UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

***Campus* de Rio Claro**

Uma leitura da produção de significados matemáticos e não-matemáticos para "*dimensão*"

Rejane Siqueira Julio

Orientador: Prof. Dr. Romulo Campos Lins

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e Seus Fundamentos Filosóficos-Científicos, para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)
2007

510.07 Julio, Rejane Siqueira
J94L Uma leitura da produção de significados matemáticos e não-matemáticos para ”dimensão” / Rejane Siqueira Julio. – Rio Claro : [s.n.], 2007
118 f. : il., figs., tabs.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Romulo Campos Lins

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Educação matemática. 3. Modelo dos campos semânticos. 4. Jogos de linguagem. 5. Significados matemáticos e não-matemáticos. 6. Dimensão. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI – Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

Comissão Examinadora

Carlos Roberto Vianna

Rosa Lúcia Sverzut Baroni

Romulo Campos Lins (Orientador)

Rejane Siqueira Julio

Rio Claro, 22 de agosto de 2007

Resultado: Aprovada

AGRADECIMENTOS

Ao Romulo, amigo e orientador, se não fosse por ele eu não estaria aqui. Nunca vou conseguir retribuir tudo o que ele fez por mim desde o meu primeiro dia em Rio Claro. Não sei nem por onde começar a agradecer porque me fogem palavras para falar do quão grande é a minha admiração e respeito por ele, mas quero agradecer, em especial, pela conversa tida no dia 23 de julho de 2007. Esta conversa não foi uma conversa de orientação, mas uma conversa de vida que nunca vou esquecer.

À minha banca de qualificação Marquinhos, Rosa e Carlos Viana pelas contribuições e discussões, sempre dispostos a me ajudar no trabalho.

À Heloísa que, desde o meu primeiro dia em Rio Claro, tem me ajudado muito, me hospedando em sua casa sem me conhecer, tornando-se minha amiga e a pessoa com quem eu pude dividir felicidades e angústias. Além disso, pela ajuda que me deu na dissertação, lendo, corrigindo e discutindo-a comigo; eu a considero como minha irmã.

Ao Romulo e Heloísa por terem me acolhido em sua casa me cedendo a "casinha" nesses últimos e maravilhosos meses, com muita comida boa, boas conversas, vinhos e risadas. Romulo e Heloísa, muitíssimo obrigada por tudo, eu amo vocês dois.

Aos meus pais: mãe "Varina" e pai Paulinho que sempre priorizaram os meus estudos e batalharam demais para que isso acontecesse passando por grandes dificuldades para ajudar a tornar meus sonhos e vontades em realidade e por me criarem do modo que criaram; meu pai Renato pelo exemplo de força de vontade e trabalho, superando muitas coisas para me ajudar nos estudos e na vida; a minha mãe Francisca que, mesmo distante contribuiu, dentre muitas coisas, para o meu desenvolvimento e para tornar a amizade e o amor dos filhos muito forte.

Aos meus irmãos: Renata, todas as coisas que tivemos de superar juntas valeram a pena (o que seria de mim sem você!?), pela lista de cuidados que eu deveria tomar aqui em Rio Claro (eu juro que tentei seguir tudo diretinho!) e por ter me aturado e cuidado muito de mim com carinho e amor; Pimmmmm que sempre está no MSN com o seu bom humor me alegrando e fazendo eu dar muita gargalhada na frente do computador; Tizas por ficar me ouvindo, por cuidar das minhas unhas e ser minha companheirona de "baladas" quase "idosas" em Varginha (tipo seresta na praça!); Gian, pelas mensagens no Orkut, pelo bão ou quá, preocupando-se comigo, também, e me fazendo rir muitos nas lanchonetes pedindo sempre mais queijo nas batatas fritas. Meus irmãos eu amo vocês!

À minha madrinha Suely, que sempre me ajudou e recebeu minhas ligações a cobrar com felicidade (!); ao André, que eu considero meu irmão também, sempre cedendo seu computador para mim e provando dos meus sucos doidos; e a minha tia Bia.

Ao Sussumu, companheiro para todas as coisas e horas, namorado e amigo, sempre disposto a me ajudar mesmo eu não deixando, na maioria das vezes; fazendo de tudo para que eu me sentisse bem, com uma paciência e amor que eu nunca vi na vida. Você é um ser transcendental (igual daquela música) e inefável, eu pude aprender muito com você, aprender que mesmo tudo dando errado já deu certo. Obrigada Su, por tudo tudo tudo. Agradeço também à família Hirayama pela acolhida, com direito a muito gohan e sukiyaki.

Aos meus amigos do grupo Sigma-t: Everton pelas ótimas risadas, conversas e danças; Adelino que sempre é muito cuidadoso e carinhoso comigo; Carlos, que me ensinou a estudar em grupo e que tem um bom-humor contagiante, nos fazendo dar boas risadas; Patrícia pelo carinho e ajuda desde a seleção, lendo meus tópicos da prova de seleção para o mestrado e o projeto; João, pelo forró sem música com chocolate e o apoio dispensado; Amarildo por ter me ajudado muito em Juiz de Fora, nas discussões iniciais do projeto de dissertação; Viviane que foi fundamental nesse finalzinho pelas grandes contribuições, questionamentos e incentivos; Regina pelas histórias e conversas.

Aos meus professores de graduação, Adlai e Sônia, por me apresentar a Educação Matemática, pela amizade e pelo grande incentivo e discussões. Foi por causa de vocês que eu tive muito vontade de vir para Rio Claro fazer o mestrado. Obrigada!;

Às meninas que moraram comigo, Luzia, Carla, Miriam, Ednéia, Marcela, Danilla, Nadya e, em especial, à Rosangela que sempre foi muito amiga, companheira de todas as horas e irmã, sempre preocupada com os meus horários e confusões.

À Rose, pelas boas conversas, por compartilhar muitos segredos e pelos passeios virtuais.

À dona Cindinha, Potyra e Thiago, pessoas muito legais comigo.

Ao Thales que me conhece, algumas vezes, melhor do que eu mesma, sempre fazendo de tudo para me apoiar, do modo dele, e pelo amor de sempre. Agradeço também aos pais dele: Lucília, minha mãe emprestada e Sr. Antônio, sempre empenhando com os meus estudos e concursos.

Aos amigos da pós-graduação em Educação Matemática (PGEM), em especial ao Roger por me ajudar a traduzir as citações da qualificação.

Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática pelo carinho com que me receberam desde quando vim para cá. Em especial ao Geraldinho com as suas boas piadas e que andando conseguia me ultrapassar na corrida; Marquinhos e Rosa, pelas contribuições históricas; Vanderlei e Henrique pelas valiosas contribuições topológicas, principalmente na hora do café ("café Hausdorff"); Irineu pelas boas conversas sobre Euclides; Ole por se colocar à disposição em me ajudar na leitura de Wittgenstein, me sugerindo e emprestando livro; Miriam; Rosana; Ana, Eliza e Inajara; Diego que sempre me salvou nos desastres que cometia no computador; Zezé e Alessandra por sempre abrirem e fecharem as portas para mim e pela amizade.

Ao professor Rodolfo Ilari da UNICAMP por ler meu estudo inicial sobre categorizações sugerindo referências e apontando "imperfeições" lingüísticas que contribuiram para que algumas coisas fossem modificadas.

Às minhas amigas e companheiras de CECEMCA e Pró-letramento, Andressa e Lílian, com quem eu tive o maior prazer em poder trabalhar e conviver com elas.

Aos funcionários da UNESP, no geral e, principalmente, aos vigias Serginho e aos que eu esqueci de perguntar o nome para colocar aqui.

Aos funcionários da Biblioteca, em especial à Gislaine, Suzi, Rejane, Sérgio, João e Meire por sempre me receberem muitíssimo bem e me ajudando a ser mais responsável com as datas e aliviarem umas boas multas.

Ao apoio financeiro da CAPES, dos projetos do CECEMCA e do Pró-letramento que me deram o pão de cada dia, juntamente com os meus pais e o Romulo.

Por fim, agradeço ao meu computador, ao Skype, ao MSN, ao Orkut e ao Gmail, que contribuíram para me aproximar de pessoas distantes e muito importantes na minha vida bem como fazer esta dissertação; ao chuveiro quentinho, aos vários colchões no chão, ao leite com ovomaltine, ao pão com manteiga, ao pão com ovo e ao pão com queijo que me proporcionaram muito bem-estar e barriga cheia!

SUMÁRIO

Resumo

Neste trabalho fez-se uma leitura da produção de significados matemáticos e não-matemáticos para *dimensão*, baseado no Modelo dos Campos Semânticos (MCS), a qual constou de três episódios: (a) uma análise de frases do cotidiano que contêm a palavra *dimensão*, usando o MCS (Lins, 1997, 1999) e a noção de Jogos de Linguagem (Wittgenstein, 1985); (b) uma análise de como *dimensão* aparece na matemática do matemático, através de três definições matemáticas distintas para ela, e como estudantes de um curso de álgebra linear lidaram com essa noção; (c) um estudo histórico sobre aspectos de constituição de uma área específica da matemática buscando o que os historiadores falaram a respeito da noção de *dimensão* e das mudanças na produção de significados que aconteceram para essa noção. Esses episódios podem oferecer elementos para favorecer um diálogo com professores e futuros professores de matemática de tal forma que seja possível discutir diferentes modos de produção de significados para *dimensão*, particularmente entre discursos cotidianos e matemáticos, fazendo com que esses professores experienciem e discutam processos de produção de significados.

Palavras-chave: Educação Matemática, Modelo dos Campos Semânticos, Jogos de linguagem, significados matemático e não-matemático, dimensão.

Abstract

This study aimed at producing a reading of the production of mathematical and non-mathematical meanings for *dimension*, based on the Model of Semantic Fields (MSF), and consists of three episodes: (a) an analysis of everyday phrases that contain the word *dimension*, using both the MSF (Lins, 1997, 1999) and the notion of Language Games (Wittgenstein, 1985); (b) an analysis of how *dimension* appears within the mathematician's mathematics, through three definitions for it, and also re-examining how students of a linear algebra course dealt with it; and, (c) a historical study of the constitution of a specific area of mathematics, examining what historians say about the notion of *dimension* and the changes meanings went through. We think those episodes offer support for a dialogue with mathematics teachers (pre- and inservice) as to make possible to discuss those modes of meaning production, particularly the difference between everyday and mathematical discourses, providing an experience of better understanding meaning production processes.

Keywords: Mathematics Education, Model of Semantic Fields, Language Games, mathematical and non-mathematical meanings, dimension.

1. Introdução

> Imagine uma grande folha de papel sobre a qual linhas retas, triângulos, quadrados, pentágonos, hexágonos e outras figuras, em vez de ficarem fixos em seus lugares, movem-se livremente em uma superfície, mas sem o poder de se elevarem sobre ela ou de mergulharem abaixo dela, assim como as sombras – só que com bordas firmes e luminosas. Assim você terá uma noção bem correta de meu país e de meus compatriotas. Ai de mim, há alguns anos, eu teria dito "meu universo", mas agora minha mente se abriu para perspectivas mais amplas das coisas. (Edwin A. Abbott)

Nesta pesquisa fazemos *uma*[1] leitura da produção de significados matemáticos e não-matemáticos para *dimensão*.

A idéia de realizar uma pesquisa relacionada com a *produção de significados* surgiu através dos projetos de Iniciação Científica[2] intitulados "Currículos matemáticos para os dois primeiros ciclos do ensino fundamental" e "Organização espaço-temporal e currículo da matemática escolar" que objetivaram discutir as produções matemáticas da comunidade escolar[3] com o intuito de desenhar um currículo de matemática pertinente a essas produções matemáticas e a realidade escolar.

Nas observações daquela pesquisa nos deparamos com alunos e professores falando

---

[1] O artigo indefinido "uma" está em itálico para enfatizar que a leitura que estamos fazendo não é única, outras pessoas podem fazer outras leituras da produção de significados para *dimensão*.

[2] A Iniciação Científica foi realizada na Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) com o apoio da própria UFJF e do Cnpq (Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento) sob a orientação do Prof. Dr. Adlai Ralph Detoni e da Prof. Dra.Sônia Maria Clareto tendo como orientandos eu (discente do curso de Matemática) e Fernanda Rodrigues de Aguiar (discente do curso de Pedagogia).

sobre um mesmo assunto, porém em direções distintas (Detoni, Julio e Clareto, 2004), o que muitas vezes parecia que o aluno não estava "entendendo" o que o professor dizia ou que não estava "acompanhando" o que o professor estava ensinando. No entanto, percebemos – apoiados em algumas leituras, dentre elas a do Modelo dos Campos Semânticos (MCS) proposto por Lins (1997, 1999) – que, muitas vezes, os alunos produziam significados distintos dos significados produzidos pelos professores em determinadas situações de sala de aula de matemática.

A literatura referente à produção de significados, uma noção do MCS nos ajudou a olhar não mais para o fato de o aluno saber ou não tal conteúdo, mas sim a tentar ler quais significados estavam sendo produzidos pelos alunos no processo de ensino-aprendizagem, tendo em vista que muitos dos significados produzidos pelos alunos estão relacionados com uma matemática da rua, e não com uma matemática da escola[4]. A importância disso está no fato de que não bastava "trazer" a matemática da rua (ou a matemática que os alunos vivenciavam fora da escola) para a escola, mesmo porque ela já estava na escola. Tratava-se de olhar para o que estava acontecendo na escola e, então, tentar desenhar um currículo para essa escola.

Mesmo não nos aprofundando no MCS, a questão da produção de significados contribuiu para a leitura que estávamos fazendo sobre a matemática da escola e do seu entorno.

O interesse em estudar a noção de *dimensão* surgiu quando eu estava estudando Álgebra Linear. Nesta disciplina, percebi que quando o professor falava de *dimensão*, os significados produzidos por mim (os significados geométricos) não eram os mesmos que os do professor (significado algébrico, ou seja, *dimensão* como sendo o número de elementos/vetores de uma base de um espaço vetorial). A partir disso, comecei a questionar sobre as possibilidades existentes para o significado de *dimensão*. Por exemplo, temos o fato de que para a geometria euclidiana *dimensão* nos sugere a idéia de medida ao dizermos, por exemplo, que as dimensões de um triangulo são 6 cm, 7 cm e 8 cm; já na álgebra linear, lidamos com espaços vetoriais de dimensão finita e definimos *dimensão* de um outro modo.

Há uma variedade de utilização da palavra '*dimensão*' que nem sempre é definida e discutida. A variedade de utilização dessa palavra, a falta de uma discussão e problemas relacionados com o tema *dimensão* nos despertaram o interesse em investigar a produção de

---

[3]Comunidade que é formada pelos alunos, pela escola em geral e pelo entorno escolar.
[4] Em Lins (1997, 1999) há uma discussão sobre a matemática da rua e a matemática da escola.

significados para tal noção. Foi, então, nesse momento que o MCS novamente se mostrou como uma ferramenta para estudar (ler) os significados matemáticos e não-matemáticos para a noção de *dimensão* e os processos de produção de significados para ela.

O estudo da produção de significados para *dimensão* foi ao encontro dos interesses do grupo de pesquisa Sigma-t[5] que, de acordo com o projeto "*Design e Implementação de um programa de formação continuada de professores de Matemática*", tem o interesse de "[...] produzir e avaliar um quadro de referência para a formação de professores de Matemática, centrada na prática profissional, de modo que se tenha um curso de Educação Matemática, e não um curso de 'Matemática-mais-Pedagogia'" (LINS, 2006, p. 4), criando e substanciando um novo paradigma à educação e ao desenvolvimento profissional do professor de matemática.

Em muitos países, a estrutura de um curso de licenciatura em matemática é baseada em aulas de conteúdos mais uma complementação pedagógica, o que chamamos de sistema 3+1 (três anos de matemática mais um ano de complementação pedagógica).

De acordo com Lins (2004b), mais recentemente a idéia de "aprender a matemática" ao mesmo tempo em que se aprende a ensiná-la tem sido proposta por um número de pessoas da educação matemática. No entanto, isso levanta questões como: que matemática os professores de matemática precisam ter/aprender. Muitos desses questionamentos não estão ligados somente ao sistema 3+1 de ensino como também à idéia de que a matemática do matemático seja apropriada para promover por si só um desenvolvimento matemático adequado aos professores de matemática.

A matemática do professor de matemática é caracterizada por nela serem aceitos, além de significados matemáticos, significados não-matemáticos[6] (Lins, 2004b). Por isso, pensamos[7] em uma licenciatura não mais pautada na soma de conteúdos matemáticos com conteúdos pedagógicos onde se tem, muitas vezes, a idéia de que primeiro se deve "aprender muita matemática" e depois "saber como ensiná-la". Pensamos em uma licenciatura baseada em uma educação matemática, que lide com situações de sala de aula, tipos de demandas a que os professores estão sujeitos na prática profissional. Além disso, é central que os professores discutam e experienciem nos cursos de licenciatura os processos de produção de significados matemáticos, não-matemáticos e as diferenças entre eles.

---

[5] Grupo de Pesquisa coordenado pelo Prof. Dr. Romulo Campos Lins que tem como participantes: Adelino Candido Pimenta, Rejane Siqueira Julio, Carlos Alberto Francisco, Viviane Cristina Almada de Oliveira, Everton Pereira Barbosa, Amarildo Melchiades da Silva, Patrícia Rosana Linardi, Regina Ehlers Bathelt, Teresita Noriega, João Carlos Gilli Martins e João Ricardo Viola dos Santos.

[6] As noções de significados não-matemáticos e matemáticos serão discutidas no próximo capítulo da dissertação.

Isso talvez dê a impressão de que estamos colocando a matemática em uma posição inferior ou que só vale a pena estudar a matemática de sala de aula por ser a que o professor precisará na sua prática. O que estamos afirmando é que a matemática é o meio pelo qual se pode discutir a produção de significados matemáticos e não-matemáticos e suas diferenças, mas, não a matemática pautada num internalismo matemático onde o que é verdade se dá por meio de axiomas, definições e teoremas e sim numa matemática apresentada de modo que dê abertura para se discutir os processos de produção de significados.

Antes do projeto citado, a idéia do grupo Sigma-t era elaborar ementas e abordagens para os cursos de conteúdo matemático das licenciaturas em Matemática, onde,

> A linha mestra era a de criar cursos que pudessem ajudar o futuro professor a desenvolver o que chamamos de 'lucidez matemática', um entendimento flexível que lhe permitisse ser igualmente flexível e sentir-se seguro na sala de aula. (LINS, 2006, p. 2)

Com isso, o primeiro curso escolhido pelo grupo foi o de Álgebra Linear, tanto pelo interesse de seus integrantes quanto ao fato de que alguns já estavam trabalhando com o tema, como, por exemplo, Silva (1997) que fez uma análise da produção de significados para *base* e Oliveira (2002) que falou sobre a produção de significados para *transformação linear*. Naquele momento, as discussões estavam direcionadas em saber se seria melhor adotar uma abordagem geométrica ou algébrica no curso que estava sendo pensado. No entanto,

> [...] não conseguíamos encontrar uma resposta satisfatória, mas não conseguíamos também entender por quê: sempre acabávamos achando que o que produzíamos não se diferenciava significativamente dos textos já existentes.
> O ponto de mudança principal aconteceu quando percebemos que aquele efeito era natural, dado que estávamos trabalhando com as categorias da Matemática. Por exemplo, dentro de Álgebra Linear, o que sejam vetores, base, dimensão, e assim por diante, está dado, com muito pouca possibilidade de variação ou interpretação; é possível definir base de três ou quatro maneiras, e o mesmo para dimensão, mas para esta matemática são sempre definições equivalentes. O que nós buscávamos era um conjunto de categorias que nos permitisse falar de mais do que apenas as coisas da Matemática do matemático. Como eu já disse no projeto anterior, queríamos poder falar a Matemática do educador matemático, em particular, a Matemática do professor de Matemática. (LINS, 2006, p. 2)

A partir daí, o Sigma-t começou a pensar em uma licenciatura (ou especialização) pautada em uma educação matemática não mais baseada em disciplinas como Álgebra Linear,

[7] Grupo Sigma-t.

Topologia e Espaços Métricos e sim em um conjunto de categorias, que são chamadas de *assentamentos*, constituídas por grandes temas do cotidiano. A idéia é centrar as atividades em torno desses grandes temas os quais nos permitirão falar de coisas além da matemática do matemático.

> [...] a mudança de paradigma [proposta pelo Sigma-t] toma como diretriz a necessidade de realizar a formação e o desenvolvimento do professor a partir de categorias que ele pode compartilhar com seus alunos e alunas, de modo que ao invés de se formar dentro de certas categorias, para depois ter que investir no que alguns autores chamam de "recontextualização" — o que, inclusive, exige um competência profissional específica e complexa —, sua formação já se dê *a partir do contexto das categorias "da vida cotidiana"*, de modo que a "recontextualização" aconteça do natural (o cotidiano) para o não-natural (o matemático). Assim, a passagem aos modos de produção de significados da Matemática do matemático se dá como *ampliação de entendimento*, e não como "verdadeira essência do que se diz na rua", nem substituição do "intuitivo" pelo "matemático". (LINS, 2006, p. 7)

Dentre as possíveis categorias, pode-se ter uma categoria-curso chamada "Espaço", onde nosso ponto de partida é o espaço físico, natural, em que vivemos, pelo fato de ser algo da vida diária, uma categoria da vida diária. A partir disso, pode-se começar a falar sobre como localizamos algo nesse espaço, o que muda ao falarmos de distâncias entre as coisas que estão nele e, com isso, falar de formas de representar localizações, distâncias e medidas de distâncias.

Tendo em vista esses interesses do grupo, o estudo da noção de *dimensão* se apresenta como uma das frentes do projeto que está relacionada com uma reflexão teórica do que Lins (2006) chama de "As idéias fundamentais da Matemática da Educação Matemática" e com a questão dos significados matemáticos e não-matemáticos, que caracterizam a matemática do professor de matemática.

Sendo assim, esta pesquisa, de caráter qualitativo bibliográfica[8], tem como objetivo investigar a produção de significados matemáticos e não-matemáticos para *dimensão*, utilizando o MCS (Modelo dos Campos Semânticos), proposto por Lins (1997, 1999, 2004a, 2004b), como pressuposto teórico de todo o trabalho.

A maneira como tratamos esses modos de produção de significados foi divida em três episódios:

- primeiro: análise de frases, que contêm a palavra '*dimensão'*, enunciada por pessoas no cotidiano, por meio do MCS e da noção de Jogos de Linguagem (Wittgenstein, 1985);

- segundo: análise de como *dimensão* aparece na matemática do matemático (noção que será discutida no próximo capítulo) através de três definições matemáticas distintas para *dimensão* e, embasados na pesquisa realizada por um integrante do grupo Sigma-t, como pessoas que cursaram a disciplina álgebra linear, por exemplo, um curso que lida com a matemática do matemático, falaram a respeito de *dimensão* e;

- terceiro: estudo histórico sobre aspectos de constituição de uma área específica da matemática, a álgebra linear, buscando, nesse processo, especificamente, o que os historiadores falaram a respeito da noção de *dimensão*, das mudanças na produção de significados que aconteceram para *dimensão*.

---

[8] Pesquisa que encontra em livros, fontes e materiais científicos pertinência para a concretização do trabalho científico (Ferrari, 1974).

2. Apresentando nossos pressupostos teórico-metodológicos

> Como no seu caso, também temos quatro pontos cardeais: norte, sul, leste, oeste. (Edwin A. Abbott)

Ao falarmos[9] de produção de significados, distinguindo significados matemáticos e não-matemáticos para *dimensão*, estamos categorizando significados para esta noção em matemáticos e não-matemáticos, ou seja, abrindo a dupla possibilidade de olharmos para *dimensão*: no aspecto matemático, relacionando com a nossa caracterização de "matemática do matemático" e, no aspecto não-matemático, relacionando com coisas que um matemático não diria quando fala como matemático.

Para defendermos o propósito dessa categorização, torna-se necessário, antes de prosseguirmos, abordarmos os nossos pressupostos teóricos, ou seja, deixarmos claras as noções de significado, produção de significado, matemática do matemático, que são algumas noções do MCS, que assumimos na nossa pesquisa.

Segundo Silva (1997), o MCS é um modelo epistemológico que nos permite compreender alguns aspectos do processo de produção de significados em matemática. Os trabalhos de Silva (1997) e Oliveira (2002) são um exemplo disso. Fazendo uma releitura do MCS, podemos dizer que, hoje, ele nos permite compreender alguns aspectos do processo de produção de significados em diversas áreas do conhecimento.

As noções centrais do MCS são: significado, objeto e conhecimento.

Por *significado* podemos entender tudo o que se pode e efetivamente se diz de um

[9] O *nós*, a partir de agora se refere a mim e ao meu orientador.

objeto numa certa (dada) situação (Lins, 1997, 1999, 2004a, 2004b) e *objeto* é "algo a respeito de que se [diz] algo" (LINS, 2004a, p. 114) Então, *produzir significados* é "falar a respeito de um objeto" (LINS, 1997, p.146).

> Quando eu falo de *número decimal*, não estou falando de todos os possíveis significados que se pode produzir para este objeto – inclusive este objeto como conceito dentro da Matemática oficial –, e sim do que, numa dada situação específica, se diz efetivamente. (LINS, 1999, p. 87)

O mesmo ocorre quando falamos de *dimensão*, se enunciamos a seguinte frase: "Sempre acreditei que a *dimensão* social do esporte ultrapassava o esporte profissional. As modalidades esportivas podem ser exploradas como instrumentos que reforçam os valores de educação e cidadania"[10], podemos pensar *dimensão* como sendo "aspecto" (uma parte de um todo que pode ou não ser a mais significativa). Esta é uma produção de significado para *dimensão*, que faz sentido (ou não) *nesse* contexto (nesta atividade discursiva).

Neste trabalho, a produção de significados para *dimensão* se dá a partir de resíduos de enunciações de pessoas que abordaram a história da matemática, matemáticos e outras pessoas que em situações cotidianas ou em salas de aula de matemática, enunciam a palavra '*dimensão*'. Estes serão os discursos considerados no nosso trabalho.

Para tratarmos desses resíduos de enunciações, usaremos a noção de *comunicação*, que também é uma noção do MCS e possui três elementos: autor, texto e leitor.

> O autor é aquele que, no processo, produz a enunciação: um professor em sala de aula [...], um escritor apresentando sua obra. O leitor é aquele que, no processo, se propõe a produzir significados para o resíduo das enunciações como, por exemplo, [...] o crítico de arte ou o leitor de um livro. Já texto é entendido como qualquer resíduo de enunciação para o qual o leitor produza algum significado. (SILVA, 2003, p.50)

Com as definições apresentadas vamos passar para o processo de "comunicação" partindo do lado do autor. Quando **o** autor fala, ele fala para alguém e esse alguém não corresponde a indivíduos e sim a "**um** leitor" que **o** autor constitui. Esse "**um** leitor" para o qual a enunciação é dirigida é chamado de *interlocutor* (Lins, 1999).

> O *interlocutor*, então, é idêntico *à direção na qual um sujeito produz uma enunciação* e, se ele o faz assim, é porque acredita que *esse interlocutor diria o que ele diz, com a justificação* (autoridade) *com que ele diria*. Em outras palavras, talvez menos técnicas, *ele fala numa direção na qual acredita que seria ouvido*. (LINARDI, 2006, p. 34)

[10] Frase 74 do banco de frases recolhidas do cotidiano que se encontra em Anexo.

Podemos representar esse processo da seguinte forma:

O AUTOR ⟶ TEXTO - - - -▸ UM LEITOR

Segundo Lins (1999), o traço-pontilhado está ali para indicar que é apenas na construção do autor que a "transmissão" existe. O processo no qual **o** leitor lê se dá da seguinte forma:

> [...] o leitor constitui sempre um autor, e é em relação ao que este "um autor" diria que o leitor produz significado para o texto (que assim se transforma em texto). (LINS, 1999, p.82)

O diagrama desse processo pode ser representado da seguinte forma:

UM AUTOR - - - -▸ TEXTO ⟶ O LEITOR

O pontilhado indica uma "transmissão" que só se concebe como tal no imaginário do leitor. É importante ressaltar que "é apenas na medida em que **o** leitor fala, isto é, produz significado para o texto, colocando-se na posição de autor, que ele se constitui como **o** leitor" (LINS, 1999, p. 82).

A sensação de comunicação efetiva ocorre, de acordo com Lins (1999), quando se fundem os diagramas e os pontilhados desaparecem, e acontece na medida em que nos colocamos incessantemente e alternadamente na posição de "**o** autor" e de "**o** leitor" em cada um desses processos.

> Então: o autor produz uma enunciação, para cujo resíduo o leitor produz significado através de uma outra enunciação, e assim segue. A convergência [de comunicação] se estabelece apenas na medida em que dizem coisas que o outro diria e com autoridade que o outro aceita. É isto que estabelece um *espaço comunicativo*: não é necessária a *transmissão* para que se evite a divergência. (LINS, 1999, p. 82)

A noção de interação, neste sentido, nos é importante porque produzimos significados para um texto, que no MCS pode ser visto também como um objeto. O Modelo não considera somente enunciações como falas no sentido da oralidade e, sim, como, por exemplo, coisas escritas num papel, gestos, desenhos. Nesta pesquisa não produziremos significados para falas de matemáticos ou quaisquer outras pessoas no sentido da oralidade, devido a natureza deste trabalho. Como fazer, então, uma leitura de tal modo que ela corresponda ao significado que o autor de uma dada época produziria para uma determinada coisa?

Como não há uma relação de diálogo entre mim e **o** autor, a interação não ocorre de modo efetivo. Procuramos nos colocar na posição de leitor produzindo significados para o que "um autor" diria. A leitura que fazemos do processo de produção de significados no sentido que propomos pode ser caracterizada como uma leitura plausível onde

> [...] Toda tentativa de se entender um autor deve passar pelo esforço de olhar o mundo com os olhos do autor, de usar os termos que ele usa de forma que torne o todo de seu texto plausível e é aqui que devemos prestar atenção às definições que um autor propõe. (LINS, 1999, p.93)

Ao ler um texto e produzir significado para ele, não estamos olhando se definições ou falas são melhores ou piores, se são verdades ou não, mesmo porque algo é verdade para alguém e esse alguém não é um indivíduo isolado e sim um indivíduo de práticas sociais e culturais, que compartilha interlocutores, espaços comunicativos. O que buscamos é estabelecer coerências, isto é, produzir significados para falas (de historiadores, matemáticos e pessoas do cotidiano que usam dimensão em suas falas) que as tornem coerentes, falas essas que, ao mesmo tempo em que constituem as coerências, se apresentam como dentro de um horizonte cultural legítimo para este novo discurso (legitimidades para a nossa fala) (Linardi, 2006).

Um exemplo disso pode ser dado de acordo com a seguinte fala: "O candidato do PSDB [...], afirmou ontem, [...] 'Podemos avançar bastante, a questão tem dimensão nacional'". Neste caso, podemos pensar *dimensão* como importância ao invés de extensão mensurável. Como não retornaremos a nossa leitura de *dimensão* para a pessoa que redigiu essa frase, consideramos que é mais coerente, é mais plausível, pensarmos *dimensão* como importância do que relacioná-la a extensão mensurável.

> É adequado dizer que a leitura plausível de documentos, em situação na qual a interação não é possível ou de interesse — como é o caso do estudo de textos históricos, ou o caso da impossibilidade de tempo desta interação (Lins, 1992) —, pode e deve ser entendida como uma "primeira etapa" do processo que visa à interação e a envolve. Dito de outra forma, é possível realizar uma leitura plausível *como que dirigida* a uma interação que — já se sabe — não irá acontecer. O que faz essa primeira etapa "pertencer" ao ciclo

> proposto pelo MCS é a *intenção*. (LINARDI, 2006, p. 36)

Em uma leitura plausível não falamos do outro, ou melhor, não falamos do que "o autor" diz, falamos de nós, ou seja, dos significados que produzimos para os resíduos de enunciações de "um autor". Por exemplo, ao produzirmos significados para as obras de Euclides, não estamos falando de Euclides, estamos falando *a partir* de Euclides. Por exemplo, Euclides não diz o que é *espaço* e uma hipótese que torna isso coerente é que o espaço para a geometria grega (representada em Euclides) é o espaço natural, do nosso senso comum (e, portanto, óbvio).

Tendo colocado essas noções centrais do modelo, passemos a discussão do que consideramos significados matemáticos e significados não-matemáticos, pois é por meio dessa caracterização que este trabalho se desenvolve.

2.1. Significados matemáticos e não-matemáticos

Quando falamos de produção de significados matemáticos e não-matemáticos para *dimensão* nos deparamos com questões como o que devemos considerar matemático e não-matemático. Além disso, quando afirmamos que significado matemático está relacionado com a caracterização de matemática do matemático, ocorrem questões como "qual é a matemática do matemático?". De acordo com Lins (2004a),

> Este é um assunto espinhoso. Em certa medida sua discussão poderia confundir-se com tentar dar uma resposta à pergunta "O que *é* a Matemática?", e é bem sabido que ao tentar responder a esta pergunta nos envolvemos com assuntos complicados e polêmicos, dos problemas técnicos à discussão dos pressupostos de onde partimos. (p. 95)

A matemática tem significados diferentes para as pessoas em diferentes tempos e comunidades.

> Para os Pitagóricos, cujo mundo todos os objetos eram fundamentalmente numeráveis [associados a números ou razões entre números inteiros], tudo era número. Para Platão, onde 'formas ideais' desempenhavam uma parte significante na sua visão de mundo, a matemática era outra coisa novamente. A idéia de uma verdade pura e inatacável a qual tinha alguma conexão com

> o mundo real foi por muito tempo a pedra fundamental das definições da matemática. No século XVII, a matemática tornou-se o modelo do universo de Deus e foi vista como a ciência suprema de contagem e medida e esta visão tornou-se reforçada quanto mais a humanidade descobria como utilizar o poder/força técnico da matemática para descrever o movimento das estrelas ou as marés do oceano. [tradução nossa] (GRUGNETTI et al., 2000, p, 43)[11].

No século XIX, houve uma mudança no ponto de vista do que a matemática significa e isso se deu através da invenção das geometrias não-euclidianas e a busca para as leis básicas da álgebra.

> Isso conduziu a uma ênfase nas estruturas abstratas, estendendo e generalizando idéias em outros domínios, e trazendo para junto de um número de áreas até o momento aparentemente não relacionadas sob alguns conceitos gerais unificados. Juntamente com esses desenvolvimentos veio a compreensão que a verdade matemática era uma questão de consistência de argumentos; e além disso que a matemática não necessariamente tinha nada para fazer com o mundo real. Definições tornaram-se mais e mais abstratas e inclusivas, mas sempre pareceu que ainda havia algum aspecto do empreendimento que ficava de fora. [tradução nossa] (GRUGNETTI et al., 2000, p, 43)[12]

Grugnetti (2000) afirma que como uma demonstração final de derrota, alguém decidiu recuar a posição de que a matemática é o que os matemáticos fazem, mas que até agora não há, até mesmo dentro de pesquisas de matemáticos, um consenso de que seja a matemática.

