

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

Viviane Hengler Corrêa Chaves

Perspectivas históricas da Pesquisa Operacional

Rio Claro (SP)

2011

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

Viviane Hengler Corrêa Chaves

Perspectivas históricas da Pesquisa Operacional

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – Área de Concentração em Ensino e aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos, para obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Irineu Bicudo

Rio Claro (SP)

2011

001.424 Chaves, Viviane Hengler Corrêa
C512p Perspectivas históricas da pesquisa operacional / Viviane
 Hengler Corrêa Chaves. - Rio Claro : [s.n.], 2011
 117 f. : il., figs., gráfs., tabs., fots., mapas

 Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,
 Instituto de Biociências de Rio Claro
 Orientador: Irineu Bicudo

 1. Pesquisa operacional. 2. Racionalização. 3. Segunda
 guerra mundial. 4. Programação linear. 5. Teoria dos jogos. I.
 Título.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Irineu Bicudo

Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira

Prof. Dr. Fábio Maia Bertato

Rio Claro, 09 de junho de 2011

Resultado: Aprovada

Agradecimentos

Só a ação é prerrogativa exclusiva do homem; nem um animal nem um deus é capaz de ação, e só a ação depende inteiramente da constante presença de outros.

Hanna Arendt

Sou grata a todos os integrantes deste programa, ao meu orientador Prof. Dr. Irineu Bicudo pela oportunidade de realização deste trabalho, aos meus familiares pela paciência e incentivo. Os novos amigos que fiz ao longo dessa jornada, fazendo alusão à música Canção da América, os guardarei no lado esquerdo do peito.

Resumo

A história da Pesquisa Operacional se insere na história dos grandes acontecimentos tecnológicos e científicos do século XX e fazer uma reconstituição histórica do seu surgimento e evolução é uma maneira de entender, além do desenvolvimento da matemática aplicada, a mobilização da ciência durante a Segunda Guerra Mundial e os contextos social e político que a originaram. Outra vertente dessa história é sua influência no surgimento de outras ciências e aplicações, cujos desdobramentos no período pós-guerra contribuíram para o aumento da racionalização da sociedade moderna. O aperfeiçoamento das técnicas da Pesquisa Operacional foi um fator determinante para o seu sucesso, sendo a Programação Linear uma das mais importantes. São apresentados os seus conceitos básicos e desenvolvidas as principais ideias do algoritmo Simplex para um caso extremamente simplificado. Outra técnica considerada e apresentada de forma bastante elementar é a Teoria dos Jogos. Não é o objetivo da pesquisa detalhar suas técnicas, mas sim entender suas origens que conduzem admiravelmente as histórias de seus grandes idealizadores Dantzig, Kantorovich, John von Neumann e Morgenstern. Os aspectos metodológicos e filosóficos da Pesquisa Operacional reverenciaram pensadores como John Dewey, Churchman e Capra, que são referências para entender o pensamento do homem moderno.

Palavras-chave: História, Pesquisa Operacional, Racionalização, Segunda Guerra Mundial

Abstract

The history of Operational Research (OR) is part of the history of great technological and scientific developments of the twentieth century and to rebuild its emergence and evolution is one way of understanding, further the development of applied mathematics, the mobilization of science during the Second World War and the social and political contexts from which it was originated. Another aspect of this story is its influence on the development of other sciences and applications, whose developments in the postwar period contributed to the increased rationalization of modern society. The improvement of Operational Research techniques was a determining factor for success, with Linear Programming one of the most important. Its basic concepts are given and developed the main ideas of the Simplex algorithm to extremely simplified cases. Game Theory is another technique considered and presented in a very elementary way. It is not the goal of research detailing its technique, but to understand its origins that lead the stories admirably of its great creators Dantzig, Kantorovich, John von Neumann and Morgenstern. Philosophical and methodological aspects of Operational Research revered thinkers like John Dewey, Churchman and Capra, who are references to understand the thinking of modern man.

Key-Words: History, Operational Research, Rationalization, World War II

Sumário

1. Capítulo 1	
1.1 Introdução	08
1.1.1 O homem X tecnologia: suas relações na modernidade	08
1.1.2 Considerações Preliminares	12
2. Capítulo 2	
2.1 História da Pesquisa Operacional	17
2.1.1 Os Primeiros Ensaios	17
2.1.2 Inglaterra: o início da Pesquisa Operacional	19
2.1.3 Estados Unidos da América e a Pesquisa Operacional	24
2.1.4 A Pesquisa Operacional: após o término da guerra	32
2.2 Experiências em Pesquisa Operacional na atualidade	43
3. Capítulo 3	
3.1 Métodos, Técnicas e Noções Históricas	51
3.1.1 O Método da Pesquisa Operacional	51
3.1.2 Noções Históricas da Programação Linear	53
3.1.3 Programação Linear: o Algoritmo Simplex	60
3.1.4 Noções Históricas da Teoria dos Jogos	69
3.1.5 Teoria dos Jogos: noções matemáticas elementares	75
4. Capítulo 4	
4.1 Aspectos Filosóficos e Metodológicos da Pesquisa Operacional	85
4.2 Considerações Finais	90
Referências Bibliográficas	93
ANEXOS	97
ANEXO A – Dimensionamento dos Comboios	98
ANEXO B – As Sociedades de PO no mundo	105
ANEXO C – Jornais de PO no mundo	106
ANEXO D – Entrevista	108
ANEXO E – PO nas Universidades Brasileiras	109
ANEXO F – Teorema de Von Neumann <i>in Traité Du Calcul des Probabilités ET des ses applications</i>	112

1.1 Introdução

O objetivo desse capítulo é um convite à reflexão, numa tentativa de responder como vive o homem na modernidade. Para que cada um, na sua individualidade, possa fazê-lo, apresento uma visão tecnológica com o objetivo de mapear o seu contorno. Note-se que a escolha dessa visão é bem expressiva, pois, de acordo com Rouanet (1993, p. 120), “a modernidade é o produto desses processos globais de racionalização, que se deram na esfera econômica, política e cultural”. As tecnologias instrumentalizaram esses processos e também o meu objeto de estudo, o qual defino na segunda parte. Faço ainda algumas considerações que acredito sejam relevantes para a sua reconstrução histórica, tal qual será abordada no próximo capítulo.

1.1.1 O Homem X Tecnologia: suas relações na modernidade

Para Bronowski (1983, p. 20) “cada época exhibe um ponto de inflexão, uma nova maneira de ver e afirmar a coerência do mundo”. Hoje, esse ver dá-se pela razão e esse afirmar a coerência com o mundo, pela ciência. Cabe perguntar: face a essa realidade, como vive o homem, produtor e consumidor de cultura, agente econômico e cidadão?

A revolução científica, os aumentos tecnológicos, tudo isso contribui para um crescente racionalismo de pensamentos e atitudes. Hoje, a racionalização de métodos vai da ciência cognitiva à inteligência artificial, da tomada de decisões à resolução de problemas e os algoritmos constituem a base da computação, presentes em todas as áreas.

A evolução da modernidade engloba um processo contínuo de racionalização no qual o comportamento envolve comparações entre os meios alternativos com relação aos fins almejados. Podemos complementar com a citação de Lacroix (2009, p. 104):

A racionalidade mínima caracteriza o que se designa comumente pelo comportamento inteligente: a reflexão prévia sobre os meios a serem aplicados para se atingir um fim determinado e a reprodutibilidade dos métodos e dos gestos, permitindo que sejam conservados e transmitidos.

Podemos conceber o desenvolvimento da matemática aplicada e dos computadores, como duas entidades representativas desse processo, e cujo desenvolvimento no período pós-guerra não só anunciou como efetivou uma nova era.

Desde os sonhos de Babbage¹, que idealizou a primeira máquina de calcular, até a sua construção, transcorreu um século; porém, muito das suas ideias foi utilizado na construção dos modernos computadores. Em 1930, nos Estados Unidos, iniciou-se a construção de uma calculadora eletromecânica, Mark I, completamente automática, mas, ao ficar pronta, já tinha se tornado obsoleta pelo projeto do computador *Electronic Numerical Integrator and Calculator* (ENIAC), construído em 1946. Esse foi um dos primeiros computadores a ser construído para fins puramente militares, durante a segunda guerra mundial. Pesando 30 toneladas, ocupava um espaço físico de 167 metros quadrados, não possuía sistema operacional e era operado manualmente como uma calculadora. Os experimentos continuaram e o computador seguinte foi o *Binary Automatic* (BINAC), construído em 1949, que utilizava uma fita magnética para armazenagem de dados. Serviu como um protótipo para testar novas ideias.

O primeiro computador construído com finalidades comerciais foi o *Universal Automatic Computer* (UNIVAC), em 1951. Seus idealizadores foram John Presper Eckert² e John Mauchly³, os mesmos que projetaram o ENIAC, cuja arquitetura era muito parecida com as dos computadores da atualidade. Constituíam-se de: memória auxiliar, onde eram armazenados os dados; memória principal, área de trabalho; unidade central de processamento, CPU.

Outro brilhante matemático que se destacou neste período foi o inglês Alan Turing⁴, criador da teoria da computação e responsável pela construção de um dos primeiros computadores utilizados para decodificar as mensagens nazistas. Para tanto utilizou o método matemático de redução ao absurdo.

A segunda guerra mundial foi um divisor de águas para a prática da ciência, marco de muitas mudanças em vários setores do conhecimento. Podemos destacar entre essas o

¹ Charles Babbage (Londres, Inglaterra, 26 de dezembro de 1791 – 18 de outubro de 1871) foi um matemático inglês, filósofo, inventor e engenheiro mecânico. Considerado o idealizador do primeiro computador mecânico.

² John Adam Presper Eckert Jr (Filadélfia, 9 de abril de 1919 – 3 de junho de 1995), engenheiro eletricitista e inventor, pioneiro da computação. Engenheiro chefe do projeto ENIAC, projeto da construção do primeiro computador eletrônico, na Universidade da Pensilvânia.

³ John William Mauchly (Cincinnati, Ohio, 30 de agosto de 1907 - 08 de janeiro de 1980) foi um físico que, junto com J. Presper Eckert projetou o ENIAC, o UNIVAC e fundou a primeira companhia de computadores a *Eckert-Mauchly Computer Corporation* (EMCC), em 1947, cuja proposta era construir computadores baseado em suas experiências.

