

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

O PROCESSO DE INTEGRAÇÃO EM BLAISE PASCAL

Jamur Andre Venturin

Orientador: Prof.Dr. Irineu Bicudo

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática. Área de Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos filosófico-científicos, para obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)
2007

510.09 Venturin, Jamur Andre
V469p O processo de integração em Blaise Pascal / Jamur Andre
Venturin. – Rio Claro : [s.n.], 2007
118 f. : il., figs.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Irineu Bicudo

1. Matemática - História. 2. Matemática. 3. Indivisível.
4. Integração. 5. Educação Matemática. I. Título.

BANCA EXAMIDADORA

Professor Dr. Irineu Bicudo

Universidade Estadual Paulista – Unesp – Rio Claro

Professor Dr. Vanderlei Marcos do Nascimento

Universidade Estadual Paulista – Unesp – Rio Claro

Professora Dra. Renata Cristina Geromel Meneghetti

Universidade de São Paulo – Instituto de Ciências

Jamur Andre Venturin

Aluno

Rio Claro, 10 de agosto de 2007

Resultado: _____

Dedicatória

Aos meus pais, Adilo Venturin e Edite Leocádia Lora Venturin, que me deram incentivo em todos os momentos, desde a minha vinda para Rio Claro – SP, até o momento final da pesquisa; ao meu irmão Jorge Venturin, pela força; aos amigos e amigas que estiveram comigo.

Agradecimentos

Ao Professor Dr. Irineu Bicudo por ter aceitado orientar-me e por ter confiado em mim. Pelas vezes que me auxiliou nos momentos complicados do trabalho. Pelas sugestões de leituras e por traduções que fez de algumas obras que me possibilitaram elaborar a dissertação. Por toda a minha trajetória aqui no mestrado, meus sinceros agradecimentos a ele.

Aos professores que fizeram parte da banca de qualificação e de defesa.

Ao Professor Dr. Vanderlei Marcos do Nascimento por ter tido a disponibilidade de tempo para discutirmos pontos críticos da dissertação. Suas observações e sugestões possibilitaram aperfeiçoar meu trabalho.

Aos participantes do grupo de pesquisa relações entre História e Filosofia da Matemática, coordenado pelo Professor Irineu Bicudo.

Ao professor Dr. Duelci Vaz pelos seus comentários, bem como diálogos que tivemos ao longo do mestrado.

À professora Keila Marques da Silva pelas sugestões, críticas e apoio.

À professora Dr. Idanea Blanca Peña Grass pela orientação.

Aos amigos Duelci Vaz, Elivanete Alves de Jesus e Fernando Guedes Cury por estarem ao meu lado apoiando-me nas decisões que tomei e quando necessário criticando as mesmas.

Aos meus amigos Alessandro, Efrem, Gideão, Marcio, Juliano, Florêncio, Rafael, Emanuelle, Paulo, Lucas, Roger, Carlos, Mirian, Keila Elaine, Carla, Luzia, Leonir, Doriane, Débora, Raquel, Joelma, Karin e Jorge.

À Ana e Elisa, secretárias do Departamento de Matemática, pelo pronto atendimento e paciência em disponibilizar informações.

Agradeço a Keila Marques da Silva por ter estado comigo em todos os momentos que precisei. Pela paciência e carinho que foram altamente significativos durante o período em que estivemos juntos, bem como para a elaboração desse trabalho.

Ao meu irmão Jorge Venturin sempre me ajudando quando precisava.

Aos meus pais Adilo Venturin e Edite Lora Venturin pela vida, carinho e amor que sempre tiveram comigo.

SUMÁRIO

Índice.....	i
Resumo	ii
Abstract.....	iii
I - Introdução	01
II - Contexto social e científico de Blaise Pascal.....	06
III - Panorama científico.	30
IV - Conceitos matemáticos em Pascal.....	66
V - Considerações finais.....	112
VI - Referências Bibliográficas.....	117

ÍNDICE

I – Introdução.....	01
1.1 Sinopse.....	01
1.2 A pesquisa.....	04
II – Contexto social e científico de Blaise Pascal.....	06
2.1 Fontes.....	06
2.2 Étienne Pascal e família.....	07
2.3 Blaise Pascal.....	08
III – Panorama científico.....	30
3.1 Prelúdio.....	30
3.2 Indivisíveis e Infinitesimais.....	31
3.3 O método de exaustão.....	39
3.4 Século XVI.....	43
3.5 Século XVII.....	48
IV – Conceitos matemáticos em Pascal.....	66
4.1 Postestatum Numericarum Summa.....	66
4.1.2 Os Indivisíveis em Pascal.....	76
4.1.3 Cálculo de áreas.....	79
4.2 Tratado do Triângulo Aritmético.....	82
4.2.1 Conseqüências do Triângulo Aritmético.....	84
4.2.2 Uso do Triângulo Aritmético para as ordens numéricas.....	87
4.3 LETTRE DE M. DETTONVILLE A M. DE CARCAVI.....	89
4.3.1 Centros de gravidade.....	89
4.3.2 Soma: Simple, Triangular e Piramidal.....	109
V – Considerações finais.....	112
VI – Referências bibliográficas.....	117

RESUMO

O propósito desse trabalho é identificar de que maneira Pascal solucionava problemas matemáticos de integração, fazendo uso dos indivisíveis. Para isso, consultamos em particular três de suas obras: *Postestatum Numericarum Summa*¹, *LETTRE DE M. DETTONVILLE A M. DE CARCAVI*² e o *Tratado do Triângulo Aritmético*. Vimos a estreita relação que existe entre essas obras, a saber, na primeira delas é exibida a regra geral para encontrar áreas sob curvas do tipo $y = x^n$, bem como mostra a relação entre a soma de potências numéricas com grandezas contínuas. Faz a integração das curvas segundo a abordagem dos indivisíveis. Já na segunda, que é associada diretamente com a terceira obra, é apresentada tanto a compreensão do indivisível e do infinitamente pequeno na constituição do contínuo, quanto à relação de soma simples, triangular e piramidal (encontradas a partir do triângulo aritmético) com suas respectivas integrais. Desse modo, a fim de entendermos o que aconteceu no século XVII, e sabermos quais as possíveis influências matemáticas de Pascal, buscamos outros métodos de integração como aqueles utilizados pelos gregos, isto é, o método de exaustão e as técnicas do século XVI. Sendo assim, foi possível observar que seus procedimentos de integração podem ser contemplados em dois aspectos: no primeiro, como contribuição para a história do desenvolvimento do cálculo, em um período em que ele estava na eminência de ser estruturado. No segundo, destacamos a relação existente com o cálculo moderno, contudo seu campo teórico é fundamentado nos indivisíveis.

Palavras-chave: Matemática - História, Infinitesimal, Indivisível, Integração. Educação Matemática.

¹ Soma de Potências Numéricas.

² Carta do Sr. Dettonville ao Sr. De Carcavi.

ABSTRACT

The intention of this work is to identify of which way Pascal solved mathematical problems of integration, making use of the indivisibles. For this we consulted in particular three of his works: *Postestatum Numericarum Summa*, *Lettre De M. Dettonville A. M. de Carcavi* and the *Treatise on the Arithmetical Triangle*. We saw the close connection that exist between these works, namely, the first of them is showed the general rule to find areas under curves $y = x^2$, as well as it shows the relation between the sums of numerical potences with continuous magnitudes He makes the integration of curves according to approach of indivisibles. Already on the second, it's associate directly to the third work, is presented the understanding of indivisible and the infinitive little in the constitution of the continuous, and also in the relation of simple, triangular and piramidal sums (found from the arithmetical triangle) with their respective integrals. In this way, in order to understand what happened in the 17th century and to know the possibles mathematical influences of Pascal, we search others methods of integration like those used by the Greeks, that is to say, the method of exhaustion and the techniques of the 16th century. Such being the case, it was possible to observe that its procedures of integration can be contemplated in two aspects: the first one, as a contribution for the history development calculation, in a period that it was the eminence of being structured. The second one detach the relation existent with the modern calculation, however, its theoretical field is based on indivisibles ones.

Key-words: Mathematics – History, Infinitesimal, Indivisible, Integration, Mathematics Education.

I – Introdução

1.1 Sinopse

Nesse trabalho estudamos alguns procedimentos matemáticos abordados por Pascal que lhe deram suporte para solucionar problemas de integração. Como tomamos os fatos que aconteceram no passado, buscando a leitura dos registros em que se perpetuaram, há várias possibilidades de interpretação. Aqui daremos a nossa. Sem dúvida, é possível fazer inúmeros trabalhos com as obras de Pascal, e expressar suas realizações matemáticas e filosóficas. No entanto, trataremos apenas dos aspectos matemáticos de seus estudos.

Para a elaboração e entendimento do que nos propomos fazer, é necessário dedicação e atenção na análise dos dados, visto que a compreensão matemática e a linguagem da época fogem à nossa formação acadêmica.

Sendo assim, expressamos as concepções matemáticas, quando necessário e possível, de acordo com os recursos da simbologia moderna. Sabemos que esse anacronismo pode desvirtuar o que o autor estava querendo dizer. Segundo Urbaneja

[...] toda tradução de um texto, por muito fiel que aparente ser, sempre supõe uma interpretação do pensamento do autor. Encontrar as palavras adequadas para descrever em uma língua as idéias que foram apreendidas em outra deve ser um trabalho muito cuidadoso e nunca estará isento da arbitrariedade. Se o autor, além disso, é de outro tempo que medeia com o nosso vários séculos, as dificuldades aumentam diante da presença de expressões próprias do momento.¹

Chauí também aponta que

Por exemplo, um filósofo grego não falaria em “nada”, mas em “Não-ser”. Não falaria em “objeto”, mas em “ente”, pois a palavra objeto só foi usada a partir da Idade Média e, no sentido em que a empregamos hoje, só foi usada depois do século XVII. Também, não falaria em “consciência”, mas em *psyché*, isto é, “alma”. Jamais falaria em “subjetividade”, pois essa palavra, com o sentido que lhe damos hoje, só foi usada a partir do século XVII.²

Desse modo, procuramos minuciosamente analisar os textos históricos, tentando entender a idéia de um conceito matemático, de acordo com o período em que foi

¹ URBANEJA, 1992, p.16.

² CHAUI, 2004, p. 180.

idealizado. Deixamos claro, no decorrer da dissertação, quais serão os momentos de reestruturação da linguagem matemática.

Já dissemos que o propósito é matemático. Contudo, Pascal foi filósofo e matemático. Não sabemos até que ponto é aceitável separar essas duas naturezas. Por exemplo, a respeito da *infinidade, do infinitamente grande e infinitamente pequeno* diz ele que existe uma “[...] admirável relação que a natureza pôs entre essas coisas [repouso e movimento; instante e tempo, etc], e as duas maravilhosas infinidades que ela propôs aos homens, não para que as concebam, mas para que as admirem [...]”³ A linguagem muitas vezes é filosófica: “Porque é ao juízo que pertence o sentimento, tal como as ciências pertencem ao espírito. Fineza tem a ver com o juízo, a geometria tem a ver com o espírito”⁴. Com isso, as precauções são sempre relevantes.

Para compreendermos os textos de Pascal foi preciso muita (re)leitura, para assim termos a nossa interpretação do que queria dizer sobre os seus métodos de integração, segundo a abordagem dos indivisíveis.

Mesmo sem notações algébricas que estavam em voga naquela época sua habilidade retórica não é diminuída de maneira alguma. Pensamos que a capacidade de abstração, diante da escrita retórica, é super valorizada. Ainda mais quando seu autor é cuidadoso com o que faz. Esse é o caso de Pascal. Expressa-se pormenorizadamente, seja qual for o tema que se proponha a estudar. Sempre enuncia exemplos e advertências, para depois generalizar o que está tratando:

Os exemplos que escolhemos para provar outras coisas: se quiséssemos provar os exemplos, escolheríamos as outras coisas como exemplos; pois, como acreditamos sempre que a dificuldade está no que queremos provar, achamos que os exemplos são mais claros e que ajudam a prová-lo.

Assim, quando queremos mostrar uma coisa geral, cumpre darmos a regra particular de um caso; mas, se queremos mostrar um caso particular, teremos de começar pela regra [geral]. Achamos sempre obscura a coisa que queremos provar, e clara a que empregamos na prova; pois, quando nos propomos provar alguma coisa, antes de tudo nos abecamos com a idéia de que ela é obscura mesmo, e, ao contrário, de que a outra, que deve prová-la, é clara, e portanto facilmente compreensível.⁵

³ PASCAL, 2003, p. 36.

⁴ PASCAL, 2003, p. 70.

⁵ PASCAL, 1973, p.49-50.

Além de Pascal ter dedicado seu tempo a matemática, também estudou física, filosofia e teologia. Para melhor compreender sua obra, faremos breves comentários sobre sua vida, e relataremos algumas das importantes contribuições que deixou à ciência: Como os experimentos físicos, as cartas denominadas Provinciais, as conexões com a teoria da probabilidade, a disputa estabelecida naquela época, cujo intuito era resolver alguns problemas sobre a cicloide, etc. Também, comentamos um pouco de sua concepção religiosa e sua simpatia pelos jansenistas, e a importância que ele teve para esse movimento. Isso está registrado no capítulo II.

Já no capítulo III, comentamos qual foi a razão que levou os antigos geômetras a formularem o método de demonstração conhecido como dupla redução ao absurdo. Depois, enunciamos alguns pontos de vista matemáticos do século XVI, bem como as idéias matemáticas de Francisco Maurolico, de Federigo Commandino, de Simon Stevin e de Luca Valerio. Dedicamos também nossa atenção ao do século XVII, enfatizando a compreensão matemática de Kepler, Galileu e Cavalieri, no tocante aos indivisíveis. Os dois objetivos maiores desse capítulo são: compreender a importância de alguns métodos de integração; bem como entender a relação entre o indivisível, o infinitesimal, e o contínuo. Achamos necessário expor as compreensões do indivisível e do infinitesimal. Temas que hoje são pouco tratados, mas que causaram muita repercussão na história da matemática. Um exemplo é que essa questão foi estudada pelos gregos e perpetuou-se até os séculos XVI e XVII, provocando muitos debates sobre a constituição do contínuo, ou seja, são aproximadamente dois mil anos de história.

O capítulo IV é dedicado completamente a responder a pergunta da dissertação, com base nas realizações matemáticas de Pascal. Está dividido em três partes. Na primeira, examinamos o processo de integração de curvas do tipo $y = x^n$, segundo a abordagem de Pascal de potências numéricas e de magnitudes contínuas – ou seja, da passagem do discreto ao geométrico. Já na segunda, sintetizamos o tratado do triângulo aritmético, expondo algumas conseqüências, mostrando a idéia de soma simples, triangular e piramidal. Na última, é dedicada atenção à obra de Pascal concernente à competição da cicloide, organizada por ele. No tratado sobre a cicloide encontram-se os métodos de achar centros de gravidade, bem como as relações de somas simples, triangular e piramidal com o processo de integração.

No capítulo V sintetizamos o trabalho, relacionando o objetivo diante da pergunta tomada. Assim, evidenciaremos a contribuição da dissertação ao estudo da História da

Matemática, em particular a do Cálculo; comentaremos o procedimento adotado durante a pesquisa. Por último, mencionaremos algumas questões para uma futura reflexão em relação ao o que foi desenvolvido.⁶

1.2 A pesquisa

O tema da pesquisa surgiu quando participamos da disciplina Gênese do Pensamento Diferencial. Naquele momento foi apresentado – juntamente com um grupo – um trabalho que expôs algumas concepções matemáticas de Pascal. A partir de então, caracterizou-se interesse por esse assunto.

Pensamos que é relevante à Educação Matemática desenvolver pesquisas dessa natureza. Assim, trouxemos à tona uma pequena parte do processo de estruturação do conceito de integral, segundo a abordagem de Pascal.

Diante disso, elaboramos a pergunta: Qual foi o processo utilizado por Pascal para determinar a solução de problemas matemáticos envolvendo integração, segundo a abordagem dos “indivisíveis”?

Relacionado à pergunta, está o objetivo que é: Mostrar que os procedimentos de integração de Pascal podem ser vistos como uma das fases do desenvolvimento formal do processo de integração. Com isso, há possibilidade de interação entre o passado matemático com seus conceitos contemporâneos.

Várias nuances podem surgir como: Há relação entre exatidão com a soma de Riemann? Ou de que maneira pode ser entendido o infinitamente pequeno ou tão pequeno quanto se queira em termos da idéia moderna de limite?

Na ótica da Educação Matemática, acreditamos que a contribuição desse trabalho pode ser evidenciada em como a matemática é transmitida hoje. Ou seja, pode-se mostrar que a prática matemática, em particular, do século XVII começou a ser sistematizada vemos isso a partir dos registros históricos e das correspondências onde estão relatados as comunicações científicas daquele período. Sendo que atualmente aprendemos conceitos, regras, demonstrações, etc., com uma linguagem própria, já formalizada.

⁶ Para a tradução do tratado **Postestatum Numericarum Summa** e também da **Lettre de M. Dettonville a M. De Carvavi**, bem como a tradução das sentenças em latim, contei com a ajuda do Prof. Dr. Irineu Bicudo.

Diante disso, pensamos ser importante revelar alguns passos que direcionaram a formalização de um conceito matemático, no sentido de tentar “entender” os porquês que surgem diante do estudo da matemática.

II – Contexto social e científico de Blaise Pascal

2.1 Fontes

Para desenvolver esse capítulo fizemos um estudo da obra de Jacques Attali⁷ intitulada *Blaise Pascal ou o Gênio Francês*, a qual será o lastro para as demais referências. Attali expõe dados históricos dos Pascal, argumentando a maneira como viveram em meio aos conflitos políticos e religiosos, repressões e guerras, que estavam acontecendo na França daquela época. Apresenta as realizações de Blaise Pascal, desde quando iniciou suas atividades pensantes por volta dos doze anos, mostrando quais foram as obras que o destacaram no cenário científico e suas influências tanto religiosas-filosóficas quanto matemáticas exercidas sobre sua formação.

O artigo de Carl B. Boyer *Pascal: the Man and the Mathematician*, apresentado em comemoração aos trezentos anos da morte de Pascal, procura recapitular suas contribuições matemáticas, bem como seus méritos como físico, quando faz a experiência para comprovar a existência do vácuo. Também o mostra como um dos precursores da boa prosa francesa. Por outro lado, esse autor denuncia as falsas realizações atribuídas a Pascal com relação a algumas invenções, bem como o excesso de elogios apresentados a ele.

O livro *Men of Mathematics* cujo autor é Taine T. Bell, foi estudado o capítulo *Greatness and Misery of Man*. Nele, relatam-se alguns aspectos da vida de Pascal, por exemplo, como a irmã mais velha de Blaise, Gilberte escreveu a história de seu irmão, apresentando realizações difíceis de se acreditar. O autor também destaca o caráter matemático de Pascal e suas realizações nesse ramo do conhecimento humano, nos momentos em que se dedicou a matemática. Também mostra um pouco da pressão religiosa por que Pascal passou e de sua conturbada vida.

Outra obra usada foi um verbete do *Dictionary of scientific biography* que aborda os temas: *Projective Geometry, Mechanical Computation, Fluid Statics and the Problem of the Vacuum, Calculus of Probabilities. The Arithmetical Triangle, The Calculus of Indivisibles and the Study of Infinitesimal Problems*. Esses tópicos destacam mais os aspectos voltados às realizações matemáticas de Pascal, apontando pouco sobre sua vida e o contexto social que viveu.

⁷ Nasceu em 1943, estudou no Institut d'Études Politiques na École Polytechnique e na Écicle Nationale de L'Administration onde fez doutorado em economia.

Pensamentos de Blaise Pascal, em particular o espaço que compreende *A Vida de Pascal* narrada por sua irmã Mme Périer.

O Livro Completo da Filosofia de Mannion aborda, entre outras coisas, temas referentes aos movimentos religiosos. Esse foi necessário para nos contextualizarmos em alguns eventos que aconteceram na história.

Pascal Sábio trouxe-nos informações concernentes às atividades experimentais realizadas por Pascal evidenciando de maneira consistente a possibilidade ou não de tais experimentos terem sido feitos efetivamente.

Consultamos outra referência não tão minuciosa, mas abrangente. É o caso do livro de *História da Matemática* de Boyer.

2.2 Étienne Pascal e família

A Família Pascal tem origem em Auvergne. Em 1345 há indicações da existência de Durand Paschal, que, para garantir a salvação dos antepassados resolve pagar cinco denários aos “cônegos do cabido de Cournon”⁸. Nas anotações do Cabido aparece um antepassado da mãe de Pascal que viveu durante o reinado de Luís XI, e cujo nome é Pascal de Mons. Quando Blaise Pascal começa a escrever as *Lettres Provinciales*, sendo que o objetivo era dar respostas dos Jansenistas aos Jesuítas, utiliza o pseudônimo de Louis de Montalte, ou seja, “Mons” faz parte desse pseudônimo.

Já no século XV, a família de seu pai decide morar em Clermont. Parece ser praxe a família Pascal exercer funções públicas. O bisavô paterno foi magistrado municipal, o avô Martin recebedor da talha⁹, isto é, um fiscal tributário.

Esse avô casou-se com Marguerite Pascal de Mons. Em 1588 ela terá o filho Étienne, que vai estudar direito em Paris e fica vislumbrado com o que encontra. Certamente Paris naquela época era um local de prestígio para a elite pensante. Ali muitas obras antigas são resgatadas e traduzidas – Fermat (1601-1661), por exemplo, foi um restaurador de textos matemáticos antigos propondo-se a reconstruir a obra de Apolônio; A Academia Francesa reunia os intelectuais de Paris e seu dirigente, Marin Mersenne, mantinha estreita correspondência com os mais importantes cientistas europeus, pondo uns

⁸ATTALI, 2003, p.22.

⁹ “antigo tributo medieval pago pelos vassallos para o custeio da defesa do feudo.” (HOAUISS) Em outra passagem Attali comenta que “Martin é o tesoureiro da França, conselheiro e responsável pelas finanças do rei Henrique III na circunscrição de Riom (2003, p. 22).

em contato com os outros. É esse o ambiente científico que Étienne encontrou, mas Martin o chama de volta a Clermont, uma vez que com o assassinato de Henrique IV, em 1610, Paris tornara-se, por algum tempo, um lugar inseguro. Com a morte de seu pai, a herança da família foi repartida. Com o que ganhou, Étienne comprou o posto de “[...] conselheiro eleito pelo rei na eleição da Bas-Auvergne em Clairmont, cargo parlamentar relativamente importante em nível regional: espécie de magistrado com competência para julgar litígios fiscais entre a administração régia e os súditos.”¹⁰

É interessante destacar que Étienne foi um estudioso de línguas e da ciência matemática, de certa forma é um intelectual para sua época – designo intelectual, pois naquele período a arte das letras não era privilégio de todos. Mais tarde, estudará a curva $r = 1 - \cos\theta$ e, para seu mérito, esta curva será conhecida como “límaçon de Pascal”, nome sugerido por Roberval que se tornará amigo de Étienne.¹¹ Mesmo longe de Paris, Étienne, mantém contato com as pessoas que conheceu.

Em 1616, aos vinte e oito anos, casa-se com Antoinette Begon. Sua esposa é filha de uma pessoa ligada ao Estado. Os dois vão morar em Clermont-en-Auvergne. Passado um ano, o casal tem uma filha, mas esta morre pouco depois. Em 1620, nasce Gilberte, Blaise, em 1623, e Jacqueline, em 1625. Em 1626 Antoinette morre.

São os três filhos de Antoinette e Étienne que serão precursores de uma interessante história, juntamente com seu pai, sob o ponto de vista da matemática, da filosofia, da religião e da vivência familiar.

2.3 Blaise Pascal

As fontes que podem fornecer informações são um tanto quanto complicadas. Primeiramente, após a morte de Pascal, sua irmã mais velha escreve a biografia dele, só que um tanto exagerada. Por exemplo, Gilberte afirma que quando seu irmão estava estudando

[...] procurava as proporções das figuras entre si. Mas como não sabia sequer os nomes destas, em virtude do cuidado que tivera meu pai, viu-se forçado a criar ele próprio definições e ao círculo chamava uma argola, à linha uma barra, etc. Depois, das definições fez axiomas e finalmente demonstrações perfeitas. E, como nessas coisas vai-se de uma a outra,

¹⁰ ATTALI, 2003, p. 23.

¹¹ Essa curva já era conhecida por antigos, Nicomédés a estudara (BOYER, 1963).

levou suas pesquisas tão longe que chegou à trigésima segunda proposição de Euclides.¹²

Claro que sua irmã está fazendo um discurso para elevar a grandeza do gênio dele. O matemático Bell expõe sua opinião dizendo ser impossível o adolescente ter realizado essa façanha, ainda mais estabelecendo a mesma ordem em que Euclides as organizou (1986). Mas este fato não o diminui. Vejamos como foi a sua introdução nos círculos científicos daquela época.

Étienne torna-se amigo de Roberval e este o apresenta ao grupo de Mersenne, que o aceita, pois faltavam matemáticos para compô-lo. Étienne vendo o potencial de seu filho pede a Mersenne autorização para levá-lo as reuniões.¹³ O menino está com doze anos e meio. Há indícios que tenha começado a freqüentar um pouco mais tarde, já com quatorze anos. Seja com doze ou quatorze anos, o importante é que, ainda adolescente, freqüentara, talvez, um local cobiçado por muitos – o grupo de Mersenne.

Esses fatos aconteceram quando os Pascal mudaram-se de Clermont a Paris, no ano de 1631. Nesse novo ambiente, Étienne tenta obter um cargo de “[...] primeiro presidente da *Cour des aides* de sua província”¹⁴, mesmo cargo que tentara quando estava em Clermont, porém não o conseguindo. Não obtendo emprego, aplica seu patrimônio “[...] em títulos da dívida pública no *Hôtel de Ville*.¹⁵ Assim, restará tempo suficiente para dedicar-se ao que quiser, em especial a educação de seus filhos.

Nenhum dos seus três filhos foi à escola. Étienne prefere educá-los a seu modo. Blaise aprende línguas como francês e latim. Seu pai o ensinou como as línguas estavam sujeitas a gramática. Também aprendeu física. Étienne ensina seu filho a buscar o sentido das coisas, isto é, como elas acontecem. Instiga-o a investigar qual é a razão dos acontecimentos, efeito-causa. Suas filhas também recebem educação de seu pai, mas parece que Jacqueline desponta mais do que sua irmã. Jacqueline mostrará interesse por compor versos. Tudo o que Étienne faz é para despertar o interesse deles pelo conhecimento e que encontrem suas próprias respostas ao que questionarem. O ensino da matemática dado ao garoto foi mais tardio, pois talvez o jovem tivesse outros interesses primeiro.

¹² A VIDA..., 1973, p. 15.

¹³ ATTALI, 2003, A VIDA..., 1973; BOYER, 1963.

¹⁴ ATALLI, 2003, p. 35.

¹⁵ ATALLI, 2003, p. 35.

Em 1631, a família vai morar em Paris. Gilberte tem dez anos, Blaise, oito e Jacqueline, seis. Após a morte de Antoinette, a família contrata Louise Delfaut para cuidar dos filhos, ela viaja com a família para Paris.

Em Paris, além de Étienne frequentar o grupo de Mersenne, também participa dos eventos realizados pela sociedade. Seus filhos tornam-se amigos de Arthur, e de sua irmã Charlotte. Arthur, mais tarde será duque de Roannez, e continuará amigo de Pascal. Em 1636, assistem a peças de teatro. Parece que esse meio social inspirou a jovem Jacqueline. Descobre sua paixão por teatro e poesia. Começa a escrever versos, decorar peças inteiras de teatro. A menina fica empolgada com o que está vivendo. Isto não agrada muito a Pascal. Vê uma forte rivalidade entre a irmã e ele.

Naquele período, no Estado francês, havia muitas instabilidades. Quando a situação política-econômica tornou-se ruim, o chanceler Séguier começou a atrasar os pagamentos dos títulos da dívida pública. Os investidores desse título, incluindo Étienne, não recebem o pagamento dos seus investimentos. Étienne fica furioso. Seus investimentos no *Hôtel de Ville* ficam estagnados. Juntamente com outros investidores, Étienne participa de um movimento a fim de reivindicar, a Seguir, o que lhes pertence. Mas o chanceler parece não ter gostado nem um pouco do que viu. A polícia procura os líderes do movimento. Étienne ficou com medo da perseguição, pois era um dos líderes, vendo que não poderia ficar em Paris, foge para Auvergne. Seus filhos ficam sob o cuidado da governanta.

O que a família mais quer, é trazer seu pai para casa. Mas como fazer isso? Jacqueline, como ficara impressionada pela arte do teatro e poesia, inicia um período de dedicação a esta atividade. Faz versos para aqueles que os pedem. A menina é levada até a corte. Lá, Jacqueline apresenta-se a rainha, e faz sucesso com suas habilidades artísticas. Étienne fica sabendo do êxito dela. Tem a idéia de utilizar o dom de Jacqueline para livrar-se do exílio. Assim, pai e filha tentam o perdão por meio da rainha e de seu esposo Luís XIII, mas nada acontece.

Por fim, Jacqueline consegue participar de uma peça de teatro, por intermédio do ator Mondory, que será assistida pelo Cardeal Richilieu. A peça foi um sucesso. O Cardeal ficou impressionado com Jacqueline. Ela é apresentada como filha de um homem que está sendo “injustamente” perseguido. Aproveitando a alegria do Cardeal, ela cochicha em seu ouvido um verso que planejara antes, com a finalidade de obter o perdão ao seu pai.

Concordo com Bell, quando este diz ser uma história difícil de acreditar.¹⁶ Porém, Attali nos deixa essa versão da história do perdão do exílio de Étienne. Se foi isso que aconteceu, o mérito é de Jacqueline.

Deste modo, Étienne volta a Paris sendo “[...] recebido pelo Cardeal em Rueil já no mês de maio de 1639. Richelieu felicita-o pelo talento de sua filha.”¹⁷

Nesse período conturbado, Pascal, já com dezesseis anos, começa a dar seus primeiros passos a fama. Inspirado em Desargues, desenvolve um trabalho sobre cônica, intitulado *Essay Pour Lês Coniques* (Ensaio Sobre Cônicas).

Esse ensaio contém afirmações de teoremas de natureza projetiva. Também, contém o corolário chamado *Mysterium Hexagrammicum* (Hexagrama Místico) sendo denominado, posteriormente, Teorema de Pascal, que nos diz: os lados opostos de um hexágono inscrito em uma seção cônica interceptam-se em três pontos colineares.

Pascal foi criticado, sem justificativa adequada, pela “desajeitada” forma na qual o seu principal teorema é exposto. Ele não disse, como fazemos hoje, que os pares de lados opostos interceptam-se em pontos colineares – pois isso não é necessariamente verdade a menos que se introduzam elementos ideais. Ao invés, escreveu que as linhas PQ e CD e FA [...] “são todas da mesma ordem” – ou como expressaríamos, elas são membros de um feixe [co-pontual ou paralelo] – se A, B, C, D, E, e F são pontos em uma cônica.¹⁸

Podemos expressar geometricamente, a afirmação de Pascal, de acordo com a citação, através da figura 1. Provavelmente provou ser verdadeiro para o círculo, depois através de projeção mostrou que era equivalente para qualquer seção cônica.¹⁹ Pascal fora acusado de plágio por Descartes, dizendo que Pascal plagiara Desargues.

¹⁶ BELL, 1986, p. 76.

¹⁷ ATTALI, 2003, p. 49.

¹⁸ BOYER, 1963, p. 285.

¹⁹ BELL, 1986, p. 77-8.

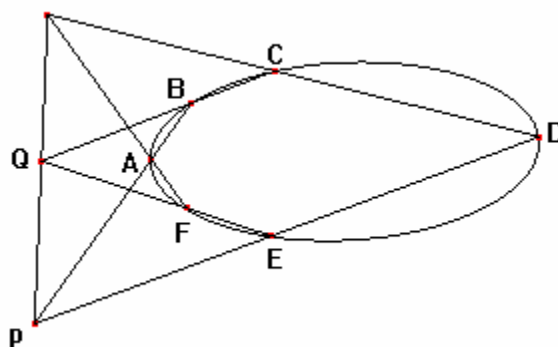


Figura 1

No entanto, Pascal deixa claramente explícito que: “Gostaria de dizer que devo o pouco que encontrei neste assunto a seus escritos”,²⁰ ou seja, dá o crédito a Desargues.

Pascal, pelo que consta em sua história, não aprendeu uma profissão, como fizera seu pai. Ao invés disso, Étienne dedicou-se à educação do filho. O Ensaio das cônicas foi seu primeiro trabalho. Dedicar-se-á a muitos ramos da ciência, como veremos posteriormente.

A França passa por outro momento de instabilidade política, e Étienne é obrigado a assumir sua função pública na província. Richilieu envia-o com Séguier

[...] a Rouen com o título de adjunto do intendente do rei para a Normandia e de “comissário representante de Sua Majestade para os impostos e a cobrança da talha.” O Cardeal conta com aquele bom matemático para garantir o retorno dos impostos enquanto outros reprimiam a população.²¹

Étienne, mesmo contra sua vontade, estabelece-se em Rouen com sua família. Este será um local apropriado para que Pascal viesse a projetar sua máquina de calcular. Mas antes de contar esta história, vamos a outros fatos que aconteceram com a família Pascal.

Em 1641, Gilberte casa com Florian Périer. Este veio de Rouen, a pedido de Étienne, para auxiliá-lo no serviço que presta na cobrança de impostos. Pascal também os ajuda nos cálculos. Mesmo casados, os Périer moram com Étienne.

Étienne realizava o cálculo de contas dos impostos, que, de certa forma, deveria ser tedioso. Pascal, percebendo o sofrimento dele, tem a idéia de construir uma máquina de

²⁰ PASCAL, apud. BOYER, 1963, p. 286.

²¹ ATTALI, 2003, p. 52.

calcular que poderia facilitar e agilizar o penoso trabalho do cálculo manual. Naquela época, era sabido da existência de um mecanismo de cálculo conhecido como bastões de Napier. Há indícios, também, de outra máquina de um tal Guilherme Schickart, mas não há relatos do seu funcionamento.