Para Lins (2004a),

> [...] o que [...] aconteceu, começando com a primeira metade do século XIX, e se consolidando na segunda metade desse século e na primeira metade do

---

[11] For the Pythagoreans, in whose world all objects were fundamentally numerable, all was number. For Plato, where 'ideal forms' played a significant part in his world view, mathematics was something else again. The idea of a pure and unassailable truth which had some connection with the real world was for long one of the cornerstones of the definitions of mathematics. In the seventeenth century mathematics became the model of God's universe, and was seen as the supreme science of counting and measurement, and this view became reinforced the more humankind discovered how to use the technical power of mathematics to describe the motions of the stars or the tides of the sea. (GRUGNETTI et al., 2000, p, 43)

[12] This led to an emphasis on abstract structures, extending and generalising ideas into other domains, and the bringing together of a number of hitherto apparently unrelated areas under some general unifying concepts. Along with these developments came the realization that mathematical truth was a matter of consistency of arguments; and further, that mathematics did not necessarily have anything to do with the real word. Definitions became more and more abstract and inclusive, but always it seemed that there was still some aspect of the enterprise that got left out. (GRUGNETTI et al., 2000, p, 43)

> século XX, foi um processo de profissionalização do matemático, um processo que culminou por estabelecer que o que define a Matemática do matemático são certos modos – tomados então como *legítimos* – de produção de significados para a Matemática, um conjunto de enunciados. (p. 99).

Lins (2004a) fala que Baldino[13] aponta um paradoxo para a afirmação de que "a matemática é o que o matemático faz" perguntando "mas e quando ele está fazendo a barba?" (LINS, 2004a, p. 99). Para Lins (2004a), esse aparente paradoxo é resolvido pelo processo de profissionalização e demarcação: "Matemática é o que o matemático faz quando ele diz que está fazendo Matemática" (LINS, 2004a, p. 99). Lins (2004) ainda afirma que essa autoridade não está constituída de vontade particular, individual, de um ou de outro matemático e sim na existência de uma instituição cultural marcada pela profissionalização da matemática e uma demarcação da área, onde ficou estabelecido quem é que pode falar de matemática e que para falar sobre ela há a necessidade de precisão, rigor e consistência lógica.

A principal característica da matemática do matemático é que "assim que as coisas são definidas, é o que elas *são e serão até nova ordem* [tradução nossa]" (LINS, 2004b, p. 14)[14].

Não há outra área da atividade humana na qual as pessoas tenham tanto controle sobre as coisas com que elas lidam são ou não são como na matemática do matemático (Lins, 2004b).

Além de definicional, a matemática do matemático é *Internalista*, ou seja, "quando o matemático define um objeto, não cabe a discussão de se esta definição corresponde bem ou não a algo *fora* da própria Matemática" (LINS, 2004a, p. 95). Essa discussão pode ocorrer quando o objeto definido ajuda a resolver problemas postos ou se o objeto ajuda a abrir novas áreas de estudo. Além disso, a matemática tem natureza simbólica, ou seja, "os objetos são conhecidos não no que eles *são*, mas apenas em suas *propriedades*, *no que deles se pode dizer*"(LINS, 2004a, p. 96). Isso significa que,

> Para o matemático, Matemática é a Matemática justificada dentro de certos modos de produzir significados que são, naturalmente, simbólicos. E apenas estes modos de produzir significados são aceitos. E, também naturalmente, já que se podem produzir justificações de um único modo, estas justificações são incorporadas ao texto da matemática. (LINS, 1994, p.37)

---

[13] Roberto Ribeiro Baldino, atualmente é Professor da Universidade Estadual do Rio Grande do Sul.
[14] "as soon as things are defined, that is what they *are and will be until further notice*" (LINS, 2004, p. 14)

Com essa caracterização de matemática do matemático, pode-se questionar: antes da matemática do matemático ser apresentada de forma internalista, definicional e simbólica, o matemático não fazia conjecturas, não testava suas definições para ver se o que ele estava falando era plausível ou não?

A resposta é sim. No entanto, esse processo de: elaboração de conjecturas; fazer uma abordagem prática para em seguida passar para uma abordagem abstrata; associações entre conteúdos de modo a ajudar na elaboração do conteúdo que se pretende tratar; verificação de resultados; apresentação de exemplos particulares, práticos ou numéricos antes ou depois de uma definição e que, muitas vezes, está relacionada com uma intenção didática é que caracterizamos como sendo uma "atividade matemática".

2.2. A atividade matemática

A "atividade matemática" é algo que pode ou não ocorrer no "Jardim do matemático"[15], que é "onde os matemáticos estão praticando a sua matemática" (LINS, 2004a, p. 95). No entanto, no momento que os matemáticos definem ou formalizam o conteúdo que querem tratar, eles passam a transitar exclusivamente no "Jardim do matemático". Além disso, para um matemático, a matemática não precisa ter alguma utilidade prática, "A matemática "de verdade" dos matemáticos de "verdade" [...] é quase totalmente "inútil"" (HARDY, 2000, p. 112). Falar sobre matemática ou sobre como um matemático fez ou deixou de fazer algo numa de suas atividades

> É uma experiência melancólica para um matemático profissional [...]. A função de um matemático é fazer algo, provar novos teoremas, contribuir para a matemática, e não falar sobre o que ele ou outros matemáticos fizeram. (HARDY, 2000, p. 59)

Um exemplo de "atividade matemática" pode ser encontrado na fala de Hoffman e Kunze (1970), que são matemáticos que escreveram um livro de Álgebra Linear direcionado para o ensino desta disciplina (ou, desta área da matemática). Para Hoffman e Kunze (1970) é de fundamental importância trabalhar com exemplos, pois, "[...] tende a minimizar o número de estudantes que conseguem repetir definições, teoremas e demonstrações em ordem lógica, sem apreender o significado dos conceitos abstratos." (HOFFMAN E KUNZE, 1970, p. IX)

Um outro exemplo de "atividade matemática" pode ser encontrado, ainda, em

Hoffman e Kunze (1970), após definirem combinação linear. Eles ressaltam que certas partes da álgebra linear estão relacionadas à geometria, que a própria palavra espaço sugere algo geométrico (assim como vetor) para a maioria das pessoas, dizendo que

> A medida que prossigamos nosso estudo de espaços vetoriais, o leitor observará que grande parte da terminologia possui uma conotação geométrica. Antes de concluirmos esta seção introdutória sobre espaços vetoriais, seria bom discutirmos a relação dos espaços vetoriais com a geometria até um ponto que indique pelo menos a origem do nome "espaço vetorial". Esta será uma discussão breve e intuitiva. (HOFFMAN e KUNZE, 1970, p. 34)

O início dessa discussão intuitiva de espaço vetorial se dá, em Hoffman e Kunze (1970), considerando-se o espaço vetorial R^3 usual, que na geometria analítica pode ser considerado um espaço de três coordenadas onde podemos identificar as ternas (x_1, x_2, x_3) de números reais com os pontos de um espaço euclidiano tridimensional. Nesse contexto, um vetor é definido como um segmento de reta orientado $\overrightarrow{PQ}$ que vai do ponto $P = (x_1, x_2, x_3)$ ao ponto $Q = (y_1, y_2, y_3)$, uma formulação da idéia de "flecha" de P a Q.

Da forma como os vetores são usados, pretende-se que eles sejam determinados por seu comprimento, direção e sentido.

O segmento PQ tem o mesmo comprimento, direção e sentido que o segmento que vai da origem O = (0,0,0) ao ponto $(x_1 - y_1, x_2 - y_2 , x_3 - y_3)$, significando que se resolvermos estudar apenas os vetores que partem da origem, vai existir exatamente um vetor associado a cada comprimento, direção e sentido dados.

O vetor $\overrightarrow{OP}$, que vai da origem a $P = (x_1, x_2, x_3)$ é determinado por P, o que faz com que possamos identificar o vetor com o ponto P e, no espaço vetorial R^3 os vetores serão definidos como sendo as ternas (x_1, x_2, x_3).

A soma dos vetores $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$ pode ser dada geometricamente, assim como a multiplicação escalar, o que é equivalente à definição algébrica do Exemplo 1[16].

Mesmo havendo relação entre a álgebra linear e a geometria, Hoffman e Kunze (1970) dizem que:

---

[15] Esse termo aparece em Lins (2004a).

[16] **Exemplo 1. O espaço das** ***n*****-uplas**, F^n. Seja F um corpo arbitrário e seja V o conjunto de todas as n-uplas $\alpha = (x_1, x_2, ..., x_n)$ de escalares x_i em F. Se $\beta = (y_1, y_2, ..., y_n)$ com y_i em F, a soma de α e β é definida por: (2-1) $\alpha + \beta = (x_1 + y_1 , x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$. O produto de um escalar c por um vetor α é definido por: (2-2) $c\alpha = (cx_1, cx_2 , ..., cx_n)$. O fato de que esta adição de vetores e multiplicação escalar satisfazem as condições (3) e (4) [que estão na definição de espaço vetorial como veremos adiante] é fácil verificar, usando a propriedades semelhantes da adição e multiplicação de elementos de F. (HOFFMAN e KUNZE, 1970, p. 31)

> De vez em quando, o leitor provavelmente achará útil "pensar geometricamente" sobre espaços vetoriais, isto é, desenhar figuras para uso próprio para ilustrar e motivar idéias. [...]. Contudo, ao fazer tais ilustrações, deve ter em mente que, por estarmos tratando de espaços vetoriais como sistemas algébricos, todas as demonstrações que fizermos serão de natureza algébrica. (p. 36)

Esse "alerta" que Hoffman e Kunze (1970) fazem também pode ser encontrado quando eles falam de base e dimensão, ou melhor, antes de abordar base e dimensão eles iniciam esse assunto da seguinte forma:

> Passamos agora à tarefa de atribuir uma dimensão a certos espaços vetoriais. Apesar de associarmos usualmente "dimensão" a algo geométrico, precisamos encontrar uma definição algébrica adequada de dimensão de um espaço vetorial. Isto será feito através do conceito de uma base para o espaço. (HOFFMAN E KUNZE, 1970, p, 43).

Essas falas de Hoffman e Kunze (1970) são exemplos exemplares de que é possível associar, por exemplo, espaço vetorial a espaço geométrico, que é útil utilizarmos exemplos, mas, não se pode esquecer que eles estão lidando com sistemas algébricos, que todas as demonstrações são de natureza algébrica e que mesmo havendo outras definições para noções como *dimensão*, é necessário ter uma definição algébrica, ou seja, ao se falar de um conteúdo matemático dentro de uma área específica são os modos internalistas e simbólicos da matemática que estão em jogo e não a "atividade matemática" em si.

Voltando, então para a questão da matemática do matemático, o MCS vê a Matemática como um texto, no sentido que foi definido anteriormente, e não como conhecimento. É na enunciação desse texto, a Matemática, que há produção de conhecimento. Por conhecimento entendemos: "uma crença-afirmação (enunciação de algo que acredita-se ser correto) junto com uma justificação que torna legítimo enunciar aquela crença-afirmação" (LINS, 2002, p. 44). A justificação não vem antes nem depois, ela está junto, e seu papel não é explicar a crença-afirmação mas sim tornar sua enunciação legítima (Lins, 2002, p.44), pois,

> Justificações, [...], ao me permitirem dizer algo, são o que garantem a *legitimidade* de minha enunciação. É aqui que a discussão [...] sobre leitor/texto/autor, ganha relevância maior. Ao produzir significado, minha enunciação é feita na direção de um *interlocutor* que, acredito, diria o que estou dizendo com a justificação que estou produzindo. Isto quer dizer que a legitimidade de minha enunciação não é função de algum critério lógico ou

> empírico que eu pusesse em jogo, e sim do fato de que acredito pertencer a algum espaço comunicativo. Eu já havia indicado que compartilhar um espaço comunicativo é compartilhar interlocutores e isto, junto com a elaboração que fiz da produção de significados na direção de interlocutores, garante que toda produção de significado é dialógica no sentido cognitivo. (LINS, 1999, p. 88)

Para ilustrar, nós temos que "2+2=4". "2+2=4" é um texto. Se uma criança for produzir significado para esse texto, ela poderá dizer que 2+2=4 porque juntando 2 dedos de uma mão com 2 dedos de outra, ela terá juntado 4 dedos. Já o matemático recorreria, provavelmente a algo ligado a Teoria dos conjuntos, não que ele não possa juntar os dedos também como uma forma de justificação, mas o modo como ele justifica depende de com quem ele estará falando. Isso nos mostra que conhecimentos distintos são produzidos para um mesmo texto, pois são postos em jogo modos de produção de significados legítimos e diferentes em cada caso.

Quando alguém (que, neste caso, refere-se às pessoas que foram entrevistadas por Oliveira em sua pesquisa de mestrado) define espaço vetorial como sendo ""lugar" onde "atuam" os vetores, tipo um conjunto, onde temos algumas operações como a soma de dois vetores e a multiplicação de um vetor por um número" (OLIVEIRA, 2002, p. 58) ou espaço vetorial é "espaço em que os vetores agem" (OLIVEIRA, 2002, p. 59) ou ainda, "espaço vetorial é o lugarzinho lá que moram os vetores" (OLIVEIRA, 2002, p. 66)[17]; essas são falas que um matemático certamente não diria pois, para o Matemático, a definição de espaço vetorial é a seguinte:

> Um *espaço vetorial* é um conjunto *V* de elementos chamados *vetores* satisfazendo os seguintes axiomas:
> *A)* A cada par, x e y, de vetores em V corresponde um vetor $x + y$, chamado soma de x e y, de modo que
> 1) a adição é comutativa, $\boldsymbol{x} + y = y + \boldsymbol{x}$,
> 2) a adição é associativa, $x + (y + z) = (x + y) + z$,
> 3) existe em V um único vetor 0 (chamado *origem)* tal que $x + 0 = x$ para qualquer vetor x, e
> 4) a cada vetor x em V corresponde um único vetor $-x$ tal que $x + (-x) = 0$.
> *B)* A cada par, α e x, onde α é um escalar e x e um vetor em V, corresponde um vetor αx em V, chamado *produto* de α e x, de modo que
> 1) a multiplicação por escalares é associativa, $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, e

[17] Essas falas são das entrevistadas de Oliveira (2002) e ocorreram durante a realização de sua pesquisa de campo que consistia, dentre outras coisas, de entrevistas e tarefas confeccionadas por ela e seu orientador com o intuito de analisar a produção de significados para transformação linear, em álgebra linear, por meio da realização de entrevistas e tarefas pelos sujeitos de pesquisa de Oliveira (2002).

> 2) $l\ x = x$ para qualquer vetor x.
> C) 1) A multiplicação por escalares é distributiva com relação à adição de vetores, $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, e
> 2) a multiplicação por vetores é distributiva com relação à adição de escalares, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$. (HALMOS, 1978, p. 13)

Olhar para os significados matemáticos significa produzirmos significados que sejam plausíveis para a comunidade matemática (como acabamos de fazer para a noção de espaço vetorial), ou seja, dizermos coisas que, de acordo com a caracterização de matemática do matemática, um matemático diria, com as justificações que produzimos. Assim, os significados não-matemáticos estão relacionados com coisas que um matemático não diria ao falar como um matemático.

3. O que está por trás da distinção entre significados matemáticos e não-matemáticos: categorizações

> Parecia que este [...] monarca [...] estava convencido de que a linha reta a que ele chamava de seu reino, e onde vivia, compunha a totalidade do mundo, e, na verdade, a totalidade do espaço.
>
> [...]
>
> - Sair da minha linha? Você quer dizer do mundo? Do espaço?
>
> - Bem, é. Sair do *seu* mundo. Para fora do *seu* espaço. Pois o seu espaço não é o verdadeiro espaço. O verdadeiro espaço é um plano, e o seu espaço não passa de uma linha. (Edwin A. Abbott)

Para lidarmos com os significados de *dimensão*, com a produção de significados para *dimensão*, montamos as categorias: significados matemáticos e significados não-matemáticos.

Essa maneira de categorizar foi feita no sentido de nos ajudar a lidar com a noção de *dimensão* e, também, por serem esses modos de produção de significados os presentes na matemática do professor de matemática.

Para lidarmos com essas categorias e as que surgiram ao falarmos de *dimensão* – já que essa noção possui muitos significados, conforme veremos quando abordarmos esses significados especificamente – procuramos uma referência que nos ajudasse a pensar sobre categorias, sobre o que é relevante na tentativa de se categorizar algo. Para isto encontramos em Lakoff (1987) falas plausíveis sobre categorias e categorizações.

A divisão inicial de significados em significados matemáticos e não-matemáticos pode ser vista como típica de uma teoria clássica de categorizações que diz que as categorias reúnem objetos que possuem propriedades comuns e fronteiras bem definidas, uma teoria técnica que tem estado conosco por mais de dois mil anos (Lakoff, 1987). No entanto, Lakoff (1987) afirma, baseado numa série de estudos, que a categorização, de modo geral, é mais complexa do que reunir objetos que possuem propriedades comuns, "a categorização humana é baseada em princípios que se estendem para além daqueles concebidos na teoria clássica [tradução nossa]" (LAKOFF, 1987, p. 5)[18].

Lakoff (1987) investiga as complexidades dos modos como as pessoas categorizam, colocando numa mesma categoria objetos aparentemente "disparatados". Um exemplo disso é um estudo citado por ele, realizado por Dixon (apud Lakoff, 1987) sobre a linguagem aborígine australiana Dyirbal.

Esses aborígines usam substantivos em suas frases e esses substantivos devem ser precedidos de uma das quatro palavras: *bayi, balan, balam, bala*; as quais classificam todos os objetos no universo Dyirbal; uma breve versão da categorização Dyirbal é descrita por Dixon (apud Lakoff, 1987):

> I. *Bayi*: homens, cangurus, gambás, morcegos, a maioria das cobras, a maioria dos peixes, alguns pássaros, a maioria dos insetos, a lua, tempestades, arco-íris, "boomerangs", algumas lanças, etc.
> II. *Balan*: mulheres, "bandicoots", cachorros, porcos-espinhos, ouriço, algumas cobras, alguns peixes, a maioria dos pássaros, vaga-lumes, escorpiões, grilo, taturana, qualquer coisa conectada com água ou fogo, sol e estrelas, alguns escudos, algumas lanças, algumas árvores, etc
> III. *Balam*: todas as frutas comestíveis e as plantas que nascem delas, tubérculos, samambaia, mel, cigarros, vinho, bolo.
> IV: *Bala*: parte do corpo, carne, abelhas, vento, "yamsticks", algumas lanças, a maioria das árvores, grama, lama, pedras, barulhos e linguagem, etc. [tradução nossa] (p. 93)[19]

---

[18] "[...] the human categorization is based on principles that extend far beyond those envisioned in the classical theory" (LAKOFF, 1987, p. 5).

[19] I. *Bayi:* men, kangaroos, possums, bats, most snakes, most fishes, some birds, most insects, the moon, storms, rainbows, boomerangs, some spear, etc.
II. *Balan:* women, bandicoots, dogs, platypus, echidna, some snakes, some fishes, most birds, fireflies, scorpions, crickets, the hairy mary grub, anything connected with water or fire, sun and stars, shields, some spears, some trees, etc.
III. *Balam:* all edible fruit and the plants that bear them, tubers, ferns, honey, cigarettes, wine, cake.
IV. *Bala:* parts of the body, meat, bees, wind, yamsticks, some spears, most trees, grass, mud, stones, noises and language, etc. (LAKOFF, 1987, p. 93)

Dixon, segundo Lakoff (1987), não somente listou essas categorias – já que não se tratava somente de classificar os objetos, mas também de fazer entendê-las – como também procurou explicar o que faz essas categorias terem sentido para as pessoas que falam Dyirbal – que as aprendem e usam inconsciente e automaticamente. Um exemplo foi tentar entender o porquê desses aborígines incluírem mulher, fogo e coisas perigosas numa mesma categoria, chamada *balan*, que também inclui pássaros que não são perigosos. Esta categorização é uma evidência de que o processo de categorização é mais complexo do que dá a entender a teoria clássica.

Dixon (apud Lakoff, 1987) observou que os aborígines não aprendiam membros de uma categoria um a um, mas operavam em termos de alguns princípios gerais. Um esquema geral simples, básico e produtivo é:

> I. *Bayi:* machos(humanos); animais
> II. *Balan:* fêmeas(humanas); água; fogo; lutas
> III. *Balam:* comidas que não tem carne.
> IV. *Bala:* tudo o que não está em outras classes. [tradução nossa] (LAKOFF, 1987, p. 93)[20]

Um dos princípios mais gerais que Dixon (apud Lakoff, 1987) tomou por dado e não se preocupou em afirmar explicitamente é o que Lakoff (1987) chama de princípio de “domain-of-experience" (domínio de experiência):

> Se há um domínio de experiência básico associado com A, então é natural para entidades no sentido do domínio estar na mesma categoria que A. [tradução nossa] (LAKOFF, 1987, p. 93)[21]

Lakoff (1987) diz que talvez a mais notável das descobertas de Dixon (apud Lakoff, 1987) é o que se refere ao princípio mito-crença que é:

> Se algum substantivo tem característica X (com base de que a classe de seus membros é esperada estar decidida) mas está, através da crença ou do mito, conectado com características Y, então geralmente ele irá pertencer à classe correspondente a Y e não àquela correspondente a X. [tradução nossa]

[20]I. *Bayi:* (human) males; animals
II. *Balan:* (human) females; water; fire; fighting
III. *Balam:* nonflesh food
IV. *Bala:* everything not in the other classes. (LAKOFF, 1987, p. 93)
[21] If there is a basic domain of experience associated with A, then it is natural for entities in that domain to be in the same category as A. (LAKOFF, 1987, p. 93)

(LAKOFF, 1987, p. 94)[22]

Um exemplo disso é o fato de pássaros (que são animais) não estarem na categoria I com os outros animais porque os Dyirbal acreditam que os pássaros são os espíritos de mulheres mortas e, por isso, eles estão na categoria *Balan*. No entanto, há algumas exceções, pois há pássaros que representam o homem mítico e outros representando o fogo.

Um outro exemplo é o fato de vento estar na categoria IV, enquanto tempestade e arco-íris, por serem figuras mitológicas masculinas, estarem na categoria I.

> Se um subconjunto de substantivos tem alguma propriedade particular importante que o resto do seu conjunto não tem, então os membros do subconjunto podem ser considerados de uma classe diferente do resto do conjunto para "enfatizar" esta propriedade; a propriedade importante é muitas vezes 'periculosidade'. [tradução nossa] (LAKOFF, 1987, p. 93)[23]

A maioria dos peixes estão na categoria I com os outros animais. Mas, há dois peixes que, por serem perigosos, estão na categoria II. No entanto, não são todas as classificações que ocorrem desse modo e há algumas para as quais Dixon (apud Lakoff, 1987) não encontrou explicação como é o caso de cachorro estar na categoria II ao invés de estar na categoria I.

O trabalho de Dixon oferece um exemplo exemplar de como a cognição humana trabalha, mostrando que, por mais que a categorização Dyirbal seja única, os princípios gerais de sua organização, se mostram, de modo geral, nos sistemas de categorizações humanas, como, por exemplo: a centralidade (membros básicos da categoria são centrais); o encadeamento (membros centrais ligados a outros membros, que são ligados a outros e assim por diante – mulheres são ligadas ao sol, que é ligado a queimadura solar, que é ligada a taturana); mitos e crenças; conhecimento específico (como o conhecimento da mitologia); dentro outros sistemas (Lakoff, 1978)

A análise de Dixon (apud Lakoff, 1987) explica porque o sistema Dyirbal é o tipo de sistema que os seres humanos podem utilizar. Ele não prevê o que o sistema será, e sim que os sistemas de classificação tendem a ser estruturas com centralidade, encadeamento, etc. Esta

---

[22] If some noun has characteristic X (on the basis of which its class membership is expected to be decided) but is, through belief or myth, connected with characteristic Y, then generally it will belong to the class corresponding to Y and not that corresponding to X. (LAKOFF, 1987, p. 94)

[23] If a subset of nouns has some particular important property that the rest of the set does not have, then the members of the subset may be assigned to a different class from the rest of the set to "mark" this property; the important property is most often 'harmfulness'. (LAKOFF, 1987, p. 93)

teoria da categorização faz previsões sobre o que o sistema de categorias humanas pode e não pode ser. Ela não prediz exatamente o que estará numa dada categoria, em uma linguagem e cultura dadas.

A análise de Dixon (apud Lakoff, 1987) não foi propriamente sua, pois suas explicações foram as que os nativos australianos da tradição Dyirbal deram para ele sobre a categorização Dyirbal. A pesquisa de Dixon (apud Lakoff, 1987) foi iniciada em 1963, quando a cultura australiana inglesa não tinha efeito sobre a cultura Dyrbal. No entanto, o impacto da sociedade australiana foi tão grande que, a partir de 1963, a cultura e a linguagem Dyirbal começaram a morrer. Os jovens Dyirbal crescem falando inglês, primariamente, e aprendem uma versão simplificada da tradição (eles não aprendem os mitos ou acham que os mitos não significam muito em suas vidas) e, isso faz com que resulte numa mudança no sistema de categorização. Um exemplo disso está na categorização dos mais jovens, onde o sistema foi quase completamente quebrado e somente os casos centrais das categorias I e II sobreviveram:

> I. *Bayi*: machos (humanos); animais
> II. *Balan*: fêmeas (humanas)
> III. *Bala*: todas as outras coisas. [tradução nossa] (LAKOFF, 1987, p. 98)[24]

Esse sistema de categorização que sobreviveu é similar ao que corresponde a "he", "she" e "it" da língua inglesa, observamos.

A iminente morte da tradição Dyirbal reflete o fato de que as categorizações são atividades humanas e como tais, elas sofrem influências culturais e sociais que acabam afetando o modo como se categoriza.

Este exemplo de Lakoff (1987) nos mostra não somente a complexidade dos modos de categorizar das pessoas como também que esses modos não são estáticos com o decorrer do tempo, indicando que não são fundadas em propriedades substanciais, essenciais das coisas.

O fato é que estamos sempre categorizando e mudando os nossos modos de categorizar; um exemplo comum em salas de aulas de matemática é pedir que os alunos separem os sólidos geométricos de acordo com o que eles acham que esses sólidos têm em comum e, disso surgem categorias como: com pontas e sem pontas, os que rolam e os que não rolam; os que rolam melhor que outros, sendo que, alguns, para rolarem, dependem do como

[24] I. *Bayi*: human males and nonhuman animals
II. *Balan*: human females
III. *Bala*: everything else. (LAKOFF, 1987, p. 98)

você os movimenta (um exemplo é que a esfera rola melhor que o cubo).

Os exemplos de Lakoff (1987) e o dos sólidos geométrico nos mostram que:

> [...] nós estamos empregando dúzias senão centenas de categorias: categorias de sons falados de palavras, de frases e orações, assim como categorias conceituais. Sem habilidade de categorizar, nós não conseguimos funcionar de modo algum, seja no mundo físico ou em nossas vidas sociais e intelectuais. Um entendimento de como nós categorizamos é central para qualquer compreensão do que nos faz humanos. [tradução nossa] (LAKOFF, 1987, p. 6)[25]

Muitas das categorizações são automáticas e inconscientes, como já apontou Dixon (apud Lakoff, 1987), nós automaticamente categorizamos pessoas, animais (mamíferos, répteis, ...), objetos, coisas do mundo natural. No entanto, uma grande proporção de nossas categorias não são categorias de coisas e sim de entidades abstratas (eventos, emoções, entidades científicas). (Lakoff, 1987).

Lakoff (1987) traz estudos seus e de outros autores mostrando que a categorização clássica não dá conta das categorizações estudadas e, também, traz outras abordagens para lidar com a questão das categorizações, sendo uma delas os efeitos de protótipos que, segundo Lakoff (1987) são "assimetrias entre membros de uma categoria tal como julgamentos de exemplos exemplares, são fenômenos superficiais que podem ter muitas origens. [tradução nossa]" (LAKOFF, 1987, p. 56). [26] Os efeitos dos protótipos não refletem diretamente a estrutura de uma categoria, a natureza da categorização; os protótipos constituem representações de categorias, pois categorias são representadas na mente em termos dos protótipos, que são os melhores exemplos (Lakoff, 1987). Um exemplo de efeito dos protótipos, onde um membro é julgado ser mais representativo de uma categoria que outros, ocorre, por exemplo, com a categoria cadeira,

> ESCRIVANINHAS são consideradas serem mais representativas da categoria CADEIRA do que cadeiras de balanço, cadeiras de barbeiro, pufes, ou cadeiras elétricas. Os membros mais representativos de uma categoria são chamados membros "prototípicos". Sujeitos dão exemplos-exemplares consistentes através destes paradigmas experimentais. [tradução nossa] (LAKOFF, 1987, p. 41)[27]

---

[25][…] we are employing dozens if not hundreds of categories: categories of speech sounds of words, of phrases and clauses, as well as conceptual categories. Without the ability of categorize, we could not function at all, either in the physical world or in our social and intellectual lives. An understanding of how we categorize is central to any understanding of what makes us human. (LAKOFF, 1987, p. 6)

[26] "[...] asymmetries among category members such as goodness-of-example judgments, and are superficial phenomena which may have many sources." (LAKOFF, 1987, p. 56)

[27] […]DESK CHAIRS are judged to be more representative of the category CHAIR than are rocking chairs,

Isso nos sugere que,

> [...] a categorização humana é essencialmente um problema tanto da experiência quanto da imaginação humana – de percepção, atividade motora, e cultura, por um lado, e de metáfora, metonímia, e imagens mentais, por outro. Como uma conseqüência, a razão humana depende crucialmente dos mesmos fatores, e portanto, não pode ser meramente categorizada em termos de manipulação de símbolos abstratos. Claro, certos aspectos da razão humana podem ser isolados artificialmente e modulados por meio de manipulação simbólico-abstrata, somente como se alguma parte da categorização humana não encaixasse na teoria clássica. Mas nós não estamos meramente interessados em algumas subpartes artificialmente isoláveis da capacidade humana de categorizar e raciocinar, mas em toda extensão daquela capacidade. Como nós podemos ver, aqueles aspectos de categorização que realmente se encaixam na teoria clássica são casos especiais de uma teoria geral de modelos cognitivos, uma que nos permite caracterizar muito bem os aspectos imaginativos e experienciais do raciocínio. [tradução nossa] (LAKOFF, 1987, p. 8) [28]

Segundo Lakoff (1987), categorias são categorias de coisas:

> Desde que nós entendemos o mundo não somente em termos de coisas individuais mas também em termos de *categorias* de coisas, nós tendemos a atribuir uma existência real a essas categorias. Nós temos categorias para espécies biológicas, [...], e emoções e até categorias de orações, palavras e significados. [tradução nossa] (LAKOFF, 1987, p. 9) [29]

O exemplo de como uma pessoa fala sobre os sólidos geométricos – que uma esfera rola melhor que um cubo, montando um outro sistema de categorias, diferindo de categorias como com pontas e sem pontas ou sólidos que rolam e sólidos que não rolam, que são categorias que encontramos, algumas vezes, em livros didáticos de matemática – faz com que

---

barber chairs, beanbag chairs, or electric chairs. The most representative members of a category are called "prototypical" members. Subjects give consistent goodness-of-example ratings across these experimental paradigms. (LAKOFF, 1987, p. 41)

[28] [...] human categorization is essentially a matter of both human experience and imagination – of perception, motor activity, and culture on the one hand, and of metaphor, metonymy, and mental imagery on the other. As a consequence, human reason crucially depends on the same factors, and therefore cannot be characterized merely in terms of the manipulation of abstract symbols. Of course, certain aspects of human reason can be isolated artificially and modeled by abstract symbol-manipulation, just as some part of human categorization does fit the classical theory. But we are interested not merely in some artificially isolatable subpart of the human capacity to categorize and reason, but in the full range of that capacity. As we shall see, those aspects of categorization that do fit the classical theory are special cases of a general theory of cognitive models, one that permits us to characterize the experiential and imaginative aspects of reason very well. (LAKOFF, 1987, p. 8)

[29] Since we understand the world not only in terms of individual things but also in terms of *categories* of things, we tend to attribute a real existence to those categories. We have categories for biological species, physical substances, artifacts, colors, kinsmen, and emotions and even categories of sentences, words, and meanings. We have categories for everything we can think about. (LAKOFF, 1987, p. 9)

concordemos com Lakoff (1987) que afirma que mudar o conceito de categoria é mudar nosso entendimento do mundo, ou seja, é mudar a nossa visão de pesquisador e professor, de que há outros modos de produção de significados, outros modos de categorizar as coisas.

As categorizações não são independentes de quem as está fazendo. Por isso, Lakoff (1987) afirma que as propriedades relevantes para as descrições de categorias são as *propriedades interacionais* que são o resultado de nossas interações com o nosso meio físico e cultural dados ao nosso corpo e aparato cognitivo.

Voltando para o modo como fizemos uma categorização inicial em significados matemáticos e não-matemáticos, ela pode ser vista como clássica, como uma forma de sistematização que satisfaz aos nossos objetivos que é fazer essa separação entre os significados que serão considerados matemáticos e os que não serão considerados matemáticos. Um modo básico de separação que além de nos permitir fazer a distinção do que é matemático e não-matemático, nos permitirá ressaltar as diferenças entre as categorias e os elementos que estão em jogo nessas categorizações. Dito de outra forma, nossa opção por tratar desta distinção de forma clássica tem por objetivo enfatizar a diferença.

Lakoff (1987) aborda vários modelos de categorização diferentes do modo clássico, entre os quais, o modelo metafórico, o modelo metonímico, o modelo de imagem-esquema, o modelo proposicional.

A leitura desses modelos bem como a abordagem preliminar sobre categorização e o estudo apontado por Lakoff (1987) nos serviu de inspiração para pensarmos na categorização inicial (significados matemáticos e não-matemáticos) e nas categorizações posteriores que fizemos, mesmo não usando nenhum modelo particular de Lakoff (1987) e nem os princípios gerais de categorização (alguns deles foram citados anteriormente como: centralidade, encadeamento, dentre outros). A contribuição de Lakoff (1987) vem no sentido de nos ajudar a enfatizar como categorizações nos permitem funcionar cognitivamente e que há vários modos de se categorizar algo, fazendo com que ao pensarmos num modo de categorizar *dimensão*, isso nos leve a considerar quais elementos estão em jogo nessa categorização. Ressaltando, não estamos interessados em separar e listar, somente, as categorias de significados matemáticos e não-matemáticos e sim em explicitar a diferença que há nos modos de produção de significados para *dimensão* em ambas e até mesmo para outras noções, algo que está presente em salas de aula de matemática onde a dificuldade crucial em uma situação dessas

> [...] como entender as afirmações dos estudantes, num sentido muito

> específico: como categorizá-los sem usar primeiramente nossas próprias categorias? Frequentemente as afirmações são interpretadas de acordo com categorias que não estruturam ou organizam o pensamento de outra pessoa.(LINS et al, 2002, p.3)[30].

É com esses pressupostos que passaremos à análise da produção de significados para *dimensão* a partir de resíduos de enunciações de pessoas que abordaram a história da matemática, matemáticos e outras pessoas que em situações cotidianas ou em salas de aula de matemática, enunciam essa noção.