⁴ Alan Turing (Londres, Inglaterra, 23 de junho de 1912 – 7 de junho de 1954), matemático, lógico e cientista da computação. Desempenhou um papel importante na criação do moderno computador. Um dos trunfos de Adolf Hitler era uma máquina chamada Enigma que criptografava as mensagens antes da transmissão pelo telégrafo. Os alemães consideravam esse código indecifrável. Coube a Turing, contratado pelo exército inglês, decifrá-lo.

desenvolvimento tecnológico que permeou todo o século XX e que, com o término da guerra, alavancou a evolução dos computadores para fins comerciais. As crescentes inovações nessa área transformaram as máquinas do século XX em máquinas de informação, ou seja, máquinas para transmissão e recepção de dados. Sua capacidade de armazenamento e sua velocidade de processamento cresceram vertiginosamente. Podemos citar, por exemplo, a capacidade de memória, medida em *bytes*, que passou de K (2^{10}), a Mega (2^{20}), Giga(2^{30}), Tera(2^{40}) e, inversamente proporcional a esse aumento, o tamanho físico das máquinas foi diminuindo. Sua constituição que era de grandes componentes de válvulas eletrônicas, nos dias atuais, são circuitos integrados, resultando dessa forma a diminuição do seu tamanho físico. Os *Personal Computers (PC)*, *Notebooks*, e outros são originários dessa redução, e possuem, além de uma alta *performance*, um *design* cada vez mais sofisticado.

Planilhas eletrônicas, editor de texto, e outros softwares viabilizaram o seu uso, transportando-os para as nossas casas e escolas. Hoje os projetos educacionais do Ministério da Educação (MEC) são voltados para a inclusão digital, incorporando essas novas tecnologias e alterando o processo de ensino e aprendizagem. A Educação à Distância (EAD) vem consolidar esse cenário, no qual os quadros negros são substituídos por *Blogs*, *Chats*, *Forums*, ... Nesse espaço, o papel do educador é redimensionado e surgem novas formas para debates e compartilhamento de informações, resultando em novas associações e concepções de conhecimento baseada em procedimentos formais e computacionais.

Na atualidade, com o desenvolvimento de novas linguagens foi possível viabilizar a transmissão de dados entre computadores e distribuí-los em rede, interligados mundialmente, através do protocolo *Transmission Control Protocol-Internet Protocol (TCP-IP)*. É o que conhecemos por Internet. Com essa globalização, criou-se uma forte ligação entre poder econômico e tecnologia, a tal ponto que o desenvolvimento cultural e social de um povo é aferido pela utilização, desta última.

A Tecnologia da Informação (TI) é oriunda dessa revolução científica e tecnológica cujo desenvolvimento acarreta mudanças no plano social, político e econômico, transformando a cultura e conseqüentemente a humanidade. Os seres humanos não vivem somente em um mundo físico, mas em uma cultura própria que impregna e transforma seu comportamento. A cultura produz os homens e os homens produzem a cultura.

Uma dessas mudanças, proporcionada pela TI, é a criação de um espaço virtual, mediado por computadores, sem limitação de tempo e espaço, onde tudo acontece muito

rápido, nossos padrões passam a ser transitórios e nossos sentidos são exaustivamente bombardeados com informações em quantidades e velocidades nunca antes vistas.

Essas tecnologias redefinem a relação espaço-tempo, levando os teóricos a buscar novos conceitos. Através da comunicação digital, os eventos que ocorrem em nosso espaço físico são substituídos, muitas vezes, por outros de natureza virtual, ocasionando uma transitoriedade nos relacionamentos, uma sensação de estar em todo lugar e em nenhum ao mesmo tempo. A mudança nessa relação agrega ao perfil do sujeito da modernidade alguns adjetivos que denotam a sua fragilidade, tais como: instantaneidade, artificialidade, vulnerabilidade, entre outros.

Outra produção dessa tecnologia, surgida em 1991, é a *Word Wide Web* (WWW), mais conhecida como WEB, a estrela do momento. A Web é um sistema de arquivos cujos documentos podem ser de vários tipos: textos, vídeos, som, podendo ser capturados, visualizados e armazenados através de um programa de computador. A WEB cria um espaço virtual de cooperação, potencializando o trabalho coletivo.

Esses acontecimentos, utilizando uma frase de Toffler (1970, p. 28), “alteram a textura da existência, moldando nossas vidas e nossas psiques com formas novas e desconhecidas”. Essa tecnologia acelera o processo de mudança e rompe o cordão umbilical com o passado, criando uma linha divisória na história da humanidade, como salienta Toffler ao referenciar uma observação de Kenneth Ewart Boulding:

[...] no que diz respeito às diversas séries estatísticas relacionadas com as atividades da humanidade, a data que divide a história humana em duas partes iguais se encontra bem dentro da nossa memória viva. De fato, nosso século apresenta a Grande Linha Meridiana, cortando pelo meio a história da humanidade. Assim, ele afirma que: o mundo de hoje é tão diferente do mundo em que eu nasci, quanto o mundo em que eu nasci era diferente do mundo de Julio César. Vim ao mundo no meio da história da humanidade, para estabelecer grosseiramente uma data. Desde que eu nasci, já aconteceu quase tanta coisa quanto tudo o que aconteceu antes. (TOFLER, 1970, p. 24)

É essa a realidade tecnológica apresentada ao homem do século XXI, da qual ele se tornou tão dependente que suscita a necessidade de entender o fruto desse convívio. Falar dessas produções científicas, da sua natureza metódica e racional e tê-la como solução para os nossos problemas fazem parte do discurso científico. Todavia o mesmo não acontece com suas patologias, como alerta Postman (1994, p. 29) em: “as novas tecnologias alteram a estrutura dos nossos interesses: as coisas sobre as quais pensamos. Alteram o caráter de

nostros símbolos: as coisas com que pensamos. E alteram a natureza da comunidade: a arena na qual os pensamentos se desenvolvem”.

Em decorrência dessas patologias, cabe a cada cultura saber restringir, de forma inteligente, o uso dessas produções, de modo a que se possam estabelecer diálogos sobre como e para onde elas conduzem. São essas ambiguidade e complexidade, que se vivenciam com os produtos da ciência em excesso, que fazem delinear limites para a utilização dessas produções, não deixando que valores, que devam ser preservados ou evidenciados, sejam absorvidos ou ocultados pelas mesmas.

1.1.2 Considerações Preliminares

Fazendo uma análise de todas essas produções tecnológicas, citadas anteriormente, constatamos uma valorização da matematização com a globalização de procedimentos e métodos. Meu objeto de estudo, a Pesquisa Operacional, é fruto dessa prática da ciência, cuja história nos mostra como esse domínio da matemática evoluiu através das interações entre resolução de problemas práticos e pesquisa. Ela surgiu um pouco antes da segunda guerra mundial como forma organizada de pesquisa e, como seu próprio nome evidencia, a Pesquisa Operacional é pesquisa e produz pesquisa.

Desde o seu surgimento até os dias atuais, houve muita discussão para definir o que ela é, pois uma resposta simples ou uma mais complexa não são suficientes para defini-la, não importando o nível de detalhes utilizado. Como não há uma definição unanimemente aceita, podemos considerá-la mais como um conceito muito abrangente, sobre a busca da melhor utilização de recursos e processos, através da aplicação de métodos científicos, visando a uma melhor satisfação do cliente.

A Pesquisa Operacional tem origem nas forças armadas dos Estados Unidos e Grã Bretanha durante a Segunda Guerra Mundial, quando então a estatística era utilizada para determinar quais as táticas militares que funcionavam. A lógica pragmática das operações militares é que especificava as agendas de pesquisas, e nesse contexto o que importava era a eficácia do método, pois as soluções tinham de ser alcançadas em tempo hábil.

Nos tempos atuais, devido ao aumento da complexidade dos problemas, os recursos computacionais têm se tornado importantes instrumentos nas simulações e nas buscas das melhores soluções para os problemas de pesquisa operacional.

A história da Pesquisa Operacional faz parte da história dos grandes acontecimentos tecnológicos e científicos do século XX. As aplicações matemáticas exerceram papel importante durante esse período, pois instrumentalizaram a física moderna e outras ciências e o êxito de suas aplicações, com fins puramente militares, colocou em evidência os matemáticos, que distribuía as credenciais nos novos espaços que surgiram para prática da ciência em decorrência da confluência entre os militares e os cientistas. Outro fator relevante foi a utilização de modelos lógicos para a prática da ciência, cuja notoriedade foi alcançada pela sua utilização na física quântica, que tinha grande prestígio na época, devido à impossibilidade de os resultados serem analisados através de dados experimentais.

Outro movimento que surgiu nesse período e que estava ligado à pesquisa militar foi o da cibernética, liderado por grandes cientistas como John von Neumann⁵, Claude Shannon⁶, Norbert Wiener⁷, e outros.

É também ao longo desse século que os matemáticos começaram a se unir, preocupados com questões curriculares e com as técnicas de ensino, formando a primeira organização, em 1920, de Educação Matemática (NCTM - *National Council of Teachers of Mathematics*).

Todas essas mudanças ocorridas no século XX, em termos de ciência, também são refletidas nas artes. A arte moderna e a física moderna nascem juntas, concebidas nos mesmos moldes. Em seu livro “A Escalada do Homem”, Bronowski faz referência às artes plásticas, no que tange às mudanças dos objetos de interesse dos pintores do século XX, afirmando:

⁵ John von Neumann (Budapeste, Hungria, 28 de dezembro de 1903 – 08 de fevereiro de 1957), matemático húngaro naturalizado americano. Fez grandes contribuições em uma vasta gama de domínios como Física Quântica, Computação, Álgebra, Teoria dos Jogos e, foi um dos principais membros do Projeto Manhattan.

⁶ Claude Elwood Shannon (Petoskey, Michigan, 30 de abril de 1916 – 24 de fevereiro de 2001), matemático e engenheiro eletrônico, ficou conhecido como “o pai da Teoria da Informação”. Em sua tese de mestrado, no *Massachusetts Institute of Technology* (MIT), demonstrou que a álgebra booleana têm muitas aplicações na eletrônica. Os computadores digitais fazem uso de sinais binários, zero e um. O zero significa que não há passagem de corrente elétrica e o um significa que há. A analogia entre a linguagem dos computadores e a álgebra booleana pode ser feita da seguinte forma: Zero – Falso (não passa corrente) e um – verdadeiro (passa corrente elétrica). Sua tese foi considerada uma das mais importantes de todos os tempos.