Pascal, com dezoito anos, inicia seu projeto da máquina de calcular – a pasqualina. Raciocina com seu pai, a fim de saber como eram as operações que realizava; conversa com relojoeiros. Para o funcionamento da máquina utilizou, entre outras coisas, engrenagens. Muitos relógios dessa época são construídos com engrenagens; por fim, faz um esboço do projeto. Procedeu como fora educado, na imaginação, ao esboçar um projeto, e ao sintetizar as idéias, por último, colocando-as em prática.

Entre 1642 e 1644, constrói mais de cinquenta máquinas, um pouco diferentes entre si. Para evitar apropriação indébita procura conseguir patente de sua invenção. Em um primeiro momento, não a obtém. Somente em 1649 o Chanceler Séguier a dará. Decide antes disso, vendê-la em Paris, com a ajuda de um distribuidor, que será Roberval. Mais tarde, enviará uma máquina para Christina, a Rainha da Suécia. Em 1652, constrói uma máquina que diz ser o modelo definitivo de seu projeto. “Pode-se talvez ressaltar que as engenhocas de Pascal raramente parecem-lhe ter sugerido avanços em teoria matemática, em contraste com o fato de que o trabalho de Huygnes com relógios conduziu-o à teoria de involutas e evolutas.”²² Pascal sofreu críticas com respeito a pasqualina, do viajante inglês Balthasar Gerbier que escreve para um enciclopedista polonês Samuel Hertlib, dizendo que

Pode-se ver aqui uma obra rara, inventada pelo sr. Pascal, filho de um presidente deste Parlamento. É uma caixa com diversas rodas dentadas, trinta ao menos; serve para operações aritméticas. Abaixo, o senhor pode encontrar um desenho dela, em troca do qual eu ficaria muito feliz de receber um desenho de um pequeno instrumento que foi inventado na Inglaterra há cerca de vinte e quatro anos [...]. Mas antes de mais nada é preciso conhecer aritmética para poder usar esse instrumento, que custa 50 pistolas, e é preciso ter duas dessas máquina para efetuar uma regra de três; elas não são portáteis[...].²³

Na visão de sua irmã, Gilberte, a pasqualina é algo inédito para a época; seus dispositivos permitiam realizar as operações com muita segurança. Por outro lado, Boyer aponta a fragilidade dela, dizendo que a “invenção estava baseada em princípio matemático não mais profundo do que a idéia de valor e posicional, e realizava operações

²² BOYER, 1963, p. 287.

²³ COURRIER, Apud, ATTALI, 2003, p. 70.

não mais complicadas do que adição e multiplicação e suas inversas”.²⁴ Com esta engenhoca, Pascal faz sua segunda publicação. Escreve, uma “Lettre dédicatoire” a Séguier, e um relatório sobre a máquina de calcular – seu propósito, princípios operacionais, capacidades, e as circunstâncias de sua construção.”²⁵ O alto preço dificultou a venda. Os cálculos manuais ainda eram mais baratos.

Antes de prosseguirmos com a história dos Pascal, situaremos o leitor a respeito da febre dos religiosos jansenistas, que mais tarde exercerá forte influência na vida de Pascal. Assim, contextualizaremos com um breve relato de alguns acontecimentos religiosos que ocorreram na Europa, em particular na França.

No início do século XVI, a Europa passa por mudanças religiosas. Lutero (1483-1546), na Alemanha, começa um movimento de Reforma, contra a Igreja Católica²⁶. Não concordando com os dogmas dela, protesta. Estabelece uma nova ordem religiosa, o Protestantismo. Na França, o movimento da Reforma foi conduzido por Calvino (1509-1564), também estabelecendo o Protestantismo. A diferença entre a filosofia de Lutero e Calvino é que, este acredita na predestinação, isto é, Deus já escolheu quem vai para o Céu ou Inferno.

Em oposição a Reforma, surge a Contra-Reforma.

Em 1534, o Papa Paulo III encorajou o desenvolvimento de novas ordens religiosas, a mais notável sendo a Companhia de Jesus ou os Jesuítas. Fundada por Santo Inácio de Loyola, eles eram uma elite de clérigos dedicados à propagação da fé por meio da educação. Muitas universidades jesuítas foram estabelecidas na Europa [...].²⁷

Diante destes movimentos, surge outra doutrina religiosa. Seguindo as idéias de Jean Duvergier de Hauranne – que se tornará abade de Saint-Cyran – e de seu ex-aluno, de teologia, o flamengo Cornelius Jansen, formar-se-á um novo grupo, que será chamado de Jansenismo. Um dos princípios de sua filosofia é a aversão ao mundo.²⁸

Os Jansenistas não apóiam, nem católicos nem protestantes. Saint-Cyran

[...] pretende regenerar a Igreja da França e marginalizar a hierarquia em favor do cura de paróquia, encarregado da cura das almas. Imiscui-se

²⁴ BOYER, 1963, p. 287.

²⁵ BIOGRAPHICAL..., 1991, p. 1915.

²⁶ MANNION, 2004.

²⁷ MANNION, 2004, p. 79.

²⁸ ATTALI, 2003.

também em política, detesta Richilieu e denuncia as alianças firmadas com os Países Baixos, protestantes, e com certos príncipes alemães, também protestantes, contra a Espanha católica. Para agir, não quer criar nenhuma ordem, nenhum partido, mas apenas insinuar-se no espírito daqueles que orienta e aconselha: grandes figuras da Igreja e do mundo. Em particular no Convento de Port-Royal.²⁹

O Convento de Port-Royal será o local onde, mais tarde, Jacqueline se tornará freira. Para os Jansenistas, apenas “[...] a consciência de sua miséria o tornará livre. Só a pobreza e a fuga do mundo o salvarão, se a graça estiver sobre ele. Só a pureza é um ideal.”³⁰ Alguns nobres tornam-se adeptos do Jansenismo. Decidem seguir a doutrina, e então procuram abandonar as coisas mundanas. Comentaremos a grande intriga que ocorrerá entre os Jansenistas e os Jesuítas.

Em 1646, os Pascal conhecem essa doutrina, a partir de um acidente que Étienne sofrera quebrando a perna. Dois irmãos médicos prestam socorro a ele. Os dois são adeptos do Jansenismo. Étienne os convida para passar um tempo em sua casa. Os irmãos aproveitam para discutir teologia. Até indicam leituras aos Pascal. Pelo que consta, a priori, Pascal não se interessa muito pelo tema, apenas o vê como uma atividade cultural. Podemos dizer que essa foi a primeira conversão da família Pascal. Não tão intensa.

Mais tarde, essa filosofia de vida será incorporada fortemente na maneira de viver de Pascal. Mas isto acontecerá em outro momento.

Voltemos, mais propriamente, à história de Pascal. Este, quando se decide a fazer algo de que goste, não perde tempo, dedica-se ao máximo para entender o funcionamento do que se propõe a investigar. E foi assim que surgiu a circunstância de fazer a experiência do vácuo.

Galileu mostrou no trabalho *Duas Novas Ciências*, de 1638, “[...] que a aversão da natureza a um vácuo parecia estar limitada a uma pressão equivalente a 34 pés de água [...]”.³¹ Torricelli, discípulo dele, realizou o mesmo experimento, só que trocou a água por mercúrio. Constatou que a altura do tubo de mercúrio ficou aproximadamente em setenta e seis centímetros. “Torricelli conclui que os fenômenos eram melhor explicados pela hipótese de que vivemos no fundo de um mar de ar, e que as colunas de água e mercúrio eram suportadas pela pressão atmosférica do ar sob o qual estamos submersos.”³²

²⁹ ATTALI, 2003, p. 74.

³⁰ ATTALI, 2003, p. 78.

³¹ BOYER, 1963, p. 287.

³² BOYER, 1963, p. 288.

Mersenne informa-se do experimento torriceliano, a respeito do vácuo, e divulga-o na Academia de Paris, Petit fica, assim, sabendo das experiências. Em 1646, Pierre Petit está de passagem por Rouen. Ele é amigo de Étienne. Petit informa Étienne e Pascal sobre a possibilidade da existência de vácuo. Petit e Mersenne tentaram realizar o experimento de Torricelli em Paris, mas não tiveram sucesso.

Por sorte, em Rouen existe uma excelente vidraçaria, fornecendo material para a experiência. Pierre Petit repetiu-a, com a ajuda de Étienne e Pascal. No final de novembro, daquele ano, Petit descreve o experimento em uma carta destinada a Pierre Chanut. Pascal, com certeza ficou inspirado, e repetiu-o de várias formas. Por exemplo, encheu

[...] um tubo de vidro de quatro pés de altura, fechado em uma extremidade, com mercúrio e inverteu-o com a extremidade aberta em um recipiente de mercúrio, notando que a coluna de mercúrio caiu a uma altura de aproximadamente 30 polegadas. Então repetiu o experimento com um tudo de 40-pés de água e encontrou que na inversão em um recipiente com água, a coluna caiu para cerca de 34 pés; com vinho tinto a coluna era um pouco mais alta do que com água. Em cada caso, Pascal viu, a altura era inversamente proporcional à densidade da substância, e a conjectura de Torricelli estava confirmada.³³

Pascal aproveitou aquela fábrica de vidro e realizou experimentos com diversos tamanhos de tubos de vidro.³⁴

A saúde de Pascal não é das melhores e, no verão de 1647, vai para Paris. Deste modo, retorna a Academia e apresenta seus resultados sobre o vácuo. Fica sabendo que, quem realizara a experiência italiana fora Torricelli (1644)³⁵. Outras experiências estavam sendo feitas;

³³ BOYER, 1963, p. 288.

³⁴ Segundo Koyré (1982) seria muito complicado Pascal ter conseguido um tudo de vidro com a altura relatada no experimento. “[...] é pouco provável que os fabricantes de vidro do século XVII, mesmo os de Rouen, tenham sido capazes de produzir um desses tubos [que Pascal fez as experiências].” p.359. Em outra passagem o mesmo autor diz: “Gostaríamos de ter informações precisas sobre esses aparelhos, bem como sobre a maneira pela qual se prepararam efetivamente os tubos e o grande sifão de 50 pés.” (p. 360). Em outra passagem Koyré nos diz: “[...] a literatura científica do século XII – e não só do século XVII – está cheia dessas experiências fictícias e poderia escrever-se um livro muito instrutivo sobre o papel, na ciência, das experiências não realizadas e até de impossível realização.

Porém, uma vez mais, não quero afirmar que Pascal não fez as experiências que nos diz ter feito. Em compensação, creio poder afirmar que ele não as descreveu *tal como as fez* e não expôs seus resultados *tal como se verificam sob seus olhos*. Certamente ele nos escondeu alguma coisa.”(1982, p.360). Acreditamos que fabricar o tubo de vidro seja algo possível, o difícil é manipulá-lo.

³⁵ “[...] Pascal nos dirá ou, mais exatamente, dirá ao Senhor de Ribeyre (em 16 de julho de 1651 que, naquela época, isto é, em 1646 e 1647, não sabia que o autor em questão era Torricelli e que tendo-o sabido, nunca deixou de dizê-lo. Entretanto, deve-se confessar que essa ignorância é, pelo menos, bastante surpreendente,

[...] uma notícia chegou a Paris de que um experimento barométrico tinha sido conduzido em Varsóvia em julho de 1647, por V. Magni, que implicitamente reivindicou prioridade. Roberbal respondeu em 22 de setembro com uma *Narratio Latina* (publicado em Varsóvia em dezembro), a qual estabeleceu a prioridade dos experimentos de Torricelli e de Pascal e revelou novos pormenores a respeito do último.³⁶

Pascal admite que sua inspiração veio dos experimentos torricellianos. Publica alguns resultados de experiências que fez, com seringa e sifões, relativas ao vácuo, com o título *expériences nouvelles touchant le vide* (*Novas experiências sobre o vácuo*). Pascal foi obrigado a publicar seus resultados para não perder o crédito dos experimentos, pois o padre Magni disse “[...] ter sido o primeiro a demonstrar a existência do vácuo e de haver testemunhado, com seus próprios olhos, *Locum sine locato, Corpus motum successive in vacuo, Lúmen nulli corpori inhaerens* [...]”.³⁷ Mas ainda nada está provado. Será necessário elaborar e fazer outros experimentos.

Em setembro de 1647, Descartes e Pascal encontraram-se e parece não ter sido muito amigável. Descartes deparou-se com um Pascal doente, e sugere-lhe alimentação a base de caldo e repouso. Noutro dia repete a visita, mas nada se sabe o que aconteceu. Mais tarde, “[...] o inventor do *Cogito* afirmará ter aconselhado Pascal, naquele dia, a medir a altura do mercúrio do tubo, fazendo a experiência no alto de uma montanha.”³⁸ Porém Pascal afirmou, depois, que a idéia foi sua. A convicção de Descartes era que o espaço continha uma matéria *sutil*.

Pascal, realmente quer desenvolver o experimento, mas sua saúde não é muito boa. Então, pede para seu cunhado em Clermont, para realizá-lo.

Muitas discussões sobre o vácuo apoderam-se do espírito científico daquele tempo. Mesmo assim, Pascal permanece firme com os resultados que obteve, e dá prosseguimento aos experimentos.

Assim, em 15 de novembro de 1647, Pascal indica a Périer que “a experiência deverá ser feita “no sopé e no cume”, num único dia, com dois tubos que utilizem o mesmo

uma vez que Petit, em sua carta a Chanut, refere-se expressamente à experiência “de Torricelli” [...].”(KOYRÉ, 1982, p. 356-7).

³⁶ BIOGRAFICAL..., 1991, p. 1916.

³⁷ KOYRÉ, 1982, p. 357.

³⁸ ATTALI, 2003, p. 88.

mercúrio, na presença de testemunhas de confiança.”³⁹ Pascal aguarda a resposta de seu cunhado.

Finalmente, em Clermont, tudo está pronto para realizar a experiência do vácuo. Em 19 de setembro de 1648, Périer fez os experimentos na montanha Puy de Dôme, tanto em sua base quanto no seu topo, totalizando, no decorrer do trajeto dezessete experimentos. Ele está acompanhado de pessoas idôneas, a fim de servirem de testemunhas a experiência científica. Comprova-se que “o nível do mercúrio no tubo realmente caiu apreciavelmente com a altitude, no mesmo tempo que o mercúrio em outro tubo na base da montanha manteve-se em um nível constante.”⁴⁰ Deduz-se que, mudando de altitude, muda, também, a pressão atmosférica, ou seja, conforme aumenta a altitude a pressão atmosférica diminui, ocasionando a queda na coluna de mercúrio.

Os experimentos também foram executados por cientistas em Estocolmo. Outra vez a existência do vácuo e da pressão atmosférica foi confirmada. A natureza não tem um horror ao vácuo, como a teoria aristotélica afirmara.⁴¹

Périer repete os experimento na base e no alto da torre da mais alta Catedral de Clermont, e novamente nota-se uma pequena queda no nível do mercúrio no tubo, quando está no topo da torre. Em Paris, Pascal recebe o relatório de Périer, e repete o experimento na torre da igreja Saint-Jacques. Também comprova a existência do vácuo. Assim, a teoria da pressão atmosférica e a existência do vácuo é confirmada. Pascal publica um informe das experiências que foram realizadas, logo após ter recebido o relatório de Périer, “*Récit de la grande expérience de l'équilibre des liquers projetée par le sieur B.P. pour l'accomplissement du traité qu'il a promis dans son abrégé touchant le vide et faite par le sieur F.P. em une des plus hautes montagnes d'Auvergne (autumn 1648).*”⁴²

Pascal dedica-se aos seus experimentos; enquanto isto, sua irmã almeja fazer um retiro espiritual. Já tentara outra vez, mas sem êxito. Agora, em 1649, consegue realizar seu sonho de fazê-lo. Ficará alguns meses no convento de Port-Royal de Paris.

Depois desses acontecimentos, a família inteira reúne-se em Auvergne, na casa de Gilberte. É uma opção de Étienne, para ver se os filhos respiram novos ares e reflitam sobre outras coisas. Étienne tem medo de perder sua filha. Medo de que ela se torne uma freira. A família retorna a Paris em 1650.

³⁹ ATTALI, 2003, p. 92-93.

⁴⁰ BOYER, 1963, p. 288.

⁴¹ BIOGRAFICAL..., 1991.

⁴² BIOGRAFICAL..., 1991. p. 1924.

Pascal está disposto a realizar a mesma experiência de Roberval sobre o vácuo. Este sábio parece não acreditar no experimento, tanto que “para demonstrar isso, tem a idéia de pôr dentro da seringa de fazer vácuo uma bexiga de carpa bem achatada; mas, para surpresa geral, quando se produz vácuo na seringa, a bexiga incha e às vezes estoura.”⁴³

Para comprovar esse fenômeno, Pascal repete o experimento, só que um pouco diferente: “manda levarem uma bexiga de carpa cheia pela metade ao cume do Puy de Dôme. Ela vai enchendo-se aos poucos durante a subida e esvaziando-se regularmente durante a descida”.⁴⁴ Pascal, mais uma vez comprova a relação inversa da natureza da pressão atmosférica, quanto mais altitude, menor a pressão, e assim a bexiga aumenta de tamanho e quanto mais próximo do nível do mar, maior a pressão, e bexiga tende a diminuir de tamanho.

No século XX, em 1906-1907, Pascal será acusado por

[...] F. Mathieu, que desafiou tanto a originalidade científica de Pascal quanto sua honestidade. Acusou Pascal de ter inventado a carta a Périer de 15 de Novembro de 1647, depois da conclusão do evento, a fim de levar crédito pelos experimentos do vácuo dentro do vácuo e de Puy de Dôme. Embora o aquecido debate que resultou não produziu quaisquer conclusões aceitas unanimamente, estimulou pesquisa que trouxe à luz muitos documentos inéditos. Em uma avaliação da questão, J. Mesnard, depois de examinar os argumentos e clarear muitos pontos, sugere que Pascal provavelmente enviou a contestada carta a Périer em 15 de novembro de 1647, mas pode ter alterado o texto ligeiramente para a publicação. Esse julgamento acordado está provavelmente próximo da verdade.⁴⁵

No século XVII, o que era bem comum, é a acusação de plágio, Pascal foi acusado pelo jesuíta Médalille. Esse jesuíta reivindica que o padre Magni fizera essa experiência anteriormente a Pascal. Na verdade, Pascal não fez nada de novo. Pois sabia da experiência do italiano Torricelli. O que fez na verdade foi aperfeiçoar o experimento. E de acordo com sua história, era perito no que se propunha a fazer. Além disso, o próprio Mersenne, entre os anos 1643 e 1647, sabia dessa teoria. J.B Baliani, também, admitia a hipótese da pressão atmosférica. Entretanto, o crédito é de Pascal por ter planejado e executado o experimento.

⁴³ ATTALI, 2003, p. 92.

⁴⁴ ATTALI, 2003, p. 110-111.

⁴⁵ BIOGRAFICAL..., 1991. p. 1917.

Étienne morre em 24 de Setembro de 1651. Faleceu em sua casa, em Paris. Pascal escreve a Gilberte informando da morte de seu pai. Nessa carta, deixa transparecer temas que escreverá mais tarde, sobre: “amor-próprio, a preguiça e o desejo de dominar.”⁴⁶

Como prometera ao pai, Jacqueline vai para um convento. Com a morte do pai, e com a decisão da irmã de entrar para o convento, Pascal fica sozinho em Paris. Iniciará um novo período de sua vida. Esse momento é considerado o “período mundano” de Pascal.

Freqüenta a sociedade, refaz a amizade com o velho conhecido, Arthur Gouffier, o duque de Roannez. Também conhece o intelectual Antoine Gombaud, popular cavaleiro de Méré.

Com a morte de Étienne, seus filhos esperam a divisão da herança. Muita confusão irá acontecer. Como Jacqueline está no convento, e caso torne-se noviça antes da partilha da herança, não terá direito a nada. Ela perante o Estado está morte civilmente. Deste modo, Jacqueline espera que os tabeliões acelerem o processo da partilha. Mas esse não parece ser o desejo dos irmãos nem do cunhado. Cada um tem seus motivos. Os Périer não vêem vantagem da herança ser dada ao convento. Pascal ainda tem o sonho de que sua irmã volte para o seu lado. Está cansado de ficar sozinho e resolve fazer uma viagem com Roannez, Méré, Miton, e Octavio de Strada. Este é engenheiro. Parecem ter espírito de aventureiros. Roannez quer drenar os pântanos de seu Poitou natal. Pascal é apresentado como o consultor científico do trabalho. Como Pascal não tinha um físico muito bom, cansa-se da viagem, e para não ficar sozinho em Paris, acha conveniente dirigir-se até a casa de sua irmã mais velha. Aproveita o tempo para elaborar seus trabalhos referentes à física.

A partilha da herança ainda não fora feita. Jacqueline adoce com medo de não receber sua parte, antes de tornar-se noviça. O que ela quer é doar o que receber para o convento. Pascal comovido com o que a irmã mais nova está passando, volta para Paris e transfere certa quantia em dinheiro a Jacqueline, impondo-lhe certas regras para a devolução do dinheiro.

Nesse período compreendido entre os anos de 1651 e 1654, fará muitos estudos em matemática e física. Compõe o *Tratado Sobre o Vácuo* (que se perdeu), *Tratado do equilíbrio dos líquidos e do peso da massa de ar*. Decide calcular a massa da atmosfera terrestre, isto é, o peso do ar. Encontra um peso de $8,238 * 10^{18}$ libras.

⁴⁶ ATTALI, 2003, p. 124.

Em 1654, faz novos estudos sobre as cônicas e escreve para Fermat que está trabalhando em seu *Conicorum opus completum*, continuação do seu trabalho *Essay Pour Les Coniques* (1640). Porém, aquele não foi publicado e perdeu-se. O que restou foram as notas tomadas por Leibniz. De acordo com as notas deste, o trabalho

continha uma seção sobre o *magna problema* – para colocar uma dada cônica em um determinado cone de revolução. Uma outra seção referia-se ao problema de Pappus sobre o lugar das três-e-quatro-linhas. O último problema fora manipulado extensamente por Descartes, usando métodos analíticos, mas a abordagem de Pascal foi sintética, como anteriormente nas *Cônicas*.⁴⁷

Pelo que vemos, Pascal praticamente dispensava a álgebra, que estava em voga na época. Fazia uso da retórica. Descartes já havia publicado a *Géométrie* em 1647. Fermat, também, desenvolveu trabalho na área da Geometria Analítica. Seu trabalho, *Ad locus planos et solidos isagoge* foi publicado postumamente em 1679.

Outro trabalho que instigara a mente de Pascal, é referente aos jogos de azar. A partir de 1654, estabelecerá, juntamente com Fermat, a teoria das probabilidades.

Na França, um modo de divertir-se era com jogos, especialmente como o jogo de dados. O prazer do jogo cativa as pessoas, não tão diferentemente de hoje. Mas lá, como também hoje, havia a disputa pelo dinheiro, e as apostas eram feitas. Para o jogo de dados, não havia uma teoria precisa que viesse a fornecer base para os jogadores saberem quais eram realmente suas chances de ganhar.

O estudo da probabilidade feito por Pascal teve início quando um amigo dele, Méré, o questiona sobre de que maneira as apostas, de uma partida interrompida, deveriam ser repartidas. A partir de então, começa a busca pela compreensão da resolução desse problema. Comunicando-se com Roberval, este lhe diz para corresponder-se com Fermat. Os dois trocam cartas. Em uma dessas, discutem a seguinte questão: Em oito lances de um dado, um jogador esta tentando lançar o número um, mas depois de três tentativas sem sucesso o jogo é interrompido. Como ele deveria ser indenizado?

A partir da discussão entre Pascal e Fermat sobre problemas dessa natureza, a teoria de probabilidade começará a estabelecer-se como um ramo da matemática. Pascal mostra que os resultados dos problemas de partições podem ser vistos no Triângulo Aritmético, hoje conhecido como Triângulo de Pascal. Matemáticos posteriores, Jakob

⁴⁷ BOYER, 1963. p.290.

Bernoulli, P.R. de Montmort e A. de Moivre, desenvolverão estudos no campo teórico da probabilidade.

Bem antes a probabilidade já era mencionada nos versos do “Purgatório” de Dante. Cardan, na obra *De ludo aleae*, já fizera um estudo referente ao tema. Fermat e Pascal não publicaram seus trabalhos. Huygens publicou em 1657, como parte da *Exercitationem mathematicarum* de van Schooten, um trabalho intitulado *De ratiociniis in ludo aleae*. Foi estimulado pelas discussões entre Fermat e Pascal.

Em 1654, Pascal redige o *Tratado do Triângulo Aritmético* com o total de dezenove conseqüências. Provavelmente no mesmo ano, escreve outro tratado *Potestatum Numericarum Summa*. Cuidaremos desses trabalhos nos capítulos posteriores. Por ora, apresentaremos uma sinopse deles.

O triângulo aritmético já era conhecido pelo matemático chinês Chus Shih-Chieh, em 1303, e também, pelo persa Omar Khayyan, próximo daquela época. Da mesma maneira que os chineses representavam o arranjo triangular, com os coeficientes nas linhas horizontais, Peter Apuan, também o fizera em 1529. Tartaglia no seu *General Trattado di Numeri et mesure*, em 1556, usou o arranjo triangular, considerando os coeficientes binomiais dispostos diagonalmente em um retângulo, da mesma maneira que Cardan em *Opus Novum de Proportionibus* (1507) o fez. Pascal estruturou o triângulo aritmético como esses dois últimos. Entre 1629 e 1633, vários triângulos aritméticos foram publicados por Girard, Oughtred, e Briggs, mas Pascal não menciona ninguém em seu trabalho. Sua grande contribuição foi estudar exhaustivamente as relações encontradas no triângulo, assim como generalizar abordagens anteriores.

A linguagem apresentada por Pascal, como já comentamos, não foi a notação simbólica ou literal. Preferiu em vez disso, já que fora ensinado por seu pai a escrever bem, enunciar retoricamente as conseqüências do arranjo triangular. Nas demonstrações das conseqüências, usou a idéia da Indução Matemática. Alguns matemáticos, também, usaram argumentos por recorrência, como Maurolycu (1572). Fermat em certas proposições em teoria dos números, também a usou.

No século XVII, matemáticos buscaram incessantemente encontrar áreas, volumes, etc. Podemos considerar que Cavalieri, Fermat, Pascal, Wallis, Gregórie De Sant-

Vincent, etc., chegaram próximos da notação moderna $\int_0^a x^m dx = a^{m+1} / (m+1)$. Pascal,

escreveu o tratado da *Potestarum Numericarum Summa*, que o levou a encontrar aquele

resultado moderno de integração – claro que utilizando seus próprios métodos: geométrico e aritmético. O trabalho todo é descrito retoricamente, como veremos posteriormente no capítulo IV.

No final de 1653, Pascal inicia um período de peregrinação. Ou seja, sua vida será movida, também, pela fé. Passará a dividir seu tempo entre a matemática e a religião.

Na noite de 23 de Novembro de 1654, das 22h30min aos 30 minutos do dia subsequente, Pascal diz ter sido iluminado por Deus. Depois disso, escreve alguns versos e costura-os no forro de um casaco.

Pascal passou por um estado de conversão. O matemático Pascal convive, então, com outro personagem: o filósofo-religioso Pascal, que será um dos precursores da boa prosa francesa com suas *Cartas Provinciais*.

O novo espírito revela um outro homem. Pascal até aceita fazer um retiro, que durara cerca de três semanas, em Port-Royal-des-Champs, mais tarde, fará outros. Em seu período de reclusão – isto é, de retiro – escreve: *Escrito Sobre a conversão do Pecador; Resumo da vida de Jesus Cristo; Comparação dos Cristãos dos primeiros tempos com os de hoje*. Ao retornar para casa, redige dois textos: *Espírito Geométrico; Arte de persuadir*. A primeira parte contém o método para as demonstrações geométricas. Já na segunda parte apresenta: *Regras para as definições; Regras para os axiomas; Regras para as demonstrações*. Nesses estudos Pascal nos diz que:

São três os principais objectivos que podemos ter na investigação da verdade: um é descobri-la quando a procuramos; outro, demonstrá-la quando a possuímos; o último, discerni-la do falso quando a examinamos⁴⁸

Dedica-se ao estudo das probabilidades e, mais intensamente em 1658, ao estudo da ciclóide. Outra obra estará por vir, que marcará a cultura francesa. Pascal dedicar-se-á às *Províncias*. “Iniciada como um embate intelectual para ajudar um amigo, a escrita das *Provinciais* acabará por empenhar seu autor no mais profundo de si mesmo, na luta contra os casuístas, depois contra os jesuítas, depois contra o papa.”⁴⁹ Assim, Pascal envolve-se em um conflito religioso. A fim de defender Arnauld, que está na mira dos jesuítas inicia a escrita de cartas, antes anonimamente, e mais tarde irá usar um pseudônimo de Louis Montalte. Pascal foi escolhido para aquele fim por ter “[...] um espírito tão admirável que

⁴⁸ PASCAL, 2003, p. 13.

⁴⁹ ATTALI, 2003, p. 186-187.

embelezava tudo o que dizia e, embora tivesse aprendido muitas coisas nos livros, quando as dигeria a seu modo elas pareciam diferentes, porque sabia enunciá-las da maneira como o deviam ser para entrarem na compreensão do homem.”⁵⁰ A linguagem apresentada nas *Provinciais* era eloquente.

As *Provinciais* causam um bom debate em Paris, entre os Jansenistas e Jesuítas. Muitos queriam saber quem era seu autor. Depois de publicar as dezoito *Cartas*, Pascal resolve reuni-las, e editá-las. Para isso, utiliza o pseudônimo de Louis Montalte.

Mais tarde, fará um anagrama com nome de Louis Montalte, isto é, Amos Dettonville. Utilizar-se-á deste personagem para representá-lo na elaboração de uma disputa concernente à resolução de problemas da ciclóide proposta aos matemáticos daquela época, como veremos mais adiante.

Mesmo convertido ao Jansenismo, continua a realizar seus estudos científicos, bem como filosóficos-religiosos. Entre os anos 1654 e 1658, “[...] escreve para os estudantes maiores de Port-Royal dois textos sobre a arte de expressar-se, um em literatura, outro em matemática.”⁵¹ Antoine Arnauld pede-lhe para escrever, em 1658, os *Éléments de géométrie*, que serão utilizados por alunos de Port-Royal. Pascal

[...] nunca deixou, absolutamente, de contribuir para o progresso da ciência. Nem durante a redação das *Provinciais*, nem depois. E quando, dois anos mais tarde, a doença lhe vedar todo e qualquer trabalho efetivo – em fevereiro de 1659, ou seja com a idade de trinta e seis anos –, será ao conjunto de suas atividades intelectuais que ele renunciará, e não apenas à matemática.⁵²

Será um período de penúria e sofrimento. Não conseguiu fazer quase nada. Quando podia, ditava o que queria dizer. Melhorará em Março de 1660.

Com sua habilidade em escrever, entre julho de 1657 e fevereiro de 1659, apresenta resultados significativos para a matemática. Faz o estudo da ciclóide que o instigara a propor uma grande competição. Mas a história que nos apresentam é que

Segundo a tradição familiar, Pascal chega a essa demonstração importantíssima sobre o caso particular de curva [ciclóide] em certa madrugada de maio de 1658 – tem então trinta e cinco anos –, num momento em que suas dores de cabeça eram tão insuportáveis que ele só conseguia distrair-se concentrando-se nos mais árduos problemas de

⁵⁰ A VIDA..., 1973, p. 22.

⁵¹ ATTALI, 2003, p. 228.

⁵² ATTALI, 2003, p. 231.

matemática. A família quer assim levar a crer que ele realiza essa descoberta em uma só noite, pondo fim a quatro anos de rompimento com as ciências, por meio de uma descoberta sem continuidade. O que é evidentemente falso: ainda que a matemática seja um derivativo parcial para a dor e embora ele provavelmente trabalhasse durante a noite, na realidade isso vinha sendo feito havia anos, sem interrupção nem antes nem depois de 1658.⁵³

Já sua irmã Gilberte relata que

Essa volta das enfermidades de meu irmão começou por uma dor de dente que lhe tirou inteiramente o sono. [...] Eis por que nas suas insônias, de resto mui freqüentes e cansativas, vieram-lhe uma noite ao espírito alguns pensamentos sobre a roleta [ciclóide]. Ao primeiro seguiu-se um segundo e a este um terceiro e, enfim, surgiram, uns dos outros, inúmeros pensamentos, os quais lhe mostraram uma demonstração da roleta com a qual ele próprio se surpreendeu.⁵⁴

São pontos de vistas diferentes. Diante do contexto, e sabendo quanto é difícil estabelecer um conceito matemático tão rapidamente, mesmo com a habilidade de Pascal, concordamos com o primeiro autor. Ou seja, nunca deixou de lado a matemática nem a filosofia. Parece ter tido muitas personalidades

Primeiramente há o Pascal n° 1, ou seja, ele mesmo, que ensina e só pensa em termos de humildade. Depois há o Pascal n° 2, por ele denominado “Anônimo”, preocupado com o rigor e a neutralidade, que lança o concurso sobre a ciclóide. Há também o Pascal n° 3, que, chamado “Amos Dettonville”, resolve o problema apresentado no concurso e defende com unhas e dentes a originalidade de suas descobertas. O Pascal n° 4 escreve, sem se identificar, textos ferozes sobre graça para os párocos de Paris. O Pascal n° 5, que ele denominará “Salomon de Tultie”, é um escritor desesperado que toma notas para aquilo que virá a ser os *Pensamentos*. O Pascal n° 6, que ele acaba de batizar de “Louis de Montalte,” corrige as incessantes reimpressões das *Provinciais*. Finalmente, um Pascal n° 7 administra com empenho seus interessantes materiais e prepara-se para lançar-se em novos negócios.⁵⁵

Gilberte, também, nos apresenta a diversidade de idéias que vinham a mente de seu irmão, e que às vezes compunha coisas diferentes ao mesmo tempo.

A curva denominada ciclóide, como referida anteriormente, foi estudada por matemáticos como: Nicolau de Cusa (1451), Roberval (1635), Mersenne (1615), Galileu

⁵³ ATTALI, 2003, p. 236.