---

[30] […] is how to understand the students statements, in a very specific sense: how to categorize them without using primarily our own categories? Much more often that not, statements are interpreted according to categories which do not structure or organise the other person's thinking. (LINS et al., 2002, p. 3)

4. Primeiro Episódio: *dimensão* em falas cotidianas

> - Devo na verdade confessar que não estou entendendo vossa senhoria. Quando nós, de Planolândia, vemos uma linha, vemos extensão e *brilho*. Se o brilho desaparece, a linha se extingue, e, como vossa senhoria diz, deixa de ocupar espaço. Será que devo entender que vossa senhoria dá ao brilho o nome de uma dimensão, e que chamamos de "brilhante" o senhor chama de "alto"?
> - Na verdade, não. Por "altura" eu me refiro a uma dimensão como a sua extensão; só que, para vocês, a "altura" não é tão facilmente perceptível por ser extremamente pequena.
> - Meu senhor, sua afirmação pode ser facilmente testada. Vossa senhoria diz que eu tenho uma terceira dimensão à qual chama de "altura". Ora, dimensão implica direção e medida. Então meça minha "altura" ou indique a direção na qual minha "altura" se estende, e eu vou me convencer. (Edwin A. Abbott)

"Este problema tomou uma outra *dimensão*", "em que *dimensão* você se encontra Matilde?", "quais as *dimensões* de sua sala?", "esses produtos desenvolvidos são ideais para empresas de pequena e média *dimensão*". Essas são algumas frases que encontramos no cotidiano, em que aparece a palavra '*dimensão*'.

Esta parte do trabalho tem como objetivo fazer uma análise de frases que contêm a palavra '*dimensão*' a partir de falas do nosso cotidiano.

Como dissemos anteriormente, nos inspiramos em Lakoff (1987) – apesar de não usarmos especificamente os modelos de categorização propostos por ele – nas decisões que tomamos ao fazermos algumas categorizações nesse processo de análise. Além disso, nesta parte do trabalho trouxemos Wittgenstein (1985) com a sua noção de jogos de linguagem, para, junto com o Modelo dos Campos Semânticos (MCS), nos apoiar, também, nas categorizações dos significados para *dimensão*, nos usos do contexto do dia-a-dia.

Os dados analisados nesta parte são advindos de frases do cotidiano que contêm a palavra *dimensão*; as fontes utilizadas foram:

- frases ouvidas por nós ou frases que as pessoas ouviam e nos enviavam;

- frases de livros, revistas, de material escrito, em geral, onde apareceu a palavra '*dimensão*';

- frases da internet.

As frases da internet foram selecionadas a partir do site de buscas Google[31], onde digitamos a palavra '*dimensão*'. Muitos dos resultados iniciais eram referentes a empresas que tinham o nome *dimensão*. Por isso, "ignoramos" as empresas nomeadas *Dimensão* e passamos para as frases seguintes. A escolha, na primeira busca, foi aleatória. Já na segunda busca e nas buscas posteriores, digitamos a palavra '*dimensão*' associada com: 'esporte', 'política', 'cultura' e 'economia'. Em uma última busca procuramos na parte destinada a buscas de Jornais on-line[32] pela palavra '*dimensão*', tentando abranger um discurso ainda mais comum. Fizemos isso até conseguirmos um total de cem frases, por julgarmos esse número suficiente para observarmos os tipos de categorias que poderíamos criar a partir delas.

Antes de partimos para a análise das frases, por curiosidade inicial nossa, escrevemos para aquelas empresas com o nome de *Dimensão*, via e-mail ou através do link "Fale conosco" das próprias empresas, do seguinte modo: "[apresentação da perguntadora] estudo a noção de dimensão não só nos aspectos matemáticos. O que me chamou atenção foi o fato de haver uma empresa com o nome Dimensão. Por isso, resolvi escrever e perguntar se há uma explicação do porquê desse nome [despedida e agradecimentos]".

Três, das vinte empresas questionadas, responderam o nosso questionamento. Como as respostas não se constituíram em entrevistas e não há um termo de consentimento para usá-las, reescrevemos essas respostas obtidas para que as empresas não possam ser reconhecidas. As respostas reescritas foram as seguintes:

- "Existem dezenas de empresas com o nome Dimensão dos mais variados segmentos. No nosso caso, quando começamos nossa empresa, queríamos um nome que traduzisse nossa capacidade sem limitá-la. Além disso, este nome é constantemente falado em todas as mídias a todo momento. 'A dimensão das coisas' sempre sugere alguma coisa grande ou de proporções imensuráveis";

---

[31] www.google.com.br

[32] Que também foram pesquisados no site: www.google.com.br.

- "O nome da nossa empresa é baseado no significado de importância, valor. A primeira opção seria de Nova Dimensão, vertente que abandonamos por já ter no nosso segmento uma antiga empresa com o mesmo nome. Daí, optamos somente por Dimensão no sentido de dar valor e importância à filosofia de comunicação de nossos clientes. Num mercado em que enfrentamos inúmeros leigos e 'picaretas', queremos transmitir a idéia de seriedade e competência. Para complementar o sentido semântico do nome, adotamos a cor verde que simboliza esperança e realizações e assim complementar o sentido que queríamos passar com a nossa marca";

- "Quando começamos, nosso nome era outro. Posteriormente com o crescimento da nossa empresa, por um aspecto legal de marcas e patentes, não pudemos usar mais o antigo nome. A solução encontrada foi pedir ajuda aos membros da nossa empresa para escolhermos um nome para ela e dessa ajuda, o nome Dimensão foi escolhido pelos nossos dirigentes. Atualmente nossa empresa é detentora da marca Dimensão. Quanto ao significado, na época foi considerado um nome com amplitude e forte, em relação aos nossos concorrentes".

Essas explicações nos revelam algo sobre o modo como as pessoas vêem a palavra '*dimensão*'. Apesar dessas respostas não se encontrarem nas categorizações que criamos, pensamos que, na nossa leitura das frases, elas são relevantes e por isso resolvemos mantê-las nesta pesquisa.

Para se pensar inicialmente numa categorização dos significados de *dimensão*, partimos do que já temos, que são os dicionários, os quais, além de nos darem definições, separam os significados de acordo semelhanças e dessemelhanças.

Poderíamos ter ficado somente com os dicionários, já que eles trazem significados matemáticos e não-matemáticos, como veremos posteriormente, mas, na nossa concepção, não basta olharmos somente para as definições, é preciso olharmos também para como *dimensão* aparece no cotidiano e para os usos (lidos por meio das frases) que se fazem dessa noção, pois são esses usos que, de acordo com Lakoff (1987) e Wittgenstein (Wittgenstein, 1985; Bruni 1984) nos fazem funcionar no mundo físico, nas nossas vidas.

No início da pesquisa com os dicionários, buscamos, primeiramente, os etimológicos, procurando pela "origem", ou o significado "primeiro" da palavra '*dimensão*'. Desta busca obtivemos o seguinte:

> **Dimensão**, s. Do lat. *dīmensiōne-*, "medida; dimensão; eixo da terra; medida métrica; medida da ração do trigo dos soldados". Séc. XVI, segundo Morais. || **Dimensionismo** de *dimensão*; séc. XX. (MACHADO, 1952, p. 784)

> **Dimensão** *sf.* 'sentido em que se mede a extensão para avaliá-la, tamanho' XVI. Do lat. *dīmēnsĭo-ōnis*, de *dīmēnsus*, part. pass. de *dīmetīrī* 'medir exatamente, de um extremo a outro', de *metīrī* 'medir' || **dimension**AL 1844 || **dimens**ÍVEL 1844 || **dimens**ÓRIO 1844. (CUNHA, 1986, p. 266).

Pela etimologia da palavra, a noção de *dimensão* está relacionada com medir/medida. No entanto, de acordo com as frases que listamos no primeiro parágrafo deste capítulo, podemos observar que esse significado não abrange todas elas. Quando falamos que "este problema tomou uma outra dimensão", podemos até pensar em tamanho, mas não é um tamanho que podemos medir no sentido quantitativo.

Após esta primeira busca, procuramos analisar como a palavra '*dimensão*' é definida por outros tipos de dicionários[33]. Como esta palavra apresenta mais de uma acepção – separadas nos dicionários por números em negrito – fizemos um quadro (quadro abaixo) listando os significados presentes nas definições de *dimensão*. Cada significado está representado por uma categoria que corresponde a uma acepção.

---

[33] As definições seguem em anexo

Quadro 1. Categorias presentes nas definições para *dimensão* propostas pelos dicionários.

Definições de *dimensão*		**Dicionários**				
		Grande Enciclopédia Portuguesa e Brasileira, s.d., p. 19.	Figueiredo, s.d., p. 897.	Ferreira, 1964, p. 413.	Ferreira, 1986, p. 590.	Houaiss, 2001, p. 1042.
1	Extensão mensurável que determina a porção do espaço ocupada por um corpo (comprimento, largura e altura)	x		x		x
2	Tamanho, proporção (mora numa casa de pequenas dimensões)	x		x	x	x
3	Sentido em que se mede a extensão para avaliá-la/estimá-la	x	X	x	x	x
4	Mat. grau de potência ou de uma equação algébrica.	x	X	x		
5	Importância, valor (a dimensão universal de Camões)				x	x
6	Aspecto significativo do pensamento, da obra, da realidade (a dimensão psicológica, a dimensão política; a dimensão da obra de Gil Vicente)					x
7	Cálculo Vetorial (Mat.): número de vetores da base				x	x
8	Geometria Analítica (Mat.): número mínimo de coordenadas necessárias para a determinação unívoca de um ponto no espaço.				x	x
9	A ordem das matrizes na representação matricial de um grupo; grau. (Mat.)				x	x
10	O número mínimo de variáveis necessárias à descrição analítica de um conjunto. (Mat.)				x	

De acordo com a nossa caracterização de significado matemático, pelas definições apresentadas pelos dicionários, um exemplo de significado para *dimensão*, relacionado com a geometria analítica (uma área da matemática), é: “número mínimo de coordenadas necessárias para a determinação unívoca de um ponto no espaço”. Já um exemplo do que consideramos um significado não-matemático corresponde a seguinte frase: “aspecto significativo do pensamento, da obra, da realidade”.

Se compararmos as definições dos dicionários consultados, notamos algumas semelhanças no que se refere a falar que *dimensão* é:

- extensão mensurável em qualquer sentido (item 3 da tabela e maior ocorrência);
- tamanho, proporção (item 2 da tabela);
- grau de potência ou de uma equação algébrica (item 4 da tabela) e
- extensão mensurável que determina a porção do espaço ocupada por um corpo (item 1 da tabela).

Lakoff (1987) fala que essas escolhas centrais feitas pelos dicionários, como, por exemplo, a de que *dimensão* é “extensão mensurável”, ocorrem porque os “fazedores de dicionários” devem listar um significado primeiro quando uma palavra tem mais de um, e isso ocorre seja por convenção, seja por escolha própria. Essas escolhas, segundo esse autor,

> [...] não têm importância científica, elas realmente refletem o fato de que, mesmo entre pessoas, que constroem definições para um modo de vida, não há um único modelo cognitivo geralmente aceito para um conceito [...] [tradução nossa] (LAKOFF, 1987, p, 76)[34].

Mesmo havendo definições semelhantes entre os dicionários, podemos notar que no decorrer do tempo, as definições foram sofrendo alterações. Da definição de Figueiredo (s.d.) até a de Houaiss (2001), nota-se que muitos significados foram adicionados para a palavra ‘*dimensão*’, tal como os significados figurados – dentre eles: “aspecto significativo do pensamento, da obra, da realidade” (Houaiss, 2001) – enquanto outros significados deixaram de ser apresentados como, por exemplo, “grau de uma potência *ou* de uma equação, em álgebra. [...]” (FIGUEIREDO, s.d., p. 897), definição esta que tem uma grande ocorrência nos dicionários que consultamos e que são datados antes de 1986.

Essas mudanças de definições que os dicionários apresentam refletem as

---

[34] [...] are of no scientific importance, they do reflect the fact that, even among people who construct definitions for a living, there is no single, generally accepted cognitive model for such a [...] concept […] (LAKOFF, 1987, p, 76)

transformações por que passaram os significados da palavra '*dimensão*' com o tempo. Isso se dá, na nossa leitura, por uma questão de uso da palavra que vem se modificando, mesmo não tendo acesso bibliográfico ao porquê dessa noção ter sofrido alterações.

Como exemplos de significados incorporados pelos dicionários, temos os significados matemáticos, como o da álgebra linear, algo que não havia na definição de Figueiredo (s.d.). Uma possível leitura do que ocorreu pode ser dada ao olharmos para a história da álgebra linear. Foi somente no século XX que houve a aceitação de métodos vetoriais pela comunidade científica.

A aceitação mais ampla da álgebra linear ocorreu com as seguintes publicações: em 1941, com *A Survey of Modern Álgebra* de Garret Birkhoff; em 1942, com *Finite-Dimensional Spaces* de Paul R. Halmos; e em 1947, com o segundo capítulo do livro II de *Eléments de mathématique* sob o título *Algèbre linéaire* de Nicolas Bourbaki (Dorier, 1995). Pela data aproximada que temos do dicionário de Figueiredo, situado entre 1947 a 1965, consideramos ser este um período curto para que a incorporação de definições da álgebra linear pudesse ser realizada pelos dicionários. O mesmo ocorre se olharmos para Ferreira (1964) e Ferreira (1986), ou seja, em Ferreira (1964) não havia um significado para *dimensão* de acordo com a álgebra linear, diferentemente de Ferreira (1986).

Quando dizemos que *dimensão* refere-se a "sentido em que se mede a extensão para avaliá-la, estimá-la", isso nos mostra que uma palavra possui significados, denomina objetos, substitui o objeto e "a conexão entre as palavras (nomes) e seus significados (referentes) se estabelece por uma definição ostensiva[35], que determina uma associação entre palavra e objeto" (GLOCK, 1998, p. 370).

Wittgenstein (1985) critica esse modo de definição (definição ostensiva), dizendo que ele não fala da diferença entre espécies de palavras como, por exemplo, adjetivos e verbos, mas sim de substantivos (como: mesa, pão), nomes próprios, "e só em segundo plano em nome de certas atividades e propriedades; e, quanto às restantes espécies de palavras, alguma coisa há de se encontrar". (WITTGENSTEIN, 1985, p. 172)

Um exemplo de comunicação oferecido por Wittgenstein, referente a esse modo de lidar com uma palavra é:

> [...] A [pedreiro] utiliza pedras na construção em que trabalha; há blocos, lajes, vigas e colunas. B [servente de pedreiro] tem a função de lhe alcançar

---

[35] [nota nossa] "Uma definição ostensiva é a explicação do significado de uma palavra por meio de enunciados como "isto é um elefante" ou "Esta cor é o 'vermelho'" [...], "O nome disto é '...'"; [...] o objeto para o qual se aponta [...] (GLOCK, 1998, p. 122)

> as pedras pela ordem em que A precisa delas. Para este efeito recorrem ao uso de uma linguagem que consiste nas palavras “bloco”, “coluna”, “laje”, “viga”. A exige-as em voz alta; - B traz a pedra que aprendeu a trazer ao ouvir um certo som. (WITTGENSTEIN, 1985, p. 173)

Na visão de Wittgenstein (1985), nem tudo o que chamamos linguagem trata-se do sistema do exemplo anterior. É como se alguém dissesse que um jogo consiste em deslocar certas coisas ao longo de uma superfície, obedecendo a determinadas regras. No entanto, uma pessoa poderia questionar esse jogo dizendo que ele está representando os jogos de tabuleiro e há muitos jogos além desses. Isso pode ser corrigido, para Wittgenstein (1985), dizendo que esta explicação corresponde a jogos de tabuleiro e não aos jogos em geral.

As definições apresentadas pelos dicionários mostram que há outras definições de dimensão além de “sentido em que se mede a extensão para avaliá-la, estimá-la”, reforçando a fala de Wittgenstein (1985) de que nem tudo o que chamamos de linguagem é representado pelo sistema mencionado, pois não se trata simplesmente de dar nome às coisas.

Para Wittgenstein (1985), o “sentido de uma palavra está na sua aplicação” (p. 318) e, “uma palavra só vai ter sentido no contexto de sua aplicação” (p. 214). Um exemplo disso pode ser a palavra ‘dor’.

A palavra ‘dor’ é uma palavra que pode ser explicada por gestos, ou picando uma pessoa com o alfinete dizendo “isto é dor”, como pode ser feito com qualquer outra palavra para que ela seja compreendida corretamente, incorretamente ou não compreendida de todo.

Sobre compreender, na visão wittgensteiniana de linguagem, Glock (1998) afirma que:

> Compreender um proferimento não é ter uma experiência e tampouco corresponde a qualquer outra coisa que aconteça na mente do ouvinte. É, em vez disso, uma capacidade, manifesta no modo como o ouvinte reage ao proferimento (PI§§317, 363, 501-10) [livro *Investigações Filosóficas* parágrafos 317, 363, 501-10]. Compreender uma palavra é também uma capacidade, que se manifesta de três formas: no modo como usamos a palavra, no modo como reagimos quando outros a utilizam, e no modo como a explicamos quando somos solicitados a fazê-lo [...]. Esses três critérios para aferir a compreensão de uma palavra não são em princípio indissociáveis (uma mesma pessoa poder usar uma palavra corretamente e não reagir a ela de forma adequada ou ser incapaz de explicá-la); entretanto, o fato de que normalmente eles coincidem é um fator crucial para esse conceito. (p. 92)

Independente do modo como se compreende a palavra ‘dor’, essa compreensão se dará no uso que se faz dessa palavra, como se reage a ela e como a explicamos. Por mais que possamos falar “isto é dor”, a aplicação que uma pessoa faz da palavra ‘dor’ pode diferir de uma outra pessoa. Isto mostra que há outros usos para uma palavra além de nomear ou solicitar um objeto.

> Na prática do uso da linguagem (2) um dos participantes pronuncia as palavras, o outro atua de acordo com estas; mas durante o ensino da linguagem encontrar-se-á o *seguinte* processo: o aprendiz nomeia os objetos, i. e., pronuncia a palavra quando o professor mostra a pedra. – De fato, encontrar-se-á um exercício ainda mais fácil: o aluno repete a palavra que o professor pronuncia – ambos os processos são semelhantes a processos lingüísticos.
> Também podemos conceber que todo o processo do uso de palavras [...] seja um daqueles jogos por meio dos quais as crianças aprendem a sua língua natal. A estes jogos quero chamar *jogos de linguagem* e falarei por vezes de uma linguagem primitiva como sendo um jogo de linguagem.
> E poder-se-ia chamar aos processos de nomear as pedras e repetir as palavras também jogos de linguagem. Pensai no uso que se faz das palavras em jogos de roda.
> Chamarei também ao todo formado pela linguagem com as atividades com as quais ela está entrelaçada o "jogo de linguagem". (WITTGENSTEIN, 1985, p. 177)

A idéia de jogos de linguagem enfatiza que há muitas espécies diferentes de aplicação do que podemos chamar símbolos, palavras, proposições. Esta multiplicidade, diz Wittgenstein (1985), não é fixa, pois novos tipos de linguagem, novos jogos de linguagem surgem, outros envelhecem e são esquecidos. Um exemplo dessa multiplicidade é:

> Dar ordem e agir de acordo com elas –
> Descrever um objeto a partir do seu aspecto ou das suas medidas –
> Construir um objeto a partir de uma descrição (desenho) –
> Relatar um acontecimento –
> Fazer conjecturas sobre o acontecimento –
> Formar e examinar uma hipótese –
> Representação dos resultados de uma experiência através de tabelas e diagramas –
> Inventar uma história; lê-la –
> Representação teatral –
> Cantar numa roda –
> Resolver adivinhas –
> Fazer uma piada; contá-la –
> Resolver um problema de aritmética aplicada –
> Traduzir de uma língua para outra –
> Pedir, agradecer, praguejar, cumprimentar, rezar. (WITTGENSTEIN, 1985, p. 190)

Inventar um nome para uma coisa e dizer "isto chama-se ..." e aplicar o nome novo é, também, chamado "jogo de linguagem" por Wittgenstein que enfatiza que "A expressão *jogo* de linguagem deve aqui realçar o fato de que falar uma língua é uma parte de uma atividade ou de uma forma de vida” (WITTGENSTEIN, 1985, p. 189)

A palavra ‘dor’, ou melhor, o uso da palavra ‘dor’ citada anteriormente faz parte do que Wittgenstein (1985) chamou de jogos de linguagem. *Dimensão* também faz parte de jogos de linguagem, pois podemos, plausivelmente, pressupor que, pelo número de definições há a possibilidade de podermos aplicar esta palavra de diferentes modos.

Como foi dito anteriormente, podemos perceber que novas definições foram incorporadas aos dicionários e outras deixaram de aparecer nos dicionários atuais. No entanto, as definições apresentadas pelos dicionários delimitam essa noção, assim como a etimologia desta palavra, ao listar “todos” os significados considerados pelos “fazedores de dicionários”, como nos disse Lakoff (1987).

Se tomarmos a seguinte enunciação: “em que *dimensão* você se encontra Matilde?”, ao tentarmos encaixá-la em alguma das definições apresentadas pelos dicionários, acabamos não conseguindo bem. Isto mostra que há outros jogos de linguagem a serem levados em consideração quando falamos de *dimensão*, o que justifica a nossa posição ao tomarmos frases do cotidiano, numa tentativa, também, de fazer uma leitura mais fina das produções de significado para *dimensão*.

Para analisarmos as frases do cotidiano, o primeiro passo foi aplicarmos a definição ostensiva de *dimensão* dizendo “*dimensão* é ...” ao lermos cada uma das frases e, então, categorizá-las. A partir disso, tentamos fazer uma leitura no sentido wittgensteiniano dessas frases, observando o uso que essa noção assume em contextos diferenciados. Esse processo de dar nomes a objetos é uma preparação para o usá-los, falarmos deles, aplicá-los. Isto é o que faz com que aprendamos uma linguagem, numa visão wittgensteiniana, que nos faz funcionar num determinado contexto.

> Aprendemos o significado das palavras aprendendo a utiliza-las, da mesma forma que aprendemos a jogar xadrez, não pela associação de peças a objetos, mas sim pelo aprendizado dos movimentos possíveis para tais peças [...]. Uma proposição constitui um lance ou uma operação no jogo de linguagem; seria destituída de significado na ausência do sistema de que faz parte. Seu sentido é o papel que desempenha na atividade lingüística em curso [...]. Assim como no caso dos jogos, os lances possíveis dependem da situação (posição no tabuleiro), e, para cada lance, certas reações são inteligíveis, ao passo que outras são rejeitadas. (GLOCK, 1998, p. 225-226)

Então, para categorizarmos nossas frases, analisamos onde elas se encaixam nos itens da coluna “Definições de *dimensão*” da tabela anterior, construída por nós.

As frases que não se ajustaram, na nossa leitura, a nenhuma das dez categorias prévias criadas a partir dos dicionários para a definição de *dimensão*, se encontram em novas categorias, as quais criamos através de nomeações (definições ostensivas) feitas de acordo com um certo senso comum, porém inspirados por Lakoff (1987) e Wittgenstein (1985). Essas novas categorias se encontram em negrito (correspondentes aos itens 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.2, 6.1, 6.2, 11, 12, 13) no quadro a seguir. Não colocamos as cem frases nas categorias desse quadro por considerarmos que uma ou duas já são suficientes para representarem uma categoria. No entanto, colocamos os números correspondentes às frases que se encontram no Anexo, nas categorias do quadro para podermos ter uma idéia de quais frases foram as mais típicas (que ocorreram mais).

Quadro 2. Categorias presentes nas definições para *dimensão* criadas a partir dos dicionários e por nós de acordo com a leitura das frases do cotidiano.

Definições		Frases
1	Extensão mensurável que determina a porção do espaço ocupada por um corpo (comprimento, largura e altura)	**81** – [...] A dimensão da página, a impressão e o projeto gráfico, a presença ou não de ilustrações, [...] - **10** - [...] a publicidade afirma que pode-se "criar personagens *tridimensionais*, desenvolver heróis e vilões, estabelecer conflitos dramáticos e expandir as *dimensões* da trama"
1.1	**Formato**	**1** - Com dimensões de caderno, semelhantes à da belo-horizontina inspiradora, o número inicial de *Dimensão* foi lançado[...] - **73**
1.2	**"o espaço da coisa tratada"**	**27** - Tamanho: 345 KB, Dimensão: 1000x873 pixels. – **84** - "A definição de conhecimento matemático engloba duas dimensões, conhecimento da matemática e conhecimento acerca da matemática.[...] – **42, 45**
1.3	**Lugar**	**61** - Sinal vermelho. Pára. Atrás, bem rente, um pesado caminhão. Os freios a ar, em bruscas freadas intermitentes, produzem um som amedrontador. O ruído deixa-o mais atento. Surpreendentemente, a rua torna-se deserta, envolta em névoa. As luzes embaçadas captam o silêncio repentino. Ouvia-se apenas o fragor das freadas do enorme veículo, que parecia estar isolado, vindo de uma dimensão a que só Aguiar tinha acesso. Sustinha-se no ar o peso indefinido de coisas por acontecer, uma sutil sensação de finitude das coisas. Como num quadro surrealista, emoldurado pelas luzes baças e visão abstrata dos edifícios, restava um sentimento de intemporalidade, além das fronteiras do entendimento. - "Bia Falcão:Em que dimensão você se encontra Matilde?" (Novela "Belíssima" da Rede Globo)
2	Tamanho, proporção (mora numa casa de pequenas dimensões – Grande Enciclopédia Portuguesa e Brasileira, s.d.)	**2**- [...] cada unidade tem aproximadamente as *dimensões* de um ônibus [...]. **41** – [...] Apesar desta não ser uma surpresa para cientistas e tecnólogos, até ao momento os especialistas têm-se deparado com limitações técnicas relacionadas com a dimensão destes super computadores. – **56, 57, 58**
2.1	**Tamanho no sentido quantitativo**	**3**- [...] Leia aqui as promoções que preparamos especialmente para as empresas de média dimensão! - **4, 51, 40, 44** **43** - **Dimensão do absentismo "é exagerada".** "Acho o número exagerado". É assim que presidente do Sindicato Nacional dos Trabalhadores da Administração Local (STAL) [...], **93, 97, 99**
2.2	**Tamanho no sentido qualitativo**	**10** - [...] a publicidade afirma que pode-se "criar personagens tridimensionais, desenvolver heróis e vilões, estabelecer conflitos dramáticos e expandir as

		dimensões da trama" – **18, 20, 22, 25, 28, 89, 91, 95**
3	Sentido em que se mede a extensão para avalia-la/estima-la	
4	Mat. grau de potencia ou de uma equação algébrica.	
5	Importância ou valor (a dimensão universal de Camões – Ferreira, 1986)	**14** - [...] Este é um problema que transcende as fronteiras do estado e, pela dimensão que assume, deveria ser tratado com mais seriedade. [...] – **15, 33, 65, 66, 68, 72, 75, 76, 86, 100**
6	Aspecto significativo do pensamento, da obra, da realidade (a dimensão psicológica, a dimensão política; a dimensão da obra de Gil Vicente – Houaiss, 2001)	**36** - Partindo do pressuposto de que a questão saúde transcende a dimensão setorial e que, portanto, "não pode reduzir-se somente à organização dos serviços de saúde, à atenção à saúde [...]". – **48, 52, 55, 67, 79, 69, 70, 88**
6.1	**Aspecto** (não no sentido de aspecto significativo de alguma coisa, mas como se fosse uma parte de um todo que não necessariamente pode ser a significativa)	**5** - Concepções de aplicação encontradas em alguns trabalhos na área da Análise do Comportamento serão examinadas a seguir como exemplos do que os analistas do comportamento têm dito sobre a dimensão aplicada. **6, 8, 9, 13, 21, 29, 31, 34, 35, 46, 47, 49, 53, 54, 63, 71, 74, 77, 78, 80, 82, 83, 87, 90, 98, 19** - Nem sempre é fácil saber a quem interessa tanta violência, mas é evidente que a crise atual tem dimensões regionais.[...] – **24, 26, 50, 38, 39**
7	Cálculo Vetorial (Mat.): número de vetores da base	
8	Geometria Analítica (Mat.): número mínimo de coordenadas necessárias para a determinação unívoca de um ponto no espaço.	
9	A ordem das matrizes na representação matricial de um grupo; grau. (Mat.)	
10	O número mínimo de variáveis necessárias à descrição analítica de um conjunto. (Mat.)	
11	**"Nova dimensão"**	**60** - Realizou ainda performances em que, pela fala, deu nova dimensão à poesia acentuando a sonoridade das palavras. – **7, 12, 16, 30, 32, 60, 62, 85, 92**
12	**O que ainda não sabemos categorizar**	**11** - Constituindo um projeto de dimensão aberta, a Biblioteca Nacional Digital contemplará, em primeira instância, conteúdos previsível e usualmente procurados pela comunidade dos leitores de uma biblioteca nacional. – **17, 23, 59, 64, 96**
13	**Noção**	**94-** A análise individual nos treinamentos físicos possibilitou ao técnico ter uma dimensão dos pontos que precisam ser trabalhados em cada atleta.

Pelas definições apresentadas na tabela 2, *dimensão*, no nosso dia-a-dia, apareceu mais significativamente nas seguintes categorias:

- aspecto (itens 6.1);

- "tamanho quantitativo", tamanho "qualitativo", importância, aspecto significativo, "nova dimensão" (itens 2.1, 2.2, 5, 6 e 11)

As frases que apareceram pelo menos uma vez, são as correspondentes aos itens: 1, 1.1, 1.2, 1.3, 2, 12 e 13.

Não houve frases que correspondessem aos itens: 3, 4, 7, 8, 9 e 10, que, de uma forma geral, estão relacionadas com as definições matemáticas ou, com os significados matemáticos.

A designação dada pelos dicionários que consideramos faz suas categorizações relacionadas com os significados que *dimensão* vai assumindo, de acordo com as aplicações que vão surgindo, mas não colocam, na maioria das vezes, uma frase que exemplifique ou corresponda ao significado dado para *dimensão*. Por exemplo, que frase poderia corresponder a *dimensão* como "sentido em que se mede a extensão para avaliá-la"? No nosso caso, ao lermos a frase: "[...] cada unidade tem aproximadamente as *dimensões* de um ônibus [...]", a inserimos no item 2 por considerarmos que, neste caso, *dimensão* refere-se a "tamanho, proporção".

> [...] designar ainda não é um lance no jogo de linguagem – tão pouco como colocar uma peça no tabuleiro de xadrez é um lance no jogo de xadrez. Poder-se-ia dizer com a designação de uma coisa ainda não se fez *nada*. Fora do jogo ela não *tem* nome. Era isto também o que Frege queria dizer quando disse que uma palavra só tem sentido no contexto de uma aplicação. (WITTGENSTEIN, 1985, 214)

Designar é um primeiro passo para podermos falar dos usos de *dimensão*, ou, designar é um primeiro passo para, a partir disso, aplicarmos a palavra *dimensão*. Uma palavra só vai ter sentido no contexto de sua aplicação, ou melhor, num jogo, a palavra só vai ter sentido se, no contexto do jogo, ela for jogada de acordo com uma regra[36] determinada.

De acordo com Glock (1998), o papel estratégico da atividade de seguir uma regra é "estabelecer o modo como as regras guiam o nosso comportamento e determinam o significado das palavras." (GLOCK, 1998, p. 312).

Wittgenstein (1985) fala que:

---

[36] Regra, para Wittgenstein (1985), tem o mesmo sentido que a regra de um jogo no sentido usual, assim como a palavra jogo.

> Não pode ser que uma regra tenha sido seguida uma única vez por um único homem. Não pode ser que uma comunicação tenha sido feita, que uma ordem tenha sido dada ou compreendida apenas uma vez. Seguir uma regra, fazer uma comunicação, dar uma ordem, jogar uma partida de xadrez, são *costumes* (usos, instituições).
> Compreender uma proposição significa compreender uma linguagem. Compreender uma linguagem significa dominar uma técnica. (p. 320)

Esta fala de Wittgenstein mostra que seguir uma regra é uma prática, concordando com a leitura de Glock (1998) que diz:

> [...] Wittgenstein sugere também que a atividade de seguir uma regra é *tipicamente* social, e que *algumas* atividades guiadas por regras – incluindo-se não apenas as que são comunicáveis por natureza, como comprar e vender, mas também, por exemplo, fazer matemática – supõem o contexto de um "modo de vida" social e histórico [...] Mesmo paciência é um jogo que só pode ser jogado se a instituição do jogo existe. (p. 317-318)

Seguir uma regra, então, está relacionado com usos que se fazem dela, com os costumes, instituições, com a "corrente da vida", como diz Monk (1995) e, uma vez selada, "com um determinado sentido, traça através de todo o espaço as linhas que vão seguir a sua execução. [...] Quando eu sigo a regra, não escolho. Eu sigo a regra como se fosse *cego*." (WITTGENSTEIN, 1985, p. 329)

Quanto ao questionamento realizado por nós sobre o motivo de uma empresa se nomear *dimensão*, uma das respostas foi: "Existem dezenas de empresas com o nome Dimensão dos mais variados segmentos. No nosso caso, quando começamos nossa empresa queríamos um nome que traduzisse nossa capacidade sem limitá-la. Além disso, este nome é constantemente falado em todas as mídias a todo momento. 'a dimensão das coisas' sempre sugere alguma coisa grande ou de proporções imensuráveis". O fato de tal resposta estar associada a algo grande nos mostra que neste jogo de linguagem no qual *dimensão* está inserido – o que vamos chamar de um jogo de linguagem empresarial –, *sugerir* algo grande ou ser algo de capacidade não limitada é a regra desse jogo. Não é bom somente ser grande, é bom parecer grande e é essa regra que tem de ser seguida. O mesmo ocorre na frase "Quanto ao significado [da empresa], na época foi considerado um nome com amplitude e forte, em relação aos nossos concorrentes.", onde *dimensão* quer sugerir algo grande, inabalável às adversidades do mercado.

Esses são exemplos da leitura que passaremos a fazer, a seguir, das frases do cotidiano que coletamos. Para tanto, identificamos os diferentes jogos de linguagem onde *dimensão* é usada, ou seja, onde faz sentido o uso da palavra *dimensão* no contexto do jogo que ela for jogada e que possui uma dada regra, que julgamos ser plausível. Fizemos isso com as frases categorizadas nos itens 2.1 (tamanho no sentido quantitativo), 2.2 (tamanho no sentido qualitativo) e 5 (importância, valor) que são onde as designações das frases por nós categorizadas ficaram mais concentradas. Nos itens 6.1 (aspecto), 6 (aspecto significativo de algo) e 11 (nova dimensão), também houve uma grande ocorrência de frases, mas fizemos a leitura pretendida para os itens 2.1, 2.2 e 5 porque, na nossa visão, esses itens são suficientes para mostrar os diferentes jogos de linguagem para *dimensão*, ou melhor, os diferentes usos de *dimensão* no cotidiano.