⁷ Norbert Wiener (Columbia, Missouri, 26 de novembro de 1894 – 18 de março de 1964) foi um importante matemático estadunidense que ficou conhecido mundialmente pela publicação do seu livro intitulado “Cibernética”, em 1948.

O século XX mudou o objeto de seus interesses. À semelhança do que fazem os raios X de Röntgen, passaram a buscar os ossos por baixo da pele, e as estruturas sólidas profundas, que, de dentro para fora, suportam a forma total de um objeto ou de um corpo. Pintores tais como Juan Gris estão engajados na análise da estrutura, tanto em se tratando de formas naturais em Natureza Morta, como do corpo humano em Pierrot. (BRONOWSKI, 1983, p. 331)

Fazer uma reconstituição do surgimento e da evolução da pesquisa Operacional é uma maneira de entender, além do desenvolvimento matemático, a mobilização da ciência durante a segunda guerra mundial e o contexto social, político e educacional que a originou.

Não é preciso argumentar sobre a importância do estudo histórico, pois podemos observá-la na nossa própria experiência de vida. As histórias que nos contavam, quando criança; fantasiosas ou fantasmagóricas, histórias de vida, heróicas ou simples ou a nossa própria história, todas, contadas ou vividas sem compromisso e intenções ao longo de nossa formação foram tão significativas.

Com relação à matemática, podemos citar um trecho de D'Ambrósio (1999, p. 97, 101-102):

As práticas educativas se fundam na cultura, em estilos de aprendizagem e nas tradições, e a história compreende o registro desses fundamentos. Portanto, é praticamente impossível discutir educação sem recorrer a esses registros e a interpretações dos mesmos. Isso é igualmente verdade ao se fazer o ensino das várias disciplinas. Em especial o da matemática, cujas raízes se confundem com a história da humanidade. [...] É de uma miopia total procurar entender o desenvolvimento da Matemática contemporânea, que começa a surgir na segunda metade deste final de século, sem atentar para as profundas transformações políticas resultantes da Segunda Guerra Mundial e da própria condução desse conflito. Pelas mesmas razões, não se pode entender o desenvolvimento da Matemática a partir do século XVI, que é quando ela começa a se organizar como um corpo autônomo de conhecimentos, sem uma análise do processo de conquista e colonização e de suas conseqüências.

Durante o século XX as práticas e a forma de conceber a ciência já estavam consolidadas em um conhecimento estruturado. Para entender as práticas da comunidade científica atual podemos recorrer ao passado, mais precisamente ao século XVIII onde foram semeados os seus ideais, pois:

Somos o que os séculos nos fizeram!

O que somos de razão e vontade, o que somos de pensamento e ação, o que somos de sensibilidade e frieza, de trabalho e lazer, de descrença e esperança, o que somos de bílis e coração é terem existido outros, é terem traçado rumos, e terem aberto estradas, é terem apontado caminhos!

Eis nossos predecessores!

(BICUDO, 2009, p. 17)

No século XVIII, para muitos historiadores da ciência, aconteceu uma verdadeira revolução científica, cujo movimento ficou conhecido como Iluminismo. Como expõe Rouanet (1993), para o iluminismo a ciência fazia parte de um projeto geral de libertação da humanidade, onde o homem, guiado pela ciência, consolidaria sua autonomia, libertando-se do mito e das superstições e desenvolveria seu pensamento crítico.

A ideia central do iluminismo era a explicação racional para todas as questões, e isso implicava que a emancipação da humanidade seria conquistada através da ciência. Os iluministas idealizavam um mundo perfeito, regido pelos princípios da razão, sem injustiças sociais, onde todos pudessem ser livres para expressar seus pensamentos. Os principais iluministas foram Voltaire⁸, Montesquieu⁹, Diderot¹⁰, Rousseau¹¹.

O estudo da matemática e das ciências, no sistema educacional do século XVIII, na concepção desses pensadores e de outros do seu tempo, deveria prevalecer sobre o estudo das letras, o que acarretava certo descompasso como o aludido por Gomes (2003, p. 12-13) em sua tese de doutorado:

O latim e os escritores antigos simbolizam a cultura humanística que ainda domina o sistema educacional na França do século XVIII, especialmente nos colégios jesuítas, que formam a elite intelectual do país. Esta aí o segundo ponto revelado pela 128ª carta persa: na ordem pedagógica setecentista, o estudo das letras prevalece sobre o das ciências, e a Matemática tem pouco espaço. Há, assim, como enfatiza Georges Gusdorf, um descompasso entre a situação real do saber, no qual as ciências ocupam um lugar cada vez mais importante, e a ordem oficial da cultura, que perpetua a preponderância já prescrita das belas-letas. Escreve Gusdorf: Esse desnível suscita a reação justificada dos melhores espíritos, levados assim a sublinhar a oposição, e talvez a incompatibilidade entre a formação literária, inútil e regressiva, e a formação científica, única aberta sobre o real e senhora do futuro. Na polêmica secular, entre as letras e as ciências, são as ciências que lançam a ofensiva para forçar o reconhecimento de sua validade menosprezada.

⁸ François-Marie Arouet (Paris, França, 21 de novembro de 1694 – 30 de maio de 1778), mais conhecido pelo pseudônimo de Voltaire. Foi um escritor e filósofo iluminista.

⁹ Charles-Louis de Secondat (Bordeaux, França, 18 de janeiro de 1689 – 10 de fevereiro de 1755), ou simplesmente Barão de Montesquieu, foi um político, filósofo e escritor francês.

¹⁰ Denis Diderot (Langres, França, 5 de outubro de 1713 – 31 de julho de 1784) foi um filósofo e escritor francês. Sua obra prima foi a idealização da “*Encyclopédie*”, na qual era reportado todo o conhecimento que a humanidade havia produzido até sua época.

¹¹ Jean-Jacques Rousseau (Genebra, Suíça, 28 de junho de 1712 – 2 de julho de 1778), filósofo, escritor e compositor. Uma das figuras marcantes do Iluminismo francês e também precursor do Romantismo.

Em suma o legado do iluminismo foi de grande relevância para vários setores do conhecimento. Nomes como o de Adam Smith¹², fundador do liberalismo econômico, Isaac Newton¹³, matemático, astrônomo, físico e filósofo inglês, John Locke¹⁴, filósofo e político inglês, e muitos outros contribuíram para grandes avanços na ciência e na matemática. E o século das Luzes deu a emancipação intelectual ao homem.

¹² Adam Smith (Kirkcaldy, Escócia, 16 de junho de 1723 - 17 de julho de 1790) foi um filósofo, pioneiro da economia política e uma das principais figuras do Iluminismo escocês. Sua obra prima “A Riqueza das Nações” é considerada uma das mais influentes obras da economia moderna. Smith é citado como o pai da economia moderna.

¹³ Isaac Newton (Woolsthorpe, Inglaterra, 4 de janeiro de 1643 – 31 de março de 1727) foi um cientista inglês, mais reconhecido como físico, matemático e astrônomo. Sua obra, “*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*” publicada em 1687, descreve a lei da gravitação universal e as três leis de Newton, que fundamentaram a mecânica clássica.

¹⁴ John Locke (Wrington, Inglaterra, 29 de agosto de 1632 – 28 de outubro de 1704), filósofo, médico, político e um dos principais representantes do empirismo. Rejeitava a doutrina das idéias inatas e afirmava que elas tinham origem no que era percebido pelos sentidos. Um dos mais influentes pensadores do Iluminismo, cujas obras marcaram Voltaire, Rousseau e muitos outros pensadores iluministas.

2.1 História da Pesquisa Operacional

As investigações históricas realizadas sobre a Pesquisa Operacional (PO)¹⁵, e que me proponho a descrever nesse capítulo, explicam suas contribuições nos esforços de guerra, suas influências no surgimento de outras ciências e aplicações e as suas tendências no período pós-guerra. Por trás desta história podemos ainda notar o surgimento da racionalidade social, cujos motores foram a ciência e a tecnologia. Também constatamos que o conhecimento científico pode ser moldado pelos interesses políticos e sociais, ou seja, as pesquisas e as formulações matemáticas podem ser usadas para atender a muitos propósitos.

O contexto de sua origem e evolução permitiria outra versão histórica, onde a PO poderia ser considerada, segundo Mirowski (1999), como a órfã mal amada da história da ciência e, nessa perspectiva, a ciência é condenada por colocar-se a serviço da guerra e da destruição. Não é essa a abordagem trabalhada nesta tese, mas sim a de exibir as potencialidades da matemática aplicada, a qual ajuda a descobrir e a descrever os fenômenos da natureza e a estabelecer relações entre eles e o homem, na produção do conhecimento.

O contexto histórico abordado na presente pesquisa compreende o período que vai desde o surgimento da PO, meados de 1935 até 1950, período em que estavam consolidados os conceitos da PO e dos seus principais métodos: a Programação Linear e a Teoria dos Jogos.

2.1.1 Os primeiros ensaios

Sob o ponto de vista histórico é possível identificar as origens da PO em épocas mais remotas, mas impossível de se encontrar o fato histórico que a originou. Concordo com Bloch (2001) que uma das funções do historiador é a de buscar entender os fatos ao longo do tempo, estabelecendo relações de causa e efeito com o presente, sem o exagero da busca pela origem, que para ele é quase sempre indeterminada.

Olhando o passado, não em busca de uma origem da PO, mas no encalço de suas manifestações, vamos encontrar no trabalho do grande físico e matemático grego Arquimedes, um dos seus prenúncios. Arquimedes idealizou a defesa da cidade de Siracusa, projetando novas armas e táticas militares baseadas em seus estudos científicos. Não podemos deixar de

¹⁵ Passaremos a utilizar, a partir de agora, apenas PO todas as vezes que nos referirmos a Pesquisa Operacional.

considerar a influência e a originalidade de muitos dos precursores da PO, mas foi durante a primeira Revolução Industrial, muitos séculos depois, que começaram a surgir os primeiros problemas que mais tarde ela iria abraçar.

Essa revolução revelou uma nova era que, aliada às inovações tecnológicas, impulsionou o crescimento nas indústrias e gerou um aumento sem precedentes na produtividade do trabalho. Ela afetou toda a sociedade, não só no plano material como também no espiritual e moral. Para atender às necessidades e exigências dessa nova sociedade, surgiram novos tipos de administração, novas indústrias, novas máquinas, e iniciou-se uma série de estudos destinados a aumentar a eficiência de determinadas operações industriais.

