

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
CÂMPUS DE BAURU  
FACULDADE DE CIÊNCIAS

ANA SHEILA DO COUTO TRINDADE MORACO

**UM ESTUDO SOBRE OS CONHECIMENTOS GEOMÉTRICOS ADQUIRIDOS  
POR ALUNOS DO ENSINO MÉDIO**

Bauru  
2006

ANA SHEILA DO COUTO TRINDADE MORACO

**UM ESTUDO SOBRE OS CONHECIMENTOS GEOMÉTRICOS ADQUIRIDOS  
POR ALUNOS DO ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada ao Programa de pós-graduação em Educação para a Ciência (Área de Concentração: Ensino de Ciências), à Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Bauru, para obtenção do título de Mestre sob a orientação do Dr. Nelson Antonio Pirola.

Bauru  
2006

ANA SHEILA DO COUTO TRINDADE MORACO

**UM ESTUDO SOBRE OS CONHECIMENTOS GEOMÉTRICOS ADQUIRIDOS  
POR ALUNOS DO ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciência, da Faculdade de Ciências, da Universidade Estadual Paulista, Campus de Bauru, para a obtenção do título de Mestre em Educação para Ciência.

Banca Examinadora:

Presidente e Orientador: Prof. Dr. Nelson Antonio Pirola  
Instituição: Universidade Estadual Paulista, Departamento de Educação, Unesp-FC

Titular: Prof. Dra. Mara Sueli Simão Moraes  
Instituição: Universidade Estadual Paulista, Departamento de Matemática, Unesp-FC

Titular: Profa. Dra. Maria Helena C. González  
Instituição: Universidade Paulista - Campinas

Bauru, 30 de Setembro de 2006.

Para Osvaldo, Ana Beatriz e Ana Paula por me proporcionarem a alegria e a razão de viver;

Para Osvaldo, por estar ao meu lado e ajudar na realização desse sonho;

Para meu pai e minha mãe, por me proporcionarem a vida;

Para minhas irmãs, cunhados e sobrinhos pelo carinho e compreensão nessa jornada.

## Agradecimentos

A Deus, pela minha vida;

As minhas filhas Ana Beatriz e Ana Paula, pela compreensão e apoio;

Ao meu marido Osvaldo, pelo carinho e por compartilhar todas as minhas dificuldades;

Ao Professor Dr. Nelson Antonio Pirola, pela amizade e orientação, apoiando-me e incentivando-me para que este trabalho se concretizasse;

Às professoras Dra. Maria Helena C. González e Dra. Mara Sueli Simão Moraes, pelas contribuições dadas a esse trabalho;

Aos amigos e amigas do grupo de estudo de Psicologia em Educação Matemática, coordenado pelo Dr. Nelson A. Pirola, pela possibilidade de produção partilhada de saberes;

Aos funcionários da Faculdade de Ciências e da Pós-Graduação em Educação para Ciência, pela atenção e cordialidade com que sempre me atenderam;

A professora Simone Cristina Mussio, pela disponibilidade e atenção ao fazer a revisão do trabalho;

Aos professores e professoras com o (a)s quais tenho convivido e aprendido;

E a todos que direta ou indiretamente fazem parte da minha vida.

“Aprender é a única coisa de que a mente nunca se cansa, nunca tem medo e nunca se arrepende”.

Leonardo da Vinci

## RESUMO

A presente pesquisa teve como questão norteadora analisar os conhecimentos prévios e dificuldades apresentadas por alunos do Ensino Médio em tarefas envolvendo conceitos geométricos como figura plana e não plana, cubos e pirâmides, etc. Foram escolhidas três séries de uma escola pública do Estado de São Paulo, sendo sujeitos da pesquisa 81 alunos. Os instrumentos utilizados para a coleta de dados foram um questionário inicial para conhecimento de alguns dados dos alunos, como idade, gosto pela geometria, entre outros, e uma prova matemática avaliada numa escala de zero a dez pontos. A metodologia adotada foi a descritiva com abordagem qualitativa. A análise dos dados mostrou um desempenho muito baixo na avaliação envolvendo conceitos geométricos, sendo que a dificuldade na visualização e na representação geométrica, componentes do pensamento geométrico, constitui fatores que contribuíram para o desempenho insatisfatório dos participantes. Verificou-se, também, como apontado na literatura, um abandono do ensino da geometria espacial no Ensino Médio.

**Palavras-chave:** Educação; Geometria; Educação Matemática; Ensino/Aprendizagem.

## **ABSTRACT**

The present research had as norteadora question to analyze the previous knowledge and difficulties presented for pupils of Average Ensino in tasks being involved geometric concepts as plain figure and not plain, cubes and pyramids, etc. had been chosen three series of a public school of the state of São Paulo, being citizens of the research 81 pupils. The instruments used for the collection of data had been an initial questionnaire for knowledge of some data of the pupils, as age, taste for Geometry, among others, and a Mathematical test evaluated in a zero scale the ten points. The adopted methodology was to the descriptive with qualitative boarding. The analysis of the data very showed to a low performance in the evaluation involving Geometric concepts, being that difficulty in visualization and the geometric representation, component of the Geometric thought, constitutes factors that had contributed for the unsatisfactory performance of the participants. It was verified, also, as pointed in literature, an abandonment of the education of space Geometry in average education.

**Word-Key:** Education; Geometry; Education Mathematics; Education / Learning.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Construção do Triângulo equilátero	16
Figura 2: Relações entre conceitos	34
Figura 3: Cubo	36
Figura 4: Retângulo	37
Figura 5: Ilusões Triangulares	45
Figura 6: Representação Mental	46
Figura 7: Representação Aluno 5	73
Figura 8: Representação Aluno 6	73
Figura 9: Representação Aluno 12	73
Figura 10: Foto da Bicicleta	74
Figura 11: Representação Aluno 32	74
Figura 12: Representação Aluno 52	74
Figura 13: Representação Aluno 55	75
Figura 14: Representação Aluno 57	79
Figura 15: Representação Aluno 60	79
Figura 16: Representação Aluno 75	79
Figura 17: Representação Aluno 56	80
Figura 18: Representação do plano como uma reta	81
Figura 19: Representação de duas retas paralelas	82
Figura 20: Representação Aluno 35	83
Figura 21: Representação Aluno 64	83
Figura 22: Representação Aluno 56	90

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Distribuição dos sujeitos de acordo com as séries	63
Tabela 2: Em relação às questões foram consideradas as seguintes pontuações	66
Tabela 3: Média e desvio padrão por questão e por série na prova de Geometria	80
Tabela 4: Média e desvio padrão para o desempenho dos alunos em Geometria, distribuídos conforme a série	85
Tabela 5: Média e desvio padrão para o desempenho dos alunos em Geometria, levando em conta o gênero	85

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Respostas dadas à questão 1	68
Gráfico 2: Respostas dadas à questão 2	69
Gráfico 3: Etapa em que os participantes estudaram Geometria	69
Gráfico 4: O que os participantes mais sabem sobre Geometria	70
Gráfico 5: O gostar e o não gostar da Geometria	72
Gráfico 6: A importância de se estudar Geometria	72
Gráfico 7: Distribuição dos sujeitos de acordo com as respostas dadas para a questão “Você já ouviu falar em cubos e pirâmides”	75
Gráfico 8: Planificação de um cubo apresentada na questão 7	77
Gráfico 9: Figuras tridimensionais encontradas no nosso cotidiano	77
Gráfico 10: Dificuldades encontradas em responder as questões anteriores	78
Gráfico 11: Nota média dos alunos por questão	80
Gráfico 12: Desempenho por série	85
Gráfico 13: Desempenho por gênero	86

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	14
<b>CAPÍTULO 1: ASPECTOS HISTÓRICOS DA GEOMETRIA E O SEU ENSINO</b>	
1.1 Aspectos Históricos da Geometria	19
1.2 A Geometria e o seu Ensino	24
1.3 Objetivos do Ensino de Geometria	28
<b>CAPÍTULO 2: O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO E A PERCEPÇÃO</b>	32
2.1 Os Níveis do Pensamento Geométrico de Van Hiele	35
2.2 Nível 1- Visualização ou Reconhecimento	36
2.3 Nível 2- Análise	37
2.4 Nível 3- Dedução Informal ou Ordenação	37
2.5 Nível 4- Dedução Formal	38
2.6 Nível 5- Rigor	38
2.7 Percepção Geométrica e Representação Geométrica	44
<b>CAPÍTULO 3: REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	48
3.1 Habilidade Matemática e a Teoria de Van Hiele	48
3.2 Desempenho de Alunos na Solução de Problemas Geométricos	52
3.3 Conhecimento de Alunos e Professores no Ensino da Geometria	53
3.4 Uso da Informática para Aprendizagem Geométrica	57
<b>CAPÍTULO 4: METODOLOGIA</b>	61
4.1 Método	61
4.2 Escolha da amostra	62
4.3 Participantes	63
4.4 Instrumentos	63
4.5 Procedimentos para a Coleta de Dados e Critérios para Análise da Prova de Matemática	65
4.6 Estudo Piloto	66
<b>CAPÍTULO 5: ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS</b>	67
5.1 Análise Estatística Utilizada	67
5.2 Análise do Questionário	68
5.3 Análise do Desempenho na Prova de Conteúdo em Geometria	79
5.4 Análise de Comparação das Séries	84

CONSIDERAÇÕES FINAIS	87
REFERÊNCIAS	92
APÊNDICE	100

## INTRODUÇÃO

Durante quatorze anos, tive a oportunidade de trabalhar com alunos do Ensino Fundamental e Médio. Neste período, foi possível observar que as principais dificuldades encontradas pelos alunos estavam relacionadas com a utilização dos instrumentos geométricos (régua, compasso, transferidor, etc.) para a construção de figuras geométricas simples (triângulos, quadrados, etc.). A partir dessas construções, os alunos poderiam auferir os conceitos geométricos, desenvolver a percepção e a linguagem geométrica, compreender propriedades, discriminar os atributos relevantes dos conceitos, entre outras capacidades.

Devido a esse fato aumentou o meu interesse pela Psicologia da Educação Matemática – PEM – que é uma área interdisciplinar preocupada com as interações entre a Matemática e o pensamento humano. Esse campo, composto pela Psicologia e pela Educação Matemática, tem como objetivo, segundo Brito (2001, p.52) “[...] estudar o ensino e a aprendizagem da Matemática, bem como os demais fatores cognitivos e afetivos relacionados a essa disciplina”.

O Grupo Internacional da PEM (Psicologia da Educação Matemática) teve origem durante o Terceiro Congresso Internacional de Educação Matemática realizado na Alemanha. No Brasil, o Grupo existe desde 1996 junto à Associação Nacional de Pesquisa e Pós-Graduação em Psicologia – ANPEPP.

Os principais temas investigados pelos pesquisadores dessa área são: atitudes em relação à Matemática, habilidades matemáticas, formação de conceitos, resolução de

problemas, entre muitos outros. Um tema que tem sido destaque das pesquisas na área da Psicologia da Educação Matemática, diz respeito ao pensamento geométrico.

Vários estudos, como os de Pavanello (1993), Pirola (1995), Pirola (2000), Viana (2000), Rezi (2001), têm sido realizados, mostrando que o ensino de Geometria na educação escolar fica relegado a um plano secundário, e que a ênfase se concentra no ensino da Aritmética e da Álgebra. Esses estudos mostraram, ainda, o desempenho desfavorável de alunos da escola básica em tarefas envolvendo conceitos e resolução de problemas no campo da Geometria. Pirola (1995, 2000), por exemplo, mostrou que os alunos terminam o Ensino Fundamental sem o conhecimento conceitual de figuras geométricas básicas, como triângulo, quadrado, paralelogramo e losango.

Essa realidade é considerada caótica, uma vez que o trabalho com as figuras geométricas planas é (ou deveria ser) desenvolvido desde a Educação Infantil. Um outro estudo que analisou o desempenho de alunos em tarefas de Matemática foi o de Brito et. al. (1998), que investigaram as competências Matemáticas necessárias adquiridas por estudantes nas séries iniciais do Ensino Fundamental, concluindo que as atividades referentes à Geometria apresentaram baixo percentual de acertos.

Os autores consideraram que esse desempenho insatisfatório era devido, em grande parte, ao abandono do ensino de Geometria nas escolas do país.

Conforme Pirola (1995), a grade curricular das escolas da rede pública do Estado de São Paulo tinha uma disciplina chamada Desenho Geométrico, que foi abolida em 1983. Porém, era nessa disciplina que os alunos tinham oportunidade de realizar construções geométricas e entender melhor sua representação. A incorporação do Desenho Geométrico às aulas de Matemática possibilitou ao professor dar mais ênfase aos cálculos que às construções geométricas. Este fato constitui-se num problema para a construção, representação e entendimento de conceitos geométricos e propriedades das figuras planas e espaciais, elementos importantes para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Como exemplo e ilustrando as possibilidades de compreensão de conceitos geométricos, via construções com régua e compasso, vamos considerar a construção de um triângulo equilátero.

1- Inicialmente devemos construir um ângulo de  $60^\circ$ . Para isso, toma-se um segmento de reta AB com uma medida x cm.

2- Com o centro do compasso em A, é traçado um semicírculo, cuja intersecção com AB é C. Com a mesma abertura do compasso (medida AC), centra-se o mesmo em C e cruza o semicírculo obtendo D.

3- O ângulo DAC mede  $60^\circ$ , pois pela construção, o triângulo DAC é equilátero, uma vez que seus lados são congruentes.

4- Com a medida AB, centra-se o compasso em A e é marcado um arco. Com essa mesma medida centra-se o compasso em B e marca-se um outro arco, obtendo o ponto E. Dessa forma, construímos o triângulo ABE, que é equilátero.

Através dessa construção os alunos têm a possibilidade de fazer a representação, utilizar propriedades do triângulo equilátero, trabalhar com ângulos, compreender o processo de construção e adquirir conceitos de forma mais significativa.

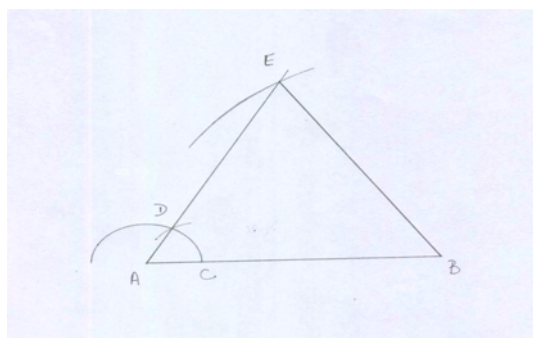


Figura 1: Construção do triângulo equilátero

As construções geométricas podem auxiliar os estudantes na discriminação entre figuras planas e não-planas, bem como auxiliá-los a identificar os atributos definidores<sup>1</sup> de cada figura. Dessa forma, pretende-se evitar erros de generalização, como aqueles apontados na pesquisa de Pirola (1995) em que estudantes da escola básica confundem o conceito geral de triângulo com o conceito particular de triângulo equilátero.

Uma vez que os alunos já aprenderam (ou deveriam ter aprendido) os principais conceitos de Geometria Plana e Espacial, no Ensino Fundamental, deveriam ser capazes de aprofundar esses conceitos relacionados à Geometria Espacial de Posição e Métrica. Para que isso ocorra, é importante que o professor do Ensino Médio

---

<sup>1</sup> Utilizaremos o termo atributos definidores para indicar as características de cada figuras. Por exemplo: figura plana, segmentos de reta, figura simples, três vértices etc são alguns atributos definidores do triângulo.



investigue os conceitos prévios que os alunos já construíram no Ensino Fundamental e analise se os mesmos conseguem utilizar a linguagem e símbolos próprios da geometria. A análise dos conceitos prévios formados pelos alunos é importante no processo de ensino e aprendizagem, pois conceitos mal formados, ou formados de forma equivocada podem interferir na aquisição de novos conceitos. Segundo Ausubel, teórico da aprendizagem significativa, de todos os fatores que interferem na aprendizagem de conceitos, o mais importante é o que o aluno já sabe. Esse autor recomenda que esse fator (conhecimento prévio) seja investigado pelos professores para direcionar o ensino de novos conceitos.

Tendo em vista a importância que a Geometria tem no desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, é que a presente pesquisa foi formulada, com o seguinte objetivo:

- 1- Analisar os conhecimentos geométricos adquiridos por alunos do Ensino Médio (figura plana e não plana, cubos e pirâmides, etc.).
- 2- Verificar o domínio de alguns dos termos conceituais e representacionais referentes à Geometria.

Espera-se que, como resultado, a discussão apresentada nesta pesquisa propicie aos professores e aos educadores da área de Educação Matemática uma reflexão e análise crítica de sua prática pedagógica, contribuindo, assim, para um ensino da Geometria de boa qualidade.

A dissertação foi estruturada da seguinte maneira:

No primeiro capítulo são abordados alguns aspectos da história da geometria e do seu ensino, ressaltando os objetivos e a importância de se ensinar Geometria na escola.

O segundo capítulo trata da percepção geométrica em que o reconhecimento de figuras geométricas parece não estar ligado à percepção, principalmente nos conceitos ensinados de Geometria. Foi utilizado o método de Van Hiele (esta teoria foi desenvolvida pelo casal Van Hiele na década de cinquenta) que afirma que o aluno alcança níveis de pensamento geométrico enquanto aprende conceitos em Geometria.

Já no terceiro capítulo foi feita uma revisão bibliográfica de trabalhos apresentados atualmente em congressos e pesquisas científicas dos últimos anos e procurou-se analisar os trabalhos que enfocaram a habilidade matemática e a teoria de

Van Hiele. Posteriormente apresentam-se os trabalhos sobre o desempenho de alunos na solução de problemas geométricos, e em seguida, o conhecimento de discentes e docentes no ensino da Geometria. Por último, foram analisados alguns trabalhos desenvolvidos utilizando a informática para aprendizagem de Geometria.

No quarto capítulo é apresentada a Metodologia da Pesquisa desenvolvida numa investigação qualitativa, num método descritivo. Foram escolhidos 81 alunos, distribuídos em 1º, 2º, e 3º séries do Ensino Médio da rede pública do Estado de São Paulo. As informações coletadas e todo o conhecimento teórico desenvolvido na pesquisa foram de fundamental importância para esse trabalho. Os instrumentos utilizados foram do tipo lápis e papel e se constituiu em um questionário de 9 questões e uma prova matemática com 14 questões para avaliar o conhecimento prévio e geométrico dos alunos.

Por último, no quinto capítulo, foram feitas análise e discussão dos resultados, culminando com as considerações finais. Esta pesquisa buscou analisar os conhecimentos geométricos e teve como objetivo verificar as principais dificuldades apresentadas em termos conceituais e representacionais.

## **CAPÍTULO 1**

### **ASPECTOS HISTÓRICOS DA GEOMETRIA E O SEU ENSINO**

#### **1.1 ASPECTOS HISTÓRICOS DA GEOMETRIA**

Os estudos sobre a história da Geometria parecem mostrar que não havia entre os gregos uma diferenciação entre desenho geométrico e Geometria. O primeiro aparecia simplesmente na forma de problemas de construções geométricas, após a exposição de um item teórico dos textos de Geometria. Assim, pode-se dizer que o Desenho Geométrico é um ramo da Geometria que, com auxílio de dois instrumentos, a régua e o compasso, se propõem a resolver problemas de natureza prática e teórica. O segundo, a Geometria, é a parte da Matemática que estuda o espaço e as formas. Em relação à última, ela trata de problemas métricos, como o cálculo da área, da superfície e volume de corpos sólidos. Em relação ao espaço, ela trata, entre outras coisas, da orientação espacial e da percepção. Desde o início da existência do homem, a Geometria apareceu-lhe de forma natural, a partir de suas experiências cotidianas. Observando os objetos da natureza (flores, frutos, rochas etc.), o homem começou a distinguir as diferentes formas, como esféricas, triangulares, quadrangulares, circulares, etc., aprendendo também a fazer representações planas dessas figuras nas rochas.

A origem da Geometria aparece ligada à experiência da vida prática, como o cálculo de área, construção de habitações, etc. Acredita-se que a noção de distância foi sem dúvida um dos primeiros conceitos geométricos a serem desenvolvidos. As atividades como observações, comparações entre formas e tamanhos, conceitos de verticalidade e horizontalidade, entre outros, estão presentes nas civilizações antigas. Sendo assim, medir as terras para limitar propriedades era uma tarefa resolvida principalmente no Egito.

Por volta de 300 a.C., situado às margens do rio Nilo, desenvolveu-se entre muitas outras civilizações, o Egito. Esse rio teve influência marcante sobre o desenvolvimento econômico, social e político nessa cultura. Todos os anos, de junho a setembro, as chuvas junto às nascentes faziam o Nilo transbordar. Isso levou os egípcios a construir diques impedindo a inundações próximas dos vilarejos, a abrir canais para irrigação, formarem reservatório de água em decorrência da época das secas, além de utilizar o rio como transporte e comunicação. Dessa maneira, os antigos egípcios devem ter obtido os princípios por intermédio da observação e da experimentação (raciocínio indutivo).

O historiador grego Heródoto (480 a 425 a.C.) relata que a Geometria teria nascido no Egito: *'a geometria é um dom do Nilo'*. Isso porque as inundações frequentes daquele rio obrigavam os geômetras (no sentido de experts em Geometria; eles eram chamados de *'esticadores de corda'*) a redefinir com precisão os limites dos campos (BERDONNEAU, C. e ABERKANE, C.F., 1997, p. 176).

O ato de medir terras próximas ao rio e redividi-las estava atrelado ao contexto sócio-político e econômico daquela época. As terras que circundavam o vale do Nilo se apresentavam em condições ideais para a agricultura devido à quantidade de humos deixada pelas enchentes. O rei dividia as terras e cobrava “impostos” referentes ao tamanho de cada área. Desse modo, por ocasião das chuvas torrenciais, algumas áreas eram tomadas pelo rio, sendo necessárias novas demarcações para o controle econômico.

Heródoto (V a.C.) defendeu essa tese assim: Eles diziam que este rei (Sesóstris) dividia a terra entre os egípcios de modo a dar a cada um deles um lote quadrado de igual tamanho e impondo-lhes o pagamento de um tributo anual. Mas qualquer homem despojado pelo rio de uma parte de sua terra teria de ir a Sesóstris e notificar-lhe o ocorrido. Ele então mandava homens seus observarem e medirem quanto a terra se tornara menor, para que o proprietário pudesse pagar sobre o que restara, proporcionalmente ao tributo total (EVES, 1992, p.3).

Foi nesse contexto histórico que os egípcios se habilitaram a resolver problemas relacionados à comparação de áreas e construções. Podemos considerar que essa civilização foi o berço da Geometria, a qual se transformou, posteriormente, em científica. A etimologia da palavra provém do grego geo = terra e metria = medida. Dessa forma, Geometria é a medida de terra.

As mudanças econômicas e políticas no final do II milênio proporcionaram o desenvolvimento de novos povos, dentre eles os gregos.

Segundo Barker (1969),

os gregos perceberam o que os egípcios eram capazes de fazer, e assimilaram seus princípios empíricos. Ao conhecimento assim delimitado, os gregos deram nome de geometria – isto é, medida da terra (BARKER, 1969, p. 16).

Durante muitos séculos, os gregos utilizaram os princípios práticos da Geometria adquiridos no Egito, para estudos teóricos.