4.1. *Dimensão* como "tamanho quantitativo"

Consideremos as frases 3 e 4: "Aproveite estas oportunidades excepcionais de pagar menos por um produto ou solução Microsoft. Leia aqui as promoções que preparamos especialmente para as empresas de média dimensão!" e "O Serviço de Consultoria de 'Business Continuity and Recovery Healthcheck' foi criado a pensar nos clientes de dimensão média e pequena que em geral não precisam de estudos de *Disaster Recovery* muito complexos e portanto caros". Dizemos que *dimensão*, nestes dois casos (item 2.1), refere-se a "tamanho quantitativo". Neste caso, especificamente, buscamos no site do Sebrae o que quer dizer empresa de pequeno ou médio porte ou pequena e média dimensão. Neste site[37] encontramos a definição de microempresa e empresa de pequeno porte

> Atualmente, há duas leis federais que definem microempresa e empresa de pequeno porte, a saber: O Estatuto da Microempresa e da Empresa de Pequeno Porte (Lei nº 9.841/99), que estabelece incentivo através da simplificação de suas obrigações administrativas, previdenciárias e creditícias e pela eliminação ou redução destas por meio de lei, assim as define:
> - Microempresa é a pessoa jurídica com receita bruta anual igual ou inferior a R$ 433.755,14.
> - Empresa de pequeno porte de R$ 433.755,15 a R$ 2.133.222,00.
>
> A Lei do Simples Federal (Lei nº 9.317/96), que dá benefícios do ponto de vista tributário e fiscal, as define desta forma:
> - Microempresa, aquela que tem faturamento anual de até R$ 240.000,00.
> - Empresa de pequeno porte a que fatura até R$ 2.400.000,00. (SEBRAE, 2007)

37 http://www.sebraesp.com.br/principal/abrindo%20seu%20neg%F3cio/orienta%E7%F5es/cria%E7%E3o%20de%20empresas/prin03micro.aspx Acessado em 08 de maio de 2007.

De acordo com o site, classificar empresas desse modo se dá por meio de uma faixa fixa de rendimentos, de valores. Foi devido a existência desses valores dados em termos de números que inserimos essas frases que contêm a palavra *dimensão* neste item.

O que faz com que usemos *dimensão* de acordo com a designação dada – quantitativo – é que, nesse jogo, classificar empresas em termos de rendimento é importante, já que essa regra faz com o que jogo seja jogado de tal modo que no ramo empresarial se possa ter ações dirigidas a um determinado tipo de empresa, como, por exemplo, a cobrança de impostos.

Ainda dentro desse jogo de linguagem – de *dimensão* como sendo "tamanho quantitativo" – temos uma outra regra que faz com que tenhamos um outro jogo de linguagem nele inserido. Os usos de *dimensão* nas frases 43[38] e na frase 99[39] estão relacionados não com se ter uma classificação, mas uma quantificação. Usa-se *dimensão* nesses casos para saber qual é a quantidade que algo está representando, por exemplo, a quantidade de pessoas que sofreram agressões sexuais e a quantidade de absentismos.

4.2. *Dimensão* como "tamanho qualitativo"

Neste item nos referimos a *dimensão* como "tamanho qualitativo" (item 2.2). Isto está relacionado com o fato de que em frases como: "[...] a publicidade afirma que pode-se "criar personagens tridimensionais, desenvolver heróis e vilões, estabelecer conflitos dramáticos e expandir as dimensões da trama." (frase 10) serem enunciadas não com o objetivo de se ter um número, uma quantidade, o que se quer é fazer com que a trama seja maior, que ela seja mais ampla, tenha uma qualidade de impacto, uma repercussão maior, seja ela social, moral, ética ou política.

Outro exemplo desse jogo pode ser dado pela frase 18: "Em troca de benefício da delação premiada, que concede perdão ou abrandamento da pena ao réu que colabora com a justiça, Luiz Antonio Vedoin, o maior operador do esquema, revelou a verdadeira dimensão do caso ao juiz Jeferson Schneider, da 2ª Vara Federal de Cuiabá". Falamos, neste caso, que *dimensão* refere-se a "tamanho qualitativo" porque aqui usamos *dimensão* para falar do quão

[38] "Dimensão do absentismo é exagerada, 'Acho o número exagerado', é assim que presidente do Sindicato Nacional dos Trabalhadores da Administração Local (STAL), Francisco Brás, reage à notícia, publicada ontem pelo "Diário de Notícias", de que os trabalhadores municipais faltam ao trabalho, em média, 20 dias por ano, referindo como principais motivos do absentismo a falta de condições de trabalho e a sinistralidade"

[39] "Uma das dificuldades é lidar com agressões sexuais, que aparecem como uma das grandes ameaças a civis no conflito. Enquanto o CICV reconhece o problema, não sabe precisar sua real dimensão. Em 2006 o grupo relata atendimento a 28 vítimas de agressões sexuais devido ao conflito"

grande foi a repercussão do caso, não no aspecto de quantidade, novamente, mas da qualidade de impacto que foi revelado por Luiz Antonio Vedoin.

Pode-se questionar o porquê de não nos referirmos a *dimensão* como "tamanho" (item 2 da tabela 2) para depois falarmos de possíveis subjogos para *dimensão* como os dos itens 2.1 e 2.2. Isso não ocorreu porque esses possíveis subjogos foram os que mais se apresentaram nas frases que recolhemos e isso fez com que considerássemos esses subjogos como sendo jogos distintos, o que, na nossa visão, não deixa de ser plausível tratá-los desse modo.

4.3. *Dimensão* como "importância ou valor"

Consideremos as seguintes frases: "[...] Este é um problema que transcende as fronteiras do Estado e, pela dimensão que assume, deveria ser tratado com mais seriedade. [...]" (frase 14) e "Em 1998 assina contrato com a MZA Music, gravadora do conceituadíssimo produtor Marco Mazzola e ainda sob a batuta do maestro Mário Manga, lança em 1999 seu segundo CD 'Pérolas aos Povos' o qual recebe excepcional acolhida de público e crítica. Neste mesmo ano ao lado de Ney Matogrosso, Milton Nascimento, Zeca Baleiro e Chico César, se apresenta na noite brasileira do 'Festival de Jazz de Montreux' – Suíça, e ainda é convidada a apresentar-se no 'Festival Brasil – Caracas' na Venezuela, atingindo uma grande dimensão internacional em sua segura trajetória musical.".

Nestas frases, relacionamos a palavra '*dimensão*' a "importância ou valor" (item 5), porque nesse jogo, é o papel de destaque que algo ou alguém assume no contexto no qual está inserido que faz com que o consideremos um jogo de linguagem para *dimensão*.

4.4. O que ainda não conseguimos categorizar

Fizemos, como foi dito, a análise das categorias correspondentes aos itens 2.1, 2.2 e 5, por serem os que mais tiveram frases contidas neles. Não fizemos uma análise das demais categorias e até mesmo de categorias onde a ocorrência de frases foi grande (como mencionado anteriormente) por julgarmos que essas já nos são exemplos exemplares de como funciona a palavra *dimensão*, sob alguns aspectos, nesse nosso mundo, nesse jogo do dia-a-dia, do cotidiano.

As demais frases podem ser analisadas do mesmo modo, com exceção das frases que se encontram no item 12 da tabela, que intitulamos "o que ainda não conseguimos categorizar". Mesmo havendo regras que fazem com que os jogos sejam jogados, *dimensão* foi usada de um modo que não conseguimos falar "*dimensão* é..." para, a partir disso, podermos aplicar essa palavra do modo como a designamos. Poderíamos ter omitido essas frases apontando a possibilidade de haver frases que pudessem ser categorizadas de outros modos, diferentemente do que fizemos, o que não deixa de ser verdade até mesmo para as frases que se encaixaram nas categorias que montamos, pois fizemos uma leitura que não implica em ser a única. Além disso, deixamos essas frases do item 12, também, porque é possível que a aplicação de uma palavra, no nosso caso *dimensão*, não esteja regulada,

> [...] o *jogo* que com ela jogamos não está regulado". – Não está completamente delimitado por regras; mas também não há uma regra que determine no tênis a que altura se deve jogar a bola, ou com que força e, no entanto, o tênis é um jogo e também tem regras. (WITTGENSTEIN, 1985, p. 230)

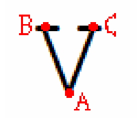
Ter uma regra não significa ter uma fronteira bem delimitada. Wittgenstein (1985) fala que podemos traçar algumas, que para uma finalidade especial se trace uma fronteira, mas, mesmo assim, isso não significa que somente depois de traçada a fronteira é que um conceito possa ser utilizado. Ele exemplifica isso dizendo:

> [...] Tal como a medida de comprimento "um passo", que não começa só a poder a ser utilizada quando se dá a definição: 1 passo = 75 cm. E quiseres dizer: "Mas antes da definição não era uma medida de comprimento exata", então eu respondo: bem, então era inexata. – Embora ainda me devas a definição de exatidão. (WITTGENSTEIN, 1985, p. 231)

Não conseguimos dizer precisamente a que jogos de linguagem *dimensão* está sendo usada nas frases do item 12. Wittgenstein esclarece que "Os jogos de linguagem são muito mais *objetos de comparação*, que por semelhança ou dissemelhança irão esclarecer os fatos da nossa linguagem." (WITTGENTEIN, 1985, p. 264) e faz o seguinte questionamento:

> [...] pode aquilo que captamos de um gole concordar com uma aplicação, ajustar-lhe, não se ajustar-lhe? E como pode aquilo que num momento temos presente, aquilo que num momento nos ocorre, ajustar-se a uma aplicação? (p. 270)

Um exemplo relacionado com esse questionamento é o exemplo do cubo. Se alguém diz a palavra cubo, sabemos qual é o sentido da palavra e nos ocorre uma imagem como o desenho de um cubo. Até que ponto essa imagem ajusta-se ou não a uma aplicação da palavra cubo? Outro exemplo pode ser o seguinte: pensemos num quadrilátero, qualquer um; agora, façamos um “V” num pedaço de papel, consideremos o “bico” da letra “V” como sendo o ponto “A” e sendo “B” e “C” os pontos referentes a cada um dos lados da letra “V”, conforme a figura:



Tendo feito isso, imagine que a ponta do seu nariz seja o ponto “D” e ligue esse ponto “D” ao ponto “B” e ao ponto “C”, formando o segmento DB e o segmento DC, que figura foi formada? Essa figura formada corresponde ao quadrilátero que você pensou? Até que ponto a palavra ‘quadrilátero’ se ajustou ou não à figura que foi montada[40]?

Segundo Wittgenstein, essa espécie de erro ocorre por se acreditar que a imagem impunha uma determinada aplicação.

> E o essencial é vermos que, ao ouvirmos a palavra, nos pode ocorrer o mesmo objeto e, no entanto, a sua aplicação, ser uma outra. E tem então o *mesmo* sentido em ambas as vezes? Julgo que diremos que não. (WITTGENSTEIN, 1985, p. 272)

A aplicação correta de algo, de acordo com Wittgenstein (1985), ocorre quando compreendemos esse algo, fazendo com que não utilizemos as palavras de um jogo conforme as regras de um outro jogo.

4.5. Estabelecendo relações entre o MCS e os jogos de linguagem de Wittgenstein (1985)

Com essas análises, esperamos ter deixado claro que há vários jogos de linguagem possíveis quando usamos a palavra *dimensão* e, esses jogos só são possíveis de serem identificados quando é considerado o contexto em que a palavra ‘*dimensão*’ está sendo usada. Assim, se considerarmos, por exemplo, a seguinte frase (frase 14): “[...] Este é um problema que transcende as fronteiras do Estado e, pela dimensão que assume, deveria ser tratado com mais seriedade”, dentro deste jogo, onde *dimensão* refere-se a importância, uma frase como: “[...] Cada unidade tem aproximadamente as dimensões de um ônibus interestadual e é um

[40] Esse exemplo, com pequenas modificações, foi dado pelo professor Carlos Roberto Vianna na aula de Filosofia da Educação Matemática do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Unesp de Rio Claro no dia 03 de maio de 2007. Esse exemplo não foi dado necessariamente para falar do que estamos falando, mas resolvemos usá-lo por acharmos que nesse contexto que estamos abordando, ele se aplica plausivelmente.

"estúdio" compacto, portátil, sobre rodas, que contém todos os equipamentos de câmara necessários para fazer um filme" (frase 2), não faz sentido ou não se aplica a esse jogo. Isto significa que num jogo de linguagem, coisas pertencem ou não a ele.

No cotidiano – lugar onde ocorreram e ocorrem jogos de linguagem que usam *dimensão* – podemos ver que nenhuma das frases foram categorizadas nos itens correspondentes às definições matemáticas (itens 4, 7, 8, 9, 10). A matemática do matemático, conforme a definimos, não pertence a esse cotidiano.

O fato da matemática do matemático não estar presente nos jogos de linguagem das frases do cotidiano, que foram categorizadas, não implica que o cotidiano seja uma versão imperfeita ou incompleta da matemática do matemático, ou o contrário. São jogos de linguagem diferentes, com contextos diferenciados. Wittgenstein (1992) não considera os jogos de linguagem como sendo partes incompletas da linguagem "mas como linguagens completas em si, como sistemas completos de comunicação humana" (WITTGENSTEIN, 1992, p. 14).

Fazendo uma leitura de tudo o que foi feito até aqui, quando olhamos para os possíveis jogos de linguagem para *dimensão*, podemos perceber que mesmo não havendo fronteiras estabelecidas, um jogo de linguagem é algo dado, ou seja, você fala dentro de um jogo e se o que foi falado dentro desse jogo não for plausível, é porque a aplicação feita ou o uso do que foi falado não pertence a esse jogo, isto é, não seguimos a regra corretamente.

Pensando em termos do MCS, mudar de jogo de linguagem significa mudar de *núcleo*, isto é, "um conjunto de estipulações locais que, num dado momento e dentro de uma atividade, estão em jogo" (LINS, 1999, p. 87), onde estipulações locais são afirmações que localmente não precisam ser justificadas.

> [...] O que é importante e revelador é que esse "localmente" se refere ao interior de uma atividade, e que no processo dessa atividade esse núcleo pode se alterar pela incorporação de novas estipulações (elementos) ou pelo abandono de algumas estipulações até ali assumidas. (LINS, 1997, p. 144)

Por exemplo, se no jogo correspondente ao item 2.1 (correspondendo *dimensão* a "tamanho quantitativo"), através da frase 4[41], pensarmos e aplicarmos *dimensão* como sendo importância, estaremos mudando o modo como classificamos as empresas, ou seja, mudando a produção de significados para a frase 4, estamos mudando de *núcleo*.

---

[41] (O Serviço de Consultoria de "Business Continuity and Recovery Healthcheck" foi criado a pensar nos Clientes de dimensão média e pequena que em geral não precisam de estudos de *Disaster Recovery* muito complexos e portanto caros)

Quando o núcleo muda, passamos a operar num outro campo semântico, que é "atividade de produzir significado em relação a um núcleo" (SILVA, 2003, p. 66) ou, passamos a operar num outro jogo. Vale ressaltar que "a idéia do núcleo é dinâmica; o núcleo não é uma acumulação de estipulações locais e tão pouco pré-existente à atividade: ele é constituído durante a própria atividade" (OLIVEIRA, 2002, p. 31).

Nos jogos de linguagem, quando alguém, ao enunciar a frase 4 pensa *dimensão* como importância, significa que esse alguém está aplicando outras regras nesse jogo diferentemente da pessoa que diz que dimensão refere-se a tamanho e utiliza isso em suas falas. Com isso, identificamos dois jogos de linguagens distintos, ou pessoas falando em direções distintas.

No nosso trabalho não houve interação, o que houve foi uma tentativa de leitura plausível para as frases do cotidiano, como que dirigida a uma interação que não vai acontecer. No entanto, esse processo de leitura visa à interação, ou seja, tem a intenção de que, num processo interativo, possamos produzir significados plausivelmente para os resíduos de enunciações como esperamos ter feito nessa parte do trabalho.

Quando alguém fala e aplica *dimensão* diferentemente de uma outra pessoa, Wittgenstein (1985) diria que elas não estão no mesmo jogo de linguagem, que houve ou um erro de aplicação da regra ou um outro modo de operar com a regra (que gera um outro jogo de linguagem nem melhor, nem pior que o anterior, é um outro jogo). Já no MCS, quando lemos que as pessoas operam diferentemente com uma noção, o que queremos não é caracterizá-la pela falta, dizendo que ela não está no mesmo jogo de linguagem que o nosso, ou que houve um erro, que a pessoa não está sabendo operar com algo, que falta a essa pessoa conteúdo ou desenvolvimento intelectual. O que está em foco é tentar entender como uma pessoa faz o que fez, "é buscar fazer uma leitura do outro através de suas legitimidades, seus interlocutores, compartilhando o mesmo espaço comunicativo" (SILVA, 2003, p. 54). Esse modo de leitura do outro que o MCS oferece é chamado de *leitura positiva*.

Pelos trabalhos de Wittgenstein (1985, 1992), alguém poderia dizer que ele não pratica uma leitura do outro pela falta, mas Monk (1995) expõe uma situação na qual havia discordância entre Wittgenstein e Turing no que se refere a possibilidade de haver experimentos na Matemática, tal como na Física. Para Turing isso era possível, enquanto para Wittgenstein era impossível. Monk (1995) coloca a seguinte citação de Wittgenstein (apud Monk, 1995), numa tentativa de ilustrar a vontade deste em fazer Turing ver que os matemáticos não fazem experimentos como na física,

> Turing acha que ele e eu estamos usando a palavra 'experimento' de duas

> maneiras diferentes. Mas quero mostrar-lhe que não. Ou seja, acho que se me expressasse com clareza, ele desistiria de afirmar que na matemática se fazem experimentos. Se eu conseguisse dispor na ordem apropriada certos fatos bem conhecidos, ficaria claro que Turing e eu não estamos usando a palavra 'experimento' de maneira diferente.
> Alguém podia perguntar: 'como é possível haver um mal-entendido tão difícil de corrigir?'
> Talvez se explique em parte por uma diferença de formação cultural. (WITTGENSTEIN, apud MONK, 1995, p. 374)

Esse trecho nos mostra que mesmo querendo tornar claro para Turing a questão da não possibilidade em se fazer experimentos em matemática como na física, sem opor algo ao ponto de vista de Turing, Wittgenstein desautoriza o uso que Turing faz para experimento ao querer que este compartilhe o mesmo *espaço comunicativo* que ele e, ao mesmo tempo, não querendo compartilhar o *espaço comunicativo* "de Turing". É com base nisso e nas nossas leituras de Wittgenstein que podemos dizer que mesmo operando com a idéia de que estamos aplicando do mesmo modo ou de modos diferentes uma palavra ou uma proposição, tendo assim um mesmo jogo de linguagem ou jogos de linguagens diferentes, consideramos que a esse processo é importante que tentemos entender como uma pessoa faz o que fez. Quando alguém usa *dimensão* na frase 4, de um modo diferente de "tamanho quantitativo", que foi a categoria que montamos, dizemos que estamos operando em relação a núcleos diferentes e mesmo que para nós *dimensão* seja usada deste ou daquele modo, outra pessoa pode usá-la de outro modo, como foi o exemplo de se considerar *dimensão*, naquele contexto como sendo "importância". Se quisermos fazer com que a pessoa entenda *dimensão* como sendo "tamanho quantitativo", é importante sabermos como a pessoa utiliza *dimensão* num determinado contexto para que, a partir daí, ocorra uma tentativa de fazer com que essa pessoa compartilhe de um mesmo espaço comunicativo que nós, mesmo que depois ela deixe de participar desse espaço para voltar a operar do modo como operava.

Passemos agora a leitura de como *dimensão* aparece na matemática do matemático e em uma sala de aula de matemática.

5. Segundo Episódio: o jardim do matemático e *dimensão* em uma disciplina matemática

> - Senhor, sua própria sabedoria me ensinou a aspirar a alguém ainda maior, mais bonito, e mais próximo da perfeição. Como o senhor, superior a todas as formas de Planolândia, é uma combinação de muitos círculos em um, sem dúvida existe alguém acima, que é uma combinação de muitas esferas em um ente supremo que supera até os sólidos de Espaçolândia. E exatamente como nós, que agora estamos no espaço, olhamos para baixo, para Planolândia e vemos os interiores de todas as coisas, certamente existe mais acima de nós uma região mais elevada, mais pura, para onde vós sem dúvida tendes o propósito de me levar [...] um espaço mais espaçoso, uma dimensionalidade mais dimensionável, uma posição vantajosa de onde olharemos juntos para baixo, para os interiores revelados das coisas sólidas, e onde seus intestinos, e os de suas esferas aparentadas, estarão expostos à vista do pobre exilado desgarrado de Planolândia, a quem tanto foi concedido. (Edwin A. Abbott)

Um dos objetivos desta parte do trabalho foi analisar como *dimensão* aparece na matemática do matemático, ou seja, entender o que chamamos de significados matemáticos (como definidos no segundo capítulo) para *dimensão*. Para isso, consultamos livros de álgebra linear, com o intuito de analisar como *dimensão* é definida, isto é, como os matemáticos lidam com essa noção. Escolhemos a álgebra linear pelo fato de alguns membros do nosso grupo de pesquisa (Sigma-t) terem trabalhado com esta área, o que permitiu que tivéssemos dados a mais para nossa análise. Outro motivo pela escolha desta área ocorreu devido à necessidade de se fazer um recorte, já que não há uma única definição de *dimensão* na matemática.

Os livros de álgebra linear utilizados foram: Anton e Rorres (2006), Halmos (1978) e Hoffman e Kunze (1970). Inicialmente tínhamos escolhido as obras de Halmos (1978) e Hoffman e Kunze (1970), mas resolvemos acrescentar a de Anton e Rorres (2006) por ser um livro que nos ajudou a falar tanto de *dimensão* na álgebra linear como de *dimensão* na teoria dos fractais, outro tema tratado neste capítulo. Essa parte do trabalho, denominada "No Jardim do Matemático: uma definição para *dimensão*" se estruturou da seguinte forma: listamos todos os temas tratados pelos autores dos livros de álgebra linear antes da definição de *dimensão*; colocamos maior ênfase na parte que trata de "espaços vetoriais" por ser nela onde a noção de *dimensão* é dada; apresentamos a definição de *dimensão*, de acordo com os livros e, também, a definição de "espaço vetorial de dimensão finita". Além disso, quando, nas obras consultadas, havia alguma fala relacionada com *dimensão*, nós a citamos.

Apresentamos, ainda, neste capítulo, duas definições matemáticas distintas de *dimensão* por acreditarmos que isto contribui para reforçar o fato de que na matemática do matemático, a definição de *dimensão* não é única; ela depende da área que se está trabalhando. A intenção inicial era abordar somente fractais, mas como a definição de fractais menciona *dimensão topológica*, resolvemos também abordá-la. Para esta parte, que intitulamos "Outras definições de *dimensão*", nos baseamos nas obras de Anton e Rorres (2006), Edgard (1990), Lipschutz (1971) e Wright (1996).

O leitor pode questionar por que não abordamos a geometria euclidiana, já que ela é mais comum. Não fizemos isso pois, conforme veremos adiante, a álgebra linear incorpora noções da geometria euclidiana, sendo a recíproca não verdadeira. Sendo assim, consideramos que abordar a geometria euclidiana, especificamente, não nos permitiria que as diferenças entre as áreas matemáticas, ou melhor, entre as definições matemáticas para *dimensão* ficassem mais visíveis.

O outro objetivo desta parte do trabalho refere-se à realização de uma leitura de como pessoas que cursaram a disciplina de álgebra linear falaram sobre *dimensão*, quais os significados que produzimos para os resíduos de enunciações relacionadas com essa noção e com as falas dos matemáticos a respeito de *dimensão*, embasados na pesquisa realizada por Silva (2003), membro do Sigma-t.

A pesquisa de Silva (2003) não versou, especificamente, sobre *dimensão*, mas há algumas falas a respeito dessa noção e é por meio delas que faremos a nossa leitura.

5.1. No Jardim do Matemático[42]: uma definição para *dimensão*

5.1.1. Hoffman e Kunze (1970)

Para Hoffman e Kunze (1970), a álgebra linear "A grosso modo, [...] é o ramo da matemática que trata das propriedades comuns a sistemas algébricos constituídos por um conjunto mais uma noção razoável de uma 'combinação linear' de elementos do conjunto." (HOFFMAN e KUNZE, 1970, p. 30)

A partir dessa visão de álgebra linear, Hoffman e Kunze (1970) falam que vão definir o objeto matemático que é a abstração mais útil deste tipo de sistema algébrico: a definição de espaço vetorial. Mas antes disto, eles iniciam seus trabalhos definindo corpos, sistema de equações lineares, matrizes e operações sobre matrizes, noções que para eles são preliminares ao estudo do conteúdo da álgebra linear.

A definição de espaço vetorial[43] é, então, colocada com a ênfase de que um espaço vetorial é um objeto composto de um corpo, um conjunto de "vetores" e duas operações com certas propriedades especiais. E, logo em seguida, as definições de combinação linear[44], subespaço vetorial[45], dependência e independência linear[46], base[47], espaço vetorial de

---

[42] Esse termo aparece em Lins (2004a), onde é discutido detalhadamente.

[43] **Definição.** Um **espaço vetorial** (ou espaço linear) consiste do seguinte:(1) um corpo F de escalares;(2)um conjunto V de objetos, denominados vetores;(3) uma regra (ou operação), dita adição de vetores, que associa a cada par de vetores α, β em V um vetor $\alpha+\beta$ em V, denominado a soma de α e β, de maneira tal que: (a) a adição é comutativa, $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;(b) a adição é associativa, $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$;(c)existe um único vetor 0 em V, denominado vetor nulo, tal que $\alpha+0=\alpha$ para todo α em V, (d) para cada vetor α em V existe um único vetor $-\alpha$ em V tal que $\alpha+(-\alpha)=0$;(4) uma regra (ou operação), dita multiplicação escalar, que associa a cada escalar c em F e cada vetor α em V um vetor $c\alpha$ em V, denominado o produto de c por α de maneira tal que: (a)$1\alpha=\alpha$ para todo α em V;(b) $(c_1c_2)\alpha=c_1(c_2\alpha)$;(c) $c(\alpha+\beta)=c\alpha+c\beta$;(d) $(c_1+c_2)\alpha=c_1\alpha+c_2\alpha$. (HOFFMAN e KUNZE, 2003, p. 30-31)

[44] **Definição.** Um vetor β em V é dito uma **combinação linear** dos vetores $\alpha_1,\alpha_2, ..., ,\alpha_n$ em V se existem escalares $c_1, c_2, ..., c_n$ em F tais que $\beta= c_1\alpha_1+ c_2\alpha_2+...+ c_n\alpha_n=\Sigma c_i\alpha_i$. (HOFFMAN e KUNZE, 1970, p. 34)

[45] **Definição.** *Seja* V *um espaço vetorial sobre o corpo* F. *Um* **subespaço** *de* V *é um subconjunto* W *de* V *que é um espaço vetorial sobre* F *com as operações de adição de vetores e multiplicação escalar de* V. (HOFFMAN e KUNZE, 1970, p. 37)

[46] **Definição.***Seja* V *um espaço vetorial sobre* F. *Um subconjunto* S *de* V *é dito* **linearmente dependente** *(ou, simplesmente,* **dependente***) se existem vetores distintos* $\alpha_1,\alpha_2, ..., ,\alpha_n$ *em* S *e escalares* $c_1, c_2, ..., c_n$ *em* F, *não todos nulos, tais que* $c_1\alpha_1+ c_2\alpha_2+...+ c_n\alpha_n=0$.

Um conjunto que não é linearmente dependente é dito **linearmente independente**. *Se o conjunto* S *contém apenas um número finito de vetores* $\alpha_1,\alpha_2, ..., ,\alpha_n$ *dizemos, às vezes, que* $\alpha_1,\alpha_2, ..., ,\alpha_n$ *são dependentes (ou independentes) em vez de dizer que* S *é dependente (ou independente). Decorrem facilmente da definição as consequências seguintes:*

(a) Todo conjunto que contém um conjunto linearmente dependente é linearmente dependente.

(b) Todo subconjunto de um conjunto linearmente independente é linearmente independente.

(c) Todo conjunto que contém o vetor nulo é linearmente dependente, pois $1.0 = 0$.

(d) Um conjunto S de vetores é linearmente independente se e somente se todo subconjunto finito de S é linearmente independente, isto é, se e somente se para quaisquer vetores distintos $\alpha_1,\alpha_2, ..., ,\alpha_n$ em S $c_1\alpha_1+ c_2\alpha_2+...+ c_n\alpha_n=0$ implica que cada $c_i = 0$. (HOFFMAN e KUNZE, 1970, p. 43)

dimensão finita – *Um espaço vetorial* V *é de* **dimensão finita** *se ele possui uma base finita.* (HOFFMAN e KUNZE, 1970, p. 46) – e *dimensão* são apresentadas.

Antes de definir *dimensão*, Hoffman e Kunze (1970) justificam: "[...] Apesar de associarmos usualmente "dimensão" a algo geométrico, precisamos encontrar uma definição algébrica adequada de dimensão de um espaço vetorial [...]." (p, 43). A definição de *dimensão*, para eles é: "*Se* V *é um espaço vetorial de dimensão finita, a* **dimensão** *de* V *é definida como sendo o número de elementos de uma base de* V. *Indicaremos a dimensão de um espaço vetorial* V *de dimensão finita por dim* V." (HOFFMAN e KUNZE, 1970, p. 46).

5.1.2. Halmos (1978)

Para Halmos (1978), o propósito de seu livro é tratar de transformações lineares em espaços vetoriais de dimensão finita. Halmos (1978) inicia seu trabalho com a definição de corpo para, logo em seguida, ser colocada a definição de espaço vetorial.

Halmos (1978) comenta que "espaços vetoriais especiais (tais como R^2 e R^3) são familiares em geometria" (HALMOS, 1978, p. 15).

As próximas definições, seguindo a seqüência do livro de Halmos (1978), são de: dependência linear, combinação linear, base, espaço vetorial[48] de dimensão finita – "Um espaço vetorial *V* é de *dimensão finita* se possui base finita." (HALMOS, 1978, p. 19) – e *dimensão*.

A *dimensão* de um espaço vetorial *V* é definida como: "o número de elementos em uma base de V." (HALMOS, 1978, p. 23).

Após a definição de *dimensão*, Halmos (1978) fala que:

> [...] o conjunto vazio de vetores é uma base do espaço trivial 0, a definição implica que este espaço possui dimensão 0. Ao mesmo tempo a definição [...] justifica nossa terminologia [R^n, C^n] e permite-nos enunciar o agradável resultado: o espaço de coordenadas *n*-dimensional tem dimensão *n*. (Como o argumento é o mesmo para R^n e para C^n, a asserção é verdadeira tanto para o caso real quanto no complexo.). (p. 23)

---

[47] **Definição.** Seja V um espaço vetorial. Uma **base** de V é um conjunto linearmente independente de vetores em V que gera V. (HOFFMAN e KUNZE, 1970, p. 44)

[48] Não repetiremos as definições de espaço vetorial, combinação linear, subespaço, dependência linear e base. quando tratarmos das obras de Halmos (1978) e Anton e Rorres (2006), pois consideramos que essas definições são dadas para situar o leitor e além disso, são matematicamente equivalentes às noções de Hoffman e Kunze (1970).

5.1.3. Anton e Rorres (2006)

Anton e Rorres (2006) afirmam que dão um tratamento elementar à álgebra linear e suas aplicações. O objetivo deles é apresentar os fundamentos elementares dos assuntos tratados de maneira mais clara possível. Para isso, abordam, inicialmente, sistemas de equações lineares e matrizes e, no capítulo seguinte, determinantes.

Há os capítulos denominados “vetores nos espaços bi e tridimensionais”, onde são introduzidos vetores bi e tridimensionais geometricamente, e “espaços vetoriais euclidianos”, onde os autores definem espaço n-dimensional por meio de n-uplas ordenadas e abordam transformações de R^n em R^m, como, por exemplo: as equações $w_1=x_1+x_2$, $w_2=3x_1x_2$ e $w_3=x_1^2-x_2^2$ definem uma transformação de R^2 em R^3, sendo a imagem do ponto (x_1, x_2) desta transformação o ponto $T(x_1, x_2)=(x_1+x_2, 3x_1x_2, x_1^2-x_2^2)$ (Anton e Rorres, 2006).

No quinto capítulo, intitulado “espaços vetoriais arbitrários”, Anton e Rorres (2006) generalizam a noção de vetor e definem espaço vetorial, ressaltando que essas definições não especificam nem a natureza dos vetores, nem as das operações. Ainda neste capítulo, eles definem subespaços vetoriais, combinações lineares, independência linear, base, espaço vetorial de dimensão finita e *dimensão*.

A definição de espaço vetorial de dimensão finita é dada do seguinte modo:

> Um espaço vetorial não nulo *V* é chamado ***de dimensão finita*** se contém um conjunto finito $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ de vetores que constitui uma base de *V*. Se não existir um tal conjunto, dizemos que *V* é ***de dimensão infinita***. Além disto, consideramos o espaço vetorial nulo como sendo de dimensão finita (ANTON E RORRES, 2006, p. 178).

Antes de definir dimensão, os autores enunciam os seguintes teoremas:

> Teorema 5.4.2
> *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ *uma base qualquer de V.*
> *(a) Um conjunto com mais do que n vetores é linearmente dependente.*
> *(b) Um conjunto com menos do que n vetores não gera V.*
> [...]
> Teorema 5.4.3
> *Todas as bases de um espaço vetorial de dimensão finita têm o mesmo número de vetores* (p. 178-179).

Os teoremas enunciados fornecem, na visão de Anton e Rorres (2006), a chave para o conceito de *dimensão*. Como exemplo de que o último teorema está relacionado com a definição de *dimensão*, os autores fazem a seguinte observação:

> [...] recorde que a base canônica de R^n tem n vetores (Exemplo 2). Assim, o Teorema 5.4.3 implica que todas as bases de R^n tem n vetores. Em particular, todas as bases de R^3 tem 3 vetores, todas as bases de R^2 tem 2 vetores e todas as bases de R^1 (=R) têm um vetor. Intuitivamente R^3 é tridimensional, R^2 (um plano) é bidimensional e R (uma reta) é unidimensional. Assim o número de vetores numa base é o mesmo que a dimensão, para os espaços familiares. [...] (p. 179)

A definição de *dimensão* é, então, apresentada:

> A ***dimensão*** de um espaço vetorial de dimensão finita *V* é definida como o número de vetores de uma base de *V* e denotada por dim (*V*). Além disto, definimos o espaço vetorial nulo como tendo dimensão zero (ANTON E RORRES, 2006, p. 179).

5.1.4. Um quadro inicial

Pelo quadro a seguir, podemos fazer uma comparação entre a ordem das definições enunciadas por Anton e Rorres (2006), Halmos (1978) e Hoffman e Kunze (1970) a partir da definição de espaços vetoriais.

Quadro com a ordem das definições contidas nas obras citadas

Anton e Rorres (2006)	**Halmos (1978)**	**Hoffman e Kunze (1970)**
Espaço vetorial euclidiano	Espaço Vetorial	Espaço Vetorial
Transformações lineares de de R^n em R^m	Dependência e Independência Linear	Combinação Linear
Espaços vetoriais arbitrários	Combinação Linear	Subespaço vetorial
Subespaços vetoriais	Base	Dependência e Independência Linear
Combinação linear	Espaço vetorial de dimensão finita	Base
Independência linear	***Dimensão***	Espaço vetorial de dimensão finita
Base		***Dimensão***
Espaço vetorial de dimensão finita		
Dimensão		

Não fizemos um quadro com todos os assuntos tratados pelos livros de álgebra linear; o iniciamos com a definição de *espaços vetoriais* por ser neste assunto, em especial, onde aparece a noção de *dimensão*.