Para ilustrar uma dessas operações, vamos considerar uma extraída do livro de Ellenrieder (1971), que foi realizada no interior da indústria *Bethlehem Steel Co*, referente ao melhor tamanho de uma pá para carga manual. De acordo com os estudos empíricos realizados, verificou-se que uma pá com capacidade de aproximadamente 10 kg implicaria o maior rendimento diário em carga total transportada. Com isso, o número de operários foi reduzido de 500 para 140, elevando-se assim a média de 16 para 59 toneladas por homem, aumentando os salários de US\$1,15/dia para US\$1,88/dia. Esse método foi desenvolvido pelo industrial Frederick W. Taylor e chamado por ele de Administração Científica. Ele desenvolveu vários estudos dessa natureza, reunindo-os no livro “*The Principles of Scientific Management*”, editado em 1911.

Hoje talvez esses estudos fossem considerados estudos de PO, porém, como acontece em toda ciência, sempre existem ensaios preliminares, os quais muitas vezes não são incorporados à nova disciplina. A PO não é exceção.

Assim, o que denominamos PO – que é na realidade o emprego da pesquisa científica para auxiliar o dirigente – custou a aparecer no cenário do desenvolvimento da administração industrial. A estagnação da PO poderia ter continuado indefinidamente, não fosse o desenvolvimento que teve nas organizações militares com a deflagração da Segunda Guerra Mundial.
(ACKOFF e SASIENI, 1971, p. 5)

O nome Pesquisa Operacional é relativamente novo e de origem militar, sendo usado pela primeira vez na Grã-Bretanha, durante a Segunda Guerra Mundial.

2.1.2 Inglaterra: o início da Pesquisa Operacional

A Europa, enlouquecida, rugia.
 A América do Norte parecia dormir
 lá ao longe, no horizonte, do outro lado do mar.
 A terra girava, como um grande astro doido
 No qual a paz dependia apenas do inseguro equilíbrio
 de forças desmentadas.
 E, de repente,
 O equilíbrio rompeu-se (...)
 Jean Guéhenno¹⁶

Em 1914 tem início a Primeira Guerra Mundial. Na Europa e na América do Norte surgem tentativas para analisar matematicamente as operações militares. Na Inglaterra, Lanchester¹⁷, como passatempo, fazia ensaios sobre vitória, poderio de fogo, e outras simulações através de modelos matemáticos. Em seu livro “*Aircraft in Warfare*”, publicado em 1916, descreve a eficiência da análise quantitativa na estratégia militar.

Paralelamente, nos Estados Unidos, Thomas Edison¹⁸ desenvolvia estudos sobre a guerra anti-submarina, cujo trabalho envolvia a manipulação de dados estatísticos na elaboração de estratégias para a destruição de submarinos. Ele utilizava um tabuleiro tático para fazer simulações de operações militares, sendo o seu principal objetivo desenvolver métodos seguros de proteção à marinha mercante. Os estudos de Lanchester e os de Edison não foram utilizados durante a Primeira Guerra Mundial, mas podemos afirmar que foram os primeiros ensaios da Pesquisa Operacional.

Na Inglaterra, em 1934, foi criado o Comitê para o Estudo Científico da Defesa Aérea, cuja proposta era a utilização dos recursos tecnológicos para reforçar e modernizar os métodos utilizados pela Defesa Aérea contra os aviões inimigos. Um ano após a criação desse comitê, surge o radar. Prevendo sua utilização nas táticas de defesa empregadas e no direcionamento e controle da sua frota, começaram a realizar experimentos simulados de detecção de aviões inimigos e o envio dos seus para interceptá-los, o que possibilitou a análise e o desenvolvimento de novos métodos de interceptação.

¹⁶ Poesia extraída do livro “Grande Crônica da Segunda Guerra Mundial”, publicado pela Seleções do Reader’s Digest, em 1969.

¹⁷ Frederick William Lanchester (Lewisham, London, 23 de outubro de 1868 - 08 de março de 1946) foi um engenheiro que fez importantes contribuições no setor da engenharia automotiva, aerodinâmica e vários estudos tentando aplicar a análise matemática à guerra.

¹⁸ Thomas Alva Edison (Milan, Ohio, 11 de fevereiro de 1847 – West Orange, Nova Jérsei, 18 de outubro de 1931) foi um inventor e empresário dos Estados Unidos que desenvolveu muitos dispositivos importantes de grande interesse industrial.

Esses experimentos originaram a formação de equipes, constituídas por cientistas e militares, para trabalhar com atividades dessa natureza. Um pouco antes do início da Segunda Guerra Mundial, no posto de pesquisa de Bawdsey¹⁹, na Inglaterra, já existia uma dessas equipes trabalhando com essas atividades, cujo objetivo era localizar objetos no espaço por meio da nova tecnologia de radar.

Albert Percival Rowe era o superintendente desse posto e foi por sua iniciativa que houve essa aproximação entre os cientistas britânicos e os militares, com o objetivo de ensiná-los a usar essa nova tecnologia. G.A. Roberts era o cientista incumbido de estudá-la e integrá-la ao sistema já existente.

O comandante R. Hart e A.P. Rowe estavam se organizando para que, quando iniciasse a guerra, fosse transferido um grupo de cientistas desse posto para o Quartel-General do Comando de Combate da Real Força Aérea, com o objetivo de criar em Stanmore²⁰ um posto de PO.

Simultaneamente, o Dr. E.C. Williams desenvolvia estudos importantes para a *Royal Air Force* (RAF), dos quais destacamos a análise das variações verificadas nos resultados apresentados pelas estações de alarme aéreo. Percebendo a semelhança entre os trabalhos de Roberts e Williams, Rowe reuniu-os no setor de Estabelecimento de Pesquisas de Telecomunicações, que era supervisionado por H. Larnder. Esse setor é que foi transferido para *Stanmore*, quando a guerra começou.

Como o próprio Larnder pondera, este setor passa a analisar todas as falhas de interceptação dos aviões alemães que buscavam penetrar na ilha britânica. De posse desses relatórios de combate, surgem novas técnicas para o controle das formações britânicas contra as germânicas, e também regras simples, mas de resultados bastante eficientes, como, por exemplo, a fragmentação de sinais no radar, que seria um indicador de que os bombardeiros inimigos estavam perdendo altitude para lançar suas bombas.

O exército britânico interessou-se profundamente pela pesquisa operacional. Em agosto de 1940, o general F.A. Pile, Comandante Supremo do Comando Antiaéreo, solicitou ajuda dos cientistas para a utilização do equipamento de radar nas posições de artilharia. Tal equipamento fornecia o ângulo de inclinação e a posição de um bombardeiro inimigo, através de uma tecnologia recentemente desenvolvida, que propiciava a leitura de sua elevação. Porém, esse equipamento não garantia a mesma *performance* nas posições de artilharia que as

¹⁹ Bawdsey é uma cidade em Suffolk, Inglaterra, onde existe uma estação de radar. Em Bawdsey foram realizadas pesquisas sobre essa tecnologia durante a Segunda Guerra Mundial.

²⁰ Stanmore é um bairro ao norte de Londres.

observadas nas estações experimentais.

Foi destacado para estudar esse problema o cientista P.M.S. Blackett²¹, posteriormente laureado em 1948 com o Premio Nobel. Ele reuniu para esse trabalho três fisiologistas, dois físicos-matemáticos, um astrofísico, um oficial do exército, um agrimensor, um físico e dois matemáticos. Para solucioná-lo foi necessário que as observações científicas fossem realizadas nas próprias posições de artilharia durante operações reais. Esse grupo de pesquisa de Blackett ficou conhecido como “*Blackett’s circus*.”

Uma curiosidade citada por Mirowski (1999) é que o “*Blackett’s circus*” ganhou notoriedade quando se aventurou por outra área que não era de sua competência: a tática militar. Podemos destacar algumas dessas ousadas operações que foram baseadas em suas pesquisas, como a mudança da profundidade de explosão para a detonação das bombas e a pintura branca nos submarinos para dificultar sua visualização.

Blackett e alguns dos membros da sua equipe foram transferidos, em 1941, para outro comando, no qual se viram envolvidos com problemas relativos à detecção de navios e submarinos, por meio da utilização do equipamento de radar. O êxito dessas operações provocou um aumento na procura de serviços dessa natureza e, logo após o início da guerra, os três serviços militares britânicos tinham equipes organizadas de pesquisa operacional trabalhando em conjunto com os cientistas.

Blackett é considerado o pai da PO e foi o primeiro a introduzi-la no Exército e na Marinha, tornando-se, em 1941, Conselheiro Científico e Diretor da Pesquisa Operacional Naval. Foi ele que, indiscutivelmente, definiu as regras básicas pelas quais a PO deveria operar e o primeiro a definir as suas características.

A colaboração entre cientistas e militares passou a ser uma constante durante esse período de guerra, cuja prática acabou difundindo-se entre os aliados: Estados Unidos, Canadá e França. Essa união é decorrente, segundo Ackoff e Sasieni (1971), do grande desenvolvimento na tecnologia militar ocorrido entre o fim da Primeira Guerra Mundial e o início da Segunda. Os administradores militares, não conseguindo impor essas novas tecnologias às táticas e às estratégias de guerra, viram-se confrontados com problemas de grande dimensão e complexidade. Esse descompasso levou-os a solicitar ajuda dos cientistas, sendo uma delas a incorporação da nova tecnologia de radar às suas táticas e às estratégias de guerra.

²¹ Patrick Maynard Stuart Blackett (Londres, 18 de novembro de 1897 – Londres, 13 de julho de 1974) foi um famoso físico, laureado com o Prêmio Nobel pelo seus trabalhos, Desenvolvimento do método da Câmara de Wilson e descobertas no campo da Física Nuclear, em 1948.

Essa proximidade resultou na criação de um novo espaço para a prática da ciência, tornando a PO tão importante após a Segunda Guerra:

A razão pela qual a PO foi tão importante após a Guerra não foi devida a qualquer inovação ou descoberta técnica particular: pelo contrário, foi o “*workshop*” onde a relação do pós-guerra entre os cientistas naturais e o estado foi reconfigurada, e o locus onde a economia foi integrada nessa abordagem científica aos governo, gestão empresarial e sociedade. (MIROWSKI, 1999, p. 690)²²

Nesse espaço aconteceram muitas reformulações e uma delas foi a mudança na organização e no estilo de pesquisa. Olhando pelo prisma organizacional, sua flexibilidade foi quase uma exigência devida às diversidades de formas de organização e métodos que surgiram naquele período, pois:

Quer em pesquisa operacional quer em qualquer outra espécie de atividade, a função da organização é permitir grupos de pessoas trabalharem eficientemente em conjunto. É uma função de serviço, um meio para um fim, que é o trabalho eficiente em conjunto e não um fim em si mesmo. A organização trata de relações entre seres humanos. É difícil desenvolver princípios particularizados de organização, porque os seres humanos se caracterizam por amplas zonas de diferenças individuais. (HENDERSON, 1966, p. 86)

Diferentes denominações foram atribuídas à PO, decorrentes das diversidades nas organizações de pesquisa e da multiplicidade das operações militares. Foi Rowe que passou a se referir a seu grupo não mais como grupo científico, mas como grupo de pesquisa operacional.