O centro das atividades intelectuais da Grécia foi a Escola de Platão, em Atenas. A cidade de Atenas foi fundada pelos Jônios na região sudeste da Grécia. Seu território era seco e montanhoso. Diante dessas dificuldades, a população ateniense recorreu ao mar para abastecer-se de gêneros de primeira necessidade. Com isso, desenvolveu-se um comércio intenso proporcionando conquistas, bem estar e educação para os habitantes dessa região.

A educação de Atenas visava desenvolver nos cidadãos um conjunto harmonioso das qualidades da mente e do corpo. Na opinião de Lintz (1999, p.100) “O século IV a.C. caracterizou-se, do ponto de vista político, pela estabilização do regime democrático em Atenas”.

Neste regime político e com a participação de todos os cidadãos, a Academia de Platão se estruturou. Nessa época alguns filósofos gregos como Pitágoras e Platão consideravam a Geometria como construção intelectual em sua forma pura e abstrata.

Os gregos insistiram em que os fatos geométricos deviam ser estabelecidos, não em procedimentos empíricos, mas por raciocínios dedutivos; as verdades geométricas deviam ser obtidas no gabinete de estudos, e não no laboratório. Em suma, os gregos transformaram a geometria empírica, ou científica, dos egípcios e babilônios antigos no que poderíamos chamar de geometria ‘sistemática’ ou ‘demonstrativas’ (EVES, 1992, p. 7).

Para Platão, a construção dos conhecimentos matemáticos se dava através de demonstrações geométricas dedutivas. Na escola platônica nascem os primeiros elementos de Geometria. Para os platônicos, esses elementos só existiam como perfeitos no mundo das idéias. As representações eram consideradas irrealis e imperfeitas.

Certamente, nesse contexto, foi criada a forma postulacional de raciocínio de Euclides. Influenciado pelas idéias de Platão (450-380 a. C) escreve os “*Elementos*” numa série de 13 livros dedicados aos fundamentos da Geometria.

De acordo com Eves (1992)

Euclides produziu sua obra memorável, os Elementos, uma cadeia dedutiva única de 465 proposições compreendendo de maneira clara e harmoniosa geometria plana e espacial, teoria dos números e álgebra geométrica grega (EVES, 1992, p. 12 ).

Já para Barker (1969), os estudos de Euclides foram propostos como leis de forma rígida e verdadeira, visto que não se preocupou em experimentar ou observar as irregularidades de seus pressupostos, mas procurou desenvolver tais conclusões a partir da lógica. Para o autor, as leis são anunciadas de maneira “*universal*” e ao invés de limitar-se a “*enunciar*” as leis geométricas; “*demonstra-as*”. Conclui ainda o autor, que tais demonstrações são baseadas num “*raciocínio circular*”, não estabelecendo, assim, a verdade de suas conclusões.

Uma demonstração (pelo menos no sentido comum da palavra) é uma cadeia de raciocínios que nos permite asseverar uma conclusão mostrando que ela decorre logicamente de certas premissas sabiamente verdadeiras. Não existe demonstração a menos que se possa partir de uma ou mais premissas conhecidas – a base sobre que se assenta a “demonstração” (BARKER, 1969, p. 29).

Apesar do postulado das paralelas ser criticado, o trabalho de Euclides preparou o caminho para geometrias não-euclidianas. E, na transição entre o século XVIII e o século XIX Carl Friedrich Gauss, matemático alemão, dominava os estudos da geometria curva, isto é, geometria não-euclidiana.

A expressão de Gauss “Geometria não-euclidiana” foi aplicada aos estudos geométricos de Lobachevski e Riemann.

Riemann generalizou a noção de curvatura, introduzida por Gauss, de modo a poder aplicá-la também ao espaço tridimensional, possibilitando-nos falar da curvatura de regiões do espaço tridimensional, ou seja, de quanto à geometria e um volume do espaço difere da geometria euclidiana (BARKER, 1969, p. 53).

Desse modo, Riemann desenvolve seus conhecimentos não através de critérios postulacionais, mas embasando na generalização e ampliação da noção de curvatura antes estudada por Gauss.

A geometria ensinada na Escola Básica é chamada de Geometria Euclidiana, e é composta da Geometria plana e espacial. As Geometrias não euclidianas, como a de Riemann, só são trabalhadas no ensino superior. De acordo com Van Hiele, pesquisador que formulou uma teoria sobre o pensamento geométrico, o trabalho com as Geometrias não-euclidianas desenvolve o mais elevado tipo de pensamento, denominado de rigor, o que não seria atingido com a escolaridade básica.

## 1.2 A GEOMETRIA E O SEU ENSINO

O “abandono” ou a “omissão” do ensino de Geometria no Ensino Fundamental e Médio tem sido objeto de muita discussão entre educadores matemáticos. Este fato tornou-se mais evidente, principalmente após a promulgação da Lei 5692/71<sup>2</sup>, que deu certa autonomia às escolas quanto à decisão sobre os programas inseridos em sala de aula, referentes às disciplinas.

O abandono do ensino da Geometria parece não ocorrer somente na Escola Básica. Pesquisas, como de Lorenzato (1995) e de Pirola (2000), mostraram que professores e futuros professores de Matemática não possuíam conhecimentos de conceitos básicos de Geometria, o que acarretou um baixo desempenho na resolução de problemas que envolviam conceitos geométricos.

Os trabalhos de Perez (1991) e Pavanello (1993) também tiveram como tema central a Geometria e relacionam inúmeras causas que têm contribuído para o abandono do ensino dessa disciplina. Entre elas, estão os programas de formação de professores, que, muitas vezes, priorizam somente as áreas didáticas da Matemática, deixando de lado a parte de conceitos matemáticos. Muitas vezes prioriza-se o "como ensinar", deixando em um plano secundário o trabalho que visa à formação de conceitos geométricos.

Um outro estudo que investigou o desempenho de alunos e professores em tarefas envolvendo a Geometria foi o de Lorenzato (1993). Esse autor verificou que a minoria dos professores participantes do estudo sinalizou a tentativa de ensinar Geometria aos alunos. Dessa forma, a maioria dos professores entrevistados ou ensinavam o que não conheciam, ou não ensinavam a Geometria, pois muitos confessaram que não armazenavam conhecimento geométrico necessário para realização das práticas pedagógicas referentes ao ensino dessa disciplina. Com isso, apontaram que os livros didáticos apresentavam apenas um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas desligados de quaisquer aplicações ou explicações de natureza histórica ou lógica, além de quase sempre serem apresentadas no final do livro, aumentando a probabilidade de a Geometria não vir a ser estudada por falta de dias letivos. Alguns estudos, como os de Pirola (2000), mostraram que o abandono da

---

<sup>2</sup> Lei 5692/71, Cujo 2º. Grau era para preparar os alunos para seguir nos estudos e habilitar para uma profissão técnica.



Geometria também parece ocorrer em cursos de formação de professores, tanto no nível médio como no universitário. A pesquisa desse autor, investigando o desempenho de alunos do Curso de Magistério e de Licenciatura em Matemática, mostrou que conceitos básicos como os de área, perímetro e volume não eram bem compreendidos por eles. Segundo esse autor, dá-se mais ênfase aos procedimentos de cálculos e uma redução de importância ao desenvolvimento dos conceitos. Muitos alunos são capazes de calcular a área de um triângulo, mas quando questionados sobre o conceito de área, esses mesmos alunos demonstram desconhecimento desse conceito em termos de seus atributos definidores (características dos conceitos) e de seus exemplos e não-exemplos.

Outro aspecto que tem influenciado de maneira insatisfatória o ensino de conceitos é o uso exagerado ou quase exclusivo do livro texto, que muitas vezes não propõe articulações entre a Geometria e outros ramos do conhecimento, como a Geografia, a Astronomia, as Artes, a Arquitetura etc. O que se percebe é que o professor tem destinado pouco tempo do período letivo ao ensino da Geometria.

Um outro fator que tem contribuído para o abandono do ensino da Geometria em nossas escolas refere-se ao ensino dessa disciplina nos cursos superiores. Como ela nem sempre é ensinada nas escolas, muitos alunos que ingressam nas Licenciaturas em Matemática levam consigo conceitos mal formados ou formados de maneira mecânica (memorização arbitrária de fórmulas e procedimentos prontos e acabados). Além disso, muitos professores partem do princípio de que os alunos que entram nas universidades já conhecem os elementos básicos da Geometria do Ensino Fundamental e Médio, e isso nem sempre é uma realidade.

Os cursos de formação inicial de professores devem contemplar disciplinas básicas de Geometria para um melhor equilíbrio dos conceitos geométricos que os alunos já trazem do Ensino Médio. A partir deles é que os conhecimentos geométricos mais formais poderão ser resgatados da estrutura cognitiva, possibilitando aos alunos a compreensão de geometrias não-euclidianas.

Pavanello (1993) e Pirola (2000) observaram que a ênfase do Ensino Médio, principalmente na atualidade, tem-se centrado na valorização da Álgebra e, conseqüentemente, no abandono do ensino de Geometria. Isso pode prejudicar a formação dos alunos, pois dificulta aos estudantes desenvolverem componentes básicos do pensamento geométrico, como a orientação espacial, a percepção, a representação, etc.

Estudos têm mostrado não somente dificuldade por parte de alunos e professores em conceitos básicos da Geometria Plana, mas também em Geometria Espacial. Nasser (1992), Oliveira (1998), Pirola (1995), Viana (2000), verificaram que as dificuldades de os alunos reconhecerem as figuras geométricas (planas e tridimensionais) mais simples refletem as conseqüências desse abandono. Esses autores têm chamado a atenção sobre essa negligência, propondo formas de aperfeiçoar esse ensino.

Preocupados com os rumos do ensino de Geometria, pesquisadores, em todo o mundo, têm concedido destaque ao tema “o que” ensinar de Geometria e “como” fazê-lo. Em conseqüência disso, seria necessário resgatar a qualidade do ensino da Geometria, para ressaltar a necessidade de se cultivar e desenvolver não apenas os pensamentos seqüenciais lógicos, que são preponderantes na Álgebra, mas principalmente a percepção, dominantes na Geometria, já que ambos, pensamento lógico e percepção, são essenciais aos problemas matemáticos desenvolvidos geometricamente.

Os estudos de Pirola et. al. (2003) mostraram que o ensino da Geometria Espacial também apresenta problemas de ordem conceitual e procedimental. Esses autores investigaram o desempenho de alunos do Ensino Médio em tarefas envolvendo conceitos de polígonos e poliedros. No que diz respeito aos poliedros, foi verificado que os participantes, em sua maioria, apresentavam dificuldades na discriminação entre figuras planas e não-planas, o que dificultava o entendimento do conceito de poliedro.

Para Carvalho (1999), é no final do Ensino Médio que geralmente ocorre a transição da Geometria Plana (noções bidimensionais de polígonos, ângulos, etc) para a Geometria Espacial (noções tridimensionais de prismas, cones, etc.) o que é, para muitos alunos, de difícil compreensão. Esse autor destaca uma dessas dificuldades, que está relacionada à representação plana de figuras tridimensionais.

Quando passamos para o mundo tridimensional da Geometria Espacial passamos a enfrentar limitações de diversas ordens. Em primeiro lugar, pelo menos com a tecnologia atual, não dispomos de uma forma prática para representar com fidelidade objetos tridimensionais. Em geral recorremos a projeções bidimensionais de tais objetos (CARVALHO, 1999, p. 1).

A Geometria Espacial se preocupa em examinar as propriedades de figuras que, na opinião de Carvalho (1999, p. 4) “[...] são constituídas a partir de certos elementos básicos do espaço: o ponto, a reta e o plano”.

Esses elementos são denominados de elementos primitivos. A compreensão desses elementos bem como os postulados que os caracterizam são importantes para o entendimento das figuras espaciais.

Quando os alunos do Ensino Médio são inseridos no estudo da Geometria Espacial, os professores, pelo menos em sua grande maioria, pressupõem que os estudantes já dominam os conceitos básicos da Geometria Plana, o que nem sempre é verdadeiro. Um modo de tentar amenizar os problemas causados pela transição da geometria plana para a espacial é inverter o processo. Ao invés de começar o estudo com a geometria plana, é possível começar esse estudo pela geometria espacial, como preconizam as Propostas Curriculares de Matemática do Estado de São Paulo e os Parâmetros Curriculares Nacionais.

Segundo a Proposta Curricular de Matemática do 2º Grau (1992), a Geometria deve ser ensinada a partir de definições de objetos concretos encontrados no dia-a-dia, onde serão contextualizadas as formas geométricas para reconhecimento, nomenclatura, construção, representação, relações métricas simples. Por exemplo: levar embalagens de sólido geométrico para, inicialmente, classificar esses sólidos, e depois, identificar suas arestas, faces, vértices, etc.

Realizar a construção dos objetos em perspectivas; aprende-se a distinguir neles os elementos fundamentais que caracterizam sua forma, contribuem para aprendizagem de sua representação no plano. O uso da perspectiva na representação de sólidos geométricos é fundamental no estudo da Geometria, compondo a fase intermediária entre o mundo real dos objetos e o estudo formal das propriedades geométricas e métricas desses sólidos.<sup>3</sup>

Através da planificação dos sólidos é possível que os alunos compreendam as diferenças entre figuras planas e não-planas, os atributos definidores e propriedades dos polígonos.

---

<sup>3</sup> Proposta Curricular de Matemática do 2º. Grau (1992; p.370)

### 1.3 OBJETIVOS DO ENSINO DE GEOMETRIA

A reformulação do Ensino Médio no Brasil, estabelecida pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN), de 1996, quanto aos temas com os quais se pode organizar ou estruturar o ensino, a competência e habilidade constituem uma composição de elementos curriculares.<sup>4</sup>

Portanto, competências e habilidades são desenvolvidas em conjunto e se reforçam reciprocamente. Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras para o pensamento do aluno, capacitando-o a compreender e a interpretar situações necessárias para sua formação.

A Geometria é essencial à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida cotidiana. No Ensino Médio, trata-se de estudar as formas planas e tridimensionais e suas representações em desenhos, planificações, modelos e objetos do mundo concreto.

O desenho é um instrumento que pode ajudar o aluno do Ensino Médio a entender melhor a Geometria Espacial. No desenvolvimento dos exercícios e no investimento nas suas capacidades, o aluno cria o desenho pela exploração de diferentes soluções de representação e pelo desenvolvimento das formas e composição. Procura também desenvolver uma maior capacidade de criar novos conceitos e estilos para sua representação.

Segundo Viana (2000), embora o uso de objetos e desenhos seja necessário na formação de conceitos, tem-se que ter em mente que esses conceitos serão incorporados no nível formal quando o aluno fizer uma leitura geométrica dessas representações.

Tanto objetos como desenhos são leituras bastante significativas para a formação desses conceitos. Nesse sentido, a representação mental dos objetos, por meio de imagens, também deve se constituir em um objetivo do ensino da Geometria.

Sherard III (1981) ressalta a importância da Geometria e salienta que a aprendizagem dessa área da Matemática fornece oportunidade de desenvolver a

---

<sup>4</sup> Termos são utilizados nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), ou no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

percepção espacial, mostrando que essa disciplina serve de veículo para estimular e exercitar habilidades de pensamento e de solução de problemas espaciais, fornecendo aos estudantes oportunidade de olhar, medir e abstrair essas representações. Além disso, a Geometria contribui com uma valiosa preparação dos indivíduos que desejam optar por carreiras que requerem habilidades geométricas.

Brito e Pirola (2001, p. 89) elencaram alguns problemas referentes aos conceitos e à Geometria proposta por Klausmeier (1977). Esses problemas estão relacionados a seguir:

- A Geometria é apresentada no final dos livros didáticos e, por essa razão, muitos professores alegam que não dispõem de tempo para desenvolver trabalhos com esse conteúdo. Embora muitos livros didáticos tenham modificado a ordenação dos temas, alguns deles iniciando com a geometria para "forçar" o professor a começar os conteúdos por ela, esse fato parece não ter modificado a situação do ensino da Geometria, pois o professor tem a liberdade de "pular" esse conteúdo.

- A relação que existe entre a aprendizagem da Álgebra e da Geometria raramente é apresentada de forma contextualizada aos alunos. Os conceitos são apresentados apenas como definições e são trabalhados poucos exemplos, são solicitados a resolver uma grande quantidade de exercícios que não avaliam a aprendizagem do conceito, mas sim, a habilidade em trabalhar com fórmulas e regras a serem seguidas. O ensino de Matemática ainda continua sendo processado em blocos: bloco da Geometria, dos números, das medidas, da álgebra etc., não havendo relações entre eles.

- Não existe vinculação entre as figuras planas (propriedades, atributos definidores, atributos relevantes e irrelevantes) e as construções executadas com os instrumentos geométricos (compasso, régua, etc.). Atualmente, no currículo escolar das escolas da rede pública do Estado de São Paulo, foi abolida a disciplina Desenho Geométrico. Com ela os alunos tinham a oportunidade de realizar construções geométricas. Atualmente essas aulas foram incorporadas à disciplina Matemática, e o professor, muitas vezes, sem a necessária preparação, passa a ensinar Geometria com ênfase maior em cálculo, abdicando do uso da régua e do compasso. Porém era com o uso desses instrumentos que o aluno obtinha uma habilidade geométrica que poderia e deveria ser aprendida na escola.

- Há uma desvinculação entre a Geometria Plana e a Espacial. Além disso, Geometria Espacial ensinada somente no Ensino Médio e a Geometria de Posição está desaparecendo dos livros didáticos. O estudo da Geometria de Posição é extremamente importante, pois através dela o estudante pode desenvolver a habilidade de representação (pictórica), a habilidade de trabalhar com a linguagem geométrica e seus símbolos, e a habilidade de trabalhar com retas e planos no espaço.

- A Geometria é ensinada separadamente, sem o estabelecimento de elos e relações com outras ciências, como a Astronomia e a Engenharia, por exemplo. Provavelmente, para os alunos, seria muito mais interessante aplicar os conceitos de razão e de proporção em escalas, mapas, gráficos, etc., para compreender exercícios do tipo “calcule  $x$  nas proporções”. Isto não indica que esse tipo de exercício não tenha validade, mas é importante que o exercício tenha significado para o aluno e não fique apenas sua representação mecânica.

- Muitos professores, por várias razões, não se esforçam em preparar atividades ou mesmo trabalhar outros recursos que propiciem uma aprendizagem efetiva, apoiando-se unicamente nos livros didáticos.

- O número de exemplos e não-exemplos do conceito a ser ensinado é muito reduzido, assim, os não-exemplos quase não aparecem nos textos e nas aulas de Geometria e os professores não exploram esse recurso suficientemente. Por exemplo, ao ensinar que os polígonos são figuras planas, faz-se necessário mencionar que os sólidos geométricos, de acordo com seus atributos, não estão incluídos na classe dos polígonos.

Para que o Ensino de Matemática proporcione aos alunos o desenvolvimento de algumas habilidades, como, ser capaz de solucionar problemas que envolvam conceitos geométricos, é importante que isto ocorra de uma forma não isolada e sem relação com outros conceitos, mas de uma maneira ordenada, fazendo com que o aluno chegue à solução adequada e significativa do problema. Hoje, com o estabelecimento da Educação Matemática, como uma área forte em pesquisa, evidencia-se uma grande preocupação com o ensino de Matemática em geral e, em decorrência, uma parte dessa preocupação volta-se para o ensino de Geometria.

É importante salientar que a aprendizagem da Geometria possibilita o desenvolvimento de várias habilidades. Entre elas podemos citar: levantamento de hipóteses, experimentação, validação de resultados e de processos, comunicação de idéias, representação, entre muitas outras.

Dada uma situação-problema, é possível levantar várias hipóteses sobre possíveis soluções para o problema. Através da experimentação e das representações, essas hipóteses podem ser validadas ou refutadas. A partir dos resultados obtidos é possível comunicar, com coerência e com argumentos, os procedimentos utilizados na resolução.

Seja a seguinte situação-problema: Qual a soma dos ângulos internos de um quadrilátero? A partir dessa situação muitas hipóteses podem ser formuladas. Algumas pessoas podem responder que é  $360^\circ$ , tendo em vista que o quadrado tem quatro ângulos retos. Embora muitas pessoas saibam que realmente a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é  $360^\circ$ , os argumentos nem sempre são coerentes. A próxima etapa é fazer a experimentação, para a qual pode-se adotar a utilização de atividades que favoreçam o desenvolvimento das relações supra-ordenadas e que, de acordo com Klausmeier (1977), parte de exemplos específicos para se chegar ao princípio geral. Pode-se fornecer às pessoas quadriláteros de diferentes tamanhos e formas, incluindo os convexos e não-convexos. Com o auxílio do transferidor, a medição dos ângulos pode ser feita, verificando, ainda, se as hipóteses levantadas inicialmente são validadas ou não. A partir dessa experimentação é possível comunicar todo o processo realizado e se chegar a uma generalização sobre a soma dos ângulos internos de um quadrilátero. Todas essas habilidades citadas anteriormente favorecem o desenvolvimento do pensamento geométrico e possibilita aos alunos uma compreensão mais eficaz sobre situações-problema que envolve os objetos de estudo da Geometria - o espaço e as formas.

## **CAPÍTULO 2**

### **O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO E A PERCEÇÃO**

A formação de conceitos matemáticos é um tema importante pesquisado por estudiosos, principalmente ligado à área da Psicologia da Educação Matemática. Estudos, como os de Pirola (1995), mostram que um dos objetivos do ensino da Matemática escolar é a formação de conceitos. No que diz respeito à Geometria, pretende-se que os alunos os aprendam de maneira significativa, em que cada conceito aprendido possa ser relacionado a outros que já armazenaram e que estão disponíveis em suas estruturas cognitivas. Dessa forma, a transferência conceitual de uma situação-problema para outra pode ser facilitada.

Usando a distinção feita por Klausmeier (1977) e utilizada nos estudos de Pirola (1995) e Viana (2000), pode-se diferenciar o conceito em dois grandes conjuntos não disjuntos: conceito como entidade pública (que é entendido como uma informação organizada, como definição aceita pelas pessoas de uma determinada área de conhecimento ou pelos membros de uma mesma comunidade, e, portanto, aparecem nos livros, dicionários, enciclopédias, etc.), e conceito como construto mental do indivíduo (refere-se às idéias que cada um desenvolve a fim de pensar sobre o mundo físico e social e que são adquiridos a partir das experiências dos sujeitos). Quando dizemos a palavra cachorro, certamente aparece em nossa mente uma imagem desse animal, que é



resultante de nossa experiência cotidiana. O que pensamos sobre o cachorro (conjunto de idéias) é o construto mental. Quando dizemos que o cachorro é um quadrúpede, mamífero, com pêlos, etc., estamos considerando o conceito desse animal como entidade pública, o que é mais elaborado e constituído por atributos que o definem.

Os estudos de Pirola (1995, 2000), Quintiliano e Proença (2003) mostraram que os participantes dos estudos demonstraram muita dificuldade em identificar os conceitos como entidade pública de polígonos, poliedros, área, perímetro, volume, triângulo, etc. Embora esses sujeitos, possivelmente tenham desenvolvido durante a escolaridade os conceitos como construto mental, os mesmos não conseguiram expressá-los na Geometria, relacionados a seus atributos. Esse fator é preocupante, uma vez que os alunos terminam o Ensino Médio não conseguindo realizar distinções entre triângulo e pirâmide, quadrado e cubo, etc.

Embora as pesquisas acadêmicas apontem essas defasagens, as constantes avaliações governamentais, como SARESP (sistema de Avaliação do Rendimento do Estado de São Paulo) e SAEB (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica) aplicadas nas escolas brasileiras, também mostram baixo desempenho dos alunos em conceitos básicos da Matemática e, em especial, da Geometria.