Pelo quadro apresentado, podemos notar que ocorrem mudanças no que se refere à disposição das definições apresentadas nas obras consultadas, como, por exemplo, o fato de Halmos (1978) não abordar subespaço vetorial antes da noção de *dimensão* ao contrário dos demais autores. No entanto, independente dessa disposição, a definição de *dimensão* é dada, em todos os casos, como sendo o *número de elementos/vetores de uma base de um espaço vetorial V.*

Mesmo podendo dizer que *dimensão* é *conjunto minimal gerador de um espaço vetorial V* ou *conjunto maximal linearmente independente de um espaço vetorial V*, sendo possível mostrar que essas definições são equivalentes na matemática do matemático, do ponto de vista da produção de significados não podemos dizer o mesmo, pois os objetos (algo a respeito de que se diz algo) são diferentes, ou seja, na primeira definição os objetos são: número de elementos e base, já na segunda definição o objeto tratado é conjunto minimal gerador e na terceira, conjunto maximal linearmente independente.

A matemática do matemático é definicional, internalista e simbólica; e, uma vez que as coisas foram definidas, ou seja, que foi dito o que elas são, essas definições permanecem intocadas (Lins, 2004b) até que isso seja explicitamente alterado e aceito na comunidade dos matemáticos.

O que não permanece necessariamente intocável é a nossa produção de significados para a matemática e, ao olharmos para as definições, na nossa leitura, vemos *dimensão* aparecendo de dois modos distintos. Um modo é por meio da definição de "espaço vetorial de dimensão finita", onde "um espaço vetorial é de dimensão finita se ele possui uma base finita" (não vamos discutir a definição porque ela é algo dado, o que queremos discutir é que nesta definição os autores não falam o que para eles significa *dimensão* e sim a condição para se ter um espaço vetorial de *dimensão finita*. Todos os livros consultados tratam apenas de "espaços vetoriais de dimensão finita").

O outro modo como *dimensão* aparece é por meio da definição direta dessa noção para a álgebra linear como sendo o "número de elementos de uma base de um espaço vetorial V".

Pode-se perguntar se "dimensão finita" se torna uma outra coisa, depois da definição de *dimensão*, mas nenhum livro faz uma análise sobre isso.

5.2. Outras definições de *dimensão* no jardim do matemático

Como foi dito anteriormente, a definição de *dimensão* que abordaremos neste item está relacionada com a teoria dos fractais.

Edgard (1990) afirma que um conjunto de fractais é mais irregular que os conjuntos considerados na geometria clássica. Mandelbrot criou o termo fractal em 1975 e define fractal como: "Um fractal é por definição um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff-Besicovitch[49] excede completamente a dimensão topológica [tradução nossa]" (MANDELBROT apud EDGARD, 1990, p. v)[50].

Anton e Rorres (2006) afirmam que Mandelbrot alertou que a definição de fractal dada por ele é restritiva e que provavelmente será substituída; "enquanto isto, permanece como uma definição formal de fractal." (ANTON e RORRES, 2006, p. 447).

Como a definição de Mandelbrot (apud Edgard, 1990) menciona a noção de *dimensão topológica*, apresentaremos esta definição antes de continuarmos a falar de fractais.

A definição de espaço topológico á dada do seguinte modo:

> Seja X um conjunto não-vazio. Uma classe $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X é uma topologia em X se, e somente se, $\mathcal{T}$ satisfaz os seguintes axiomas:
> $[0_1]$ X e $\emptyset$ pertencem a $\mathcal{T}$.
> $[0_2]$ A união de um número qualquer de conjuntos de $\mathcal{T}$ pertencem a $\mathcal{T}$.
> $[0_3]$ A intersecção de dois conjuntos quaisquer de $\mathcal{T}$ pertence a $\mathcal{T}$. (LIPSCHUTZ, 1971, p. 70)

Para a definição de *dimensão*, necessitamos, ainda, da definição de cobertura e refinamento. "Uma *cobertura* [aberta[51]] de um subconjunto S é uma coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos abertos em X cuja união contém todo S (e possivelmente mais)[52]" (WRIGHT, 1996, p. 2) e, refinamento é:

> Um refinamento de uma cobertura $\mathcal{C}$ de S é outra cobertura $\mathcal{C}'$ de S tal que cada conjunto B em $\mathcal{C}'$ está contido em algum conjunto A em $\mathcal{C}$. A idéia é que

[49] A dimensão Hausdorff de A é $\dim_H(A)=\inf\{d: 0<M_d<\infty\}$, sendo $M_d(A)=\sup\{H_d(A,\varepsilon)\}$, $H_d(A,\varepsilon)=\inf\{\Sigma\mathrm{diam}\,(B_i)^d: C=\{B_i\}, \mathrm{mesh}\,(C)<\varepsilon\}$ onde C é uma cobertura contável de A e $\mathrm{mesh}(C)=\sup\{\mathrm{diam}(B): B\in C\}$ (Kohavi e Davdovich, 2006)

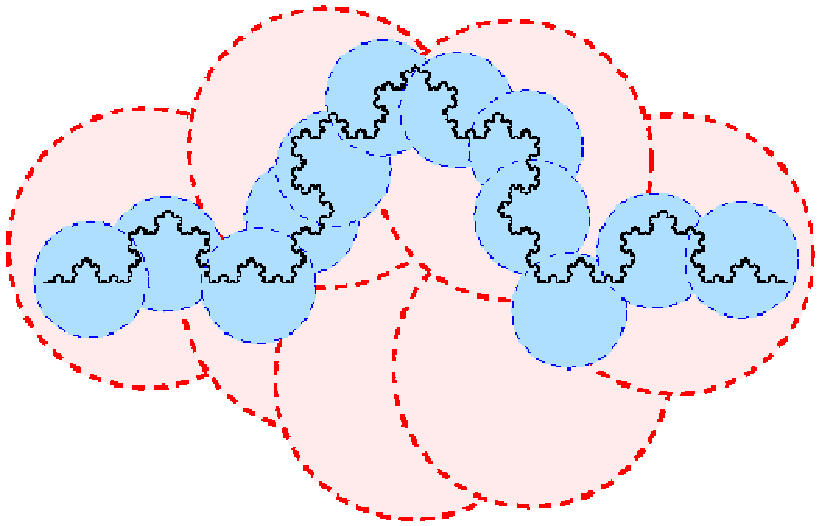
[50] "A fractal is by definition a set for which the Hausdorff-Besicovitch dimension strictly exceeds the topological dimension" (MANDELBROT apud EDGARD, 1990, p. v)

[51] Seja A um conjunto de números reais. Um ponto $p\in A$ é chamado *ponto interior* de A se e somente se p pertence a algum intervalo aberto S_p contido em A: $p\in S_p \subset A$. O conjunto A é dito *aberto* [...] se, e só se, cada um dos seus pontos é ponto interior. (LIPSCHUTZ, 1971, p. 70)

[52] "A *covering* of a subset S is a collection $\mathcal{C}$ of open subsets in X whose union contains all of S (and possibly more)" (WRIGHT, 1996, p. 2)

> os conjuntos em C' são de algum modo "menores" que os em C e fornecem uma cobertura mais finamente detalhada de S.[tradução nossa] WRIGHT, 1996, p. 2)[53]

Na figura abaixo, temos uma cobertura C da curva de Koch[54], em vermelho (a linha tracejada indica fronteiras dos discos abertos), e um refinamento C' de C está representado pelas linhas azuis tracejadas. Wright (1996) observa que cada disco azul está inteiramente contido em um disco vermelho e que a curva de Koch pertence a união de ambas coberturas.



Coberturas da curva de Koch (WRIGHT, 1996, p. 2)

Com as definições de espaço topológico, cobertura e refinamento passemos a definição de *dimensão* topológica que é a seguinte:

> Nós dizemos que um espaço topológico X tem dimensão topológica m se toda cobertura C de X tem um refinamento C' no qual todo ponto de X ocorre no máximo em m+1 conjuntos em C', e m é o menor de tal inteiro. [tradução nossa] (WRIGHT, 1996, p. 2)[55].

[53] "A *refinament* of a covering C of S is another covering C' of S such that each set B in C' is contained in some set A in C. The idea is that the sets in C' are in some sense "smaller" than those in C and provide a more finely detailed coverage of S." (WRIGHT, 1996, p. 2)

[54] A curva e Koch é uma curva geométrica cujo processo de construção é o seguinte: (1)começamos com uma linha reta; (2)em seguida dividimos esta linha (segmento) em três partes iguais e traçamos um triângulo equilátero que tem como base o terço central; (3)removendo esta base obtemos uma curva composta de 4 segmentos, cada qual com 1/3 do comprimento inicial; repetindo os processos (2) e (3) para cada uma dos quatro segmentos, obtemos uma curva com 16 segmentos menores. A curva de Koch é o limite para o qual tende esta construção, repetindo as operações referidas, sucessivamente, para cada segmento.

[55] "We say a topological space X has topological dimension m if every covering C of X has a refinament C' in which every point of X occurs in at most m+1 sets in C', and m is the smallest such integer" (WRIGHT, 1996, p. 2).

A figura “**Coberturas da curva de Koch**” dá uma ilustração de um refinamento de uma cobertura da curva de Koch onde cada ponto da curva pertence, no máximo, a dois conjuntos na curva, o que ilustra o porquê da curva de Koch ter dimensão 1.

Para a topologia, o segmento de reta terá dimensão 1, o quadrado dimensão 2 e o tapete de Sierpinski, que será abordado adiante, têm dimensão topológica 1, por exemplo.

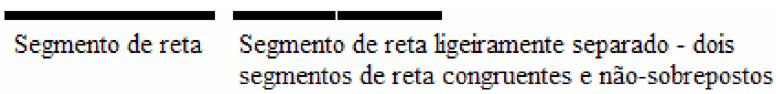
Tendo em vista a definição de fractais já mencionada, passemos, agora, a definição de *dimensão* de certos tipos de fractais no plano euclidiano R^2, que são os conjuntos auto-similares.

> Um subconjunto fechado[56] e limitado[57] do plano euclidiano R^2 é dito ***auto-similar*** se pode ser descrito da forma $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup ... \cup S_k$ (1) onde $S_1, S_2, S_3, ..., S_k$ são conjuntos não-sobrepostos[58] cada um dos quais é congruente[59], à contração de S pelo mesmo fator s ($0<s<1$).
> Se S é um subconjunto auto-similar, então (1) é chamada, às vezes, a ***decomposição*** de S em conjuntos congruentes não-sobrepostos. (ANTON e RORRES, 2006, p. 445)

Três exemplos desses conjuntos auto-similares são:

- um segmento de reta em R^2, pois eles podem ser expressos como união de dois subconjuntos congruentes e não-sobrepostos.

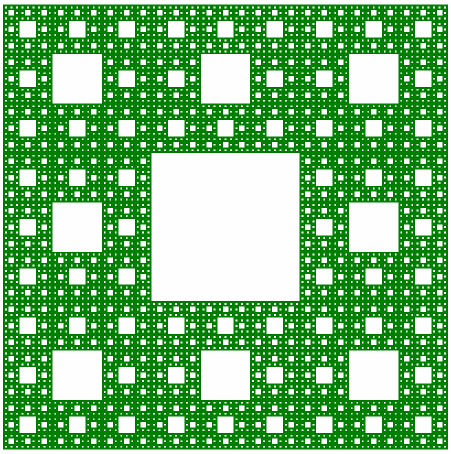
> “Nós separamos ligeiramente os dois segmentos [conforme a figura] de reta para facilitar sua visualização. Cada um destes dois segmentos menores é congruente à contração do segmento original pelo fator de ½. Deste modo, um segmento de reta é um conjunto auto-similar com $k=2$ e $s=½$.” (ANTON e RORRES, 2006, p. 445).



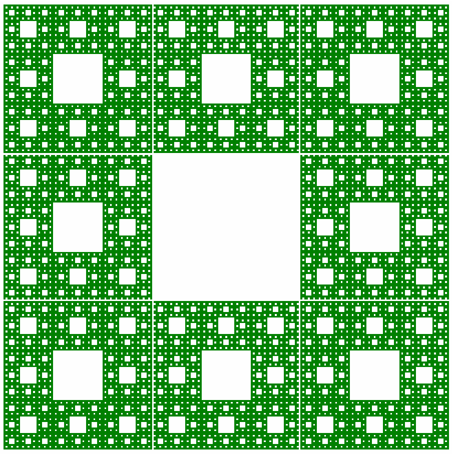
- Tapete de Sierpinski: o conjunto sugerido na figura abaixo pode ser expresso como a união de oito subconjuntos congruentes e não-sobrepostos, cada um dos quais é

[56] [nota nossa]“[...] um conjunto de R^2 é ***limitado*** se puder ser englobado em um círculo suficientemente grande[...]” (ANTON e RORRES, 2006, p. 444)
[57] [nota nossa]“[...] um conjunto é ***fechado*** se contém todos os seus pontos de fronteira [...]”(ANTON e RORRES, 2006, p. 445)
[58] [nota nossa]“[...] vamos contar com a percepção intuitiva do leitor de distinguir entre conjuntos sobrepostos e não-sobrepostos[...]”(ANTON e RORRES, 2006, p. 445)
[59] [nota nossa]“Dois conjuntos em R^2 são ditos ***congruentes*** se pudermos fazê-los coincidir exatamente usando as translações e rotações apropriadas do plano” (ANTON e RORRES, 2006, p. 445)

congruente à contração do conjunto original pelo fator de ⅓. Este conjunto é auto-similar com k=8 e s=⅓. "Note que o padrão intrincado de quadrados dentro de quadrados continua para sempre em escala menor e menor (embora isto somente possa ser sugerido por uma figura como a dada" (ANTON e RORRES, 2006, p. 446)



Tapete de Sierpinski[60]



Oito subconjuntos congruentes e não-sobrepostos

- Curva de Koch: este também é um conjunto auto-similar com k=4 e s=⅓ e pode ser representado pela seguinte figura:

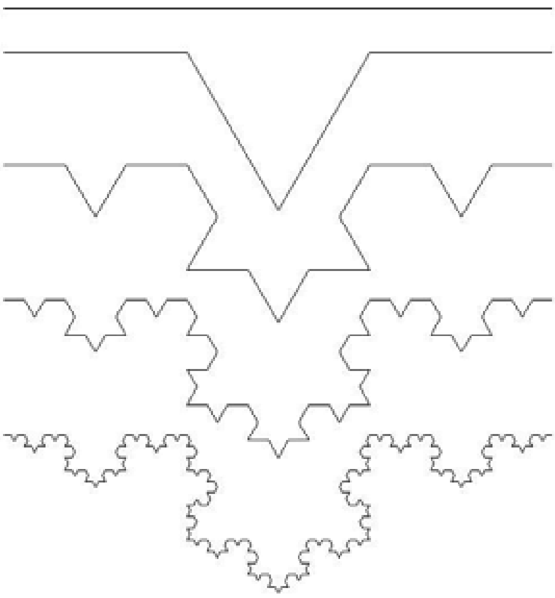


Figura da Curva de Koch[61]

[60] Adaptado de: http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico5.php. Acessado em: 3 jul 2007.

[61] Adaptado de: http://pt.wikipedia.org/wiki/Curva_de_Koch. Acessado em: 3 jul 2007.

A definição que enunciaremos, dentro da teoria dos fractais, é a de *dimensão* para um conjunto auto-similar. Essa definição é a seguinte: "A ***dimensão de Hausdorff*** de um conjunto auto-similar S [...] é denotada por $d_H(S)$ e é definida por $d_H(S)=\frac{\ln k}{\ln(1/s)}$" (ANTON e RORRES, 2006, p. 447).

Nesta definição, *ln* denota o logaritmo na base *e*. De acordo com essa definição, o segmento de reta tem *dimensão* topológica 1 e a *dimensão* de Hausdorff $ln2/ln2=1$, ou seja, tanto em uma definição como em outra, as duas *dimensões* coincidem. Porém, para o tapete de Sierpinski, $d_H = ln8/ln3=1{,}892...$, e para a curva de Koch $d_H =ln4/ln3= 1{,}261...$, enquanto dimensão topológica tanto do tapete quanto da curva de Koch é 1.

Vale ressaltar que a *dimensão* fractal corresponde a um número real, enquanto a *dimensão* topológica e da álgebra linear correspondem a números inteiros. Ainda assim, o fato de ambas definições possuírem os mesmos valores, não significa que "captem" o mesmo tipo de coisa. Quando falamos de *dimensão* na álgebra linear, estamos falando do número de elementos de uma base de um espaço vetorial, sendo uma base, por definição, "um conjunto linearmente independente de vetores em V que gera V." (HOFFMAN e KUNZE, 1970, p. 44) além do que, todas as bases de um espaço vetorial V de dimensão finita têm que possuir o mesmo número de vetores.

Para a topologia, no entanto, a *dimensão* topológica estabelece outro tipo de objeto. Consideremos a definição: "*Suponha que* $(X, \mathcal{T})$ *é um espaço topológico. Então, uma subcoleção* $\mathcal{B}$ *de* $\mathcal{T}$ *é dita ser uma base para* $\mathcal{T}$ *desde que as seguintes condições se mantenham: para cada* $U\in \mathcal{T}$ *e* $x\in U$, *há um* $W_x\in \mathcal{B}$ *tal que* $x\in W_x\subset U$.[tradução nossa]" (KASRIEL, 1971, p. 165)[62].

O autor observa que:

> [...] cada elemento de uma base $\mathcal{B}$ é um conjunto aberto e $\mathcal{B}$ é uma cobertura do espaço. Entretanto, uma base não é uma cobertura aberta arbitrária. Uma base $\mathcal{B}$ tem a propriedade de que todo conjunto aberto no espaço é a união de alguma subcoleção de $\mathcal{B}$. O conjunto vazio, é claro, é a união da subcoleção vazia de $\mathcal{B}$. Se U é um subconjunto aberto não-vazio do espaço, então para cada $x\in U$, nós podemos escolher um $W_x\in \mathcal{B}$ tal que $W_x\subset U$ e, portanto, nós podemos escrever $U = \bigcup\{ W_x: x\in U \}$. É importante notar, também, que uma topologia pode ter diferentes bases e que a topologia é,

[62] "*Suppose that* $(X, \mathcal{T})$ *is a topological space. Then a subcollection* $\mathcal{B}$ *of* $\mathcal{T}$ *is said to be a base for* $\mathcal{T}$ *provided the following condition holds: for each* $U\in \mathcal{T}$ *and* $x\in U$, *there is a* $W_x\in \mathcal{B}$ *such that* $x\in W_x\subset U$." (KASRIEL, 1971, p. 165)

por si só, uma base. [tradução nossa] (KASRIEL, 1971, p. 165-166)[63]

Neste caso, *dimensão* não tem a ver com o número de elementos de uma base, como na álgebra linear e sim com coberturas de um espaço topológico. Além disso, na álgebra linear, o número de elementos de uma base de um espaço vetorial de dimensão finita V é o mesmo que em qualquer base deste espaço, o que não ocorre na topologia, como podemos ver na citação acima. Como exemplo: consideremos R com a topologia usual; o conjunto dos intervalos abertos (a, b), a, b∈ Q, é uma base para esta topologia, e é uma base enumerável, pois é uma coleção enumerável de coleções enumeráveis; já a topologia usual que também é uma base não é enumerável.

Abordamos a definição de *dimensão* para a topologia e para os fractais por acreditarmos que isso contribui para mostrar que mesmo na matemática, a definição de *dimensão* não é única e, ela depende da área que se está trabalhando. Não fizemos nenhuma demonstração para o fato, por exemplo, de o segmento de reta ter *dimensão topológica* 1, pois esse não foi o objetivo do nosso estudo e, também, demandaria uma estudo mais aprofundado de topologia.

5.3. Uma leitura das definições

Em relação aos significados matemáticos, vemos que "dimensão" tem significados distintos dependendo da área, ou disciplina, que estamos tratando. O significado para dimensão na topologia é diferente do significado dado pela álgebra linear, que é diferente do significado da geometria euclidiana porque os objetos com os quais essas áreas lidam são diferentes. Na álgebra linear lidamos com vetores, espaço vetorial, subespaço vetorial, combinação linear, independência linear e base, para, em seguida definir *dimensão*, diferentemente da topologia que opera com as noções de abertos, espaço topológicos, cobertura e refinamento, que são objetos preliminares à noção de *dimensão*; se olharmos para os fractais, cujos objetos que estão em jogo, no caso de que falamos, são conjuntos auto-similares e a função logaritmo na base *e*.

---

[63] [...] each element of a base $\mathcal{B}$ is an open set and that $\mathcal{B}$ is a covering of the space. However, a base is not an arbitrary open covering. A base $\mathcal{B}$ has the property that every open set in the space is the union of some subcollection of $\mathcal{B}$. The empty set, of course, is the union of the empty subcollection of $\mathcal{B}$. If U is a nonempty open subset of the space, then for each $x \in U$, we may choose a $W_x \in \mathcal{B}$ such that $W_x \subset U$ and, hence, we may write $U = \bigcup \{ W_x : x \in U \}$. It is also important note that a topology may have different bases and that the topology is itself a base. (KASRIEL, 1971, p. 165-166)

O mesmo ocorre se olharmos para a geometria euclidiana. Nela, *dimensão* está relacionada com medir, dizemos que o ponto tem *dimensão* 0 (zero) porque " um ponto é aquilo de que nada é parte" (EUCLIDES, 2001, p. 9), a linha tem *dimensão* um porque "é comprimento sem largura" (EUCLIDES, 2001, p. 9) e o plano tem *dimensão* dois porque "tem, somente, comprimento e largura" (EUCLIDES, 2001, p. 9). O espaço Euclidiano usual, ou espaço físico, é *tridimensional* porque seus objetos têm comprimento, largura e profundidade.

O significado de *dimensão* de acordo com a geometria euclidiana ou com a geometria analítica é contemplado pela álgebra linear, porém a recíproca não é verdadeira. Isso pode ser visto em falas como: " [...] Apesar de associarmos usualmente "dimensão" a algo geométrico, precisamos encontrar uma definição algébrica adequada de dimensão de um espaço vetorial [...]." (HOFFMAN E KUNZE, 1970, p, 43) ou "[...]Intuitivamente R^3 é tridimensional, R^2 (um plano) é bidimensional e R (uma reta) é unidimensional. Assim o número de vetores numa base é o mesmo que a dimensão, para os espaços familiares [...]" (ANTON E RORRES, 2006, p. 179).

Vale ressaltar que mesmo que cada disciplina, ou cada área da matemática, tenha suas intersecções não no modo de definir, mas no modo de produzir significado (como o que produzimos no parágrafo acima para a "atividade matemática" dos matemáticos), se dissermos algo diferente de "a dimensão de um espaço vetorial de dimensão finita é o número de vetores de uma base", na álgebra linear, este algo não pertencerá a esta área da matemática e não será possível utilizá-lo nela. Assim como no cotidiano, na matemática, para nós, "uma palavra [no nosso caso, '*dimensão*'] só vai ter sentido no contexto de sua aplicação" (WITTGENSTEIN, 1985, p. 214).

Na matemática do matemático, quando definimos algo, num determinado contexto, esse algo passa a ser utilizado em demonstrações, proposições ou exercícios ou problemas matemáticos que praticamente na maioria das vezes não tem utilidade prática fora da matemática. Um exemplo do uso da noção de *dimensão* da matemática do matemático, na álgebra linear, pode ser visto no enunciado do seguinte teorema: "*Um subespaço M em um espaço vetorial V de dimensão n é um espaço vetorial de dimensão* $\leq n$. (HALMOS, 1978, p. 27). A noção de *dimensão* também é utilizada na demonstração[64] do seguinte teorema:

[64] Demonstração do Teorema: "Suponha que dim (*V*)=*n*. Se *S* é um conjunto linearmente independente que não é uma base de *V*, então *S* não gera *V* e portanto existe algum vetor **v** em *V* que não está no ger (*S*). Pelo Teorema de Mais-Menos (5.4.4a) [esse teorema se encontra em ANTON e RORRES, 2006, p. 180] nós podemos acrescentar **v** a *S* e o conjunto resultante *S'* ainda é linearmente independente. Se *S'* gera *V*, então *S'* é uma base de *V* e podemos parar. Se *S'* não gera *V*, então podemos acrescentar algum vetor apropriado a *S'* para obter o

> Teorema 5.4.6 – *Seja S um conjunto finito de vetores em um espaço vetorial V de dimensão finita.*
> (a) *Se S gera V mas não é uma base de V, então S pode ser reduzido a uma base de V removendo vetores apropriados de S.*
> (b) *Se S é um conjunto linearmente independente que não é uma base de V, então S pode ser ampliado para uma base de V acrescentando vetores apropriados a S.* (ANTON e RORRES, 2006, p. 181).

Consideramos que em certos casos *dimensão* de um espaço vetorial coincide com *dimensão* topológica. Isso não quer dizer que os objetos "*dimensão* de um espaço vetorial" e "*dimensão* topológica" são os mesmos: 5 metros não é a mesma coisa que 5 quilos. Isso faz com que na matemática do matemático se tenha fronteiras bem definidas entre as áreas matemáticas, ou seja, ao definir, por exemplo, *dimensão* na álgebra linear, essa definição deve ser usada tal como foi definida, o mesmo ocorrendo para as demais áreas; deixando as comparações, as motivações (como dizer que a *dimensão* de uma reta é 1, tanto na topologia, quanto na geometria Euclidiana ou nos fractais auto-similares) para a "atividade matemática", conforme discutimos no segundo capítulo.

Quando, num curso de uma disciplina específica, como a álgebra linear, lidamos com a noção de *dimensão*, pela matemática do matemático só deveríamos usar essa noção do modo como ela foi definida. No entanto, o que acontece nos cursos reais de álgebra linear podem ser produções de significados e usos diferenciados para esta noção como veremos no próximo item deste capítulo.

5.4. *Dimensão* num curso de álgebra linear: produções de significado

Esta parte do trabalho faz uma leitura de resíduos de enunciações de pessoas que cursaram a disciplina de álgebra linear sobre *dimensão*, embasados na pesquisa realizada por Silva (2003).

A pesquisa de Silva (2003) investigou a dinâmica do processo de produção de significados para a Matemática a partir da perspectiva proposta pelo MCS (Modelo dos Campos Semânticos). A investigação, que ocorreu em uma sala de aula da disciplina de álgebra linear de Pós-Graduação em Educação Matemática, se deu através de um problema a

---

conjunto *S''* que ainda é linearmente independente. Nós podemos continuar acrescentando vetores desta maneira até chegar num conjunto de *n* vetores linearmente independentes em *V*. Este conjunto será uma base de *V* pelo Teorema 5.4.5[esse teorema se encontra em ANTON e RORRES, 2006, p. 180]." (ANTON e RORRES, 2006, p. 181).

ser investigado pela turma, dividida em grupos, no decorrer do curso. O problema era o seguinte:

> Problema para investigar:
> R^2 é o conjunto dos pares ordenados de números reais:
> $R^2=\{(x,y)$ tal que $x, y \in R\}$
> Investigue se é possível existir um espaço vetorial real (isto é, R é o corpo dos escalares) onde R^2 é o conjunto de vetores desse espaço e que tenha dimensão 3. (SILVA, 2003, p. 41)

Esse problema a ser investigado é o que Silva (2003) chama de uma tarefa familiar e não-usual, familiar porque permite que as pessoas falem a partir do problema e não-usual porque o problema a ser investigado exige um certo esforço para resolvê-lo pois, olhando do ponto de vista da disciplina de álgebra linear, seria necessário passar por todas as noções centrais da disciplina como espaço vetorial, base, dimensão, dentre outras, para, então, resolvê-lo.

As primeiras considerações a respeito do encaminhamento para a resolução do problema se deram com afirmações de que não era possível a resolução do problema. Nas falas de cada grupo a respeito do problema, um dos grupos tomou R^3 e R^2 como conjunto e subconjunto, a palavra espaço sendo sinônimo de R^3 e a estipulação local de que R^2 tem dimensão 2. Outro grupo, de acordo com Silva (2003), constituiu R^2 e R^3 como o plano e o espaço, respectivamente, operando com os objetos da geometria analítica tais como pares, ternas, planos e a representação do espaço como um sistema de eixos de coordenadas cartesianas.

Houve um grupo que chegou a cogitar em não trabalhar com as operações usuais, mas não explorou esse fato e afirmaram que não era possível resolver o problema.

Para a turma, no geral, R^3 é o espaço e R^2 o plano.

O professor pede para a turma falar o que eles entendiam por R^3 e R^2 e surgem falas como:

> Lufran: O R^2 seria, de um modo geral, seria um plano, o R^3 seria o espaço. O R^2 é um conjunto de pares ordenados x, y que corta todo plano e o R^3 seria o espaço. Eu entendi isso. Eu não vejo outra coisa que possa ser o R^3 [...]. (SILVA, 2003, p. 75)

> Role: Então, a gente pensou o R^2 geometricamente, né? Representamos todos os vetores em x, y, né? No cartesiano, “todos os pares x, y com origem em O tal que preenche todo o plano”. E o R^3, também a terna x, y, z, e a gente mostrou que preenchia o espaço, né? (SILVA, 2003, p. 75)

> Azul: [...] O que é o R para mim? [ela traça uma reta na lousa] Pra mim é pegar todo sistema nosso de numeração. Pra mim, seria isso aqui [ela faz riscos sobre a reta sugerindo pontos] todos os pontos, infinitos pontos, pra mim é R. Se eu fizer mais uma [ela traça uma reta perpendicular à anterior] e colocar infinitos pontos aqui ó, pra mim é outro R. Agora se eu unir isso aqui infinitamente, pra mim é R^2. Eu não sei se pra mim é tão/ eu vejo assim, isso aqui tudo unido certinho é o R^2. Daqui, aí, tira um ponto fora, desse ponto que tá aqui fora eu relaciono aqui, eu faço o R^3. [com a mão, ela sugere um ponto fora do plano da lousa]. Pra mim é isso. Eu não sei se eu tô simplificado alguma coisa demais, mas tenho essa visão [...](SILVA, 2003, p. 79)

O professor pede que os alunos continuem a explorar o problema e disso surgem, novamente, falas de que o R^2 é o plano cartesiano e por ser um plano cartesiano a dimensão é 2. Uma pessoa (Betty), que antes havia pensado R^3 e R^2 como sendo o espaço e o plano respectivamente, operando com os objetos da geometria analítica, faz o seguinte questionamento: "[...] Se você olhar pra R^2 como sendo elementos de um conjunto e a partir disso você definir operações de modo que tenha dimensão três; você continuaria olhando desse modo? É, pros eixos ortogonais como vocês disseram?" (SILVA, 2003, p. 82). A resposta, para muitos é não ou não sei, diferentemente para o grupo que já havia pensado nessa possibilidade. Este questionamento, na visão de Silva (2003) foi importante porque introduziu novos objetos para a discussão que ainda não haviam sido mencionados em sala tais como operações não-usuais e espaço vetorial como sendo algo composto de quatro coisas (conjunto de vetores, um conjunto de escalares, operações usuais e não-usuais). No entanto, ainda assim, as produções de significados foram na direção dos objetos geométricos através da fala: "não é só, por exemplo, largura e comprimento? Não seria a dimensão 2? Largura e comprimento? Pra mim, é infinito. Mas largura e comprimento. Quando eu tenho alguma coisa a mais, daí eu tenho dimensão 3?" "(SILVA, 2003, p. 86)

Silva (2003) notou que as observações do tipo: R^2 é o plano e R^2 tem dimensão 2 foram categóricas e consistiu em estipulações locais que parecem "resistir" a possibilidade de que possa haver outra coisa no processo.

No decorrer do tempo há mudanças na direção da produção de significados por alguns sujeitos da pesquisa, o que causa silêncio em outras pessoas[65], pois estas pessoas constituíram, de acordo com Silva (2003),

> R^2 como o plano e o R^3 como o espaço, ou como conjunto e subconjunto respectivamente. E isto estava tão "cristalizado", "solidificado" que não

[65] O silêncio, na visão do MCS ocorre porque os resíduos de enunciação desses "alguns sujeitos da pesquisa" não se constituíram em texto para as pessoas que silenciaram.

> podia ser outra coisa. O “não poder ser outra coisa”, ao nosso ver está ligado [...] à questão da legitimidade, isto é, de que o sujeito julga ser ou não, legítimo dizer. [...] frases como: “eu não consigo imaginar como seja o que ela me disse” [Teka sobre a fala de Betty sobre a possibilidade da existência de operações não-usuais]; “eu não vejo outra coisa que possa ser o R^3” [...]; “Eu não vejo possibilidade” [Muiara sobre a possibilidade de dimensão 2 poder ser algo diferente de comprimento e largura] [...]; delimitaram o que era legítimo ou não dizer, influenciando a dinâmica da produção de significados. (p. 103)

A mudança da produção de significados pode ser exemplificada por Mel (um dos sujeitos de pesquisa) dizendo:

> [...] no fundo a gente [se referindo ao seu grupo formado por ela Mila e Betty] estava confundindo os espaços. E aí, o espaço que tinha lá [se referindo à outra tarefa proposta pelo professor[66]] é o espaço lugar, enquanto que, o espaço que a gente discutia no problema, é o espaço vetorial. [...] Quando a gente ficava falando de espaço lugar, espaço geométrico [se referindo a problema a ser investigado pela turma], a gente não saía do lugar do problema. Porque na verdade, a gente tinha que saber de que espaço a gente tava falando e era outro. [...](SILVA, 2003, p. 104)

Depois de quase dois meses discutindo esse problema, o professor apresenta sua solução para a turma e confirma que a resposta apresentada pelo grupo de Betty (de que é possível existir um espaço vetorial real com operações não-usuais onde R^2 é o conjunto de vetores desse espaço e que tem dimensão 3” estava certa. Mesmo depois de apresentar a resposta à turma, há ainda uma pessoa que acredita na sua construção como legítima, ou seja, os objetos constituídos por esta pessoa que são: vetores são segmentos orientados, representados por pares e ternas, R^2 é o plano (tem um comprimento e uma largura e que também pode ser descrito como um par de coordenadas) e R^3 é o espaço; continuam sendo os mesmos de sua primeira fala, sendo dimensão explicitada como a quantidade de informação necessária para a localização de um ponto no plano ou no espaço.

Concordamos com Silva (2003) de que a questão da legitimidade na produção de significados foi recorrente no processo, bem como o processo de nucleação (constituição e transformações de núcleos), onde podem ocorrer mudanças, transformações nas estipulações locais, como foi o caso do grupo de Betty (que antes pensava *dimensão* geometricamente e

[66] “Aconteceu na mini-série ‘Presença de Anita’: Nando tenta salvar seu casamento, depois de sua mulher, Lúcia Helena descobrir que ele tinha uma amante. Quando Nando pergunta a Lúcia Helena se ela não o pode perdoar, ela diz: “Nando, não há mais espaço para você em minha vida”. Qual a dimensão desse espaço?” (SILVA, 2003, p. 90)

depois mudou as estipulações e passou a pensar dimensão algebricamente) ou podem se manter estáveis (as estipulações locais se mantém as mesmas) – como no caso apresentado no parágrafo anterior – , a grosso modo.