Bawdsey é considerada o seu lugar de nascimento, no período compreendido entre 1935-1938, e os ingleses, os gestores do seu conceito básico. Se pensarmos nas atividades de pesquisa que a originaram e na sua condução prática, parecem-nos hoje exemplos inadequados de PO.

É sempre a história que nos conta o que se passou, e mesmo os momentos trágicos da guerra é necessário registrá-los, pois amanhã, esquecidos, teremos a chance de repensá-los e, talvez, permitir à humanidade inteira uma segunda chance.

Podemos, hoje, presumir as dificuldades para documentar essas operações e cada etapa do seu desenvolvimento, o que pode ter obscurecido, ou ter causado a omissão de

²² *The reason that OR was so important after the war was not due to any particular technical innovation or discovery: rather, it was the workshop where the postwar relationship between natural scientists and the state was reconfigured, and the locus where economics was integrated into this scientific approach to government, corporate management and society.*

algumas, cabendo ao historiador reconstituí-las. Na realidade, em muitos casos, “mal havia tempo para o registro das atividades diárias que tornasse simples coligir a matéria e que, posteriormente, serviria para o preparo da História da Pesquisa Operacional” (TREFETHEN, 1966, p. 27).

Apesar dessas dificuldades, foi possível delinear claramente algumas das suas características. Tornou-se óbvio, por exemplo, que a organização constituída em um escritório central e unidades de campo adequou-se melhor à situação. No escritório central eram efetuados o processamento e o planejamento dos dados, de onde eram feitos os contatos com os ministérios. Nas unidades de campo eram realizadas as observações e aferições, essenciais ao estudo dos problemas.

Uma outra característica, relevante para o seu sucesso, foi a diversidade na formação das equipes. Para apoiar os comandos operacionais na resolução de problemas, como já mencionamos, foram criados grupos multidisciplinares, compostos de matemáticos, físicos, engenheiros, cientistas sociais, e outros. O uso de equipes interdisciplinares disponibiliza um arsenal maior de técnicas de investigação e ajuda a construir a ligação entre a teoria e a prática. Os grupos que trabalharam com PO tinham representantes de quase todas as áreas e podemos citar como exemplo os biólogos. Por estarem habituados a lidar com diferenças individuais em grande volume de casos e por terem controle de situações experimentais, tiveram uma contribuição significativa nos grupos de pesquisa.

Outra característica que a distingue das primeiras atividades de pesquisa, durante a Segunda Guerra Mundial, é a sua abrangência sistêmica. Ela surgiu devido ao aumento da complexidade dos problemas e pode-se dizer que essas modificações são decorrentes da forma de conceber e utilizar o conhecimento. Parte do pressuposto que o comportamento de qualquer parte afeta o todo. Então, procura considerar todos os eventos significativos, mensurá-los e avaliá-los globalmente. O grande responsável por essa maneira sistêmica de abordar os problemas surgidos durante a guerra foi G.A. Roberts.

O surgimento da cibernética durante esse período reforça essa concepção, em que a própria realidade é recortada em sistemas. Essa ideia, cada vez mais tomou forma e estruturou toda a sociedade moderna em um mundo sistêmico. Hoje constroem-se modelos computacionais espelhados na natureza, em que encontramos inúmeros sistemas extremamente complexos e adaptáveis às mudanças do ambiente. Essas características satisfazem os requisitos necessários para as novas gerações de sistemas, onde a ideia de duplicar, mesmo que em uma pequena parte, o sucesso da natureza, nos permite construir outros mais sofisticados. Cabe aqui ressaltar que essa característica da PO é comum a todas

as ciências que surgiram, ou evoluíram durante esse período, sob o patrocínio militar, tendo como base a pesquisa científica. De acordo com Mirowski (1999), existe um consenso na literatura de denominá-las *cyborg sciences*, inspirado no paradigma comando-controle-comunicação-informação e podemos agregar a esse grupo o advento do computador.

Sua outra característica está relacionada à utilização do método científico aos problemas apresentados. As avaliações dos dados e fatos expostos eram exploradas sistemática e objetivamente, procurando reunir as observações isoladas num todo lógico e coerente. “Um dos poderes maiores do pensamento científico é a habilidade de desvelar verdades que são visíveis somente “aos olhos da mente”, como diz Platão, e de desenvolver modos e meios de lidar com elas” (BICUDO, 2009, p. 16).

A experiência britânica na Segunda Guerra Mundial mostrou que as pessoas que trabalharam com PO podiam fazê-lo melhor se estivessem livres das restrições impostas aos militares. Foi a liberdade para se comunicar diretamente com todos os envolvidos, de todas as classes, que tornou possível o grau de eficiência em investigação, essencial à pesquisa científica. Apesar de a ciência nesse período ter sido capturada pelo complexo industrial militar, de certa forma os cientistas conseguiram preservar sua autonomia intelectual, o que para os iluministas é um ideal irrenunciável.

2.1.3 Estados Unidos da América e a Pesquisa Operacional

Um ano antes de os Estados Unidos entrarem na guerra, existia uma profunda insegurança por parte dos cientistas americanos com relação ao sistema de defesa vigente no país, devido ao fraco poder da tecnologia bélica, à falta de planejamento para priorizar as estratégias e à necessidade de um alinhamento tecnológico militar.

Pressentindo um conflito inevitável e a sua real dimensão, quatro líderes da ciência americana se reuniram para discutir o assunto, visando adequar-se às necessidades da guerra moderna. Esses cientistas eram Vannevar Bush, presidente do *Carnegie Institution of Washington*, um engenheiro elétrico, Karl Taylor Compton²³, presidente do *Massachusetts Institute of Technology* (MIT), um físico, James Bryant Conant²⁴, presidente da *Harvard*

²³ Karl Taylor Compton (Wooster, Ohio, 14 de setembro de 1887 – 22 de junho de 1954), físico e presidente do *Massachusetts Institute of Technology* (MIT) entre 1930-1948.

University, um químico e Frank Baldwin Jewett²⁵, engenheiro eletricitista e presidente da Academia Nacional de Ciências e da *Bell Telephone Laboratories*.

Vannevar Bush²⁶ estimulou esse debate em decorrência do que tinha vivenciado durante a Primeira Guerra Mundial, onde a falta de cooperação entre cientistas civis e militares foi crítica. Foi um intelectual e um criador de políticas de incentivo e a sua liderança no desenvolvimento do complexo militar americano tinha como plano de ação a incorporação do conhecimento científico, através da participação dos cientistas nos esforços de guerra.

Como porta voz desse grupo, convenceu o presidente Roosevelt da necessidade de mobilizar a pesquisa científica no campo militar e mostrou que a tecnologia era a chave para a vitória. Assim, com o apoio do presidente Roosevelt, foi criado em 27 de junho de 1940 o *National Defense Research Committee* (NDRC), com verbas para o rearmamento e o financiamento da ciência. Essa organização coordenou, supervisionou e realizou investigações científicas, iniciando os estudos das tecnologias mais importantes da Segunda Guerra Mundial: a bomba atômica e o radar.

Um ano depois, em 28 de junho de 1941, foi criado o *Office of Scientific Research and Development* (OSRD), agência do governo federal, que acabou incorporando o NDRC e coordenando as atividades científicas surgidas durante a guerra. Com recursos e fundos ilimitados, a pesquisa e o desenvolvimento eram efetuados pelas Universidades e pelas Instituições Industriais através de contratos firmados com o OSRD. Ele foi organizado como é hoje a *National Science Foundation* (NSF)²⁷, criada logo após o término da guerra por recomendação, também, de Vannevar Bush ao presidente.

O NDRC, devido à incorporação, passa a exercer o papel de consultoria dentro da nova organização, sendo sua incumbência estabelecer a política de contratos, alocar recursos e

²⁴ James Bryant Conant (Dorchester, Massachusetts, 26 de março de 1893 – 11 de fevereiro de 1978), presidente da Universidade de Harvard de 1933 a 1953. Trabalhou no projeto Manhattan e após a guerra foi consultor da *National Science Foundation* (NSF) e da Comissão de Energia Atômica.

²⁵ Frank Baldwin Jewett (Pasadena, Califórnia, 5 de setembro de 1879 – Summit, Nova Jérsei, 18 de novembro de 1949) foi um engenheiro eletricitista e o primeiro presidente da *Bell Telephone Laboratories*. Com o fim da Segunda Guerra Mundial passou a ser consultor civil para assuntos científicos militares.

²⁶ Vannevar Bush (Chelsea, Massachusetts, 11 de março de 1890 – 30 de junho de 1974), durante a Primeira Guerra trabalhou na fabricação de detectores de submarinos utilizados pela Marinha dos Estados Unidos. Muitos o consideram o pai da informática devido à criação do analisador diferencial mecânico em 1931, o qual serviu de estímulo para as pesquisas que levaram ao desenvolvimento do primeiro computador digital. Outra das suas maravilhosas ideias, referida em um artigo intitulado *As We May Think*, publicado em 1945, é a idealização de uma máquina que permitiria a extensão da memória humana, utilizando-se de recursos de abrir documentos interligados associativamente, ou seja, é a mesma ideia do que hoje chamamos de hipertexto.

²⁷ A NSF é uma agência federal, independente, criada pelo congresso Americano em 1950, para promover o programa da ciência visando melhorar a saúde nacional, a prosperidade, o bem-estar e garantir a defesa nacional.

monitorar os contratos de pesquisa.

À medida que surgiam novas necessidades militares, o NDRC ia se ampliando para atendê-las. No fim da guerra ele era constituído de dezenove divisões, dois painéis de matemática aplicada e três comissões. Nessa organização, as divisões consideradas eram: pesquisa balística, guerra submarina, radar, projéteis especiais, e outras. O Painel de Matemática Aplicada (AMP) se dividia na sede Central e no Grupo de Pesquisa Estatística (SRG), sobre o qual faço algumas considerações adiante.