Aprender Geometria é estabelecer relações significativas numa extensa rede conceitual, a qual, quanto mais entrelaçada estiver, maior possibilidade terá de propiciar ao aluno o domínio nessa área do conhecimento (VIANA, 2000, p. 10).

Isso quer dizer que os conceitos geométricos não devem ser aprendidos desvinculados de outros conceitos. Deve-se levar em consideração as relações subordinadas (do conceito geral ao específico) e as relações superordenadas (do conceito específico ao geral). A ilustração abaixo mostra relações entre os conceitos que podem facilitar a aprendizagem conceitual.

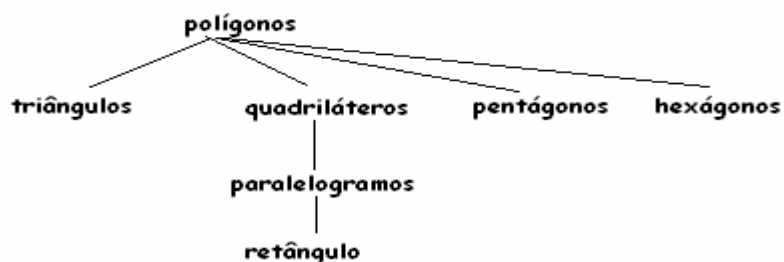


Figura 2: Relações entre conceitos

Pela figura acima, tomamos como base o conceito de retângulo. A partir da ilustração é possível perceber todas as inclusões de classes. Por exemplo: o retângulo é um paralelogramo, é um quadrilátero e é um polígono. Dessa forma estabelecemos uma relação superordenada para o conceito de retângulo. Essa figura pode ser ampliada, dependendo do conceito no qual estiver trabalhando.

O manuseio com a Geometria desenvolve a habilidade espacial. Segundo Gardner (1983), esse tipo de habilidade é considerada uma competência intelectual humana e é importante para o desenvolvimento do pensamento científico, pois a partir dela é possível representar e manipular informações para a resolução de problemas. Desenvolvendo a habilidade espacial é possível trabalhar com imagens, fazer representações, mesmo na ausência do objeto. A representação mental dos objetos é um dos componentes da habilidade espacial. Vamos considerar uma pessoa que já teve experiências com prismas. Podemos solicitar a ela que forneça, sem fazer representações no papel, quantos vértices, arestas, faces têm prisma hexagonal. Se ela tiver esse componente desenvolvido – representação mental dos objetos - ela será capaz de fornecer as respostas corretas.

Na escola básica, o ensino de Geometria tem como um dos seus objetivos desenvolverem a habilidade espacial. Os conteúdos do Ensino Médio: Geometria de Posição e Geometria Métrica favorecem o desenvolvimento dessa habilidade.

Krutetskii (1976) considera a habilidade geométrica como uma forma de raciocínio desenvolvido pelas pessoas que, em situações-problema, utilizam esquemas gráficos para se chegar à solução.

O pensamento geométrico, junto com os seus componentes e habilidades, foi objeto de estudo de vários pesquisadores e, entre eles, está o casal Van Hiele.

## 2.1 OS NÍVEIS DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE VAN HIELE

Dois educadores holandeses, Dina Van Hiele-Geldof e seu marido, Pierre Marie Van Hiele, elaboraram um modelo sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico, discutindo suas implicações em sala de aula. Crowley (in Lindquist, 1994, p. 1) mostra que os níveis de compreensão de conceitos geométricos, propostos pelo casal holandês, teve como preocupação as dificuldades apresentadas por alunos na unidade escolar. Segundo Van-Heile, as pessoas desenvolveriam o pensamento geométrico de acordo com cinco níveis - visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor.

As idéias de Van Hiele (1986) sobre Geometria tiveram início com as próprias dificuldades que o autor enfrentou enquanto estudante dessa disciplina. Na época, o ensino de Geometria era basicamente formado pelos axiomas e demonstrações de teoremas que, uma vez não sendo entendidos, acabavam sendo decorados pela maioria dos estudantes (VIANA, 2000, p. 37).

Em seus trabalhos, os Van Hiele percebiam que as estruturas estavam presentes principalmente na sua visão de mundo, com grande influência na Psicologia da Gestalt (base para análise da percepção e interpretação dessas estruturas) e uma grande preocupação com as atividades matemáticas, que eram elaboradas por Dina. Segundo Van-Hiele,

quando eu comecei minha carreira como professor de Matemática, eu logo percebi como era difícil essa profissão. Havia partes do conteúdo que eu podia explicar e explicar, e ainda assim os alunos não entendiam. Eu poderia ver que eles realmente tentavam, mas não obtinham sucesso. Especialmente, no começo da Geometria, quando coisas simples tinham que ser provadas, eu podia ver que eles faziam o máximo, mas o assunto parecia ser muito difícil (VAN HIELE, 1986, p. 39).

Segundo Van Hiele (1986, p. 24), o insight é um componente importante da aprendizagem e “[...] surge quando uma pessoa age na nova situação adequadamente e com intenção”. Para ele, estrutura e insight se relacionam à medida que o segundo é resultado da percepção do primeiro, para poder entender como funciona essa estrutura.

A linguagem, o insight e o tipo de experiência desempenham papéis especiais nesse desenvolvimento de raciocínio. Esses níveis do raciocínio geométricos descritos por Van Hiele (1986) estão resumidos abaixo, da seguinte maneira:

## 2.2 Nível 1: Visualização ou Reconhecimento

Os alunos percebem o espaço apenas como algo que existe em torno deles. Os conceitos de Geometria são vistos como entidades totais e não como componentes ou atributos. Suas figuras geométricas são reconhecidas por sua forma como um todo, isto é, por sua aparência física, não por suas partes ou propriedades. Reconhecem quadrado, retângulo, pois têm formas semelhantes com o que já foi visto por eles.

Conseguem representar pictoricamente essas formas, mas não reconhecem que essa figura tem ângulos retos e que os lados opostos são paralelos. Por exemplo, pode reconhecer um dado, chamá-lo de cubo, mas não são capazes de reconhecer as seis faces quadradas.

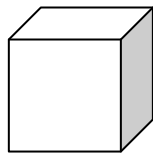


Figura 3 - Cubo

### **2.3 Nível 2 : Análise**

Os alunos começam uma análise dos conceitos geométricos, na qual, pela observação e experimentação, começam a reconhecer as figuras. Desse modo, eles passam a observar algumas propriedades utilizadas para conceituar classes de configurações, reconhecendo as partes das figuras estabelecendo que ângulos opostos de um paralelogramo sejam iguais. No entanto, não são capazes de explicar relações entre propriedades, pois não entendem definições.

Por exemplo, os alunos que se encontrariam nesse nível, provavelmente, não seriam capazes de relacionar a existência de ângulos retos do retângulo com a perpendicularidade ou o paralelismo dos lados.



Figura 4 – Retângulo

### **2.4 Nível 3 : Dedução Informal ou Ordenação, ou Síntese, ou Abstração.**

Os alunos que se encontram nesse nível conseguem estabelecer inter-relações de propriedades, mesmo dentro das figuras. Por exemplo: se em um quadrilátero seus lados são paralelos, necessariamente seus ângulos opostos são iguais. Sendo assim, são capazes de reconhecer classes de figuras (todos os quadrados são paralelogramos, por exemplo) e deduzir suas propriedades. As definições passam a ter, e os alunos conseguem formular argumentos informais sobre as representações.

Nesse nível, porém, não compreendem ainda o significado como um todo e não compreendem o papel do axioma. São capazes de acompanhar demonstrações formais, mas não vêem como se pode alterar a ordem lógica, nem como se pode construir uma prova partindo de premissas diferentes pouco familiares.

## 2.5 Nível 4 - Dedução Formal

Os alunos compreendem o significado da dedução como uma maneira de estabelecer a teoria geométrica no contexto de um sistema axiomático. São percebidos os axiomas, postulados, definições, teoremas e demonstrações, e conseguem, nesse nível, construir demonstrações, enxergando a possibilidade de desenvolvê-las de várias maneiras. Podem fazer afirmações e distinções de sua verdade.

Conforme verificado por Crowley (1994) e Hoffer (1981), um indivíduo que consegue compreender as condições necessárias e suficientes para afirmar algo, é capaz de construir demonstrações e fazer suas distinções, como usar o postulado LAL<sup>1</sup> para provar afirmações sobre os triângulos, todavia poderá não entender por que é necessário postular a condição LAL (lado, ângulo, lado).

## 2.6 Nível 5 - Rigor

O aluno é capaz de trabalhar vários sistemas axiomáticos, consegue estudar geometrias não euclidianas e fazer comparações com sistemas diferentes. A Geometria agora é vista de uma forma abstrata em todas as suas relações.

Hoffer (1981) analisa cada um dos níveis de Van Hiele e verifica que objeto são propriedades que analisam as seqüências parciais. Exemplo: o paralelismo de reta faz parte da Geometria Euclidiana.

Nasser (1992), em conformidade com a teoria de Van Hiele, salientou que as aprendizagens de conceitos geométricos partem de um pensamento global para o pensamento analítico, finalizando com a dedução matemática mais rigorosa. Para Nasser, o desenvolvimento do pensamento geométrico estava dividido em hierarquia, lingüística, intrínseco, avanço e desnível.

Em relação à hierarquia, observa-se uma seqüência de níveis, sendo necessário construir níveis anteriores para alcançar um outro mais elevado.

Na lingüística, o conceito geométrico é explicitado com sua própria linguagem, utilizando-se de símbolos e suas relações. Quanto ao intrínseco, o que está implícito em um nível torna-se explícito ao nível superior.

---

<sup>1</sup> LAL é um dos casos de congruência de triângulos.

No avanço, Nasser explica que os níveis dependem de instrução para serem elevados, mais do que a idade ou maturidade dos alunos. Com relação aos desníveis, ocorre a necessidade de raciocínio de mesmo nível entre os alunos. Não ocorrerá sua elevação se a atividade desenvolvida for mais avançada do que aquela construída pelos alunos.

Ressalta o autor que as fases expostas podem ocorrer de forma simultânea e em diversas ordens; contudo, para a última, existe a necessidade do desenvolvimento das fases anteriores, pois são significativas para fornecer as estruturas de aprendizagem.

Dessa forma, é importante o professor identificar os níveis em que se encontram seus alunos no desenvolvimento da linguagem geométrica e no seu uso. Segundo a teoria de Van Hiele, os professores poderão adotar os seguintes procedimentos para provocar os progressos dos níveis de compreensão de conceitos geométricos de seus alunos.

Em um primeiro momento, vivenciar a fase da informação, em que os alunos e professores discutem as atividades a serem desenvolvidas. Perguntas poderão ser formuladas, e a linguagem específica ao nível é explicitada, ou seja, os alunos conhecem o trabalho prático.

Em uma segunda fase, denominada de orientação dirigida, é possível fazer atividades que revelem as estruturas específicas do nível em questão. O aluno começa a analisar as figuras geométricas, diferenciando suas propriedades, ao identificar que o quadrado além de ter lados iguais, possui ângulos com mesma medida.

Na fase posterior, denominada de explicação, o professor auxilia os alunos a usar a linguagem apropriada, na expressão e modificação dos seus pontos de vista.

Para a orientação livre, os alunos devem elaborar soluções próprias para a atividade, possibilitando, assim, vários caminhos para solucionar os problemas em aberto.

Encontra-se na fase de integração, o aluno que revê e analisa o que aprendeu, formando uma visão geral dos objetos e suas relações.

Seria importante que os alunos do Ensino Médio conseguissem resgatar os conceitos de bissetriz, mediatriz, ângulos, supostamente aprendido no Ensino Fundamental e fossem capazes de utilizá-los para solucionar problemas de Geometria Espacial. Infelizmente não é o que acontece, pois o ensino de conceitos geométricos parece não ser valorizado nas escolas.

A tão propalada democratização da Educação Brasileira, portanto, não se concretiza de fato, pois a verdadeira democratização consiste em proporcionar a todos iguais oportunidades – e condições – de acesso aos diversos níveis de ensino, independentemente da situação econômica de cada um. Se houve ampliação da Rede Oficial de Ensino em todos os níveis, foi acompanhada de um processo de deterioração – física e cognitiva – da escola pública, a única acessível às camadas menos favorecidas da população. Persiste, assim, até hoje, a dualidade histórica do ensino brasileiro (escola da elite x escola do povo) traduzida, agora, em termos de escola particular x escola pública.

Do ponto de vista da educação matemática, é necessário acrescentar que o ensino de Geometria e do Desenho Geométrico parece continuar se processando com maior frequência nas escolas particulares (como, também, nas academias militares), trabalhadas sob orientações diversas, integradas ou não às demais disciplinas, o que, entretanto, é ensinado de maneira muito reduzida na escola pública.

Desse modo, caracteriza-se que o abandono do ensino de Geometria e Desenho Geométrico deve, portanto, ser caracterizado como uma decisão equivalente às medidas governamentais, em seus vários níveis, com relação à educação. Podem-se questionar as verdadeiras intenções e compromissos que elas revelam em relação ao oferecimento de condições que impliquem reais oportunidades educacionais a todos os segmentos da população brasileira.

Devemos repensar no modo de se desenvolver uma aprendizagem significativa para os nossos alunos e se possível verificar que fatores influenciam o desenvolvimento de conceitos geométricos em sala de aula.

Dentre eles, podemos destacar o conhecimento prévio, amplamente estudado por Alves (1999). Essa autora enfatizou a importância da transferência de conceitos em situações de solução de problemas e mostrou que os alunos, sujeitos de sua pesquisa, demonstram dificuldades nessa transferência, provavelmente, pela má formação conceitual. Hamazaki (2001) ressaltou que os Parâmetros Curriculares Nacionais salientam que os objetivos do ensino da Geometria não vêm sendo alcançados. Ela propõe uma alternativa de ensino da Geometria utilizando a teoria de Van Hiele, que valoriza a aprendizagem como um processo gradual (considera que a intuição e a linguagem geométrica são obtidas gradualmente), global (porque figuras e propriedades não são abstrações isoladas, mas inter-relacionam-se e pressupõem diversos níveis que levam a outros significados) e construtivo (porque pressupõem que não existe



transmissão de conhecimentos, mas que o aluno deverá construir ele próprio os seus conceitos).

No artigo de Usiskin (in Lindquist, 1998, p.21), no nível secundário, o problema curricular é mais complicado. Uma abordagem da Geometria significa mais do que apenas conteúdo; assinala uma estrutura lógica em que o conteúdo deve ser colocado ou um tipo de demonstração deve ser utilizado. O resultado é que os alunos não sabem o suficiente de Geometria para ir ao nível secundário, e apenas um terço compreende a Geometria. Conseqüentemente, as experiências em Geometria, tanto dos alunos como dos professores, são insuficientes.

Hoffer (1981), em seus estudos, verificou que a aprendizagem da Geometria envolvia algumas habilidades geométricas básicas: visual, verbal, gráfica, lógica e aplicações. Na visual, o aluno tem como habilidade o reconhecimento de figuras, na verbal, além de reconhecer figuras, deve conseguir descrever suas propriedades; nas outras habilidades, o aluno deve conseguir incluir classes de figuras e deduzir teoremas.

Usando as definições de Hoffer (1981), um aluno tem habilidade visual se consegue reconhecer as representações de uma figura, percebendo as suas propriedades como parte de uma figura maior. Na Geometria Espacial, essa habilidade é desenvolvida por meio das análises dos desenhos de planificação das figuras (planas ou não-planas) que são sugeridas pelo desenho em perspectiva, percebendo como as partes vão formar o todo. Para isso, o conhecimento prévio de Geometria Plana deve ser considerado, mas não apenas ele. É necessário que o aluno faça, por exemplo, representações planas de objetos tridimensionais.

Por exemplo, o aluno deve conseguir desenhar quadrados (quatro lados de igual comprimento e quatro ângulos retos) congruentes e suas faces para formar a figura tridimensional.

Considera-se que as habilidades citadas por Hoffer (1981) estejam relacionadas e que possam ser aprendidas com conceitos, simultaneamente. Para o presente trabalho, a habilidade visual está muito ligada à habilidade gráfica, já que os alunos mostram, através de desenhos de planificações, não apenas a sua percepção visual da figura tridimensional, mas a habilidade de reproduzir suas partes (desenho no plano) de uma maneira organizada, de tal forma que essas partes possam ser reunidas novamente e assim possa reconstruir a figura no espaço (VIANA, 2000, p. 74).

A importância da visualização no processo de ensino/aprendizagem da Geometria, bem como a importância dos mecanismos essenciais à construção de significados matemáticos, leva-nos a buscar soluções para diminuição de problemas que envolvem o pensamento visual e a sua construção.

De acordo com Hoffer (1981), um indivíduo demonstraria compreensão se fosse capaz de trabalhar em uma situação possivelmente desconhecida, se realizasse com competência o que a situação exigisse, se conseguisse um método para resolver tal situação.

A seguir é apresentado um quadro que associa o Nível/Habilidade de Hoffer (1981) com os Níveis de Van Hiele (1986).

Quadro 1- Sintetiza as principais relações entre as habilidades de Hoffer e os níveis de Van Hiele.

### **Síntese das habilidades básicas em geometria (baseado em Hoffer, 1981)**

---

#### **Nível/Habilidade – 1.1 Reconhecimento**

---

1. Visual – Reconhece figuras diferentes em um desenho. Reconhece informações rotuladas em uma figura.
2. Verbal – Associa o nome correto com uma figura dada. Interpreta sentença que descreve as figuras.
3. Gráfica – Consegue fazer esquemas das figuras e identificar suas partes.
4. Lógica - Percebe que há diferenças e semelhanças entre as figuras. Entende figuras com posições diferentes.
5. Aplicações - Identifica através dos objetos físicos as formas geométricas.

#### **Nível/Habilidade – 1.2 Análise**

---

1. Visual – Percebe as propriedades de figuras como parte de uma figura maior.
2. Verbal – Descreve várias propriedades de uma figura.
3. Gráfica – Traduz a informação verbal dada a uma figura. Usa propriedades nos desenhos.

4. Lógica- Entende que figuras podem ser classificadas de várias maneiras e suas propriedades podem ser usadas para classificá-la.
5. Aplicações- Reconhece propriedade geométrica fenômenos físicos.

---

#### Nível/Habilidade – 1.3 Ordenação

---

1. Visual – Reconhece relações entre vários tipos de figuras. Reconhece propriedades comuns dessas figuras.
2. Verbal – Define palavras precisas e concisas. Faz relações com outras figuras.
3. Gráfica – É capaz de construir figuras relacionadas com as figuras dadas.
4. Lógica - Entende as propriedades das figuras para determinar se uma classe esta contida em outra.
5. Aplicações - Entende o conceito matemático e suas relações.

---

#### Nível/Habilidade – 1.4 Dedução

---

1. Visual – Usa informação sobre figuras e obtém outras informações sobre elas.
2. Verbal – Entendem distinção entre postulados, teoremas. Reconhece o que se pede no problema.
3. Gráfica - Reconhece quando e como usar elementos auxiliares em uma figura. Consegue desenhar e construir figuras.
4. Lógica - Usa regras de lógica para desenvolver provas. É capaz de deduzir conseqüências a partir de informações dadas.
5. Aplicações - É capaz de deduzir propriedade através de informações.

---

#### Nível/Habilidade – 1.5 Rigor

---

1. Visual - Reconhece suposições injustificadas feitas no uso das figuras. Concebe figuras relacionadas em vários sistemas.
2. Verbal – Formula extensos resultados conhecidos. Descreve os sistemas dedutivos.
3. Gráfica – Entende as limitações e capacidade dos instrumentos de desenho. Representa pictoricamente conceitos em vários sistemas dedutivos.

4. Lógica - Entende as limitações e capacidade de hipóteses e postulados. Sabe quando um sistema de postulados é independente, consistente e categórico.
5. Aplicações - Usa modelos para representar sistemas abstratos.

## **2.7 Percepção Geométrica e Representação Geométrica**

Um dos objetivos da aprendizagem da Geometria é o desenvolvimento da percepção.

A percepção é a aplicação cuidadosa da mente a alguma coisa. É uma função cerebral que atribui estímulos sensoriais a partir de histórico de vivências passadas; é o processo que leva o indivíduo a organizar e interpretar as suas impressões sensoriais, atribuindo significado ao seu meio. Na psicologia é de extrema importância, porque o comportamento das pessoas é baseado na interpretação que estas fazem da realidade e não sobre a sua própria, e é por isso, que cada pessoa percebe um objeto ou uma situação de acordo com a importância dada a si própria.

Percepção, segundo Sternberg (2000, p. 110), refere-se ao “conjunto de processos pelos quais, reconhecemos, organizamos e entendemos as sensações recebidas dos estímulos ambientais”, ela envolve tudo o que é percebido e tudo o que a mente pode compreender.

Outros autores, como Sternberg (1992) e Krutetskii (1976) verificaram que a percepção é um componente da habilidade geométrica que pode afetar o desempenho de alunos em resolução de problemas e mostraram também como o conhecimento lingüístico e de esquemas podem interferir na transferência de conceitos em situações novas.

Krutetskii (1976) definiu como percepção de figuras geométricas a habilidade em discernir e avaliar os elementos interpenetrantes nas figuras geométricas a partir de vários pontos de vista, no isolamento dos elementos das figuras e os elementos da figura fundo, sendo esse um dos componentes das habilidades matemáticas (KRUTETSKII, 1976, p. 112). No nosso cotidiano, a utilização dos sentidos tem uma tarefa importante, principalmente quando se trata do sentido visual, que nos fornece o registro de objetos semelhantes ou diferentes.

Para Sternberg (2000, p.180), a imagem mental é uma forma de representação em que “criamos estruturas mentais que representam coisas que,

presentemente, não estão sendo percebidas pelos órgãos sensoriais”. A representação mental para esse autor foi composta por atributos não–espaciais (forma, cor, etc.) e espaciais (tamanho, distância, localização, orientação, etc.) e afirma que a imaginação visual (representa mentalmente o conhecimento visual) é uma das formas de imaginação mental mais estudada pelos psicólogos cognitivos.

A visualização espacial é como uma capacidade que permite a manipulação de imagens de objetos no meio em que vivemos.

Para Sternberg (2000), às vezes, não podemos perceber o que existe. É também verdadeiro, entretanto, que, em outras ocasiões, percebemos coisas que não existem. Como é o caso das ilusões triangulares que estão a seguir:

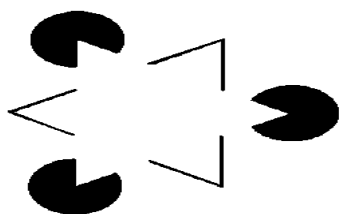


Figura 5 – Ilusões Triangulares – Extraída do livro Psicologia Cognitiva – Sternberg (2000, p. 111).

Você consegue ver facilmente os triângulos dessa figura ou os triângulos são apenas ilusões? Observe o triângulo preto no centro do painel esquerdo da figura e observe o triângulo branco no centro do mesmo painel da figura. Eles saltam de seus olhos.

Ambos os triângulos centrais são ilusões de óptica, que envolvem a percepção da informação visual não presente fisicamente no estímulo sensorial visual. A habilidade de percepção visual e os conceitos de Geometria podem ser apreendidos simultaneamente, uma vez que a Geometria trabalha para que o aluno reconheça as figuras, suas relações e propriedades.

