text{ rad / dia}$$

Vejamos a seguir algumas características das soluções encontradas (termos periódicos).

6.3.1.1 Elementos orbitais considerados

Quanto à perturbação da maré terrestre, na excentricidade, considerando os termos de maior amplitude, para os casos 1, 2 e 3, que é dada por:

$$e = \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{n-e} \right) \left(\frac{m_{lua}}{m_{terra}} \right) \left(\frac{R}{a} \right)^5 k_2 n_{lua}^2 \left(\frac{15}{8} e^2 \right) \left(\frac{(\text{sen } i)^2 \left(1 - \frac{3(\text{sen } i')^2}{2} \right)}{2(n_{\omega})} \right) \cos 2\omega \quad (6.1)$$

Amplitude= 0,0524999

Período= $5,43938 \times 10^7$ dias.

O resultado está mostrado na Figura 6.1:

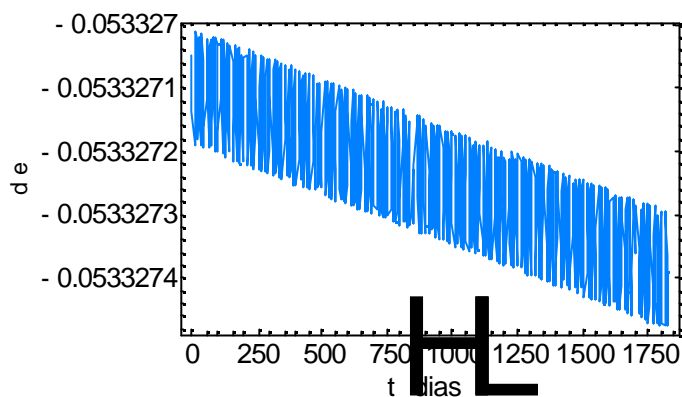


Figura 6.1- Representação da variação da excentricidade.

No caso da inclinação, verificou-se que para os casos 1 e 2, o termo de maior amplitude é:

$$i = \left(-\frac{1}{n\sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} i} \right) \left(\frac{m_{lua}}{m_{terra}} \right) \left(\frac{R}{a} \right)^5 k_2 n_{lua}^2 \quad (6.2)$$

$$(1-e^2)^{-3/2} \left(\frac{3}{8} \right) (\operatorname{sen} i)^2 (\operatorname{sen} i')^2 \left(-\frac{\cos 2\Omega'}{2(n_\Omega)} \right) (\cos 2\Omega)$$

Amplitude: 0,02777565 rad.

Período: $2,14153 \times 10^8$ dias.

Logo, de acordo com este estudo, verificou-se que a inclinação apresenta uma perturbação devido à maré significativa, no entanto com um período muito longo. Isto significa, por exemplo, em um ano, uma alteração da ordem de 10^{-5} grau. Pode mostrar-se através da Figura 6.2:

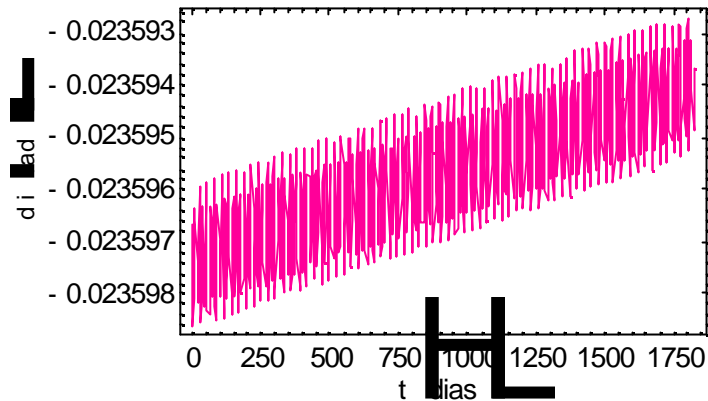


Figura 6.2- Representação da variação da inclinação, para o caso 1 e 2.

Já no Caso 3, a título de exemplo, considerou-se que o termo de maior amplitude é dado por:

$$i = \left(-\frac{1}{n\sqrt{1-e^2}\sin i} \right) \left(\frac{m_{lua}}{m_{terra}} \right) \left(\frac{R}{a} \right)^5 k_2 n_{lua}^2 (1-e^2)^{-3/2} \quad (6.3)$$

$$\left(\frac{3}{16} \right) \left(\frac{(\sin 2i)(\sin 2i')}{(n_{\Omega} - n_{\Omega'})} \right) \cos(\Omega - \Omega')$$

Amplitude = 0,0000820848 rad.

Período = 6805,18 dias.

No caso 3, com a Lua em órbita elíptica precessionando ao redor da Terra, ocorre uma amplitude menor que nos casos 1 e 2, porém o período no qual essa perturbação ocorre é da ordem de 18 anos, claramente devido a Lua. A diferença entre considerar ou não a influência da maré, vai aparecer na 5ª casa decimal da amplitude (ou na 4ª decimal, se fosse em graus). Tais resultados estão exibidos na Figura 6.3 abaixo:

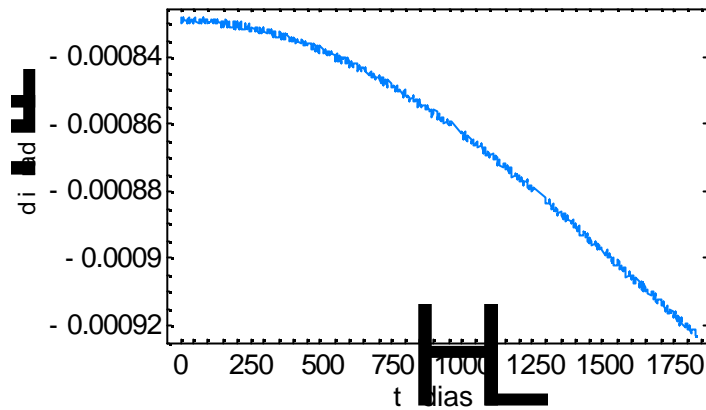


Figura 6.3- Representação da variação da inclinação para o caso 3.