O NDRC desempenhou um importante papel no começo da pesquisa operacional nas Forças Armadas dos Estados Unidos. As notícias sobre PO cruzaram o Atlântico pela primeira vez, com James B. Conant, então Presidente do NDRC, que tomou conhecimento das suas aplicações durante uma visita que realizou à Inglaterra, no outono de 1940. Após alguns meses de os Estados Unidos terem entrado na guerra, a Marinha e as Forças Aéreas do Exército Americano já tinham iniciado trabalhos de pesquisa nesse novo campo.

Semelhante à Força Aérea Britânica, a dos Estados Unidos também iniciara seus estudos com problemas relativos à nova tecnologia de radar, tendo cientistas à frente de seus comandos operacionais. A Universidade de Princeton e o Laboratório de Radiação do Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT) eram os locais onde os oficiais do Posto de Pesquisa Científica e Desenvolvimento treinavam os grupos de analistas. Mais tarde, esses analistas seriam transferidos para a Força Aérea.

Trefethen (1966) cita que, no decorrer da guerra, aproximadamente 400 pessoas trabalharam com PO para as Forças Armadas, como analistas operacionais. Dentre eles estavam oficiais, soldados, analistas e civis. Cada grupo consistia em média em 10 analistas, trabalhando nos problemas vitais para os comandos militares.

Verificando-se que não existia nenhum estudo para orientar o aperfeiçoamento das minas, destinados às operações ofensivas, cerca de 50 membros do Laboratório do Arsenal da Marinha, liderados pelo Dr. Ellis A. Johnson, iniciaram um estudo sistemático e minucioso de todos os problemas, de ordem tática, estratégica e técnica referentes a esse tópico. Usaram a técnica do jogo de guerra para aprimorar modelos de operações possíveis e testar diversas táticas e armas de guerra.

Esse trabalho justificou a criação de um grupo de PO do Laboratório do Arsenal da Marinha, em março de 1942. Nessa época, o trabalho de PO realizado na Inglaterra já era bastante conhecido do pessoal do laboratório, de modo que eles adotaram a mesma nomenclatura. Johnson foi transferido para outros comandos, porém continuou com seus estudos aplicando as técnicas de PO a seus novos problemas.

Mais tarde, ele foi transferido para o XXI Comando de Bombardeio como diretor das Operações de Lançamento de Minas. A respeito de sua influência temos:

Seus estudos em PO haviam revelado que os aviões B-29 poderiam ser empregados mais eficientemente no lançamento de minas se os reides de uma única sortida fossem levados a cabo, à noite, numa altitude da ordem de 5000 pés. Esta tática tinha muitas vantagens sobre os usuais reides de bombardeio em formações de elevada altitude sobre o Japão: reduzia-se o curso balístico; atenuava-se o desgaste dos motores exigido a altitudes elevadas; eliminava-se o esforço das formações de vôo e, vantagem completa, podia-se aproveitar a debilidade do sistema de radar inimigo e a falta de aviões de caça noturnos japoneses. /.../ porem é significativo que, depois de recomendações de pesquisa operacional terem sido submetidas ao general Lemay, em 29 de janeiro, ele ordenou, quase imediatamente, que a tática proposta fosse empregada em todos os futuros reides de B-29. (TREFETHEN, 1966, p. 39)

Em março de 1945 aconteceu a realização da chamada operação fome, que consistiu no lançamento aéreo de minas sobre as águas controladas pelos japoneses. Nessa operação foram colocados em prática os estudos realizados por esse grupo. O impacto dessa operação, no Japão, foi comparável ao impacto de bombas de alto poder explosivo, pois provocou um estrangulamento econômico e uma desestabilização nas indústrias japonesas.

Esse trabalho, realizado pelo Laboratório do Arsenal da Marinha, simbolizou o tipo de PO estratégica que surgiu na Segunda Guerra Mundial, primeiramente na *Research and Development Corporation* (RAND), e depois no Setor de Pesquisa Operacional do Exército. A pesquisa operacional militar passa, além de resolver seus problemas táticos, a encontrar soluções ótimas para os problemas emergentes da situação, como também a formular previsões. Essa nova abordagem para solucionar problemas, subordinados à racionalização das atividades militares, deu início a um processo de reconfiguração das estruturas de defesa dos Estados Unidos através de uma concepção científica dos estudos estratégicos.

A síntese da definição da PO dada pelos Dr. Ellis A. Johnson e Patrick Blackett, logo no seu surgimento, é a seguinte: “(...) PO: é a previsão e comparação de valores, efetividade e custos de um conjunto de cursos alternativos propostos de ação envolvendo o sistema homem-máquina.(Johnson, 1954:xxii). /.../ foi nada mais que “ciência social feita em colaboração com e em nome dos executivos” (Blackett, 1962:201)” (MIROWSKI, 1999, p. 688)²⁸.

Devido às intensificações da guerra submarina, em abril de 1942, o Comandante da

²⁸ (...) OR “is the prediction and comparasion of values, effectiveness and costs of a set of proposed alternative courses of action involving man-machine system”. (Johnson,1954:xxiii) . /.../ put it, it was nothing more than 'social science done in collaboration with and on behalf of executives' (Blackett, 1962: 201).

Unidade da Guerra Anti-Submarina solicitou ao Coordenador de Pesquisa e Desenvolvimento a formação de um grupo de PO. Em maio de 1942 foi organizada uma seção com sete pesquisadores da Universidade de Colúmbia e para chefiar essa equipe foi convocado o Dr. Philip M. Morse²⁹, físico do MIT. O início das atividades dessa unidade é descrito assim:

No interior dessa unidade, Philip Morse organizou um grupo de pesquisa operacional (o ASW OR Group) de mais ou menos trinta pessoas, formado principalmente de físicos e matemáticos. A descrição das atividades deste grupo ajuda a formar uma ideia do que tratava a pesquisa operacional nos EUA então. Pickering (1995a:15) utiliza-se do testemunho do próprio Philip Morse para tanto. A princípio eles se depararam com um arquivo – “uma sala cheia de relatórios de todas as ações de ou contra submarinos inimigos, reais ou imaginados”, resultante da atividade de vigilância sobre operações militares – e o objetivo era fazer uso deste arquivo operacional. (BARROS, 2004, p. 18)

Esse grupo, inicialmente, trabalhou na análise dos resultados de ataques navais e aéreos contra os submarinos inimigos, com o objetivo de melhorar a eficiência dessas operações. Em julho de 1943, esse grupo, já seis vezes maior, foi incorporado ao Estado Maior da Décima Frota, como Grupo de Pesquisa Operacional de Guerra Anti-Submarina, e no término da guerra consistia em setenta e três cientistas com as mais diversas experiências, revezando-se nos trabalhos de campo e atuando em vários comandos.

Os problemas abordados pela PO, durante esse período, foram tantos e tão variados que seria impossível relacioná-los. Outros importantes e ainda não mencionados foram: relação de peso das bombas, precisão de bombardeios, manobras de navios para evitar kamikazes e dimensionamento dos comboios. Nos Estados Unidos a PO recebeu várias denominações: análise de operações, avaliação de sistemas, pesquisa de operações, análise de sistemas, ciência de administração e pesquisa operacional.

Ao rever sua história, encontramos algumas especificidades da sua gênese, como relata Mirowski (1999). Primeiro, eram os cientistas naturais, principalmente os físicos, que foram os responsáveis pela sua criação, condução e codificação durante o regime da Segunda Guerra Mundial. Segundo, os militares procuraram ajuda dos civis, em particular dos cientistas, na condução da guerra. Suas aplicações se restringiram às militares e as agendas de pesquisas eram determinadas pelas suas necessidades. Terceiro, acreditava-se que existia um método científico genérico, o qual era utilizado pelos pesquisadores operacionais na resolução

²⁹ Philip McCord Morse (Shreveport, Louisiana, 6 de agosto de 1903 – 5 de setembro de 1985), graduou-se em física e tirou seu Ph.D. pela Universidade de Princeton, em 1929. Foi professor no MIT e é considerado o pai da PO, nos Estados Unidos, pelas suas contribuições e realizações nesse campo.

desses problemas. Depois da construção da bomba atômica ele foi contestado, e tudo passou a ser uma questão de posse de conhecimentos matemáticos.

É assim que a PO é apresentada nos documentos contemporâneos e em alguns relatos históricos desse tempo e, em vez de considerá-la como parte da matemática, uma caracterização melhor seria pensar que alguns matemáticos foram recrutados durante a Segunda Guerra Mundial para trabalhar em unidades interdisciplinares, comandados pelos físicos e conduzidos a participar das mais diversas atividades, agrupadas sob a rubrica PO (MIROWSKI, 1999).

Logo no início da guerra muitos matemáticos foram convidados a se envolver mais com as necessidades dos militares, a fim de resolver problemas relacionados ao esforço de guerra. Foi criado em 1942 o *Applied Mathematics Panel* (AMP), como uma divisão da NDRC, para ajudar a resolver esse tipo de problema. Seu objetivo era estabelecer grupos de matemática aplicada em varias Universidades, cujos contratos seriam firmados pela sede da AMP, localizada em Manhattan, que forneceria os projetos a serem analisados em resposta aos pedidos dos militares ou de suas contratadas. O AMP foi dirigido pelo matemático Warren Weaver³⁰. Em 1948 ele escreveu um artigo com o título *Ciência e Complexidade*, que abordava temas como *Ciência e Guerra*, e em que relata:

Da iniquidade da guerra surgiram dois novos desenvolvimentos que podem muito bem ser de grande importância no sentido de ajudar a ciência a resolver esses problemas complexos do século XX. A primeira peça de evidência é o desenvolvimento de novos tipos de dispositivos de computação eletrônica. /.../ [Sua] combinação de flexibilidade, capacidade e velocidade faz com que pareça provável que esses dispositivos terão um enorme impacto na ciência. Eles tornarão possível lidar com problemas que antes eram muito complicados e, mais importante, eles justificarão e inspirarão o desenvolvimento de novos métodos de análise aplicáveis a esses novos problemas de complexidade organizada. O segundo dos avanços da guerra é a abordagem "time misto" da análise de operações. /.../ Como ilustração, considere problema global de encaminhamento de tropas e suprimentos através do Atlântico. Leve em conta o número e a eficácia dos navios disponíveis, o tipo de ataques submarinos, e um grande número de outros fatores, inclusive um imponderável como confiabilidade da vigilância quando os homens estão cansados, doentes ou entediados. Considerando-se toda uma massa de fatores, alguns quantificáveis e alguns indefiníveis, qual procedimento levaria ao melhor plano global, isto é, melhor do ponto de vista, da velocidade, segurança, custos, e assim por diante? Deveriam os comboios ser grandes ou pequenos, rápidos ou lentos? Deveriam ir em zig-zague, exporem-se mais a um possível ataque ou apressarem-se em linha reta? Como eles devem ser organizados, quais defesas são melhores, e que

³⁰ Warren Weaver (Reedsburg, Wisconsin, 17 de julho de 1894 – 24 de novembro de 1978), matemático e autor do livro *"The Mathematical Theory of Communication"* (Teoria Matemática da Comunicação) juntamente com Claude Shannon.

organização e instrumentos poderiam ser utilizados para assisti-los e atacá-los? (O'CONNOR e ROBERTSON, 2005, Não paginado)³¹

O modelo matemático sobre o dimensionamento dos comboios, um dos problemas referenciado acima, é apresentado no ANEXO A.