A imagem mental foi identificada com a percepção. Portanto, memória, percepção, aprendizagem, resolução de problemas, raciocínio e compreensão, esquemas e arquiteturas mentais são alguns dos principais objetos de investigação da área, cujas aplicações vêm sendo utilizadas na construção de modelos explícitos em formas de programas de computador (softwares), gráficos, arquiteturas ou outros esquemas do processamento mental, em especial, nos sistemas de Inteligência Artificial.

Como afirma Sternberg (1992),

os psicólogos do processamento da informação estudam as capacidades intelectuais humanas, analisando a maneira como as pessoas solucionam as difíceis tarefas mentais para construir modelos artificiais, pois estes modelos têm por objetivo compreender os processos, estratégias e representações mentais utilizadas pelas pessoas no desempenho destas tarefas (STERNBERG, 1992, p. 15).

As imagens mentais oferecem um modo especial de se armazenar informações que são diferentes das informações do modo verbal. No âmbito da Psicologia Cognitiva, tais questionamentos têm como objetivo principal esclarecer como representamos mentalmente o conhecimento ou algum aspecto do meio ambiente, seja ele do mundo externo ou do nosso mundo imaginário.

A representação possui uma propriedade relacional de causa e efeito. Há um estímulo externo ou interno e uma reprodução mental do mesmo. Conforme (Eysenk & Keane, 1994) as representações externas dividem-se em duas amplas categorias: aquelas que são pictóricas e aquelas que se baseiam na linguagem, que só se processam porque existe um agente cognitivo – o indivíduo. Podemos representar coisas e idéias em figuras ou em palavras.

Para entendermos um pouco como a representação mental acontece por meio de imagens e proposições, vejam o exemplo a seguir:

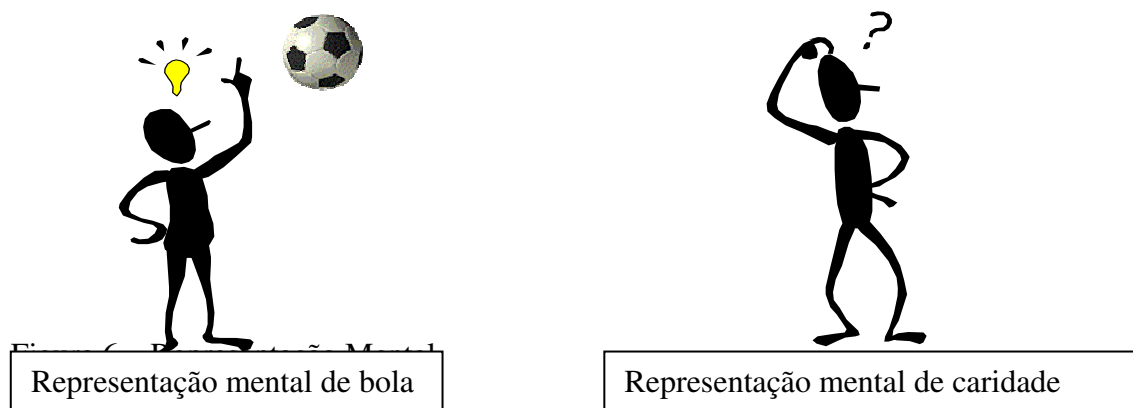


Figura 6 – Representação Mental

Quando se imagina uma bola, a representação mental é rápida e nítida, o que não acontece com a mental de caridade, de difícil representação. Verificamos então, que a imagem por si só não representa todas as idéias do que queremos representar. O mesmo acontece com as palavras, das quais só se consegue fazer uma representação completa, se contextualizar o que se sugere, porém isso envolve a exposição mental do conhecimento.

Apesar de existirem várias sugestões e métodos de ensino em Geometria, muitas pesquisas mostram que os alunos do Ensino Médio têm dificuldades em responder questões que envolvam conceitos e habilidades geométricas visuais.

Segundo Brito (2001, p. 63) é através do conhecimento das habilidades matemáticas básicas, que pode ser verificado, com maior cuidado, como essas habilidades são aprendidas, se desenvolvem e como o ensino delas pode ser melhorado com o auxílio da psicologia educacional.

Viana (2000) realizou uma pesquisa em que o referencial teórico usado foram estudos de Piaget e Vigostsky sobre formação conceitual e noção de espaço. Investigou em seu trabalho atividades envolvendo habilidade para conceitos espaciais e a percepção geométrica, utilizando-se dos níveis de conceituação propostos por Van Hiele.

Estudos enfocando esta teoria foram desenvolvidos por vários pesquisadores na área de Psicologia da Educação Matemática, como veremos a seguir, na revisão.

## **CAPÍTULO 3**

### **REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

O objetivo desse capítulo é realizar uma revisão dos trabalhos realizados nos últimos anos, enfocando o processo de ensino/ aprendizagem da Geometria. Foi estruturado de forma a contemplar os seguintes aspectos: habilidade matemática e a teoria do Van Hiele; desempenho de alunos na solução de problemas geométricos; conhecimento de alunos e professores no ensino de Geometria e o uso da informática para aprendizagem geométrica.

#### **3.1 Habilidade Matemática e a teoria de Van Hiele**

Viana (2000), realizou um estudo com o objetivo de avaliar o conhecimento geométrico de alguns alunos sobre figuras tridimensionais mais comuns. Foram alvo de pesquisa 377 alunos das quatro séries do Cefam, de Mogi das Cruzes – SP. Usou-se como material um questionário do tipo lápis e papel para avaliação do desempenho dos alunos e para classificá-los de acordo com o grau de aquisição, dentro dos níveis de conceituação propostos por Van Hiele. O trabalho enfatizou o uso de uma linguagem matemática bastante precisa e verificou a influência do desempenho dentro dos níveis 1



e 2 (Van Hiele), com o tipo de figura analisada e a habilidade requerida. Utilizaram-se duas habilidades, a visual / gráfica (através da planificação de figuras) e a verbal (para nomear e escrever as propriedades das figuras). O referencial teórico pautou-se nos estudos de Piaget e Vigostsky, sobre a formação conceitual e sobre a noção de espaço. A pesquisadora destacou que a sua intervenção desencadeou processos que ajudariam no desenvolvimento cognitivo de seus alunos. Dessa forma o professor poderia, talvez, fazer com que sua aula de Geometria não ficasse tão distante da aceitação de uma das grandes metas da educação do Ensino Fundamental. Assim, além da avaliação do desempenho, os alunos foram também classificados de acordo com os níveis de conceituação propostos por Van Hiele e a maioria dos professores admitiram que não estavam preparados para ensinar Geometria Espacial aos seus alunos.

Um outro trabalho, enfocando as habilidades matemáticas em Geometria e utilizando-se dos níveis de Van Hiele, foi o trabalho desenvolvido por Rezi (2001), que procurou mostrar como ocorrem os processos de solução de problemas em Geometria e quais são os fatores que influenciam esse processo. Em seu estudo, investigou a compreensão dos alunos sobre alguns componentes da habilidade matemática intrínseca às atividades que envolvam conceitos geométricos, como a percepção geométrica e a habilidade para conceitos espaciais.

Foi identificado que quanto maior o nível de desenvolvimento em Geometria dos sujeitos, melhor era o seu desempenho em provas que avaliavam a percepção geométrica, as habilidades para trabalhar com conceitos e raciocínios espaciais.

Foram sujeitos 201 alunos concluintes do Ensino Médio de duas escolas, uma pública e outra particular, submetidos a cinco instrumentos do tipo lápis e papel, durante o período de aula. Entre eles, 94 estão matriculados na escola pública e 107 na escola particular, todos concluintes do Ensino Médio. Era esperado, por esse motivo, que dominassem uma série de conceitos e demonstrasse algumas habilidades que deveriam ter sido desenvolvidas desde o Ensino Fundamental, o que não foi confirmado pelos dados obtidos no trabalho. O seu objetivo foi o de descrever e comparar o desempenho desses estudantes; buscou-se em uma prova avaliar o conhecimento geométrico das figuras planas; comparar (de acordo com o gênero) o desempenho dos sujeitos em provas e testes utilizando-se das concepções de Van Hiele.

Dessa forma, a hipótese de pesquisa indicou que poderia haver uma relação entre as habilidades e o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico. O estudo final demonstrou que os componentes escolhidos para a investigação não estavam

influenciando o desempenho durante as atividades, e não foram encontradas relações com as atitudes dos alunos em relação à Matemática. Estudos dessa natureza são importantes para que se entenda como ocorrem os processos de solução de problemas e quais são os fatores que estão presentes nesse processo.

Um outro estudo enfocando o desenvolvimento do pensamento geométrico, tendo como suporte teórico a teoria de Van Hiele, foi o conduzido por Oliveira et. al. (2005). Partindo do tema A Resolução de Problemas e o uso de Tecnologia como Estratégias para enfrentar as dificuldades de aprendizagem em Geometria, observaram que, ao longo de seus estudos, a Geometria vem sendo pouco trabalhada no contexto escolar, e quando acontece, é ensinada de forma estática e sem contextualização. Este trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa realizada com a terceira turma, do Curso de Especialização em Matemática, da Faculdade de Ciências e Tecnologia, de Presidente Prudente – SP, que teve como objetivos discutir e analisar as dificuldades de aprendizagem de Geometria entre os alunos do Ensino Fundamental.

Os sujeitos da pesquisa foram 15 alunos da 8<sup>a</sup> série do Ensino Fundamental da Rede Pública Estadual, que faziam parte do projeto Correção de Fluxo, alunos provenientes de várias repetências e que possuíam defasagem idade-série.

Para enfrentar este desafio foi proposta uma metodologia diferenciada que utilizou o computador como ferramenta de trabalho pedagógico e a resolução de problemas para promover a aprendizagem de Geometria. Ao trabalhar com os conceitos, procurou-se integrar os aspectos semânticos e sintáticos e buscou-se dar maior significado aos conceitos geométricos abordados. Para uma melhor compreensão sobre as dificuldades dos alunos quanto ao entendimento sobre os níveis cognitivos em que se encontravam, foi utilizado o modelo de Van Hiele. A partir da realidade e interesse dos alunos, foi trabalhada a planificação de formas espaciais, estudando as figuras planas, a noção de superfície e espaço.

A pesquisa evidenciou que é possível realizar um trabalho diferenciado resgatando o cotidiano do aluno e utilizando o computador como ferramenta de trabalho pedagógico, fazendo com que se mostrassem com um interesse maior e vontade de aprender. O estudo evidenciou que a Geometria é uma área bastante propícia para o desenvolvimento de atividades utilizando a estratégia de resolução de problemas e, por ser um conteúdo encontrado no cotidiano de cada indivíduo, traz interesses espontâneos.

Estudos enfocando a teoria de Van Hiele, tendo como sujeitos alunos do Ensino Fundamental, foram desenvolvidos por vários pesquisadores da área de

Psicologia da Educação Matemática. Entre eles destacamos o trabalho de Pirola (1995), que enfocou a importância do ensino de Matemática e a necessidade de uma aprendizagem significativa de conceitos, envolvendo a resolução de problemas que sejam vinculados às concepções prévias do sujeito.

A pesquisa teve como objetivo estudar a formação dos conceitos de triângulo e paralelogramo em alunos de 5º ao 8º ano, do Ensino Fundamental. Com base no modelo de formação de conceitos de Klausmeier (1977) e no modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele, foram sujeitos desta pesquisa 137 alunos de uma escola da rede oficial de ensino do Estado de São Paulo, matriculados de 5º ao 8º ano, do Ensino Fundamental. Eles foram submetidos aos seguintes instrumentos para coleta de dados: questionário, prova dos atributos definidores e prova dos exemplos e não-exemplos. Os resultados mostraram que alunos de 7º e 6º. ano tiveram melhor desempenho nos testes, conseguindo dar uma definição adequada para triângulo e paralelogramo, desenhar diferentes figuras, além de reconhecer um ou mais atributos definidores do conceito. A partir dos resultados obtidos, foi possível verificar que os dados coletados não indicam que alunos mais adiantados de outras séries possuem conceitos melhores que os das anteriores. A ordem de classificação desses alunos (segundo o seu desempenho) foi a seguinte: 7º, 6º, 8º e 5º ano, ou seja, os alunos da 7º e 6º ano apresentaram um nível de formação de conceitos melhor que os da 8º ano, evidenciando que, muitas vezes, os alunos calculam áreas e perímetros, sem conhecer os atributos e exemplos e não-exemplos diferenciados das figuras, trabalhando apenas fórmulas memorizadas e problemas-tipo.

Hamazaki (2005) também mostrou em seu trabalho a importância do ensino da Geometria e propôs alternativas utilizando-se da metodologia de Van Hiele, cujo modelo consiste na valorização da aprendizagem como um processo gradual. Considera a intuição, o raciocínio ao considerar que a linguagem geométrica são obtidos gradualmente. Global, porque figuras e propriedades não são abstrações isoladas e, por isso, inter-relacionam-se e construtivo, porque pressupõe que não exista transmissão de conhecimentos, mas que o aluno deverá construir, ele próprio, os seus conceitos.

Segundo esse autor, no Brasil, o trabalho dos Van Hiele não recebeu o devido reconhecimento. Concluiu que o ensino de Geometria no Brasil permanece no nível inicial, pois os alunos julgam que o quadrado não é retângulo só porque possuem aparências diferentes. Motivada pela curiosidade de conhecer suas aplicações, a pesquisa se utilizou da aplicação do Método dos Van Hiele, em turmas ingressantes no

curso de Licenciatura em Matemática, como tentativa para suprir o necessário conhecimento da Geometria.

Como resultado final da pesquisa, foi elaborada uma proposta pedagógica para o ensino da Geometria no curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Guarulhos. Com uma nova proposta, os professores poderiam ter mais opção em material didático para ministrar suas aulas, com o objetivo de facilitar o esquema ensino-aprendizagem.

### **3.2 Desempenho de alunos na solução de problemas geométricos**

Trabalhando com uma turma de Licenciatura em Matemática, Pirola (2000), professor dos cursos de magistério e de licenciatura em Matemática, observou uma grande dificuldade dos alunos na solução de problemas geométricos. Os tipos de problemas que os estudantes dos dois cursos tiveram maior dificuldade foram com informações incompletas e supérfluas.

Assevera o pesquisador a importância dos programas de educação continuada e que os mesmos sejam desenvolvidos contemplando os aspectos metodológicos relacionados ao ensino e aprendizagem de conceitos, conteúdos de Matemática enquanto princípios utilizados em solução de problemas geométricos. A pesquisa teve como principal objetivo investigar a solução de problemas geométricos, tendo como sujeitos 124 estudantes do curso de Habilitação Específica do Magistério (HEM) e de 90 alunos do curso de Licenciatura em Matemática de uma faculdade do interior de São Paulo.

Os instrumentos utilizados para a coleta de dados foram: um questionário informativo contendo questões a respeito da vida escolar dos alunos e uma prova com dez questões, elaboradas a partir dos problemas utilizados por Krutestskii (1976), ambos envolvendo informações completas e incompletas.

A análise dos resultados, evidenciando um baixo desempenho dos sujeitos em problemas e indicando dificuldades na obtenção da informação Matemática, envolvendo conceitos de Geometria e tipos de enunciados diversificados, mostra que uma atenção especial deve ser dada à formação, em solução de problemas, de professores que atuarão no Ensino Fundamental e Médio. Essa formação deve (além de fornecer subsídios para que os futuros professores desenvolvam habilidades em solução

de problemas em Aritmética, Álgebra e Geometria) proporcionar aos estudantes recursos teóricos e metodológicos para o ensino desses conceitos e princípios.

Outro trabalho sobre solução de problemas que merece destaque foi o de Alves (2005) que compreende e analisa as relações entre a memória, os conhecimentos declarativos e de procedimento, como o desempenho na solução de problemas matemáticos. Para tanto, 177 alunos do primeiro e último ano do ciclo II, do Ensino Fundamental e último ano do Ensino Médio, provenientes de uma escola pública e uma privada responderam um questionário informativo e uma prova matemática para avaliar o seu domínio de conhecimentos declarativos e de procedimento, como o desempenho na solução de problemas matemáticos.

Os estudos indicaram que os resultados obtidos na última prova estão intimamente relacionados com o desempenho na solução de problemas, e que a capacidade de perceber os elementos de forma analítica e sintética favorece a representação do problema, influenciando o desempenho na solução. Foi verificado o papel fundamental que desempenha a percepção, uma vez que constitui a mais imediata das reações humanas; pois, antes de representar, reter ou recuperar uma informação na memória, o sujeito a percebe. O estudo sugeriu a necessidade de atentar para o desenvolvimento de atividades que favoreçam a percepção dos estudantes.

Provavelmente, favorecendo o desenvolvimento adequado da percepção dos estudantes, a representação dos conhecimentos será facilitada, implicando, conseqüentemente, uma melhoria na retenção e recuperação dos conhecimentos matemáticos, declarativos e de procedimento.

### **3.3 Conhecimento de alunos e professores no ensino da geometria**

Muitos trabalhos foram explorados no que se refere ao ensino da Geometria, retratando desde o abandono até a formação de professores.

Passos (2000) verificou como alunos e professores trabalham a questão ensino/aprendizagem em Geometria. Versou questões a respeito do problema do ensino da Geometria, considerando os aspectos psicopedagógicos e epistemológicos das representações e interpretações geométricas, enfatizando a complexidade presente no processo ensino-aprendizagem de Geometria. A pesquisa investigou como o aluno mostra e interpreta representações geométricas, e como o professor as percebe e

explora. Utilizou-se de cinco classes de 4ª série do Ensino Fundamental e suas respectivas professoras, focalizando também a resolução de problemas geométricos.

Foram analisados os procedimentos dos alunos para representar sólidos geométricos no plano e no espaço e as dificuldades no reconhecimento de representações planas de objetos tridimensionais. Também foram analisadas as relações entre representação, visualização, a familiaridade com o desenho, as convenções e o vocabulário próprio da Geometria. Foram destacadas considerações didático-pedagógicas que poderão constituir-se em contribuições para desencadear reflexões sobre o ensino da Geometria e para a melhoria do trabalho em sala de aula.

Os dados indicaram que os professores pesquisados não trabalhavam os conceitos geométricos considerados como os mais elementares no Ensino Fundamental, e que são recomendados nas propostas curriculares de Matemática do Estado de São Paulo.

Por outro lado, as professoras (sujeitos da pesquisa), quando tentavam ensinar Geometria para seus alunos, apresentavam muitas dificuldades, tanto teóricas quanto metodológicas, que podem comprometer o processo de aprendizagem dos estudantes. Nacarato (2000) também discutiu a questão do ensino de Geometria nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Analisou o processo de educação continuada de cinco professoras das séries iniciais do Ensino Fundamental de uma escola de rede privada do Estado de São Paulo. Teve como objetivo responder a seguinte questão: Que saberes curriculares, reflexões e conflitos são produzidos por um grupo de professoras das séries iniciais do Ensino Fundamental, envolvidas num processo simultâneo de aprender Geometria e de tentar ensiná-la?

Desenvolveu uma pesquisa-ação, e as reflexões e conflitos produzidos nesse processo mostraram a influência pelo contexto de ação e pela história de vida estudantil e profissional das professoras.

Essa autora também se remete à questão do ensino de Geometria nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Outro aspecto que se evidenciou, no início desse trabalho junto às professoras, foi a carência de material de apoio que subsidia o docente tanto para a sua formação conceitual quanto para uma prática curricular inovadora.

Referiu-se a materiais que ilustraram experiências e continham narrativas reflexivas sobre episódio de sala de aula, tendo observado, entretanto, que alguns textos ajudavam a problematizar e re-significar melhor os saberes e as experiências com a prática pedagógica.

Um outro estudo enfocando o conhecimento de professores em relação à Geometria foi o de Lima et. al. (2005) em um trabalho apresentado, atualmente, com o tema: O Ensino de Geometria: um estudo dos saberes gerados investigando a própria prática docente. A presente pesquisa, vinculada ao Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação da Universidade São Francisco / USF, pretendeu investigar os conhecimentos em Geometria gerados a partir da análise da própria prática, partindo da seguinte questão norteadora: Que conhecimentos são produzidos nas aulas de Geometria, a partir da realização e análise de aulas investigativas?

A sondagem foi feita através de uma abordagem qualitativa com o uso de procedimentos e técnicas como observação, entrevistas e diários de bordo.

Teve como objetivo analisar a produção do saber de docentes e discentes nas aulas de Geometria e exigiu uma pesquisa de campo com abordagem qualitativa e suas técnicas de recolhimentos de dados que foram: observação, entrevistas e análise dos registros (incluindo a análise do discurso e conteúdo).

Foram tomadas como objeto de estudo, aulas investigativas em Geometria, desenvolvidas numa turma de 3º ano do Ensino Médio, da rede pública da cidade de Caçapava/SP, sendo que a turma escolhida tem alunos na idade compreendida entre 16 e 17 anos.

A temática das aulas investigativas é bastante recente no Brasil, o que, ao mesmo tempo em que requer a construção de uma metodologia, poderá também trazer contribuições para o debate sobre a produção de saberes na prática social da sala de aula, em que professora e alunos interagem na realização dessas investigações Matemáticas.

Retratando as implicações sofridas quanto ao abandono do ensino de Geometria, Nascimento et. al. (2005) tiveram como objetivo analisar qual o reflexo do abandono da Geometria na aprendizagem dos alunos do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública de ensino do Estado de São Paulo. Foram entrevistados 10 alunos que estavam cursando o último ano do Ensino Fundamental. Alguns pesquisadores em Educação Matemática, como Pavanello (1993), Pirola (2000), entre muitos outros, enfocaram que o ensino de Geometria vem sendo relegado a um plano secundário nos currículos escolares.

Isso pode ser decorrente de uma formação deficitária da maioria dos professores de Matemática que, não possuindo o domínio dos conteúdos básicos da Geometria, enfatizam mais o ensino da Álgebra e da Aritmética, deixando a Geometria

em um segundo plano. Foi verificado que os alunos envolvidos no estudo apresentaram um baixo desempenho nas tarefas, envolvendo solução de problemas geométricos, decorrentes do desconhecimento de conceitos básicos da Geometria. Foi verificado também que um dos motivos pelos quais os alunos não dominam conceitos geométricos pode estar relacionado ao abandono do ensino da Geometria nas escolas e que, provavelmente, esses sujeitos irão para o Ensino Médio sem saber os conceitos básicos dessa disciplina.

Os autores tinham como perspectiva que a pesquisa pudesse contribuir para que os educadores da área de Matemática pudessem retomar a discussão envolvendo o ensino de Geometria nas escolas do Brasil, favorecendo o ensino que valorize o desenvolvimento da percepção geométrica, da criatividade e de outras habilidades.

Ao ensinar Geometria nas escolas, os autores sugerem que poderiam ser desenvolvidas algumas atividades que envolvessem situações cotidianas, que usem recursos como jogos, laboratório de informática, construções utilizando régua e compasso, entre outras coisas.

Viana et. al. (2005), em um trabalho recente, analisaram como os alunos entendem as propriedades das figuras geométricas tridimensionais, tendo como mediadora a linguagem no processo de formação dos conceitos.

Nesse trabalho os autores analisam a linguagem utilizada por 377 alunos de um curso de formação de professores para descrever essas propriedades. Tendo por fundamentação teórica a formação de conceitos espontâneos e científicos de Vygotsky, foram criadas as categorias de linguagem: termos não geométricos e combinação de termos; termos geométricos utilizados de maneira incorreta ou incompleta; termos geométricos em particular; termos geométricos corretos.