⁵⁴ A VIDA..., 1973, p. 26.

⁵⁵ ATTALI, 2003, p. 237-238.

(~1600), entre outros. Pascal solucionou vários problemas relativos a ciclóide. Como por exemplo, encontrou o centro de gravidade de meio arco da ciclóide.

Em 1658, anunciou – anonimamente – uma competição a respeito da ciclóide, estabelecendo um prêmio de quarenta pistolas para o primeiro colocado, e vinte pistolas para o segundo. Quem patrocina a competição é Arthur. Os jurados serão: Carcavi, Roberval, e Gallois. Pascal deixou o prêmio nas mãos de Carcavi. As questões lançadas foram as seguintes: encontrar

1. A quadratura de um segmento de um arco da ciclóide limitada pela curva, o eixo (através do vértice perpendicular à base), e uma corda paralela à base.
2. O centro de gravidade desse segmento.
3. O volume gerado girando o segmento à volta da corda.
4. O volume gerado girando o segmento à volta do eixo.
5. Os centros de gravidade dos volumes acima.
6. As mesmas questões para as metades dos volumes quando cortados por um plano através do eixo.⁵⁶

Usando o pseudônimo Amos Dettonville, Pascal apresenta as soluções das questões a Roberval e Gallois, e fica sabendo que aquele solucionara as quatro primeiras. Assim, em 19 de julho, anuncia aos competidores, que serão requeridas, apenas as duas últimas questões, relativas à disputa do prêmio.

O prazo estabelecido, para a competição, foi entre junho e outubro; mas em outubro, Pascal – o anônimo – anuncia mais um mês de prazo para as respostas serem enviadas. “Várias respostas chegam a Carcavy, entre as quais a do matemático inglês Wallis [...], de um jesuíta de Toulouse, do padre Lalouère, de Sluse e de Huygens.”⁵⁷ Como nenhuma resposta, dos problemas, foi satisfeita o júri declarou que o prêmio deveria voltar para o anônimo, ou seja, Pascal.

Mais tarde, em dezembro de 1658 e janeiro de 1659, o anônimo, revela-se ser Amos Dettonville, e publica “[...] quatro cartas estabelecendo os princípios de seu método e suas aplicações à vários problemas relativos a ciclóide, bem como questões sobre a

⁵⁶ BOYER, 1963, p. 298.

⁵⁷ ATTALI, 2003, p. 238.

quadratura de superfícies, cubatura de volumes, determinação de centros de gravidade, e retificação de linhas curvas.”⁵⁸ Talvez o trabalho mais significativo publicado por Pascal.

Até 1657, havia dúvidas quanto à retificabilidade de curvas algébricas, ou que seus comprimentos pudessem ser expressos algebricamente. Diante disso, as Cartas de Dettonville desempenharam importante papel. Nelas, há um trabalho, cujo título é *L’Egalié entre lês lignes spirale et parabolique démontrée à la manière des anciens*.

Depois de ter lançado o desafio da cicloide, Wren enviou a Pascal sua retificação dela. Pascal mostrou-a a Roberval. Este diz que já a encontrara há muito tempo. Na ótica desses fatos, o que Pascal fez, não foi original, apenas clarificou o trabalho matemático de outros matemáticos fazendo uso dos métodos antigos. “Quando iniciou a disputa, Pascal sabia dos métodos e os principais resultados de Stevin, Cavalieri, Torricelli, Gregoire De Saint-Vincent, e Tacquet; mas não estava familiarizado com o tamanho da pesquisa inédita de Roberval e Fermat.”⁵⁹

Outros trabalhos referentes à cicloide apareceram naquela época, como o de Wallis em 1659, o de Lalouvére em 1660, o de Honoré Fabri em 1659 (que parece ter sido inspirado pela disputa da cicloide).

Na exposição de seus resultados referentes a cicloide Dettonville escreve o *Traité des sinus du quart de cercle*. Mais tarde, Leibniz verá o Tratado dos Senos, que o instigará a estabelecer a relação entre tangente e quadratura. Leibniz “[...] percebeu que a determinação de tangentes a uma curva depende da relação das diferenças nas ordenadas e abscissas quando estas tornam-se infinitamente pequenas, e que as quadraturas dependem das somas das ordenadas ou dos retângulos infinitamente finos.”⁶⁰ A partir de então, Leibniz conseguiu, fazer a relação entre a quadratura e a tangente, ou seja, estabeleceu os princípios do nosso cálculo moderno, integração e diferenciação. Newton, também chegou a estes resultados, só que por outros caminhos.

Outra brilhante obra produzida por Pascal foi *Pensées*. Há muito tempo tem em mente a possibilidade de compor um trabalho sobre a condição humana. No artigo *Miséria do homem sem Deus* coloca o homem entre os dois infinitos.

Nossa razão é sempre iludida pela inconstância das aparências e nada pode fixar o finito entre os dois infinitos que o cercam e dele se

⁵⁸ BIOGRAFICAL..., 1991, p. 1920. Cf Lettre de M. Dettonville a M. De Carvavi em Ouevres Completes, 1963.

⁵⁹ BIOGRAFICAL..., 1991, p. 1920.

⁶⁰ BOYER, 1963, p. 301.

afastam. Desde que compreendamos isso, creio que nos manteremos tranqüilos, cada um no estado em que a natureza o colocou. Como esse termo médio, que nos coube por destino, se situa sempre longe dos extremos [...].⁶¹

Além de fazer apologia ao cristianismo, podemos encontrar pensamentos sobre matemática. Um dos artigos que compõem, a obra, é: *Pensamento sobre o Espírito e sobre o estilo*. Nele, Pascal apresenta: *Diferença entre o espírito de geometria e o espírito de finura*. Os *Pensées* não foram terminados. As anotações que deixou foram reunidas e editadas postumamente como *Pensées*.

Surge então o verdadeiro período de penúria “[...] durante dezoito meses, a doença monopoliza seus pensamentos. É a época em que sofre um verdadeiro martírio, fica fraquíssimo, só ingerindo caldos e as infames poções que os médicos lhe prescrevem”.⁶² Depois disso, em 1660, parece que suas forças voltaram. Seu apego a pobreza é surpreendente. Não quer nada ao seu lado que possa lhe dar prazer. Chega até a vender alguns pertences materiais.

Passa por momentos que põem em prova sua destreza. Fica enfurecido com alguns Jansenistas, que por forças políticas contrárias a sua filosofia, são obrigados a assinarem um formulário, negando o Jansenismo. A obra de Cornelius Jansenius, intitulada *Agostinus*, continha cinco proposições, assim afirmavam os opositores do Jansenismo, que contrariavam o pensamento de Santo Agostinho. Portanto, a obra de Jansenius era herética. Pascal não aceitou assinar esse formulário. Ainda mais, depois de toda sua luta quando escrevera as *Provinciais*.

Em meio a essa contenda, em 1661, no dia quatro de outubro, Jacqueline morre. Ela estava residindo em Port-Royal-des-champs. Local este onde será enterrada na presença de Pascal e Gilberte.

As dores de Pascal não o abandonaram até o leito da morte. No final de 1661, já não consegue escrever; sua dor de cabeça parece ser a causa. Mas ainda elaborará outro projeto.

Com a morte de Jacqueline, Pascal é restituído, por Port-Royal, pelo contrato que fizera com Jacqueline, em relação ao dinheiro da herança de seu pai. Com o dinheiro, ele e seus amigos, organizam um empreendimento, isto é, uma empresa de transporte coletivo

⁶¹ PASCAL, 1973, p. 58.

⁶² ATTALI, 2003. p.255.

com carruagens. Estabelecem as rotas e as tarifas. O interessante disso é que Pascal dá boa parte dos lucros aos pobres. Esse projeto empresarial, parece ter sido sua última idéia antes de sua morte.

As últimas horas de vida de Pascal como narrado por sua irmã Gilberte.

[...] mais ou menos à meia-noite foi tomado de violenta convulsão; ao terminar, pareceu-nos que estava morto. E sentíamos todas a tristeza de vê-lo morrer sem comungar, após ter solicitado tantas vezes, e tão insistentemente, essa graça. Mas Deus, que queria recompensar tão fervoroso e justo desejo, susteve, como por milagre, essa convulsão e devolveu-lhe, como se estivesse em perfeita saúde. De maneira que, quando o padre entrou no quarto com Nosso Senhor, exclamando: “Eis Aquele que tanto desejastes”, tais palavras acabaram de acordá-lo e o padre aproximou-se para ministrar-lhe a comunhão. Fez um esforço, ergueu-se um pouco, sozinho, para recebê-la com mais respeito, e tendo-o interrogado o padre, segundo o costume, acerca dos principais mistérios da fé, a tudo respondeu devotamente: “Sim, senhor, creio nisso tudo de todo o coração”. A seguir recebeu o Santo Viático e a Extrema-Unção tão comovidamente que vertia lágrimas. A tudo respondeu, agradecendo ao padre, e disse, quando este o abençoou com o Santo Sacramento: “Que Deus não me abandone jamais”, últimas palavras que pronunciou, pois, após a ação de graças, foi retomado pelas convulsões que não mais cessaram, não lhe deixando um instante de liberdade de espírito. Essas convulsões duraram até sua morte, vinte e quatro horas depois, isto é, a vinte e nove de agosto de mil seiscientos e sessenta e dois, à uma hora da madrugada, na idade de trinta e nove anos e dois meses.⁶³

⁶³ A VIDA..., 1974, p. 36-37.

III – Panorama científico

Com o intuito de apresentar as realizações matemáticas no decorrer da história, escolhemos alguns matemáticos que representaram suas épocas. Como estamos argumentando sobre o processo de integração de Pascal, mostramos quais matemáticos, anteriores a ele desde a antiguidade, estavam solucionando problemas baseados em procedimentos que usavam infinitesimais, ou indivisíveis, ou o método de exaustão.

O objetivo deste capítulo é mostrar como os matemáticos estavam tentando encontrar novos métodos, quer seja para descobrir centros de gravidades quer seja métodos de integração. Os novos métodos permitirão, mais tarde, a formalização do cálculo diferencial e integral. Restringir-nos-emos apenas aos métodos de integração, visto que a nossa meta são os procedimentos de integração de Pascal.

3.1 Prelúdio

A superação de problemas, sejam físicos ou matemáticos, filosóficos, ontológicos, metafísicos, etc. – é uma característica que possibilitou o ser humano estar em busca de um constante aprimoramento. Vemos isso nas áreas humanas, exatas, e biológicas. Diante de nossa realidade histórica houve pessoas procurando definir, melhorar ou apresentar questões relativas ao modo como vivemos, desenvolvendo teorias e mecanismos – Aristóteles, Leonardo da Vinci, Darwin, Einstein, etc., – que nos possibilitaram mediante aos registros históricos ter acesso ao conhecimento gerado, e assim podendo gerar novos conhecimentos.

Em particular, no âmbito matemático vemos que o interesse por problemas de natureza aritmética e geométrica fez com que, por exemplo, os pitagóricos estabelecessem relações místicas e físicas com a matemática. O número tinha um significado intrínseco na formação do universo. Relacionavam o número 1 com o ponto, o número 2 com a reta, o número 3 com a superfície, e o número 4 com o sólido.⁶⁴ Embora isso esteja um pouco longe do nosso entendimento, devemos ter em mente que nessa época, os conceitos eram outros, bem como o significado das coisas. A relação estabelecida pelos pitagóricos com os números levou-os ao conhecimento dos números triangulares, quadrangulares,

⁶⁴ BARON, 1985. p. 16. v.1.

retangulares, etc. Isto irá repercutir mais tarde, principalmente no século XVII, quando matemáticos estudaram os números figurados, estabelecendo progressões numéricas.

Os paradoxos constituíram nova fonte inspiradora a envolver os antigos em discussões concernentes ao infinito. Por exemplo, o paradoxo de Aquiles e a tartaruga, proposto por Zenão: A tartaruga encontra-se em um ponto à frente de Aquiles. O paradoxo se dá no sentido de que quando Aquiles chegar ao ponto onde a tartaruga estava, ela já terá percorrido um espaço e encontrar-se-á em outro ponto, e esse processo é repetido indefinidamente. Nesse caso, Aquiles ficaria sempre atrás da tartaruga? Isto sugere, em linguagem moderna, a introdução de um ponto limite onde Aquiles alcançaria a tartaruga. Diríamos que tudo isso promoveu investigações matemáticas causando reflexões tanto filosóficas a respeito do infinito, como matemáticas.

Para entendermos esse momento histórico, temos que estar cientes de que não havia sido estabelecido o conceito moderno de limite. A linguagem era completamente aritmético-geométrica.

Posto isso, iniciaremos o próximo tópico expondo o que entendemos por indivisíveis e infinitesimais. Depois, no tópico 1.3 deixaremos expresso sucintamente o método de exaustão. No tópico 1.4 estudaremos algumas realizações matemáticas do século XVI. Por fim, no tópico 1.5, será apresentado o modo de como três matemáticos solucionavam problemas envolvendo indivisíveis e infinitesimais.

3.2 Indivisíveis e Infinitesimais

Tanto o termo indivisível quanto infinitesimal são comentados em quase todas as bibliografias que consultamos.

A idéia dos elementos indivisíveis finitos encontrou na doutrina materialista do atomismo físico, surgida em Abdera, na Trácia (c. 430 a.C), uma grande ligação com o conceito de números pitagóricos. De acordo com os atomistas, o universo era composto de átomos e do espaço vazio; este espaço era infinito em tamanho, e os átomos infinitos em número.⁶⁵

Essa teoria foi fundada pelos pensadores gregos Leucipo e seu discípulo Demócrito (400 a.C). Na escola de Demócrito, de acordo com Luria, teria sido introduzida

⁶⁵ BARON, 1985, p.19. v.1.

a noção de “átomo geométrico”. Um segmento de reta, uma área ou um volume supunham-se constituídos por um grande, mas finito, número de “átomos” indivisíveis.”⁶⁶

O cronista grego Plutarco (c. 46-120 d.C) apresenta um dilema proposto por Demócrito:

Se cortarmos um cone por um plano paralelo à base [plano bem próximo à base], o que podemos dizer das superfícies que formam as seções? Elas são iguais ou diferentes? Se elas são diferentes, elas tornarão o cone irregular, cheio de dentes, como degraus, e imparidades; mas se elas são iguais, as seções serão iguais, e parece que o cone terá a propriedade do cilindro de ser constituído por círculos iguais e não diferentes: o que é um grande absurdo.⁶⁷

Ou seja, diante dos argumentos de Demócrito, em ambos os casos, o cone não poderá existir.

Já os pitagóricos, como comentamos no tópico 1.1, tentaram estabelecer a harmonia entre aritmética e geometria. Contra as comparações do misticismo pitagórico⁶⁸, Zenão expõe suas idéias dizendo que não é possível fazer tal relação, isto é, o atomismo geométrico dos pitagóricos é inadmissível. Não era factível a idéia de um corpo – reta, superfície e sólido - ser formado pela justaposição de pontos. Os quatro paradoxos de Zenão podem ser fortes críticas àquele tipo de pensamento⁶⁹. São os seguintes: o de Aquiles, o da flecha, o da dicotomia, e o do estádio. Eles remetem-nos à idéia da infinidade. O primeiro deles foi mencionado no início deste capítulo. Trataremos daquele da dicotomia: para percorrer uma certa distância de um ponto A até um ponto B é preciso primeiro percorrer a metade dessa distância. Suponhamos que o ponto C seja a metade da distância. Para ir do ponto A ao C deve-se primeiro percorrer a metade dessa distância, e assim por diante *ad infinitum*.

Os argumentos de Zenão mostravam que um segmento finito pode ser dividido num número infinito de pequenos segmentos, cada um deles com um comprimento finito. Também mostravam que é difícil

⁶⁶ STRUIK, 1997, p. 87.

⁶⁷ HEAT, T. L. Apud. BARON, 1985, p. 20. v.1. As idéias do atomismo geométrico de Demócrito são concebidas fisicamente.

“O atomismo físico de Leucipo e Demócrito pode de fato ter sido sugerido pelo atomismo geométrico dos pitagóricos e não é de surpreender que os problemas matemáticos que mais interessavam a Demócrito fossem aqueles que exigissem alguma forma de tratamento infinitesimal.”(BOYER, 1986, p.55).

⁶⁸As investigações dos pitagóricos conduziram a descoberta da incomensurabilidade.

⁶⁹ URBANEJA, 1992, p. 24-5.

explicar o que se entende pela afirmação de que uma linha é “composta” por pontos. É muito provável que o próprio Zenão não se apercebesse das implicações matemáticas dos seus argumentos. Os problemas que conduziram aos seus paradoxos têm surgido regularmente durante discussões filosóficas e teológicas; reconhecemo-los como problemas que dizem a respeito à relação entre “infinito potencial” e “infinito actual”⁷⁰

Talvez as respostas dos argumentos de Zenão sejam todo o debate que aconteceu na Grécia relativa à questão da infinidade, do infinitesimal, do contínuo e a idéia de movimento.

A descoberta da incomensurabilidade – feita pelos pitagóricos – acarretou uma grande crise na matemática grega. Em resposta aos *irracionais* surge o método de exaustão.

Para conjurar a crise tinha que ignorar o conceito infinitesimal de número irracional. Eudoxo de Cnido, da escola platônica, resolveu de forma brilhante a antinomia radical entre finito e infinito. Introduzindo o conceito de “*tão pequeno como se queira*”, equivalente a nosso processo de “*passagem ao limite*, encontra, com sua teoria de magnitudes uma escapatória mediante um recurso genial que desenvolveu em três estágios: uma definição, um axioma e um método.”[...].⁷¹

O procedimento atribuído a Eudoxo superou a crise do problema de magnitudes incomensuráveis. A definição é encontrada no V livro dos Elementos de Euclides.

Diz se que, magnitudes estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta, quando, se quaisquer equimúltiplos tomados da primeira e terceira, e quaisquer equimúltiplos da segunda e quarta os primeiros equimúltiplos similarmente excedem, são similarmente iguais, ou menores que os últimos equimúltiplos tomados respectivamente na mesma ordem.⁷²

A definição 4 dos Elementos de Euclides, conhecida como axioma de Eudoxo: “*Magnitudes dizem-se ter uma razão, de uma para outra, as quais são capazes, quando multiplicadas, de excederem uma à outra.*”⁷³ Ou seja, “*dadas quaisquer duas magnitudes A e B da mesma espécie sendo que $A < B$ então existe um número natural n tal que $A + \dots + A > B$ (tomando n vezes A).*”⁷⁴ O método de exaustão será apresentado posteriormente.

⁷⁰ STRUIK, 1997, p. 81-2.

⁷¹ URBANEJA, 1992, p. 25-6.

⁷² HEATH, 1956, p. 114. v.2

⁷³ HEATH, 1956, p. 114. v.2

⁷⁴ MANCOSU, 1996, p. 36.

Antes de comentarmos a concepção do infinito na idade média, temos que buscá-la em Aristóteles. O seu pensamento influenciou significativamente os escolásticos. Eis o que ele pensa a respeito da infinidade. Admite que uma magnitude geométrica pode ser dividida de modo que se torne menor do que qualquer magnitude. Reciprocamente considera que uma magnitude pode ser aumentada o tanto quanto se queira. Não aceita que as magnitudes contínuas são constituídas por indivisíveis.

Estabelece dois termos para considerações concernentes ao infinito: “infinito potencial” e “infinito atual”.

Um infinito “*em ato*”, isto é, um todo constituído de uma infinidade atual de coisas dadas, não pode ser pensado como inteligível; no entanto, sim pode-se pensar em uma magnitude crescente “*em potencia*” maior do que todo limite, ou uma série de magnitudes cada vez menores que “*em potencia*” podem tornar-se menores que qualquer magnitude.⁷⁵

A idéia do infinito em ato e em potência é abordada por Cavalieri, porém ele faz uso de outros termos, a saber, relativo e absoluto para designar, respectivamente, infinito em potência e em ato.

No período medieval a questão do infinito, foi debatida intensamente. Porém, essa discussão se deu fortemente na ótica filosófica e pouco no âmbito da matemática. Os filósofos dos séculos XIII e XIV conceberam a existência de pontos, linhas e planos de uma maneira que tivessem relação direta com linhas, planos e sólidos respectivamente, ou seja, pontos, linhas e planos estavam limitados por suas ordens superiores. A lógica seria a seguinte: um sólido contém uma infinidade de planos, e segue o mesmo raciocínio para as magnitudes de ordem inferior. “A questão então surgiu como se, de fato, o contínuo deva ser concebido como composto inteiramente de pontos e inversamente se qualquer contínuo finito deva ser dividido de tal maneira a produzir nada exceto pontos.”⁷⁶ Será que uma magnitude pode ser constituída a partir de outra ordem inferior? Pontos podem constituir uma linha, linha uma superfície, e superfície um sólido?

Bradwardine afirma que uma magnitude contínua contém um número infinito de indivisíveis, mas não são constituídas por esses átomos matemáticos. Para ele “[...] cada contínuo está formado por um número infinito de elementos contínuos de mesma natureza;

⁷⁵ URBANEJA, 1992, p.31.

⁷⁶ BARON, 1969, p. 72. No século XIII e XIV as idéias do contínuo de Aristóteles foram aceitas.

assim, por exemplo, um segmento, área ou volume está composto por infinitos segmentos, áreas ou volumes.”⁷⁷

A possibilidade de uma magnitude contínua ser constituída com outra de uma ordem inferior leva a contradições. Por exemplo, Se os pontos são os indivisíveis da linha, e não possuem dimensão, como podem formar a linha? Mas se o ponto tiver dimensão, como pode ser indivisível?⁷⁸

Já no século XIV, surgiu uma visão um pouco mais apurada sobre esse assunto. A teoria atomista estava sendo discutida como um elemento físico que constituía o contínuo. Apareceram tentativas de entender o infinitesimal: “É possível que uma quantidade infinitamente pequena possa ser considerada como um múltiplo de outra? Alternativamente devem todas essas quantidades ser consideradas como iguais em tamanho?”⁷⁹ Esses questionamentos, apontam para nós uma tentativa de entender os indivisíveis e infinitesimais.

A distinção entre esses conceitos ficou estabelecida com os argumentos do século XVII.

Por exemplo, para Cavalieri existe diferença entre indivisíveis e infinitesimais. Caso queira encontrar um indivisível, sabe como fazer. Por exemplo, em relação a um plano basta seccioná-lo com outro. Para ele o indivisível tem uma *dimensão* a menos do que a magnitude de que se fala. Como veremos mais adiante, Cavalieri não aceita a formação de uma magnitude através de soma de indivisíveis. O que faz são as correspondências um a um entre eles.

Podemos interpretar os infinitesimais como elementos de mesma dimensão da magnitude de que se fala, porém infinitamente pequena, ou seja, tão pequena quanto se queira. Então, vemos indivisíveis e infinitesimais como elementos “diferentes”. “Com isso se abre a segunda etapa do cálculo infinitesimal, substituindo os indivisíveis pelos “*infinitamente pequenos*” de mesma dimensão geométrica espacial que a figura à que pertencem.”⁸⁰ Urbaneja refere-se a essa segunda etapa do cálculo infinitesimal levando em conta a concepção que Fermat, Pascal, Roberval e Wallis tiveram relativa a formação do contínuo a partir de magnitudes de mesma dimensão – para Urbaneja esses quatro matemáticos tentaram modificar os procedimentos de Cavalieri – por exemplo, a soma das

⁷⁷ URBANEJA, 1992, p. 42.

⁷⁸ BARON, 1969, p. 73.

⁷⁹ BARON, p. 74.

⁸⁰ URBANEJA, 1992, p. 64.

ordenadas sob uma curva nada mais é do que retângulos com comprimento infinitesimal. Seguindo a idéia de Tacquet, uma magnitude é composta de elementos *homogenea*.

Roberval (1602-1675) foi outro matemático importante do século XVII. Não publicou suas obras com receio de que alguém as usasse para vencer o concurso da Cadeira de Ramus no Collège Royal, posto que ocupou por cerca de quarenta anos. Com isso, seus métodos de descoberta e resultados perderam o direito à prioridade por não se tornarem públicos. Sua obra *Traité des indivisibles* foi publicada postumamente em 1693.

Os indivisíveis e infinitesimais, para Roberval, podem ser interpretados sob dois pontos de vista. Ele faz uso dos “[...] *infinitamente pequenos* homogêneos, porém muitas vezes o faz como se fossem os heterogêneos indivisíveis, por isso sua obra pode ser considerada como uma transição dos indivisíveis de Cavalieri aos infinitesimais de Fermat ou de Newton e Leibniz.”⁸¹ Isto é, Roberval tem a idéia de que a magnitude contínua é constituída, não com magnitudes heterogêneas, mas com homogêneas, sendo que a linha, a superfície, o sólido seriam formados respectivamente por uma infinidade de pequenas linhas, superfícies e sólidos. Mas ele considera esses infinitesimais como se fossem indivisíveis.

Os métodos de integração de Cavalieri e de Roberval são significativamente distintos. Enquanto aquele opera geometricamente, Roberval trata os “indivisíveis” com uma característica aritmética e infinitesimal. Segundo Urbaneja a abordagem de Roberval “[...] está mais próxima às integrações aritméticas de Fermat e Pascal.”⁸² De fato, Roberval, Fermat e Pascal uniram teoria dos números com as concepções arquimedianas de geometria, produzindo belíssimos resultados de integração.

Pode ser que os trabalhos de Roberval tenham influenciado o pensamento de Pascal. Roberval era amigo de Étienne. Há possibilidades de Roberval ter sido influenciado por Kepler, Stevin, e Cavalieri. Disse que sua influencia veio de Arquimedes.⁸³

Agora concentremos nossa descrição nos argumentos de Pascal concernentes ao infinito, tanto grande quanto pequeno; também como caracteriza o indivisível. No capítulo IV retomaremos algumas concepções dos indivisíveis e infinitesimais em Pascal.

Pascal determina relações entre grandezas e as possíveis propriedades comuns. Por exemplo, as propriedades comuns relativas às duas infinidades, a saber, o infinitamente

⁸¹ URBANEJA, 1992, p. 121.

⁸² URBANEJA, p. 124.

⁸³ BOYER, 1959, p. 141.

grande e o infinitamente pequeno; por mais rápido que seja um movimento, pode existir outro que seja mais rápido ainda, e assim infinitamente; da mesma maneira, por mais lento que seja um movimento, é possível retardá-lo ainda mais, e repetir infinitamente esse retardamento, sem que o corpo entre em repouso.⁸⁴

Outro exemplo é relacionado aos números. Por maior que seja um número é sempre possível conceber um outro que seja maior que ele, e assim repetir o processo indefinidamente sem encontrar um número que não possa ser superado. Reciprocamente, esse critério vale para os números pequenos; por menor “[...] que seja um número, como a centésima ou a décima milésima parte, é sempre possível conceber um que seja menor, e sempre infinitamente, sem chegar ao zero ou nada.”⁸⁵ A mesma análise faz com o espaço. Nesse processo jamais se encontraria um indivisível. “Finalmente, um espaço, por mais pequeno que seja, não poderá ser dividido em dois, e essas metades ainda? E como havia de ser que essas metades fossem indivisíveis sem nenhuma extensão, elas que, juntas num todo, fizeram a primeira extensão?”⁸⁶ Argumenta que não há meio de dividir um espaço em duas partes indivisíveis. Sendo que, aqueles que concebem, tal divisão, não são capazes de compreender algo que pode ser infinitamente divisível.

Pascal expõe sua concepção de espaço, e afirma: “Basta dizer a mentes claras nesta matéria que dois nada de extensão não podem fazer uma extensão.”⁸⁷ Segue dizendo que existem pessoas que afirmam que dois nada em extensão podem formar uma extensão. O que lhe parece ser *absurdo*.

Com isso, procura fazer uma relação do que está tratando com o significado da unidade para Euclides:

[...] a única razão pela qual a unidade não pertence à categoria dos números é que Euclides e os primeiros autores que trataram a aritmética, tendo várias propriedades a dar que convinham a todos os números exceto a unidade, a fim de evitar dizer muitas vezes que em tal número, exceto a unidade, tal condição se verifica, excluíram a unidade da significação da palavra número, pela liberdade que já dissemos que se tem de fazer definições à vontade [...].⁸⁸

⁸⁴ PASCAL, 2003, p. 26.

⁸⁵ PASCAL, p. 27.

⁸⁶ PASCAL, p. 28.

⁸⁷ PASCAL, p. 32.

⁸⁸ PASCAL, p. 34.

Mas quando se quer, a unidade é incluída na categoria dos números, assim como as frações. Euclides definiu as grandezas homogêneas como: “as grandezas – diz ele – que são do mesmo gênero, quando uma, multiplicada que seja várias vezes, pode chegar a ultrapassar a outra”⁸⁹. Pascal conclui que a unidade pode ultrapassar todo e qualquer número “[...] ela é do mesmo gênero que os números precisamente pela sua essência e pela sua imutável natureza, no sentido do mesmo Euclides que quis que ela não fosse chamada de número.”⁹⁰

Pascal percebeu que a mesma coisa não pode ser feita com os indivisíveis com respeito a uma extensão: “porque não somente difere de nome, o que é voluntário, mas difere de gênero, pela mesma definição, visto que um indivisível multiplicado tantas vezes quanto quisermos, está tão longe de poder ultrapassar uma extensão que não pode nunca formar senão um só indivisível;”⁹¹

Pascal define o indivisível e a extensão. O primeiro não tem “nenhuma parte”; o segundo tem “diversas partes separadas”.⁹² Portanto, o indivisível não é do mesmo gênero da extensão. Com essa conclusão, enuncia exemplos de elementos que não são do mesmo gênero, como o zero. Para ele não é do mesmo gênero que os números, pelo fato de que se o multiplicarmos não poderá ultrapassar nenhum número. Dessa forma, será um zero de extensão. Para ele todas as grandezas são infinitamente divisíveis, não podendo chegar a um indivisível. Disse que as grandezas situam-se entre o infinito e o nada.

Sua concepção com respeito ao infinito é respaldada pela “[...] admirável relação que a natureza pôs entre essas coisas [repouso e movimento; instante e tempo], e as duas maravilhosas infinidades que ela propôs aos homens, não para que as concebam, mas para que as admirem.”⁹³ As duas infinidades de que está falando são relativas ao infinitamente pequeno e o infinitamente grande. Concebia, que um número poderia ser multiplicado o tanto que se desejasse até chegar, por exemplo, a 100.000 como também esse mesmo número poderia ser dividido até encontrar a sua centésima milésima parte. Para ele, se um número pode ser aumentado (multiplicado) infinitamente, também pode ser dividido infinitamente. A mesma relação é dada para o espaço. Tanto pode ser infinitamente estendido quanto infinitamente diminuído.

⁸⁹ PASCAL, p. 34.

⁹⁰ PASCAL, p. 34.

⁹¹ PASCAL, p. 34-35.

⁹² PASCAL, p. 35.

⁹³ PASCAL, p. 36.

3.3 O método de exaustão

Retomamos agora o tema exaustão, comentado anteriormente, com a finalidade de expor pormenores que são necessários para o trabalho. Sabemos que ao abordar esse assunto nos deparamos com uma gama de informações que levaria a buscar a compreensão de muitos axiomas, proposições, teoremas que também são necessários para entender o procedimento demonstrativo dos antigos. Nossa idéia é caracterizar a importância e motivo das demonstrações por dupla redução ao absurdo, mencionadas anteriormente.

Quando falamos do método de exaustão⁹⁴, vemos que está intimamente relacionado com conceitos de técnicas infinitárias.⁹⁵ Os gregos nas exposições formais dos seus trabalhos evitaram recorrer ao uso infinito. Por outro lado, o processo heurístico deles nos leva a técnicas infinitárias.⁹⁶ Isso pode ser testemunhado pelo

[...] Método de Arquimedes, um pequeno tratado redescoberto em 1906, que contém, na forma de uma carta de Arquimedes a Eratóstenes, uma explicação das estratégias heurísticas de Arquimedes para a descoberta de teoremas em geometria, relativos a áreas, volumes e centros de gravidade. Arquimedes explica em seu Método como explorar em investigações geométricas considerações mecânicas e técnicas indivisibilistas, onde a denominação última refere-se à idéia de considerar uma figura plana (ou sólida) como sendo “constituída” por linhas (ou planos).⁹⁷

Numa das passagens da carta de Arquimedes a Eratóstenes, aquele discorre:

Mas vejo-te, como afirmo, que tu és um estudioso sério, que tu dominas de uma maneira notável as questões de filosofia e que tu sabes apreciar com seu valor as questões de matemática que se apresentam, e tenho julgado a propósito descrever, e desenvolver neste mesmo livro, as características próprias de um método segundo o qual te será permitido examinar alguns dos primeiros que me foram evidentes pela mecânica e que foram demonstrados mais tarde pela geometria, por causa da investigação por este método ser diferente de uma demonstração; a

⁹⁴O método de exaustão já era conhecido antes de Eudoxo por Antífon (contemporâneo de Sócrates). Antífon inscreve em um círculo polígonos a fim de que a área do polígono possa aproximar-se da área do círculo, porém isso é feito apenas em um sentido potencial e não real. Bryson, aluno de Sócrates, além de inscrever, também circunscreve figuras no círculo, dizendo que a área é a média desses polígonos. (URBANEJA, 1992, p. 22-3). Só mais tarde Eudoxo dará mais precisão ao método de exaustão.

⁹⁵ Processo de adição, multiplicação com séries infinitas. Por exemplo, quando inscrevemos e circunscrevemos figuras em outra, estamos fazendo uso de uma soma infinita: $I_n = i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_n \dots$;

$C_n = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n \dots$

⁹⁶ MANCOSU, 1996, p. 34.

⁹⁷ MANCOSU, 1996, p. 34.

investigação da demonstração preconcebida de um certo conhecimento dos problemas através desse método, com efeito, é mais fácil que sua investigação sem conhecimento.⁹⁸

Vemos a clara distinção do processo de Arquimedes, isto é, o processo heurístico é mecânico e o processo demonstrativo é geométrico.