Na primavera de 1942, Warren Weaver criou o *Statistical Research Group* (SRG) fundado na Universidade de Columbia e suportado pela AMP. Esse grupo foi liderado por Harold Hotelling³² e formado por engenheiros, estatísticos e matemáticos. Suas tarefas, inicialmente, tinham uma estreita semelhança com aquelas realizadas nas unidades britânicas de PO, e muitos dos seus problemas foram resolvidos pela calculadora eletrônica, já disponível nessa época. Dos 572 relatórios e memorandos produzidos pela SRG, a ideia que atraiu mais interesse e desenvolvimento no período pós-guerra foi a teoria da análise sequencial de Abraham Wald³³.

A ideia, que deu origem à sua obra, nasceu da resposta à pergunta: por que não parar um inquérito precocemente? Por que insistem em observar e analisar todos os dados contidos em uma amostra de tamanho fixo e pré-determinado? Essa linha de pensamento foi tratada na sua obra clássica, em 1947, "*Sequential Analysis*". Também naquela Universidade, em março de 1943, foi criado o grupo *Applied Mathematics Group at Columbia* (AMG-C) e que se destacou pela importância dos trabalhos realizados.

Em 1942 havia no mínimo dois grupos ativos nos EUA de PO, um chamado de

³¹ *Out of the wickedness of war have come two new developments that may well be of major importance in helping science to solve these complex twentieth-century problems. The first piece of evidence is the wartime development of new types of electronic computing devices. ... [Their] combination of flexibility, capacity, and speed makes it seem likely that such devices will have a tremendous impact on science. They will make it possible to deal with problems which previously were too complicated, and, more importantly, they will justify and inspire the development of new methods of analysis applicable to these new problems of organized complexity. The second of the wartime advances is the "mixed-team" approach of operations analysis. ... As an illustration, consider the over-all problem of convoying troops and supplies across the Atlantic. Take into account the number and effectiveness of the naval vessels available, the character of submarine attacks, and a multitude of other factors, including such an imponderable as the dependability of visual watch when men are tired, sick, or bored. Considering a whole mass of factors, some measurable and some elusive, what procedure would lead to the best over-all plan, that is, best from the combined point of view of speed, safety, cost, and so on? Should the convoys be large or small, fast or slow? Should they zigzag and expose themselves longer to possible attack, or dash in a speedy straight line? How are they to be organized, what defences are best, and what organization and instruments should be used for watch and attack?*

³² Harold Hotelling (Fulda, Minnesota, 29 de setembro de 1895 – 26 de dezembro de 1973) foi um estatístico, matemático e um influente teórico da economia americana.

³³ Abraham Wald (Cluj, Austria-Hungary, 31 de outubro de 1902 – 13 de dezembro de 1950), matemático e pesquisador na Universidade de Columbia. As aplicações dos seus estudos na economia foram aprofundadas por Samuelson, Arrow, Debreu, todos da Comissão *Cowles*.

Antisubmarine Warfare Operations Research Group (ASWORG) e o outro *Radiation Laboratory* do MIT. Um ilustre membro de ambos os grupos foi, desde o início, o matemático John von Neumann. Foi um dos cientistas responsáveis pela forma como a PO assumiu na América, no sentido de torná-la uma preocupação nos centros de pesquisa, como o AMP, do qual foi membro.

John von Neumann e o economista, Oskar Morgenstern³⁴ escreveram um livro, publicado pela *Princeton University* em 1944, com o título “*Theory of Games and Economic Behavior*” (Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico). A ideia central é que sempre existe uma solução racional para um conflito bem definido entre dois indivíduos e cujos interesses sejam completamente opostos. Esse trabalho, de abordagem matemática, trata da lógica das situações de conflito e também apresenta soluções e paradoxos que ajudam a compreender melhor as limitações da racionalidade humana. Neumann e Morgenstern apresentaram seu trabalho, a Teoria dos Jogos, como uma ramificação da PO, para a qual contribuiu com a sua matemática, voltada para as preocupações estratégicas da guerra.

John von Neumann, durante e após a guerra, foi consultor do Laboratório de Pesquisa Balística, no Aberdeen Proving Grounds³⁵, em Maryland. Nessa unidade realizava estudos sobre balística e seu problema nesse projeto era a grande quantidade de cálculos que tinha que ser efetuado. No verão de 1944, Campbell (2004) relata que von Neumann, por acaso, conheceu Herman Goldstine na estação ferroviária local e o ouviu falar sobre o projeto ENIAC no qual trabalhava. Esse projeto havia sido financiado pelo laboratório de Pesquisa Balística, em decorrência da necessidade de encontrar uma maneira mais rápida de calcular as trajetórias balísticas, pois havia muitas variáveis em jogo, como distância, peso, velocidade, direção do vento, além de outras, o que tornava o cálculo complexo e demorado.

Foi a J. Presper e John Mauchly, os idealizadores do projeto ENIAC, que John von Neumann se apresentou. Ele contribuiu com grandes ideias para a construção do *design* desse primeiro computador digital eletrônico e escreveu os princípios básicos para sua arquitetura, a qual ficou conhecida como a Arquitetura de von Neumann, que se tornaria padrão para as futuras gerações de mainframes posteriores. Também atou laços duradouros com o computador como ferramenta e exemplo de racionalização organizacional, e aprovou a programação linear para várias organizações militares e forneceu a ponte para a Teoria da

³⁴ Oskar Morgenstern (Görlitz, Alemanha, 24 de janeiro de 1902 – 26 de julho de 1977) foi um economista que ao lado de von Neumann é considerado um dos fundadores da Teoria dos Jogos.

³⁵ Aberdeen Proving Ground (APG) é uma unidade do Exército dos Estados Unidos localizada perto de Aberdeen, Maryland.

Informação.

“Para von Neumann, PO foi um vasto campo de analogias matemáticas inexploradas; e essas analogias forneceram a ponte conceitual sobre a qual físicos de varias especialidades poderiam entrar na teoria social.” (Mirowski, 1999, p. 692-693)³⁶

Durante o regime da guerra ficou evidenciada a importância da tecnologia para a indústria bélica. O Projeto Manhattan³⁷ e os efeitos devastadores das bombas atômicas fizeram com que o governo americano passasse a valorizar muito mais a pesquisa científica e tecnológica como estratégia política e militar, e também como um termômetro para o desenvolvimento econômico.

2.1.4 A Pesquisa Operacional: após o término da guerra

Após o término da guerra, a PO inglesa e a americana tomaram rumos diferentes e há razões para acreditar que uma das causas tenha sido o Movimento para a Liberdade da Ciência. Esse movimento ocorreu na Inglaterra, em virtude de um grupo de intelectuais que se opunha à interferência militar nas atividades científicas. Dentre esses intelectuais podemos destacar: Michael Polanyi, Friedrich Von Hayek, John Baker e Arthur Tansley.

Os ingleses reduziram os investimentos na área militar e, conseqüentemente, liberaram muitos especialistas que trabalharam com PO durante a guerra, os quais foram absorvidos pelas indústrias que necessitavam de mão-de-obra para a sua reconstrução. Inversamente ao que aconteceu na Inglaterra, nos Estados Unidos aumentou a pesquisa no setor militar e a PO expandiu-se ainda mais quando a guerra terminou. No fim da guerra, o exército, tanto o americano como o inglês, criou divisões permanentes de PO, onde a maior parte do trabalho realizado era classificada de Defesa de Estado, não podendo ser revelada.

Antes de terminar as hostilidades da guerra, alguns militares americanos queriam dar continuidade ao trabalho científico que estava sendo realizado pelos pesquisadores e cientistas no âmbito militar. Um desses militares foi o General Henry Harley Arnold, da Força Aérea, que após a guerra tomou a iniciativa de criar um ambiente para preservar o espírito inovador e

³⁶ *For Von Neumann, OR was a vast Field of unexplored mathematical analogies; and these analogies provided the conceptual bridges upon which various sorts of physics might enter social theory.*

³⁷ O projeto Manhattan foi o codinome de um projeto realizado durante a Segunda Guerra Mundial sob o controle do exército dos EUA. Esse projeto visava desenvolver as primeiras armas nucleares e, contou com o apoio da Grã-Bretanha e Canadá.

intelectual que havia se estabelecido durante aquele regime. Ao reformular o planejamento estratégico do Setor de Pesquisa e Desenvolvimento da Força Aérea, ele resolveu subsidiar um projeto que atendesse às suas expectativas e lhe proporcionasse assistência científica.

Foram investidos dez milhões de dólares dos fundos da Força Aérea Americana para financiar esse projeto nomeado de RAND, abreviatura de *Research and Development*, criado em dezembro de 1945. O General Arnold induziu Donald Douglas, da Douglas Aircraft, a dirigi-lo e, em março de 1946, a RAND passa a ser uma divisão dessa companhia. Em 1948, esse projeto transformou-se na *RAND Corporation*, uma organização sem fins lucrativos e que foi, inicialmente, financiada pela Fundação Ford, transferindo-se então da *Douglas Aircraft* para a sua sede própria em Santa Mônica, Califórnia.

Quem planejou a nova sede para abrigar a *RAND Corporation* foi John Williams, do Grupo de Pesquisa Estatística de Princeton. Planejou-a de tal forma que sua arquitetura aumentaria a probabilidade de os pesquisadores de várias áreas se encontrarem durante suas atividades diárias. Essa troca de experiências entre pessoas de diferentes formações era uma característica essencial para o seu funcionamento, ou seja, ele queria replicar o ambiente de trabalho que havia dado tão certo durante a guerra. Essa forma de organização logo apresentou dados concretos com o trabalho de Ed Paxson, que usou o termo análise de sistemas para descrever o processo que envolve as operações militares.