Para eles o mundo está repleto de objetos tridimensionais – a maioria deles com forma geométrica definida. Os conceitos geométricos (que permitiram a confecção desses objetos) são de domínio da humanidade há séculos, podendo, portanto, ser considerados como entidades públicas às propostas de Matemática para o Ensino Fundamental. Há anos insistem na necessidade de a Geometria ser introduzida a partir do estudo das formas espaciais.

Apesar de todos esses aspectos, nesse trabalho ficou comprovado que muitos dos alunos, sujeitos desse estudo, não conseguiram fazer leituras geométricas formais do material, estando em um nível de conhecimento ainda relativo aos conceitos cotidianos, e não científicos.



Ao descrever propriedades, os alunos ora se referiram ao objeto, ora às propriedades geométricas planas, mostrando a linguagem como mediadora do processo de formação dos conceitos.

### **3.4 Uso da informática para aprendizagem geométrica**

Embora não seja objeto de estudo desta pesquisa, serão revistos alguns trabalhos que enfocam o ensino da Geometria através do computador. Tais pesquisas mostram que a formação conceitual, bem como a resolução de problemas pode ser facilitada com o uso de softwares educacionais.

Na visão de Silva (2003), comprova-se como o ensino da Geometria tem sido centro de discussão e controvérsias, merecendo atenção de pesquisadores e educadores.

Também assinalou um aumento referencial nos trabalhos apresentados em congressos e encontros nacionais e internacionais, a importância do ensino de Geometria no papel fundamental do currículo, conforme as orientações oficiais para o ensino de Matemática do Ministério da Educação Brasil (1998, p.122).

Essa pesquisa teve como objetivo utilizar o software LOGO em sala de aula, verificando o desempenho e atitudes em relação à Matemática e à Geometria, investigando o desempenho de alunos com relação aos conceitos de Geometria, nas situações em que se utiliza ou não o software em sala de aula.

Em contato com vários professores de Matemática, de 8ª série, visando encontrar alunos para realizar a presente investigação, a pesquisadora teve a oportunidade de verificar que os professores deixam de lado o trabalho com os conteúdos sobre Geometria, quando se confrontam com eles no planejamento escolar para o último bimestre do ano letivo. Foram sujeitos da pesquisa 308 alunos, de 8ª série, do Ensino Fundamental, com idade entre 12 e 19 anos. Foram aplicados instrumentos para avaliação da aprendizagem, abordados em duas partes: na primeira houve a aplicação de um pré-teste para avaliação do desempenho em Geometria, concomitante para os alunos de dois grupos, denominados A e B.

A seguir, na segunda parte, foram desenvolvidos os conteúdos de Geometria para o grupo A, com a intervenção do software computacional LOGO, e, para o grupo B, foram trabalhados os mesmos conteúdos sem o emprego de tal recurso. Quanto ao

desempenho, os resultados da pesquisa mostraram que os valores da média e do desvio padrão das notas dos alunos no pré-teste foram muito baixos; praticamente nenhum dos sujeitos dos dois grupos conseguiu resolver as questões da prova de Matemática.

Outra preocupação foi verificar se os alunos apresentam atitudes positivas em relação à Matemática, em comparação com outros alunos que não tivessem utilizado o software. Usaram-se também livros didáticos, paradidáticos, vídeo e mosaico geométrico. Os resultados indicam que os problemas do ensino da Matemática são bastante complexos, e é necessária atenção especial e investimento em longo prazo na melhoria do ensino.

Um outro estudo conduzido nesse campo, tendo como objetivo a análise da influência do software sobre a aprendizagem, foi o de Miskulin (1994), que propõe uma análise de Geometria Plana e Espacial, inseridas na Educação Matemática, na forma bidimensional, para exploração da Geometria Plana e na tridimensional, para a exploração da Geometria Espacial. Além disso, observa-se através desses procedimentos se é possível resgatar ou captar algumas abordagens do desenvolvimento histórico da Geometria por meio do software LOGO, no qual se busca estratégias de soluções viáveis. Para esse trabalho, traçou diretrizes básicas para a construção e elaboração de uma metodologia alternativa, baseada na utilização do software LOGO e na resolução de problemas. Ele se apoiou na concepção teórica embasada na história da Matemática, mais especificamente, na história da Geometria e também se utilizou da teoria do desenvolvimento cognitivo de Jean Piaget.

Realizou um estudo de caso, com enfoque qualitativo, no qual foram ressaltados os processos mentais e computacionais, ou seja, foram analisadas e interpretadas as dimensões funcionais do dinamismo micro-genético das condutas cognitivas de dois usuários de LOGO, explorando as Geometrias Plana e Espacial, em situações reais de resolução de problemas. Em uma dimensão mais ampla, o objetivo da pesquisa foi buscar estratégias de soluções viáveis, porém não imediatas no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, conseqüentemente da Geometria, no sentido de propiciar a transformação da estrutura social vigente, transcendendo e ultrapassando os grandes desafios a que a educação brasileira vem sendo submetida no sistema atual de ensino.

Miskulin (1999) buscou responder o seguinte problema de investigação: É possível resgatar as possibilidades didático-cognitivas do LOGO tridimensional na exploração pedagógica de conceitos geométricos?

Há como objetivo tecer considerações metodológicas, propiciando aos professores e pesquisadores, em educação matemática, uma reflexão sobre sua prática pedagógica, adequando-a às novas necessidades que se impõem com o avanço da tecnologia para, com isso, contribuir num possível redimensionamento no processo ensino - aprendizagem da Geometria.

Delinea-se, também, uma relação dialética entre a descrição dos processos de resolução de problemas, no ambiente LOGO (bidimensional e tridimensional), inserido em um contexto de animação - AVI Constructor - e os componentes funcionais dos processos cognitivos dos sujeitos pesquisados, com o objetivo de tecer considerações metodológicas, propiciando uma reflexão sobre a sua prática pedagógica.

A informática vem influenciando e servindo como recurso didático nas aulas de Matemática em relação ao ensino e aprendizagem. Hendres et. al (2005) apresentam uma investigação sobre a utilização da informática em sala-de-aula, pois acredita que esse recurso tem muito a contribuir e melhorar o aprendizado em Matemática. Aplicaram uma pesquisa no Ensino Fundamental e Médio nas escolas públicas, municipais e particulares da cidade de Canoas, e buscaram investigar junto aos professores as condições de utilização da informática como recurso metodológico nas aulas de Matemática, bem como os efeitos dessa utilização sobre os alunos e sua aprendizagem.

Verificou-se que o computador nas escolas é utilizado mais como recurso e material de apoio do que como caminho metodológico. Os professores julgam que a maior dificuldade no uso desse recurso em sala-de-aula é a quantidade de alunos e poucos equipamentos para um trabalho bem efetivo. Essa pesquisa foi elaborada de forma a mostrar realidade dos fatos, sem interferir em seu contexto. Dessa forma, prevaleceu metodologicamente o enfoque quantitativo, sendo que os dados foram coletados através de um questionário composto por 32 itens agrupados, considerando o objetivo proposto.

Conforme os autores, essa pesquisa demonstrou a possibilidade de continuar caminhando no sentido de uma formação continuada, pois os professores possuem um bom nível e capacitação e demonstram interesse em continuar se aperfeiçoando. Muitos deles já dominam o uso do computador como professor pesquisador e como apoio ao seu trabalho. Observou-se que muitos softwares de boa qualidade circulam no meio educacional, e a maioria já os conhecem. Evidencia-se, portanto, a necessidade de um

trabalho utilizando esses recursos na Matemática, tornando essas aulas mais significativas, de modo que o aluno seja construtor de seu próprio conteúdo.

## **CAPÍTULO 4**

### **METODOLOGIA**

#### **4.1 Método**

Para a realização de uma pesquisa indica-se, antes de tudo, o confronto entre os resultados da pesquisa com as evidências ocorridas durante o processo. As informações coletadas e todo conhecimento teórico que envolve a pesquisa são de fundamental importância. Nesse sentido a presente pesquisa teve como objetivos:

1. Analisar os conhecimentos geométricos adquiridos por alunos do Ensino Médio (figura plana e não plana, cubos e pirâmides, etc.).
2. Verificar o domínio de alguns dos termos conceituais e representacionais referentes à Geometria.

Bogdan (1994, p. 49) dá ênfase qualitativa no processo que tem sido particularmente útil na investigação educacional. Essas estratégias patentearam o modo como as expectativas se traduzem nas atividades, procedimentos e interações diárias. Por esse motivo é que foi escolhido desenvolver uma pesquisa desse tipo.

Para uma pesquisa de investigação qualitativa, as estratégias utilizadas baseiam-se no pressuposto de que muito pouco se sabe das pessoas e do ambiente que se deseja investigar. Esse fato se constitui num objeto de estudo, sendo que o investigador parte para o processo da investigação munido de seus conhecimentos prévios e de sua experiência.

Devido a esse fato, esta pesquisa foi desenvolvida utilizando um delineamento do método descritivo/exploratório, e serão feitas análises com metodologia de abordagem qualitativa, uma vez que o pesquisador procurará conhecer e interpretar a realidade, sem nela interferir para modificá-la.

Conforme, Rúdio (1986),

Narrar é descrever o que acontece. Assim, a pesquisa descritiva está interessada em descobrir e observar fenômenos, procurando descrevê-los, classificá-los e interpretá-los. Estudando o fenômeno, a pesquisa descritiva deseja conhecer a sua natureza, sua composição, processos que o constituem ou nele se realizam. Para alcançar resultados válidos, a pesquisa necessita ser elaborada corretamente, submetendo-se às exigências do método do trabalho (RÚDIO,1986, p. )<sup>1</sup>

Algumas análises estatísticas foram feitas com o objetivo de verificar relações entre os grupos de alunos e com o objetivo de investigar a natureza dessas relações.

## **4.2 Escolha da Amostra**

Num primeiro momento, foram escolhidos alunos da rede pública do Estado de São Paulo. Optou-se por essa escolha a fim de se assumir um sério compromisso com a educação, para melhoria do Ensino Básico.

Escolheram-se alunos pertencentes ao Ensino Médio, enfatizando-se a valorização dessa etapa da escola básica, e por ser nela em que a Geometria Espacial deveria ser formalizada. A opção pela escola foi por conveniência, tendo como requisito que a mesma deveria ter todas as séries do Ensino Médio em um mesmo período e que a direção da escola autorizasse a realização da pesquisa. A escola de Bocaina foi

---

<sup>1</sup> “Introdução ao projeto de pesquisa científica”

escolhida por apresentar essas características e por ter uma professora interessada na aplicação de todos os testes.

### 4.3 Participantes

Foram sujeitos da pesquisa 81 alunos de uma escola pública do Estado de São Paulo, no período noturno, 1ª a 3ª série, do Ensino Médio, da cidade de Bocaina-SP, da Diretoria de Ensino de Jaú, distribuídos da seguinte maneira:

Série	N
1º C	24
2º C	27
3º C	30

Tabela 1: Distribuição dos sujeitos de acordo com as séries

### 4.4 Instrumentos

Os instrumentos utilizados foram do tipo lápis e papel e se constituíram de um questionário e de uma prova matemática.

O questionário foi dividido em cinco partes, e as questões foram distribuídas na seguinte ordem:

**Questionário:** Teve como objetivo analisar o conhecimento prévio dos alunos.

#### 1- Questões sobre o que os alunos sabem sobre Geometria:

- 1- O que você entende por Geometria?
- 2- Você já estudou Geometria? Em qual (is) série(s)?
- 3- O que você mais sabe sobre Geometria?

## **2- O gostar da geometria e a importância do seu estudo**

- 4- Você gosta de Geometria? Por quê?
- 5- Por que é importante estudar Geometria?

## **3- Representação pictórica de cubo e pirâmide e a planificação do cubo**

- 6- Você já ouviu falar em cubos e pirâmides? Desenhe um cubo e uma pirâmide.
- 7- Considere um cubo. Faça a sua planificação, atrás da folha.

## **4- Identificação de objetos tridimensionais**

- 8- Considere a sua sala-de-aula. Cite algumas figuras que são tridimensionais.

## **5- Relato das dificuldades para responder o questionário.**

- 9- Quais as dificuldades encontradas para responder às questões? Atrás da folha.

**Prova Matemática:** Teve como objetivo analisar os conhecimentos geométricos dos alunos e foi dividida em duas partes:

**Questão de 1 a 4** – A ênfase foi dada na investigação de alguns conceitos geométricos, como entidade pública (Klausmeier, 1977), analisando quais atributos são utilizados nas definições. Visou também à análise das representações pictóricas desses conceitos, procurando verificar quais atributos os participantes modificavam quando desenhavam tipos diferentes de figuras geométricas.

- 1- O que é um ângulo? Desenhe dois tipos diferentes de ângulos.
- 2- O que é um triângulo? Desenhe dois tipos diferentes de triângulo.
- 3- O que é um quadrilátero? Desenhe dois tipos diferentes de quadriláteros.
- 4- O que é uma bissetriz de um ângulo? Desenhe dois tipos diferentes usando a bissetriz.

**Questões de 5 a 7** - Tiveram como objetivo analisar o entendimento dos alunos sobre as posições relativas de duas retas bem como suas representações.

- 5- Quando duas retas são paralelas? Faça um desenho.



6-Quando duas retas são concorrentes? Faça um desenho.

7-Quando duas retas são coincidentes? Faça um desenho.

**Questões de 8 a 10** – Objetivaram analisar o entendimento dos alunos sobre posições relativas de dois planos, bem como suas representações:

8-Faça a representação de um plano.

9-Faça a representação de dois planos paralelos.

10-Faça a representação de dois planos perpendiculares.

**Questões 11 e 12** – Aqui o foco foi verificar o conceito como entidade pública de polígono, suas representações e analisar se os participantes conseguiam explicar as diferenças entre figuras planas e não-planas.

11-O que é um polígono? Desenhe dois tipos diferentes.

12-Qual a diferença entre figura plana e não plana? Dê dois exemplos de figura plana e dois exemplos de figura não plana.

**Questões 13 e 14** – Pautaram-se na investigação do conceito como entidade pública de área e volume, bem como suas exemplificações.

13-Qual o seu entendimento sobre área? Dê exemplo.

14-Qual o seu entendimento sobre volume? Dê exemplo.

Em anexo está o fluxograma que mostra o detalhamento dos instrumentos utilizados na presente pesquisa.

#### **4.5 Procedimentos para a coleta de dados e critérios para análise da prova matemática**

Inicialmente contactou-se a direção da escola com o objetivo de solicitar autorização para a coleta de dados, bem como explicitar todos os passos da pesquisa. Em seguida foi contactada a professora das séries do Ensino Médio, que recebeu todas as instruções de como deveria aplicar as provas: Não era permitido o uso de livros e nem de calculadoras. A prova era individual e foi vedado fazer perguntas à professora sobre

o contexto da mesma. O conteúdo foi o mesmo para todas as séries do Ensino Médio e foi avaliada em uma escala de zero a dez.

A avaliação das questões:

Questões	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
<b>Conceito Certo=0,5</b>	X	X	X	X				X	X	X	X	X		
<b>Desenhou 1tipo=0,25</b>	X	X	X	X							X	X		
<b>Desenhou outro=0,25</b>	X	X	X	X							X	X		
<b>Respondeu correto=0,25</b>					X	X	X						X	X
<b>Desenhou correto=0,25</b>					X	X	X						X	X
<b>Pontuação</b>	<b>1,0</b>	<b>1,0</b>	<b>1,0</b>	<b>1,0</b>	<b>0,5</b>	<b>0,5</b>	<b>0,5</b>	<b>0,5</b>	<b>0,5</b>	<b>0,5</b>	<b>1,0</b>	<b>1,0</b>	<b>1,0</b>	<b>1,0</b>

Tabela 2 – Em relação às questões foram consideradas as seguintes pontuações.

#### 4.6 ESTUDO PILOTO

Com o objetivo de analisar se o questionário e a prova matemática elaborados poderiam apresentar algum problema relacionado à estrutura das questões, à linguagem utilizada ou outros problemas, foi realizado um estudo piloto com 34 alunos da 1ª série do Ensino Médio de uma escola particular da cidade de Jaú, onde a pesquisadora administra aulas, no período diurno. Não foi dada nenhuma ajuda aos alunos, sendo apenas verificado se a leitura das questões estava de fácil compreensão.

Não foram observadas dificuldades por parte dos alunos em relação à estrutura do questionário e da prova matemática. Dessa forma, o mesmo questionário e a mesma prova foram aplicados no estudo final.

## **CAPÍTULO 5**

### **ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS**

Os instrumentos utilizados para a coleta de dados foram constituídos de um questionário e de uma prova matemática. Para a análise dos dados do questionário foram feitas categorias e, em seguida, foram construídos gráficos para melhor visualizar os resultados e para comparar, por série, a categoria das respostas.

A análise da prova, que foi pontuada em uma escala de zero a dez, foi realizada, em um primeiro momento de forma quantitativa, utilizando-se testes estatísticos em que se pretendia verificar se existiam diferenças entre os sujeitos das séries de Ensino Médio com relação ao desempenho na prova de conteúdos de Geometria. A seguir, os dados mostrados pela análise quantitativa foram discutidos à luz da teoria utilizada na presente pesquisa.

#### **5.1 Análise Estatística Utilizada**

Foram realizados uma análise exploratória de dados (médias, desvios padrão, mínimo, mediana, máximo) e construídos gráficos de linhas e gráficos de barras. A análise comparativa foi realizada através do teste t de Student e ANOVA, para o

desempenho final dos alunos, e através do teste não paramétrico de Kruskal-Wallis, seguido do procedimento de comparação múltipla de Dunn para avaliar as diferenças entre as séries de cada questão.

O software estatístico utilizado nas análises foi o XLSTAT 2006 e MINITAB 14.2.

## 5.2 Análise do questionário

Na primeira questão, foi verificada, numa análise geral, que alunos do 1ª série parecem entender que a Geometria é o estudo das “figuras geométricas e de suas formas”. Já os alunos da 2ª série, em sua maioria, responderam que a Geometria é o estudo dos “ângulos” e uma grande porcentagem de alunos afirmou que “não se lembrava” ou “não sabia” o que era isso. Os participantes da 3ª série responderam, na maioria, que a Geometria era o estudo de “figuras geométricas”. O gráfico abaixo mostra a frequência das classes de respostas para a questão “o que você entende por geometria?” Tudo foi distribuído por série.

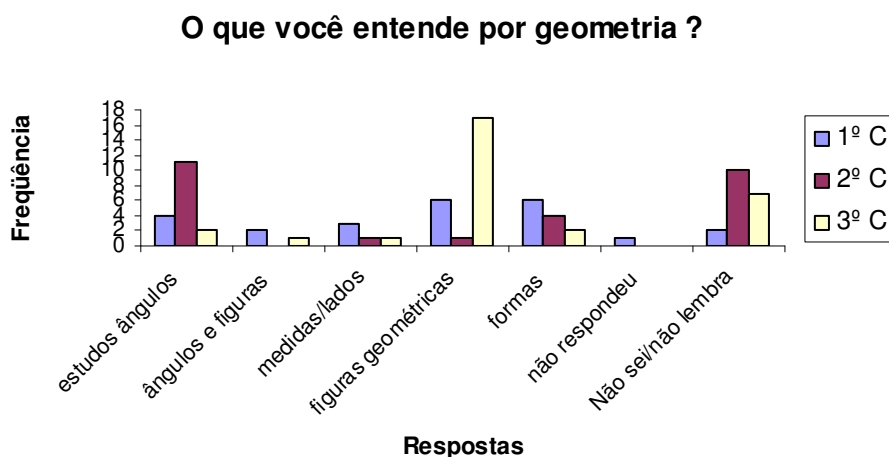


Gráfico 1 – Respostas dadas à questão 1

Na questão 2, foi perguntado se o aluno já havia estudado Geometria e em qual (is) série (s). Observando os gráficos a seguir verificamos que quase a totalidade dos alunos afirmou que já haviam estudado Geometria, sendo que a grande maioria afirmou que estudou no Ensino Fundamental. Os gráficos abaixo mostram esses resultados.

### Você já estudou geometria ?

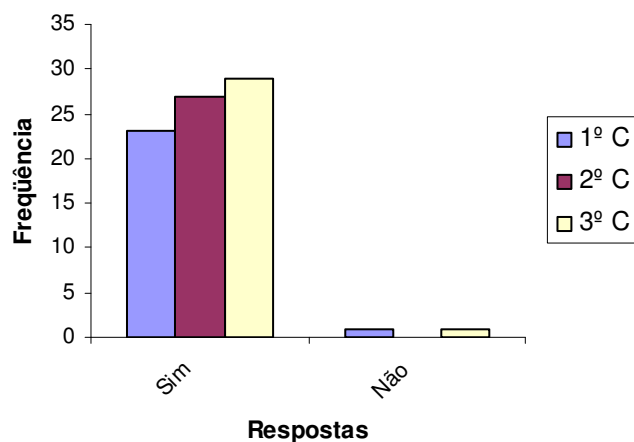


Gráfico 2 : Respostas dadas pelos participantes à questão 2

### Em qual(is) série(s) ?

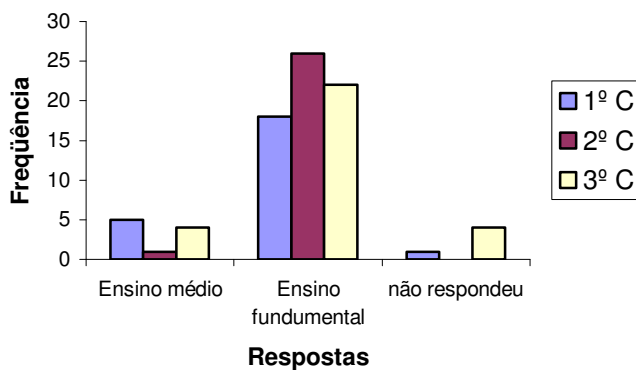


Gráfico 3: Etapa da Educação Básica em que os participantes estudaram Geometria

Na 3ª questão, foi perguntado aos participantes o que eles mais sabiam de Geometria. O gráfico a seguir mostra a frequência dessas respostas por série. Trata-se de lembranças que eles têm de conceitos pontuais, como ângulos (não especificando que tipo), figuras geométricas (não especificando quais), teorema de Pitágoras e formas. É interessante observar o alto índice de alunos da 3ª série do Ensino Médio que afirmaram não se lembrarem de quase nada ou não sabiam.

### O que você mais sabe sobre geometria ?

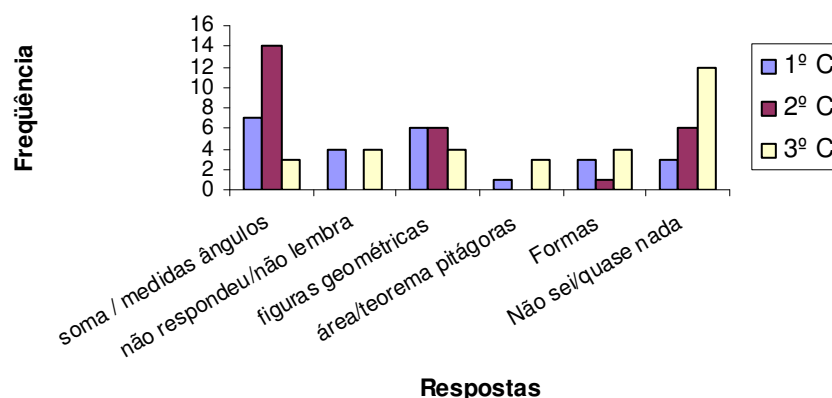


Gráfico 4: O que os participantes mais sabem sobre Geometria

Analisando os gráficos 1, 2, 3 e 4 é possível verificar que a maioria dos participantes afirmou que já estudou Geometria, sendo que esses estudos se deram no Ensino Fundamental. Dessa forma, é de se esperar que os alunos se lembrem de pouca coisa, uma vez que os conceitos geométricos não são retomados em todas as séries. Uma vez que os conceitos são aprendidos de forma mecânica, incorporados de forma arbitrária na estrutura cognitiva, dificilmente eles são resgatados para serem utilizados em situações-problemas diversos. Esses resultados parecem estar de acordo com aqueles obtidos por Pirola (2000) que mostrou um baixo conhecimento de Geometria por alunos do Ensino Médio (curso de magistério) e de licenciados em Matemática.