Para entendermos a questão do uso de técnicas infinitárias voltaremos aos predecessores de Arquimedes, vendo assim quais foram os argumentos que levaram os gregos a fazer omissão dos procedimentos infinitísticos. Diante disso, temos que expor duas definições que estão no livro V dos Elementos de Euclides. São elas, as definições 3 e 4.

Definição 3. *Uma razão é um tipo de relação com respeito ao tamanho entre duas magnitudes da mesma espécie.*⁹⁹

Definição 4. *Magnitudes dizem-se ter uma razão, de uma para outra, as quais são capazes, quando multiplicadas, de excederem uma à outra.*¹⁰⁰

Assim, para os gregos, a fim de existir uma razão entre duas magnitudes é necessário que elas sejam homogêneas. De acordo com a definição 4, que é às vezes chamada de axioma de Eudoxo-Arquimedes, temos que: Dadas quaisquer duas magnitudes A e B da mesma espécie, se $A < B$ então existe um número natural n tal que $A + \dots + A > B$ (tomando n vezes A). Essa definição, ou também chamado axioma da continuidade, é aplicado ao método de exaustão, garantindo assim seu rigor matemático. Euclides fez uso desse axioma ao provar que os *círculos estão para si assim como os quadrados dos diâmetros*, antes dele Hipócrates de Quios (430 a.C) havia estabelecido e demonstrado essa relação. Da mesma maneira, Arquimedes usou o método de exaustão quando quadrou o círculo: “a área de qualquer círculo é igual à área de um triângulo retângulo, na qual um dos seus lados, partindo do vértice cujo ângulo é reto, é igual ao raio, e o outro é igual à circunferência do círculo.”¹⁰¹

⁹⁸ ARQUIMEDES. Ap. BALIEIRO FILHO, 2004, 167-8.

⁹⁹ HEATH, 1956, p. 114. v.2.

¹⁰⁰ HEATH, 1956, p. 114. v.2.

¹⁰¹ BARON, 1985, p 34. v.1.

Como as magnitudes devem ser homogêneas, não era possível comparar uma reta com uma superfície, por ser entes com magnitudes distintas.

Para evitar o uso de argumentos infinitísticos, de acordo com Mancosu, os gregos não demonstravam que duas figuras tinham áreas iguais pelo processo direto, isto é, se fosse necessário demonstrar que duas figuras A e B tinham áreas iguais, eles não demonstravam diretamente que $A = B$, a não ser que elas fossem polígonos. Então, o processo poderia ser feito decompondo-as finitamente, ou seja, a partir de um polígono e através de transformações geométricas poderia reduzi-las a triângulos que tivessem área igual às das figuras originais.¹⁰² No entanto, se uma das duas figuras a ser comparada fosse composta por linhas curvas, o procedimento aplicado era outro. Se isso não fosse levado em conta poderia ser colocado em risco a lógica das demonstrações (ao usar processos infinitísticos). Desse modo, para provar que $A = B$ usavam uma dupla redução ao absurdo, que lhes permitia excluir $A < B$ e $A > B$.

Mostremos, através de um exemplo, como Euclides procedia em relação a problemas dessa natureza. Primeiramente enunciaremos uma proposição de Euclides:

*Proposição 1. Sendo estabelecidas duas magnitudes desiguais, se da maior for subtraída uma magnitude maior do que sua metade, e a partir daquela que é deixada uma magnitude maior do que sua metade, e se este processo for repetido continuamente, será deixada uma magnitude que será menor do que a menor magnitude estabelecida.*¹⁰³

Ou seja, se tivermos estabelecido que AB e C são as duas magnitudes propostas, tal que AB é maior do que C (ver fig. 1), basta seguir o enunciado da proposição para vermos que a magnitude restante será menor do que C.¹⁰⁴



Figura 1

Vamos ao exemplo (proposição 10 do livro XII dos Elementos de Euclides) que ilustra o uso do método de exaustão.

¹⁰² “o triângulo torna-se então um paralelogramo, o paralelogramo torna-se um retângulo e finalmente o retângulo torna-se um quadrado.” (BARON, 1985, p. 32. v1.)

¹⁰³ HEATH, 1956, p. 14. v.3

¹⁰⁴ Cf. a demonstração em HEATH, 1956, p. 14-5.

Proposição 10. *Todo cone é a terça parte do cilindro que tem a mesma base e a mesma altura.*¹⁰⁵

1. Dado um cilindro é sempre possível inscrever nele um prisma que tenha um número suficientemente grande de lados, tal que a diferença entre o cilindro e o prisma seja menor do que qualquer magnitude escolhida.
2. Dado um cone podemos inscrever nele uma pirâmide com um número suficientemente grande de lados, de tal maneira que a diferença entre ela e o cone seja a menor possível.

Ou seja, primeiramente Euclides usa o processo da exaustão mostrando que é possível, tanto no cilindro quanto no cone exaurir seus respectivos volumes com um prisma e com uma pirâmide, de tal forma que os lados das figuras inscritas aumentem indefinidamente até que a diferença seja menor do que qualquer magnitude dada. O que garante essa aproximação é o axioma da continuidade.¹⁰⁶ Caso considerasse o número de lados tendendo ao infinito, poderia ser feita direta a passagem de $P = 3Q$, mas ainda não era possível descrever esse procedimento formalmente.

Então, o próximo passo a ser feito é a demonstração pela dupla redução ao absurdo. Se P , Q são os volumes do cilindro e do cone respectivamente. Então, não se pode ter $P > 3Q$ ou $P < 3Q$. Como de qualquer um desses dois casos chega-se a uma contradição, conclui-se que $P = 3Q$.

Antes de finalizar esse tópico, expressaremos o ponto de vista de Urbaneja referente ao método de exaustão. Para ele tem-se a necessidade de

[...] conhecer previamente o resultado a demonstrar, isto é, precisa de valor heurístico, não serve para encontrar novas verdades, senão somente para demonstrar aquelas das quais já se tem um conhecimento prévio. O método de exaustão é pois um método de demonstração e não de descobrimento, precisando ser complementado *a priori* com outro método, ou analítico ou mecânico, para descobrir os resultados.¹⁰⁷

Ainda mais, “[...] a aplicação do método de exaustão em cada caso concreto depende da estrutura geométrica particular do problema, de modo que não permite formulações gerais”.¹⁰⁸ Comentaremos a idéia de Urbaneja sobre o método de exaustão.

¹⁰⁵ HEATH, 1956, p. 400. v.3.

¹⁰⁶ TOEPLITZ, 1969, p. 11.

¹⁰⁷ URBANEJA, 1992, p. 28.

¹⁰⁸ URBANEJA, 1992, p. 28.

Quando falamos no método de exaustão devemos ter em mente que a prova por dupla redução ao absurdo é inerente ao processo. Ou seja, após exaurir a figura é necessário demonstrar o problema. Então vemos que são necessárias tanto a exaustão, quanto a prova por dupla redução ao absurdo. Foi esse método que permitiu, por exemplo, Euclides mostrar a relação existente entre *dois círculos com os quadrados dos seus diâmetros*.¹⁰⁹

Passemos agora para o século XVI. Veremos quais métodos de integração foram desenvolvidos.

3.4 Século XVI

Francisco Maurolico (1494-1575) desenvolveu um método para determinar centros de gravidade baseado em momentos. Utilizou o princípio da alavanca de Arquimedes. Assim, o conceito de infinitesimal poderia ser tratado tanto aritmeticamente quanto geometricamente. Por exemplo, na determinação do centro de gravidade de um conóide, através do método de momentos, o volume do conóide é buscado associando-o com a área de um triângulo. A conclusão de sua demonstração é por redução ao absurdo. Sua contribuição matemática é importante por introduzir provas para a determinação de centros de gravidades de sólidos.¹¹⁰

Federigo Commandino (1509-1575), seguidor ortodoxo de Arquimedes, contribuiu significativamente com as pesquisas daquela época, traduziu as principais obras gregas para o latim. Foi influenciado por Maurolico, mas seu método já é um pouco diferente. Enquanto Maurolico dividia o eixo do conóide em partes iguais para inscrever e circunscrever cilindros (ver fig. 2 e 3) de alturas iguais, Commandino o fazia da seguinte maneira: dividia o eixo do conóide sucessivamente em 2, 4, 8,... partes iguais e em cada etapa determinava os centros de gravidades dos cilindros inscritos e circunscritos.¹¹¹ Ou seja, se denotarmos respectivamente os centros g_2, g_4, g_8, \dots , e G_2, G_4, G_8 para os cilindros inscritos e circunscritos, sua idéia é considerar que “[...] $g_2g_4 = G_2G_4$, $g_4g_8 = G_4G_8$, e assim por diante. Deste modo, se o centro de conóide jaz entre g_2 e G_4 , g_4 e G_4 , e g_8 e G_8 ,..., jazem no ponto médio de g_2G_2 , g_4G_4 , g_8G_8 .”¹¹² (ver fig. 4 e 5). Disso,

¹⁰⁹ Essa proposição já era conhecida por Hipócrates de Quios.

¹¹⁰ BARON, 1969, p. 91-94; 1985, p. 5. v.2.

¹¹¹ BARON, 1969, p.94-6.

¹¹² BARON, 1969, p. 94-5.

Commandino encontra que o centro de gravidade do conóide jaz a dois terços do vértice V e fornece a prova por redução ao absurdo.

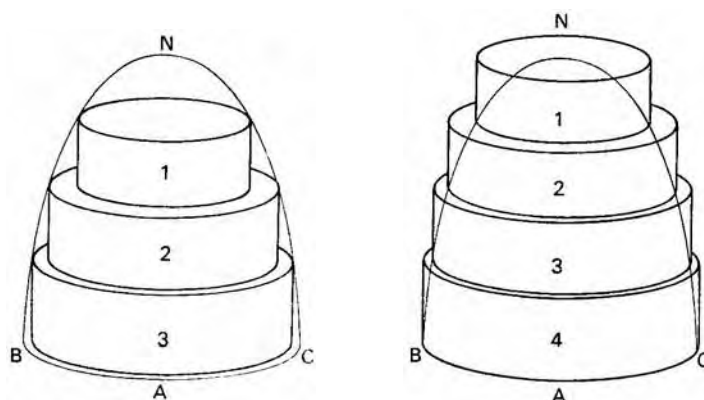


Figura 2 e 3

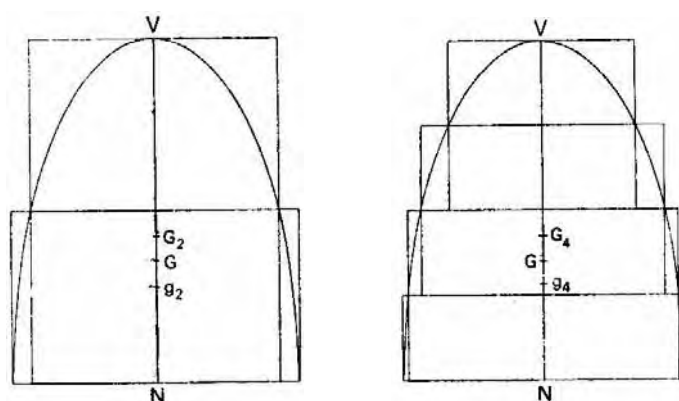


Figura 4 e 5

Simon Stevin (1548-1620), engenheiro e cientista, deu um passo notável na construção de demonstrações prescindido a dupla redução ao absurdo. A suas obras *Hisdrostática e Mecânica* foram publicadas em Holandês, talvez por isso ficou pouco conhecido fora dos Países Baixos. Mais tarde editaram-na em francês e latim – os métodos de Stevin já estavam datando cerca de cinquenta anos quando tais traduções foram feitas.

Aceitou o método de exaustão de Arquimedes, mas dispensou demonstrações por dupla redução ao absurdo. Em vez de inscrever e circunscrever figuras geométricas em outras figuras, optou apenas ou por circunscrever ou inscrever figuras.¹¹³ Por exemplo,

¹¹³ BOYER, 1959, p.99.

para demonstrar que o centro de gravidade de um triângulo ABC (ver fig.6) encontra-se em sua mediana AD agiu da seguinte maneira:

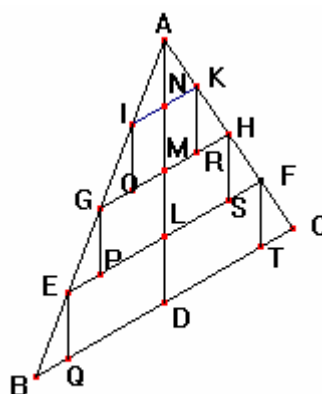


Figura 6

Agora, como aqui, três quadriláteros foram inscritos no triângulo, assim um número infinito de tais quadriláteros podem ser inscritos nesse lugar, e o centro de gravidade da figura inscrita sempre estará (pelas razões mencionadas acima) na linha AD.

(Ou seja, pelo princípio de que em figuras simétricas bilateralmente o centro de gravidade permanece na mediana AD.)

Mas quanto mais tais quadriláteros existirem, menos o triângulo ABC diferirá da figura inscrita dos quadriláteros. Pois se traçarmos linhas paralelas a BC através dos pontos médios NA, NM, ML, LD, a diferença da última figura será exatamente a metade da diferença da figura anterior. Podemos, portanto, por aproximação infinita, colocar no triângulo uma figura tal que a diferença entre a última e o triângulo será menor do que qualquer figura plana dada, por menor que seja. Disso segue que, tomando AD para ser a linha central de gravidade, o peso aparente da parte ADC diferirá menos do peso aparente da parte ADB do que qualquer figura plana que possa ser dada, por menor que seja...¹¹⁴

Notemos que Stevin não utilizou a redução ao absurdo. Em lugar disso, aproximou-se do conceito de limite, pelo fato de que quanto mais figuras haja inscritas, ou seja, tanto quanto se queira, no triângulo ABC menos suas áreas diferirão uma da outra. Isso nos faz lembrar a proposição 1 de Euclides citada anteriormente.

¹¹⁴ STEVIN, Simon. Les Ouvres mathématiques de Simon Stevin de Bruges. Apud. BARON, 1969, p. 97-8.

Stevin chegou muito próximo da idéia de limite, aplicando um raciocínio bem moderno de tal conceito. Seguindo a idéia de Baron, se a área do triângulo for simbolizada por Δ e a área dos paralelogramos for $\sum_{k=1}^n I_k = I_1 + I_2 + \dots + I_n$, então $\Delta - \sum_{k=1}^n I_k = d$, de onde d é a diferença encontrada, sendo que:

$$d = \Delta/n.$$

Então essa diferença pode ser tão pequena quanto se queira. Caso n venha a tender ao infinito, as diferenças entre as áreas do triângulo e das figuras inscritas tendem a zero. Ou seja, conforme a proposição 1 de Euclides, e dependendo do valor de n , obteremos uma magnitude que será menor do que qualquer magnitude considerada, porém pequena. Assim, poderíamos considerar a área do triângulo como a soma das áreas dos paralelogramos inscritos nele, isto é:

$$\Delta \approx \sum_{k=1}^n I_k.$$

Stevin aplicou seu método para encontrar o centro de gravidade de um segmento conoidal, bem como para encontrar a pressão total sobre uma parede vertical de um recipiente cheio de água; mostrou que a pressão média corresponde ao ponto médio desse recipiente. Para ele o infinito tem um sentido potencial, ou seja, pode ser estendido até onde se queira, de tal maneira que o erro poderia ser tão pequeno quanto se queira.¹¹⁵

Luca Valerio (1552-1618) foi outro matemático que tentou modificar o método de Arquimedes. Disse ter sido inspirado por Commandino. Desenvolveu seu trabalho nos padrões da geometria euclidiana. A linguagem que apresenta, não é muito diferente dos outros matemáticos de seu tempo, ou seja, é geométrica.

Fez grande esforço para dispensar a demonstração por dupla redução ao absurdo, tentando estabelecer “princípios gerais”. Por exemplo, na proposição VI de seu trabalho *De Centro Gravitatis Solidorum* (1604), considera

¹¹⁵ BOYER, 1959, p. 102.

[...] uma figura plana convexa envolvida por uma curva, na qual paralelogramos foram inscritos e circunscritos da maneira usual, e estabelece que, em geral, a diferença entre as áreas das figuras inscritas e circunscritas é igual à área do paralelogramo sobre a base.¹¹⁶

Interpretemos o que foi dito: Seja dada uma figura ABC qualquer (ver fig. 7) onde AD é o diâmetro, BC é uma corda. Notemos que as paralelas relativas a BC tornam-se menores a medida que se aproximam do ponto A. O próximo passo é inscrever e circunscrever paralelogramos, denominaremos respectivamente por I_n e C_n suas áreas. O índice n é o número de retas ou planos que cortam a figura. Nesse caso a figura 7 está representando uma área. Na proposição XI, Luca Valerio estende esse resultado para os volumes de sólidos.

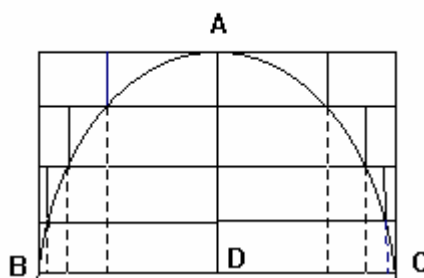


Figura 7

Temos que:

$$I_n = i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_n \quad (1)$$

$$C_n = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n \quad (2)$$

Sejam i_r e c_r as partes correspondentes da figura. Ou seja, elas são as fatias da figura, seja de uma área ou de um sólido. Desse modo, teremos que:

$i_1 = 0, i_2 = c_1, i_3 = c_2, \dots, i_n = c_{n-1}$ (isto é, as figuras começam a ser inscritas e circunscritas a partir do vértice A).

Fazendo a subtração de (1) e (2), temos:

$C_n - I_n = (c_1 - i_1) + (c_2 - i_2) + \dots + (c_n - i_n) = c_n$ (temos que c_n é a última figura circunscrita sobre a base).

¹¹⁶ BARON, 1969, p. 101.

De acordo com a escolha de n essa diferença pode ser feita tão pequena quanto se queira. Em linguagem moderna teríamos que o limite de I_n e C_n com n tendendo a infinito é igual a área, ou volume, em questão.¹¹⁷

Sintetizando o que mostramos até agora, pode-se ver que Maurolico e Commandino foram em um certo sentido mais ortodoxos em referência ao método de demonstração dos antigos. Já Stevin e Valério continuaram utilizando o método de exaustão, mas aos poucos estavam fazendo a aproximação das figuras inscritas e circunscritas com o objeto estudado diretamente, sem fazer uso da prova por dupla redução ao absurdo, utilizando a idéia de limite.

A relevância do trabalho desses matemáticos foi acatada por Mersenne. Em 1644, fez uma homenagem a Maurolico, Commandino, Stevin e Valerio incluindo-os com os nomes de Arquimedes, Apolônio e Pappus, por terem contribuído para o desenvolvimento da geometria.¹¹⁸

Ao incorporar um novo pensamento matemático podemos ver que são necessárias extensas investigações referente a natureza do que já existe, para assim descobrir novas técnicas que proporcionem a solução dos problemas quer sejam antigos quer sejam novos. Não queremos dizer com isso que as técnicas dos antigos não eram suficientes. Acreditamos que foram suficientes para o tempo em que foram desenvolvidas, bem como serviram de inspiração para matemáticos posteriores. Nos séculos XVI e XVII outros conceitos foram estabelecidos, diante de outros problemas, permitindo emergir novas concepções matemáticas.

No próximo tópico abordaremos os temas: contínuo, infinitesimal e indivisível; diante do processo matemático de Kepler, Cavalieri e Galileu mostrando suas teorias e de que maneira solucionavam problemas de integração. O objetivo é evidenciar técnicas de soluções de problemas matemáticos que foram usadas nos séculos XVI e XVII.

3.5 Século XVII

Antes de começarmos a mencionar as realizações matemáticas desse período, faremos uma consideração que ajudará a entender em qual sentido matemático podemos dizer que houve mudança significativa relativa aos infinitesimais.

¹¹⁷ BARON, 1969, p.102-02; 1985, p. 8. v.2.

¹¹⁸ BARON, p.106.

Os gregos já trabalhavam com técnicas indivisibilistas em seus procedimentos heurísticos. Com isso, surge a pergunta: “[...] em qual sentido é o uso difundido de técnicas infinitesimais uma novidade no século XVII?”¹¹⁹ Para respondê-la, é possível arrolar três razões: “A primeira é histórica; as fontes da matemática grega que fizeram uso de conceitos indivisibilistas, tais como o Método de Arquimedes e o Comentário de Theon do livro I de Ptolomeu, não eram conhecidos pelos geômetras do século XVII.”¹²⁰ Knorr fala nesse sentido de uma redescoberta do método indivisibilista.¹²¹

A segunda razão traz em consideração a distinção entre validade heurística e formal. Para os gregos não havia dúvida que técnicas infinitárias, como aquelas empregadas no método indivisibilista, não poderiam ser formalmente aceitas e tinham somente valor heurístico. O que é novo no século XVII é o esforço de parte de vários matemáticos de primeira linha para conceder a essas técnicas heurísticas uma validade formal. Foi essa tentativa de fornecer o método indivisibilista com a credibilidade de uma teoria rigorosa que levou a muitas discussões sobre a natureza do método.¹²²

Posto isso, podemos notar que houve um esforço por parte dos matemáticos desse período para firmar o método indivisibilista, dando-lhe um sentido formal – por exemplo, Cavalieri. O terceiro argumento é

[...] o compromisso do século XVII no engajamento de matemática infinitista que não parece ter qualquer precedente nos gregos, como por exemplo, os procedimentos de congruências infinitárias encontrados em Cavalieri, ou o estudo dos sólidos de comprimento ou largura infinitos, iniciado por Torricelli.¹²³

Os estudos de Torricelli instigaram o surgimento de alguns paradoxos relativos ao infinito. Ao girar uma hipérbole em torno de uma de suas assíntotas, essa produz um sólido infinitamente longo. Torricelli conseguiu mostrar que ele possui um volume finito. Esse resultado causou um bom debate filosófico e matemático.¹²⁴

As observações feitas anteriormente têm o papel de mostrar que os gregos não tinham um *horror ao infinito*. Porém o século XVII não herdou o método deles, mas apenas o que foi desenvolvido formalmente. Isso levou os matemáticos dos séculos XVI e

¹¹⁹ MANCOSU, 1996, p.34.

¹²⁰ MANCOSU, p. 35.

¹²¹ MANCOSU, p. 35.

¹²² MANCOSU, p. 35.

¹²³ MANCOSU, p. 35.

¹²⁴ Cf. Cap. 5 de MANCOSU, 1996.

XVII a encontrarem novos métodos de quadratura, bem como “[...] *grosso modo*, esse período pode ser caracterizado pela conclusão do processo de entendimento da geometria grega e pelas primeiras tentativas no sentido de ultrapassá-la.”¹²⁵. Desse modo, os matemáticos retomam a idéia de métodos infinitesimais para poder encontrar solução de problemas de geometria e dinâmica. Eis alguns procedimentos usados por Kepler.

Johann Kepler (1571-1630) abandonou a estrutura da prova arquimediana e introduziu os infinitesimais a fim de poder calcular tanto áreas quanto volumes. Conhecia muito bem as demonstrações dos gregos, porém estava mais interessado nos resultados do que objetivamente nas provas. No entanto, caso uma demonstração arquimediana fornecesse algo de que pudesse aproveitar fazia uso disso. Porém quando métodos formais não eram suficientes preocupava-se em investigar novas técnicas e processos de demonstração para suas necessidades práticas.

Em seu trabalho *Nova Stereometria* (1615), apresentou seus métodos infinitesimais, estimando o volume de sólidos obtidos por revolução (assim, calcula a medida de tonéis de vinho). Seu método é auxiliado por figuras, por transformações geométricas, e na determinação de cortes de pequenas seções variando o tamanho e forma do que se propõe a investigar. Usou a linguagem dos infinitesimais livremente. Na *Stereometria* apresenta-nos características do cálculo diferencial, a saber, quando estava procurando uma melhor relação entre a medida de barris de vinho foi conduzido há problemas de máximo e mínimo. A partir de então determinou relações entre sólidos.¹²⁶

O processo de integração que Kepler desenvolveu para a quadratura do círculo é o seguinte (ver fig.8):¹²⁷

Primeiramente, traçou uma infinidade de cordas passando pelo centro do círculo. Notemos que formam uma infinidade de triângulos. Como temos tantos segmentos quanto se queira, os triângulos serão infinitamente finos, de tal maneira que seus lados coincidirão com sua altura, que por sua vez é o raio do círculo. Assim, as bases dos triângulos ficam

¹²⁵ KOYRÉ, 1982, p. 315.

¹²⁶ BARON, 1969, p. 110. BOYER, 1959, p.107-8.

¹²⁷ Arquimedes forneceu a prova de que a área do círculo é igual à área do triângulo retângulo, sendo que o comprimento da circunferência do círculo e o raio dele são os catetos do triângulo. Essa prova está no tratado *Sobre as medidas do círculo*. (BOYER, 1986, p.86-87). Segundo Boyer a demonstração de Arquimedes é mais precisa do que a de Kepler.

sobre a circunferência. Desse modo, fazendo uma transformação geométrica, o círculo tornar-se-á um polígono infinitário.¹²⁸

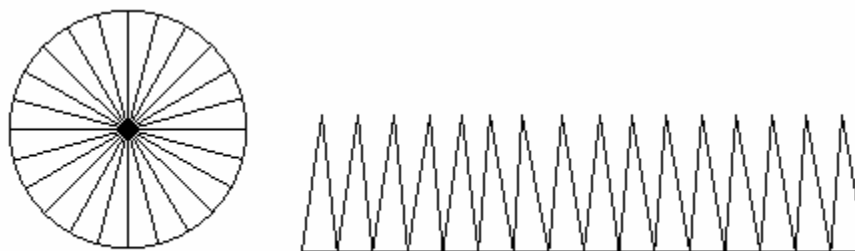


Figura 8

Com isso, Kepler compõe corpos maiores a partir de corpos menores com a mesma magnitude (mesma ordem). Agora, substituindo esses triângulos por um único triângulo (ver fig. 9) tendo a circunferência como sua base e o raio como a altura, teremos que a área do círculo é dada em termos do produto do comprimento da circunferência pelo seu raio.¹²⁹

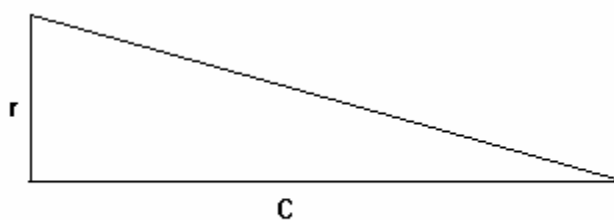


Figura 9

A área dos infinitos triângulos pode ser dada pelo semiproduto de cada base por sua altura:

$$A = \frac{b_1 \cdot h}{2} + \frac{b_2 \cdot h}{2} + \dots + \frac{b_n \cdot h}{2} \dots (3)$$

Percebamos que temos tantas bases quanto se queira. Como a altura h é igual ao raio r da circunferência, podemos reescrever (3) da seguinte maneira:

¹²⁸“Este recurso de técnicas infinitárias, na forma de infinitesimais, estavam bem além dos limites formais na qual a tradição grega tinha operado. Isto conduz Anderson, o matemático escocês, a usar sua *Vindiciae Archimedis* (1616)[A vingança de Arquimedes] para um ataque da falta de rigor de Kepler. Deste modo, já no começo do século, várias tentativas tinham sido feitas para desenvolver a geometria de um modo mais direto que superasse a complexidade e as limitações impostas pelo método de exaustão. Porém, foi à geometria dos indivisíveis de Cavalieri que chamou mais a atenção matemática e filosófica.” (MANCOSU, 1996, p. 38-9.)

¹²⁹ BARON, 1969, p. 110.

$$A = \frac{b_1 \cdot r}{2} + \frac{b_2 \cdot r}{2} + \dots + \frac{b_n \cdot r}{2}$$

ou ainda,

$$A = \frac{1 \cdot r}{2} \cdot (b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n).$$

Sendo que a soma $b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n$, à medida que n aumenta, tende a ser C .¹³⁰ Logo a área é dada por

$$A = \frac{r \cdot C}{2} = \frac{r \cdot (2 \cdot r \cdot \pi)}{2} = \pi \cdot r^2$$

De modo semelhante Kepler estabeleceu o volume de alguns sólidos (ver fig. 10). Por exemplo, a esfera é composta de infinitamente muitos cones¹³¹. O objeto que irá compor a figura plana ou sólida tem as mesmas dimensões respectivamente, porém é infinitamente pequeno.

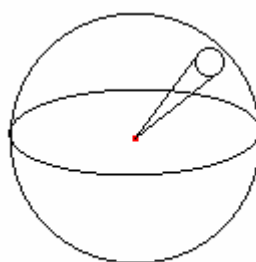


Figura 10

Ao analisarmos os sólidos de revolução, veremos que, através de uma figura plana e com a escolha de um eixo, pode-se obter os mais diferentes tipos de sólidos. Ainda mais, se esta figura plana for um círculo. Vejamos como foi seu procedimento.

Seja dado um círculo (ver fig. 11), com os arcos DE, FG, HI e um ponto J sobre ele.

¹³⁰ BOYER, 1986 p. 222-23.

¹³¹ KOYRÉ, 1982, p. 315.

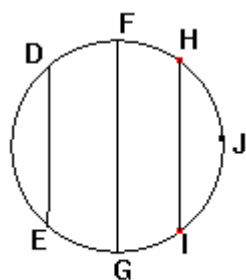


Figura 11

Na escolha de quaisquer segmentos, bem como dos eixos pode-se produzir os mais diversos tipos de sólidos. Por exemplo, o arco HJI girado em torno do eixo DE produz um anel de maçã (ver fig. 12).

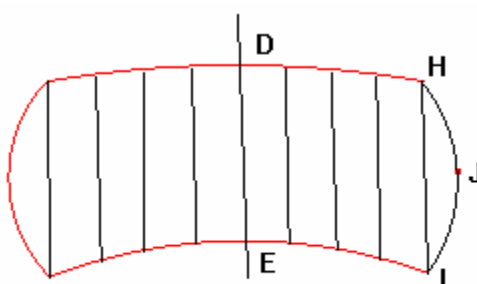


Figura 12

Para entender a relação entre os volumes dos sólidos, Kepler determinou uma representação geométrica que lhe permitiu fixar uma tal relação e, em particular, dar métodos de integração geométrica. Seu procedimento foi construir um cilindro, estabelecendo relações com os volumes dos sólidos obtidos por rotação.¹³²

Kepler determinou um método diferente daquele dos antigos geômetras gregos para encontrar volumes e áreas. Foi comparativo, fazendo uso de técnica infinitária. É o caso da maneira como encontrou a área do círculo, descrita anteriormente, isto é, utilizou os elementos infinitesimais que possuíam a mesma grandeza da figura investigada.

Boyer comenta as idéias de Kepler, dizendo que seu trabalho não estava isento de erros, e que ele

[...] parece não ter distinguido claramente entre provas por meio do método de exaustão daquelas, por idéias de limites, por elementos infinitesimais, ou por indivisíveis. As concepções que mantém nas demonstrações estão longe das noções tomadas pelos antigos geômetras.¹³³

¹³² BARON, 1969. p. 114.

¹³³ BOYER, 1959, p. 109-10.

Independente se houve ou não erros, ou talvez confusão na maneira de conceber os infinitesimais e os indivisíveis, suas investigações foram relevantes para a ciência pelo fato de sugerirem modificações nos procedimentos para solucionar problemas. Assim, os erros dos matemáticos deveriam ser vistos como resultados de investigações que possibilitariam a posteriores matemáticos chegarem a novas teorias.

Galileu foi outro notável matemático. Sua produção científica é considerável. Sabia das atividades de Valerio e de sua modificação do método arquimediano. O pensamento escolástico aparece incorporado nos temas de Galileu, menciona o inglês Richard Suiseth, conhecido como Calculator, e Hentisbery – falando deles em questões referentes a corpos em movimento.¹³⁴

Mediante o conceito de movimento, provou do mesmo modo que Oresme (fornecendo o rigor matemático que este não apresentara), que um corpo com velocidade constante e outro com velocidade uniformemente acelerada, que partem do repouso, percorrem o mesmo trajeto, considerando que a velocidade final do corpo em movimento constante será a metade da velocidade do corpo uniformemente acelerado, em um mesmo intervalo de tempo. Vejamos como compreendeu o movimento dos dois corpos:

Um corpo uniformemente acelerado move-se do ponto C ao ponto D (ver fig. 13) em um tempo AB. Se a velocidade final for representada por uma linha BE, formando ângulos retos com AB, então para qualquer linha PQ, disposta paralelamente a BE no triângulo ABE, corresponde a velocidade em um intervalo de tempo AP.

Como a soma de todas as paralelas no triângulo AEB é a mesma que a soma das paralelas no retângulo AGFB, onde $BF = (\frac{1}{2})BE$, então a distância percorrida pelo corpo uniformemente acelerado é a mesma para um corpo com velocidade constante, considerando a ressalva acima referente à velocidade final desses corpos.¹³⁵ Tanto a conclusão de Galileu quanto de Oresme é que a área sob uma curva velocidade-tempo¹³⁶

¹³⁴ BOYER, p. 112-113.

¹³⁵ BARON, 1969, p. 120; BOYER, 1959, p.113-14; 1986, p. 224.

¹³⁶ Se girarmos a figura 13 de tal maneira que BE fique na posição vertical, teremos um gráfico em um sentido moderno de velocidade versus tempo. Essa representação gráfica era conhecida como *Latitude de Formas* – “Por quase um século antes de seu tempo os filósofos escolásticos vinham discutindo a quantificação das “formas”variáveis, um conceito de Aristóteles aproximadamente equivalente a qualidade. Entre tais formas havia coisas como a velocidade de um objeto móvel [...]”(BOYER, 1986, p.180) – Oresme concluiu que a área sob a curva velocidade-tempo é a distância percorrida, mas não diz como isso é feito. Para representar o gráfico da figura 13, Oresme usou a linguagem de latitude e longitude (muito próximo do que entendemos hoje por ordenada e abscissa.)

representa a distância percorrida. Isto foi posto em considerações de soma das linhas, que formam infinitos pequenos retângulos.