Agora, analisando os resultados para a longitude do nodo ascendente e para o argumento do perigeu, verificou-se que eles apresentam termos seculares devido à precessão, como foi mostrado na equação (5.9). Observando termos de maior amplitude para a longitude, notou-se que tanto no caso 1 quanto no caso 2 é dado por:

$$\Omega = \left(-\frac{1}{n\sqrt{1-e^2}\sin i} \right) \left(\frac{m_{lua}}{m_{terra}} \right) \left(\frac{R}{a} \right)^5 k_2 n_{lua}^2 (1-e^2)^{-3/2} \quad (6.4)$$

$$\left(\frac{3}{8} \right) \cos i \sin i (\sin i')^2 \left(-\frac{\sin(2\Omega')}{2(n_\Omega)} \right) \cos(2\Omega)$$

sua amplitude e período são, respectivamente:

Amplitude = 0,135109 rad.

Período = $2,14153 \times 10^8$ dias.

Estes resultados estão mostrados na figura 6.4:

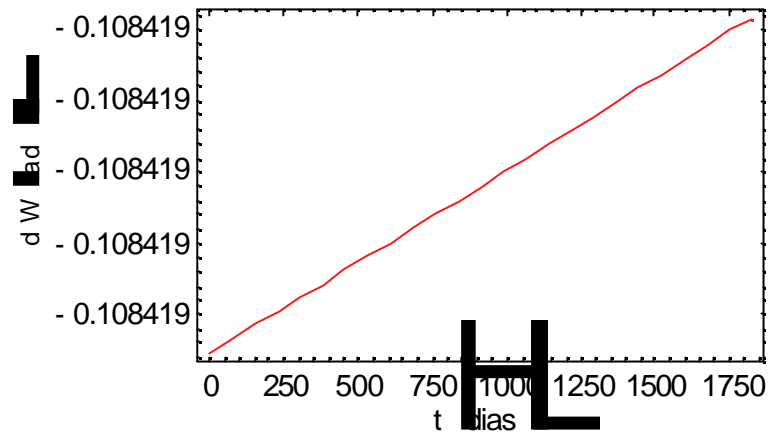


Figura 6.4- Representação da variação da longitude, para os casos 1 e 2.

Para o caso 3, o termo de maior amplitude é dado por:

$$\Omega = \left(-\frac{1}{n\sqrt{1-e^2}\sin i} \right) \left(\frac{m_{lua}}{m_{terra}} \right) \left(\frac{R}{a} \right)^5 k_2 n_{lua}^2 (1-e^2)^{-3/2} \left(\frac{3}{8} \right) \left(\frac{\cos 2i \sin 2i'}{n_{\Omega} - n_{\Omega'}} \right) \sin(\Omega - \Omega') \quad (6.5)$$

Amplitude = 0.0000947834 rad.

Período = 6805,18 dias.

Como ocorre nos outros elementos orbitais, ao analisar o caso 3 e incluindo os termos ℓ' , Ω' , ω' , a amplitude é da ordem de 10^{-4} , porém o período que ocorre a perturbação é da ordem de 18 anos. A observação feita para a equação (6.3), também é válida para esse caso. Este resultado é mostrado na Figura 6.5.

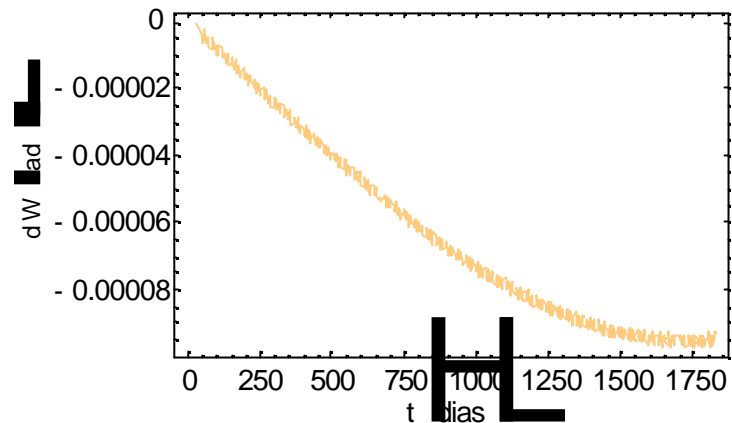


Figura 6.5- Representação da variação da longitude para o caso 3.

Agora analisando o argumento do perigeu, obteve-se para o caso 1, 2 e o 3 o seguinte resultado:

$$\omega = \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{n-e} \right) \left(\frac{m_{lua}}{m_{terra}} \right) \left(\frac{R}{a} \right)^5 k_2 n_{lua}^2 \left(\frac{3e}{(1-e^2)^{5/2}} \right) \left(\frac{(\text{sen } i)^2 \left(1 - \frac{3(\text{sen } i')^2}{2} \right)}{4(n_\omega)} \right) \text{sen } 2\omega \quad (6.6)$$

Com amplitude de 4,21325 rad e um período de $5,43938 \times 10^7$ dias.

Neste caso, seu período é da ordem de 100.000 anos, observou-se que, esse termo teve apenas a influência da maré e não dos termos lunares, isso para o caso de maior amplitude. E o resultado pode ser mostrado através do Figura 6.6.

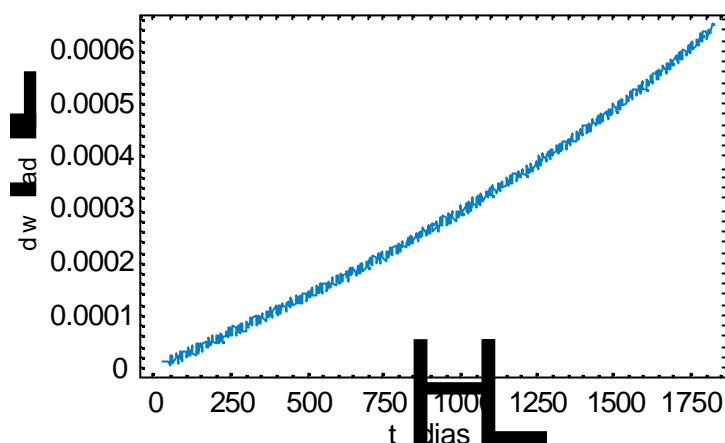


Figura 6.6- Representação da variação do argumento do perigeu para os casos 1, 2 e 3.

6.2.1.2 Caso 4

No caso 4 considerou-se a influência do achatamento da Terra na maré, para o qual utiliza-se a equação (5.13) mostrada no Capítulo 5.

Feitas às integrações e estudando-se os termos, notou-se que com a introdução do achatamento da Terra, diretamente nas equações do movimento, o efeito da maré foi totalmente “mascarado”, pois esse efeito é muito maior que o outro, inclusive porque no próprio cálculo do valor de J_2 o efeito da maré pode está sendo considerado.