O gráfico 3 também mostra que pouca Geometria é estudada no Ensino Médio, segundo os relatos dos participantes. Os mais variados conceitos de Geometria de posição e métrica não são ensinados com frequência aos alunos, mostrando, assim como os trabalhos de Pavanello (1993), Pirola (1995, 2000), Lorenzato (1993), Nasser (1992), Viana (2000) entre outros, o abandono desse estudo.

O gráfico 4 mostra que os alunos se lembram de coisas pontuais de Geometria. Os conceitos que os participantes mencionaram dizem respeito à Geometria plana, não aparecendo conceitos relacionados diretamente à Geometria espacial. Dessa forma, é possível que poucas coisas tenham sido trabalhadas sobre essa parte. A negligência do trabalho com esse tipo de Geometria traz lacunas na formação do aluno, pois deixa de propiciar aos estudantes do Ensino Médio o desenvolvimento de componentes importantes do pensamento geométrico, como a percepção que, segundo

Sternberg (2000), pode ajudar os sujeitos a reconhecer, organizar e entender as sensações recebidas dos estímulos ambientais.

A aprendizagem da Matemática não está relacionada somente a aspectos cognitivos. Os aspectos afetivos também afetam a aprendizagem, como mostram os trabalhos de Viana (2005), Brito (2001), González (2001), Justulim e Pirola (2005), entre outros estudos. Sendo assim, a questão 4, que procurava investigar se os alunos gostavam ou não da Geometria, mostrou, através da análise dos dados, que os alunos, em sua maioria, não gostam desse estudo, sendo que a frequência maior de rejeição ocorreu na 3ª série. Viana, em seus estudos, mostra que as atitudes em relação à Matemática e a Geometria estão relacionadas, pois vários alunos demonstraram sentimentos distintos entre essas disciplinas. Segundo Brito (in apud Viana, 2005, p. 66), os fatores afetivos e emocionais dos alunos influenciam na profundidade do seu entendimento construído e na qualidade do material aprendido e posteriormente recordado. Ninguém consegue aprender algo sem o mínimo de interesse na atividade. Esses resultados estão de acordo com aqueles encontrados por Viana (2005), que concluiu que o desempenho em Geometria estava relacionado com o raciocínio espacial envolvendo habilidade matemática e com a atitude em Geometria. O gostar ou não da disciplina depende do que o professor escolheu para ser trabalhado na série específica. Segundo a autora, as escolas estaduais geralmente ensinam a Geometria no final do ano letivo devido ao fato de estar no final do livro didático, enfocando mais a álgebra e a aritmética. Nas escolas particulares não acontece isso. A Geometria é trabalhada separadamente da Matemática e muitas vezes por profissionais da área. Krutetskii (1976) ressalta que todos os sujeitos normais podem com mais ou menos dificuldade, aprender a Matemática escolar. Com isso podem aprender a Geometria do Ensino Médio, mas não se pode generalizar e exigir que todos os alunos desenvolvam a habilidade espacial ao mesmo tempo e no mesmo período de tempo.

### Você gosta de geometria ?

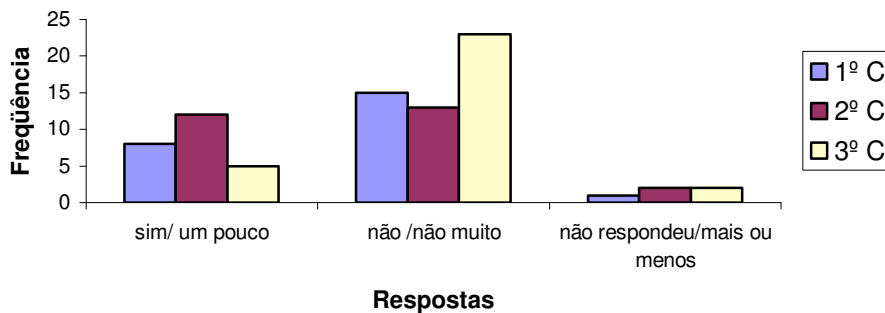


Gráfico 5: O gostar e o não gostar da Geometria

O gráfico abaixo mostra que a maior parte dos sujeitos do 1ª e 3ª séries afirmaram que não sabem ou não responderam por que é importante estudar Geometria. No 2ª série, a maioria respondeu que é importante saber, mas não sabe o porquê. Outros responderam, ainda, que a Geometria serve para usar como medidas. Os resultados são mostrados no gráfico a seguir:

### Por que é importante estudar Geometria ?

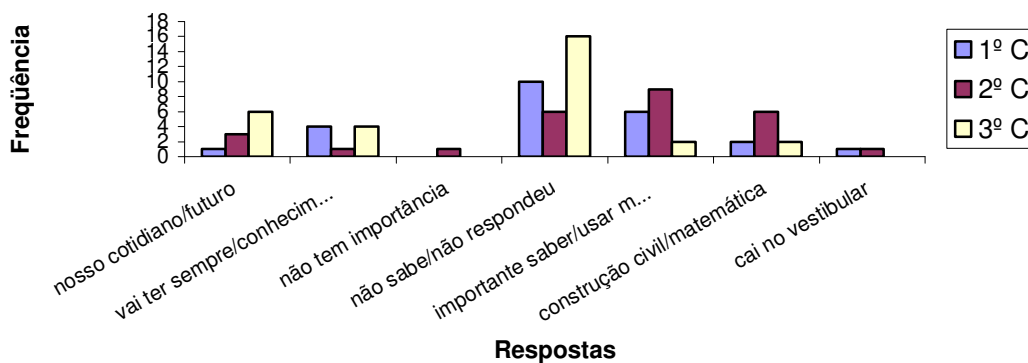


Gráfico 6: A importância de se estudar a Geometria

Analisando os gráficos 4, 5 e 6, é possível observar, por exemplo, que os estudantes do 3ª série do Ensino Médio parecem não gostar de Geometria, sabem pouco sobre ela e, talvez por isso, não conseguem identificar a importância que ela tem em sua formação. Podemos dizer o mesmo para as outras séries. Como é possível identificar as aplicações e a importância de algo, se conhecemos ou estudamos pouco sobre ela? É



possível observar também que poucos alunos relacionaram o estudo da Geometria com aspectos do cotidiano. Nas respostas dos alunos não aparecem relações dessa disciplina com outros campos do conhecimento, quais sejam-desenvolvimento da percepção, orientação espacial, habilidades de representação e de processos de pensamento em resolução de problemas envolvendo conceitos geométricos. Os participantes que responderam que a Geometria se relaciona com o cotidiano, não especificaram de que maneira ela auxilia nas atividades do dia-a-dia.

Na questão 6, foi perguntado se os participantes já ouviram falar de cubos e pirâmides. Foi solicitado que os sujeitos desenhassem um cubo e uma pirâmide. De acordo com o gráfico abaixo, observamos que as três séries do Ensino Médio conseguiram, através de seus conhecimentos prévios, reconhecerem essas figuras, mas a maioria dos estudantes não fez a representação deles.

Por exemplo: os alunos das três séries se confundiram em relação às representações geométricas de cubo e pirâmide. Os que conseguiram desenhar a pirâmide confundiram-na com triângulo, como mostra exemplos abaixo:

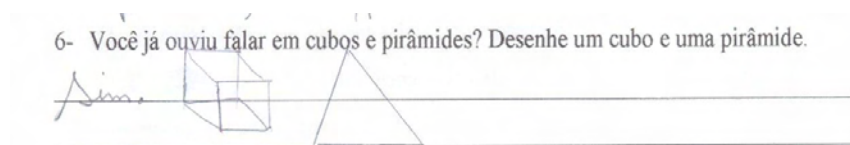


Figura 7 - Representação do aluno 05 – 1ª série

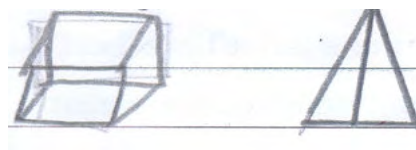


Figura 8 – Representação do aluno 06 – 1ª série



Figura 9 - Representação do aluno 12 – 1ª série

Na representação de pirâmide, os alunos da 1ª série mostraram um triângulo qualquer sem se preocuparem se o seu desenho estava sendo representado em perspectiva, eles mostram que têm dificuldade para representar objetos tridimensionais utilizando a profundidade. Um deles parece ter associado a representação das pirâmides do Egito com a representação de uma pirâmide (**aluno 12 – 1ª série**), **construindo uma pirâmide com blocos.** .

Os alunos do 2ª série e 3ª série apresentaram uma particularidade marcante em relação à representação do cubo. Quando solicitados a representá-lo, a maioria, quase a totalidade do gênero masculino, desenhou um cilindro. Veja a foto:



Figura 10 - Foto da roda de uma Bicicleta.

Este fato, já evidenciado em pesquisas de Pirola et al (1998), mostra que os participantes representaram o “cubo da bicicleta” que é de forma cilíndrica. Assim, o conhecimento prévio adquirido no seu cotidiano ficou mais evidente na representação da figura pedida, como mostra os exemplos abaixo relatados.



Figura 11 - Representação do aluno 32 – 2ª série

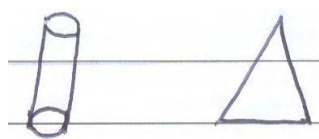


Figura 12 - Representação do aluno 52 – 3ª série

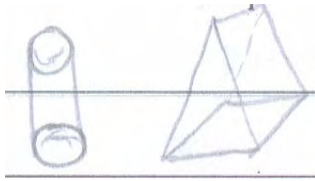


Figura 13 - Representação do aluno 55 – 3ª série

Esse fato está de acordo com os resultados obtidos nas pesquisas desenvolvidas por Pirola (2000), Pirola, Quintiliano e Proença (2003) e Proença e Pirola (2005) em que os sujeitos envolvidos nos estudos apresentavam dificuldades na discriminação entre figuras planas e não-planas. Isso pode estar relacionado à ausência do trabalho com exemplos e não-exemplos de figuras tridimensionais como poliedros e corpos redondos, e de figuras planas como observaram Pirola e Proença (2005). O trabalho com exemplos e não exemplos possibilita aos alunos discriminar figuras geométricas e classificá-las de acordo com os seus atributos, como mostram os trabalhos de Klausmeier (1977).

### Você já ouviu falar em cubos e pirâmides ?

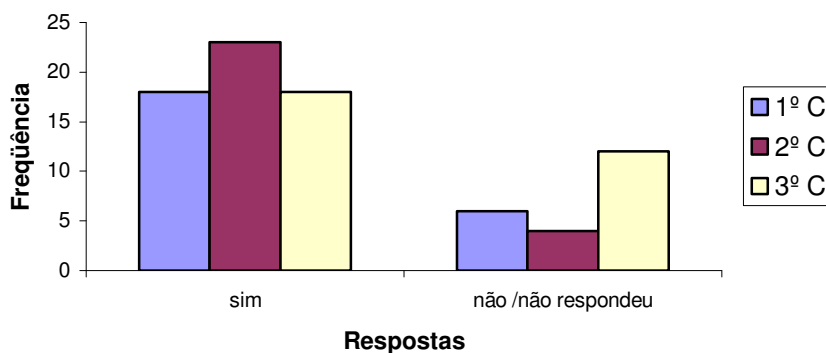


Gráfico 7: Distribuição dos sujeitos de acordo com as respostas para a questão “Você já ouviu falar em cubos e pirâmides?”

A questão 7 solicitava aos alunos: Considere um cubo. Faça a sua planificação. Observando o gráfico abaixo é possível verificar que a maioria dos alunos da 1ª série conseguiu planificar corretamente o cubo. Já os participantes da 2ª e 3ª série, em sua maioria, não planificaram ou planificaram de maneira incorreta. Esses resultados corroboram aqueles obtidos por Passos (2000) que também observou em sua pesquisa:

A dificuldade que os alunos possuem em “ler” o que as representações bidimensionais de objetos tridimensionais traduzem pode estar em não conseguirem identificar os diferentes elementos que compõem esses objetos. Dessa forma, não conseguem representar para eles mesmos determinadas propriedades desses objetos (PASSOS, 2000, p. 81).

Comparando os gráficos 7 e 8 é possível verificar que a maioria já ouviu falar de cubos e pirâmides, mas são incapazes de fazer uma representação dessas figuras. Isso, de certa forma, é preocupante, pois essas representações são constantes em nosso dia-a-dia, como, por exemplo, caixa de leite, creme dental, etc. Isso deveria ser resgatado na sua memória buscando caracterizar o conhecimento prévio dos alunos. Segundo Passos (2000), o professor pode mostrar as diferenças entre cubo, paralelepípedo e prismas, ou entre vértice, lado e aresta fazendo a desmontagem de figuras conhecidas, para o aluno poder desenvolver uma aprendizagem mais efetiva e chegar à construção de modelos bi e tridimensionais no Ensino Médio.

Quando os alunos apresentam dificuldades na representação bidimensional e tridimensional, é porque não desenvolveram uma habilidade importante que faz parte do pensamento geométrico: a habilidade visual e a habilidade de desenho que, segundo Hoffer (1981), auxiliam os estudantes na compreensão das propriedades das figuras geométricas, sejam elas planas ou não-planas. É possível verificar a dificuldade apresentada pelos alunos nas tarefas de Geometria que não apresentam componentes do primeiro nível de Van Hiele, nível de visualização – nível mais elementar do pensamento geométrico – interseccionado pelo nível Visual de Hoffer. Além disso, é possível verificar dificuldades, por parte dos sujeitos da pesquisa, na representação gráfica, não apresentando componentes do nível gráfico e lógico (Hoffer) interseccionado pelo nível 1 de Van Hiele.

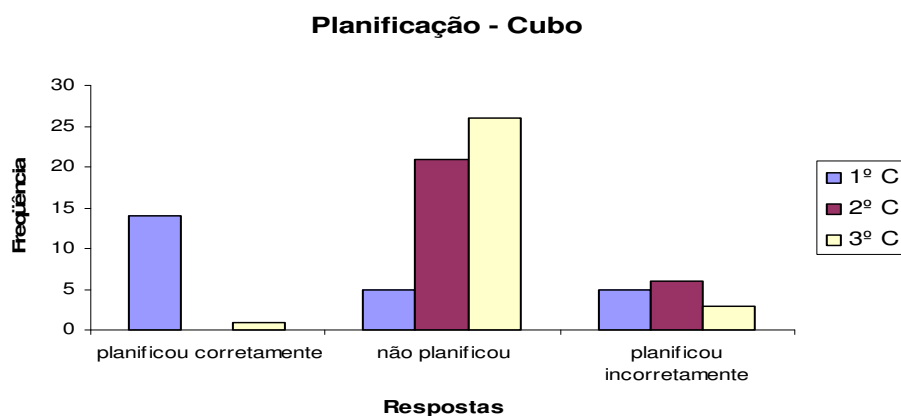


Gráfico 8: Planificação de um cubo apresentada na questão 7

Na questão 8 – Considere a sua sala de aula. Cite algumas figuras que são tridimensionais. A 1ª e 2ª série responderam corretamente essa questão. O que preocupou foi que a 3ª série, não respondeu ou não sabia dar exemplos de formas tridimensionais, sendo que em sua sala de aula estavam exposto vários objetos que poderiam ser citados. Esse fato evidencia a dificuldade dos participantes em acionar a habilidade de aplicação, segundo Hoffer, e nível de visualização (segundo Van Hiele), pois não conseguiram identificar, através dos objetos físicos, as formas geométricas tridimensionais. O gráfico a seguir mostra os resultados:

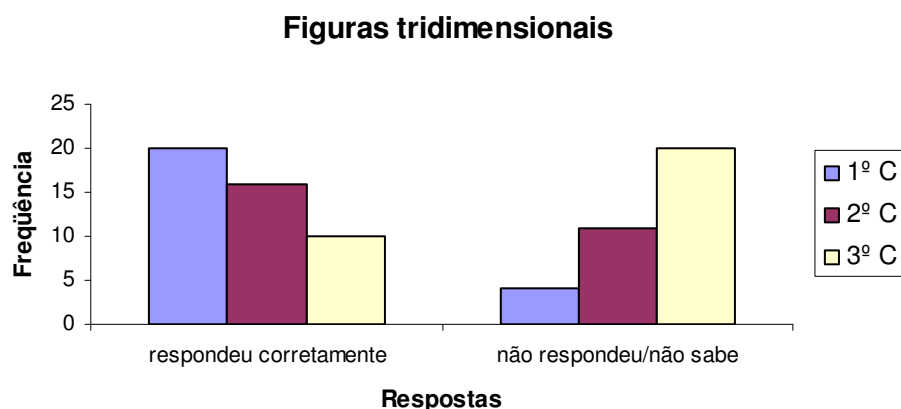


Gráfico 9: Figuras Tridimensionais encontradas no nosso cotidiano

Na última questão, foi solicitado aos alunos que apontassem as dificuldades encontradas para responder às questões anteriores. Conforme segue abaixo, a maioria da

2ª e 3ª série afirmou que a grande dificuldade era que eles estudaram essa matéria no Ensino Fundamental e não se lembravam mais dos conceitos. Já os alunos da 1ª série, em sua maioria, não respondeu.

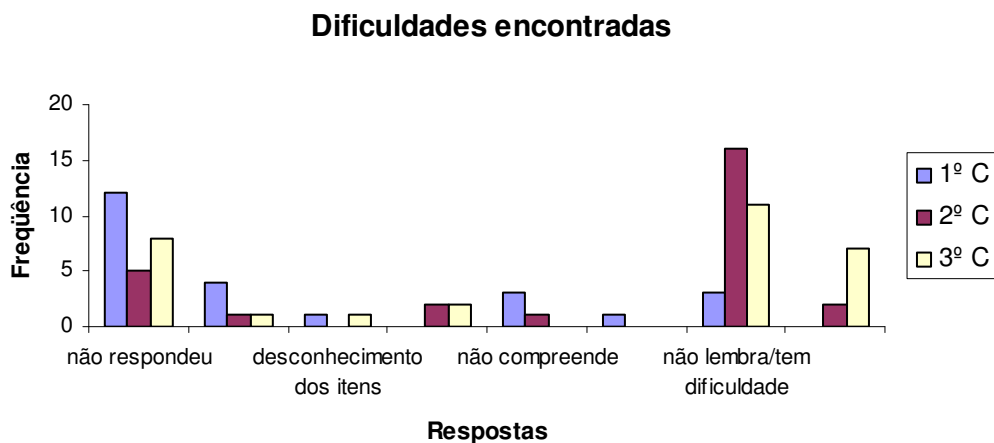


Gráfico 10: Dificuldades encontradas em responder as questões anteriores

O baixo rendimento escolar dos estudantes em Geometria foi o fato mais importante que levou o casal Van Hiele ao estudo sobre o Desenvolvimento do Raciocínio em Geometria.<sup>1</sup> A aprendizagem de conceitos geométricos se dá de acordo com cinco níveis - reconhecimento, análise, abstração, dedução e rigor - a teoria sugere que os sujeitos podem progredir nesses níveis enquanto aprendem Geometria. Para ele o principal propósito do ensino era o desenvolvimento do insight no aluno. Seu modelo centra-se no desenvolvimento de formas particulares de ensino e não no crescimento de estruturas.

Abaixo são apresentados alguns depoimentos dos alunos em relação às dificuldades que encontraram para responder às perguntas.

<sup>1</sup> CROWLEY, M. (1994) O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In LINDQUIST, M. M. & Shulte, A.P. (Org.) Aprendendo e Ensinando Geometria.

9- Quais as dificuldades encontradas para responder às questões? Atrás da folha.

Vou ser muito sincero. Faz muito tempo q ñ vejo o assunto, nunca gostei de geometria, e grad os prof. passaram a matéria, e ñ prestava atenção e ficava ~~brincando~~ brincando.

Figura 14 – Aluno 57

as minhas dificuldades é não lembrar o significado de algumas palavras.

Figura 15 – Aluno 60

9) Bom eu não estudava aqui em  
Lecania eu era de Paraguará, e não sei  
o que quer dizer muito isso de 1º a 3º eu  
estudei no Leonardo Barbieri e lá não sei como  
peguei pq nunca tinha me interessado em estudar  
e nunca mais não jogava por não sei. E de 1º a 2º  
eu estudei no Lú e tbm não sei como eu  
peguei pq + faltava do que ia a escola e peguei lá  
o gente io + no período q ficava na escola. me distraia  
+ eu não sei responder.  
Eu só sei o que quer dizer geometria nos casos  
da régua geométrica que tem desenhos geométricos

Figura 16 – Aluno 75

Moraco e Pirola (2005) fizeram um trabalho com o objetivo de caracterizar como alunos do Ensino Médio percebem a linguagem geométrica e suas propriedades no ensino de Geometria em Matemática. Esse estudo foi baseado nos níveis de Van Hiele e verificou-se que o ensino de Matemática deve proporcionar aos alunos o desenvolvimento de algumas habilidades, entre elas, a capacidade de resolver problemas que envolvam conceitos geométricos.

Nessa pesquisa, foi constatado que a grande maioria os alunos não atingiram nem o primeiro nível de Van Hiele, que corresponde ao reconhecimento, no qual os alunos identificam, comparam e nomeiam figuras geométricas com base em sua aparência global. Segundo Nasser (1992), esse resultado pode ser explicado pela ausência de experiências prévias em Geometria, e pela eliminação do curso de Desenho Geométrico do currículo da maioria das escolas públicas.

Em uma das questões foi pedido aos alunos fazerem a representação de dois planos perpendiculares, um aluno da 1ª série respondeu que não sabia o que era perpendicular. Essa construção era bastante trabalhada no Desenho Geométrico o que, infelizmente, não acontece mais.

### 5.3 Análise do desempenho na prova de conteúdo de Geometria

A prova de conhecimentos geométricos foi avaliada em uma escala de zero a dez. A tabela 1 e o gráfico 11 mostram as médias e os desvios-padrão referente a cada questão por série.