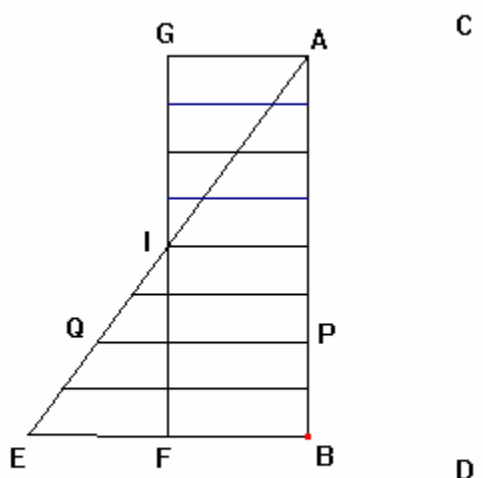


Figura 13

Galileu expressou esse ponto de vista [infinitesimal] quando disse que os momentos, ou pequenos incrementos na distância eram representados pelas linhas do triângulo e do retângulo, e que estas últimas figuras geométricas eram na realidade compostas dessas linhas. Galileu não esclareceu como a transição de linhas como velocidades para as mesmas linhas como momentos deve ser feita. Oresme igualmente deu a questão como provada quando representara velocidades instantâneas por linhas e ainda mantivera que todas as velocidades agem através de tempo. Galileu e Oresme às claras empregaram o atomismo matemático não crítico que aparecera entre os matemáticos de todas as épocas – em Demócrito, Platão, Nicholas de Cusa, Kepler, e muitos outros.¹³⁷

Porém, Galileu rejeita a idéia de compor o contínuo a partir de indivisíveis, pelo fato de poder conduzir a muitos paradoxos referentes ao infinito.¹³⁸ Assim, pode ser que para Galileu o que irá compor a área sob a curva seja a soma dos retângulos. Analisemos como seu discípulo Cavalieri concebeu a idéia de indivisíveis.

Bonaventura Cavalieri (1598-1647) publicou o primeiro trabalho sobre os indivisíveis em 1635. O título é: *Geometria Indivisibilibus Continuum Nova Quadam Ratione Promota* (A Geometria dos contínuos pelos indivisíveis promovido segundo a nova maneira de argumentar). O outro trabalho que publicou referente aos indivisíveis foi em

¹³⁷ BOYER, 1959, p. 114-115.

¹³⁸ MANCOSU, 1996, p. 119.

1647: *Exercitationes Geometricae Sex* (*Seis meditações Geométricas*) onde expõe, nos capítulos de I-XIII, uma resposta aos ataques que sofreu de Guldin sobre seu primeiro trabalho a respeito dos indivisíveis. Já os capítulos XIV e XV são dedicados à análise da fundamentação do método de Guldin.

O primeiro método dos indivisíveis é arrolado nos seis primeiros livros da *Geometria*, enquanto que ao segundo método é dedicado o sétimo livro dela.

Essas obras de Cavalieri tornaram-se as fontes que com mais frequência apareceram citadas nos trabalhos de integrações geométricas no século XVII. Claro que, o trabalho de Arquimedes é um caso a parte.

A maneira como Cavalieri expôs suas idéias a respeito dos indivisíveis causou, poderíamos dizer, muita polêmica e confusão. É difícil entender o que ele queria dizer quando fez uso deles.¹³⁹ Foi muito criticado pela maneira como fora interpretado. O Jesuíta Paul Guldin atacou-o, sob o ponto de vista do que entendeu do método de indivisíveis do trabalho de Cavalieri, dizendo que era uma grande falha utilizar os indivisíveis para constituir o contínuo, a saber, a linha era formada com pontos, os planos com linhas, os sólidos com planos. Outro apontamento de Guldin é a falha de Cavalieri ao estabelecer razões entre duas quantidades infinitas. Disse também que Cavalieri plagiara Kepler.

O termo indivisível já era conhecido e discutido, como vimos, bem antes desse período em que estamos tratando, por exemplo, no período medieval. Bradwardine¹⁴⁰ (1290?-1349) já o conhecia e expressou como o entendia.

Outro matemático a argumentar contra Cavalieri é Andreas Tacquet (1612-1660):

Uma magnitude geométrica, afirmou, é composta somente de *homogenea*, isto é, partes de mesma dimensão – um sólido de pequenos sólidos, uma área de pequenas áreas, e uma linha de pequenas linhas – e não de *heterogenea*, ou partes de uma dimensão inferior, como Cavalieri sustentara.¹⁴¹

Nesse sentido, como veremos, Tacquet foi um dos matemáticos que influenciou o pensamento matemático de Pascal.

¹³⁹ BOYER, 1959. p. 117.

¹⁴⁰ “O espírito filosófico de toda obra de Bradwardine aparece mais claramente na *Geometria Speculativa* e no *Tractatus de Continuo*, em que ele dizia que as grandezas contínuas, embora contendo um número infinito de indivisíveis, não são formadas desses átomos matemáticos, mas são compostas de um número infinito de contínuos de mesma espécie.” (BOYER, 1986, p. 179).

¹⁴¹ BOYER, 1959, p. 140.

Notemos que a maneira como Cavalieri estabelece seu processo de descoberta para integrações parece ser bem diferente de como Kepler o fez. Este usou os infinitesimais, aquele usou algumas relações com os indivisíveis correspondentes um a um de duas figuras, como veremos. Koyré nos diz que:

O processo do pensamento de Cavalieri é um processo analítico e não um processo sintético. Não parte do ponto, da linha ou do plano para chegar, através de uma soma impossível, à linha, ao plano ou ao corpo. Bem pelo contrário, ele parte do corpo, do plano e da linha para neles descobrir, como elementos determinantes e até constitutivos – mas não componentes –, o plano, a linha e o ponto.¹⁴²

Cavalieri parte da figura dada, para assim determinar o indivisível em questão. Sendo que “[...] esses elementos “indivisíveis” são por ele encontrados, sem dificuldade, cortando os objetos geométricos em questão por um plano ou uma reta que os atravesse.”¹⁴³

Para Cavalieri o indivisível sempre tem uma dimensão a menos do que a magnitude a ser tratada. Diferente do infinitamente pequeno que tem a mesma grandeza do objeto tratado (como vimos em Kepler). Uma das justificativas do uso de indivisíveis em lugar de infinitesimais é que

[...] se destina, no espírito de Cavalieri, a libertar-nos da passagem ao limite, com suas dificuldades ou, mais exatamente, suas impossibilidades lógicas, substituindo-a pela intuição geométrica (que Cavalieri domina com mão de mestre), cuja legitimidade não parece poder ser posta em questão.¹⁴⁴

Ele não pensa em compor o contínuo a partir de magnitudes heterogêneas. Quando fala de *omnes línea* (todas as linhas) e *omnia plana* (todos os planos) de uma magnitude sendo equivalentes a magnitude a ser estudada, ele não quer dizer que somas de linhas e de planos irão formar a magnitude propriamente dita. O que faz é estudar a relação que existe entre seus elementos, estabelecendo uma correspondência biunívoca entre eles. Essa é a essência do que chama o método da *regula communis* (regra comum).¹⁴⁵ Para Mancosu,

¹⁴² KOYRÉ, 1982, p. 316.

¹⁴³ KOYRÉ, p. 316.

¹⁴⁴ KOYRÉ, p. 316.

¹⁴⁵ KOYRÉ, p. 317.

Cavalieri quer explorar a coleção de todas as linhas da figura para obter informação sobre as figuras originais. Em geral, dadas duas figuras F_1, F_2 o intuito é determinar a razão entre suas áreas apelando para razão entre suas coleções associadas de linhas;

$$F_1 : F_2 = O_{F_1}(l) : O_{F_2}(l)$$

[“ O ” simboliza a coleção de todas as linhas de uma figura plana] onde supomos a coleção de linhas tomada com respeito à mesma *regula*.¹⁴⁶

Procuremos entender como a *regula*¹⁴⁷ é utilizada em seus estudos. “Ela é definida, para a figura plana (fechada) ou o corpo geométrico, como a reta, ou o plano, que são tangentes à referida figura ou ao mencionado corpo, num ponto chamado topo (vortex)”¹⁴⁸ Junto com essa *regula* pode-se ter outras linhas ou planos, claro que paralelos a *regula*, sendo que apenas um desses formará a *tangens opposita* (tangente oposta). A *regula* move-se ao longo da figura até encontrar a tangente oposta.¹⁴⁹ Esse é o primeiro método dos indivisíveis. Examinemos como o fez:

Seja ABC qualquer figura plana [ver fig. 14], e EO e BC duas tangentes opostas da figura dada, contudo traçadas. Consideremos então dois planos mutuamente paralelos, prolongados indefinidamente, traçados através de EO, BC dos quais aquele que, por exemplo, passa através de EO é movido em direção ao plano passando por BC, sempre se mantendo paralelo a ele até coincidir com ele. Deste modo, as interseções desse plano movente, ou fluente, e a figura ABC, que são produzidas no movimento total, tomadas todas juntas, chamo: todas as linhas da figura ABC (Algumas das quais são LH, PF, BC) tomadas com referência a uma dessas, tal como BC: de transição retilínea, quando os planos paralelos intercedem à figura ABC em ângulos retos; de transição oblíqua quando eles interceptam-na obliquamente.¹⁵⁰

¹⁴⁶ MANCOSU, 1996, p.40.

¹⁴⁷ Deixaremos a palavra em latim. Lembrando que pode ser entendido por: regra ou régua. Também como linha de referência. MANCOSU, 1996, p.40.

¹⁴⁸ KOYRE, 1982, p. 317.

¹⁴⁹ BARON, 1969, p. 124.; KOYRE, 1982, p. 317-318.

¹⁵⁰ CAVALIERI (1635, livro II, p. 8-9) apud MANCOSU, 1996, p. 39-40.

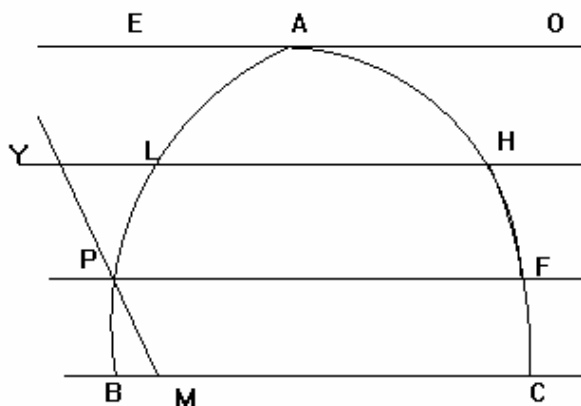


Figura 14

Olhemos para a figura 14 a fim de entendermos geometricamente o que isto quer dizer. Acrescentamos que será discutida apenas a transição retilínea dos planos, a fim de termos noção de como Cavalieri trabalha com os indivisíveis.

Façamos um resumo disso: Passemos dois planos paralelos através de EO e BC. Logo em seguida movamos o plano EO através da figura até coincidir com BC. O movimento da *regula* fará interseção com as linhas da figura, a saber, o plano coincidirá com elas. Caso a figura ABC fosse um sólido, o plano movente produziria todos os planos da figura sólida em questão.

Eis como faz a relação geométrica entre duas figuras.

As relações entre as figuras geométricas são as mesmas que as relações entre os conjuntos de seus elementos. Porém, se para estabelecer essas relações nos fosse preciso considerar os conjuntos em apreço em sua totalidade, a vantagem do novo método sobre o antigo seria mínima ou até nula. A grande descoberta de Cavalieri justamente consiste em reconhecer que, se chegássemos a estabelecer uma relação constante e determinada entre os elementos correspondentes dos conjuntos comparados – tal relação ligando, não diretamente, *todos* os elementos de um conjunto a *todos* os elementos do outro, mas, de início, “cada” elemento de um a “cada” elemento do outro –, teríamos o direito de transpor ou de estender aos conjuntos, isto é, às figuras em sua inteireza, a relação verificada entre seus elementos.¹⁵¹

Assim, um passo muito importante é determinar os elementos correspondentes para poder analisar as figuras como um todo, para poder assim estabelecer a passagem de procedimentos finitísticos aos procedimentos infinitários.

¹⁵¹ KOYRÉ, 1982, p. 318.

Devem-se verificar algumas condições que nos possibilite fazer a comparação entre os indivisíveis de duas figuras, como suas alturas. Na *Geometria continuorum*, Cavalieri define a relação da igualdade entre as figuras: lúnulas e triângulos curvilíneos; triângulos curvilíneos e triângulos retilíneos. Nas *Exercitationes* observa a igualdade entre um círculo e uma outra figura que foi obtida a partir dessa, só que a deformando.¹⁵²

Se as figuras tiverem a mesma altura, então se procede da seguinte maneira: colocam-se as figuras entre as mesmas linhas paralelas BE e AF, ou seja, a mesma *regula* e tangente oposta serão tomadas para esses objetos. Portanto, o plano movente determinará os indivisíveis, que se corresponderão um a um (ver fig. 15). Por exemplo, haverá uma relação entre GH e IJ.

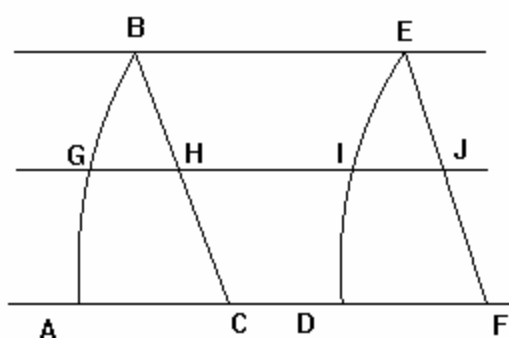


Figura 15

Para Cavalieri o estudo de duas figuras geométricas iguais era trivial. Caso as figuras fossem diferentes, outros mecanismos serão considerados, por exemplo, o estudo da proporcionalidade. Eis dois exemplos, um com o tamanho do indivisível constante e outro variando o tamanho do indivisível.¹⁵³

Sejam dados os paralelogramos ABCD e EFGH. Os dois estão entre as linhas paralelas AF e DG. Para Cavalieri o que importa é que a relação entre IJ e LM seja igual a DC e HG. Percebamos que os indivisíveis possuem comprimentos que são constantes. Podemos determinar a relação entre as duas figuras, ou seja, ABCD está para EFGH assim como DC está para HG. Duas figuras estão em correspondência assim como suas coleções

¹⁵² KOYRÉ, p.318.

¹⁵³ KOYRÉ, 1982, p. 319-20.

de linhas estão uma para outra¹⁵⁴ – lembrando sempre da necessidade da correspondência um a um.¹⁵⁵

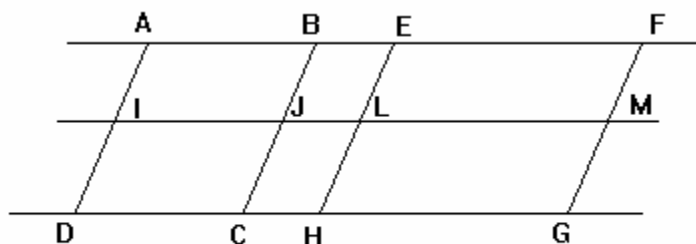


Figura 16

Para o segundo exemplo, ver fig. 17. Tomemos duas figuras ABC e BCD a ser comparadas, com o comprimento dos indivisíveis diferentes um do outro, porém as figuras possuindo a mesma altura. Se a razão entre os indivisíveis, de comprimentos diferentes, EF e FG for igual a AB e BD, levando-se em conta que EF pode ser qualquer uma das linhas paralelas a AB, então teremos que AB está para BD assim como ABC está para BCD. Observemos que Cavalieri descreve razões entre os indivisíveis correspondentes, e assim também para as duas figuras. Esse será um ponto criticado por Guldin.

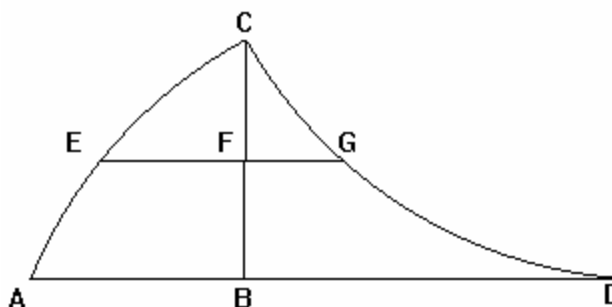


Figura 17

Guldin ataca a lógica de Cavalieri dizendo que ele está estabelecendo a razão entre as coleções infinitas, e que isto não seria possível. Cavalieri responde dizendo que, para ele, há diferença entre infinito absoluto e relativo.

Algo é infinito no sentido absoluto se é infinito em todo lugar, “simpliciter [pura e simplesmente] e undequaque [em todo lugar].” Algo é infinito em um sentido relativo se não é infinito em todo lugar mas

¹⁵⁴ MANCOSU, 1996, p. 40.

¹⁵⁵ “O princípio usado na prova é freqüentemente referido na literatura como o princípio *ut unum* [como um], das próprias palavras de Cavalieri, que se refere a esse modo de inferência como *ut unum as ut unum ad unum, sic omnia ad omnia* [como um para um assim todos para todos]” MANCOSU, 1996, p. 43.

somente relativo a alguma coisa. No caso da infinidade absoluta, Cavalieri concede que não pode existir uma razão entre dois infinitos, mas nega a mesma reivindicação quando é uma questão de infinito relativo. Porém, as coleções de “todas as linhas” e de “todos os planos” são infinitos relativos e assim podemos investigar suas razões.¹⁵⁶

E com esse argumento, Cavalieri abstrai o problema da comparação entre elementos infinitos.

Além da correspondência biunívoca entre os indivisíveis, é preciso levar em conta que esses elementos sejam correspondentes, a saber, que desempenhem o mesmo papel na posição que é estudada. Bem como, deve-se ter o cuidado para que a *regula* seja correspondente. Caso não se considere isso, é possível surgir paradoxos.

Examinemos como é a relação entre um paralelogramo e os dois triângulos formados pela diagonal que corta o paralelogramo, conforme figura 18. Consideremos os triângulos ABD e BCD, bem como o paralelogramo ABCD. As linhas EF e FG estão uma a uma. Mas há um problema. As distâncias de EF e de FG em relação aos vértices B e D dos triângulos, respectivamente ABD e BCD, não são iguais. Logo, EF e FG não estão em uma mesma posição de correspondência. Mas se

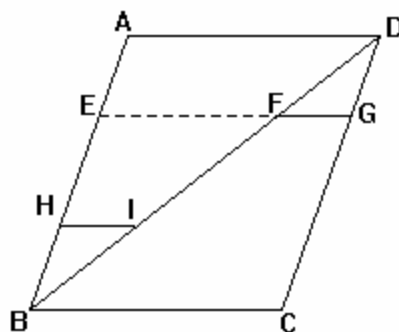


Figura 18

olharmos para FG e HI veremos que estão em uma situação de correspondência, ou seja, estão a mesma distância do topo em relação aos respectivos triângulos BCD e ABD. Se conseguirmos estabelecer esta última relação, teremos como consequência a igualdade dos dois triângulos.¹⁵⁷

A segunda abordagem dos indivisíveis é apresentada no sétimo livro da *Geometria*: a idéia é comparar duas figuras, decompondo-as. De acordo com Mancosu,

¹⁵⁶ MANCOSU, 1996, p. 54.

¹⁵⁷ KOYRÉ, 1982, p. 322.

esse segundo método que Cavalieri formulou tem por objetivo livrar-se do conceito de infinidade, ou seja, não será feita a comparação de agregados indivisíveis.¹⁵⁸ Eis o Teorema 1 do sétimo livro:

Se entre as mesmas paralelas, quaisquer duas figuras planas são construídas, e, se nelas, qualquer reta for traçada eqüidistante das paralelas, as porções incluídas de quaisquer uma dessas linhas são iguais, as figuras planas são também iguais entre si; e se entre os mesmos planos paralelos, quaisquer figuras sólidas são construídas, e, se nelas, quaisquer planos forem traçados eqüidistantes dos planos paralelos, as figuras planas incluídas, a partir de qualquer um dos planos desse modo traçados, são iguais, as figuras sólidas são também do mesmo modo iguais entre si.

Chamemos análogas, as figuras assim comparadas, o sólido tanto quanto o plano [...].¹⁵⁹

Ou seja, Cavalieri faz a decomposição das figuras, para assim superpor as partes encontradas, por exemplo, (ver fig. 19), as de ABC sobre XYZ.

“A idéia principal de Cavalieri consiste em comparar os indivisíveis de duas figuras “distributivamente” mas não “coletivamente,” isto é, evitará usar a noção de agregados de indivisíveis.”¹⁶⁰

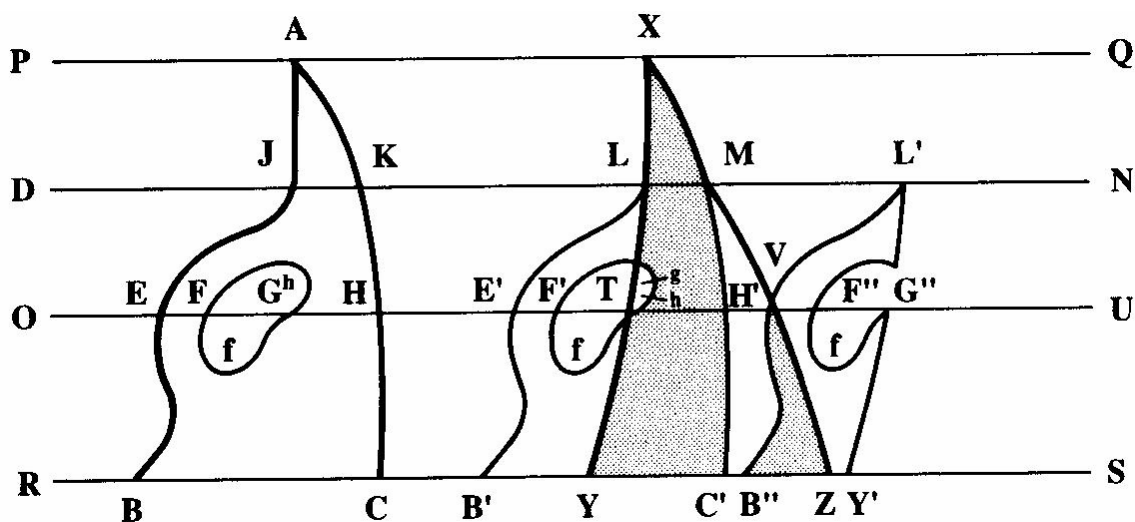


Figura 19

Se conseguir superpor cada parte da figura ABC em XYZ, então elas serão iguais. O que não é tão diferente do primeiro método, pois aqui também será importante a correspondência entre os elementos indivisíveis das duas figuras um a um. (Cavalieri

¹⁵⁸ MANCOSU, 1996, p.48.

¹⁵⁹ STRUIK, 1990, p.210.

¹⁶⁰ MANCOSU, 1996, p. 48

demonstra através da superposição que as figuras são iguais, mas acrescenta uma prova por redução ao absurdo. Cavalieri parecia não estar satisfeito com aquela demonstração).¹⁶¹

O ponto fraco dessa superposição é que o processo poderia não ter fim, mas a fundamentação de seu método

[...] acaba por invocar infinito pelo menos na forma de aceitação de um procedimento não “finitista”: a igualdade de duas figuras por superposição pode não ser um processo que termine em um número finito de passos, mas a defesa de Cavalieri do seu teorema mostra que estava disposto a estender o campo de operações geométricas para permitir tais procedimentos “não finitistas”.¹⁶²

Posto isso, podemos compreender o segundo método dos indivisíveis de Cavalieri. Agora interpretemos uma proposição de Cavalieri em um sentido moderno¹⁶³ identificando a maneira de como eram feitas às relações entre a área de um paralelogramo e a área formada pelas suas diagonais.

Proposição 23. Em qualquer paralelogramo como BD com a base CD, traçamos uma paralela arbitrária EF a CD e a diagonal AC, interceptando EF em G. Então $DA : AF = (CD \text{ ou } EF) : FG$. Chamamos AC a primeira diagonal. Então construímos o ponto H sobre EF tal que $DA^2 : AF^2 = EF : FH$, e assim por diante em todas as paralelas a CD, de maneira que todas as linhas como essa HF terminam em uma curva CHA. Em um modo similar, construímos uma curva CIA, onde $DA^3 : AF^3 = EF : FI$, uma curva CLA tal que $DA^4 : AF^4 = EF : FL$, etc. Chamamos CHA a segunda diagonal, CIA a terceira, CLA a quarta, etc., e similarmente AGCD o primeiro espaço diagonal do paralelogramo BD, a figura trilínea AHCD o segundo, AICD o terceiro, ALCD o quarto, etc. Então digo que o paralelogramo BD é duas vezes o primeiro espaço, três vezes o segundo, quatro vezes o terceiro, cinco vezes o quarto, etc.¹⁶⁴

Analisemos a figura 20. Sejam $CD = a$ e $AD = b$ seus lados.

¹⁶¹ MANCOSU, p. 49.

¹⁶² MANCOSU, 1996, p.55.

¹⁶³ Observação: quando falamos de interpretar um autor no sentido moderno, podemos ver o quanto isso pode desvirtuar o que ele estava pensando. Ainda mais quando este autor dispõe apenas de linguagem geométrica. Ao lermos em termos algébrico nem sempre estaremos admitindo a real compreensão que se queria dar a uma determinada teoria.

¹⁶⁴ STRUIK, 1990, p. 217.

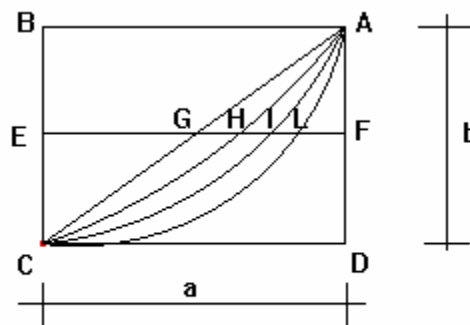


Figura 20

Temos assim que a área do paralelogramo BD é dada por $A = a \cdot b$. De acordo com a última citação o paralelogramo BD tem as seguintes correspondências, referentes às suas diagonais primeira, segunda, terceira e quarta:

$$ABCD = 2 \text{ AGCD}$$

$$ABCD = 3 \text{ AHCD}$$

$$ABCD = 4 \text{ AICD}$$

$$ABCD = 5 \text{ ALCD}$$

que possuem o seguinte significado em termos modernos de integração: a integração da equação encontrada a partir da primeira diagonal é $\frac{a \cdot b}{2}$; da segunda $\frac{a \cdot b}{3}$; da terceira $\frac{a \cdot b}{4}$; e assim por diante. Ou seja, são os valores das áreas sob suas respectivas diagonais.

Cavalieri expõe o resultado das investigações dos objetos estudados em termos de razões, da mesma maneira como os antigos gregos faziam.

No próximo capítulo abordaremos o processo de integração de Blaise Pascal. Da mesma maneira que seus contemporâneos buscou encontrar uma regra onde pôde expressar o resultado de áreas e volumes. Para isso fez uso de uma relação aritmética-geométrica que lhe possibilitou calcular áreas sob curvas. Também desenvolveu o método da balança, que lhe forneceu centros de gravidade, como veremos.

IV – Conceitos matemáticos em Pascal

4.1 Postestatum Numericarum Summa¹⁶⁵

Esse tratado provavelmente foi redigido em 1654. O objetivo principal é encontrar a soma das potências numéricas de uma progressão aritmética e relacioná-la com as grandezas contínuas. Veremos como é o princípio desse tratado analisando-o por inteiro.

Pascal começa estabelecendo uma *observação*, dizendo que os antigos conseguiram encontrar a soma dos números naturais, 1, 2, 3, 4... , a saber, em notação

moderna $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$; para seus quadrados, a saber,

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; para seus cubos, a saber,

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Afirma que esses métodos eram aplicáveis apenas a

essas potências. Assim, irá expor um método que lhe possibilite calcular as somas das potências dois e três, ainda mais a quarta potência bem como as potências superiores até o “infinito”.

Garante também que essa soma de potências numéricas poderá ser feita a partir de qualquer seqüência aritmética, como 8, 9, 10,.... A razão da progressão é arbitrária: assim, 1, 3, 5, 7,...; 2, 4, 6, 8,...; 1, 4, 7, 10, 13,...., ou ainda, por exemplo, 5, 8, 11, 14.

Convém notar que Pascal não usa notações algébricas. Sua linguagem é retórica. A fim de entendermos o que ele tem para nos dizer, iremos sempre que possível traduzir suas informações matemáticas para uma linguagem algébrica, ainda mais, uma linguagem referente a matemática moderna. Essa será a nossa interpretação matemática do estudo desse tratado.

Coisa notável, um método único e geral será suficiente para tratar esses casos diferentes. Esse método é tão simples que será exposto em algumas linhas, e sem aquele aparato de notações algébricas, a que devem recorrer as demonstrações difíceis. Julgar-se-á depois de ter visto o problema que vai seguir.¹⁶⁶

¹⁶⁵ Soma de Potências Numéricas.

¹⁶⁶ PASCAL, 1908, p.349

Vemos na citação acima que fará uso da retórica para explicar a composição desse tratado. Nessa época Descartes já havia publicado a *La Géométrie* (1647), na qual encontramos já todo um aparato algébrico. Pascal não teve nenhum apreço pela novidade. Preferiu, em vez disso, continuar fazendo uso da linguagem geométrica e aritmética.

Depois dessa breve *observação*, apresenta a seguinte *definição*.

Seja um binômio $A + 3$, cujo primeiro termo seja a letra A , e o segundo, um número: elevemos esse binômio a uma potência qualquer, à quarta, por exemplo, o que dá $A^4 + 12 \cdot A^3 + 54 \cdot A^2 + 108 \cdot A + 81$; os números 12, 54, 108 que multiplicam as diversas potências de A e são formados pela combinação dos números figurados com o segundo termo, 3, do binômio, serão chamados coeficientes de A .

Assim, no exemplo citado, 12 será o coeficiente do cubo de A ; 54, aquele do quadrado, e 108, aquele da primeira potência.

Quanto ao número 81, chamar-se-á *número absoluto*.¹⁶⁷

Em seguida estabelece um *Lema* que fornecerá subsídios para mostrar o método da soma de potências numéricas.

Seja um número qualquer 14, e um binômio $14 + 3$, cujo primeiro membro seja 14 e o segundo, um número qualquer 3, de tal sorte que a diferença entre os números 14 e $14 + 3$ seja igual a 3. Elevemos esses números a uma mesma potência, a quarta por exemplo: a quarta potência de 14 é 14^4 , aquela do binômio, $14 + 3$, é $14^4 + 12 \cdot 14^3 + 54 \cdot 14^2 + 108 \cdot 14 + 81$.⁽¹⁶⁸⁾

Faz observação referente aos coeficientes das potências de 14: são os mesmos do desenvolvimento do binômio $(A + 3)$ elevado a quarta potência. Depois, estabelece que a diferença entre as potências é:

$$(14 + 3)^4 - 14^4 = 12 \cdot 14^3 + 54 \cdot 14^2 + 108 \cdot 14 + 81.$$

Duas considerações podem aqui ser feitas. A primeira é que nessa diferença aparecem as potências de 14 com grau inferior ao grau proposto. Os coeficientes dessas potências são os mesmo de $(A + 3)^4$. A segunda consideração é que o número 3, diferença entre os termos propostos, está elevado a quarta potência, a saber, 81 é o *número absoluto*. Sendo assim, é deduzida a seguinte *Regra*.

¹⁶⁷ PASCAL, 1908, p.349

¹⁶⁸ PASCAL, 1908, p. 351

A DIFERENÇA ENTRE POTÊNCIAS SEMELHANTES DE DOIS NÚMEROS COMPREENDE: A DIFERENÇA ENTRE ESSES NÚMEROS ELEVADO À POTÊNCIA PROPOSTA; MAIS A SOMA DE TODAS AS POTÊNCIAS DE GRAU INFERIOR DO MENOR DOS DOIS NÚMEROS, ESSAS POTÊNCIAS SENDO RESPECTIVAMENTE MULTIPLICADAS PELOS COEFICIENTES QUE TÊM AS MESMAS POTÊNCIAS DE A NO DESENVOLVIMENTO DE UM BINÔMIO ELEVADO À POTÊNCIA PROPOSTA E TENDO PARA PRIMEIRO TERMO A E PARA SEGUNDO TERMO A DIFERENÇA ENTRE OS NÚMEROS DADOS.¹⁶⁹

Depois dessa regra Pascal está pronto para fornecer um exemplo de como encontrar a soma de potências numéricas de uma progressão aritmética arbitrária. Apresentaremos o exemplo que deixou registrado em seu tratado.

A progressão proposta tem como primeiro termo o número 5. A diferença da progressão dada, isto é, a razão é 3. Pode-se considerar, nessa progressão, tantos termos quanto se queira. Nesse caso, os termos dados são 5, 8, 11, 14. Esses termos são elevados a qualquer potência inteira, suponhamos ao cubo. O intuito é encontrar a soma de: $5^3 + 8^3 + 11^3 + 14^3$.

Os cubos desses números são respectivamente: 125, 512, 1331, 2744. Sua soma é 4712. Veremos quais forão os procedimentos que lhe permitiu encontrar tal soma.

CONSIDEREMOS O BINÔMIO $A + 3$ QUE TEM POR PRIMEIRO TERMO A E POR SEGUNDO TERMO A DIFERENÇA DA PROGRESSÃO.

ELEVEMOS ESSE BINÔMIO À QUARTA POTÊNCIA, POTÊNCIA IMEDIATAMENTE SUPERIOR AO GRAU PROPOSTO, TRÊS; OBTEMOS A EXPRESSÃO $A^4 + 12 \cdot A^3 + 54 \cdot A^2 + 108 \cdot A + 81$.⁽¹⁷⁰⁾

Depois disso, toma-se o número 17 que na progressão estabelecida segue depois do último termo, ou seja, 14. Eleva-se o número 17 à quarta potência obtendo-se 83521. Desse resultado diminui-se o seguinte:

1. a soma simples, $5 + 8 + 11 + 14$, multiplicada por 108. O número 108 é o coeficiente de A (no desenvolvimento do binômio $(A + 3)^4$);

¹⁶⁹ PASCAL, 1908, p. 351-2.