Considerando que:

$$\frac{d\dot{\Omega}}{de} de = -0,00413987 de \text{ rad / dia}$$

$$\frac{d\dot{\Omega}}{di} di = 0,0597479 di \text{ rad / dia}$$

$$\frac{d\dot{w}}{de} de = 0,00657292 de \text{ rad / dia}$$

$$\frac{d\dot{w}}{di} di = 0,258716 di \text{ rad / dia}$$

(6.7)

e sendo

$$de = (0,05249999) \text{ sen } 2w + (0,0129776) \text{ sen } (\Omega + 2w) + (0,000823051) \text{ sen } 2(\Omega + w)$$

$$di = (-3,31305) \text{ sen } \Omega + (0,0277765) \text{ sen } 2\Omega + (0,0003155602) \text{ cos } 2(\Omega - w)$$

$$\Omega = \left(-\frac{1}{n\sqrt{1-e^2} \text{ sen } i} \right) \left(\frac{m_{\ell ua}}{m_{terra}} \right) \left(\frac{R}{a} \right)^5 k_2 n_{\ell ua}^2 (1-e^2)^{-3/2}$$

$$\left(\frac{3}{8} \right) \text{ cos } i \text{ sen } i (\text{ sen } i')^2 \left(-\frac{\text{ sen } (2\Omega')}{2(n_{\Omega})} \right) \text{ cos } (2\Omega) + \quad (6.8)$$

$$(-3,3105)(0,0597479) \left(\frac{1}{n_{\Omega}} \right) \text{ sen } \Omega$$

Para o caso 1 e 2, a maior amplitude é $1,34935 \times 10^7$ rad e um período de $4,28307 \times 10^8$ dias, que é dada pelo termo fatorado por δi .

$$\begin{aligned}
\Omega = & \left(-\frac{1}{n\sqrt{1-e^2}\sin i} \right) \left(\frac{m_{\ell ua}}{m_{terra}} \right) \left(\frac{R}{a} \right)^5 k_2 n_{\ell ua}^2 (1-e^2)^{-3/2} \\
& \left(\frac{3}{8} \right) \cos i \sin i (\sin i')^2 \left(-\frac{\sin(2\Omega')}{2(n_{\Omega})} \right) \cos(2\Omega) + \\
& (0,0524999)(0,00657292) \left(\frac{1}{2(n_w)} \right) \sin 2w
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Nesta equação, obtiveram-se uma amplitude de 2987,35 rad e um período de $5,43938 \times 10^7$ dias, que é dada pelo termo fatorado por δe .

Para o caso 3, a partir da equação (6.10):

$$\begin{aligned}
\Omega = & \left(-\frac{1}{n\sqrt{1-e^2}\sin i} \right) \left(\frac{m_{\ell ua}}{m_{terra}} \right) \left(\frac{R}{a} \right)^5 k_2 n_{\ell ua}^2 (1-e^2)^{-3/2} \\
& \left(\frac{3}{8} \right) \left(\frac{\cos 2i \sin 2i'}{n_{\Omega} - n_{\Omega'}} \right) \sin(\Omega - \Omega') + (-3,3105)(0,0597479) \left(\frac{1}{n_{\Omega}} \right) \sin \Omega
\end{aligned} \tag{6.10}$$

obtiveram-se os resultados das contribuições similares os casos 1 e 2.

Para o argumento do perigeu, obtiveram-se os seguintes resultados para os casos 1, 2 e 3:

$$\begin{aligned}
w = & \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{n-e} \right) \left(\frac{m_{\ell ua}}{m_{terra}} \right) \left(\frac{R}{a} \right)^5 k_2 n_{\ell ua}^2 \left(\frac{3e}{(1-e^2)^{5/2}} \right) \\
& \left(\frac{(\sin i)^2 \left(1 - \frac{3(\sin i')^2}{2} \right)}{4(n_w)} \right) \sin 2w + (-3,3105)(0,0597479) \left(\frac{1}{n_{\Omega}} \right) \sin \Omega
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Para o caso 1, 2 e 3 , a maior amplitude é $1,34935 \times 10^7$ rad e um período de $4,28307 \times 10^8$ dias, que é dada pelo termo fatorado por δi .

$$\mathbf{w} = \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{n-e} \right) \left(\frac{m_{\ell ua}}{m_{terra}} \right) \left(\frac{R}{a} \right)^5 k_2 n_{\ell ua}^2 \left(\frac{3e}{(1-e^2)^{5/2}} \right) \left(\frac{(\text{sen } i)^2 \left(1 - \frac{3(\text{sen } i')^2}{2} \right)}{4(n_w)} \right) \text{sen } 2\mathbf{w} + (0,0524999)(0,00657292) \left(\frac{1}{2n_w} \right) \text{sen } 2\mathbf{w}$$

(6.12)

Para o termo fatorado por δe , obtiveram-se uma amplitude de 2987,35 rad e um período de $5,43938 \times 10^7$ dias.

Kozai (Kozai, 1965) apresenta a seguintes expressões para perturbações orbitais devidas à maré terrestre:

$$\begin{aligned} d\mathbf{i} &= F \sum_{j=1}^8 A_{1,j} \text{cos} \mathbf{a}_j, \\ d\Omega &= F \left[B_1 t + \sum_{j=1}^8 \left(A_{2,j} - A_{1,j} \dot{\mathbf{a}}_1 \tan i / \dot{\mathbf{a}}_j \right) \text{sen } \mathbf{a}_j \right], \\ d\mathbf{w} &= F \left[B_2 t + \sum_{j=1}^8 \left(-A_{2,j} \text{cos } i + A_{3,j} + 5 \dot{\mathbf{a}}_1 \text{sen } i / \dot{\mathbf{a}}_j \right) \text{sen } \mathbf{a}_j \right] \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$F = \frac{k_2}{n(1-e^2)^2} \left(\frac{R}{a} \right)^5 \quad (6.14)$$

As expressões para $A_{1,j}$, $A_{2,j}$ e $A_{3,j}$ são tabeladas.

As expressões analíticas que obtivemos para as perturbações, quando aplicadas para os mesmos satélites 1959 Alpha 1, 1959 Eta e 1960 Iota 2 utilizados no trabalho

de Kozai levam a resultados compatíveis. O motivo das “pequenas” diferenças encontradas deve-se a dados iniciais que não são exatamente os mesmos.

7 CONCLUSÕES

O estudo das perturbações devidas à maré terrestre, na excentricidade, na inclinação, na longitude do nodo ascendente e no argumento do perigeu de um satélite artificial, mostrou as seguintes características:

- a) Maré provoca perturbações seculares e de longo período na longitude do nodo ascendente e no argumento do perigeu e na anomalia média.