Questão	1º C		2º C		3º C	
	Média	D.Padrão	Média	D.Padrão	Média	D.Padrão
1	0,40	0,23	0,44	0,39	0,29	0,32
2	0,71	0,37	0,73	0,35	0,55	0,37
3	0,68	0,37	0,58	0,45	0,38	0,42
4	0,27	0,25	0,02	0,10	0,01	0,05



5	0,27	0,21	0,15	0,21	0,16	0,19
6	0,13	0,20	0,04	0,11	0,08	0,14
7	0,13	0,18	0,00	0,00	0,08	0,18
8	0,03	0,11	0,01	0,05	0,03	0,10
9	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,09
10	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,09
11	0,32	0,36	0,00	0,00	0,00	0,00
12	0,04	0,20	0,00	0,00	0,00	0,00
13	0,07	0,16	0,09	0,19	0,08	0,18
14	0,00	0,00	0,06	0,14	0,04	0,13

Tabela 3 – Média e desvio padrão por questão e por série na prova de Geometria

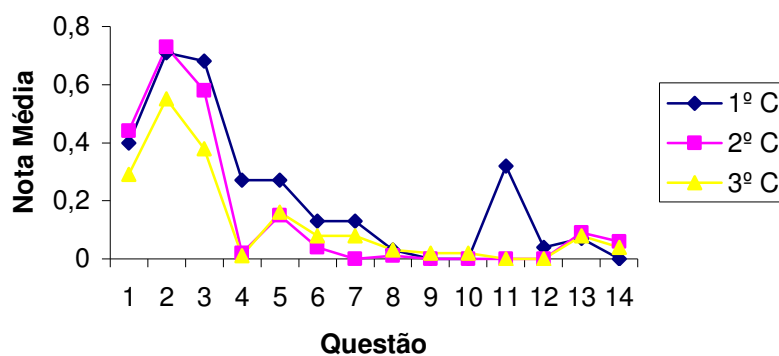


Gráfico 11: Nota media dos alunos por questão

Analisando a tabela 1 e o gráfico 11 é possível observar que as questões com maiores pontuações foram as questões 2 e 3, relacionadas a triângulos e quadriláteros. Em seguida aparece a questão 1, que é relacionada a ângulos.

Abaixo destacamos um exemplo dado por um aluno da 2ª série, referente a triângulos e quadriláteros.

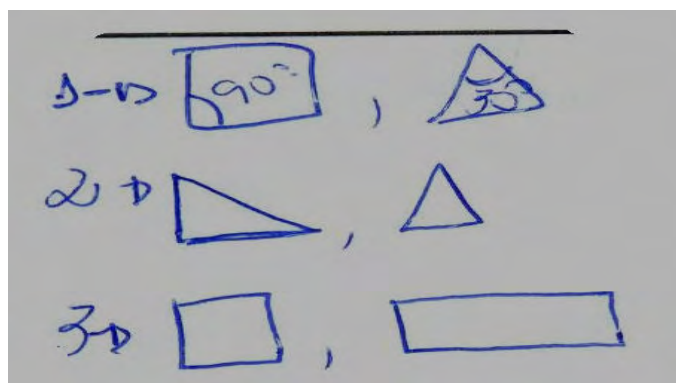


Figura 17 – Aluno 56

Os alunos da 1ª série obtiveram maiores pontuações médias em todas as questões do instrumento, com exceção da questão 14, relacionadas a volume. A pontuação dos alunos da segunda e terceira série também foi muito pequena. A média da questão 11 foi muito maior para os alunos da 1ª série.

Pelos resultados apresentados na tabela e gráfico anteriores, as questões 8, 9, 10 e 12 apresentaram pontuações muito baixas, praticamente zero, em todas as séries, indicando que essas foram as questões mais difíceis.

As questões 8, 9 e 10 diziam respeito à representação de um plano e de posições relativas de dois planos (paralelos e perpendiculares). A análise dos protocolos mostrou dificuldades, por parte dos sujeitos, na representação de plano. De acordo com os níveis de Van Hiele, os sujeitos da pesquisa apresentam dificuldades logo no primeiro nível – reconhecimento – e nível visual (Hoffer), pois não conseguiram representar pictoricamente essa forma, demonstrando, aparentemente, total desconhecimento da representação de planos. Segundo Brito e Pirola (2001) houve um desaparecimento da Geometria de posição dos currículos escolares. Através do estudo desses conteúdos os alunos tinham a oportunidade de desenvolver a linguagem geométrica e a percepção espacial.

Na questão 8, o aluno representa o plano como uma reta. Veja no quadro abaixo:

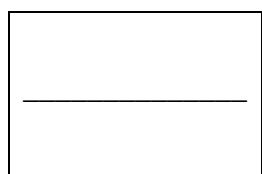


Figura 18 – Questão 8 – faça a representação de um plano

Na questão 9, a representação de dois planos paralelos foi representada duas retas paralelas, como no exemplo a seguir:

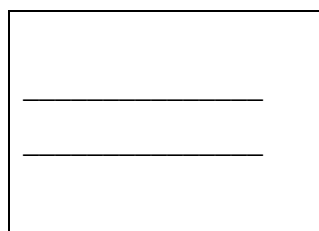


Figura 19 – Questão 9 - Faça a representação de dois planos paralelos

Na questão 10, em que a representação deveria ser dada através de um desenho com dois planos perpendiculares, nenhum aluno conseguiu realizar tal representação.

Pôde-se verificar que os alunos aparecem distribuídos principalmente de acordo com o grau de aquisição do nível 1. Assim, verifica-se não apenas como foram os acertos na questão do reconhecimento das figuras, mas, principalmente, que categoria de linguagem foi utilizada por esses alunos nos diferentes graus e conceitos empregados para responder as questões.

Muitos alunos deixaram essa resposta em branco e os que responderam colocaram que não se recordam desse assunto, por terem estudado há muito tempo. A dificuldade em fazer uma imagem mental e sua representação do que é um plano paralelo ou perpendicular está evidente neles. Verificou-se que os conhecimentos muitas vezes considerados óbvio para nós, não são para eles. Daí a necessidade de se trabalhar a Geometria e suas construções em sala-de-aula.

Passos (2000) mostra a importância do ensino de Geometria e ressalta que não se pode deixar de reconhecer o papel da percepção espacial. O reconhecimento das formas geométricas e sua representação no plano, assim como as propriedades intrínsecas devem ser trabalhadas de uma forma bastante efetiva. Da mesma forma, a autora enfatiza o trabalho com atividades que mostrem as transformações geométricas no plano, como rotação, reflexão e translação, pois são importantes para os estudantes compreenderem as diferentes formas de relações espaciais.

As questões 6, 7, 13 e 14 também apresentaram pontuações muito baixas. Nas questões 6 e 7 trata-se da verificação de retas concorrentes e coincidentes. O que se percebe é que esses termos são poucos explorados pelos professores em sala-de-aula. Os

alunos que responderam essa questão colocam que são concorrentes porque estão uma do lado da outra e coincidentes porque são iguais, só que na representação colocam duas retas paralelas.

Veja alguns exemplos dessas retas apresentadas por alunos:

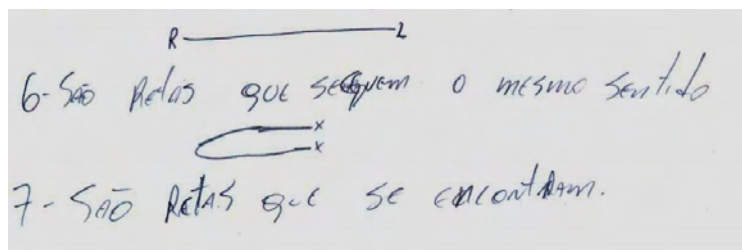


Figura 20 - Aluno 35 – 2ª série

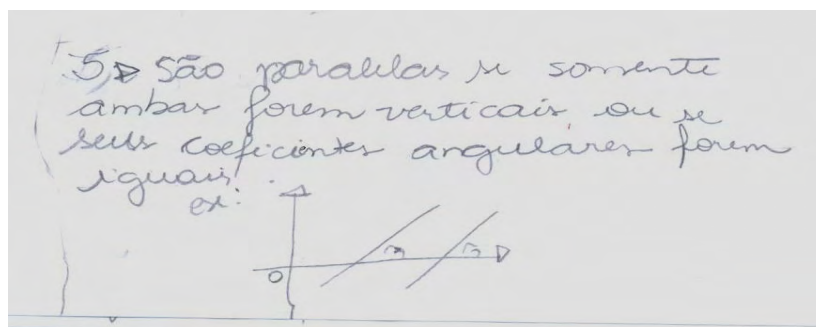


Figura 21 - Aluno 64 – 3ª série

Nessa questão, ficou evidente a representação da Geometria Analítica que estuda os coeficientes angulares. Percebe-se que o aluno se confunde quanto ao reconhecimento de propriedade do paralelismo. Isso pode ser observado, conforme a explicação do aluno na figura 21.

Na questão 13 e 14 alguns alunos aplicaram fórmulas sobre área e não conseguiu responder a de volume, o que mostra que esse conteúdo foi trabalhado mais mecanicamente do que os outros conteúdos da Geometria.

Muitas dessas questões aparecem com a seguinte resposta: “não sei responder” ou “no momento não sei, mas já ouvi falar”.

Devido a esse fato, deparamo-nos com a necessidade de trabalhar os conceitos geométricos envolvendo os pensamentos visuais dominantes na Geometria, que a nosso ver, seriam essenciais para o desenvolvimento de problemas geométricos, podendo ajudar o educando a entender melhor a linguagem geométrica e suas relações

no processo ensino/aprendizagem. Para isso busquei nos níveis de Van Hiele verificar a existência de uma hierarquia de conceitos relativos às figuras geométricas espaciais, bem como o de classificar os alunos nessa hierarquia.

Segundo Passos (2000, p. 63) algumas tentativas para reverter o quadro de abandono no ensino da Geometria têm sido propostas no Brasil, assim sugerem o modelo teórico de desenvolvimento geométrico de Van Hiele, publicado na Proposta Curricular de Matemática, a qual visa analisar a importância do ensino da Geometria na formação do professor das séries iniciais do Ensino Fundamental como também trabalhar com objetos e elementos presentes no cotidiano dos alunos.

#### **5.4 Análise de comparação das séries**

Foi utilizado o teste não paramétrico de Kruskal-Wallis para avaliar as diferenças entre as séries para cada questão. A comparação múltipla foi realizada com o procedimento de Dunn.

Não foram encontradas diferenças significativas entre as séries para as questões 1, 2, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13 e 14 (Kruskal-Wallis ; P-Valores > 0,05).

A pontuação para a questão 3 foi significativamente superior para a série 1º C comparada à série 3º C.

A pontuação para a questão 4 foi significativamente superior para a série 1º C comparada às séries 2º C e 3º C.

A pontuação para a questão 7 foi significativamente superior para a série 1º C comparada à série 2ª C.

A pontuação para a questão 11 foi significativamente superior para a série 1ª C comparada às séries 2ª C e 3ª C.

O desempenho dos alunos em Geometria foi calculado baseado nas médias das 14 questões do instrumento. A média final do desempenho do aluno variou de 0 a 10.

Série	N	Média	D.Padrão	Mínimo	Mediana	Máximo
1ª. C	24	2,2	1,2	0,0	2,2	4,6
2ª. C	27	1,5	0,9	0,0	1,4	3,0
3ª. C	30	1,3	1,1	0,0	1,1	4,3

Tabela 4 – Média e desvio padrão para o desempenho dos alunos em geometria.

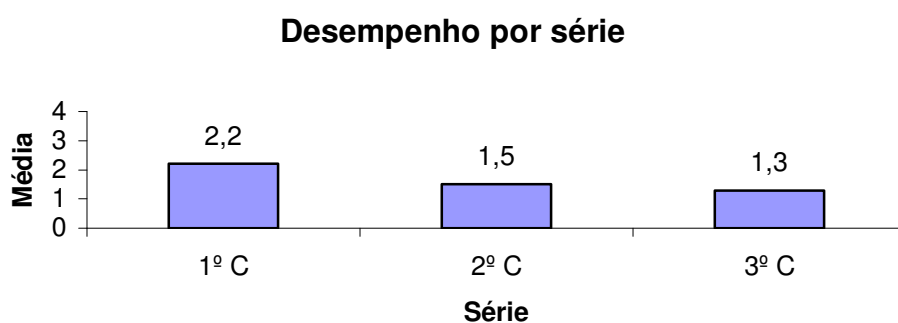


Gráfico 12 – Desempenho por série

Foram encontradas diferenças significativas entre as séries com relação ao desempenho em Geometria (ANOVA;  $F=5,5$  e  $P=0,006$ ). O resultado dos alunos da série 1ª C foi superior, comparado às séries 2ª C e 3ª C.

Gênero	N	Média	D.Padrão	Mínimo	Mediana	Máximo
Feminino	38	1,7	0,9	0,0	1,5	3,9
Masculino	43	1,5	1,3	0,0	1,6	4,6

Tabela 5 – Média e desvio padrão para o desempenho dos alunos em Geometria, levando-se em conta o gênero.

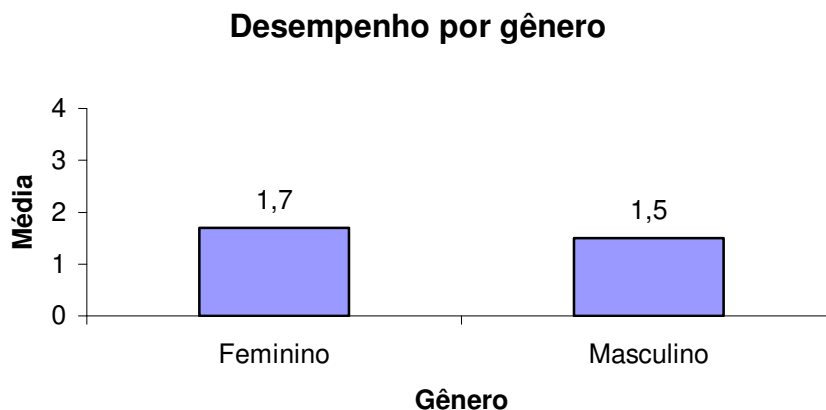


Gráfico 13 – Desempenho por gênero

Em relação ao gênero, não foram encontradas diferenças significativas entre as séries com relação ao desempenho em Geometria (teste t de Student ;  $t=0,84$  e  $P=0,401$ ).

Tanto alunos do gênero feminino como masculino apresentaram um baixo nível de conceitos e aprendizagem em Geometria. Alunos das três séries do Ensino Médio alegaram que aprenderam no Ensino Fundamental e nunca mais estudaram essa matéria. Os alunos da 1ª série, que responderam a maioria das questões, alegaram ter estudado na 8ª série (9º ano) do Ensino Fundamental, por isso se lembram de alguma coisa, daí a diferença entre as outras séries. Pode ser devido a esse fato que essa série teve uma pontuação melhor que as outras.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa buscou analisar os conhecimentos geométricos adquiridos por alunos do Ensino Médio, bem como suas principais dificuldades em termos conceituais e representacionais.

Constatou-se que os sujeitos, alunos do Ensino Médio de uma escola pública do Estado de São Paulo, aprenderam muito pouco sobre Geometria ao longo de sua escolaridade, principalmente em se tratando de Geometria Espacial. A maioria desses alunos alegou não gostar muito dessa disciplina. Os alunos que apresentaram um melhor desempenho foram os alunos do 1ª série, talvez por terem estudado um pouco mais de Geometria na oitava série (nono ano), como muitos alegaram. Esse “melhor desempenho” é relativo, pois o foi em relação às outras turmas, uma vez que as médias foram muito baixas: 2,2 para a primeira série, 1,5 para a segunda série e 1,3 para a terceira série. O que se esperava é que os alunos da terceira série tivessem um desempenho melhor que os outros, pois estariam concluindo o Ensino Médio, a última etapa da educação básica.

Em termos de conhecimentos geométricos, a análise dos protocolos mostrou que os alunos parecem desconhecer conceitos básicos de Geometria Espacial, como retas paralelas, planos paralelos e retas concorrentes.

Sendo assim, parece que a ordem de construção dos conceitos geométricos trabalhados conforme Klausmeier (1977) enquanto entidade pública difere da ordem de construção dos conceitos enquanto construto mental. A própria linguagem utilizada como ponto, reta, plano, segmentos, etc., parece estar muito distante do cotidiano de nossos alunos, embora tenha sido largamente trabalhada pela Matemática Moderna nas décadas de sessenta e setenta.

Van Hiele, ao descrever os níveis de aprendizagem enfatizou a importância do material utilizado pelos alunos e professores; ele deveria propiciar, ao aluno, condições para buscar no seu conhecimento prévio respostas às questões propostas. No entanto, a maioria dos alunos mostrou que não dominava os conceitos sobre a



Geometria Espacial, pois não havia estudado esse conteúdo nem no Ensino Fundamental e nem até o momento da coleta de dados deste trabalho.

De acordo com a teoria de Van Hiele, no nível 1, o indivíduo perceberia os conceitos geométricos como um todo, reconheceria as figuras e não suas partes ou propriedades. Essa idéia de percepção se aproxima da Gestalt. Ou seja, as formas seriam percebidas como um todo e não pelos seus componentes ou atributos, sendo somente reconhecidas aquelas que lhe são familiares. No presente estudo, os participantes encontraram dificuldades logo no primeiro nível de Van Hiele.

Como essa teoria foi desenvolvida para ser utilizada em um ambiente escolar, no nível 1, os alunos do Ensino Médio já seriam capazes de estabelecer as relações perceptuais necessárias para reconhecimento não apenas das formas das figuras familiares, mas também as formas topológicas (para as formas mais simples), projetivas (para as que envolve perspectiva) e métricas ( para as que envolve medidas, ângulos, paralelismo, etc.). No entanto, segundo a teoria, os atributos relacionados às formas só seriam reconhecidos se fossem formas apresentadas anteriormente, não conseguiriam generalizar de uma forma para outra, mas poderiam identificar a forma e até reproduzir um desenho em papel.

É possível verificar que o reconhecimento e a nomeação de figuras só seriam características relativas ao primeiro nível de Van Hiele se a forma em questão fosse semelhante a alguma outra apresentada (e nomeada) aos alunos ou então se lhes fosse uma figura bastante familiar. O resultado do presente trabalho mostrou que os alunos não atingiram o nível 2 de Van Hiele, que se refere às figuras como o cubo, por exemplo. Nesse nível, segundo o autor, os alunos conseguiriam representá-lo tendo seis faces quadradas e iguais e dariam significado às palavras que se relacionassem ao conceito de cubo. No entanto, nenhuma série chegou nesse nível de conceitos proposto por Van Hiele.

Em termos de dificuldades representacionais, foram observadas grandes deficiências relacionadas à habilidade de desenho e habilidade lógica, segundo Hoffer. Essas dificuldades podem ser decorrentes de alguns fatores:

- 1- Ausência de trabalho com a Geometria de posição;
- 2- Ausência de trabalho com o Desenho Geométrico;
- 3- Desvalorização, por parte de muitos professores, das representações bidimensionais e tridimensionais de figuras

geométricas, com a valorização da aprendizagem mecânica de conceitos e princípios geométricos;

- 4- Ausência de trabalho com a Geometria Espacial Métrica, em que os alunos são levados ao estudo dos poliedros e corpos redondos e têm a possibilidade de fazer suas representações planas.
- 5- Ausência, na maioria das escolas, de um trabalho com a percepção, que segundo Sternberg auxilia na representação mental dos objetos.

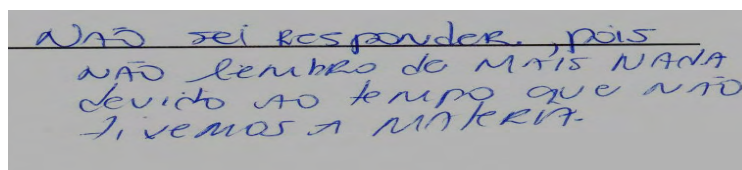
Considerando-se a importância do ensino da Geometria na formação geral dos alunos, sem interferir nos dados coletados da pesquisa, ressalta-se a necessidade de novas propostas de ensino que estimulem os nossos alunos a progredirem gradualmente no desenvolvimento do seu conhecimento geométrico.

No presente estudo, foi verificado que a grande maioria dos participantes destacou que a Geometria estava relacionada com as figuras geométricas e que seu estudo foi efetuado no Ensino Fundamental. Muitos desses alunos afirmaram que é importante estudá-la e que não gostam muito dessa matéria.

É importante que o ensino de Geometria valorize a formação conceitual e representacional e que seja articulado de forma interdisciplinar, utilizando-se elementos das artes e da natureza como recurso didático. Dessa forma, é provável que os alunos, a partir desses elementos, possam observar as aplicações e belezas da Geometria.

Na representação tridimensional de cubo e pirâmide, verificou-se que alguns alunos representaram o cubo de maneira correta e para a pirâmide utilizou o triângulo para sua representação. Isso mostra a dificuldade que os alunos possuem na discriminação entre figuras planas e não-planas, que também foram identificadas em trabalhos anteriores feitos por Pirola, Quintiliano e Proença (2003). Em relação à representação do cubo, foi verificado que um elemento geométrico bastante simples, estudado desde a pré-escola, o cubo, foi confundido com um outro presente no cotidiano dos alunos – o cubo da bicicleta que é de forma cilíndrica. Em relação a esse aspecto é importante que os professores enfatizem que cubo, em Matemática, não é um cilindro. Matematicamente, essas duas figuras são diferentes: uma é um poliedro e a outra é um corpo redondo.

Quando foi perguntado a um aluno da 2ª série quais seriam suas dificuldades em responder as questões anteriores, foi observado o seguinte motivo:



NÃO sei responder, pois  
NÃO lembro de MAIS NADA  
devido ao tempo que NÃO  
tivemos a MATEMÁTICA.

Figura 22 – Aluno 56

Essa afirmação foi feita por vários alunos, que disseram não se lembrar mais da Geometria, pois fazia muito tempo que não estudavam essa parte da Matemática.

É importante salientar que a formação de conceitos em Geometria se fundamenta não apenas no processo cognitivo da aprendizagem, mas está relacionada com o conhecimento prévio adquirido pelos estudantes em sala-de-aula e contribui de forma significativa para a realização de trabalhos que envolvam a Geometria.

Valorizar o ensino é valorizar o desenvolvimento de uma forma de pensamento que possibilite aos alunos compreender o espaço em que vivem, as formas da natureza, as belezas das obras de arte, sob a ótica das propriedades das figuras geométricas.

Pela minha experiência, acredito que a construção de figuras geométricas auxilia na aprendizagem dos alunos, mas somente o seu uso não é suficiente, pois, além disso, é necessário que haja um maior interesse por parte dos alunos para que assim estes se sintam mais motivados a ver o resultado de seus construtos. Através da revisão, verificamos que a maioria das pesquisas mostra uma grande preocupação com o rumo que se vem dando ao ensino de Geometria, principalmente, no Ensino Médio. Por isso, é que muitos autores apresentam isso em seus trabalhos e buscam novos meios de aprendizagem.

Quando iniciei meu curso de mestrado, levava comigo uma preocupação: O que estava acontecendo com o ensino da Geometria, cujas idéias e conceitos as pessoas pareciam não mais conhecer e entender?

Como professora de Matemática da Rede Pública de Ensino, eu percebia que, a cada ano, meus alunos demonstravam menos conhecimento dos conceitos geométricos elementares. Minha preocupação se agravou, quando, em um curso de capacitação de docentes, promovido pela Diretoria de Ensino da minha cidade, observei que poucos dos participantes incluíram Geometria entre os temas a serem abordados em

sala-de-aula. Muitos deles chegaram a afirmar que não se sentiam animados a fazê-lo, porque não dominavam nem o conteúdo nem a maneira de desenvolvê-la com seus alunos. Sentiam insegurança por não a terem estudado isso na faculdade, e acreditavam que seus alunos não gostavam dessa matéria. Todavia, muitos daqueles que incluíram a Geometria entre os tópicos a serem desenvolvidos em sala-de-aula, afirmavam que, por falta de tempo, não conseguiam chegar a abordá-la, nem parcialmente.

Embora a insegurança de grande parcela dos professores em relação à Geometria se revelava, percebia-se isso, pelos insistentes pedidos de cursos de capacitação para as Universidades e para as Delegacias de Ensino. O que mais me chamava a atenção era a falta de questionamento sobre gostar ou não gostar de se trabalhar a Geometria, do ponto de vista pedagógico ou matemático, não trabalhar esse tema, ou se trabalhá-lo isoladamente dos demais conteúdos matemáticos, prejudicaria o ensino e, com isso, a aprendizagem dos alunos.