¹⁷⁰ PASCAL, 1908, p. 355.

2. a soma dos quadrados, $5^2 + 8^2 + 11^2 + 14^2$, multiplicada por 54. O número 54 é o coeficiente de A^2 . Esse processo continua caso existam potências de grau inferior ao grau proposto;
3. a quarta potência do primeiro termo dado na progressão, a saber, 5.
4. por fim, a diferença da progressão dada elevada à quarta potência e multiplicada pelo número de termos, a saber, 4.

Seguindo as observações de 1 a 4, temos o seguinte resultado:

$17^4 = 83521$. Desse número subtrai-se $4104 + 21924 + 625 + 324$. O valor encontrado é 56544.

O *resto* da subtração é um múltiplo da soma procurada. É equivalente ao produto de 4712 pelo número 12, que nada mais é do que o coeficiente de A elevado a potência proposta, a saber, 3. Assim, $56544 = 12 \times 4712$.

Essa é a regra para encontrar a soma de potências numéricas. Dado esse exemplo, Pascal expõe uma *demonstração* numérica.

Demonstração

O número 17 elevado a quarta potência, isto é, 17^4 , pode ser reescrito como:

$$17^4 - 14^4 + 14^4 - 11^4 + 11^4 - 8^4 + 8^4 - 5^4 + 5^4$$

Notemos que apenas 17^4 possui só o sinal positivo. Os demais termos são adicionados e subtraídos. As diferenças entre 17 e 14, 14 e 11, 8 e 5, é 3. De acordo com o *Lema* anterior, tem-se que:

$$17^4 - 14^4 \text{ é igual a } 12 \cdot 14^3 + 54 \cdot 14^2 + 108 \cdot 14 + 81 \dots (a)$$

$$14^4 - 11^4 \text{ é igual a } 12 \cdot 11^3 + 54 \cdot 11^2 + 108 \cdot 11 + 81 \dots (b)$$

$$11^4 - 8^4 \text{ é igual a } 12 \cdot 8^3 + 54 \cdot 8^2 + 108 \cdot 8 + 81 \dots (c)$$

$$8^4 - 5^4 \text{ é igual a } 12 \cdot 5^3 + 54 \cdot 5^2 + 108 \cdot 5 + 81 \dots (d)$$

$$5^4 \text{ é igual a } 5^4 \dots (e)$$

O termo 5^4 não precisa ser transformado (Pascal não diz o porque, mas percebe-se que é o primeiro termo da progressão dada). Ter-se-á que o valor de 17^4 é a soma de: $a + b + c + d + e$.

Pode-se reagrupar a ordem dos termos:

$$\begin{aligned} & 5 + 8 + 11 + 14 \text{ multiplicados por } 108. \\ & + 5^2 + 8^2 + 11^2 + 14^2 \text{ multiplicados por } 54. \\ & + 5^3 + 8^3 + 11^3 + 14^3 \text{ multiplicados por } 12. \\ & + 81 + 81 + 81 + 81 \\ & + 5^4. \end{aligned}$$

Subtrai-se de uma parte e de outra, a soma

$$\begin{aligned} & 5 + 8 + 11 + 14 \text{ multiplicados por } 108. \\ & + 5^2 + 8^2 + 11^2 + 14^2 \text{ multiplicados por } 54. \\ & + 81 + 81 + 81 + 81 \\ & + 5^4. \end{aligned}$$

Teremos que 17^4 diminuído das quantidades designadas anteriormente, a saber

$$\begin{aligned} & - 5 - 8 - 11 - 14 \text{ multiplicados por } 108. \\ & - 5^2 - 8^2 - 11^2 - 14^2 \text{ multiplicados por } 54. \\ & - 81 - 81 - 81 - 81 \\ & - 5^4, \end{aligned}$$

é o mesmo valor da soma $5^3 + 8^3 + 11^3 + 14^3$ multiplicados por 12. C.Q.D.

Analisemos a demonstração acima e reescrevamos 17^4 da seguinte maneira:

$$17^4 = 108(5 + 8 + 11 + 14) + 54(5^2 + 8^2 + 11^2 + 14^2) + 12(5^3 + 8^3 + 11^3 + 14^3) + (81 + 81 + 81 + 81) + 5^4. \text{ Notemos que } 17^4 \text{ foi escrito como soma de potências numéricas.}$$

Seguindo o raciocínio da demonstração, retiremos de ambos os lados da expressão as somas de potências; a diferença, isto é, a razão, elevada a quarta potência multiplicada pelo número de termos dados; e o primeiro termo elevado a uma potência imediatamente superior a potência proposta.

$$17^4 - 108(5 + 8 + 11 + 14) - 54(5^2 + 8^2 + 11^2 + 14^2) - (81 + 81 + 81 + 81) - 5^4 = \\ 108(5 + 8 + 11 + 14) + 54(5^2 + 8^2 + 11^2 + 14^2) + 12(5^3 + 8^3 + 11^3 + 14^3) + (81 + 81 + \\ 81 + 81) + 5^4 - 108(5 + 8 + 11 + 14) - 54(5^2 + 8^2 + 11^2 + 14^2) - (81 + 81 + 81 + 81) - \\ 5^4.$$

O valor encontrado da subtração é a soma das potências numéricas ($5^3 + 8^3 + 11^3 + 14^3$) multiplicadas por 12, que é um múltiplo da soma buscada.

O próximo passo apresentado por Pascal é a regra geral para *Soma de Potências Numéricas*. A regra toda é exposta retoricamente, exigindo muita atenção para a compreensão da síntese geral de que foi tratada até agora.

SENDO DADA, A PARTIR DE UM TERMO QUALQUER, UMA SEQUÊNCIA QUALQUER DE TERMOS DE UMA PROGRESSÃO ARBITRÁRIA, ACHAR A SOMA DE POTÊNCIAS SEMELHANTES DESSES TERMOS SUPOSTOS ELEVADOS A UM GRAU ARBITRÁRIO.

Formemos um binômio tendo por primeiro termo A e por segundo termo a diferença da progressão dada; elevemos esse binômio ao grau imediatamente superior ao grau proposto, e consideremos no desenvolvimento obtido os coeficientes das diversas potências de A .

Elevemos, agora, ao mesmo grau o termo que, na progressão dada, segue imediatamente o último termo considerado. Depois, subtraímos do número obtido as quantidades seguintes:

Primeiramente: O primeiro termo dado na progressão – isto é, o menor dos termos dados – elevado à mesma potência (imediatamente superior ao grau proposto).

Em segundo lugar: A diferença da progressão elevada à mesma potência, e tomada, tantas vezes quantas se considerem os termos na progressão.

Em terceiro lugar: As somas dos termos dados elevados aos diversos graus menores do que o grau proposto, essas somas sendo respectivamente multiplicadas pelos coeficientes das mesmas potências de A no desenvolvimento do binômio formado acima.

O *resto* da subtração, assim efetuada, é um múltiplo da soma procurada: contém-na tantas vezes quantas unidades existam no coeficiente da potência de A cujo grau é igual ao grau proposto.¹⁷¹

A fim de expressarmos a regra geral numa linguagem moderna, vamos interpretá-la fazendo uso da linguagem algébrica. Assim, seguiremos a última citação que possibilitará fornecer seus resultados passo a passo. Deixamos claro que vimos a regra geral expressa algebricamente em estudos de Boyer (1943; 1986) e Baron (1969), mas o processo não era mostrado efetivamente, tornando-se difícil de entender como o resultado

¹⁷¹ PASCAL, 1908, p. 361-2.

tinha sido obtido. O texto de Pascal permite chegar ao exposto nas obras citadas. Seguimos à risca esse tratado, explorando-o a fim de mostrar minuciosamente suas etapas.

Em primeiro lugar: Seja a progressão cujos termos são: $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots, a + (k - 1)d$. Queremos encontrar a soma de cada termo elevada a qualquer potência inteira positiva, por exemplo, p .

Podemos escrever essa soma como:

$$\sum_{j=1}^k [a + (j-1)d]^p = a^p + (a + d)^p + (a + 2d)^p + (a + 3d)^p + \dots + [a + (k-1)d]^p$$

Em segundo lugar: formemos um binômio tendo como o primeiro termo A e para o segundo termo a razão da progressão dada. Em seguida, elevemos esse binômio à potência imediatamente superior à potência proposta e desenvolvamos o binômio considerado. Lembremos que a potência proposta é p , de acordo com o enunciado a nossa potência imediatamente superior será $p + 1$.

$$(A + d)^{p+1} = C_{p+1}^0 A^{p+1} d^0 + C_{p+1}^1 A^p d + C_{p+1}^2 A^{p-1} d^2 + \dots + C_{p+1}^p A d^p + C_{p+1}^{p+1} A^0 d^{p+1}.$$

Em terceiro lugar: tomemos o termo, na progressão dada, que segue imediatamente após o último termo dado e elevamo-lo a mesma potência anterior. O último termo dado é $[a + (k-1)d]$. Desse modo, o termo posterior é $(a + kd)$.

Do número obtido subtraímos o que se pede na passagem de Pascal citada. Teremos o seguinte resultado.

$$(a + kd)^{p+1} - a^{p+1} - k \cdot d^{p+1} - \left\{ \left[C_{p+1}^2 d^2 \sum_{j=1}^k [a + (j-1)d]^{p-1} + \right. \right. \\ \left. \left[+ C_{p+1}^3 d^3 \sum_{j=1}^k [a + (j-1)d]^{p-2} + \dots + C_{p+1}^p d^p \sum_{j=1}^k [a + (j-1)d] \right] \right\} = C_{p+1}^1 d \sum_{j=1}^k [a + (j-1)d]^p \dots \\ \dots(1)$$

O resto encontrado é o múltiplo segundo $C_{p+1}^1 d$ da soma buscada.

Reescrevamos a equação (1). Para isso, adicionemos em ambos os membros de (1) as somas que estão entre chaves, assim como o primeiro termo elevado à potência $(p + 1)$ e a diferença da progressão, elevada a $(p + 1)$, multiplicada pelo número de termos. Teremos que:

$$(a + kd)^{p+1} = C_{p+1}^1 d \sum_{j=1}^k (a + (j-1)d)^p + \\ + C_{p+1}^2 d^2 \sum_{j=1}^k [a + (j-1)d]^{p-1} + C_{p+1}^3 d^3 \sum_{j=1}^k [a + (j-1)d]^{p-2} + \dots + C_{p+1}^p d^p \sum_{j=1}^k [a + (j-1)d] + \\ + a^{p+1} + k \cdot d^{p+1}.$$

Para a soma de uma seqüência de *números naturais* fazemos $a = d = 1$.

$$(k+1)^{p+1} = C_{p+1}^1 \sum_{j=1}^k j^p + C_{p+1}^2 \sum_{j=1}^k j^{p-1} + C_{p+1}^3 \sum_{j=1}^k j^{p-2} + \dots + C_{p+1}^p \sum_{j=1}^k j + (1+k) \dots (2)$$

Essa é a fórmula simbolizada algebricamente para a soma de potências numéricas, que foi estabelecida retoricamente.

Depois de Pascal expor a regra geral para a soma de potências, deixa um *aviso* ao leitor, enunciando uma regra para encontrar a soma de números naturais.

EM UMA PROGRESSÃO NATURAL, PARTINDO DE UM NÚMERO QUALQUER, O QUADRADO DO NÚMERO IMEDIATAMENTE SUPERIOR AO ÚLTIMO TERMO, DIMINUÍDO DO QUADRADO DO PRIMEIRO TERMO E DO NÚMERO DOS TERMOS DADOS, É IGUAL AO DOBRO DA SOMA DOS TIDOS TERMOS.¹⁷²

Ou seja, se quisermos encontrar a soma dos números, 5, 6, 7, 8: teremos que $9^2 - 5^2 - 4 = 2(5 + 6 + 7 + 8)$. Que em termos de notação moderna podemos escrever a soma nos n números naturais como: $(n+1)^2 - 1^2 - n = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n)$ ou $1 + 2 + 3 +$

¹⁷² PASCAL, 1908, p. 363.

...+ n = $\frac{n(n+1)}{2}$. Comenta ainda que é possível encontrar outras regras análogas para somas de potências mais elevadas.¹⁷³

A *conclusão* do tratado é muito relevante para nossa dissertação. Pascal deixa claro que posta a *regra* geral, e com a familiaridade da doutrina dos indivisíveis, é possível determinar áreas sob regiões curvilíneas. Refere-se às curvas do tipo $y = x^n$ ⁽¹⁷⁴⁾ (para n inteiro positivo).

Esses resultados permitirão quadrar imediatamente todos os gêneros de parábolas e uma infinidade de outras curvas.

SE, ENTÃO, ESTENDEMOS ÀS QUANTIDADES CONTÍNUAS OS RESULTADOS ENCONTRADOS PARA OS NÚMEROS, PELO MÉTODO EXPOSTO ACIMA, PODEREMOS ENUNCIAR AS REGRAS SEGUINTE:

REGRAS RELATIVAS À PROGRESSÃO NATURAL QUE COMEÇA PELA UNIDADE.

A SOMA DE UM CERTO NÚMERO DE LINHAS ESTÁ PARA O QUADRADO DA MAIOR, COMO 1 ESTÁ PARA 2.

A SOMA DOS QUADRADOS DAS MESMAS LINHAS ESTÁ PARA O CUBO DA MAIOR, COMO 1 ESTÁ PARA 3.

A SOMA DOS SEUS CUBOS ESTÁ PARA A QUARTA POTÊNCIA DA MAIOR, COMO 1 ESTÁ PARA 4.

REGRA GERAL RELATIVA À PROGRESSÃO NATURAL QUE COMEÇA PELA UNIDADE.

A SOMA DAS MESMAS POTÊNCIAS DE UM CERTO NÚMERO DE LINHAS ESTÁ PARA A POTÊNCIA DE GRAU IMEDIATAMENTE SUPERIOR DA MAIOR ENTRE ELAS, COMO A UNIDADE ESTÁ PARA O EXPOENTE DESSA MESMA POTÊNCIA.¹⁷⁵

¹⁷³ Fermat em 1623 estabeleceu uma regra geral para encontrar a soma de potências observando o triângulo aritmético (baseado nos números figurados):

“O último número multiplicado pelo próximo número maior é o dobro do triângulo colateral;

O último número multiplicado pelo triângulo do próximo maior é três vezes a pirâmide colateral;

O último número multiplicado pela pirâmide do próximo maior é quatro vezes o triângulo-triângulo colateral;

“et ea in infinitum uniformi methodo.”

Em notação moderna este teorema sobre números figurados pode ser escrito como segue:

$$\sum_1^n \frac{n}{1} = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}; \quad \sum_1^n \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}; \quad \sum_1^n \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

e assim por diante.” FERMAT apud BOYER, 1943, p.238. No entanto, Pascal parece não ter o conhecimento desse trabalho e assim chega em seu resultado independentemente.

¹⁷⁴ LORENZO, 1985. p.105.

¹⁷⁵ PASCAL, 1908, p. 365.

O que Pascal quer é estabelecer a relação entre as grandezas discretas – aritméticas – e as grandezas contínuas, desse modo proporcionando a quadratura de curvas. Após fornecer a regra geral para progressão que começa com a unidade, expõe seu ponto de vista dizendo:

Não me deterei em outros casos, porque não é aqui o lugar de estudá-los. Ser-me-á suficiente ter enunciado, de passagem, as regras precedentes. Descobrir-se-ão os outros sem dificuldade, apoiando-se sobre o princípio que *não se aumenta uma grandeza contínua quando se lhe ajunta, no número que se deseje, grandezas de uma ordem de infinitude inferior*. Assim, os pontos nada ajuntam às linhas, as linhas às superfícies, as superfícies aos sólidos; ou – para falar de números como convém em um tratado aritmético – as raízes não contam em relação aos quadrados, os quadrados em relação aos cubos e os cubos em relação às quarta-potências. De modo que se deve desprezar, como nulas, as quantidades de ordem inferior.

Desejei juntar essas poucas observações, familiares àqueles que praticam com os indivisíveis, a fim de fazer ressaltar a ligação, sempre admirável, que a natureza, apaixonada pela unidade, estabelece entre as coisas mais distanciadas na aparência. Ela aparece neste exemplo, em que vemos o cálculo de *dimensões de grandezas contínuas* ligar-se à *soma de potências numéricas*.¹⁷⁶

Como se pode ver, Pascal estabeleceu a relação entre as grandezas contínuas e as potências numéricas. Discutiremos mais adiante essa última relação.

Escrevamos em termos algébricos o que queria dizer com a soma de linhas está para o quadrado da maior assim como 1 está para 2.

$$\frac{\sum_{j=1}^n j}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

Da mesma maneira, a soma dos quadrados das mesmas linhas está para o cubo da maior como 1 está para 3. E, a soma dos cubos está para a quarta-potência da maior como 1 está para 4. Temos respectivamente,

$$\frac{\sum_{j=1}^n j^2}{n^3} = \frac{1}{3}, \quad \frac{\sum_{j=1}^n j^3}{n^4} = \frac{1}{4}.$$

¹⁷⁶ PASCAL, 1908, p. 367.

Seguindo a generalização de sua regra,

$$\frac{\sum_{j=1}^n j^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1} \dots (3)$$

Em linguagem moderna (3) é equivalente a $\int_0^n j^p dj = \frac{n^{p+1}}{p+1}$.

Se essa foi a maneira como Pascal interpretou a área sob curvas, e de acordo com

a regra que possibilitou reescrevê-la como $\frac{\sum_{j=1}^n j^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$, queremos entender de que modo esse último resultado está relacionado com a equação (2).

Antes, procuremos analisar de que maneira Pascal interpretou a linguagem dos indivisíveis.

4.1.2 Os Indivisíveis em Pascal

Pascal menciona, como vimos, os indivisíveis no tratado de somas de potências numéricas. Na “Lettre de M. Dettonville a M. De Carvavi” faz uma exposição de como entende aquele conceito. Dettonville é um pseudônimo utilizado por Pascal, como já nos referimos no capítulo II. Os indivisíveis são, então, interpretados, não como Cavalieri os concebia, a saber, o indivisível do sólido é o plano, do plano é a reta, da reta é o ponto. Para Cavalieri, como vimos no capítulo III, é necessário que os indivisíveis tenham uma dimensão a menos do que o objeto geométrico do qual se fala.

Para Pascal os indivisíveis são concebidos da mesma maneira como o faz Roberval. Este considerou uma superfície constituída de pequenos pedaços de superfícies e um sólido de pequenos sólidos.¹⁷⁷ Desse modo, Pascal concebeu os indivisíveis como elementos que compõe o objeto geométrico possuindo tantas dimensões quanto o próprio objeto possuísse.¹⁷⁸

¹⁷⁷ BOYER, 1959, p. 141-2.; BARON, 1985, p. 18-21.

¹⁷⁸ KOYRÉ, 1982, p. 354; BOYER, 1959, p.151. Koyré afirma que Pascal parece não ter “compreendido o sentido profundo das concepções de Cavalieri” dos indivisíveis, por isso adotou as concepções de Roberval.

Falemos mais sobre a compreensão de Pascal relativa aos indivisíveis. Em um primeiro momento nos diz que “aqueles que estão, um pouco que seja, ao corrente com a doutrina dos *indivisíveis* não deixarão de ver que partido se pode tirar dos resultados precedentes [somas de potências numéricas] para a determinação de áreas curvilíneas”.¹⁷⁹ “Pontos nada adicionam a linhas, linhas às superfícies, e as superfícies a sólidos.” Para Koyré (1982) isto que Pascal expõe nada mais são do que os princípios formais da geometria, e que sempre foram conhecidos, não tendo novidade para os geômetras, a não ser que se apresente o problema com o contínuo¹⁸⁰. Quando Pascal, usando o pseudônimo de Dettonville, escreve a carta a Carcavi, diz:

Queria fazer esta advertência para mostrar que tudo isto que é demonstrado pelas reais regras dos indivisíveis se demonstrará também com o rigor e à maneira dos antigos; e que assim um desses métodos não difere do outro senão na maneira de falar: isso não pode ofender as pessoas que raciocinam quando se lhes advertiu uma vez do que se intenciona por aquilo.

E é porque não tenho nenhuma dificuldade no que segue em usar dessa linguagem dos indivisíveis, a soma de linhas, ou a soma de planos, e assim quando considerar por exemplo o diâmetro de um semicírculo [ver figura 1] dividido em um número indefinido de partes iguais aos pontos Z, de onde sejam conduzidas as ordenadas ZM, não encontrarei nenhuma dificuldade em usar dessa expressão, a soma de ordenadas, que parece não ser geométrica àqueles que não entendem a doutrina dos indivisíveis, e que se imaginam que é pecar contra a geometria exprimir um plano por um número indefinido de linhas, o que não resulta senão de lhe faltar compreensão, pois que se não entende outra coisa por aquilo a não ser a soma de um número indefinido de retângulos feitos de cada ordenada com cada uma das pequenas porções iguais do diâmetro, do qual a soma é certamente um plano, que não difere do espaço do semicírculo a não ser por uma quantidade menor que qualquer uma dada.¹⁸¹

Assim, o entendimento de Pascal é de compor a área da região do semicírculo (ver fig.1) como a soma de ordenadas, que em seu ponto de vista nada mais são do que a soma de infinitos retângulos. Se para Pascal as linhas, ou ordenadas, são os indivisíveis, e os concebe como infinitos retângulos compondo o objeto que se estuda, então podemos o interpretar que os entende como infinitesimais (infinitamente pequeno)?

¹⁷⁹ PASCAL, 1908, p. 365.

¹⁸⁰ “Nesse caso, o princípio, expresso por Pascal, não deve ser tomado ao pé da letra, pois é certo que, retirando um ponto de uma linha e mesmo de um espaço, alguma coisa se retira e aí se produz um buraco. Poder-se-ia muito bem transpor essa relação entre Deus e a criatura e atribuir a esta última, incapaz de acrescentar alguma coisa à ação divina, a capacidade de preservar-lhe a integridade ou, ao contrário, nela produzir um furo pontual.”(KOYRÉ, 1982, p. 367, n. 23).

¹⁸¹ PASCAL, 1963, p.135.

Depois de Pascal fazer a decomposição geométrica da figura, faz o cálculo dos retângulos encontrados. A soma das ordenadas ZM fornecerá a equivalência da área do semicírculo.

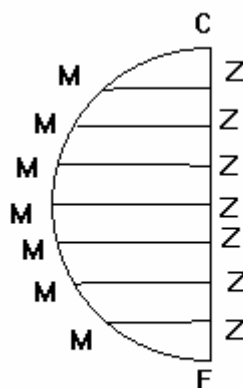


Figura 1

Talvez, outra influência considerável em Pascal seja Andreas Tacquet. Este sustentara, como vimos, que o contínuo era composto de elementos geométricos de mesma dimensão – *homogenea* –, a saber, um sólido de pequenos sólidos, uma superfície de pequenas superfícies, e uma linha de pequenas linhas, e não de magnitudes *heterogenea*. Para Tacquet a magnitude pode ser esgotada como os antigos o faziam, isto é, inscrevendo nelas quantidades *homogenea*.¹⁸²

Seja qual for a influência sobre Pascal, podemos notar que sua concepção de composição de magnitudes é feita com magnitudes de mesma ordem.

[...] seja a magnitude irregular ou não, o primeiro processo geométrico consiste em substituí-la por porções ‘regulares’; em outras palavras, substituem-se as porções da curva por suas cordas ou arcos, as da trilínea pelos retângulos construídos sobre porções iguais sobre seu eixo e as ordenadas, [...].¹⁸³

¹⁸² BOYER, 1959. p. 140.

¹⁸³ LORENZO, 1985, p. 103.

4.1.3 Cálculo de áreas

A nossa proposta anterior é a busca pelo entendimento da relação entre

$\frac{\sum_{j=1}^n j^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$ e a equação (2) que foi encontrada a partir da regra para a soma de

potências numéricas, sendo escrita como:

$$(k+1)^{p+1} = C_{p+1}^1 \sum_{j=1}^k j^p + C_{p+1}^2 \sum_{j=1}^k j^{p-1} + C_{p+1}^3 \sum_{j=1}^k j^{p-2} + \dots + C_{p+1}^p \sum_{j=1}^k j + (1+k).$$
 Essa equação

pode ter possibilitado a Pascal trabalhar da seguinte maneira¹⁸⁴:

Seja a curva limitada pela equação $y = x^5$. Façamos $x = a$. Esse eixo das abscissas contém um número infinito de pontos que podem ser considerados como estando em uma progressão aritmética natural.¹⁸⁵ Esses pontos estão representando os indivisíveis que constituem a área sob a curva. A figura 2 forma uma trilha.

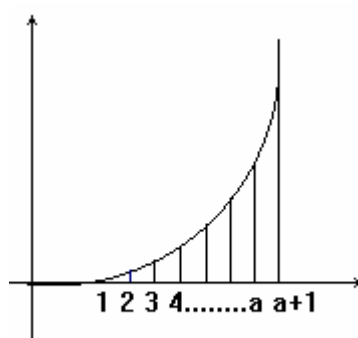


Figura 2

As linhas sob a curva são as ordenadas que podem ser vistas como o que Pascal chama de indivisíveis (levando-se em consideração o que ele entende por indivisível). O ponto $a + 1$ tem o significado de que foi tomado um indivisível a mais para constituir a área sob a curva. No entanto, ao tomar esse indivisível, notemos que ele nada acrescenta ao ponto a , ou seja, $a + 1$ (sendo que o número 1 representa o indivisível) é o próprio a .

¹⁸⁴Encontramos em Boyer (1943, p. 241) uma interpretação diferente da nossa a respeito de “um número infinito de pontos.” Para Boyer a é infinito.

¹⁸⁵ Para Boyer tanto Fermat quanto Pascal enfatizaram que seus resultados poderiam ser usados para quadrar curvas em vez de utilizá-los como uma proposição da aritmética. (1943, p. 240).

Pascal estende a regra das grandezas numéricas para as grandezas contínuas: “SE, ENTÃO, ESTENDEMOS ÀS QUANTIDADES CONTÍNUAS OS RESULTADOS ENCONTRADOS PARA OS NÚMEROS, PELO MÉTODO EXPOSTO ACIMA, PODEREMOS ENUNCIAR AS REGRAS SEGUINTE.”¹⁸⁶ As “regras” já foram expostas anteriormente e agora serão relacionadas com a última equação. Essas justificativas, dadas por Pascal, permite que pensemos o seguinte: $k = a$ é qualquer número real e passa a ser entendido como o *número de indivisíveis*.

Na equação abaixo, de acordo com as afirmações Pascal, as quantidades de ordem inferior serão desconsideradas: “*não se aumenta uma grandeza contínua quando se lhe ajunta, no número que se deseje, grandezas de uma ordem de infinitude inferior [...]* De modo que se deve desprezar, como nulas, as quantidades de ordem inferior”¹⁸⁷.

$$(a+1)^6 = 6 \cdot \sum_{j=1}^a j^5 + \underbrace{15 \cdot \sum_{j=1}^a j^4 + 20 \cdot \sum_{j=1}^a j^3 + 15 \cdot \sum_{j=1}^a j^2 + 6 \cdot \sum_{j=1}^a j + (a+1)}_{\text{negligenciadas}}$$

Teremos então:

$$6 \cdot \sum_{j=1}^a j^5 = (a+1)^6$$

Onde a última igualdade segue-se pelo fato: $a + 1$ (indivisível) = a .

Com isso, percebemos a relação entre as regras estabelecidas. Esse último resultado nada mais é do que: “a soma das quintas potências de um certo número de linhas está para a potência de grau imediatamente superior da maior entre elas como 1 está para 6.”

$$\frac{\sum_{j=1}^a j^5}{a^6} = \frac{1}{6}.$$

¹⁸⁶ PASCAL, 1908, p. 365.

¹⁸⁷ PASCAL, 1908, p.367.

Hoje sabemos que esse valor $\frac{a^6}{6}$ é o limite de toda seqüência de somas de

Riemann associados a $y = x^5$ de $[0, a]$ que, por sua vez, define a integral $\int_0^a x^5 dx$. Como

Pascal obtém na relação $\frac{\sum_{j=1}^a j^p}{a^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$ para todo p , temos

$$\sum_{j=1}^a j^p = \frac{a^{p+1}}{p+1} = \int_0^a x^p dx$$

É preciso ter em mente que estamos interpretando algebricamente o que Pascal expôs retoricamente. Mas pode-se notar que em termos algébricos-simbólicos a regra geral de soma de potências numéricas, depois de desprezarmos as potências de ordem inferior, equivale a última regra geral relativa a “A SOMA DAS MESMAS POTÊNCIAS DE UM CERTO NÚMERO DE LINHAS ESTÁ PARA A POTÊNCIA DE GRAU IMEDIATAMENTE SUPERIOR DA MAIOR ENTRE ELAS, COMO A UNIDADE ESTÁ PRA O EXPOENTE DESSA MESMA POTÊNCIA.”¹⁸⁸

Posto isso, fica claro o elo que ele estabelece entre o “discreto” e o “geométrico”.

Desejei juntar essas poucas observações, familiares àqueles que praticam com os indivisíveis, a fim de fazer ressaltar a ligação, sempre admirável, que a natureza, apaixonada pela unidade, estabelece entre as coisas mais distanciadas na aparência. Ela aparece neste exemplo, em que vemos o cálculo de *dimensões de grandezas contínuas* ligar-se à *soma de potências numéricas*.¹⁸⁹

As ordenadas que ele soma, ou as linhas que diz ser os indivisíveis, nada mais são do que pequenos retângulos. Parece interpretar os indivisíveis, realmente, como os infinitesimais. Para ele: “Um indivisível é o que não tem parte alguma, e a extensão é o que tem diversas partes separadas.”¹⁹⁰

¹⁸⁸ PASCAL, 1908, p. 365.

¹⁸⁹ PASCAL, 1908, p. 367.

¹⁹⁰ PASCAL, 2003, p. 35.

4.2 Tratado do Triângulo Aritmético

A necessidade de analisarmos esse tratado está intimamente ligada ao próximo tópico. Nele são apresentados relações do processo de integração com o triângulo aritmético. Sendo assim, vamos expor como é construído o triângulo relatando quatro das dezenove conseqüências encontradas.

Pascal inicia esse tratado com *definições*, necessárias para construir o triângulo aritmético.

A partir de qualquer ponto G, traço duas linhas perpendiculares uma a outra, GV, Gζ, em cada uma das quais tomo como partes iguais e contíguas como se quiser, começando com G, que eu enumero 1, 2, 3, 4, etc., e estes números são os *expoentes* das seções das linhas.

A seguir conecto os pontos da primeira seção em cada uma das duas linhas por outra reta, que é a *base* do triângulo resultante.

Da mesma maneira conecto os dois pontos da segunda seção por outra reta, formando um segundo triângulo do qual a reta é a base.

E deste modo conectando todos os pontos da seção com o mesmo expoente, construo tantos triângulos e bases quanto existirem expoentes.

Através de cada um dos pontos da seção e paralelo aos lados traço linhas cujas intersecções formam pequenos quadrados que chamo de *células*.

Células entre duas paralelas traçadas da esquerda para direita são chamadas *células da mesma coluna paralela*, como, por exemplo, as células G, σ, π, etc., ou φ, ψ, θ, etc.

Aquelas entre duas linhas traçadas do alto a baixo são chamadas *células da mesma coluna perpendicular*, como, por exemplo, as células G, φ, A, D, etc., ou σ, ψ, B, etc.

Aquelas cortadas diagonalmente pela mesma base são chamadas *células de mesma base*, como, por exemplo, D, B, θ, λ, ou A, ψ, π.¹⁹¹ (ver fig. 3).

¹⁹¹ PASCAL, p. 447-8.

z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	φ	ψ	θ	κ	ι	ν	7	8	9	
3	A	B	C	ω	ε	21	28	36		
4	D	E	F	P	γ	56	84			
5	H	λ	K	35	70	126				
6	P	ε	21	56	126					
7	v	7	28	84						
8	1	8	36							
9	1	9								
10	1									

Figura 3

As diagonais do triângulo aritmético são os coeficientes binomiais do desenvolvimento de um binômio.¹⁹²

Pascal prossegue explorando relações entre as células do triângulo. Por exemplo, afirma que as células de mesma base e equidistantes dos extremos são recíprocas, como *E* que está na segunda coluna perpendicular e na quarta paralela, e *R* que se encontra na quarta coluna perpendicular e na segunda paralela. Com isso, as células cujos expoentes são recíprocos e estando na mesma base, seus respectivos números também serão iguais. No caso da célula *E* ela encontra-se na posição (4; 2), isto é, o número quatro simboliza a quarta coluna e o número dois a segunda.

Argumenta que a unidade que se dispõe na primeira célula é o gerador do triângulo. Esse número é arbitrário, todas as células do triângulo aritmético são conseqüências do número gerador. E as outras células são encontradas de acordo com a regra: “o número de cada célula é igual à soma dos números das células perpendiculares e paralelas imediatamente precedentes. Assim, a célula *F*, isto é, o número da célula *F*, é igual a soma da célula *C* e célula *E*, e similarmente com o resto.”¹⁹³

¹⁹² Para esse assunto Pascal fez um estudo titulado: *Uso do Triângulo Aritmético para encontrar as potências de Binômios*. Além de relacionar o triângulo aritmético com o processo de integração faz conexão com a teoria das probabilidades.

¹⁹³ PASCAL, p. 448.

Depois disso, enuncia as conseqüências que podem ser obtidas ao analisar o triângulo aritmético. Mencionaremos quatro delas, a fim de entendermos como foram estruturadas.

4.2.1 Conseqüências do Triângulo Aritmético

PRIMEIRA CONSEQÜÊNCIA

*Em todo triângulo aritmético todas as células da primeira coluna paralela e da primeira coluna perpendicular são as mesmas que a célula geradora.*¹⁹⁴

Pascal mostra a veracidade dessa afirmação da seguinte maneira:

$$\phi = G + 0, \text{ isto é, } \phi = G$$

$$A = \phi + 0, \text{ isto é, } \phi.$$

$$\sigma = G + 0, \text{ e } \pi = \sigma + 0.$$

Segue o mesmo raciocínio para as células restantes.