Deve-se notar, entretanto, que as perturbações são de períodos extremamente longo (da ordem de 10^8 dias), isto faz com que tais efeitos apareçam como termos seculares, quando estudados por um período de alguns anos.

- b) A maré, em primeira ordem provoca perturbações de longo período em todos os elementos orbitais com exceção do semi-eixo maior.
- c) As perturbações de longo período, devidas à maré, podem ser consideradas, para períodos de alguns anos, como termos seculares.
- d) O Caso 3 mostra que quando se estuda perturbação orbital de satélites artificiais devidas à Lua, aparecem afetadas pela maré, podendo conforme a altura e a excentricidade da órbita do satélite considerado causar uma influência de até 10% no cálculo da perturbação na inclinação e na longitude do nodo ascendente.
- e) O Caso 4 verificamos que cerca de 10% do movimento de precessão da longitude do nodo ascendente da órbita do satélite considerado, devido ao achatamento, poderá estar afetado pela perturbação devido à maré.

- f) Um programa foi construído permitindo com uma simples alteração de dados iniciais, examinar outras órbitas particulares e está colocado a disposição do usuário.
- g) Os nossos resultados quando comparados com os resultados de Kozai levaram a mesma ordem de grandeza, sendo as diferenças devidas a condições iniciais diferentes.

7.1 TRABALHOS FUTUROS

As combinações de frequências que aparecem nos argumentos dos termos da função perturbadora do tipo

$$\Psi'_{\ell mpq} - \Psi_{\ell mjs} + \varepsilon_{\ell mpq} \quad (7.1)$$

envolvendo a defasagem, podem levar a pequenos divisores. A contribuição da defasagem na ressonância também deve ser investigada.

A influência das inclinações para várias excentricidades e semi-eixos, também deve ser investigada para cada um dos casos considerados.

Vários modelos têm sido propostos para o estudo de perturbações de órbitas de satélites artificiais pela maré terrestre. Com algumas simplificações tais modelos também podem ser implementados e comparados entre si e com uma integração numérica das equações do movimento.

Comentemos alguns:

7.1.1 Modelo de Balmino (Balmino, 1974)

Balmino sugere que haja um número de Love e uma defasagem para cada excitação expandindo tais parâmetros em séries de harmônicos esféricos. A introdução dos números de Love com tais características pode ser introduzida no modelo adotado, melhorando a solução obtida. A discussão do modelo de Balmino está dada no Apêndice B.

7.1.2 Modelo do IERS (IERS, 1996).

As mudanças induzidas pela maré terrestre no geopotencial podem ser convenientemente modeladas como variações nos coeficientes C_{nm} e S_{nm} do geopotencial. No nosso trabalho já verificamos a influência do J_2 na maré. Uma comparação do nosso trabalho com o modelo do IERS poderá esclarecer melhor a característica da influência dos outros coeficientes do geopotencial. A descrição do modelo do IERS está dada no Apêndice C.

REFERÊNCIAS

BALMINO G. Analytical Expressions for Earth Tides Perturbations on Close Earth Satellites in: **the use of artificial satellites for geodesy and geodynamics**. Athens, Greece:Ed.G. Veis, 1974.

BROSCH, P.; SUNDERMANN J. **Tidal friction and the earth rotation**. Berlin: Ed. Springer,1982.

BROUCKE, R. **Tidal Evolution: Some Simple Models**. Austin: University of Texas,1987. Apostila.

BURNS, J. (Ed.). **Planetary satellites**. Arizona: The University of Arizona Press, 1977.

BURNS, J., MATTHEWS M., (Eds.) **Satellites**. Arizona: The University of Arizona Press, 1986.

CAYLEY, A. **Tables of the developments of functions in the theory of elliptic motion**, London: Mem. Roy. Astron., Soc., v. 29, p. 191 ,1861.

Disponível em: < [HTTP://WWW.ELLIPTICMOTION.COM](http://www.ELLIPTICMOTION.COM) > . Acesso em: 27 apr.2002.

KAULA W.M. **Tidal dissipation by solid friction and the resulting orbital evolution**. Los Angeles: Institute of Geophysics and Planetary Physics, University of California, , 1964.

KAULA W.M. **Tidal friction with latitude dependent amplitude**. Seattle: Astr. Journal, v. 74, p. 1108-1114,1969.

KOZAI Y. **On the effects of the sun and the moon upon the motion of a close-earth satellite.** Washington D. C.: Smithsonian Inst. Astrophysical Observatory, Special Report. 52, March, 1959a.

KOZAI Y. **The motion of a close earth satellite.** Washington D. C.: Smithsonian Inst. Astrophysical Observatory, Special Report. 52, October, 1959b.

KOZAI Y. **Effects of the tidal deformation of the earth on the motion of close earth satellites.** Tokio: Publ. Astr. Soc. Of Japan v. 17, n.4 , 1965.

KOZAI Y. **Love's number of the earth derived from satellite observations,** Bulletin Géodésique. v.42, n.89, p. 355-57,1967.

KUGA, H. K.; RAO, R. K.; CARRARA, V. **Satélites artificiais- movimento orbital.** São José dos Campos: INPE, 2000. Apostila

LAMBECK, K. **The earth's variable rotation.** Ed. Cambridge 1980.

MACDONALD, G.J.F., **Tidal friction,** Rev. Geophys, v.2, p.467-541, 1964.

MIGNARD F. **The evolution of the lunar orbit revisited, II.** The moon and the planets. v.23, p. 185-201, 1980.

MORANDO B. **Mouvement d' um satellite artificiel de la terre.** Cambridge: Ed. Gordon & Breach, , UK, 1974.

MUNK, W.; MACDONALD, G. J. F., **The rotation of the earth,** New York: Cambridge University Press, p.323, 1960.

MUSEN, P.; ESTES, R. **On the tidal effects in the motion of artificial satellites.**
Celestial Mechanics. V. 6, n. 1, p. 4- 21, July, 1972.

PILCHOWSKI, U. H. **Perturbação na órbita de satélites artificiais devido à maré.** São José dos Campos: INPE, 1981.

SANT'ANNA, A . S.; AFONSO, G.B. **On the tidal Time delay of the earth.**
Paraná: Ed. Universidade do Paraná. No prelo 2001.