O fato de as estipulações locais se manterem estáveis, como no caso que acabamos de apresentar, pode ser explicado por meio do que Oliveira (2002) chama de idéias naturalizadas, que são quando o caráter geométrico de idéias, como a de *dimensão*, provavelmente enfatizado em disciplinas como geometria analítica e física, por exemplo, permanecem nas falas das pessoas.

A situação apresentada nos mostra que mesmo num curso de álgebra linear, por exemplo, as pessoas podem produzir significados (não-matemáticos ou matemáticos) que não correspondem à definição matemática de *dimensão*.

Isso reforça a nossa opinião de que mesmo que uma determinada área da matemática tenha fronteiras bem definidas, a produção de significados para as noções da matemática, por pessoas não experientes na área em questão, pode não possuir uma fronteira delimitada. Assim como não há como ter no cotidiano uma fronteira bem definida.

Consideramos, parafraseando Oliveira (2002), que a experiência matemática que um aluno pode adquirir ao cursar uma disciplina ocorre no tratamento das diferenças entre os significados que são produzidos para as noções de uma tal disciplina.

6. Terceiro episódio: uma constituição histórica da álgebra linear

> Não sei por quanto tempo eu teria continuado. Em vão a esfera, com sua voz de trovão, reiterou sua ordem de silêncio, e me ameaçou com as mais terríveis penalidades se eu persistisse. Nada podia deter o fluxo de minhas aspirações extáticas. Talvez a culpa fosse minha, mas de fato eu estava intoxicado com as doses recentes da Verdade que ele mesmo havia me apresentado. No entanto, o fim não tardou a chegar. Minhas palavras foram interrompidas por uma colisão do lado de fora, e uma colisão simultânea dentro de mim, que me impeliram pelo espaço com uma velocidade que tornava impossível a fala. Para Baixo! Para baixo! Eu estava descendo rapidamente, e eu sabia que a volta para Planolândia seria minha perdição. Dei uma olhadela, a última e que nunca seria esquecida, naquela vastidão insípida e plana – que agora viria a se tornar novamente meu universo – estendia à minha frente. Então, a escuridão. Depois, um trovão final, e, quando voltei a mim, eu era mais uma vez um rastejante quadrado comum em meu gabinete, em casa, ouvindo o brando de paz da minha mulher. (Edwin A. Abbott)

Neste capítulo fazemos uma leitura da constituição histórica de uma área específica da matemática, a álgebra linear. Nela, buscamos detectar o que é falado a respeito de *dimensão*, ou seja, como a noção de *dimensão* foi mudando, ou melhor, se transformando até ser definida como é hoje na álgebra linear[67].

A leitura histórica que faremos nesse episódio/capítulo não tem o objetivo de

[67] "A *dimensão* de um espaço vetorial de dimensão finita V é o número de elementos em uma base de V."

simplesmente apresentar os fatos, “como eles realmente aconteceram” (RANKE apud BURKE, 1992, p. 15), que pode ser caracterizado por Lins (1993) como “leitura progressivista da história” (ler a história da matemática em busca de uma sucessão de métodos e teoremas).

Nossa intenção é apresentar esses fatos – ou melhor, os resíduos de enunciações de pessoas que escreveram sobre a álgebra linear – de forma a gerar uma discussão do que estava acontecendo no desenvolvimento/criação dessa área e como a noção de dimensão apareceu nesse processo. Caracterizamos essa leitura como uma “leitura epistemológica da história” que, de acordo com Lins(1993), “busca entender como as idéias contidas em uma matemática estão organicamente articuladas e de que forma certas noções estão naturalmente excluídas desta cultura” (LINS, 1993, p. 78) ou de que forma certas noções foram incluídas nesta cultura.

O motivo de delimitarmos nossa busca histórica à álgebra linear se deve ao resultado do nosso primeiro estudo sobre o que os autores de livros de história da matemática como, por exemplo, Boyer (2001), Bell (1995), Katz (1993) e Grattan-Guinness (1994) falavam a respeito de *dimensão*[68]. Nesse estudo somente encontramos falas relacionadas à “teoria da dimensão” – uma teoria pertencente à topologia – que não nos permitiam fazer uma leitura sobre *dimensão* olhando para as produções de significado que ocorreram para essa noção.

A partir disso, decidimos voltar nosso olhar para uma área específica da matemática – a álgebra linear – com o intuito de ver o que era dito sobre *dimensão* no processo de constituição dessa área. Para isso, buscamos, novamente, nos livros de história da matemática, falas a respeito da constituição da álgebra linear. Foi em Bourbaki (1976) e em Dorier (1995) que encontramos uma gênese dessa área de forma menos fragmentada, comparada a que foi encontrada nos livros de história da matemática acima citados. Sendo assim, nossa leitura sobre a constituição se baseará, principalmente, nos trabalhos de Bourbaki (1976) e Dorier (1995).

A escolha da álgebra linear para este trabalho histórico ocorreu por já havermos nos referido, principalmente, à álgebra linear no *Segundo episódio* e pelo fato de nosso grupo de pesquisa, Sigma-t, ter realizado pesquisas relacionadas com essa área.

Vale aqui ressaltar que este trabalho não é um trabalho sobre a história da álgebra linear. O que queremos é apresentar uma leitura do que estava acontecendo no processo de criação da álgebra linear, para discutirmos os modos de produção de significado para

---

(HALMOS, 1978, p. 23)

[68] Lendo os índices dos livros e índices de noções e temas abordados (índices remissivos).

dimensão.

Assim como nos capítulos anteriores, nossas leituras estarão fundamentadas no MCS (Modelo Teórico dos Campos Semânticos), numa tentativa constante de produzir significados plausíveis para o todo dos textos escolhidos.

6.1. Uma história da álgebra linear

Bourbaki (1976) diz que a álgebra é um dos ramos mais antigos da matemática e, também um dos mais novos. Isso porque, de um lado, nas origens da matemática, se encontravam problemas que se resolviam por meio de uma multiplicação ou de uma divisão, como, por exemplo, decidir, mediante o cálculo de um valor de uma função $f(x)=ax$, a resolução da equação $ax=b$, que são problemas típicos da álgebra linear. E, por outro lado, quando o desenvolvimento moderno das noções de corpo, anel e espaço vetorial topológico, dentre outras, colocaram em evidência as noções essenciais da álgebra linear – como, por exemplo, a dualidade – se percebeu o caráter linear de quase toda a álgebra moderna (Boubarki, 1976).

Dorier (1995) também aborda o caráter antigo da álgebra linear, falando que as civilizações antigas desenvolviam técnicas para resolver equações lineares. No entanto, para ele,

> [...] até a metade do século XVIII, pode ser dito que, salvo o aperfeiçoamento de técnicas de resolver sistemas de equações lineares e o desenvolvimento de uma álgebra simbólica, depois de François Viète e René Descartes, nada substancial ocorreu quanto à álgebra linear. [tradução nossa] (DORIER, 1995, p. 228)[69]

Dorier (1995) aponta o ano de 1750 como sendo importante na história da noção de espaço vetorial, pois durante esse ano apareceram os trabalhos de Cramer, no qual ele estabeleceu a teoria dos determinantes, e, dentre outros, o trabalho de Euler (que diz respeito, dentre outras coisas, ao paradoxo de Cramer[70]).

No trabalho de Euler (apud Dorier, 1995), ele explicou que, em alguns casos, o paradoxo de Cramer não é verdadeiro, como também explicou que *n* equações podem não ser suficientes para determinarem *n* valores. Um exemplo disso pode ser o sistema de duas

---

[69] [...] until the middle of the 18th century, it can be said that, apart from the improvement of techniques to solve systems of linear equations and the development of symbolic algebra after François Viète and René Descartes, nothing substantial occurred with regard to linear algebra. (DORIER, 1995, p. 228)

equações: "$3x$-$2y$=5" e "$6x$-$4y$=10". Mesmo havendo duas equações e duas incógnitas, não é possível achar os valores das incógnitas porque, ao determinar o valor de x da primeira equação em função de y e substituindo na segunda equação, ambas as incógnitas desaparecem, permanecendo a equação 10=10, da qual nada pode ser deduzido. Isto ocorre porque "$6x$-$4y$=10" é o dobro da equação "$3x$-$2y$=5". Euler deu exemplos para sistemas de equações de 3 equações com 3 incógnitas e 4 equações com 4 incógnitas, mostrando que a restrição necessária para se resolver sistemas é que nenhuma equação pode estar contida em uma ou muitas outras equações, isto é, as equações devem ser não equivalentes.

> Nessa abordagem, estes termos referem-se a um "incidente" no processo final de eliminação e de substituição que resulta em uma ou mais incógnitas permanecerem indeterminadas. Ele nota, é claro, embora não sistematicamente, as relações lineares entre as equações, mas suas demonstrações nunca contaram com esse fato. Então, na natureza de sua definição não há nada linear *a priori*. É por isso que eu proponho dizer que Euler introduziu a noção de *dependência inclusiva* em vez de dependência linear. É claro que as duas noções coincidem quando aplicadas às equações lineares, e a distinção pode parecer supérflua, mas *dependência inclusiva* está agarrada no contexto de equações e não pode ser transferida para outras situações lineares (como as n-uplas). [tradução nossa] (DORIER, 1995, p. 230)[71]

Foi por volta de 1840 a 1879, dentro da teoria dos determinantes, que a noção de posto[72] tomou forma (o desenvolvimento da teoria dos determinantes se deve ao trabalho de Cramer e a noção de posto e dependência se deve, em parte, às idéias de Euler, segundo Dorier) e se tornou central na descrição de sistemas de equações lineares. Os trabalhos desenvolvidos nesse período são diferentes dos de Euler: as ferramentas são mais sofisticadas e seus usos requerem mais técnicas que intuição. O conceito de independência linear[73], que ainda é usado hoje em dia foi dado por Frobenius, que também usou a teoria dos

---

[70] "Uma curva de ordem n em geral é determinada [...] por $n(n+3)/2$ pontos." (DORIER, 2001, p. 295)

[71] In his approach, these terms refer to an "incident" in the final process of elimination and substitution that results in one or several unknowns remaining undetermined. Of course, he notes, although not systematically the linear relations between the equations, but his proofs never rely on this fact. So in the nature of this definition there is nothing *a priori* linear. This is why I propose to say that Euler introduced the notion of *inclusive dependence* rather than linear dependence. Of course, the two notions coincide when applied to linear equations, and the distinction may seem superfluous, but inclusive dependence is embedded in the context of equations and cannot be transferred into other linear situations (like n-tuples). (DORIER, 1995, p. 230)

[72] "In the context of linear equations, rank is an invariant which determines the size of the set of solutions (minimal number of generators/maximal number of independent solutions) and, by a process of duality, the number of relations of dependence (minimal number of equations describing the set of solutions/maximal number of independent equations)" (DORIER, 1995, p. 230-231)

[73] Several particular solutions $A_1^{(x)}, \ldots, A_n^{(x)}, (x=1, \ldots, k)$, will be said to be independent or different, when $c_1A_\alpha^{(x)}+\ldots+c_kA_\alpha^{(x)}$, cannot be zero for $\alpha=1,.., n$, without $c_1, \ldots, c_k$ being all zero, in other words, when the k linear forms $A_1^{(x)}u_1+\ldots+A_n^{(x)}u_n$ are independent. [44, 236] (FROBENIUS apud DORIER, 1995, p. 232)

determinantes e, pela primeira vez, o termo posto foi usado e definido em termos de determinantes[74].

> Nesse estágio de análise, o aspecto principal a ser mantido em mente é que o estudo de equações lineares e a teoria de determinantes representam o contexto no qual os primeiros conceitos teóricos (dependência, posto e dualidade) relacionados à teoria de espaço vetorial foram criados e aplicados em dimensão finita. [tradução nossa] (DORIER, 1995, p. 233)[75]

Dorier (1995) ainda afirma que o conceito de posto em uma teoria axiomática de espaços vetoriais é inseparável do conceito de *dimensão*, que é uma síntese das relações entre os conceitos de geração e dependência linear.

Essas descrições referentes às equações lineares correspondem aos primeiros conceitos que propiciaram a constituição da álgebra linear.

Uma outra corrente de idéia que contribuiu para o desenvolvimento da álgebra linear, de acordo com Bourbaki (1976), pode ser visto com Fermat (inspirado por Apolônio), o qual classificou curvas planas segundo seus graus e anunciou o princípio fundamental de que uma equação de primeiro grau, no plano, representa uma reta, e uma equação de segundo grau, uma cônica. Simultaneamente, ele enuncia,

> [...] a classificação dos problemas em problemas determinados, problemas que se reduzem a uma equação com duas incógnitas, a uma equação com três incógnitas, etc e assim por diante: os primeiros consistem na determinação de um ponto, os segundos de uma linha ou um lugar plano, os seguintes de uma superfície, etc. ([…] aqui já está o gérmen da geometria de *n* dimensões). Este escrito, apresentando o princípio da dimensão na álgebra e na geometria algébrica, denota a fusão da álgebra e da geometria totalmente conforme com as idéias modernas, mas que, como já temos visto, tardou mais de dois séculos para penetrar nos espíritos. [tradução nossa] (BOUBARKI, 1976, p. 87)[76]

---

[74] A definição de posto dada por Frobenius (apud Dorier, 1995) é: “when in a determinant, all minors of order (m+1) vanish, but those of order m are not all zero, I call the *rank* of the determinant the value of m. (DORIER, 1995, p. 232)

[75] At this stage of analysis, the main aspect to keep in mind is that the study of linear equations and the theory of determinants represent the context in which the first theoretical concepts (dependence, rank, and duality) related to vector space theory were created and applied in finite dimension. (DORIER, 1995, p. 233)

[76] […] la clasificación de los problemas en problemas determinados, problemas que se reducen a una ecuación con dos incógnitas, a una ecuación con tres incógnitas, etc., y añade: los primeros consisten en la determinación de un punto, los segundos de una línea o un lugar plano, los siguientes de una superficie, etc. ([…] aquí esta ya el germen de la geometría de *n* dimensiones). Este escrito, planteado el principio de la dimensión en álgebra y en geometría algebraica, denota una fusión del álgebra y de la geometría totalmente conforme con las ideas modernas, pero que, como ya hemos visto, tardó más de dos siglos en penetrar en los espíritus. (BOUBARKI, 1976, p. 87)

A relação entre a teoria do espaço vetorial e a geometria parece óbvia, para Dorier (1995), de algum modo por causa do uso de representação geométrica para ilustrar idéias vetoriais, do uso de um vocabulário comum nos dois campos e também porque a geometria vetorial é um método poderoso, já que o paralelogramo de velocidades, que representa a adição de vetores, tem sido usado desde a Idade Média.

Quanto ao século XIX, Boubarki (1976) menciona o aparecimento da soma de vetores,

> […] implícita em Gauss por sua representação geométrica dos imaginários e a aplicação que fez deles na geometria elementar, desenvolvida por Bellavitis com o nome de "métodos das equipolências", e que toma sua forma definitiva em Grassmann, Möbius, e Hamilton; ao mesmo tempo, e com o nome de "cálculo baricêntrico", Möbius dá uma versão dela adaptada às necessidades da Geometria projetiva. [tradução nossa] (BOUBARKI, 1976, p. 91)[77]

Möbius, segundo Dorier (1995), foi um dos primeiros matemáticos a falar em segmento de reta orientado, foi quem definiu a adição de segmentos colineares e não-colineares, a multiplicação de um segmento por um número e dois tipos de produto de segmentos (parte do trabalho de Möbius foi inspirado pelo trabalho de Grassmann).

> Ele [Möbius] criou um método eficiente e prático para resolver problemas geométricos; mas embora tenha mostrado alguns aspectos fundamentais da geometria vetorial, sua teoria, baseada em uma percepção intuitiva do espaço, falhou ao oferecer a possibilidade de extensão para um conceito mais geral de espaço vetorial (ou baricêntrico). [tradução nossa] (DORIER, 1995, p. 236)[78]

Boubarki (1976) afirma que Gauss empurrava os matemáticos para o estudo das álgebras ou de sistemas hipercomplexos. Um nome relacionado com o estudo de sistemas hipercomplexos é Hamilton, que apresentou seu trabalho sobre esses sistemas em 1843.

Hamilton introduziu uma álgebra formal de pares de números reais cujas regras de combinações são precisamente as que hoje são dadas para números complexos, como, por exemplo, a regra para o produto de pares de números reais (a, b).(c, d)=(ac-bd, ad+bc).

[77] [...] implícita en Gauss por su representación geométrica de los imaginarios y la aplicación que hace de ello a la geometría elemental, desarrollada por Bellavitis con el nombre de "método de las equipolencias", y que toma su forma definitiva en Grassmann, Möbius, y Hamilton; al mismo tiempo, y con el nombre de "cálculo baricéntrico", Möbius da una versión de el adaptada a las necesidades de la Geometría proyectiva. (BOUBARKI, 1976, p. 91)

[78] He [Möbius] created an efficient and practical method of solving geometrical problems; but although the pointed out some fundamental aspects of vectorial geometry, his theory, based on an intuitive perception of space, failed to offer the possibility of extension towards a more general concept of vector (or barycentric) space. (DORIER, 1995, p. 236)

Hamilton interpretava esse produto como uma operação envolvendo rotação e, ao perceber que os pares ordenados de números reais podiam ser pensados como entidades orientadas no plano, ele tentou estender essa idéia a três dimensões, passando do número binário $a+bi$ às triplas $a+bi+cj$. No entanto, ele encontrou dificuldades com a multiplicação para n=3. Esta dificuldade só foi resolvida ao passar para as quádruplas de números reais ($a+bi+cj+dk$, sendo a a parte real, chamada a parte escalar do quatérnion e o restante, a parte vetorial) – que ele chamou de quatérnion –, aceitando que era necessário abandonar a lei comutativa para a multiplicação. (Boyer, 2001)

> De modo geral Hamilton tratou os quatérnions como vetores [o nome vetor foi dado por Hamilton] e essencialmente mostrou que formam um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais. Definiu a adições de quatérnions e introduziu a noção de dois tipos de produtos, obtidos multiplicando um vetor por um escalar ou por um outro vetor respectivamente; observou que o primeiro é associativo, distributivo e comutativo, ao passo que o segundo é associativo e distributivo apenas. Também discutiu o produto interior ("produto escalar") de dois vetores e provou sua bilinearidade. (BOYER, 2001, p. 405)

De acordo com Bourbaki (1976), Grassmann e Cayley, em 1846, dominavam bem os conceitos relativos a espaços de n dimensões. No entanto, eles se diferenciavam quanto a abordagens porque em relação ao primeiro, estamos perto de interpretações analíticas e das coordenadas, enquanto no segundo, o aspecto geométrico é que predomina, desde o princípio, com a soma de vetores num espaço de n dimensões. (Boubarki, 1976)

Grassmann publicou em 1844 o *Ausdehnungslehre*, que pode ser chamado de "teoria da extensão", no qual ele introduziu novas noções. As raízes do *Ausdehnungslehre* vêm da matemática e da filosofia, principalmente. A geometria e a natureza do espaço representam importantes fontes da reflexão de Grassmann, no seu trabalho. A sua teoria contém as bases para uma teoria unificada da linearidade, que introduziu conceitos elementares como dependência linear, base e dimensão (Dorier, 1995).

Dorier (1995) faz um traçado da obra de Grassmann, de 1844, dizendo que no capítulo introdutório de *Ausdehnungslehre* ele deu regras para a investigação do aspecto formal da teoria da extensão, sendo "geração" um importante conceito de seu trabalho. Além disso, as entidades não são dadas *a priori* e não são definidas de acordo com as propriedades de suas operações, elas são criadas através de "evolução"[79] ou da conexão de outras entidades.

---

[79] Taboas (1999) afirma que "A transição de um *elemento* gerador de um estado (uma posição) para outro(a) é uma *evolução*."(Taboas, 1999, p. 72). Dorier (1995) diz que o conceito de "evolução" corresponde em geometria

> Sua abordagem para os conceitos de bases e dimensão são particularmente interessantes. De acordo com o modo original de geração (que representa o aspecto real da teoria), um sistema de ordem n é gerado por n métodos fundamentais de evolução, que são dados como independentes (isto é, nenhum está incluído em um sistema gerado por algum dos outros). Portanto, a ordem de um sistema, que é a dimensão "natural", está intrinsecamente relacionada com os conceitos de geração e dependência; ela representa a medida de extensão. Com a finalidade de contrastar esse modo particular de geração por uma abordagem geral da teoria, o principal objetivo explícito dos primeiros sete parágrafos da teoria de Grassmann é fazer um sistema independente de ordem maior do seu modelo inicial de geração. Isso é feito usando o contraste entre os aspectos reais e formais da adição de deslocamento (o equivalente de nossos vetores) [...], para obter o resultado final: " [um] sistema de ordem m é gerado por qualquer m métodos de evolução pertencendo a ele e que são mutuamente independentes". [tradução nossa] (DORIER, 1995, p. 245)[80]

Este resultado final é equivalente à moderna noção de base e o valor *m*, um significado próximo da atual noção de *dimensão*. Dependência linear e *dimensão* são noções centrais na teoria de Grassmann. Tanto na versão de 1844 quanto na versão de 1862, onde os conteúdos anteriormente escritos na edição de 1844 foram desenvolvidos e enriquecidos com suas últimas descobertas, Grassmann fez a demonstração de um resultado equivalente à fórmula sobre a dimensão da soma e interseção de dois subespaços: $dim V + dim W = dim(V+W) + dim(V \cap W)$.

> Sua obra anterior inclusive à de Hamilton […] criada em solidão moral quase total, foi durante muito tempo mal conhecida, devido, sem dúvida, a sua originalidade, e devido às brumas filosóficas em que se envolveu [...]. Movido por preocupações análogas as de Hamilton, mas de maior alcance [...], Grassmann construiu um vasto edifício algébrico-geométrico, baseando-se em uma concepção geométrica ou "intrínseca" (já mais ou menos axiomatizada) do espaço vetorial de *n* dimensões [...]. [tradução

---

ao movimento ao longo de uma linha, mas que na teoria de Grassmann, "evolução" tinha um significado mais geral, baseado na noção intuitiva de espaço e tempo, que é dado *a priori* e nos é, a princípio, inerente como o corpo é inerente a alma. [nota nossa]

[80] His approach to the concepts of bases and dimension is particularly interesting. According to the original mode of generation (which represents the real aspect of the theory), a system of *n*th order is generated by *n* fundamental methods of evolution, which are given as independent (i.e., none is included in a system generated by some of the others). Therefore, the order of a system, which is the "natural" dimension, is intrinsically related to the concepts of generation and dependence; it represents the measure of the extension. In order to contrast this particular mode of generation by a general approach to the theory, the main explicit goal of the first seven paragraphs of Grassmann's theory […] is to make the higher order system independent from this initial model of generation. This is done by using the contrast between the formal and real aspects of the addition of displacement (the equivalents of our vectors) […], in order to attain the final result: "[A] system of *m*th order is generable by any *m* methods of evolution belonging to it that are mutually independent". (DORIER, 1995, p. 245)

nossa] (BOUBARKI, 1976, p. 94)[81]

Peano, em 1888 publicou em seu *Calcolo Geometrico* uma versão de sua leitura de *Ausdehnungslehre*. Ele deu uma definição axiomática do que ele chamou de um *sistema linear*, a primeira definição axiomática de espaço vetorial e, dentre outras, a de *dimensão*, em termos modernos (Dorier, 1995; Katz, 1993; Bourbaki, 1976).

Peano (apud Katz, 1993) definiu a *dimensão* de sistema linear como sendo

> [...] o número máximo de quantidades linearmente independentes no sistema. Em conexão com esta idéia, Peano afirmou que o grupo de funções polinomiais em uma variável forma um sistema linear, mas que não há tal máximo número de quantidades linearmente independentes e portanto, a dimensão deste sistema tem que ser infinita[tradução nossa]. (KATZ, 1993, p. 718)[82]

Os trabalhos de Grassmann não tiveram nenhum efeito imediato na matemática, bem como os de Peano. Ainda no século XIX seus trabalhos foram redescobertos e aplicados em muitas novas áreas da matemática como, por exemplo, a teoria da forma diferencial.

Dorier (1995) afirma que foram 42 anos após o trabalho de Peano que surgiram trabalhos que são considerados um marco na constituição da álgebra linear como o trabalho de van der Waerden, que em 1930 publicou a primeira edição de seu *Modern Algebra*, onde apareciam noções de combinação linear, dependência linear e dimensão. Nas últimas edições do trabalho de van der Waerden, a álgebra linear se tornou mais central e importante e o estudo de sistemas de equações lineares foi apresentado como uma aplicação da teoria dos espaços vetoriais e, o papel dos determinantes foi consideravelmente reduzido.

Além do trabalho de van der Waerden, Dorier (1995) também cita os trabalhos de Garret Birkhoff, de 1941, com *A Survey of Modern Álgebra*; de Paul R. Halmos, de 1942, com *Finite-Dimensional Spaces* e de Nicolas Bourbaki, de 1947, com o segundo capítulo do livro II de *Eléments de mathématique* sob o título *Algèbre linéaire*. Estes trabalhos, segundo Dorier (1995), foram uma tentativa de apresentar as novas teorias para as propostas educacionais (no nível universitário), mas que acabaram tendo grandes influências na teoria

---

[81] Su obra anterior incluso a la de Hamilton [...] creada en una soledad moral casi total, fue durante mucho tiempo mal conocida, debido, sin duda, a su originalidad, y debido también a las brumas filosóficas en las que se envolvió [...]. Movido por preocupaciones análogas a las de Hamilton, pero de mayor alcance [...], Grassmann construyó un vasto edificio algebraico-geométrico, basándose en una concepción geométrica o "intrínseca" (ya más o menos axiomatizada) del espacio vectorial de *n* dimensiones [...]. (BOUBARKI, 1976, p. 94)

[82] [...] the maximum number of linearly independent quantities in the system. In connection with this idea, Peano noted that the set of polynomial functions in one variable forms a linear system, but that there is no such maximum number of linearly independent quantities and therefore the dimension of this system must be infinite. (KATZ, 1993, p. 718)

axiomática de espaço vetorial, contribuindo tanto para a matemática quanto para o ensino, sendo um marco para a álgebra linear.

6.2. Uma leitura da constituição histórica

O breve histórico que acabamos de apresentar foi limitado a um período particular no qual julgamos que os matemáticos lidaram com noções que são consideradas próximas da álgebra linear, tal como ela é vista atualmente. Além disso, contempla episódios nos quais a "clareza" da álgebra linear não é evidente; apenas na fala dos interpretadores é que ela pode ser vista.

Pelo traçado histórico que fizemos, há cinco pontos que queremos destacar. O primeiro está relacionado com as falas de Dorier (1995) referentes a posto e *dimensão*, quando menciona o período relacionado a Cramer, Euler e Frobenius. Nos textos históricos que consultamos, não encontramos a definição de *dimensão* relacionada com posto. Atualmente, tal definição é dada do seguinte modo: "A dimensão comum do espaço-linha e do espaço-coluna de uma matriz A é chamada ***posto*** de A, que nós denotamos por pos(A); a dimensão do espaço-nulo[83] de A é chamada ***nulidade*** de A, que nós denotamos por nul(A)" (ANTON E RORRES, 2006, p. 192).

O segundo ponto refere-se a fala de Bourbaki (1976) a respeito do trabalho de Fermat, já que, segundo Bourbaki (1976), é no trabalho desse matemático que está o gérmen da geometria de n-dimensões, ou seja, foi a partir disso que se começou a pensar em espaços de *dimensão* maior que três, que é a *dimensão* do espaço usual euclidiano. Além disso, encontra-se no trabalho de Fermat o princípio de *dimensão* na álgebra e na geometria algébrica e a fusão da álgebra e geometria. Este ponto foi destacado por nós, pois é dessa fusão de álgebra e geometria, salientada por Bourbaki (1976) que os trabalhos enunciados após esse fato, em nossa constituição histórica, sofreram influências.

O trabalho de Hamilton constituiu um outro ponto a ser destacado pois os quatérnions, criados por ele, se apresentam como sistemas de objetos de "quatro *dimensões*", deixando, assim, de lidar com o espaço usual de *dimensão* 3, conforme foi dito anteriormente.

Os próximos pontos que marcamos para a nossa discussão se referem aos trabalhos de Grassmann e Peano. Conforme o nosso estudo, pudemos ver que Grassmann, além de

[83] [nota nossa] Definição: "Se A é uma matriz $m \times n$, então o subespaço R^n gerado pelos vetores linha de A é chamado ***espaço-linha*** de A e o subespaço de R^m gerado pelos vetores-coluna de A é chamado ***espaço-coluna*** de

construir um vasto edifício algébrico-geométrico, lidou com noções equivalentes às noções modernas de base, espaço vetorial, dependência linear, combinação linear e *dimensão*. E, foi, a partir desse vasto edifício criado por Grassmann que Peano criou o método axiomático e definiu *dimensão* tal como conhecemos hoje. O método axiomático de Peano e

> […] a noção de estrutura (primeiramente intuída e definida somente muito recentemente) nos permite distinguir conceitos que até então haviam estado indissoluvelmente unidos, formular com precisão o que era vago ou inconsistente, e demonstrar com generalidade o que corresponde aos teoremas que eram conhecidos somente em casos particulares. [...]. (BOUBARKI, 1976, p. 97)[84][tradução nossa]

A nossa leitura do traçado histórico que realizamos, bem como dos pontos que salientamos acima, apontam para o fato de que os matemáticos das épocas abordadas nos pontos destacados produziram significados diferentes para as noções que hoje chamamos de noções da álgebra linear, tais como espaço vetorial, base, posto e *dimensão*, pois os objetos com os quais esses matemáticos lidaram eram diferentes.

Mesmo que digamos que Hamilton operava com algo parecido com o que hoje chamamos de vetor, ou que a definição de Grassmann para dimensão é muito parecida com a definição dada hoje em dia, eles operavam em campos semânticos diferentes. Hamilton estava interessado nos seus "quatérnions" e para isso ele constituía objetos que o ajudasse a lidar com eles. Segundo Silva (1997), Hamilton operava com os seguintes objetos: números complexos, quatérnions, propriedades algébricas, operações com números complexos e quatérnions, a noção de vetor, pares, ternas e quadras ordenadas.

Já em relação a Grassmann, o mesmo estava interessado na sua "teoria da extensão". Grassmann constituiu objetos como: grandezas extensivas, deriváveis e elementares; unidades (primitivas, relativas e absoluta) e sistemas de unidades com os quais ele operava. A partir desses objetos ele chegou a noções como dependência e independência linear (entendidas como mudanças), combinações lineares, dimensão, espaço vetorial sobre os reais e base (Silva, 1997).

Sob o ponto de vista do Modelo dos Campos Semânticos (MCS), da nossa leitura para

---

A. O espaço solução do sistema homogêneo de equações $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, que é um subespaço de R^n, é chamado o ***espaço-nulo*** de A. (ANTON e RORRES, 2006, p. 184)

[84] […] la noción de estructura (primeramente intuida y definida solo muy recientemente) nos permiten distinguir conceptos que hasta entonces habían estado indisolublemente unidos, formular con precisión lo que era vago o inconsciente, y demostrar con la generalidad que les corresponde teoremas que solamente eran conocidos en casos particulares. […]. (BOUBARKI, 1976, p. 97)

a constituição histórica apresentada, podemos ver que Hamilton, Möbius, Grassmann e Peano, assim como outros matemáticos que trabalharam no desenvolvimento de suas próprias teorias, também independentemente, operavam com objetos diferentes, em campos semânticos diferentes, onde os significados produzidos por eles contribuíram, de algum modo para a constituição de noções como, por exemplo, a de *dimensão* e as da álgebra linear, de um modo geral.

Neste episódio, a leitura que fizemos difere da realizada no *Primeiro episódio* pois não usamos o que chamamos de uma *leitura wittgensteiniana* da constituição da álgebra linear. Isso ocorre pelo fato de não estarmos interessados, neste capítulo, em abordar os usos, ou os jogos de linguagens que conseguimos identificar para *dimensão* no contexto histórico.

Além disso, a leitura histórica difere das leituras realizadas tanto para o cotidiano quanto para a matemática porque quando falamos de *dimensão* na matemática e fizemos uma leitura de *dimensão* no cotidiano, não nos foi possível ver o que estava envolvido por trás dessa noção, mesmo porque não estávamos interessados nas origens dessa noção, queríamos fazer uma leitura do modo como *dimensão* aparece no cotidiano e na matemática.

Esperamos com este estudo histórico termos mostrado – mesmo não buscando onde se começou a falar de *dimensão*, ou termos chegado ao ponto de dizermos "agora sim temos '*a*' noção de *dimensão* para a álgebra linear" – que a designação de algo decorre de um processo de mudança, de construção, onde as produções de significados vão se alterando. Em particular, esperamos termos dado evidências de discursos que diferem, em termos de significados, tanto dos discursos do cotidiano, quanto dos discursos matemáticos correntes.

7. Últimas considerações

> [...] Prometeu em Espaçolândia foi acorrentado por ter levado o fogo para os mortais, mas eu – pobre Prometeu de Planolândia – estou aqui na prisão por não ter trazido nada para meus conterrâneos. No entanto, vivo na esperança de que estas memórias, de alguma maneira, não sei como, possam apontar um caminho para a mente da humanidade em alguma dimensão, e despertar uma raça de rebeldes que se recuse a ser confinada a uma dimensão limitada. (Edwin A. Abbott)

Nosso trabalho buscou fazer uma leitura da produção de significados matemáticos e não-matemáticos para *dimensão*. Para isso, inicialmente apresentamos os nossos pressupostos teóricos que são os do MCS – Modelo dos Campos Semânticos – e discutimos o que consideramos serem significados não-matemáticos e matemáticos, por meio da nossa caracterização de matemática do matemático e de atividade matemática.

Para lidarmos com as categorias significados matemáticos e significados não-matemáticos, juntamente com as categorias criadas no decorrer do trabalho, nos inspiramos em Lakoff (1987) que afirma que as categorias nos permitem funcionar cognitivamente, estruturando e organizando nossos pensamentos.

Esta dissertação constou de três episódios:

(a) Primeiro episódio: análise de frases do cotidiano que contêm a palavra *dimensão*. Nesta análise utilizamos o MCS (Lins, 1997, 1999, 2004a, 200b) e a noção de Jogos de Linguagem (Wittgenstein, 1985), mostrando que, no cotidiano, *dimensão* faz parte de vários jogos de linguagem e estes são possíveis de serem identificados se olharmos para o contexto em que são jogados, em que a palavra *dimensão* está sendo usada;

(b) Segundo episódio: análise de como *dimensão* é apresentada na matemática do matemático, por meio de definições matemáticas dessa noção nos contextos da álgebra linear, da topologia e dos fractais; indicando que *dimensão* tem significados distintos dependendo da área/disciplina que estamos tratando e que ao definirmos *dimensão*, numa área específica, essa noção deve ser usada tal como foi definida, pois caso contrário ela não corresponderá à área em questão. Ainda neste episódio fizemos uma leitura de resíduos de enunciações sobre *dimensão* de pessoas que cursaram a disciplina álgebra linear, mostrando que mesmo em um curso, como o de álgebra linear, as pessoas podem produzir significados (não-matemáticos ou matemáticos) que não correspondem à definição matemática de *dimensão*;

(c) Terceiro episódio: leitura da constituição histórica de uma área específica da matemática, a álgebra linear, buscando o que é falado a respeito de *dimensão*, de como esta noção foi sendo transformada até ser definida como é hoje, na álgebra linear, apontando que os matemáticos da época considerada produziram significados diferentes para noções que hoje chamamos de noções de álgebra linear, tais como: espaço vetorial, dimensão, dentre outras, pois os objetos que eles lidavam eram diferentes. Além disso, a designação de algo, decorre de um processo de mudança, onde as produções de significados vão se alterando.