E foi esta a situação que me levou a escolher como objetivo, analisar os conhecimentos geométricos adquiridos por alunos do Ensino Médio e verificar o domínio de alguns dos termos conceituais e representacionais. É evidente que a Geometria, se não for ensinada ou for ensinada de maneira inadequada, pode causar sérios prejuízos à formação dos indivíduos, como vem constatar o resultado desta pesquisa.

## REFERÊNCIAS

ALVES, E. V. **Um Estudo Exploratório dos Componentes da Habilidade Matemática Requerida na Solução de Problemas Aritméticos por Estudantes do Ensino Médio.** Dissertação de Mestrado. Faculdade de Educação da Unicamp. Campinas –SP. 1999.

ALVES, E. V. **Um Estudo Exploratório das Relações entre Memória, Desempenho e os Procedimentos Utilizados na Solução de Problemas Matemáticos.** Tese de Doutorado. Unicamp-SP, 2005.

AUSUBEL, D.P; NOVACK, J.D; HANESIAN, H. **Educational Psychology: A Cognitive View, Second Edition,** New York: Holt, Rinehart and Winston.1968.

BARKER, S. F. **Filosofia da Matemática.** Rio de Janeiro - RJ. Zahar editores. 1969. 141p.

BERDONNEAU, C. & ABERKANE, C. F. **O Ensino da Matemática na Educação Infantil.** Porto Alegre, RS: Artes Médicas, 1977.

BOGDAN, R. e BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação. Uma Introdução à Teoria e aos Métodos.** Editora Porto. Coleção Ciências da Educação. 1994, 335p.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Guias Curriculares Nacionais.** Brasília. 1975.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.** Parte III: Ciência da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 1999. p 1-113.

BRASIL. Mec / Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (9 volumes).**Brasília. 1997.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática 5ª. a 8ª. Série do Ensino Fundamental** – 3º. E 4º. Ciclo. Brasília. 1998.

BRITO, M. R. F. O Ensino e a Formação de Conceitos na Sala de Aula in Novaes, M.H & Brito, M.R.F (org) **Psicologia da Educação: Articulação entre pesquisa, formação e prática pedagógica**. Coletânea da ANPEPP N 5 V 1, Setembro, 72-93. Rio de Janeiro: Xeron,1996.

BRITO, M. R. F. et. al. **Adaptação e Validação de uma Escala de Atitudes em Relação à Matemática**. Zetetiké, V. 6 no. 9, 1998, p. 109-162.

BRITO, M. R. F. & PIROLA, N. A. **A Formação dos Conceitos de Triângulo e de Paralelogramo em Alunos da Escola Elementar**. In Psicologia da Educação Matemática: Teoria e Prática. 2001, p. 85-106.

BRITO, M. R. F. & GARCIA, V. J. N. A Psicologia Cognitiva e suas aplicações à Educação. In Brito, M.R.F (org) **Psicologia da Educação Matemática: Teoria e Prática**. Florianópolis: Insular. 2001.

BRITO, M. R. F. Contribuições da Psicologia Educacional à Educação Matemática. In Brito, M.R.F (org) **Psicologia da Educação Matemática: Teoria e Prática**. Florianópolis: Insular. 2001, p. 49-67.

BUSSAB, W.O. e MORETTIN, P. **A Estatística Básica**, 5ª ed, 2003.

CARVALHO, P.C.P. **Introdução a Geometria Espacial**. Coleção Professor de Matemática - 1999.

CONOVER, W.J. *Practical Nonparametric Statistics*. 3<sup>rd</sup> Edition, 1999. John Wiley & Sons, Inc.

CROWLEY, M. L. **O Modelo de Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico**. in Lindquist, M.M; Shulte,A.A.(org) **Aprendendo e ensinando geometria**. Tradução de Hygino H. Domingos. São Paulo: Atual, 1994.

EVES, H., **Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula Geometria**. São Paulo-SP. Atual Editora Ltda. 1993. 77p.

EYSENK, M.W. & KEANE, M. T. **Psicologia Cognitiva: Um Manual Introdutorio**. Tradução Wagner Gesser, Maria Helena F. Gesser. Porto Alegre: Artes Médicas. 1994.

GONÇÁLEZ, M.H.C. **Atitudes (des) favoráveis com relação à Matemática**. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Educação. Unicamp. 2001.

HAMAZAKI, A. C. **O Ensino de Geometria por Meio da Metodologia Van Hiele: Uma Experiência**. Universidade Guarulhos. 2005. p. 1-10- Disponível em : <http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/>. Acesso em: 12 março 2006.

HENDRES ET AL. **A informática como Recurso Didático nas aulas de Matemática – Uma visão Docente**. Ulbra – São João – 2005.

HOFFER, A. **Geometry is more than proof. Mathematics Teacher**. January. 1981.74p.

KLAUSMEIER, H. J & GOODWINN, W. **Manual de Psicologia Educacional**. Tradução: Maria Célia T. A. Abreu. São Paulo: Harper & Row do Brasil Ltda.1977.

KRUTETSKY, V. A. **The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren**. Chicago, IL: University of Chicago Press.1976

LDBEN- **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. 1996.

LIMA et al. **Ensino de Geometria: um estudo dos saberes gerados investigando a própria pratica docente**, I EPEM de São Paulo, 2005. p. 1 -12. Disponível em : <http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/>. Acesso em: 21 agosto 2006.

LINDIQUIST, M; SHULTE, A. **Aprendendo e Ensinando Geometria**. São Paulo, Atual, 1998.

LINTZ, R. G., **História da Matemática** Vol.1. Blumenau-SC. Editora da Furb, 1999. 520p.

LORENZATO, S. “Os por quês matemáticos dos alunos e as repostas dos professores” *Pró-posições*, 1993, Vol. 4, no. 10. p. 73-77.

LORENZATO, S., **Por Que Não Ensinar Geometria?** Faculdade de Educação da Unicamp – A educação Matemática em Revista –geometria. Blumenauer, no. 4, p 03-13, 1995. Edição especial.

MIGUEL, A. e Outros. **Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo?** Campinas-SP , *Pró-Posições*, Vol. 3, no. 1[7], p.p. 39-54, 1992.

MIORIM, M. A, **Introdução a Historia da Educação Matemática**. São Paulo: Editora atual. 1998.

MISKULIN, R. G. S. **Concepções Teóricas – Metodológica Baseadas em Logo e em Resolução de Problemas para o Processo Ensino/Aprendizagem da Geometria**. Dissertação de Mestrado. Unicamp-SP, 1994.

MISKULIN, R. G. S. **Concepções Teóricas – Metodológicas sobre a Introdução e a Utilização de Computadores no Processo Ensino/Aprendizagem da Geometria**. Tese de Doutorado. Unicamp-SP, 1999.

MONTGOMERY, Douglas C.. *Design and analysis of experiments*. 4<sup>th</sup> edition, 1997. John Wiley & Sons, INC.

MORACO, A.S.C.T. & PIROLA, N.A. **Uma análise da Linguagem Geométrica no Ensino de Matemática**. Associação Brasileira Pesquisa em Educação para Ciências. Atas do EMPEC no. 5. 2005. 263p.

MORAES, L., **O Abandono da Geometria uma Visão Histórica**. Campinas: DEME – FE-UNICAMP. Dissertação Mestrado. 1989. 196p.



NACARATO, A. M. **Educação Continuada sob a Perspectiva da Pesquisa Ação: Currículo em Ação de um Grupo de Professores ao Aprender Ensinando Geometria**. Unicamp-SP, Tese de Doutorado. 2000.

NASSER, L. **O Desenvolvimento do Raciocínio em Geometria**. Boletim GEPEN, (27). 93-99. 1990.

NASSER, L.. **Using the Van Hiele Theory to Improve Secondary School Geometry in Brazil**. London, University of London, (Tesis for the PhD degree ). 1992.

NASSER, L. **A teoria de Van Hiele: Pesquisa e Aplicação**. Trabalho Apresentado no 1º. Seminário de Educação Matemática. UFRJ. 1993.

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. P.; **Geometria Segundo a Teoria de Van Hiele**. Rio de Janeiro, Projeto Fundação IM/UFRJ, 2000.

NASCIMENTO et. al. **O abandono do Ensino de Geometria e suas implicações no Ensino Fundamental**, apresentado no I EPEM de São Paulo, 2005, p.1–11. Disponível ><http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/>>.

Acesso em: 18 março 2006.

NCTM- **National Council of Teacher of Mathematics**. Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston. Virginia. 1989.

OLIVEIRA, L. T. F. **Habilidades Espaciais subjacentes às atividades de discriminação e composição de figuras planas**. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista. 1998.

OLIVEIRA et. al. **A Resolução de Problemas e o uso de Tecnologia como Estratégias para enfrentar as dificuldades de Aprendizagem em Geometria**, in Anais do I EPEM de São Paulo, 2005. p. 1-12. Disponível em : ><http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/>>. Acesso em: 21 maio 2006.

PASSOS, C. L.B. **Representações, Interpretações e Prática Pedagógica: a Geometria na Sala de Aula.** Tese de Doutorado. Unicamp-SP. 2000.

PAVANELLO, R. M. **O Abandono do Ensino de Geometria no Brasil: Uma Visão Histórica.** Dissertação de Mestrado. Unicamp. 1989.

PAVANELLO, R. M., **O Abandono do Ensino da Geometria no Brasil: Causa e Conseqüências** (Campinas-SP). *Zetetiké*, Ano 1, no. 1, p.p. 7-17. 1993.

PAVANELLO, R. M. **Formação e Possibilidades Cognitivas e Noções Geométricas.** Unicamp. Dissertação de Doutorado. 1995.

PEREZ, G. **Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicas da pesquisa participante no ensino de geometria para as camadas populares.** Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas. 1991.

PEREZ, G. **A Realidade sobre Ensino de Geometria no 1º. E 2º. Grau, no Estado de São Paulo.** A Educação Matemática em Revista –SBEM, no. 1, 55-64. 1995.

PIROLA, N. A. – **Um Estudo sobre a Formação dos Conceitos de Triângulo e Paralelogramos em Alunos de Primeiro Grau**—Campinas, SP. UNICAMP – Dissertação de Mestrado. 1995.

PIROLA, N. A. **Solução de Problemas Geométricos: Dificuldades e Perspectivas.** UNICAMP – Campinas, SP. Tese de Doutorado. 2000.

PIROLA, N.A. QUINTILIANO, L.C. PROENÇA, M.C. **Estudo sobre o desempenho de alunos no Ensino Médio em tarefas envolvendo o conceito de polígonos e poliedros.** In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. São Paulo: SBEM, 2003, v 1.

PIROLA, N.A.; JUSTULIN, A.M. **Um estudo sobre as atitudes em relação a Matemática na Educação Infantil.** In: V Congresso Ibero-americano de Educação Matemática, Porto- Portugal, 2005.

PROENÇA, M.C.; PIROLA, N. A. **Resolução de problemas: Uma análise do desempenho de alunos do Ensino Médio em resolução de problemas envolvendo conceitos geométricos.** In: III Congresso Internacional de Ensino da Matemática, 2005.

REZI, V. **Um Estudo Exploratório sobre os Componentes das Habilidades Matemáticas Presentes no Pensamento em Geometria.** Dissertação de Mestrado. Unicamp-SP, 2001.

RIBEIRO, F. R. L. **Fractais no Ensino Médio: Reflexões, Possibilidades e Ações.** Unesp, Bauru-SP, 2002.

RUDIO, F. V., **Introdução ao Projeto de Pesquisas Científicas,** Editora Vozes, 27<sup>a</sup>. Edição. p 144.

SÃO PAULO -(ESTADO) Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta Curricular de Matemática 1º. Grau.** São Paulo SE/CENP. 1991a.

SÃO PAULO -(ESTADO) Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Atividades Matemáticas.** São Paulo SE/CENP.1991b.

SHERARD III, W. H. **Wy is Geometry a Basic Skill?** Arithmetic Teacher, Janeiro.1981.

SILVA, C. M. **O Uso do Logo em Sala de Aula Desempenho em Geometria e Atitudes em Relação à Matemática.** Dissertação de Mestrado. Unicamp-2003.

STERNBERG, R. J. - **Psicologias Cognitivas,** Editoras Artmed, Porto Alegre. Cap. 4- Percepção.2000.

USISKIN, Z. **Resolvendo os dilemas da geometria escolar.** In Lindquist M. M. e Shulte A. A. (org) **Aprendendo e ensinando geometria.** Tradução de Hygino H. Domingos. São Paulo: Atual.1994.

VAN HIELE. **Structure and Insight – A theory of Mathematics**. Education, Orlando: Academic Press. 1986.

VIANA, O. A. **O Conhecimento Geométrico de Alunos do Cefam sobre Figuras Espaciais: Um Estudo das Habilidades e dos Níveis de Conceito**. Dissertação de Mestrado. Unicamp. 2000.

VIANA, O. A. & BRITO, M. R. F. **Os conceitos espontâneos e científicos: uma análise da linguagem utilizada por futuros professores para descrever figuras espaciais**. 2005. SBEM – Paulista. Disponível em <http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/>. Acesso em: 15 março 2006.

## Apêndice

Tabela 4 – Frequências e porcentagens para as pontuações dos alunos por série

Questão	Pontuação	1° C		2° C		3° C	
		n	%	n	%	n	%
1	0	4	16,7	10	37,0	13	43,3
	0,25	4	16,7	0	0,0	5	16,7
	0,5	15	62,5	9	33,3	9	30,0
	0,75	0	0,0	2	7,4	0	0,0
	1	1	4,2	6	22,2	1	3,3
2	0	2	8,3	3	11,1	5	16,7
	0,25	4	16,7	0	0,0	4	13,3
	0,5	4	16,7	8	29,6	11	36,7
	0,75	0	0,0	1	3,7	0	0,0
	1	14	58,3	15	55,6	10	33,3
3	0	3	12,5	9	33,3	15	50,0
	0,25	2	8,3	0	0,0	1	3,3
	0,5	6	25,0	4	14,8	4	13,3
	0,75	1	4,2	1	3,7	4	13,3
	1	12	50,0	13	48,1	6	20,0
4	0	8	33,3	26	96,3	29	96,7
	0,25	8	33,3	0	0,0	1	3,3
	0,5	7	29,2	1	3,7	0	0,0
	0,75	0	0,0	0	0,0	0	0,0
	1	1	4,2	0	0,0	0	0,0
5	0	7	29,2	17	63,0	16	53,3
	0,25	8	33,3	4	14,8	9	30,0
	0,5	9	37,5	6	22,2	5	16,7
	0,75	0	0,0	0	0,0	0	0,0
	1	0	0,0	0	0,0	0	0,0
6	0	16	66,7	24	88,9	21	70,0
	0,25	4	16,7	2	7,4	8	26,7
	0,5	4	16,7	1	3,7	1	3,3
	0,75	0	0,0	0	0,0	0	0,0
	1	0	0,0	0	0,0	0	0,0
7	0	15	62,5	27	100,0	24	80,0

	0,25	6	25,0	0	0,0	2	6,7
	0,5	3	12,5	0	0,0	4	13,3
	0,75	0	0,0	0	0,0	0	0,0
	1	0	0,0	0	0,0	0	0,0
8	0	22	91,7	26	96,3	28	93,3
	0,25	1	4,2	1	3,7	1	3,3
	0,5	1	4,2	0	0,0	1	3,3
	0,75	0	0,0	0	0,0	0	0,0
	1	0	0,0	0	0,0	0	0,0
	0	24	100,0	27	100,0	29	96,7
	0,25	0	0,0	0	0,0	0	0,0
	0,5	0	0,0	0	0,0	1	3,3
9	0,75	0	0,0	0	0,0	0	0,0
	1	0	0,0	0	0,0	0	0,0
	0	24	100,0	27	100,0	29	96,7
	0,25	0	0,0	0	0,0	0	0,0
10	0,5	0	0,0	0	0,0	1	3,3
	0,75	0	0,0	0	0,0	0	0,0
	1	0	0,0	0	0,0	0	0,0
	0	11	45,8	27	100,0	30	100,0
11	0,25	3	12,5	0	0,0	0	0,0
	0,5	5	20,8	0	0,0	0	0,0
	0,75	2	8,3	0	0,0	0	0,0
	1	3	12,5	0	0,0	0	0,0
	0	23	95,8	27	100,0	30	100,0
	0,25	0	0,0	0	0,0	0	0,0
	0,5	0	0,0	0	0,0	0	0,0
	0,75	0	0,0	0	0,0	0	0,0
12	1	1	4,2	0	0,0	0	0,0
	0	19	79,2	21	77,8	24	80,0
	0,25	3	12,5	2	7,4	2	6,7
	0,5	2	8,3	4	14,8	4	13,3
13	0,75	0	0,0	0	0,0	0	0,0
	1	0	0,0	0	0,0	0	0,0
	0	24	100,0	23	85,2	27	90,0
14							

	0,25	0	0,0	2	7,4	1	3,3
	0,5	0	0,0	2	7,4	2	6,7
	0,75	0	0,0	0	0,0	0	0,0
	1	0	0,0	0	0,0	0	0,0

Bauru, 08 de maio de 2006.

Prezada Diretora da Escola.....

Sirvo-me do presente para solicitar a V.S<sup>a</sup> **autorização** para a coleta de dados de minha pesquisa, desenvolvida em nível de mestrado junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência que tem como objetivo principal analisar os conhecimentos prévios de alunos do ensino médio sobre os conceitos geométricos. A pesquisa constará de aplicação de uma prova matemática e entrevista com alguns alunos em que os mesmos solucionarão problemas utilizando a metodologia do “pensar em voz alta”.

Ressaltamos que não serão divulgados os nomes dos participantes bem como o nome da escola. Após a análise dos dados, comprometemo-nos a divulgar os resultados à direção bem como aos professores de matemática e colocamo-nos à disposição para a discussão dos mesmos bem como apresentar alternativas pedagógicas para o ensino de geometria no ensino médio.

A pesquisa é orientada pelo professor doutor Nelson Antonio Pirola do Departamento de Educação da UNESP de Bauru. Quaisquer esclarecimentos poderão ser obtidos através do e-mail: [npirola@fc.unesp.br](mailto:npirola@fc.unesp.br) ou pelo telefone: (14) 3103-6081 (Departamento de Educação).

Tendo em vista que a pesquisa visa contribuir com a melhoria do ensino de geometria nas escolas, a participação dos alunos é muito importante.

Certos de contarmos com a colaboração de V.S<sup>a</sup>, colocamos-nos à disposição para esclarecermos as dúvidas que existirem.

Atenciosamente,

Ana Sheila do Couto Trindade Moraco



**QUESTIONÁRIO**

Nome: \_\_\_\_\_

Série: \_\_\_\_\_ idade: \_\_\_\_\_ Escola: \_\_\_\_\_

1- O que você entende por Geometria?

---

---

2- Você já estudou Geometria? Em qual (is) série(s).

---

---

1- O que você mais sabe sobre Geometria?

---

---

2- Você gosta de Geometria? Por quê?

---

---

3- Por que é importante estudar Geometria?

---

---

4- Você já ouviu falar em cubos e pirâmides? Desenhe um cubo e uma pirâmide.

---

---

5- Considere um cubo. Faça a sua planificação, atrás da folha.

6- Considere a sua sala de aula. Cite algumas figuras que são tridimensionais.

---

---

9- Quais as dificuldades encontradas para responder às questões? Atrás da folha.

## INSTRUMENTO PARA A COLETA DE DADOS

**Prezado(a) aluno(a). Você irá responder algumas questões sobre geometria. Solicitamos que responda a todas elas não deixando nenhuma em branco. Caso não consiga responder algumas, escreva o motivo e a dificuldade encontrada.**

1. O que é um ângulo? Desenhe dois tipos diferentes de ângulos
2. O que é um triângulo? Desenhe dois tipos diferentes de triângulo
3. O que é um quadrilátero? Desenhe dois tipos diferentes de quadriláteros
4. O que é uma bissetriz de um ângulo? Desenhe dois tipos diferentes usando a bissetriz
5. Quando duas retas são paralelas? Faça um desenho.
6. Quando duas retas são concorrentes? Faça um desenho
7. Quando duas retas são coincidentes? Faça um desenho.
8. Faça a representação de um plano.
9. Faça a representação de dois planos paralelos.
10. Faça a representação de dois planos perpendiculares.
11. O que é um polígono? Desenhe dois tipos diferentes.
12. Qual a diferença entre figura plana e não plana. Dê dois exemplos de figura plana e dois exemplos de figura não plana.
13. Qual o seu entendimento sobre área. Dê exemplo.
14. Qual o seu entendimento sobre volume. Dê exemplo

## Objetivos de acordo com o problema de pesquisa

- 1- Analisar os conhecimentos geométricos adquiridos por alunos do Ensino Médio (figura plana e não plana, cubos e pirâmides, etc.).
- 2- Analisar as dificuldades, em termos conceituais e representacionais, apresentadas por esses estudantes.

## Participantes

81 alunos - Ensino Médio - 1ª a 3ª séries - período noturno - Escola pública do Estado de São Paulo

## Questionário

- 1- Questões sobre o que os alunos sabem sobre geometria
- 2- O gostar da geometria e a importância do seu estudo
- 3- Representação pictórica de cubo e pirâmide e a planificação do cubo
- 4- Identificação de objetos tridimensionais
- 5- Relato das dificuldades para responder o questionário

1 - O que você entende por Geometria?

2 - Você já estudou Geometria? Em qual (is) série(s).

3 - O que você mais sabe sobre Geometria?

4 - Você gosta de Geometria? Por que?

5 - Por que é importante estudar Geometria?

6 - Você já ouviu falar em cubos e pirâmides? Desenhe um cubo e uma pirâmide.

7- Considere um cubo. Faça a sua planificação, atrás da folha.

8 - Considere a sua sala de aula. Cite algumas figuras que são tridimensionais.

9-Quais as dificuldades encontradas para responder às questões? Atrás da folha.

## Prova Matemática

- posições relativas de duas retas/ representações
- posições relativas de planos/ representações
- conceito geométricos/ atributos utilizados nas definições/ análise das representações pictóricas
- 5- Relato das dificuldades para responder o questionário
- 4- Identificação de objetos tridimensionais
- 3- Representação pictórica de cubo e pirâmide e a planificação do cubo
- 2- O gostar da geometria e a importância do seu estudo
- 1- Questões sobre o que os alunos sabem sobre geometria

conceito de polígono/ representações/ diferenças entre figuras planas e não-planas

conceito de área e volume/ exemplificações

6 - Quando duas retas são concorrentes? Faça um desenho

7 - Quando duas retas são coincidentes? Faça um desenho.

8-Faça a representação de um plano.

9-Faça a representação de dois planos paralelos.

10-Faça a representação de dois planos perpendiculares.

1 - O que é um ângulo? Desenhe dois tipos diferentes de ângulos

2 - O que é um triângulo? Desenhe dois tipos diferentes de triângulo

3 - O que é um quadrilátero? Desenhe dois tipos diferentes de quadriláteros

4 - O que é uma bissetriz de um ângulo? Desenhe dois tipos diferentes usando a bissetriz

5 - Quando duas retas são paralelas? Faça um desenho.

11-O que é um polígono? Desenhe dois tipos diferentes.

12-Qual a diferença entre figura plana e não plana. Dê dois exemplos de figura plana e dois exemplos de figura não plana.

13-Qual o seu entendimento sobre área. Dê exemplo.

14-Qual o seu entendimento sobre volume. Dê exemplo.