SEGUNDA CONSEQÜÊNCIA

*Em todo triângulo aritmético cada célula é igual à soma de todas as células da coluna paralela precedente de sua própria coluna perpendicular à primeira, inclusive.*¹⁹⁵

Seja tomada uma célula qualquer, ω . De fato, ω é igual a R mais C; e C é $\theta + B$; B é $\psi + A$; e por fim A é igual a ϕ . Desse modo,

$$\omega = R + \theta + \psi + \phi.$$

TERCEIRA CONSEQÜÊNCIA

*Em todo triângulo aritmético cada célula é igual à soma de todas as células da coluna perpendicular precedente de sua própria coluna paralela à primeira, inclusive.*¹⁹⁶

¹⁹⁴ PASCAL, p. 448.

¹⁹⁵ PASCAL, p. 448.

Seja tomada qualquer célula, por exemplo, C. Sabe-se que essa célula, conforme conseqüência anterior, é igual a $B + \theta$; por sua vez $\theta = \psi + \pi$; e $\pi = \sigma$ (pela primeira conseqüência). Portanto, temos que

$$C = B + \psi + \sigma.$$

Analisaremos agora a décima segunda conseqüência.

DÉCIMA SEGUNDA CONSEQÜÊNCIA

*Em todo triângulo aritmético, de duas células contíguas na mesma base a superior está para a inferior como o número de células da superior até o topo da base está para o número das células da inferior até o fim da base, inclusive.*¹⁹⁷

Para mostrar essa conseqüência, assim como as outras, tomou o exemplo que segue.

Sejam tomadas quaisquer duas células contíguas da mesma base E, C. Digo que¹⁹⁸:

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{E} & : & \underline{C} & :: & \underline{2} & : & \underline{3} \\ \text{(a inferior)} & & \text{(a superior)} & & \text{(porque há duas células} & & \text{(porque há três} \\ & & & & \text{de E até o fundo,} & & \text{células de C até o topo,} \\ & & & & \text{isto é E, H.)} & & \text{isto é C, R, } \mu \text{)} \end{array}$$

Embora a proposição tenha uma infinidade de casos, Pascal demonstra muito rapidamente supondo dois lemas:

O primeiro, é evidente por si só, que esta proporção é encontrada na segunda base, pois é perfeitamente óbvio que $\phi : \sigma :: 1 : 1$;

O segundo, que se esta proporção é encontrada em qualquer base, ela necessariamente será encontrada na base seguinte.

Do que é aparente que é necessariamente em todas as bases. É na segunda base pelo primeiro lema; portanto pelo segundo lema é na terceira base, portanto é na quarta, e assim para infinidade.¹⁹⁹

¹⁹⁶ PASCAL, p. 448.

¹⁹⁷ PASCAL, p. 451.

¹⁹⁸ PASCAL, p. 451.

Depois disso, Pascal aponta que basta então demonstrar o segundo lema, ou seja, esse garantirá a veracidade para as demais bases.

Se esta proporção é encontrada em qualquer base, como, por exemplo, na quarta, $D\lambda$, isto é, se $D : B :: 1 : 3$, e $B : \theta :: 2 : 2$, e $\theta : \lambda :: 3 : 1$, etc, Digo que a mesma proporção será encontrada na base seguinte, $H\mu$, e que, por exemplo $E : C :: 2 : 3$.

Pois $D : B :: 1 : 3$, pela hipótese.

Portanto $(D + B) : B :: (1 + 3) : 3$

$[(D + B)=E] : B :: [(1 + 3)=4] : 3$

Similarmente $B : \theta :: 2 : 2$, por hipótese

Portanto $(B + \theta) : B :: (2 + 2) : 2$

$[(B + \theta)=C] : B :: [(2 + 2)=4] : 2$

mas $B : E :: 3 : 4$

Portanto, compondo as razões, $C : E :: 3 : 2$ C. Q. D.

Ou seja, pode-se perceber que a mesma demonstração será feita para as demais bases, isto é, esse resultado é estendido a todas as bases do triângulo aritmético pelo fato de que cada célula é formada pela adição de duas células, como: $E = B + D$.

Pascal segue enunciando mais sete conseqüências do triângulo aritmético e finaliza o tratado com um problema.

PROBLEMA

*Dados os expoentes perpendicular e paralelo de uma célula, encontrar seu número sem fazer uso do triângulo aritmético.*²⁰⁰

Para solucionar esse problema é tomada a célula ξ que se encontra na quinta coluna perpendicular e na terceira paralela. O objetivo é achar o número 15 correspondente à célula desejada.

Para isso, é necessário tomar todos os números que precedem o expoente perpendicular 5, ou seja, 1, 2, 3, e 4. O segundo passo é tomar a mesma quantidade de números naturais, porém iniciando com o número 3 que é o expoente da terceira coluna paralela, ou seja, 3, 4, 5, e 6.

¹⁹⁹ PASCAL, p. 452.

²⁰⁰ PASCAL, p. 454.

Depois, são multiplicados os números 1, 2, 3, e 4, obtendo como produto 24, bem como os números 3, 4, 5, e 6, tendo como produto 360. Esse último é dividido por 24 e terá como quociente 15, a saber, o número desejado.

Pois ξ está para a primeira célula de sua base, V, na razão combinada de todas as razões das células entre, quer dizer, $\xi : V$ na razão composta de $\xi : \rho$, $\rho : K$, $K : Q$, $Q : V$ ou pela décima segunda consequência 3 : 4; 4 : 3; 5 : 2; 6 : 1.

Portanto $\xi : V :: 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 :: 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Mas V é unidade; então ξ é o quociente da divisão do produto de 3·4·5·6 pelo produto de 4·3·2·1.⁽²⁰¹⁾

O quociente 15 nada mais é do que C_6^4 . Porém, Pascal utiliza razões entre as células, determinando-as de acordo com suas posições na base de cada triângulo analisado (conforme a décima segunda consequência). Finaliza o problema com uma nota dizendo que se o gerador fosse outro número diferente da unidade, então seria necessário multiplicar o quociente pelo respectivo gerador. Também garante a possibilidade de ser encontradas outras consequências além daquelas que estabeleceu.

4.2.2 Uso do Triângulo Aritmético para as ordens numéricas

Pascal está interessado em fazer uso do triângulo aritmético e para isso procura estabelecer relações entre as colunas do triângulo nomeando-as como *ordens*:

Os *números da primeira ordem* são as unidades: 1, 1, 1, 1, 1, etc.

Os *números da segunda ordem* são os números naturais 1, 2, 3, 4, 5, etc. Os números da segunda ordem podem ser compostos como: $1 = 1$; $2 = 1 + 1$; $3 = 1 + 1 + 1$; e assim por diante.

Os *números da terceira ordem*, também chamados de números triangulares, são 1, 3, 6, 10, etc. São formados pela adição dos números naturais, seguindo a ordem: $1 = 1$; $3 = 1 + 2$; $6 = 1 + 2 + 3$; e assim por diante.

Os *números da quarta ordem*, também chamados de números piramidais, são 1, 4, 10, 20, etc. são formados adicionando os números triangulares, seguindo a ordem: $1 = 1$; $4 = 1 + 3$; $10 = 1 + 3 + 6$; e assim por diante.

²⁰¹ PASCAL, p. 454.

Os *números da quinta ordem* são 1, 5, 15, 35, etc. A formação deles é semelhante aos outros casos. Esses números poderiam ser chamados, segundo Pascal, de triângulo-triangulares.

Segue o mesmo raciocínio para as demais ordens. Com isso, reescreve o triângulo aritmético como uma tábua aritmética

RAÍZES						
	1	2	3	4	5	etc.
Unidades.....ordem 1	1	1	1	1	1	etc.
Números naturais.....ordem 2	1	2	3	4	5	etc.
Números triangulares.....ordem 3	1	3	6	10	15	etc.
Números piramidais.....ordem 4	1	4	10	20	35	etc.
						etc.

Pascal reescreveu o triângulo na forma da tábua acima e segue apresentando exemplos de como analisá-la aritmeticamente.

O que faz conhecer que tudo que foi dito sobre as colunas e as células do triângulo aritmético convém exatamente às ordens dos números, e que as mesmas igualdades e as mesmas proporções que foram observadas em uns encontrarão também nos outros. Precisamos somente mudar os enunciados substituindo os termos que convêm às ordens numéricas, como aquele de raiz e ordem, por aqueles que convinhem ao triângulo aritmético, tal como colunas paralelas e perpendiculares.²⁰²

O intuito disso é fazer referência às progressões numéricas descritas anteriormente. Como vimos, faz um tratamento da tábua (ou do triângulo) com as progressões numéricas explicando como são compostas: *números naturais (segunda ordem)*, *números triangulares (terceira ordem)* e *números piramidais (quarta ordem)*. São essas as progressões que serão relacionadas com o processo de integração.

²⁰² PASCAL, 1993, p. 456.

4.3 LETTRE DE M. DETTONVILLE A M. DE CARCAVI²⁰³

4.3.1 Centros de gravidade

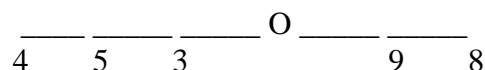
Neste t3pico, analisaremos parte de um tratado enviado como carta de Pascal com o pseud3nimo de Dettonville, a Carcavi, onde apresenta o m3todo que usou para resolver problemas de integra33o.

Inicia-o mostrando o m3todo da balança, parecido com o da alavanca de Arquimedes, cuja finalidade 3 encontrar o centro de gravidade de figuras geom3tricas. Eis como procedeu com o m3todo da balança:

Se ent3o h3 tantas quantidades quanto se queira, tomando, por exemplo, as quantidades A, B, C e D do seguinte modo: “primeiramente, a soma de todas A, B, C, D; depois a soma das mesmas, exceto a primeira, a saber, B, C, D; depois a soma das mesmas exceto as duas primeiras, a saber, C, D; e assim sempre, como se v3 aqui marcadas.”²⁰⁴

ABCD
BCD
CD
D

Essa soma de quantidades 3 chamada como a soma triangular, come3ando pelo lado de A; ela poderia come3ar por D, embora n3o levasse o mesmo resultado. A fim de compreendermos a estrutura da soma triangular analisemos a balança abaixo, tendo O como ponto de apoio. Seus bra3os est3o divididos em partes iguais, em ambos os lados, com pesos suspensos em cada ponto de divis3o. No bra3o do lado esquerdo est3o os pesos s3o 4, 5 e 3 respectivamente, no bra3o direito, est3o 9 e 8.



Assim, haver3 equil3brio se e semente se as somas triangulares de um lado for igual 3 do outro, come3ando em O. Isto 3, se a balança acima estiver em equil3brio teremos que:

²⁰³ Carta do Sr. Dettonville ao Sr. De Carcavi.

²⁰⁴ PASCAL, 1963, p. 131.

$$\sum_{i=1}^n P_i \cdot x_i = \sum_{j=1}^m P_j \cdot x_j$$

Pascal irá propor um método para estabelecer o mesmo momento entre os braços da balança. Antes disso, vejamos o lema abaixo:

Se as quatro quantidades A, B, C, D, são tomadas desse modo; a primeira uma vez, a segunda duas vezes, a terceira três vezes, etc., digo que a soma dessas quantidades tomadas desse modo é igual a sua soma triangular começando do lado A.

DCBA	ABCD
4 3 2 1	BCD
	CD
	D

[Demonstração]²⁰⁵

Porque tomando-se sua soma triangular, não se faz outra coisa que combiná-las desse modo, que se toma A uma vez, B duas vezes, C três vezes, etc.²⁰⁶

Com esse lema conclui-se que o momento de um braço é igual à soma triangular começando pelo apoio. Portanto, a balança está em equilíbrio quando as somas triangulares dos pesos de cada braço, ambos começando em O, são iguais.

Ou seja, o peso 4 tem força tripla; o peso 5 tem força dupla; o peso 3, que está a uma distância “um” de A, tem força singular. Do mesmo modo, no outro lado da balança, o peso 8 tem força dupla e o peso 9, do mesmo modo que o peso 3, tem força singular. As somas triangulares desses pesos são dadas por:

3 5 4	9 8
5 4	8
4	—
—	25
25	

Continua o tratado enunciando uma advertência relativa à balança, enunciando esta propriedade:

²⁰⁵A demonstração dada por Pascal é sempre para um exemplo. Não é como fazemos hoje para um caso geral.

²⁰⁶PASCAL, p. 131.

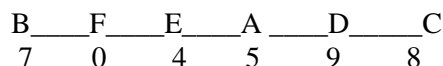
Entendo sempre que as duas extremidades da balança passam por pontos de divisão; e assim quando digo que os pesos sejam pendurados em todos os pontos de divisão, entendo que existam deles também nas duas extremidades da balança.

Entendo também que o braço AB possa ser igual ou desigual ao outro braço AC, e que cada uma das partes iguais do braço AB seja igual a cada uma das partes iguais do braço AC, e que as partes de um braço não difiram das partes do outro braço senão pela sua quantidade.²⁰⁷

Dessa propriedade *demonstra* três proposições.

Proposição I

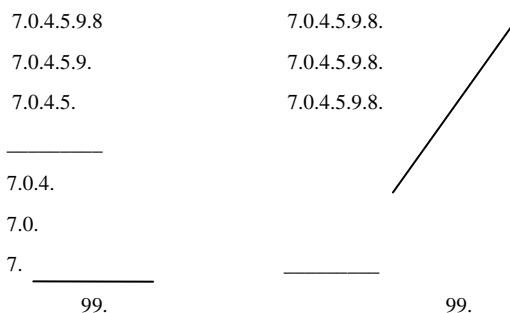
Seja CAB uma balança dividida em tantas partes iguais quantas se queira nos pontos C, D, A, E, F, B, nos quais estejam



pendurados os pesos 8, 9, 5, 4, 0, 7 respectivamente; do conjunto de todos os quais juntos o centro de gravidade comum esteja no ponto A (um desses pontos).

Digo que a soma triangular de todos esses pesos, a começar do lado que se queira, por exemplo do lado C, isto é, a soma triangular dos pesos 8, 9, 5, 4, 0, 7 é igual a soma simples desses pesos, 8, 9, 5, 4, 0, 7 (isto é, a soma desses pesos tomando cada um uma vez), multiplicada tantas vezes quantos pontos haja no braço CA. (porque se começou pelo lado C), isto é, três vezes nesta figura.²⁰⁸

Ou seja, temos a soma triangular e a soma simples multiplicada por três (o braço AC possui três pesos).



[Demonstração]

²⁰⁷PASCAL, p. 132.

²⁰⁸PASCAL, p. 132.

Porque a soma triangular dos pesos 4, 0, 7, pendurados no braço AB (que é distinta do resto por uma barra na primeira parte da figura), é igual à pequena soma triangular dos pesos, 9, 8, pendurados no outro braço AC (que é também distinta do resto na outra parte da figura). E os restos são os mesmos de um lado e do outro.²⁰⁹

Em termos modernos essa proposição pode ser escrita como:

$$\sum_{i=1}^n P_i \cdot x_i = \sum \Delta_{BC} \text{ (soma triangular começando em BC)} \dots (1)$$

Desse modo,

$$P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + \dots + P_6 \cdot x_6 = \sum \Delta_{BC} \dots (2)$$

Reescrevamos a equação (2).

$$P_1 \cdot (x_1 - 3) + 3 \cdot P_1 + P_2 \cdot (x_2 - 3) + 3 \cdot P_2 + \dots + P_6 \cdot (x_6 - 3) + 3 \cdot P_6 = \sum \Delta_{BC} \dots (3)$$

Na equação (3) seguimos o enunciado da proposição, pois a soma dos pesos é referente ao braço AC da balança.

Ou seja,

$$3 \cdot \sum_{i=1}^6 P_i + \sum_{i=1}^6 P_i \cdot (x_i - 3) = \sum \Delta_{BC} \dots (4)$$

Onde,

$$\sum_{i=1}^6 P_i \cdot (x_i - 3) \dots (5)$$

a expressão (5) é identificada na proposição acima como soma triangular de 4, 0, 7 do braço BA e a soma triangular do outro braço CA, 9 e 8. Isto é, atribuindo valores para x : $x = 1, \dots, 6$. teremos que a expressão (5) é nula, restando apenas a soma dos pesos multiplicada pelo número de pesos do braço CA, a saber, igual a soma triangular da balança BC.

Proposição II

²⁰⁹ PASCAL p. 132.

Digo que a soma simples dos pesos, multiplicada tantas vezes quantos os pontos em toda balança, está para a soma triangular de todos os pesos, a começar pelo lado que se queira, por exemplo, pelo lado C, como o número de pontos que estão na balança toda para o número de pontos que estão no braço por onde se começa a contar, isto é, (nesse exemplo) no braço CA.

7.0.4.5.9.8.	7.0.4.5.9.8.
7.0.4.5.9.	7.0.4.5.9.8.
7.0.4.5.	7.0.4.5.9.8.
7.0.4.	7.0.4.5.9.8.
7.0.	7.0.4.5.9.8.
7.	7.0.4.5.9.8.
99.	198.

Digo que a soma triangular, 99, está para a soma dos pesos multiplicada por sua quantidade, 198, como a quantidade de pontos do braço CA, a saber 3, para a quantidade de todos os pontos, a saber, 6.

[Demonstração]

Porque (na figura) a soma triangular de todos os pesos é igual (pela precedente) a simples soma dos pesos multiplicada pela quantidade de pesos que estão no braço AC, e que estão aqui acima da barra. Ora, a soma dos pesos, multiplicada por essa quantidade de pontos do braço AC, está visivelmente para a mesma soma dos pesos, multiplicada pela quantidade de pontos da balança toda, como uma dessas quantidades está para a outra.²¹⁰

Eis como pode ser entendida em termos de razões a proposição acima:

$$\frac{n \cdot \sum_{i=1}^n P_i}{\sum \Delta_{BC}} = \frac{n(\text{números de pontos da balança})}{n(\text{número de pontos do braço C})}$$

Onde n , na primeira parte da razão, é o número de pontos da balança.

Proposição III

As mesmas coisas sendo postas: digo que a soma triangular dos pesos, a começar por um dos lados, como pelo lado C, está para a soma triangular dos mesmos pesos, a começar pelo outro lado B, como o

²¹⁰ PASCAL, p. 132-3.

número de pontos que estão no braço AC, por onde se começou a primeira vez, para o número de pontos que estão no braço BA, por onde se começou a segunda vez.

$$\begin{array}{r}
 7.0.4.5.9.8. \\
 7.0.4.5.9. \\
 7.0.4.5. \\
 7.0.4. \\
 7.0. \\
 7. \\
 \hline
 99.
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 7.0.4.5.9.8. \\
 0.4.5.9.8. \\
 4.5.9.8. \\
 5.9.8. \\
 9.8. \\
 8. \\
 \hline
 132.
 \end{array}$$

Digo que a soma triangular 99, começando por 8, está para a outra soma triangular 132, começando por 7, como a quantidade dos pesos do braço 8, a saber 3, para a quantidade de pesos do outro braço 7, a saber 4.

[*Demonstração*]

Porque cada uma dessas somas triangulares está (pela precedente) para a simples soma de todos os pesos multiplicados por sua quantidade como a quantidade de pontos de cada braço para a quantidade de todos os pontos da balança toda. Logo, etc.²¹¹

Isto é, as razões são feitas entre as somas triangulares.

$$\frac{\sum \Delta_c}{\sum \Delta_B} = \frac{n(\text{número de pontos do braço } C)}{n(\text{número de pontos do braço } B)}$$

Pascal estabelece relações entre somas triangulares e simples para encontrar, por meio de uma razão, o equilíbrio da balança. Ainda mais, estende essas relações para outros tipos de grandezas, como linhas curvas, superfícies planas e curvas, bem como para sólidos.

Desse modo, é dada uma trilha (ver fig. 4), formada da seguinte maneira: uma linha curva CB dividida, o tanto quanto se queira, em partes iguais ou desiguais nos pontos I, G e F. Far-se-á agora a soma triangular das porções CI, IG, GF e FB, começando do lado C. Assim é necessário tomar, primeiro, toda a CFB, mais a porção IFB, mais a porção GFB, mais a porção FB.

²¹¹ PASCAL, p. 133.

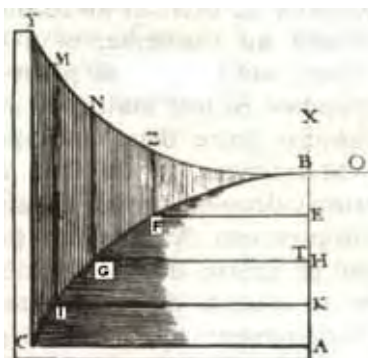


Figura 4

Para encontrar a soma triangular das porções CI, IG, GF e FB, primeiro toma-as todas juntas, depois todas exceto CI, depois todas exceto CI e IG, e assim por diante.

Soma começando pelo lado C.

$$\begin{array}{r}
 CI + IG + GF + FB \text{ ou a linha CFB} \\
 + G + GF + FB \text{ ou a linha IFB} \\
 + GF + FB \text{ ou a linha GFB} \\
 + FB \text{ ou a linha FB} \\
 \hline
 1CI + 2IG + 3GF + 4FB = CFB + IFB + GFB + FB
 \end{array}$$

Soma começando pelo lado B.

$$\begin{array}{r}
 BF + FG + GI + IC \text{ ou a linha BIC} \\
 + FG + GI + IC \text{ ou a linha FIC} \\
 + GI + IC \text{ ou a linha GIC} \\
 + IC \text{ ou a linha IC} \\
 \hline
 1BF + 2FG + 3GI + 4CI = BIC + FIC + GIC + IC
 \end{array}$$

O que está sendo feito é a soma de linhas curvas. O procedimento é o mesmo que aquele da balança mostrado anteriormente.

O mesmo raciocínio para a soma triangular das retas IK, GH e FE, que dividem a trilha CAB, será aplicado. A soma triangular das porções CIKA, IGHK, GFEH e FBE, começando pelo lado CA, é dada como segue.

$$CIKA + IGHK + GFEH + FBE \text{ ou a trilha BCA}$$

$$\begin{aligned}
 &+ IGHK + GFEH + FBE \text{ ou o espaço IBK} \\
 &+ GFEH + FBE \text{ ou o espaço GBH} \\
 &+ FBE \text{ ou o espaço FBE} \\
 \hline
 &1CIKA + 2IGHK + 3GFEH + 4FBE = BCA + IBK + GBH + FBE
 \end{aligned}$$

Depois disso, Pascal está em condições de dar um método geral para se encontrar centros de gravidades de todas as linhas, superfícies e sólidos.

Para isso, uma quantidade indefinida de planos paralelos e igualmente distanciados são determinados. Os planos cortam a grandeza proposta em várias partes iguais e incluídas por esses planos. O próximo passo é considerar três planos na grandeza proposta, dois nos extremos e o outro passando pelo centro de gravidade. Uma linha conduzida perpendicularmente de um extremo ao outro, que passa pelo centro de gravidade, fica dividida em duas porções. A linha, que mede a distância entre os planos extremos, é chamada a balança da grandeza proposta, e suas duas porções que medem a distância entre os planos extremos são conhecidas como os braços da balança. Agora pode ser estabelecida a razão entre os braços da balança com as somas triangulares:

Digo que um dos braços está para o outro (isto é, que a distância entre o centro de gravidade da figura e um dos planos extremos está para a distância entre o mesmo centro de gravidade e o outro plano extremo) como a soma triangular de todas as porções da figura, a começar pelo primeiro plano extremo, para a soma triangular dessas mesmas porções, a começar pelo outro plano extremo.²¹²

A fim de exemplificar essa última citação, várias grandezas foram propostas. Primeiramente para uma linha curva CB (ver a fig. 4), sendo cortada em um número indefinidos de partes nos pontos C, I, G, F, B, por uma quantidade indefinida de retas paralelas e com a mesma distância CA, IK, GH, FE e BO. A reta AB pode ser determinada em qualquer lugar, desde que seja perpendicular àquelas outras retas, cortando os extremos nos pontos B e A, interceptando também a reta que passa pelo centro de gravidade, nesse caso sendo marcado com o ponto T. A reta BA será a balança, enquanto TA e TB serão os braços dela.

“Digo que o braço TB estará para o braço TA como a soma triangular das porções da linha, a saber, as porções BF, FG, GI, IC, a começar do lado de B, para a soma

²¹² PASCAL, p. 134.

triangular das mesmas porções a começar do lado de C.”²¹³ Ou seja, a soma triangular começando do lado B:

$$\begin{array}{r}
 \text{BF} + \text{FG} + \text{GI} + \text{IC} \text{ ou a linha BIC} \\
 + \text{FG} + \text{GI} + \text{IC} \text{ ou a linha FIC} \\
 + \text{GI} + \text{IC} \text{ ou a linha GIC} \\
 + \text{IC} \text{ ou a linha IC} \\
 \hline
 \text{BF} + 2\text{FG} + 3\text{GI} + 4\text{CI} = \text{BIC} + \text{FIC} + \text{GIC} + \text{IC}
 \end{array}$$

Soma triangular começando do lado C:

$$\begin{array}{r}
 \text{CI} + \text{IG} + \text{GF} + \text{FB} \text{ ou a linha CFB} \\
 + \text{IG} + \text{GF} + \text{FB} \text{ ou a linha IFB} \\
 + \text{GF} + \text{FB} \text{ ou a linha GFB} \\
 + \text{FB} \text{ ou a linha FB} \\
 \hline
 1\text{CI} + 2\text{IG} + 3\text{GF} + 4\text{FB} = \text{CFB} + \text{IFB} + \text{GFB} + \text{FB}
 \end{array}$$

De acordo com a Proposição III, teremos a razão:

$$\frac{TB}{TA} = \frac{1\text{BF} + 2\text{FG} + 3\text{GI} + 4\text{CI}}{1\text{CI} + 2\text{IG} + 3\text{GF} + 4\text{FB}}$$

As outras grandezas propostas são um plano, com a trilha CBA, uma superfície curva CYZBFC e um sólido YCFBAC, para as quais são feitas as mesmas razões entre os braços e suas respectivas somas triangulares, ou seja, TB está para TA como a soma triangular dos pesos começando pelo lado de B, está para a soma triangular dos pesos começando pelo lado de C.

Pascal adverte dizendo que o processo de divisão, a saber, os pontos de divisão da balança podem ser feitos inúmeras vezes, assim surge “[...] uma nova balança que não diferirá da primeira a não ser por uma grandeza menor do que qualquer uma dada [...]”²¹⁴. Da mesma maneira “[...] o centro de gravidade da balança se encontrará ainda em uma dessas novas divisões, ou estará separado por uma distância menor que qualquer uma dada

²¹³ PASCAL, p. 134.

²¹⁴ PASCAL, p.134.

o que não mudará as razões.”²¹⁵ Então, tem-se que a proporção existirá na nova balança e conseqüentemente existirá também na outra, e assim por diante.

Ou seja, novamente está sendo feita a relação entre a grandeza discreta e contínua. Com o processo de divisão é indefinido, pode-se passar da grandeza discreta, vista nas balanças semelhantes às de Arquimedes, para as contínuas onde será considerada toda a curva, a superfície, ou o sólido em questão. Assim os pesos estarão distribuídos indefinidamente, a saber, de maneira contínua.

Ao aplicar o processo de divisão é utilizado o recurso dos indivisíveis, ou seja, os retângulos compreendidos entre as ordenadas e as porções do eixo (ver fig. 4) são pequenas porções que tem uma base, tão pequena quanto se queira, e um comprimento de acordo com a trilha. Garante que tudo o que é mostrado por meio do indivisível também pode ser mostrado com o rigor e a maneira dos antigos (pelo método de exaustão). Não vê nenhuma dificuldade em usar a linguagem dos indivisíveis. Afirma que (ver fig. 1) as ordenadas ZM, conduzidas a partir dos pontos Z até os pontos M do diâmetro, compõem os retângulos, e expressa a soma de linhas é apenas uma maneira de falar do objeto que se estuda. O que quer dizer na verdade, é que o espaço do semicírculo será formado pelas somas de todos os retângulos que o exaure. Percebamos que os pontos Z, no diâmetro CF, podem estar tão próximos quanto se queira de maneira que a base tenda a zero, tendo tantos retângulos que se queira.

Pascal enumera exemplos de como as linhas ZM (ver fig. 1) podem ser multiplicadas por outras porções, por exemplo, pelo dobro do diâmetro da figura 1, formando outro espaço; nesse caso, a soma das linhas ZM formará um espaço que será o dobro da semicircunferência, ou seja, uma semi-ellipse (ver figura 5).

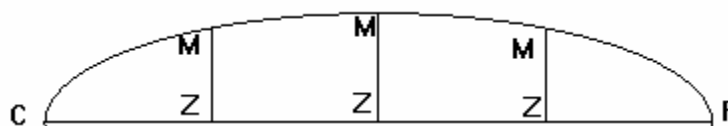


Figura 5

Com respeito a linhas curvas deve-se ter em mente, por exemplo, na figura 1 que a soma dos arcos CM é entendida como a soma de retângulos compreendidos em cada um

²¹⁵ PASCAL, p.134.

dos arcos CM “[...] estendidos em linha reta, e por cada uma das pequenas porções iguais do diâmetro ZZ, ZZ, etc.”²¹⁶

Em seguida é apresentado *o mesmo método geral para os centros de gravidades enunciado de outro modo*. Ou seja:

Uma grandeza qualquer sendo proposta, como foi dito, e a mesma ordem de planos que a corta:

Digo que a soma de todas as porções dessa grandeza compreendida entre um dos planos extremos e cada um de todos os planos está para a grandeza toda tomada tantas vezes, isto é, multiplicada por sua balança, como o braço sobre o outro plano extremo, isto é, como a distância entre seu centro de gravidade e esse outro plano extremo está para a balança.²¹⁷

Nessa citação existe a idéia de generalizar o método para encontrar centros de gravidade das grandezas discretas para as contínuas.

$$\frac{\sum \Delta_C}{CFB \cdot AB} = \frac{TA}{AB} \quad \text{ou} \quad \frac{\sum \Delta_B}{CFB \cdot AB} = \frac{TB}{AB}.$$

Eis outro modo de relacionar grandezas:

“Digo que a soma de todas as porções da grandeza compreendida entre um dos planos extremos e uma qualquer de todos os planos, é igual a grandeza toda multiplicada pelo seu braço sobre o outro plano extremo”²¹⁸

$$\sum \Delta_C = CFB \cdot TA \quad \text{ou} \quad \sum \Delta_B = CFB \cdot TB.$$

A figura 4 é dada como exemplo do enunciado acima e a linha proposta é CFB: “digo que a soma das porções CFB, IFB, GFB, FB, é igual a linha toda CFB, multiplicada pelo braço TA.”²¹⁹ Ou seja, cada uma dessas porções é equivalente, respectivamente, a soma triangular começando do lado de C, a saber, CI, IG, GF e FB. Onde a linha BA é a balança dividida em um número de partes iguais nos pontos E, H, K etc., esses pontos de divisão nada mais são do que pesos, isto é, CI, IG, GF, e FB. No ponto H encontra-se o

²¹⁶ PASCAL, p.135.

²¹⁷ PASCAL, p. 135-36.

²¹⁸ PASCAL, p.136.

²¹⁹ PASCAL, p.136.

centro de gravidade T.²²⁰ Pascal conclui, pela proposição II (“a soma triangular de todos os pesos é igual a simples soma dos pesos multiplicada pela quantidade de pesos que estão no braço”), que a soma triangular CI, IG, GF e FB é a mesma coisa que a CFB multiplicada pelo braço TA. Da mesma maneira, a soma triangular da trilha ABC começando em B, é igual ao espaço BCA multiplicado pelo braço TB. De modo análogo para os sólidos.

Tudo o que é falado a respeito das linhas CFB, IFB, GFB e FB, deve ser entendido como a soma dos retângulos compreendidos por cada uma dessas linhas com as porções BE, EH, HK e KA. Desse modo, a soma dos retângulos forma um plano. Similarmente, a soma dos espaços BCA, EFCA, HGCA e KICA são multiplicadas pelas mesmas porções BE, EH, HK e KA, formando pequenos sólidos prismáticos, de mesma altura, a soma dos quais origina um sólido.²²¹ Para multiplicação de sólidos pelas porções, é feita uma ressalva.

Deve-se entender a mesma coisa para a soma dos sólidos, visto que é preciso entender do mesmo modo que eles sejam todos multiplicados por essas mesmas porções iguais, ou pelo menos (se não quiser admitir uma quarta dimensão) que se tome tantas linhas retas quantos estejam entre elas na mesma razão que esses sólidos, os quais sendo multiplicados cada uma por cada uma dessas partes iguais BE, EH, etc., formarão um plano que servirá do mesmo modo para encontrar a razão procurada.²²²

Pascal não diz que não poderia haver uma quarta dimensão, mas como está trabalhando com conceitos geométricos, isto é, com a forma geométrica das figuras, restringe-se a três dimensões. Tanto que troca os sólidos por linhas – que formarão planos, quando multiplicadas pelas porções BE, EH, etc., - a fim de possibilitar as dimensões geométricas.

Eis um exemplo onde é aplicado o método para encontrar o centro de gravidade.

Corolário I

Se a grandeza é dada e a soma de todas as suas porções compreendidas entre um dos planos extremos e cada um dos outros planos e que a balança seja também dada:

Digo que os dois braços serão também dados.

Seja proposta, por exemplo [fig. 6], a linha curva da semiciclóide AYC, a qual seja suposta dada em grandeza e que se saiba que ela é o dobro do

²²⁰ PASCAL, p. 136.

²²¹ PASCAL, p. 136.

²²² PASCAL, p.136.

eixo CF que seja também dado. Seja também suposto que tendo tomado as ordenadas ZY, cortando o eixo em Z, em um número indefinido de partes iguais, e a cicloide nos pontos Y, a soma de todas as porções CY da curva seja também dada.

Digo que a distância entre o centro de gravidade dessa curva AYC e a reta AF será dada.

Porque a soma de todas as curvas CY é dada por hipótese; e sabe-se com efeito, aliás, que essa soma é o dobro da soma das retas CM, conduzidas de C aos pontos onde as ordenadas cortam a circunferência ou da soma das retas ZO (que sejam as ordenadas da parábola COG, da qual CF seja o eixo, da qual o lado reto seja igual à mesma CF; porque então cada CM quadrado, ou FC em CZ, isto é, o retângulo FCZ será igual a ZO quadrado): e assim a soma das linhas curvas CY é o dobro do espaço da parábola CFG, o qual sendo os dois terços de CF quadrado, a soma das curvas CY será igual aos quatro terços do quadrado CF.