Os três episódios apresentaram objetivos distintos e são, de uma certa forma independentes, por também apresentarem procedimentos metodológicos diferentes. No *Primeiro episódio*, vimos que as definições de *dimensão* proposta pelos dicionários não davam conta das frases que recolhemos e por isso partimos para uma análise delas por meio de designações nossas e dos dicionários consultados para, a partir disso, olharmos para usos de *dimensão* no cotidiano. O *Segundo episódio* já partiu das definições matemáticas, discutindo o fato dessas definições serem diferentes, sendo cada uma dependente de uma determinada área matemática, enquanto que, no *Terceiro episódio*, lidamos com textos históricos e com os significados que foram produzidos por matemáticos (da época considerada) para *dimensão*.

Uma questão que pode ser levantada é por que fizemos uma leitura no *Primeiro episódio* utilizando jogos de linguagem e essa leitura não se repetiu nos episódios seguintes. Quanto ao *Terceiro episódio*, esperamos ter respondido essa questão quando falamos que não estávamos interessados em abordar os usos que se fazem de *dimensão* num determinado contexto (em um jogo de linguagem) ou identificar jogos de linguagem no discurso histórico e sim em abordar no processo de construção de uma área matemática, quais os significados eram produzidos para *dimensão* pelos matemáticos da época tratada, que contribuíram para o que *dimensão* é, na álgebra linear, atualmente.

A idéia dos jogos de linguagem nos foi útil no *Primeiro episódio* porque tínhamos várias frases para analisarmos e nessas frases *dimensão* tinha significados diferentes; como Wittgenstein (1985) considera que designar é um primeiro lance no jogo de linguagem, começamos aplicando definições ostensivas para *dimensão*, de acordo a nossa leitura das frases, para, em seguida, identificarmos os jogos de linguagem e discutirmos os usos de *dimensão*. No entanto, vimos que para as idéias relacionadas com os jogos de linguagem de Wittgenstein (1985), o modo como usamos uma noção vai dizer se estamos ou não num dado jogo de linguagem e não o que está acontecendo especificamente nesse dado jogo. Por isso passamos aos termos do MCS, pois o Modelo nos fornece ferramentas para olhar o que está acontecendo localmente, ao invés de fazer uma leitura dizendo que coisas estão fora ou não de um jogo, ou, para ser mais técnica, um campo semântico; Ele permite fazer uma tentativa de leitura plausível dos processos de produção de significados, olhando para a produção de significados que estão ocorrendo em relação a um núcleo, como uma pessoa faz o que fez, com vista a uma interação, um compartilhamento de espaços comunicativos.

Sendo assim, como no *Segundo episódio* estávamos lidando com áreas específicas, o que poderíamos chamar de jogos de linguagem diferentes – o jogo de linguagem da álgebra linear, o jogo de linguagem da topologia, pois os usos que se fazem das noções, as regras de cada jogo são distintas, ou, em termos do MCS, por lidarmos com objetos diferentes –, a identificação dessas áreas é direta e como, novamente, queríamos olhar localmente para cada jogo, decidimos passar diretamente para uma leitura deste episódio de acordo com as noções do Modelo.

Embora os episódios sejam diferentes entre si, em todos esses momentos de produção de significados para *dimensão*, a nossa preocupação foi a de enfatizar e mostrar as diferenças, os diferentes modos de produção de significados que ocorrem ou podem ocorrer quando falamos *de* e *sobre dimensão*.

Pelas frases que recolhemos, ao designá-las, aplicando definições ostensivas, tentamos traçar fronteiras de modo a termos categorias para análises de acordo com as regras de cada categoria. Por mais que tentássemos, isso não foi totalmente possível, pois houve frases, como as do item “o que ainda não conseguimos categorizar”, que não conseguimos aplicar definições ostensivas. Além disso, observamos que surgiram outras produções de significado para *dimensão*, como são os casos das empresas que responderam ao nosso questionamento dizendo o que significada *dimensão* para elas. Para essas empresas, *dimensão* é: um nome que traduz a capacidade de uma empresa sem limitá-la, sugerindo alguma coisa grande ou de proporções imensuráveis; e “quanto ao significado, na época foi considerado um nome de amplitude forte”. Ao olharmos para as categorias que criamos ou tiramos dos dicionários, essas respostas não se encaixarão em nenhuma delas a não ser a resposta da seguinte empresa: “o nome da nossa empresa é baseado no significado de importância, valor”.

Isso nos mostra que por mais que tentemos traçar fronteiras no cotidiano, acabamos não conseguindo, diferentemente do que vimos na matemática. Nela, os significados estão dados, as fronteiras de cada jogo são delimitadas pelas definições o que faz com que cada jogo, na matemática do matemático, além de possuir fronteiras bem delimitas, seja bem regulado.

Assim como no cotidiano, em uma sala de aula de matemática podemos ver que *dimensão*, de acordo com as produções de significados pelas pessoas que cursaram uma disciplina matemática, também assume significados diferentes da matemática do matemático, por exemplo, pelas falas de alguns sujeitos de Silva (2003), eles consideravam a dimensão de R^2 como sendo comprimento ou largura, o que está relacionado em considerar dimensão como “extensão mensurável”, uma noção pertencente, também, às categorias do cotidiano e que não corresponde à definição matemática de *dimensão* na álgebra linear.

Isso mostra que as noções do cotidiano ou as noções naturalizadas (que também estão presentes no cotidiano) são como um porto seguro, um chão firme, um lugar onde as pessoas estão ou sempre podem voltar, pois essas noções são estipulações locais para elas e, em um curso de matemática, uma definição matemática nem sempre se transforma em uma estipulação local por parte dos alunos pois no nosso mundo ela, na maioria das vezes, não é utilizada. Além disso, a pesquisa de Linardi (2006) nos mostrou que a matemática do matemático não participa da organização da prática de um professor de matemática, mesmo que ele consiga tratar das categorias dessa matemática, quando requisitado.

Novamente, não estamos querendo dizer que a matemática do matemático não seja importante, e sim que a matemática seja um possível meio pelo qual se pode discutir a produção de significados matemáticos e não-matemáticos e suas diferenças, mas, não a matemática pautada num internalismo matemático onde o que é verdade se dá por meio de axiomas, definições e teoremas e sim numa matemática apresentada de modo que dê abertura para se discutir os processos de produção de significados (inclusive os matemáticos).

Acreditamos que esses episódios nos dão elementos para criar um diálogo com futuros professores de modo que seja possível discutir esses modos de produção de significados para *dimensão*, de entender qual a diferença em termos de discursos cotidianos e discurso do matemático – mesmo não realizando uma pesquisa com professores e futuros professores – pois, para nós, é central que em cursos de educação matemática os professores de matemática experienciem e discutam processos de produção de significados, significados não-matemáticos e matemáticos e as diferenças entre eles.

8. Referências Bibliográficas

ANTON, H. e RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. Trad. Claus Ivo Doering. 8ed. 2reimp. Porto Alegre: Bookman, 2006.

BELL, E. T. **Historia de las matematicas**. Trad. R. Ortiz. México: Fondo de Cultura Econômica. 1995.

BOURBAKI, N. **Elementos de historia de las matemáticas**. Espanha-Madri: Alianza Universidad, 1976, p. 74-99.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 2001.

BRUNI, J.C. Wittgentein: vida e obra. In: WITTGENTEIN, L. **Investigações Filosóficas**. Trad. de José Carlos Bruni. 3 ed. São Paulo: Abril Cultural, 1984, p. v-xviii. (Os Pensadores)

BURKE, P. Abertura: a nova história, seu passado e seu futuro. In: BURKE, P. (org.). **A escrita da história: novas perspectivas**. São Paulo: Editora da UNESP, 1992, p. 7-37.

CUNHA, A. **Dicionário Etimológico Nova Fronteira da Língua Portuguesa**. 2 ed. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1986, p. 266.

DETONI, A. R., JULIO, R. S. e CLARETO, S. M. **Múltiplas Multiplicações**. Anais do VII EPEM. Meio digital. São Paulo, 2004.

DORIER, J-L. A general outline of the genesis of vector space theory. **Historia Mathematica**, 22, 1995, p. 227-261.

EDGAR, G. A. **Measure, topology, and fractal geometry**. New York (USA): Springer-Verlag, 1990. (Undergraduate texts in mathematics)

EUCLIDES. **O Primeiro livro dos Elementos de Euclides**. Trad. Irineu Bicudo. Natal: Editora SBHMat, 2001. 85p. (Série Textos de História da Matemática; v. 1)

FERRARI, A. T. **Metodologia da ciência**. 3 ed. Rio de Janeiro: Kennedy Editora e Distribuidora, 1974.

FERREIRA, A. B. H. **Pequeno Dicionário Brasileiro da Língua Portuguêsa**. 11 ed. Rio de Janeiro: Editôra Civilização Brasileira S.A., 1964, p. 413.

FERREIRA, A. B. H. **Novo dicionário da língua portuguesa**. 2 ed. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1986, p. 590.

FIGUEIREDO, C. de. **Dicionário da Língua Portuguesa-Brasil**. 14 ed. V.1. Portugual-Brasil: Livraria Bertrand, s.d. (depois de 1947 e antes de 1965).

Grande Enciclopédia Portuguesa e Brasileira. v.IX. Rio de Janeiro/Lisboa: Editorial Enciclopédia Limitada, s.d. (depois de 1942 e antes de 1964).

GRATTAN-GUINNESS, I. (org). **Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences**. v.2. London and New York: Routledge. 1994.

GRUGNETTI L. et al. Philosophical, mulicultural and interisciplinary issues. In: FAUVEL, J. e MAANEN, J. V. **History in Mathematics Education**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2000. p. 39-62.

HALMOS, P.R. **Espaços Vetoriais de Dimensão Finita**. Trad. Guilherme de la Penha. Rio de Janeiro: Editora Campus LTDA, 1978. (Finite-Dimensional Vector Spaces)

HALMOS, P. R. **Finite-dimensional vector space**. Reprinted of the 2d ed published by Van Nostrand, Princeton, N. J., in series: The University series in undergraduate mathematics, 1987. Spring-Verlang New York Inc.

HARDY, G. H. **Em defesa de um matemático**. Trad: Luís Carlos Borges. São Paulo: Martins Fontes, 2000. (Tópicos)

HOFFMAN, K. e KUNZE, R. **Álgebra Linear**. Trad. Adalberto Panobianco Bergamasco. São Paulo: Ed. Univ. de S. Paulo e Editora Polígono, 1970. (Linear Algebra)

HOFFMAN, K. e KUNZE, R. **Linear Algebra**. 2 ed. Índia: Pearson Education, 2003.

HOUAISS, A.; VILLAR, M. de S. e FRANCO, F. M. de. M. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001, p. 1042.

KASRIEL, R.H. **Undergraduate Topology**. Philadelphia: W.B. Saunders Company, 1971.

KATZ, Victor J. **A History of Mathematics**. New York (USA): HarperCollins College Publishers. 1993.

KOHAVI, Y. e DAVDOVICH, H. **Topological dimensions, Hausdorff dimensions & fractals**. 2006. Disponível em: http://www.math.biu.ac.il/~megereli/final_topology.pdf. Acessado em 24 jul 2007.

LINARDI, P. R. **Rastros da formação matemática na prática profissional do professor de matemática**. 2006, 279p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – IGCE/UNESP: Rio claro, 2006.

LINS, R. C. **A Framework for Understanding what Algebraic Thinking is**. Unpublished PhD thesis. University of Nothingham, 1992.

LINS, R. C. Epistemologia, História e Educação Matemática: tornando mais sólidas as bases da pesquisa. **Revista de Educação Matemática da SBEM-SP**, São Paulo, v.1, n.1, p.75-91, 1993.

LINS, R. C. Epistemologia e Matemática. **Bolema**, ano 9, especial 3, pp. 35-46, 1994. Universidade Estadual Paulista "Júlio Mesquita Filho" UNESP-Rio Claro.

LINS, R. C. e GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática)

LINS, R. C. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (org.). **Perspectivas em educação matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Editora da Unesp, 1999, pp. 75-94.

LINS, R. C. **Análise Sistemática e Crítica da produção acadêmica e da trajetória profissional**. Rio Claro, 2002. Livre Docência. IGCE/UNESP-Rio Claro.

LINS, R. C. Monstros, Matemática e Significados. In: BICUDO, M. A. V. e BORBA, M. C. (orgs.). **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004a, pp. 92-120.

LINS, R. C. **Characterising the mathematics of the teacher from the point of view of meaning production**. In: 10th International Congress on Mathematical Education, 2004, Copenhagen. Plenary and Regular Lectures (abstracts) (2004b)

LINS, R. C., et al. **Of course R^3 is blue! Development an approach to turn a mathematics course into a mathematics education course**. In: 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics, 2002. Disponível em: <http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap416.pdf> Acessado em 11 jul 2005.

LINS, R. C. **Design e Implementação de um programa de formação continuada de professores de matemática**. Projeto de pesquisa integrado submetido como parte de solicitação de concessão de bolsa de produtividade em pesquisa ao CNPq, 2006.

LIPSCHUTZ, S. **Topologia Geral**. Trad. Alfredo Alves de Farias. Rio de Janeiro: Editora McGraw-Hill do Brasil, 1971.

MACHADO, J. P. **Dicionário Etimológico da Língua Portuguesa**. Lisboa: Editora Confluência L.DA, 1952.

MONK, R. **Wittgenstein: o dever do gênio**. Trad. Carlos Afonso Malferrari. São Paulo: Companhia das Letras, 1995.

OLIVEIRA, V. C. A. de. **Sobre a produção de significados para a noção de transformação linear em álgebra linear.** Rio Claro: 2002, 187p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – IGCE/UNESP-Rio Claro.

SILVA, A. M. da. **Uma Análise da Produção de Significados para a Noção de Base em Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: 1997, 162p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – USU, 1997.

SILVA, A. M. da. **Sobre a Dinâmica da Produção de significados para a Matemática**. Rio Claro: 2003, 243p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – IGCE/UNESP-Rio Claro, 2003.

TÁBOAS, P. Z. **Uma investigação sobre as origens dos espaços vetoriais e a evolução da análise geométrica de Leibniz até Grassmann**. Rio Claro: 1999.132p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – UNESP/IGCE-Rio Claro, 1999.

VAN DER WAERDEN, B. L. **A history of algebra**. Alemanha (Germany): Spring-Verlag Berlin Heidelberg, 1985)

WITTGENSTEIN, L. Investigações Filosóficas. In: WITTGENSTEIN, L. **Tratado Lógico-Filosófico e Investigações Filosóficas**. Trad. M. S. Lourenço. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1985, p. 159-611.

WITTGENSTEIN, L. **O livro castanho**. Trad. de Jorge Marques. Lisboa: Edições 70, 1992.

WRIGHT, D. J. **Topological dimension**. 1996. Disponível em: http://www.math.okstate.edu/mathdept/dynamics/lecnotes/node36.html . Acessado em: 24 jul 2007.

9. Anexos

9.1. Anexo A – Frases do dia-a-dia que utilizam *dimensão*

FRASES	
1	Com dimensões de caderno, semelhantes à da belo-horizontina inspiradora, o número inicial de *Dimensão* foi lançado no segundo semestre de 1980. Trouxe quatorze poetas brasileiros, na seguinte ordem de entrada: Aricy Curvello, Carlos Nejar, Carlos R. Lacerda, Cid Seixas, Geraldo Dias da Cruz, Guido Bilharinho, Hugo Pontes, Jorge Alberto Nabut, Kátia Bento, Lincoln Borges de Carvalho, Lya Luft, Luís Fernando Valadares, Max Martins, Oswaldo André de Melo. Considerando-se a origem de cada um, os mineiros predominam (oito), dentre os quais os da região triangulina (cinco), com a presença também de um carioca, uma capixaba, dois gaúchos, um baiano e um paraense[85].
2	[...] Cada unidade tem aproximadamente as dimensões de um ônibus interestadual e é um "estúdio" compacto, portátil, sobre rodas, que contém todos os equipamentos de câmara necessários para fazer um filme. (p. XIII)[86].
3	Aproveite estas oportunidades excepcionais de pagar menos por um produto ou solução Microsoft. Leia aqui as promoções que preparamos especialmente para as empresas de média dimensão![87].
4	O Serviço de Consultoria de "Business Continuity and Recovery Healthcheck" foi criado a pensar nos Clientes de dimensão média e pequena que em geral não precisam de estudos de *Disaster Recovery* muito complexos e portanto caros.[88]
5	Concepções de aplicação encontradas em alguns trabalhos na área da Análise do Comportamento serão examinadas a seguir como exemplos do que os analistas do comportamento têm dito sobre a dimensão aplicada.[89]
6	Alguns temas da dimensão ética na prestação de serviço de saúde são

[85] Aricy Curvello**.** A Dimensão que não termina. Disponível em: http://kplus.cosmo.com.br/materia.asp?co=139&rv=Literatura. Acessado em 10 maio 2006.

[86] FIELD, Syd. Manual de roteiro: fundamentos do texto cinematográfico. Trad. Álvaro Ramos. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001. (p. XIII)

[87] Disponível em: http://www.microsoft.com/portugal/pme/mm/primary.mspx. Acessado em 10 maio 2006.

[88] Disponível em: http://www-5.ibm.com/services/pt/its/ITSNewsletterJul_Ago_Set2004Edicao.pdf. Acessado em 10 maio 2006.

[89]*Oliveira, S.C. Dimensão aplicada na análise do comportamento. Disponível em: http://www.adroga.casadia.org/news/analise_comportamento.htm#Autor. Acessado em 10 maio 2006.*

[90] Disponível em: http://www.ipas.org.br/dimensao.html. Acessado em 10 maio 2006.

	considerados por muitos países, como princípios essenciais da ética biomédica. [...]. [90]
7	O presidente Luiz Inácio Lula da Silva afirmou nesta sexta-feira, em Montevidéu, no Uruguai, que a adesão plena da Venezuela ao Mercosul marca o início de um novo momento da integração sul-americana. "O sucesso do nosso agrupamento acaba de atrair um novo Estado parte", afirmou o presidente, durante a reunião de cúpula do bloco. "Estamos ultrapassando as fronteiras do Cone Sul e ganhando uma nova dimensão geográfica e econômica." O encontro de líderes do Mercosul em Montevidéu marcou oficialmente o início do processo de adesão plena da Venezuela ao bloco.[91]
8	O resgate do sentido, do significado, reside na dimensão espiritual do meio-ambiente. É através da dimensão espiritual que se dá a integração do particular com o universal.[92]
9	Porque a ação de uma peça é falada, você tem que ampliá-la para acrescentar uma dimensão visual.[93]
10	[...] a publicidade afirma que pode-se “criar personagens tridimensionais, desenvolver heróis e vilões, estabelecer conflitos dramáticos e expandir as dimensões da trama”.[94]
11	Constituindo um projecto de dimensão aberta, a Biblioteca Nacional Digital contemplará, em primeira instância, conteúdos previsível e usualmente procurados pela comunidade dos leitores de uma biblioteca nacional.[95]
12	**Uma nova dimensão em cores digitais**. A DocuColor iGen3 imprime uma gama comparativa de cores de processo CMYK, fornece correspondência com a maioria das cores Pantone®, e imprime em um registro extremamente exato.[...] [96]
13	Sim, é como se essa estranheza que há tanto tempo me separava do mundo tivesse agora se interiorizado, revelando-me uma dimensão desconhecida e inesperada de mim mesmo.[97]
14	[...] Este é um problema que transcende as fronteiras do estado e, pela dimensão que assume, deveria ser tratado com mais seriedade. [..] [98]
15	O candidato do PSDB à presidência da República, Geraldo Alckmin, afirmou, ontem, [...] “ Podemos avançar bastante, a questão tem dimensão nacional”. [99]
16	Uma nova dimensão de refrescância[100]

[91] Diego Toledo. Mercosul ganha nova dimensão com Venezuela, diz Lula. Disponível em: http://www.bbc.co.uk/portuguese/reporterbbc/story/2005/12/051209_diegolulafn.shtml. Acessado em 10 maio 2006.

[92] Luiza Helena Nunes Ermel. A Dimensão Espiritual do Meio Ambiente. Disponível em: http://www.artesdecura.com.br/REVISTA/eco_humana/dimensao_espiritual.htm. Acessado em 10 maio 2006.

[93] FIELD, Syd. Manual de roteiro: fundamentos do texto cinematográfico. Trad. Álvaro Ramos. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001. (p. 181)

[94] FIELD, Syd. Manual de roteiro: fundamentos do texto cinematográfico. Trad. Álvaro Ramos. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001. (p. 193)

[95] Disponível em: http://bnd.bn.pt/conceito.html. Acessado em 10 maio 2006.

[96] *Disponível em: http://www.xerox.com/go/xrx/igen/iGen.jsp?view=Dimension&Xcntry=BRA&Xlang=pt_BR. Acessado em 10 maio 2006.*

[97] Disponível em: http://mnemosyne.blog-city.com/uma_dimenso_desconhecida_e_inesperada.htm. Acessado em 10 maio 2006.

[98] Jornal Extra. Rio de Janeiro, sexta-feira, 14 de julho de 2006. Ano IX, número 3112.

[99] Jornal Hoje em dia - Política, Belo Horizonte, segunda-feira, 10/07/2006

[100] Propaganda da pasta de dente Colgate, dia 06/07/2006

17	Para Knijnik (1996, p. 88), bem como Knijnik (2000, p. 13), a etnomatemática é visualizada a partir de uma dimensão ampla em termos de configurações estruturais (abordagens) e seu enunciado, sendo definida como: [...].[101]
18	Em troca de benefício da delação premiada, que concede perdão ou abrandamento da pena ao réu que colabora com a justiça, Luiz Antonio Vedoin, o maior operador do esquema, revelou a verdadeira dimensão do caso ao juiz Jeferson Schneider, da 2ª Vara Federal de Cuiabá.[...][102]
19	Nem sempre é fácil saber a quem interessa tanta violência, mas é evidente qie a crise atual tem dimensões regionais. [...][103]
20	O esquema de sanguessugas só pode alcançar essa dimensão depois de se infiltrar no Ministério da Saúde. [...][104]
21	O bombardeio do Líbano tem outra dimensão internacional inesperada. [...][105]
22	O balanço desproporcional em número de vítimas e nas dimensões da destruição está agora no centro de um complicado dilema ético que vai além do habitual debate entre Israel e seus detratores. [...][106]
23	Com a rapidez com que as coisas acontecem neste momento do Planeta, é preciso ser muito adaptável. Nossa alma tem uma grande capacidade de adaptação, pois nesse dimensão de consciência estamos cientes de que tudo é impermanente e muda a todo instante.[107]
24	Nós, seres humanos, somos uma parte muito importante de um todo vibrante e integrado em muitas dimensões de vida e consciência.[108]
25	[...] A primeira coisa que precisa ser aprendida é como conviver com a fúria da natureza injuriada. De acordo com o levantamento da Organização das Nações Unidas, em 2005 ocorreram 360 desastres naturais, dos quais 259 diretamente relacionados ao aquecimento global. O aumento foi de 20% em relação ao ano anterior. No início do século XIX, de acordo com alguns historiadores, dificilmente havia mais de meia dúzia de eventos de grandes dimensões em um ano. No total, foram 168 inundações, 69 tornados e furacões e 22 secas que transformaram a vida de 154 milhões de pessoas (p. 76).[109]
26	[...] é assustador observar que eventos assim, de dimensões ciclônicas, sejam o resultado do aumento de apenas 1 grau na temperatura média da Terra, uma fração do calor previsto para as próximas décadas [...] (p. 76). [110]
27	Tamanho: 345 KB Dimensão: 1000x873 pixels[111]
28	O problema não é o que você fala mas é a dimensão de suas palavras. [112]

[101] MAFRA, J. R. S. Reflexões sobre alguns conceitos da etnomatemática. In: FOSSA, J. A. (org) **Presenças matemáticas**. Natal, RN: Editora da UFRN, 2004, p. 82.
[102] Revista Veja, 19 de julho de 2006, p. 62.
[103] Revista Veja, 19 de julho de 2006, p. 69.
[104] Revista Veja, 26 de julho de 2006, p. 63.
[105] Revista Veja, 26 de julho de 2006, p. 82.
[106] Revista Veja, 02 de agosto de 2006, p. 90.
[107] CAFÉ, Sônia. **O livro das atitudes**. São Paulo: Editora Pensamento, 1992, p. 33.
[108] CAFÉ, S. **O livro das atitudes**. São Paulo: Editora Pensamento, 1992, p. 10.
[109] KINTOWITZ, Jaime. Especial. O aquecimento global já afeta nossa vida. Revista Veja. Editora Abril. Edição 1961. ano 39 número 24. 21 de junho de 2006. p. 68-83.
[110] KINTOWITZ, Jaime. Especial. O aquecimento global já afeta nossa vida. Revista Veja. Editora Abril. Edição 1961. ano 39 número 24. 21 de junho de 2006. p. 68-83.
[111] Disponível em: http://www.saladeimprensa-sud.org.br/showphotos.asp?v_group=1. Acessado em 29 agosto 2006.
[112] Frase ouvida em 29 de agosto de 2006.

29	O presente trabalho investiga componentes que caracterizam a prática profissional do professor de matemática, segundo o entendimento de professores de ensino fundamental e médio e de professores formadores atuantes na universidade.Buscaremos analisar convergências e divergências, presentes no discurso desses professores e na cultura formadora das universidades, entre as diretrizes que sustentam a prática proporcionada ao futuro professor e a prática profissional cotidiana do professor de matemática, visando estabelecer categorias de análises das ações desses profissionais na dimensão da prática formadora. [...][113]
30	**Sonda espacial revela nova dimensão na pesquisa do clima[114]**
31	O Professor da EPGE, Renato Flôres, foi convidado para fazer uma síntese e apreciação final dos trabalhos apresentados, sugerindo linhas suplementares de pesquisa e possíveis estratégias para a incorporação (com externalidades positivas) da dimensão estadual nos fluxos comerciais gerados por esses acordos. Em sua palestra, ressaltou, entre outros pontos, a ausência de medição dos fluxos de serviços, o que prejudicava algumas das avaliações. Além da publicação de um livro baseado nos trabalhos expostos, o encontro dará origem a um grupo selecionado de projetos.[115]
32	BRANDENBURG AN DER HAVEL, Alemanha, 20 de setembro /PRNewswire/ -- A RapidEye(TM) deu um outro grande passo em direção uma nova dimensão em produtos e serviços de informação geográfica. Ontem, um refletor parabólico com um diâmetro de 3,7 metros foi montado no telhado da matriz da empresa, no meio de Brandenburg an der Havel.[116]
33	Animado com a inauguração da primeira usina de biodiesel, Rubens Otoni afirmou: "É muita responsabilidadeo fazer com que o programa do biodiesel tenha uma dimensão nacional e possa se transformar num combustível definitivo para o Brasil", disse o deputado. "Quanto mais crescer o consumo, mais aumentará a nossa responsabilidade de não permitir que uma brasileira ou um brasileiro que quiser colocar biodiesel no carro, em qualquer lugar do Brasil, não consiga", disse.[117]
34	[Jornal de Notícias] Por que é que o Ministério do Ambiente está geralmente ausente das intervenções sobre os fogos? [Nunes Correia] Pela simples razão de que tem relativamente poucas responsabilidades atribuídas na gestão de incêndios florestais. Cabe-nos acompanhar em particular pela vertente do ordenamento do território e da conservação da natureza, com enfoque nos fogos em áreas protegidas, sobretudo no que respeita à prevenção, monitorização e minimização de impactos e recuperação. Mas é claramente ao Ministério da Administração Interna, pela tutela do Serviço Nacional de Bombeiros e Protecção Civil, e ao Ministério da Agricultura, pela tutela das florestas, que cabe um papel fundamental e preponderante. O MAOTDR acompanha e colabora em todas as políticas que visem uma melhor gestão do território, pelo que de modo algum está ausente

[113] FRANCISCO, C. A. Na prática o professor é outro? A Atividade Profissional do Professor de Matemática vista por diferentes olhares. **Resumo**. X EBRAPEM. Belo Horizonte:UFMG. 2006.
[114] Disponível em: http://www.inovacaotecnologica.com.br/noticias/noticia.php?artigo=010125060728 Acessado em 27 set 2006.
[115] Disponível em: http://epge.fgv.br/portal/sobre-epge/noticia/20051010.html. Acessado em 27 set 2006.
[116] Disponível em: http://br.news.yahoo.com/060920/24/190gy.html. Acessado em 27 set 2006.
[117] Disponível em: http://www.jlocal.com.br/noticias.php?pesquisa=1107. Acessado em 27 set 2006.
[118] Disponível em: http://jn.sapo.pt/2006/02/08/dossier/_Fogos_t_m_dimens_o_ambiental_.html. Acessado em

	nessa frente. Aliás, os fogos florestais têm uma clara dimensão ambiental, pelo seu impacto directo e pelas suas implicações em termos de emissões atmosféricas, por exemplo. Noutros países, como Espanha, é o próprio Ministério do Ambiente o principal responsável pelo tema, mas entre nós não é assim. [118]
35	A reportagem destaca que a menos de duas semanas das eleições, o escândalo envolvendo a suposta compra de um dossiê contra o ex-prefeito José Serra e o ex-governador Geraldo Alckmin deu uma "dimensão inesperada" para a campanha, após meses de marasmo. [119]
36	Partindo do pressuposto de que a questão saúde transcende a dimensão setorial e que, portanto, "não pode reduzir-se somente à organização dos serviços de saúde, à atenção à saúde, ou à profissão médica" (p. 29), propõe a Conferência a necessidade de uma "nova saúde pública", abrangendo aspectos derivados do desenvolvimento técnico e científico, maior participação social, democratização, liberdade de expressão, consciência das modalidades ecoagressivas na produção e no meio ambiente, interesses subregionais, promoção de estilos de vida saudáveis, eficiência dos serviços, propostas transdisciplinares e intersetoriais (p. 33). [120]
37	Partindo do pressuposto de que a questão saúde transcende a dimensão setorial e que, portanto, "não pode reduzir-se somente à organização dos serviços de saúde, à atenção à saúde, ou à profissão médica" (p. 29), propõe a Conferência a necessidade de uma "nova saúde pública", abrangendo aspectos derivados do desenvolvimento técnico e científico, maior participação social, democratização, liberdade de expressão, consciência das modalidades ecoagressivas na produção e no meio ambiente, interesses subregionais, promoção de estilos de vida saudáveis, eficiência dos serviços, propostas transdisciplinares e intersetoriais (p. 33).[121]
38	Tendo em vista contribuir para a visão holística delineada, reproduzimos proposta de geração de eventos em quatro dimensões de mundo, abrangendo sujeitos, redes de relações, sociedade e meio ambiente/ aspectos biológicos e físicos, atualmente objeto de consideração em disciplinas sob nossa responsabilidade na Faculdade de Saúde Pública, USP. Metas para cada uma das dimensões envolvidas poderão ser relacionadas entre si, visando a conjugação de diferentes variáveis: controle existencial e respostas diferenciadas das pessoas (dimensão íntima), desenvolvimento e sustentação de grupos e eqüidade participativa (dimensão interativa), fortalecimento do poder civil e diminuição das desigualdades (dimensão social) e promoção de equilíbrio ecossistêmico e corporal (dimensão biofísica), são aspectos qualitativos importantes para consecução dos eventos desejados.[122]
39	I) Discrimine as variáveis responsáveis pela situação atual nas quatro dimensões de mundo, apontando como se apresentam na atualidade. (*) II) Discrimine as variáveis responsáveis pela situação futura prrevista no projeto

27 set 2006.
[119] Disponível em: http://noticias.uol.com.br/bbc/2006/09/20/ult2363u8024.jhtm. Acessado em 27 set 2006.
[120] Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0034-89101997000100014&lng=pt&nrm=iso. Acessado em 27 set 2006.
[121] Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/rsp/v31n1/noticias.pdf#search=%22dimens%C3%A3o%2Bnot%C3%ADcias %22. Acessado em 27 set 2006.
[122] Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/rsp/v31n1/noticias.pdf#search=%22dimens%C3%A3o%2Bnot%C3%ADcias %22. Acessado em 27 set 2006.

	de intervenção, apontando como se apresentarão na nova configuração. (*) Utilize uma escala discriminando o peso das respectivas variáveis (intensidade com que atuam na configuração do campo responsável pelo evento estudado). Ex.: 1 - mínimo; 2 - médio; 3 - máximo. Discriminada a variável, coloque, entre parênteses, o respectivo valor. Quanto maior o valor, maior será a prioridade com que a variável será tratada no projeto. Contudo nenhuma dimensão se configura isoladamente e depende de um trabalho com todas as demais, tendo em vista a produção dos eventos desejados, imbricando-os em quatro dimensões de mundo.[123]
40	***Portugal só tem lugar para dois bancos de grande dimensão*** A onda de fusões e aquisições na Europa vai eliminar também alguns bancos portugueses, segundo o vice-presidente da Deloitte.[124]
41	**Congelamento de eléctrodos permite diminuir dimensão de computares quantum** 25-09-2006 12:28 Lúcia Vinheiras Alves Arrefecimento de eléctrodos pode possibilitar o desenvolvimento do computador quantum mais rápido do mundo a uma escala de produção em massa. Cientistas ingleses e norte-americanos apresentam descoberta no *Physical Review Letters*. A tecnologia quantum permite desenvolver os mais rápidos computadores do mundo com capacidade para processar informação milhares de vezes maior do que os actuais computadores. Apesar desta não ser uma surpresa para cientistas e tecnólogos, até ao momento os especialistas têm-se deparado com limitações técnicas relacionadas com a dimensão destes super computadores.[125]
42	Desde 2003, o MinC vem buscando tratar a cultura em três dimensões essenciais: "Primeiro: cultura não é só arte, muito menos arte consagrada. Segundo: cultura é um direito de cidadania". A terceira dimensão é o reconhecimento da cultura enquanto economia.[126]
43	**Dimensão do absentismo "é exagerada"** "Acho o número exagerado". É assim que presidente do Sindicato Nacional dos Trabalhadores da Administração Local (STAL), Francisco Brás, reage à notícia, publicada ontem pelo "Diário de Notícias", de que os trabalhadores municipais faltam ao trabalho, em média, 20 dias por ano, referindo como principais motivos do absentismo a falta de condições de trabalho e a sinistralidade.[127]
44	A Reditus apresentou esta quarta-feira a sua estratégia 3 a 5 anos, em que o seu principal objectivo na área do Contact Center, multiplicar por quatro a actual

[123] Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/rsp/v31n1/noticias.pdf#search=%22dimens%C3%A3o%2Bnot%C3%ADcias %22. Acessado em 27 set 2006.