APÊNDICE A - A FUNÇÃO PERTURBADORA PARA OS PRIMEIROS TERMOS DO POTENCIAL

Efetuada expansões em termos de harmônicos esféricos em sistemas de coordenadas convenientes, vamos escrever alguns termos do potencial devido à maré. Com as considerações acima o potencial devido a maré em um ponto externo à Terra é dado por (Balmino,1974) :

$$\Delta U(\vec{r}) = \left(\frac{Gm'}{r'} \right) \sum_{\ell=2}^{\infty} k_{\ell} \left(\frac{R}{r'} \right)^{\ell} \left(\frac{R}{r} \right)^{\ell+1} P_{\ell}(\cos \Psi) \quad (\text{A.1})$$

Para colocarmos as coordenadas esféricas em termos dos elementos orbitais seguimos o processo descrito a seguir.

Adotando coordenadas geocêntricas, com o eixo x na direção do equinócio e o eixo z na direção do polo norte temos, usando coordenadas esféricas convencionais:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \mathbf{q} \cos \mathbf{f} \\ y &= r \cos \mathbf{q} \sin \mathbf{f} \\ z &= r \sin \mathbf{q} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Podemos representar os três componentes de \mathbf{r} em outro sistema de coordenadas, onde o plano fundamental é o plano da órbita, efetuando-se três rotações consecutivas conforme ilustrado na Figura A.1:

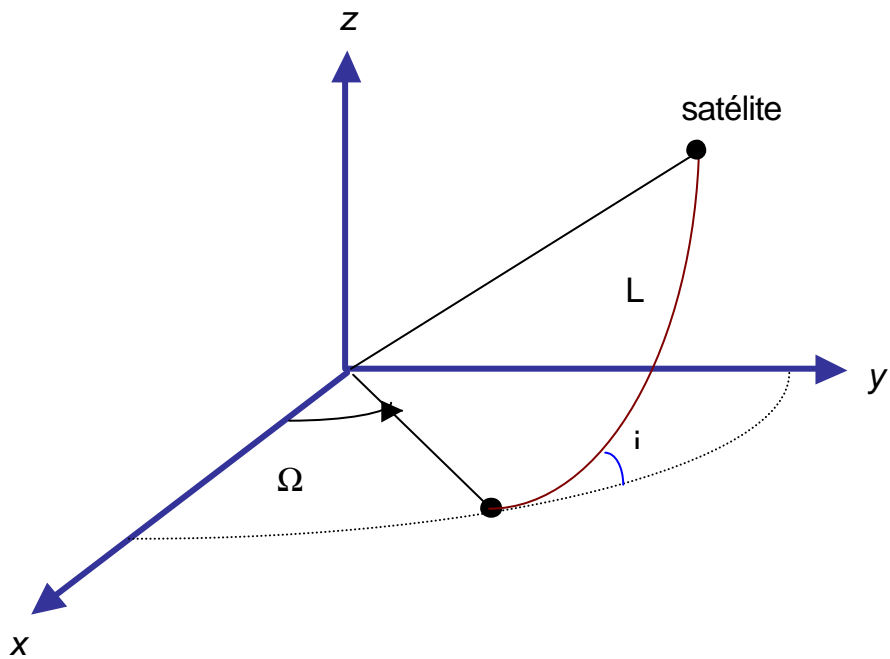


Figura A.1- Representação do sistema de coordenadas, sendo L o argumento da latitude, i é a inclinação e Ω é a longitude do nodo ascendente.

Primeira rotação em torno do eixo z de um ângulo Ω ;

Segunda rotação em torno do novo eixo x de um ângulo i ;

Terceira rotação em torno do novo eixo z de um ângulo L .

No novo sistema, as coordenadas do ponto, serão:

$$(X, Y, Z) = (r \cos f, r \sin f, o) \quad (\text{A.3})$$

Temos então:

$$P_1 = \begin{pmatrix} \cos L & -\sin L & 0 \\ \sin L & \cos L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

A relação entre os dois sistemas é dada por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P_3 P_2 P_1 \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Efetuando-se os cálculos obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \cos(L + \Omega) + 2 \sin^2 \frac{i}{2} \sin L \sin \Omega, \\ \frac{y}{r} &= \sin(L + \Omega) - 2 \sin^2 \frac{i}{2} \sin L \cos \Omega, \\ \frac{z}{r} &= \sin i \sin L \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

sendo $L = w + f$ o argumento da latitude.

Representando as coordenadas e os elementos orbitais da Lua com sobrescrito ‘, o ângulo Ψ é expresso na seguinte forma como mostra a Figura A.2:

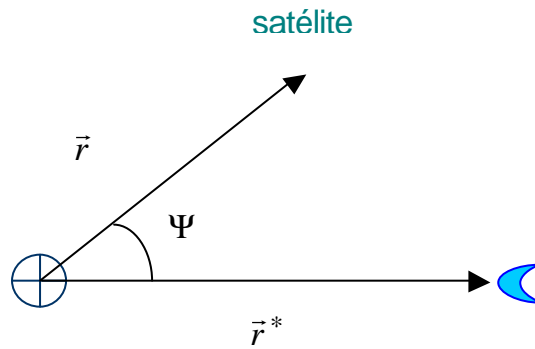


Figura A.2- Distância geocêntrica \vec{r}' da superfície da Terra até o corpo perturbador, distância geocêntrica \vec{r} da superfície da Terra até o satélite e Ψ é o ângulo geocêntrico entre \vec{r}' e \vec{r} .

$$S = \cos \Psi = \vec{r} \cdot \vec{r}' / rr' \quad (\text{A.7})$$

temos assim,

$$S = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'} \quad (\text{A.8})$$

sendo \vec{r} e \vec{r}' raio vetor geocêntrico do satélite e da Lua.

Portanto:

$$\begin{aligned}
S &= \cos(L + \Omega - L' - \Omega') \\
&- 2 \operatorname{sen}^2 \frac{i}{2} \operatorname{sen} L \operatorname{sen}(L' + \Omega' - \Omega) \\
&- 2 \operatorname{sen}^2 \frac{i'}{2} \operatorname{sen} L' \operatorname{sen}(L + \Omega - \Omega') + \\
&4 \operatorname{sen}^2 \frac{i}{2} \operatorname{sen}^2 \frac{i'}{2} \operatorname{sen} L \operatorname{sen} L' \cos(\Omega - \Omega') \\
&+ \operatorname{sen} i \operatorname{sen} i' \operatorname{sen} L \operatorname{sen} L'
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Com o valor obtido para $\cos(\Psi)$ em termos dos elementos orbitais, podemos calcular os polinômios de Legendre $P_\ell(\cos \Psi)$.