Mas (pela precedente) a mesma soma é igual ao retângulo compreendido pela curva CA (ou por duas vezes a reta CF) e pelo braço da curva sobre AF. Portanto quatro terços do quadrado CF são iguais a duas vezes CF, multiplicada pelo braço procurado sobre AF; portanto esse braço é dado, e é igual aos dois terços da CF, porque os dois terços da CF, multiplicados por duas vezes CF, são iguais a quatro terços do quadrado de CF.²²³

Interpretemos a citação:

Sabemos que o comprimento da curva da cicloide é quatro vezes o diâmetro do círculo que lhe originou.

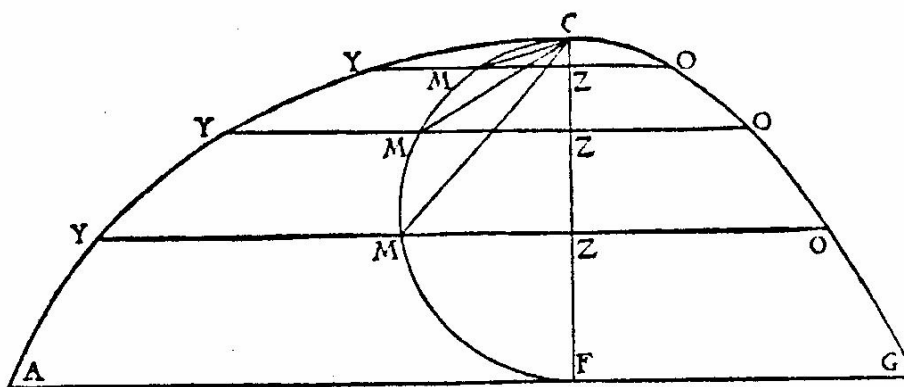


Figura 6

Assim, o comprimento da semicicloide é duas vezes o diâmetro do círculo.

Nesse corolário, Pascal faz uma afirmação que ainda não nos foi possível entender, nem saber como teve conhecimento dela. Ele diz: “Porque a soma de todas as curvas CY é dada por hipótese; e sabe-se com efeito, aliás, que essa soma é o dobro da

²²³ PASCAL, p. 136.

soma das retas CM [...]”. Não conseguimos compreender o que a expressão: “[...] sabe-se com efeito [...]” quer dizer. Tomamos isso como verdadeiro, contudo deixamos essa expressão aberta, para uma futura investigação. Seria necessário pesquisar quem estava trabalhando com a cicloide naquele período e da mesma maneira, com a soma triangular.

Desse modo, aceitemos a relação

$$\sum_{\Delta} CY = 2 \sum CM .$$

Nesse problema é afirmado que

$$CM^2 = FC \cdot CZ = ZO^2 .$$

Para nós, Pascal construiu uma parábola de tal maneira que cada CM fosse colocado perpendicular à reta FC como pode ser vista na figura 6.1.

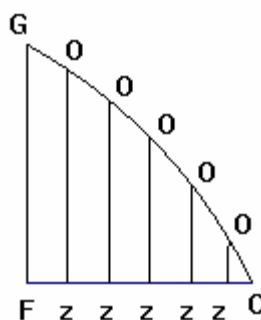


Figura 6.1

Com isso, foi possível construir a parábola e estabelecer relações entre ela e a semicicloide.

A relação anterior acontece do seguinte modo: primeiramente vejamos o triângulo que foi extraído da figura 6, onde $CO = \frac{CF}{2}$.

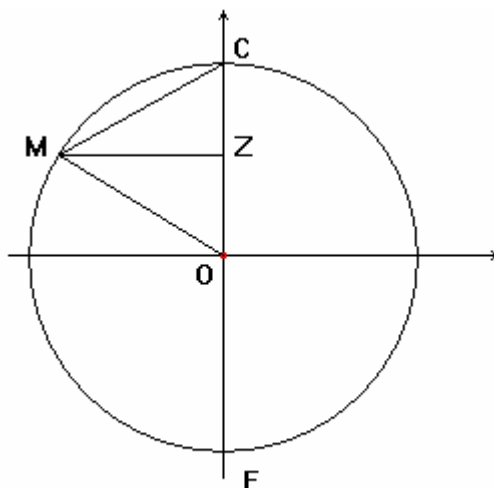


Figura 6.2

Na figura 6.2 é possível por meio do Teorema de Pitágoras, encontrar:

No triângulo CMZ

$$CM^2 = CZ^2 + ZM^2 \dots(1)$$

E no triângulo ZMO

$$\left(\frac{CF}{2}\right)^2 = ZM^2 + \left(\frac{CF}{2} - CZ\right)^2 \dots(2)$$

Substituindo (2) em (1):

$$CM^2 = CZ^2 + \left(\frac{CF}{2}\right)^2 - \left(\frac{CF}{2} - CZ\right)^2 = CF \cdot CZ$$

Então

$$CM^2 = FC \cdot CZ \dots(3)$$

A idéia de Pascal é utilizar a parábola, curva que conhece, comparando sua área com a da semiciclóide.

Assim, a relação de CM^2 com ZO^2 é encontrada a partir da parábola

$$y = \frac{1}{CF} \cdot x^2.$$

Sendo que $y = CZ$ e $x = ZO$, temos

$$CZ \cdot FC = ZO^2 \dots(4)$$

De (3) e (4)

$$CM^2 = FC \cdot CZ = ZO^2.$$

Disso pode-se concluir que $CM = ZO$. Assim a parábola é conhecida.

Agora procuremos compreender porque “[...] a soma das linhas curvas CY é o dobro do espaço da parábola CFG [...]”.

Seja a soma das linhas curvas CY dada por:

$$2CZ_1 \cdot CZ_1$$

$$2CZ_1 \cdot CZ_1 + 2Z_1Z_2 \cdot Z_1Z_2$$

$$2CZ_1 \cdot CZ_1 + 2Z_1Z_2 \cdot Z_1Z_2 + 2Z_2Z_3 \cdot Z_2Z_3$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots$$

$$\underline{2CZ_1 \cdot CZ_1 + 2Z_1Z_2 \cdot Z_1Z_2 + 2Z_2Z_3 \cdot Z_2Z_3 + \dots + 2Z_{n-1}Z_n Z_{n-1}Z_n.}$$

$$2 \cdot [n \cdot CZ_1 \cdot CZ_1 + (n-1) \cdot Z_1Z_2 \cdot Z_1Z_2 + (n-2) \cdot Z_2Z_3 \cdot Z_2Z_3 + \dots + 1 \cdot Z_{n-1}Z_n Z_{n-1}Z_n]$$

Ou

$$\sum_{\Delta} CY = 2 \cdot [n \cdot CZ_1^2 + (n-1) \cdot Z_1Z_2^2 + (n-2) \cdot Z_2Z_3^2 + \dots + 1 \cdot Z_{n-1}Z_n^2] \dots(5)$$

Essa soma são os retângulos formados na semiciclóide ACF e pode ser vista conforme a figura 6.3. Lembrando que $\sum_{\Delta} CY$ quer dizer a soma triangular da linha CY .

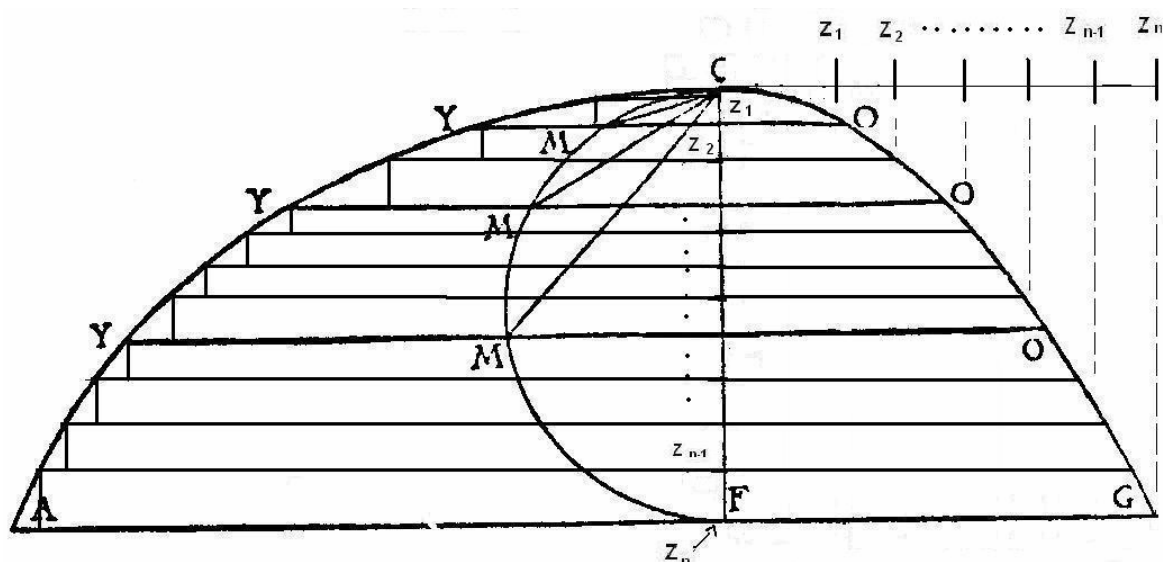


Figura 6.3

O primeiro retângulo é dado por

$$2CZ_1 \cdot CZ_1.$$

O mesmo raciocínio segue para os demais. Tomamos $2CZ_1$ pela idéia da soma da curva CY ser o dobro das retas CM . Os retângulos constituirão todo o espaço da semiciclóide.

Reescrevamos a soma (5) considerando

$$CZ_1 = \Delta Z \text{ e } Z_{n-1}Z_n = \Delta Z \text{ (delta Z)}$$

tão pequena quanto se queira. Obteremos

$$\sum_{\Delta} CY = 2 \cdot [n \cdot \Delta Z^2 + (n-1) \cdot \Delta Z^2 + (n-2) \cdot \Delta Z^2 + \dots + 1 \cdot \Delta Z^2] \dots (6)$$

O próximo passo é encontrar a área da parábola CFG que pode ser estabelecida como a soma dos retângulos dados por $CZ_n \cdot \Delta Z$ ($n \in N^*$). Ou seja,

$$A = CZ_1 \cdot \Delta Z + CZ_2 \cdot \Delta Z + CZ_3 \cdot \Delta Z + \dots + CZ_n \cdot \Delta Z .$$

Como

$$\begin{aligned} CZ_1 &= 1 \cdot \Delta Z \\ CZ_2 &= 2 \cdot \Delta Z \\ CZ_3 &= 3 \cdot \Delta Z \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\ CZ_n &= n \cdot \Delta Z \end{aligned}$$

Temos

$$A = 1 \cdot \Delta Z^2 + 2 \cdot \Delta Z^2 + 3 \cdot \Delta Z^2 + \dots + n \cdot \Delta Z^2 \dots (7)$$

Ao compararmos a expressão (6) e (7) é possível verificar que

$$\sum_{\Delta} CY = 2CFG.$$

Como a parábola é conhecida (o lado reto FG é igual a CF), então sua área pode ser encontrada. Como vimos anteriormente, Pascal tem um método para encontrar a área sob curvas do tipo $y = x^n$, assim

$$CFG = \frac{2CF^2}{3}.$$

Desse modo,

$$\sum_{\Delta} CY = \frac{4CF^2}{3}.$$

De acordo com o Corolário: “[...] (pela precedente) a mesma soma é igual ao retângulo compreendido pela curva CA (ou por duas vezes a reta CF) e pelo braço da curva sobre AF.” Compreendemos que a expressão “pela precedente” refere-se a seguinte passagem: “Digo que a soma de todas as porções da grandeza compreendida entre um dos planos extremos e uma qualquer de todos os planos, é igual a grandeza toda multiplicada pelo seu braço sobre o outro plano extremo.”

Desse modo,

$$\sum_{\Delta} CY = CA \cdot TF = 2CF \cdot TF .$$

Sendo T um ponto localizado sobre CF.

Portanto,

$$\frac{4CF^2}{3} = 2CF \cdot TF \text{ ou } TF = \frac{2CF}{3} .$$

Logo o centro de gravidade da curva AYC encontra-se a dois terços de CF.

Importante frisar que o modo como é feita a relação da parábola com a semiciclóide é semelhante ao que Cavalieri utilizava, ou seja, encontrando as retas correspondentes das figuras estudadas uma a uma, fazendo assim as razões entre as retas e comparando-as com a razão entre as figuras analisadas. Ou de acordo com o segundo método dos invisíveis, superpondo parte a parte de uma figura na outra.

Até agora vimos como é o processo da soma triangular. Eis, então, como é colocada a soma piramidal. Ela é definida de modo semelhante à soma triangular. Para tanto, são tomadas as quantidades A, B e C do seguinte modo:

Primeiramente é tomada a soma triangular de A, B e C. Depois a soma triangular de B e C; por fim é tomada a quantidade C.

$$\begin{array}{r} ABC \\ BC \\ \hline C \\ BC \\ \hline C \\ \hline C \\ \hline 1\ 3\ 6 \end{array}$$

O próximo passo é estabelecido mediante a soma triangular, tomada duas vezes, removendo a primeira soma triangular, essa que é separada por uma barra dupla.

$$\begin{array}{r}
 ABC \\
 BC \\
 C \\
 \hline
 BC \\
 C \\
 \hline
 C \\
 \hline
 ABC \\
 BC \\
 C \\
 \hline
 BC \\
 C \\
 \hline
 C \\
 \hline
 149
 \end{array}$$

Assim tem-se como resultado uma vez a primeira quantidade A; quatro vezes, a segunda B; e a terceira C, nove vezes.

O que é equivalente à seqüência dos números naturais elevados ao quadrado. Com isso, Pascal pode comparar as somas com as seqüências encontradas no triângulo aritmético.

E isto é fácil de demonstrar pela natureza das combinações que formam estas somas triangulares e piramidais, que é tal:

Nas somas triangulares, a primeira grandeza se toma uma vez, a segunda 2 vezes, a terceira, 3 vezes etc., de acordo com a ordem dos números naturais. E nas somas piramidais, a primeira grandeza se toma 1 vez, a segunda 3 vezes, a terceira 6 vezes, etc, segundo a ordem dos números triangulares. Ora, todo número triangular tomado duas vezes e diminuído de seu expoente, é o mesmo que o quadrado de seu expoente: como, por exemplo, o terceiro número triangular 6, sendo dobrado, é 12, que diminuído do expoente 3, restam 9, que é o quadrado de 3.⁽²²⁴⁾

Ou seja, se tomarmos

²²⁴PASCAL, p. 137.

$$\begin{array}{l}
2 \cdot 1 - 1 = 1^2 \\
2 \cdot 3 - 2 = 2^2 \\
2 \cdot 6 - 3 = 3^2 \\
\cdots \cdots \cdots \\
2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 \\
\hline
2(1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{n(n+1)}{2}) - (1 + 2 + 3 + \cdots + n) = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)
\end{array}$$

Temos que duas vezes a soma piramidal menos a soma triangular é igual a soma dos n primeiros números naturais elevados ao quadrado. Posto isso, é apresentada uma aplicação com linhas retas ou curvas.

Outra vez Pascal faz a relação de grandezas discretas com contínuas, ou seja, estende o resultado aritmético para o contínuo.

4.3.2 Soma: Simples, Triangular e Piramidal

Seja o eixo BA da trilha BAC dividido em tantas partes quanto se queira E, H e K. Desses pontos são conduzidas as ordenadas CA, IK, GH, e FE. A *soma simples* delas é igual à trilha toda. Lembrando que a soma das ordenadas é estabelecida com relação ao retângulo que é formado com a base (ou eixo), ou seja, CIKA + IGHK + GFEH + FBE ou a trilha BCA. Conforme a regra referida no tratado *Postestatum Numericarum Summa*, a soma dos retângulos, ou das ordenadas, corresponde à área sob a curva.

A *soma triangular* daquelas mesmas ordenadas, começando do lado da base CA, da figura 4, “[...] é a mesma coisa que a soma dos retângulos compreendidos por cada ordenada e por sua distância da base, isto é, a soma dos retângulos IK em KA, GH em HA, FE em EA.”²²⁵ Desse modo, IK·KA, GH·HA e FE·EA, entre outros, formam vários planos que reunidos fazem um sólido (ver figura 7). Como as distâncias AK, KH e HE são iguais, e tomando AK = 1, AH = 2 e AE = 3, tem-se que 1IK, 2GH, 3FE e assim por diante. Ou seja, isto nada mais é do que a soma triangular como vista anteriormente.²²⁶

²²⁵ PASCAL, p. 137(grifo nosso).

²²⁶ Cf. BARON, 1969, p. 200-1.

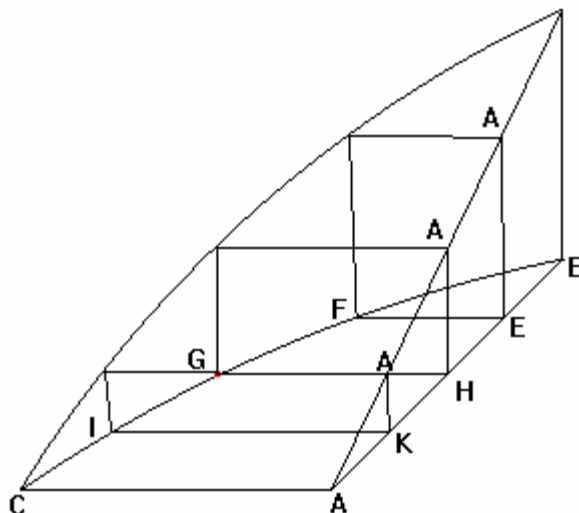


Figura 7

“Digo do mesmo modo que duas vezes a soma piramidal dessas mesmas ordenadas, a começar pelo lado da base CA, é igual a soma dos sólidos feitos dessas mesmas ordenadas multiplicadas cada uma pelo quadrado de sua distância da base; isto é, a IK em KA quadrado + GH em HA quadrado, etc.”²²⁷ Isto é, $IK \cdot KA^2 + GH \cdot HA^2$, e assim por diante. Por exemplo: $IK \cdot KA^2$ faz parte da soma dos sólidos. Sendo $KA = 1$, $HA = 2$, $FE = 3$ etc., tem-se $1IK + 4GH + 9FE$. Segundo Pascal: tomando duas vezes a soma piramidal ela será igual a $1IK + 4GH + 9FE$. Notemos que é desprezada a subtração da soma triangular. Isto pode acontecer porque a soma triangular tem uma dimensão a menos que a piramidal e segundo as regras dos indivisíveis o resultado não é alterado, ou seja, “[...] é a mesma coisa que um ponto em relação a uma linha, ou que uma linha em relação a um plano, ou um plano em relação a um sólido, ou enfim que um infinito em relação ao infinito; o que não muda a igualdade.”²²⁸

Para Pascal

[...] a soma piramidal das mesmas ordenadas faz um plano-plano, composto de tantos sólidos quantas porções existam no eixo, os quais sólidos são formados cada um pelas somas triangulares particulares, da qual a soma total faz a soma piramidal. Porque sua soma piramidal toma-se assim: primeiramente tomando a soma triangular de todos, que faz um sólido, como acabamos de dizer; e em seguida a soma triangular de todos, exceto a primeira, que faz um outro sólido, etc. E assim, tantas quantas

²²⁷ PASCAL, p. 137-8.

²²⁸ PASCAL, p. 138.

divisões haja, haverá também sólidos, os quais, sendo multiplicados cada um por uma das pequenas divisões do eixo, formarão tantos pequenos plano-planos de mesma altura, quanto todos juntos fazem o plano-plano do qual se trata.²²⁹

A soma piramidal é tratada como soma de sólidos. Quando Pascal diz “a soma piramidal das mesmas ordenadas faz um plano-plano” está tratando da quarta dimensão. Como seu método é geométrico, reduz a quarta dimensão para algo que possa ser manipulado, como plano-plano.

²²⁹ PASCAL, p. 138.

V – Considerações finais

Ao apresentar um projeto, na área de História e Filosofia da Matemática, não é simples propor as bibliografias, a metodologia, e quais objetivos serão desenvolvidos sem ter iniciado a pesquisa. Claro que, para começar um trabalho é necessário um objetivo. Porém ele é mais amplo do que se espera, e só é delimitado depois de terem sido feitas as leituras.

Quando iniciamos o estudo, procuramos o maior número de fontes possíveis. Em um primeiro momento, todas elas foram secundárias. Nelas encontramos descrições das atividades de Pascal, bem como conceitos de outros matemáticos que possibilitaram maior compreensão do tema que tratamos. Para descrever o quarto capítulo e parte do terceiro, pesquisamos nas fontes primárias.

De fato, cada livro, artigo e tese que consultamos trouxeram inspiração para buscarmos outras referências. A maioria das obras quando necessário foram traduzidas.

Toda tradução por mais fiel que possa ser não consegue expressar o texto em sua totalidade. Expressões próprias da língua, muitas vezes, levam-nos a criar neologismos. Por exemplo: a palavra “infinitary”, não possui em português uma que traduza seu significado, nós a tratamos como “infinitária”.

Outros pontos relevantes são as expressões características da própria época. Procuramos ter o cuidado, quando um autor é parafraseado, em utilizar palavras que contemplassem o que queria dizer. Tarefa essa que nos fez revisar constantemente o que escrevemos.

Ao analisar textos antigos, nos deparamos com muitas dificuldades. Uma delas é a linguagem matemática. Isso fez com que reproduzíssemos as informações antigas por várias vezes. Por exemplo, a fim de compreender o tratado de *Soma de Potências Numéricas*, foi necessário reescrever muitas vezes o enunciado das regras gerais que definiam a soma de potências numéricas.

Do mesmo modo, foi extremamente complexo analisar o *Corolário I* apresentado no capítulo IV. Tanto que sua resolução ficou aberta possibilitando outras investigações. Com os outros textos, não foi diferente.

Para nós as obras que se referiam à matemática do século XVII foram imprescindíveis, pelo fato de que nesse período “a matemática pura desenvolveu-se com passo extremamente rápido, [...]. Em menos de um século, álgebra, geometria projetiva,

teoria da probabilidade, o cálculo e outras áreas, altamente significativas, da matemática alcançaram a sua plena maturidade.”²³⁰

As pesquisas daquela época estavam sendo amplamente discutidas e formalizadas, teorias foram propostas e métodos elaborados. Com isso, é possível constatar que existiram vários modos de solucionar um problema, como de integração. Então, perguntamo-nos como fazer o tratamento de tanta informação em poucas páginas? Diante dessa situação, construímos e refizemos apenas parte da obra matemática de Pascal. Já os outros textos que consultamos foram apenas comentadas as idéias e relatados alguns procedimentos usados para solucionar problemas matemáticos de integração.

Nosso objetivo estava centrado em mostrar que as realizações matemáticas de Pascal, em particular as integrações podem ser vistas tanto como antecipações das idéias formais do Cálculo, quanto pela contribuição histórica de sua estruturação e formalização.

Quando examinamos a última citação, pudemos observar que vários ramos da matemática, alcançaram sua plenitude naquele momento. Isso pode ter sido impulsionado tanto pelas várias disputas matemáticas, como pela necessidade de reestruturação de teorias que proporcionassem segurança com o fazer matemático. Esse é o caso da ampla discussão sobre como compreender o indivisível e o infinitamente pequeno (ou infinitesimal) relacionado com o contínuo.

A partir das discussões e das exposições de idéias referentes ao indivisível e infinitesimal, entendemos que eles são elementos distintos. O contínuo analiticamente é composto por infinitesimais. Por exemplo, o segmento, a superfície e o sólido são constituídos por elementos infinitamente pequenos de mesma natureza respectivamente.

Já o indivisível faz parte da magnitude contínua. Segundo Bradwardine, a magnitude contínua contém um número infinito de indivisíveis, porém elas não o constituem²³¹.

Tratando-se dos processos de integração, notamos que vários matemáticos desenvolveram métodos e técnicas que chegaram muito perto, do que conhecemos hoje como o Teorema Fundamental do Cálculo. Em nosso estudo, não abordamos a idéia da derivada. Mostramos que no tratado da Soma de Potências Numéricas, existe um resultado que é muito próximo da idéia moderna de integral, fazendo relações de grandezas contínuas com as potências numéricas.

²³⁰ MANCOSU, 1996, p. 9.

²³¹ BOYER, 1986, p. 179.

Da mesma maneira, na carta de Dettonville a Carcavi, são apresentadas idéias tanto para encontrar centros de gravidades quanto para integração, como característica do pensamento matemático de Pascal, é feita também à passagem da grandeza discreta para a contínua.

Pascal, assim como outros matemáticos em diferentes períodos históricos, estava interessado em desenvolver um método que fosse eficaz para solucionar problemas de integração. A maneira como utilizou os indivisíveis, em suas obras, possibilitou-lhe encontrar algo que se assemelhasse à idéia moderna de integração. Por exemplo, na equação 1, quando despreza quantidades de ordem inferior, tomando apenas a quantidade de maior grau, vimos a estreita relação que existe com:

$$\frac{\sum_{j=1}^n j^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

Em termos modernos

$$\int_0^n j^p dj = \frac{n^{p+1}}{p+1}.$$

$$(k+1)^{p+1} = C_{p+1}^1 \sum_{j=1}^k j^p + C_{p+1}^2 \sum_{j=1}^k j^{p-1} + C_{p+1}^3 \sum_{j=1}^k j^{p-2} + \dots + C_{p+1}^p \sum_{j=1}^k j + (1+k) \dots (1)$$

Nesse sentido, a compreensão matemática desse trabalho pode ser vista em dois vieses. No primeiro evidenciamos que houve contribuições significativas relacionadas aos processos de integração, por exemplo, quando são feitas as relações com o triângulo aritmético, a saber, com a soma simples, triangular e piramidal.

O que estudamos pôde revelar algumas características de como a matemática estava sendo realizada naquela época, ou seja, pudemos notar que havia a preocupação com o estabelecimento de métodos que pudessem solucionar quaisquer problemas matemáticos. Isso aparece no discurso, por exemplo, no tratado de *Soma de Potências Numéricas*, onde é relatada a possibilidade de quadrar qualquer gênero de curva utilizando os indivisíveis.

Quando Pascal diz:

Desejei juntar essas poucas observações, familiares àqueles que praticam com os indivisíveis, a fim de fazer ressaltar a ligação, sempre admirável, que a natureza, apaixonada pela unidade, estabelece entre as coisas mais distanciadas na aparência. Ela aparece neste exemplo, em que vemos o cálculo de *dimensões de grandezas contínuas* ligar-se à *soma de potências numéricas*.²³²

Ou seja, além de fazer a passagem do discreto ao contínuo acrescenta que: “[...] tudo isto que é demonstrado pelas reais regras dos indivisíveis se demonstrará também com o rigor e à maneira dos antigos; [...]”²³³ Para ele, essa técnica poderia ser eficaz tanto quanto os métodos dos antigos geômetras.

Importante frisar que a passagem de grandezas discretas para as contínuas é feita em várias passagens de suas obras. Por exemplo, na carta de Dettonville a Carcavi, é desenvolvido um método para encontrar centros de gravidades realizado com o auxílio de uma balança. Nessa balança primeiramente são considerados pesos, colocados um a um com o mesmo espaçamento entre eles. Com tudo, é estabelecida a passagem das grandezas discretas para as contínuas. Então, os pesos são considerados distribuídos ao longo de toda a balança, ou seja, de modo contínuo. Outra vez pode-se verificar a *admirável relação existente entre as grandezas* tratadas.

O segundo viés é referente à exploração das idéias matemáticas de Pascal e por meio do seu modo de tratá-las, exemplificamos como os resultados matemáticos, antes de serem formalizados, passaram por várias tentativas de estruturação, assim como de formalização.

Acreditamos que nossa contribuição, entre outras, para a Educação Matemática é apresentar o processo heurístico de uma teoria. Com isso, os conceitos podem tornar-se um pouco mais compreensivos. Essa foi uma das intenções, tanto do capítulo III quanto do IV. Neles destacamos as técnicas de integração dos antigos geômetras gregos, dos matemáticos dos séculos XVI e XVII e em particular no quarto capítulo as de Pascal.

Nosso trabalho de maneira alguma abrangeu toda a produção matemática de Pascal. Sabemos dá possibilidade de ser realizado outro estudo sobre o processo de integração, por exemplo, no *Traité des trilinges rectangles et de leurs onglets* (Tratado da trilinhas retangulares e de suas unhazinhas), onde são construídos sólidos a partir de uma

²³² PASCAL, 1908, p. 367.

²³³ PASCAL, 1963, p.135.

trilinha e de uma figura adjunta. Esse modo de construir sólidos já era feito por Grégoire De Saint-Vincent²³⁴ (1584-1612).

Outra obra importante é o *Traité des sinus du quart de cercle* (Tratado dos senos num quadrante de um círculo). Esse tratado foi visto por Leibniz e deu-lhe a idéia de estabelecer a relação entre tangentes e quadraturas por meio do triângulo característico ou diferencial.²³⁵

Ou seja, existe uma gama de possibilidades para fazer um estudo dessa natureza, talvez, sem esgotá-lo.

Durante a pesquisa tivemos a preocupação de não cometer incoerência com o que escrevemos. Apresentamos a nossa versão dos fatos. Os dados foram obtidos de fontes onde o leitor poderá, ao estudá-las, ter talvez outra interpretação. Com tudo, não omitimos nossa responsabilidade com o que foi registrado.

²³⁴ Cf. BARON, 1969, p. 135-148.

²³⁵ BOYER, 1963, p 299.

VI – Referências Bibliográficas

- A vida de Pascal. Escrita por Mme Périer, sua irmã. In: **Blaise Pascal: pensamentos**. Trad. De Sergio Milliet. São Paulo: Abril Cultural, 1973, p. 13-37. (Os Pensadores)
- ANTON, H. **Cálculo um novo horizonte**. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.
- ATTALI, J. **Blaise Pascal: ou o gênio francês**. Bauru, SP: EDUSC, 2003.
- BALIEIRO FILHO, I. F. **Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya – Quatro Episódios da História da Heurística**. Tese de Doutorado. Rio Claro, 2004, p. 217.
- BALIEIRO FILHO, I. F. **Panorama Histórico do Conceito Infinitesimal: Estudo de Parte da Obra Pirncipios Mathamaticos de José Anastácio da Cunha**. Dissertação. Rio Claro, 1999, p. 126.
- BARON, M. E. **The Origins of The Infinitesimal Calculus**. New York: Dover Publications, INC, 1969.
- BARON, N. E. **Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo**. Trad. De José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Ma José M. M. Mendes. Brasília: Universidade de Brasília, 1985, v.1-2.
- BELL, E.T. **Men of Mathematics**. New York: New York, 1986.
- Biographical Discionary of Mathematicians: reference biographies from the Dicionary of scientific biography. New York: editora, 1991. v.4.
- BOYER, C. B. - Pascal's Formula for the Sums of the Powers of the Integers. In: **Scripta Mathematica**, 9. 1943, p.237-244.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- BOYER, C. B. **The History of the Calculus ant its Conceptual Development**. New York: Dover Publications, INC, 1959.
- BOYER, CARL. B., “**Pascal: The Man and the Mathematician**. Scripta Mathematica, 26 (1963), 283-307.
- CHAUÍ, M. **Convite à Filosofia**. 13. ed. São Paulo: Ática, 2004.
- HALLIDAY, D; WALKER, J; RESNICK, R. **Fundamentos da Física**. 6 ed. v.1 cidade: LTC, 2002.
- HEATH, T. **Euclid: the thirteen books of the elements**. 2. ed. New York: DOVER PUBLICATIONS, INC, 1956. v.2 e 3.
- KOYRÉ, A. Bonaventura Cavalieri e a Geometria dos Contínuos. In:_____ **Estudos de história do pensamento científico**. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1982, p. 314-43.

- KOYRÉ, A. Pascal Sábio. In:_____ **Estudos de história do pensamento científico**. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1982, p. 344-369.
- LORENZO J de, Pascal y los Indivisibles. **Theoria** (*San Sebastián*) (2) **1** (1) (1985), 87-120.
- MANCOSU, P. **Philosofhy of mathematics and a mathematical practice in the seventeenth century**. New York: Oxford University Press, Inc, 1996.
- MANNION, J. **O Livro Completo da Filosofia**: entenda os conceitos básicos dos grandes pensadores: de Sócrates a Sartre. São Paulo: Madras, 2004.
- MONDOLFE, R. **O infinito no pensamento da antiguidade clássica**. São Paulo: Mestre JOU, 1968.
- PASCAL, B. **Do Espírito Geométrico e da Arte de Persuadir**. Porto: Porto Editora, 2003.
- PASCAL, B. Lettre de M. Dettonville a M. De Carcavi. **Oeuvres Complètes**. Paris: Du Seuil, 1963, p. 131-142.
- PASCAL. In: **Great Books of the Western World**. Chicago: ENCYCLOPÆDIA BRITANNICA, INC, 1993, v. 30.
- PASCAL, B. **Pensamentos**. São Paulo: Abril S.A. Cultural e Industrial, 1973, p. 13-37.
- PASCAL, B. Postestatum Numericarum Summa. **Oeuvres** (publiées par L. Brunschvicg et Boutrox), Paris: Vol. III, 1908, p. 341-367.
- PÉRIER. A vida de Pascal²³⁶. In:_____ PASCAL, B. **Pensamentos**. São Paulo: Abril S.A. Cultural e Industrial, 1973, P. 13-37.
- STRUIK, D. J. **A Source Bookin Mathematics. 1200-1800**. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1990.
- STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas**. 2. ed. Lisboa: Gradiva, 1997.
- TOEPLITZ, O. **The Calculus: A genetic approach**. 3. Reimp. Chicago: The University of Chicago, 1969.
- URBANEJA, P. M. G. **Las raíces Del cálculo infinitesimal em el siglo XVII**. Madrid: Alianza, 1992.

²³⁶ Escrita por Gilberte (irmã mais velha de Pascal).