[124] Disponível em: http://diarioeconomico.sapo.pt/edicion/diarioeconomico/edicion_impresa/financas/pt/desarrollo/ 690908.html. Acessado em 27 set 2006.

[125]Disponível em: http://www.tvciencia.pt/arqtvc/ctvc30.asp?nod=40&edic=12&search=no&titulos=no&tipo=not. Acessado em 27 set 2006.

[126] Disponível em: http://www.cultura.gov.br/noticias/noticias_do_minc/index.php?p=19168&more=1&c=1&pb=1. Acessado em 27 set 2006.

[127]Disponível em: http://jn.sapo.pt/2006/08/01/nacional/dimensao_absentismo_e_exagerada.html. Acessado em 27 set 2006.

	dimensão. A empresa ambiciona ainda criar dois grandes centros de serviço e desenvolver as componentes de apoio à actividade do Contact Centers (Gestão e Qualidade). [128]
45	Totalmente modular, o Mastersaf DW trabalha em três dimensões. A primeira é a de atendimento das obrigações principais e acessórias, em que a agilidade (dada a freqüência e a velocidade com que a legislação fiscal e tributária muda) e a qualidade da informação armazenada são requisitos fundamentais. A segunda dimensão e o atendimento à fiscalização. Nesse caso, conta a favor o tempo e a flexibilidade para fornecer a informação solicitada pelo agente que fiscaliza a empresa. A ultima dimensão refere-se aos instrumentos para economia tributária: aproveitar os dados atualizados para fazer planejamento tributário.[129]
46	De par com uma relativização da dimensão de fé, ou de crença, sobretudo em gerações jovens, tem havido um crescendo de adesões a novas crenças, desligadas de qualquer tradição ou mesclando de modos muito ecléticos não só diversas tradições espirituais e religiosas como elementos de outros campos da experiência e do conhecimento, do hermetismo e esoterismo.[130]
47	O Terraço convidou, uma outra vez, Carlos Silva que se debruçou sobre a Ausência de fé e a invenção de novas crenças no nosso tempo. Entre tantas outros pontos levantados, foi chamada a atenção para o actual vazio de crenças, para os novos cultos que emergem como sucedâneos dos “tradicionais”, para o gosto pela dimensão esotérica em várias modalidades, para o combate contra o “paradigma religioso”.[131]
48	Foi apontada a actual “crença” sem religião, “sem credo”, de uma “fé sem objecto, sacralizando o profano da cultura”; algumas tendências para romantizar a fé e revalorizar o sagrado. Falou-se ainda da marginalização da dimensão mística e de comunhão, acontecida nas igrejas, numa espécie de delapidação do religioso, que tem originado a necessidade de um novo “deslumbramento” que não é redutível à só racionalidade. (O texto será publicado nas Publicações-Terraço.)[132]
49	Logo depois, Braga explicou como é avaliada a dimensão estrutura e operação dentro da análise da qualidade das operadoras no Programa de Qualificação. Essa dimensão mensura o modo de produção das operadoras e apresenta uma relação estreita com os prestadores. [133]
50	Nestes dias confusos, quando verificamos as grandes transformações que estão em curso, nas múltiplas dimensões da experiência humana em sua trajetória, potencializadas pela revolução tecnológica e pela globalização, somos invadidos por um sentimento de perplexidade e angústia. Perplexidade, em razão de não imaginarmos ser possível tal espetáculo, e angústia, na medida em que não

[128] Disponível em: http://www.agenciafinanceira.iol.pt/noticia.php?id=725955&div_id=1728. Acessado em 27 set 2006.
[129] Disponível em: http://www.mastersaf.com.br/_new/site/noticias/index.php?id=14458. Acessado em 27 set 2006.
[130] Disponível em: http://www.graal.org.pt/index_ficheiros/terra_carta.htm. Acessado em 27 set 2006.
[131] Disponível em: http://www.graal.org.pt/index_ficheiros/terra_carta.htm. Acessado em 27 set 2006.
[132] Disponível em: http://www.graal.org.pt/index_ficheiros/terra_carta.htm. Acessado em 27 set 2006.
[133] Disponível em: http://www.ans.gov.br/portalv4/site/noticias/noticia_23714.asp?secao=Prestadores. Acessado em 27 set 2006.
[134] Disponível em: http://www.noticias.uff.br/artigos/2004/02/carlos-cova-reforma-necessaria.php. Acessado em 27 set 2006.

	conseguimos compreendê-lo na sua extensão e dinâmica.[134]
51	**Dimensão não constitui entrave** Esta é também a opinião de Miguel Ferreira da TMN, segundo o qual estas aplicações podem se aplicar a qualquer empresa com recursos móveis, independentemente da sua dimensão. No entanto, para empresas de pequena dimensão, a TMN aconselha, normalmente, a solução Web-based devido, essencialmente, aos baixos custos de investimento e manutenção, uma vez que as plataformas tecnológicas e cartográficas são disponibilizadas pelo fornecedor do serviço.[135]
52	Num documento redigido pela Comissão da Cultura e Educação do PE a ser votado terça-feira, o deputado britânico Christopher Beazley considera que o aspecto linguístico pode ser fundamental para o reforço da dimensão europeia, «sendo a competência em línguas estrangeiras parte de um conjunto básico de aptidões de um cidadão europeu que viva, estude e, de um modo geral, circule na União Europeia».[136]
53	Na dimensão local do combate ao desflorestamento, somente com a capacitação levada até a comunidade, a conscientização e a mobilização dos potenciais de controle social sobre a questão haverá ganhos significativos no tocante à redução dos índices de desflorestamento na Amazônia. Esse objetivo também inclui a ordenação territorial, o desenvolvimento sustentável e a defesa das áreas protegidas.[137]
54	As principais ameaças ao desenvolvimento da Amazônia e de suas comunidades surge exatamente de fatores externos - alguns internacionais – voltados para a agressão contra sua base biológica, cultural e social. Também pesam as fragilidades institucionais dos órgãos públicos, em muitos casos completamente ausentes da dimensão local por limitações políticas ou relacionadas ao atual modelo econômico do país.[138]
55	2) a questão da teologia na prática ou a teologia da dimensão pública do Evangelho - a teologia do caminho é sempre uma teologia por fazer, porque Deus caminha pelos caminhos da vida; esta é uma postura em contraposição à espiritualidade do deserto, do monte, da separação, que é a tentação da teologia em função da auto-preservação institucional, desvinculada da vida, como obra acabada;[139]
56	O sistema utilizado atualmente constitui-se de um equipamento externo de grandes dimensões - conhecido como "cavalo de pau. A estrutura é ligada a uma bomba, localizada no fundo do poço de extração da formação, por um grupo de hastes metálicas de até 1.000 metros de comprimento. O movimento de vai-e-vem do equipamento externo movimenta as hastes e, assim, aciona a bomba que leva o petróleo à superfície. "Esse mesmo movimento causa os problemas que muitas vezes inviabilizam o sistema", informa o professor Chabu. Ele explica que o atrito entre a parede do tubo de revestimento do poço e as hastes de metal acaba causando, com freqüência elevada, o desgaste e ruptura desses componentes.

[135] Disponível em: http://www.mundogeo.com.br/noticias-diarias.php?id_noticia=6572. Acessado em 27 de set de 2006.
[136] Disponível em: http://www.portugaldiario.iol.pt/noticia.php?id=726273&div_id=291. Acessado em 27 set 2006.
[137]Disponível em: http://www.gta.org.br/noticias_exibir.php?cod_cel=521. Acessado em 27 set 2006.
[138] Disponível em: http://www.gta.org.br/noticias_exibir.php?cod_cel=521. Acessado em 27 set 2006.
[139] Disponível em: http://www.alcnoticias.org/articulo.asp?artCode=4557&lanCode=3. Acessado 27 set 2006.
[140] Disponível em: http://www.usp.br/agen/bols/2006/rede1808.htm. Acessado 27 set 2006.

	"Isso gera um alto custo de manutenção e acaba prejudicando a produção, pois ela tem de ser interrompida para que o conserto seja feito."[140]
57	Ao final de dois anos e com apoio da Fapesp, os estudos resultaram num protótipo experimental, "cujas peculiaridades são a sua pequena dimensão, que lhe permite ficar dentro de um tubo de 15 centímetros de diâmetro, e a sua grande densidade de força para elevar o petróleo", detalha o professor. "Dessa forma, o motor inserido no fundo do poço elimina o 'cavalo-de-pau' e as hastes, resultando num aparato mais simples, que necessita de menos manutenção. Conseqüentemente, tem custo menor e mais produtividade". Outra característica do motor é a sua construção em módulos. A idéia é permitir sua adaptação em poços de diferentes profundidades, associando o número adequado de módulos.[141]
58	Terminada a primeira fase, os estudos prosseguiram e, com o apoio da Petrobrás, resultaram na construção de um novo protótipo, que está sendo analisado dentro de condições experimentais do ambiente de uso e já sofreu otimizações, como a redução de suas dimensões. Imerso em óleo, o motor tem sua resposta monitorada por sensores. Esse estudo de controle do processo é realizado para que sejam feitos ajustes, visando a terceira e última fase do trabalho: a aplicação do motor em um poço piloto da Petrobrás.[142]
59	A abstração da forma ancora-se em relações de conceitos e não em hierarquias de elementos. A renúncia à totalidade como referência estrutural e da unidade como garantia de identificação estão vinculados ao fundamento espacial da sua própria natureza. O espaço, enquanto entidade física, é o suporte da forma enquanto termos relacionais mas, também, índice do abandono da temporalidade como dimensão da sua existência. Na música e nas artes plásticas, a idéia de sucessão temporal é substituída pela simultaneidade de silêncios no espaço. A estética de Mondrian tem como pressuposto esta suspensão: a simultaneidade é a condição necessária da disposição pictórica e atributo essencial da forma. Em 1897, com a publicação do poema *Un coup de dés*, Mallarmé havia antecipado o princípio estético do silêncio. Com este *poème typographique et cosmogonique,* segundo Augusto de Campos, é inaugurada a poesia moderna.[143]
60	Realizou ainda performances em que, pela fala, deu nova dimensão à poesia acentuando a sonoridade das palavras.[144]
61	Sinal vermelho. Pára. Atrás, bem rente, um pesado caminhão. Os freios a ar, em bruscas freadas intermitentes, produzem um som amedrontador. O ruído deixa-o mais atento. Surpreendentemente, a rua torna-se deserta, envolta em névoa. As luzes embaçadas captam o silêncio repentino. Ouvia-se apenas o fragor das freadas do enorme veículo, que parecia estar isolado, vindo de uma dimensão a que só Aguiar tinha acesso. Sustinha-se no ar o peso indefinido de coisas por acontecer, uma sutil sensação de finitude das coisas. Como num quadro surrealista, emoldurado pelas luzes baças e visão abstrata dos edifícios, restava um sentimento de intemporalidade, além das fronteiras do entendimento.[145]

[141] Disponível em: http://www.usp.br/agen/bols/2006/rede1808.htm. Acessado 27 set 2006.
[142] Disponível em: http://www.usp.br/agen/bols/2006/rede1808.htm. Acessado 27 set 2006.
[143] Disponível em: http://www.ciberpoesia.com.br/pesquisa.htm. Acessado 28 set 2006.
[144] Disponível em: http://www.mac.usp.br/projetos/arteconceitual/carrion.htm. Acessado 28 set 2006.
[145] Disponível em: http://cristalpoesia.net/tx-fausto.htm. Acessado 28 set 2006.

62	“A capoeira começa a ganhar uma nova dimensão na cultura brasileira”, comentou Fred Abreu ao saber dos resultados da roda internacional.[146]
63	O Banco de Desenvolvimento de Minas Gerais S.A., através do BDMG Cultural, acrescenta a dimensão da cultura à do desenvolvimento econômico com justiça social que lhe baliza a atuação de principal instituição de fomento do governo mineiro. Manifestações e formas de expressão que traduzam sentimentos, anseios, peculiaridades e valores da cultura de Minas Gerais e dos mineiros, ou seja, sua identidade, obtêm apoio no BDMG Cultural, para se tornarem viáveis ou para que tenham alcance e ressonância.[147]
64	A convergência entre cultura e trabalho é estratégica e diz respeito ao novo modelo de desenvolvimento que está sendo construído no governo Lula. Um desenvolvimento sustentável e socialmente includente, que se pauta pelo necessário aumento do PIB de nossas riquezas econômicas, e, também, pelo PIB de nossas riquezas culturais. É claro que faço aqui uma brincadeira: é impossível quantificar a riqueza cultural de um país. Mas a economia da cultura gera emprego, renda, dimensão é mensurável e fundamental. Além disso, o desenvolvimento cultural é, essencialmente, um desenvolvimento que se reverte para a sociedade como um todo, um desenvolvimento com distribuição de renda e afetividade. Hoje que o Brasil entra numa rota duradoura de crescimento, é muito importante lembrar: a cultura, incentivada por políticas publicas, impulsiona, orienta e, sobretudo, qualifica o desenvolvimento.[148]
65	Em 1998 assina contrato com a MZA Music, gravadora do conceituadíssimo produtor Marco Mazzola e ainda sob a batuta do maestro Mário Manga, lança em 1999 seu segundo CD “Pérolas aos Povos” o qual recebe excepcional acolhida de público e crítica. Neste mesmo ano ao lado de Ney Matogrosso, Milton Nascimento, Zeca Baleiro e Chico César, se apresenta na noite brasileira do ”Festival de Jazz de Montreux” – Suíça, e ainda é convidada a apresentar-se no “Festival Brasil - Caracas” na Venezuela, atingindo uma grande dimensão internacional em sua segura trajetória musical.[149]
66	Portanto, é preciso dar visibilidade à verdadeira dimensão da cultura, isto é, reconhecer oficialmente o papel que a cultura já ocupa na sociedade.Isso significa mais do que incluir a cultura nos programas, propostas e atividades da administração pública ou da sociedade civil. Significa levar em consideração os aspectos culturais em todas as ações de domínio público. A cultura não pode e não deve estar a reboque da política, da economia, da ciência etc. Ela deve nortear as ações em todas essas áreas.[150]
67	Este trabalho estuda os processos interativos que têm como cenário e ator o espaço público ao agasalhar distintas características culturais, comunicativas e semióticas e sofrer impactos sociais e tecnológicos que o levam a ultrapassar sua dimensão física e territorial.[151]

[146] Disponível em: http://www.cultura.gov.br/noticias/artigos/index.php?p=925&more=1&c=1&tb=1&pb=1. Acessado 28 set 2006.
[147] Disponível em: http://www.bdmgcultural.mg.gov.br/coralbdmg/coralapres.htm. Acessado 28 set 2006.
[148] Disponível em: http://www2.cultura.gov.br/scripts/discursos.idc?codigo=1411. Acessado 28 set 2006.
[149]Disponível em: http://www.tvcultura.com.br/bembrasil/programacao.asp?progid=33. Acessado 28 set 2006.
[150] Disponível em: http://www.unesco.org.br/noticias/opiniao/artigow/1998/artigowf/mostra_documento. Acessado 28 set 2006.
[151]Disponível em: http://www2.uerj.br/~comecult/gt1tb4.pdf. Acessado 28 set 2006.

68	[...]Para tanto, é necessário, não apenas descrever a relação comunicativa, mas identificar as características semióticas capazes de construir distintas manifestações que deixam seus índices nos desenhos do espaço público. Estuda-se, portanto, a relação comunicativa localizada semioticamente no espaço territorial ou virtual, isto é, propõe-se sair de uma análise sociológica da relação entre os indivíduos, para estudar o espaço público como desenho semiótico de uma relação que define a dimensão da cultura de ontem e de hoje.[152]
69	[...]Ao contrário, é relacional como convém aos processos de informação que serão tanto mais eficazes ou relevantes quanto mais públicos forem seus processos relacionais: nessa publicidade, o lugar esvazia-se de sentido porque se concentra no instante da própria relação estabelecida e cria uma outra dimensão do coletivo.[...][153]
70	Desse modo, a cultura representa a dimensão maior da condição humana, o que nos define como seres de múltiplas linguagens, formando a base de nossa compreensão do mundo e de nossa apreensão da realidade; é o que nos diferencia dos outros povos, nos singulariza e, ao mesmo tempo, nos faz mais humanos e mais capazes para vivermos em sociedade.[154]
71	Este texto analisa a dimensão simbólica nas organização. Resgata as relações entre a dimensão cultural e simbólica, procurando evidenciar, como os valores podem ser tratados enquanto forma de manipulação e em que medida podem ser incorporados à construção de organizações com uma perspectiva mais qualitativa no que tange à qualidade de vida interna e da sociedade.[155]
72	A dimensão da cultura organizacional tem sido objeto de estudo recorrente na área de gestão. A incorporação desta temática às preocupações da administração, talvez, estejam vinculadas a uma mudança no papel do gestor frente ao processo gerencial, ficando, em um segundo plano, a questão do comando e do controle e surgindo, com maior evidência, a necessidade do comprometimento, sedução, e relações de identidade entre indivíduos e organização.[156]
73	**Veja como anunciar no SóEsporte** Confira os formatos publicitários disponíveis: <table><tr><th>MODELO</th><th>FORMATO</th><th>PESO MÁXIMO</th></tr><tr><td>Pop Up</td><td>200 x 200</td><td>30 kb</td></tr><tr><td>Full banner</td><td>468 x 60</td><td>30 kb</td></tr><tr><td>Half banner</td><td>234 x 60</td><td>20 kb</td></tr><tr><td>Botton banner</td><td>120 x 60</td><td>15 kb</td></tr></table>Veja a dimensão real de cada modelo de anúncio:[...][157]
74	*"Sempre acreditei que a dimensão social do esporte ultrapassava o esporte*

[152] Disponível em: http://www2.uerj.br/~comecult/gt1tb4.pdf. Acessado 28 set 2006.
[153]Disponível em: http://www2.uerj.br/~comecult/gt1tb4.pdf. Acessado 28 set 2006.
[154] Disponível em: http://www.culturaemercado.com.br/imprimir.php?pid=240. Acessado 28 set 2006.
[155] Disponível em: http://www.fgvsp.br/iberoamerican/Papers/0171_versao1.pdf. Acessado 28 set 2006.
[156] Disponível em: http://www.fgvsp.br/iberoamerican/Papers/0171_versao1.pdf. Acessado 28 set 2006.
[157] Disponível em: http://www.soesporte.com.br/publicidade.htm. Acessado 28 set 2006.
[158] Disponível em: http://www.esporteeducacao.org.br/historia/missao.htm. Acessado 28 set 2006.

	profissional. As modalidades esportivas podem ser exploradas como instrumentos que reforçam os valores de educação e cidadania". **Ana Moser**[158]
75	O interesse das TVs pela transmissão de eventos esportivos e o surgimento da televisão com programação paga em particular têm dado uma ainda maior dimensão ao esporte, contribuindo para o aparecimento e crescimento de novas modalidades esportivas e o surgimento de novos formatos para esportes já tradicionais.[159]
76	Maior, porém, é a dimensão que sua figura ganhou no circuito profissional nestes 14 anos em que jogou. Com atuações cheias de raça, acrobacias e brincadeiras, Meligeni ganhou mundo afora uma fama muito maior do que permitiriam as conquistas em quadras.[160]
77	Fala-se hoje com mais freqüência de projeto ou proposta da escola, de plano, planejamento, avaliação etc. Isso é muito bom. Porém, esquece-se, muitas vezes, de mostrar as diferenças entre esses conceitos e, sobretudo, esquece-se a dimensão política desses conceitos. Fala-se, por exemplo, em plano de desenvolvimento da escola como se fosse uma coisa neutra, como se um plano de desenvolvimento da escola não estivesse situado num determinado contexto histórico-social e político.[161]
78	A blindagem do modelo econômico é recorrente na crise atual, atropela os princípios republicanos e interfere na dimensão política do Estado. O diagnóstico é compartilhado pelo cientista político Luiz Werneck Vianna, professor do Instituto Universitário de Pesquisas do Rio de Janeiro (Iuperj), e pelo economista Ricardo Carneiro, professor do Instituto de Economia (IE) da Unicamp.[162]
79	O presente projeto adota uma perspectiva interdisciplinar e uma epistemologia baseada na complexidade, no construtivismo e no racionalismo crítico. As relações entre teoria e prática são consideradas dialeticamente. O projeto priviligia a dimensão cultural e política do desenvolvimento e defende a necessária contextualização histórica e cultural na definição de indicadores de capital social como condicionantes do desenvolvimento local. Apresenta três objetivos principais:[...][163]
80	E, naquilo que (ainda de certo modo) poderíamos considerar o centro empiricista, A. Marwick reconhece em *The nature of history* o que ele denomina a "dimensão subjetiva" dos relatos historiográficos. 12 Mas, para Marwick, essa dimensão está não na postura ideológica do historiador (por exemplo), e sim na natureza das provas apresentadas, pois os historiadores se vêem "forçados pela imperfeição de suas fontes a exibirem um grau maior de interpretação pessoal". [...] (p. 36)[164]
81	Essas pressões do cotidiano variam, é claro, mas algumas são dadas a seguir: [...] *Formato*. A dimensão da página, a impressão e o projeto gráfico, a presença

[159] Disponível em: http://www.bndes.gov.br/conhecimento/bnset/esporte.pdf. Acessado 28 set 2006.
[160] Disponível em: http://esporte.uol.com.br/reportagens/especial_09.jhtm. Acessado 28 set 2006.
[161] Disponível em: http://www.paulofreire.org/Moacir_Gadotti/Artigos/Portugues/Escola_Cidada/Projeto_ped_Esc_Sagarana 2000.pdf. Acessado 28 set 2006.
[162] Disponível em: http://www.unicamp.br/unicamp/unicamp_hoje/ju/agosto2005/ju299pag06.html. Acessado 28 set 2006.
[163] Disponível em: http://www.adm.ufba.br/capitalsocial/. Acessado 28 set 2006.
[164] JENKINS, Keith. **A história repensada**. Trad. Mário Vilela. 2ed. São Paulo: Contexto, 2004.
[165] JENKINS, Keith. **A história repensada**. Trad. Mário Vilela. 2ed. São Paulo: Contexto, 2004.

	ou não de ilustrações, exercícios, bibliografia, índice etc., o fato de o texto estar ou não em folhas soltas e ser ou não complementado por vídeo ou som gravado – tudo isso também tem efeitos. [...] (p. 47)[165]
82	[...] Assim, o que está em pauta nunca são os fatos os fatos de per si, mas o peso, posição, a combinação e a importância que eles trazem com referência uns aos outros na elaboração de explicações. Essa é a inevitável dimensão interpretativa, a problemática, quando os historiadores transformam os acontecimentos do passado em padrões significantes que nenhuma representação literal desses acontecimentos como fatos poderia jamais produzir.[...] (p. 60)[166]
83	[...] Com freqüência, tais debates estão vinculados a historiadores específicos [...], e trata-se aí da chamada dimensão historiográfica. [...] (p. 62)[167]
84	"A definição de conhecimento matemático engloba duas dimensões, conhecimento da matemática e conhecimento acerca da matemática. O conhecimento da matemática integra o que se pode designar por conhecer os conceitos e os processos matemáticos. No caso do conhecimento acerca da matemática este integra a compreensão sobre a natureza da matemática" (D. BALL,1991).[168]
85	[...] a tecnologia informática realça o componente visual da matemática mudando o status da visualização na educação matemática, pois alcança uma nova dimensão se considerarmos o ambiente de aprendizagem com computadores como um processo que vai além de mostrar uma imagem. (BORBA e VILLARREAL, 2005)[169]
86	"Esse assunto tem tomado uma ampla dimensão"(apresentadora)[170]
87	".... uma dimensão básica da representação é a semioticidade...."(uma comentarista)[171]
88	As dimensões executórias do trabalho, às quais damos o nome de técnicas, são evidências inequívocas de humanidade, de inteligência. Converter pedras em ferramentas de cortar, de triturar, de expandir capacidades motoras, etc., exigiu dos primeiros homens a criação de tecnologias que, até hoje, são um desafio considerável para quem queira recriar machados e facas característicos das primeiras culturas humanas.[172]
89	E no Brasil tem racismo também de negro contra branco, como nos Estados Unidos? Resposta: Eu acho natural que tenha. Mas não é na mesma dimensão que nos Estados Unidos. Não é racismo quando um negro se insurge contra um branco. [...][173]
90	Por outro lado, costuma-se reduzir a produção e a constituição do conhecimento no processo de aprendizagem, à dimensão de uma razão objetiva,

[166] JENKINS, Keith. **A história repensada**. Trad. Mário Vilela. 2ed. São Paulo: Contexto, 2004.
[167] JENKINS, Keith. **A história repensada**. Trad. Mário Vilela. 2ed. São Paulo: Contexto, 2004.
[168] Frase ouvida e vista em uma apresentação no Seminário de Pós-Graduação da UNESP/Rio Claro.
[169] Frase ouvida e vista em uma apresentação no Seminário de Pós-Graduação da UNESP/Rio Claro.
[170] Frase ouvida e vista em uma apresentação no Seminário de Pós-Graduação da UNESP/Rio Claro.
[171] Frase ouvida e vista em uma apresentação no Seminário de Pós-Graduação da UNESP/Rio Claro.
[172] BARATO, J. N. **Educação profissional: saberes do ócio ou saberes do trabalho**. São Paulo: SENAC, 2004.
[173] Jornal Estado de São Paulo. Ano 128 número 41434 28 de março de 2007. Nacional. Polêmica. *Declaração da titular da Secretaria da Igualdade Racial provoca polêmica no governo e nos meios acadêmicos*. P. A4.
[174] Parecer CNE/CEB nº 04/1998 Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental. In: Revista de Educação (Publicação Anual do Sindicato dos professores do Ensino Oficial do Estado de São Paulo) nº22. maio/2006

	desvalorizando-se outros tipos de experiências ou mesmo expressões outras da sensibilidade.[174]
91	Em outras palavras, o que não falta são "fatos determinados" para uma CPI apurar. Nenhum governo gosta de CPIs - que se sabe como começam, mas não como acabam - mas poucas vezes, como agora, tivemos a necessidade de uma apuração de tamanha dimensão, por envolver, da maneira mais intensa, a vida cotidiana das pessoas, transformando em verdadeiro inferno a circunstância de viajar de avião, em qualquer parte do território nacional.[175]
92	BRASÍLIA - Brasil e México instalaram nesta quarta-feira uma comissão ministerial conjunta que abrangerá uma ampla gama de assuntos bilaterais e se reunirá a cada dois anos, a fim de dar uma nova dimensão as suas relações, segundo disseram fontes oficiais.[176]
93	Dados da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios, referentes a 2005, sobre a população brasileira economicamente ativa (87,06 milhões naquele ano), permitem mensurar a dimensão do setor informal e da informalidade no país, revelando que essas noções abrangem distintos segmentos do mercado. A dimensão do setor informal em 2005 era de cerca de 30,18 milhões de pessoas para uma população ocupada em atividades não agrícolas de 67,22 milhões. Isso mostra que o setor informal correspondia a 44,89% da população ocupada não agrícola brasileira. Dos 30,2 milhões de integrantes do setor informal, 7,9 milhões (4,4 milhões com carteira assinada) contribuíam para a previdência social, não estando, portanto, na chamada informalidade.[177]
94	A análise individual nos treinamentos físicos possibilitou ao técnico ter uma dimensão dos pontos que precisam ser trabalhados em cada atleta.[178]
95	A cena é feita de reiterações, tudo parece se prolongar para fixar os sinais que traçam os contornos do que é dito. O corpo dos atores assume o papel de descrever para além do que falam, quase bonecos de uma pantomima, sem que com isto pareçam caricatos. O diretor Norberto Presta preenche esse silêncio ruidoso com a exploração equilibrada de voz e corpo. As cenas se alongam para deixar que o tempo apareça como o impulsionador interno da narrativa e desse modo estabeleça o jogo de passado e presente, dando o xeque-mate no futuro. A funcionalidade do cenário, um cabideiro aéreo de dimensão onírica, os figurinos na medida, de Sandra Pestana, e a iluminação correta de Eduardo Albergaria, se juntam à música de Ivan Vilela para criarem moldura delicada para a metáfora de uma perfeição quimérica.[179]
96	Segundo eles, é preciso somar esforços para que o Brasil consiga nesse relacionamento, "um tratamento diferenciado comparável ao que hoje caracteriza as relações entre EUA e outros grandes países emergentes, como China e Índia". No entender dessas entidades, as relações entre os dois países "tornaram-se diversificadas e complexas ao longo das últimas décadas" e "não acompanharam, na dimensão necessária", essa evolução.[180]

[175] Disponível em: http://txt.estado.com.br/editorias/2007/04/01/edi-1.93.5.20070401.2.1.xml. Acessado 1 abr 2007.
[176] Disponível em: http://jbonline.terra.com.br/extra/2007/03/28/e280326658.html. Acessado 1 abr 2007
[177] Disponível em: http://jbonline.terra.com.br/editorias/cienciaetecnologia/papel/2007/01/21/cienciaetecnologia20070121000.html. Acessado 1 abr 2007.
[178] Disponível em: http://jbonline.terra.com.br/especiais/pan2007/temporeal/x26032580.html. Acessado 1 abr 2007.
[179] Disponível em: http://jbonline.terra.com.br/editorias/cultura/papel/2007/03/24/cultura20070324004.html. Acessado em 1 abr 2007.
[180] Disponível em: http://jc.uol.com.br/2007/03/09/not_134093.php. Acessado em 1 abr 2007.

97	Há nove concursos acumulada, a Mega-Sena promete para nesta quarta (7) R$ 40 milhões, o segundo maior prêmio de 2007 para quem acertar as seis dezenas. A Mega é a modalidade de loteria que mais mexe com os sonhos dos apostadores. Para se ter uma idéia da dimensão do prêmio, R$ 40 milhões aplicados na poupança renderiam em apenas oito horas de sono cerca de R$ 3 mil.[181]
98	Acrescente-se a este elemento a dimensão relacionada a uma frágil institucionalidade voltada para a proteção dos direitos dos cidadãos. Faltam delegacias de polícia, agentes de segurança pública, qualificação adequada e até mesmo material de escritório para a devida investigação criminal. O Estado carece de um programa integrado de segurança cidadã, voltado para a real proteção de todos e não apenas para a contenção da exposição dos índices de criminalidade, como aconteceu nos últimos anos.[182]
99	Uma das dificuldades é lidar com agressões sexuais, que aparecem como uma das grandes ameaças a civis no conflito. Enquanto o CICV reconhece o problema, não sabe precisar sua real dimensão. Em 2006 o grupo relata atendimento a 28 vítimas de agressões sexuais devido ao conflito.[183]
100	Para o líder do PR na Câmara, Luciano Castro (RR), será natural que, na posição de negociador, Maggi ganhe "dimensão nacional". "Ele não vai estar só representando Mato Grosso, mas o partido", disse.[184]

[181] Disponível em: http://jc.uol.com.br/2007/03/07/not_133922.php. Acessado em 1 abr 2007.
[182] Disponível em: http://jc.uol.com.br/2007/03/05/not_133700.php. Acessado em 1 abr 2007.
[183] Disponível em: http://www1.folha.uol.com.br/folha/mundo/ult94u105959.shtml. Acessado em 1 abr 2007.
[184] Disponível em: http://www1.folha.uol.com.br/folha/brasil/ult96u90796.shtml. Acessado em 1 abr 2007.

9. 2. Anexo B – Definições para a palavra *dimensão* presentes nos dicionários

- **DIMENSÃO**, *s.f.* Extensão que se considera como susceptível de medida: a linha, em Geometria, só tem uma *dimensão*, o comprimento;o ponto cruzamento de duas linhas não tem *dimensões*. ▪ Qualquer das extensões do espaço, que são três: comprimento, largura e altura. Tem-se considerado a existência provável de uma 4ª dimensão. ▪ Vulgarmente significa: tamanho, volume, vulto, grandeza; proporção: mora numa casa de pequenas *dimensões*; nariz de regular *dimensão*; o movimento literário atingiu grandes *dimensões*; <<Por um palmo de chão daria igual *dimensão* de pele do cachaço>>, Samuel Maia, *Mudança de Ares*, cap. 211; <<quási que atinge as *dimensões* de uma coisa de epopéia>>, Fialho de Almeida, *Vida Irônica*, cap. 2, p. 124. ▪ Grau de potência ou de uma equação algébrica. (Lat. *dimensio*). (GRANDE ENCICLOPÉDIA PORTUGUESA E BRASILEIRA, s.d., p. 19)

- **Dimensão**, *sf.* Extensão, em qualquer sentido. Grau de uma potência *ou* de uma equação, em álgebra. (Lat. dimensio). (FIGUEIREDO, C. de., s.d., p. 897)

- **Dimensão**, *s.f.* Sentido em que se *mede* a extensão para avaliá-la; tamanho; (Mat.) extensão que se considera susceptível de medida; em Geometria, a linha tem uma só *dimensão* – o comprimento; o plano tem duas *dimensões* – o comprimento e a largura; o espaço tem três *dimensões* – comprimento, largura e altura (na Teoria da Relatividade de Einstein, a 4ª *dimensão* é o tempo); (Álg.) grau de uma potência ou de uma equação; – *de uma grandeza física derivada em relação a outra*: o expoente desta, na expressão daquela. (FERREIRA, 1964, p. 413)

- **dimensão**. [Do latim. dimensione.]S.f. **1.** Sentido em que se mede a extensão para avaliá-la. **2.** V. tamanho (3). **3.** *Fig*. Importância, valor: a dimensão universal de Camões. **4.** Mat. O número mínimo de variáveis necessárias à descrição analítica de um conjunto. **5.** Geom. Anal. Num espaço, o número mínimo de coordenadas necessárias à determinação unívoca de seus pontos. **6.** Cálc. Vet. Num espaço vetorial, o número de vetores de uma base. **7.** Álg. Mod. A ordem das matrizes na representação matricial de um grupo; grau. ▪ **Quarta dimensão**. Fís. A dimensão do tempo na complexo tetradimensional espaço-tempo. (FERREIRA, 1986, p. 590)

- **dimensão** […] **1** extensão mensurável (em todos os sentidos) que determina a porção do espaço ocupada por um corpo; tamanho, proporção **2** cada um dos sentidos em que se usa medir a extensão, a fim de estimá-la **3** *fig.* capacidade de satisfazer necessidades, de se mostrar abarcante; préstimo, valor, importância < a d. de um projeto, de um empreendimento> **4** *fig.* aspecto significativo do pensamento, da obra, da realidade < d. psicológica, política, cronológica > < a d. do teatro de Gil Vicente> **5** CÁLC. VET num espaço vetorial, número de vetores da base **6** GEOM. ANL número mínimo de coordenadas necessárias para a determinação unívoca de um ponto no espaço **7** MAT seqüência das matrizes na representação matricial de um grupo; grau [...] *d*(*e/*i) *mensĭo,ōnis* ‘dimesão, medida’ ligado ao verbo latino *d(e/i) metĭor, īris, essŭi,mēnsus sum,etīri* ‘medir’ cuja forma histórica século XV era dimensõões.(HOUAISS, 2001, p. 1042)