É conveniente também que transformemos L em termos da longitude $I = L + \Omega$, analogamente para variáveis com sobrescrito '.

Observamos ainda que L está em termos da anomalia verdadeira. Para colocarmos em função da anomalia média M , usamos as tábuas de Cayley, Cayley (1861). Nessa tábua encontramos tabelados em séries nas potências da excentricidade os coeficientes $\mathbf{g}(n, m, k)$ e $\mathbf{s}(n, m, k)$ dos desenvolvimentos:

$$Y^n \cos mf = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{g}(n, m, k) \cos kM \tag{A.10}$$

$$Y^n \operatorname{sen} mf = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{g}(n, m, k) \operatorname{sen} kM \tag{A.11}$$

onde m é um valor positivo ou nulo e

$$Y = \left(\frac{a}{r} \right)^n \tag{A.12}$$

sendo n um valor negativo, positivo ou nulo.

De (A.10) e (A.11), facilmente obtemos

$$Y^n \cos(mf + \mathbf{j}) = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{g}_1(n, m, k) \cos(kM + \mathbf{j}) + \mathbf{g}_2(n, m, k) \cos(kM - \mathbf{j})) \quad (\text{A.13})$$

$$Y^n \sin(mf + \mathbf{j}) = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{s}_1(n, m, k) \sin(kM + \mathbf{j}) + \mathbf{s}_2(n, m, k) \sin(kM - \mathbf{j})) \quad (\text{A.14})$$

com

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}(\gamma + \sigma) \quad (\text{A.15})$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2}(\gamma + \sigma)$$

e

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\gamma + \sigma) \quad (\text{A.16})$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma - \gamma)$$

Efetuada-se as operações mencionadas, o potencial a ser utilizado, incluindo os termos de curto período pode ser expresso na seguinte forma:

$$U = \frac{m'}{m_{\text{terra}}} n^{2'} (1 + 3e' \cos(\ell')) \frac{R^5}{a^3} k_2 \{(1 - e^2)^{-3/2} A + \frac{15}{8} e^2 B\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{m'}{m_{terra}} n^{2'} \frac{R^5}{a^3} k_2 \{ (1-e^2)^{-3/2} \left(\frac{1}{4} \left(1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 i \right) \left(1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 i' \right) \right) \\
&+ \frac{3}{16} \text{sen } 2i \text{sen } 2i' \cos(\Omega - \Omega') + \\
&\frac{3}{16} \text{sen}^2 i \text{sen}^2 i' \cos 2(\Omega - \Omega') + \\
&+ \frac{3}{8} \text{sen}^2 i' \left(1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 i \right) \cos 2(\ell' + \mathbf{w}') \\
&+ \frac{3}{8} \text{sen}^2 i \cos^4 \frac{i'}{2} \cos 2(\ell' - \Omega + \Omega' + \mathbf{w}') \\
&- \frac{3}{8} \text{sen } 2i \text{sen } i' \cos^2 \frac{i'}{2} \cos(2\ell' - \Omega - \Omega' + 2\mathbf{w}') \\
&+ \frac{3}{8} \text{sen}^2 i \text{sen}^4 \frac{i'}{2} \cos 2(\ell' - \Omega' + \Omega + \mathbf{w}') \\
&+ \frac{3}{8} \text{sen } 2i \text{sen } i' \text{sen}^2 \frac{i'}{2} \cos(2\ell' + \Omega - \Omega' + 2\mathbf{w}') \\
&+ \frac{15}{8} e^2 \left(\cos^4 \frac{i}{2} \cos^4 \frac{i'}{2} \cos 2(\ell' - \mathbf{w} + \mathbf{w}' - \Omega + \Omega') + \right. \\
&+ \frac{1}{2} \text{sen}^2 i \left(1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 i' \right) \cos 2\mathbf{w} \\
&+ \frac{1}{2} \cos^4 \frac{i}{2} \text{sen}^2 i' \cos 2(\mathbf{w} + \Omega - \Omega') \\
&+ \text{sen}^4 \frac{i}{2} \cos^4 \frac{i'}{2} \cos 2(\ell' - \Omega + \Omega' + \mathbf{w} - \mathbf{w}') + \\
&\cos^4 \frac{i}{2} \text{sen}^4 \frac{i'}{2} \cos 2(\ell' + \Omega + \Omega' + \mathbf{w} + \mathbf{w}') \\
&+ \text{sen}^4 \frac{i}{2} \text{sen}^4 \frac{i'}{2} \cos 2(\ell' + \Omega - \Omega' - \mathbf{w} + \mathbf{w}') \\
&+ \frac{3}{8} \text{sen}^2 i \text{sen}^2 i' \cos 2(\ell' - \mathbf{w} + \mathbf{w}') \\
&+ \frac{3}{8} \text{sen}^2 i \text{sen}^2 i' \cos 2(\ell' + \mathbf{w} - \mathbf{w}')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \operatorname{sen} i \cos^2 \frac{i'}{2} \operatorname{sen} i' \cos^2 \frac{i'}{2} \cos(2\ell' - \Omega + \Omega' - 2\mathbf{w} + 2\mathbf{w}') \\
& - \frac{1}{2} \operatorname{sen} i \cos^2 \frac{i'}{2} \operatorname{sen} 2i' \cos(2\mathbf{w} + \Omega - \Omega') \\
& + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^4 \frac{i'}{2} \operatorname{sen}^2 i' \cos 2(\mathbf{w} - \Omega + \Omega') \\
& + \frac{1}{2} \operatorname{sen} i \operatorname{sen}^2 \frac{i'}{2} \operatorname{sen} 2i' \cos(2\mathbf{w} - \Omega + \Omega') \\
& + \operatorname{sen} i \operatorname{sen}^2 \frac{i'}{2} \operatorname{sen} i' \cos^2 \frac{i'}{2} \cos(2\ell' - \Omega + \Omega' + 2\mathbf{w} + 2\mathbf{w}') \\
& - \operatorname{sen} i \cos^2 \frac{i'}{2} \operatorname{sen} i' \operatorname{sen}^2 \frac{i'}{2} \cos(2\ell' - \Omega - \Omega' + 2\mathbf{w} + 2\mathbf{w}') \\
& + \operatorname{sen} i \operatorname{sen}^2 \frac{i'}{2} \operatorname{sen} i' \operatorname{sen}^2 \frac{i'}{2} \cos(2\ell' + \Omega - \Omega' - 2\mathbf{w} + 2\mathbf{w}')) + \\
& \frac{m'}{m_{\text{terra}}} n^{2'} (3e' \cos(\ell')) \frac{R^5}{a^3} k_2 \{(1-e^2)^{-3/2} \left(\frac{1}{4} \left(1 - \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i \right) \left(1 - \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i' \right) \right. \\
& + \frac{3}{16} \operatorname{sen} 2i \operatorname{sen} 2i' \cos(\Omega - \Omega') + \\
& \left. \frac{3}{16} \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}^2 i' \cos 2(\Omega - \Omega') + \right. \\
& \left. + \frac{3}{8} \operatorname{sen}^2 i' \left(1 - \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i \right) \cos 2(\ell' + \mathbf{w}') \right. \\
& \left. + \frac{3}{8} \operatorname{sen}^2 i \cos^4 \frac{i'}{2} \cos 2(\ell' - \Omega + \Omega' + \mathbf{w}') \right. \\
& \left. - \frac{3}{8} \operatorname{sen} 2i \operatorname{sen} i' \cos^2 \frac{i'}{2} \cos(2\ell' - \Omega - \Omega' + 2\mathbf{w}') \right. \\
& \left. + \frac{3}{8} \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}^4 \frac{i'}{2} \cos 2(\ell' - \Omega' + \Omega + \mathbf{w}') \right. \\
& \left. + \frac{3}{8} \operatorname{sen} 2i \operatorname{sen} i' \operatorname{sen}^2 \frac{i'}{2} \cos(2\ell' + \Omega - \Omega' + 2\mathbf{w}') \right)
\end{aligned}$$

APÊNDICE B – Modelo de Balmino (Balmino,1974)

O potencial perturbador T_p devido a maré terrestre, supondo que haja um número de Love $k_{\ell mpq}$ e uma defasagem $e_{\ell mpq}$ para cada frequência de excitação é dada por:

$$T_p(R, \mathbf{f}, I) = \frac{Gm^*}{a^*} \sum_{\ell, m, p, q} \left(\frac{R}{a^*} \right)^{\ell} (2-d_{0m}) \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} F_{\ell mp}(I^*) G_{\ell pq}(e^*) \times k_{\ell mpq}(\mathbf{f}, I) P_{\ell m}(\text{sen } \mathbf{f}) \begin{bmatrix} \text{Cos} \\ \text{Sen} \end{bmatrix} [V'_{\ell mpq} m(I+q) - e_{\ell mpq}(\mathbf{f}, I)] \quad (\text{B.1})$$

em que o sobrescrito * significa massa e elementos orbitais relativos à Lua.

Suponhamos também que os números de Love e os termos tesserais possam ser desenvolvidos em harmônicos esféricos, isto é,

$$k_{\ell mpq}(\mathbf{f}, I) = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{m=0}^h k_{\ell mpq}^{hm} \text{Cos} m(I - I_{\ell mpq}^{hm}) P_{hm}^{(\text{sen } \mathbf{f})} \quad (\text{B.2})$$

$$e_{\ell mpq}(\mathbf{f}, I) = \sum_{n=0}^{\infty} e_{\ell mpq}^n P_n(\text{sen } \mathbf{f}) \quad (\text{B.3})$$

Nestas equações após vários cálculos o potencial é dado por:

$$T = \frac{Gm^*}{R} \sum_{\ell=2}^{\infty} \left(\frac{R}{a^*} \right)^{\ell+1} \sum_{m=0}^{\ell} \frac{(2-d_{0m})(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \sum_{p=0}^{\ell} F_{\ell pq}(I^*) \sum_{q=-\infty}^{\infty} (e^*) \times$$

$$\left[\begin{aligned}
& \left[\sum_{h=0}^{\infty} \sum_{m=0}^h \frac{k_{\ell mpq}^h}{2} \sum_{+} \sum_{k=|m \pm \mathbf{m}|}^{\ell+h} Q_{\ell h k m}^{\pm} \left\{ \left(\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{a}} \right)^{k+1} \sum_{j=0}^k F_{k, |m \pm \mathbf{m}|, j}, (\mathbf{I})_j \sum_{g=-\infty}^{+\infty} \right. \right. \\
& G_{kjg}(\mathbf{e}) \left(\frac{1}{\mathbf{x}_m} \right)_{\ell-m:\text{par}}^{\ell-m:\text{par}} \left[\begin{array}{c} \cos \\ (-1)^{k-|m \pm \mathbf{m}|+1} \text{sen} \end{array} \right]_{k-|m \pm \mathbf{m}|}^{k-|m \pm \mathbf{m}|} \left. \begin{array}{c} -(\ell-m):\text{par} \\ -(\ell-m):\text{impar} \end{array} \right] \left(\mathbf{W}^{\pm} \right) \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{e}_{\ell mpq}^n \sum_{s=|m \pm \mathbf{m}|}^{k+n} Q_{|k n s|, |m \pm \mathbf{m}|} \left(\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{a}} \right)^{s+1} \sum_{j'=0}^s F_{s, |m \pm \mathbf{m}|, j'}, \sum_{g'=-\infty}^{+\infty} \\
& G_{s, j' g'}(\mathbf{e}) \left[\begin{array}{c} \mathbf{x}_m^{-m} \\ 1 \end{array} \right]_{(\ell-m):\text{impar}}^{(\ell-m):\text{par}} \left[\begin{array}{c} -\text{sen} \\ (-1)^{s-|m \pm \mathbf{m}|} \cos \end{array} \right]_{s-|m \pm \mathbf{m}|}^{s-|m \pm \mathbf{m}|} \left. \begin{array}{c} -(\ell-m):\text{par} \\ -(\ell-m):\text{impar} \end{array} \right] \left(\mathbf{W}^{\pm} \right) \left. \right\}
\end{aligned} \right] \quad (\text{B.4})$$

Em que

$$\left[\begin{aligned}
& \mathbf{W}^{\pm} = \left(v_{k, |m \pm \mathbf{m}|, j, g} - \mathbf{x}_m^m v_{\ell mpq}^* \right) \pm \bar{\mathbf{x}}_m^m \mathbf{m} \ell_{\ell mpq}^{hm} - \left(m \pm \mathbf{m} q - \bar{\mathbf{x}}_m^m m q \right) \\
& \mathbf{W}'^{\pm} = \left(v_{s, |m \pm \mathbf{m}|, j', g'} - \mathbf{x}_m^m v_{\ell mpq}^* \right) \pm \bar{\mathbf{x}}_m^m \mathbf{m} \ell_{\ell mpq}^{hm} - \left(m \pm \mathbf{m} q - \bar{\mathbf{x}}_m^m m q \right) \\
& \mathbf{x}_m^{-m} = \left[\begin{array}{l} 1 \text{ se o sinal em } \sum_{+} \text{ for } + \\ \left[\begin{array}{l} 1 \text{ para } m \geq \mathbf{m} \\ -1 \text{ para } m < \mathbf{m} \end{array} \right] \left(\text{se o sinal em } \sum_{+} \text{ for } - \right) \end{array} \right]
\end{aligned} \right] \quad (\text{B.5})$$

$v_{\ell mpq}^*$ é dado por:

$$v_{\ell mpq}^* = (\ell - 2p + q)M^* + (\ell - 2p)w^* + mW^* \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{15}{8} e^2 \left(\cos^4 \frac{i}{2} \cos^4 \frac{i'}{2} \cos 2(\ell' - \mathbf{w} + \mathbf{w}' - \Omega + \Omega') \right) + \\
& + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 i \left(1 - \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i' \right) \cos 2\mathbf{w} \\
& + \frac{1}{2} \cos^4 \frac{i}{2} \operatorname{sen}^2 i' \cos 2(\mathbf{w} + \Omega - \Omega') \\
& + \operatorname{sen}^4 \frac{i}{2} \cos^4 \frac{i'}{2} \cos 2(\ell' - \Omega + \Omega' + \mathbf{w} - \mathbf{w}') + \\
& \cos^4 \frac{i}{2} \operatorname{sen}^4 \frac{i'}{2} \cos 2(\ell' + \Omega + \Omega' + \mathbf{w} + \mathbf{w}') \\
& + \operatorname{sen}^4 \frac{i}{2} \operatorname{sen}^4 \frac{i'}{2} \cos 2(\ell' + \Omega - \Omega' - \mathbf{w} + \mathbf{w}') \\
& + \frac{3}{8} \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}^2 i' \cos 2(\ell' - \mathbf{w} + \mathbf{w}') \\
& + \frac{3}{8} \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}^2 i' \cos 2(\ell' + \mathbf{w} - \mathbf{w}') \\
& + \operatorname{sen} i \cos^2 \frac{i}{2} \operatorname{sen} i' \cos^2 \frac{i'}{2} \cos(2\ell' - \Omega + \Omega' - 2\mathbf{w} + 2\mathbf{w}') \\
& - \frac{1}{2} \operatorname{sen} i \cos^2 \frac{i}{2} \operatorname{sen} 2i' \cos(2\mathbf{w} + \Omega - \Omega') \\
& + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^4 \frac{i}{2} \operatorname{sen}^2 i' \cos 2(\mathbf{w} - \Omega + \Omega') \\
& + \frac{1}{2} \operatorname{sen} i \operatorname{sen}^2 \frac{i}{2} \operatorname{sen} 2i' \cos(2\mathbf{w} - \Omega + \Omega') \\
& + \operatorname{sen} i \operatorname{sen}^2 \frac{i}{2} \operatorname{sen} i' \cos^2 \frac{i'}{2} \cos(2\ell' - \Omega + \Omega' + 2\mathbf{w} + 2\mathbf{w}') \\
& - \operatorname{sen} i \cos^2 \frac{i}{2} \operatorname{sen} i' \operatorname{sen}^2 \frac{i'}{2} \cos(2\ell' - \Omega - \Omega' + 2\mathbf{w} + 2\mathbf{w}') \\
& + \operatorname{sen} i \operatorname{sen}^2 \frac{i}{2} \operatorname{sen} i' \operatorname{sen}^2 \frac{i'}{2} \cos(2\ell' + \Omega - \Omega' - 2\mathbf{w} + 2\mathbf{w}'))
\end{aligned}$$

APÊNDICE C –Modelo do IERS (IERS,1996)

A aproximação de segunda ordem para o potencial DV na superfície da Terra é:

$$DV = k_2 R_0^2 \sum_{j=S,M} \frac{GM_j}{r_j^3} P_{20}(\cos y_j) \quad (C.1)$$

Por outro lado, na superfície da Terra o espaço livre DV torna-se:

$$DV = k_2 \frac{R_0^5}{r^3} \sum_{j=S,M} \frac{GM_j}{r_j^3} P_{20}(\cos y_j) \quad (C.2)$$

De acordo com tal modelo, as mudanças no segundo harmônico do geopotencial são dadas pelas formulas:

$$\begin{aligned} \bar{D}\bar{C}_{20} &= \frac{1}{\sqrt{5}} k_2(0) \frac{R_0^5}{a_e^2 GE} \sum_{j=S,M} \frac{GM_j}{r_j^3} P_{20}(\sin f_j); \\ \bar{D}\bar{C}_{21} - i\bar{D}\bar{S}_{21} &= \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{5} k_2(1) \frac{R_0^5}{a_e^2 GE} \sum_{j=S,M} \frac{GM_j}{r_j^3} P_{21}(\sin f_j) e^{-i l_j} \\ \bar{D}\bar{C}_{22} - i\bar{D}\bar{S}_{22} &= \frac{1}{12} \frac{\sqrt{12}}{5} k_2(2) \frac{R_0^5}{a_e^2 GE} \sum_{j=S,M} \frac{GM_j}{r_j^3} P_{22}(\sin f_j) e^{-i 2 l_j} \end{aligned} \quad (C.3)$$

sendo:

$k_2(0) = 0.299$, números de Love de longo período de grau 2.

$k_2(1) = 0.3$, números de Love de diurna principal de grau 2.

$k_2(2) = 0.302$, números de Love semi- diurna de grau 2.

GM_j = parâmetro gravitacional da Lua (j=M) e do Sol (j=S),

r_j = distância geocêntrica da Lua ou do Sol,

ϕ_j, λ_j = latitude e longitude geocêntrica da Lua e do Sol .

As mudanças dos coeficientes são:

$$\Delta \bar{C}_{nm} - i\Delta \bar{S}_{nm} = A_m \sum_{S(n,m)} \delta K_s H_s \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}_{n+m \text{ par}}^{n+m \text{ impar}} e^{i\theta} \quad (\text{C.4})$$

sendo

$$A_m = \frac{(-1)^m}{R_0 \sqrt{4\pi(2 - \delta_{0m})}}, \delta_{0m} = \begin{cases} 1 & m=0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

θ_s = argumentos astronômicos, calculados por números Doodson .

$\delta K_s = K_2^s(1) - K_2(1)$, diferença entre a frequência atual dependendo do número de Love e do primeiro número.