A Análise de Sistemas foi concebida na *RAND Corporation* como um desenvolvimento da PO. A mudança no tempo e nas definições dos problemas foi determinante para o seu surgimento. No período pós-guerra tinha-se mais tempo para resolver os problemas e as suas definições eram mais detalhadas e objetivas, ao contrario do que ocorria no período da guerra. Essa mudança levou ao seu surgimento:

Esta distinção é congênere ao surgimento da análise de sistemas, como distinta da pesquisa operacional.³⁸ A análise de sistemas foi concebida na RAND Coporation (Pickering, 1995a: 39) e era vista lá como um desenvolvimento da pesquisa operacional. Fortun e Schweber (1993) situam a passagem da pesquisa operacional para a análise de sistemas em torno das seguintes mudanças: da tática militar para estratégia militar, de decisões localizadas para planejamento. Segundo os autores (p.602), o propósito central da pesquisa operacional durante a Segunda Guerra era aprimorar o uso das forças e armas militares disponíveis naquele momento. Já o foco da análise de sistemas era orientado para o “planejamento de respostas a necessidades militares e de segurança” baseado em sistemas de armamento projetados e nos respectivos ambientes em que estes sistemas viriam a operar. (BARROS, 2004, p. 22)

³⁸ Aqui, como em outros lugares na literatura, agrupo ambas sob o mesmo rótulo, mas é interessante notar as diferenças entre elas neste contexto.

Outro destaque é o trabalho do lógico matemático Albert Wohlstetter³⁹ que foi considerado um dos mais importantes analistas da RAND e tornou-se um dos principais estrategistas de segurança nuclear do mundo.

Para Mirowski e Sent (2002) tudo mudou drasticamente com o advento da Segunda Guerra Mundial. Não só foram renovadas as estruturas de financiamento e organização das ciências físicas, como também as concepções econômicas foram irreversivelmente transformadas. Essa renovação da definição da ortodoxia econômica americana iniciou-se a partir do momento em que físicos e matemáticos inovaram um conjunto de técnicas e ferramentas para modelagem de problemas de comando, controle, comunicação e transmissão de informação sob a rubrica de PO. Vários economistas neoclássicos foram influenciados por estas técnicas e ferramentas, as quais foram cruciais na definição da forma da teoria econômica do pós-guerra.

Mirowski (1999) mapeia as influências que as vertentes econômicas receberam tanto da RAND quanto do *Statistical Research Group* (SRG), vinculado ao AMP como visto anteriormente. O núcleo da Escola de Chicago⁴⁰ era formado por W.Allen Wallis⁴¹, Julian Bigelow, Leonardo Savage, Milton Friedman e George Stigler. Tirando Bigelow e incluindo Gary Becker, todos faziam parte do SRG. Muitas características dessa escola, por exemplo seu estilo interdisciplinar, são influências da PO. Como o próprio Friedman reconhece, uma de suas teorias sobre decomposição de renda foi feita com base em uma analogia do seu trabalho, efetuado no SRG, sobre o detonador de proximidade.

Essa analogia também foi observada pelos consultores de empresas que participaram dos grupos de PO durante a guerra, pois eles notaram a semelhança dos problemas militares com os vivenciados nas empresas. Como concluiu Mirowski (1999), o operador de mercado que se esforça para prever os padrões em séries temporais dos preços dos ativos gerados pelos comerciantes rivais, acabou sendo considerado, não tão diferente do artilheiro tentando enganar o piloto de bombardeiro em suas operações de guerra.

A *RAND Corporation* foi a incubadora de muitas outras produções científicas, como

³⁹ Albert Wohlstetter (New York, 19 de dezembro de 1913 – 10 de janeiro de 1997) foi um matemático teórico brilhante e um estrategista nuclear inigualável. Professor na Universidade de Chicago, durante a Guerra Fria exerceu poderosa influência na política externa dos Estados Unidos.

⁴⁰ Escola de pensamento econômico que defende o livre mercado e que foi disseminado por alguns de seus professores. Os líderes dessa escola são Milton Friedman e George Stigler, ambos laureados com o Prêmio Nobel da Economia em 1976 e 1982, respectivamente.

⁴¹ Wilson Allen Wallis (Filadélfia, 5 de novembro de 1912 – Rochester, Nova Iorque, 12 de outubro de 1998), economista, estatístico e diretor de pesquisa do *Statistical Research Group* (SRG) durante o período de 1942-1946.

Inteligência Artificial, Cibernética, Método Delphi, Programação Linear, Programação Dinâmica, Teoria dos Jogos, etc. Na década de 50 ela possuía a maior instalação de computadores para fins científicos do mundo.

A partir da Segunda Guerra Mundial, a ciência entra no limiar de uma nova era, onde a maioria das soluções para os problemas apresentados passa a ter a ajuda dos computadores. Surgiu uma grande racionalidade dentro das organizações, em grande parte devida aos métodos que começaram a ser empregados no processo decisório das empresas. A explosão industrial aumentou a complexidade dessas organizações, tornando-se mais difícil alocar os recursos disponíveis de modo eficaz. Essa nova linhagem de problemas fez com que os cientistas e os matemáticos desenvolvessem novos modelos para atender às necessidades administrativas, os quais passam a referir-se à decisão ótima e a sistemas probabilísticos e determinísticos. A PO volta-se para essa nova classe de problemas, fornecendo conclusões precisas aos tomadores de decisões e tornando-se um dos principais suportes para a gestão nas organizações.

As decisões sempre estiveram presentes na evolução do homem e sempre tiveram reflexos na sociedade da qual ele faz parte, porém, é a partir de 1945 que começaram a surgir vários estudos nessa área. A aplicação da PO nas tomadas de decisões tornou-se viável em decorrência do avanço da tecnologia dos computadores, pois a grande maioria dos modelos matemáticos desenvolvidos seria de pouca utilidade se os cálculos tivessem que ser realizados manualmente, tornando impossível sua aplicação.

Herbert A. Simon⁴² foi um dos consultores da RAND, e um dos pensadores sobre o processo decisório nas organizações. Seu estudo foi um marco no campo das Ciências Sociais, cujo foco jaz no estudo do comportamento humano, na tomada de decisões e na resolução de problemas nas organizações. Ele atuou em várias áreas como psicologia, inteligência artificial, ciência da computação e economia. Recebeu o Premio Nobel de Economia em 1978 por suas pesquisas pioneiras no processo de tomada de decisões dentro de organizações econômicas. Com relação à PO, Simon (1965) afirma que o administrador, além de tomar suas decisões da melhor maneira possível, deverá providenciar para que todos na sua organização também as tomem de maneira efetiva. Segundo o autor, nos últimos 40 anos, as técnicas de tomada de decisão têm avançado consideravelmente em função do desenvolvimento de um amplo número de ferramentas – em particular, as ferramentas de

⁴² Herbert Alexander Simon (Milwaukee, Wisconsin, 15 de junho de 1916 – 09 de fevereiro de 2001), atuou em várias áreas de conhecimento como psicologia cognitiva, inteligência artificial, ciências da computação, administração, economia e ciência política. Recebeu o Prêmio Nobel de Economia, em 1978, por suas pesquisas pioneiras no processo de tomada de decisões dentro das organizações econômicas.

pesquisa operacional, ciência de gerenciamento e tecnologias de sistemas especialistas.

É difícil identificar qual foi o primeiro trabalho que envolveu a análise do comportamento humano, mas o fio da meada foi o de Skinner⁴³ com a publicação do seu livro em 1941, “Ciência e Comportamento Humano”. Existe muita literatura sobre esse tema envolvendo variáveis como poupar ou gastar, ganhar ou perder, dentre outras.

Outra ciência que teve sua origem nas experiências de guerra foi a Cibernética. Wiener e Julian Bigelow⁴⁴ desenvolveram o Previsor Antiaéreo, cuja função consistia em receber dados de localização (*input*), como exemplo, um radar rastreando um avião e retornando às possíveis rotas do avião (*output*). Esses dados poderiam ser utilizados para muitas finalidades, uma delas, posicionar a artilharia na posição futura de um avião inimigo. A análise estatística era usada para encontrar padrões nesses dados, onde matemática e informação eram o cerne dessa operação. Wiener, não encontrando nenhuma palavra que designasse suas ideias, resolveu criá-la. Utilizou-se da palavra Cibernética, que derivou da palavra grega Kubernêês, que significa piloto ou dirigente. A cibernética parte da hipótese de que o modo como os sistemas, sejam eles biológicos, tecnológicos ou sociais, respondem às mensagens ao mundo exterior são equivalentes e redutíveis a modelos matemáticos. A amplitude desse conceito favoreceu o surgimento de outras ciências cibernéticas por natureza, como a Ciência Cognitiva, a Inteligência Artificial, a Robótica e a Informática.

Todos os estudos gerados nesse período foram produzidos sobre o mesmo molde, com tentáculos tecnológicos e processos constituídos de uma racionalidade algorítmica, onde suas soluções podem ser planejadas ou mecanizadas. Os algoritmos constituem a base de todos esses estudos, e para Berlinski, no seu livro “O Advento do Algoritmo”, ele é tido como a ideia que governa o mundo:

Nas palavras do lógico: um algoritmo é um método finito, escrito em um vocabulário simbólico fixo, regido por instruções precisas, que se movem em passos discretos, 1, 2, 3,..., cuja execução não requer insight, esperteza, intuição, inteligência ou clareza e lucidez, e que mais cedo ou mais tarde chega a um fim. (BERLINSKI, 2002, p. 21)

Todas essas produções, de certa forma subordinadas à racionalização das atividades

⁴³ Burrhus Frederick Skinner (Susquehanna, Pensilvânia, 20 de março de 1904 – 20 de agosto de 1990) foi um eminente psicólogo contemporâneo. Lecionou nas Universidades de Harvard, Indiana e Minnesota e, conduziu trabalhos pioneiros em psicologia experimental.

⁴⁴ Julian Bigelow (Nutley, New Jersey, 1913 – 21 de fevereiro de 2003), engenheiro eletricitista e matemático. Trabalhou na área de computação e durante a Segunda Guerra Mundial foi assistente de Wiener, ajudando-o a automatizar as armas antiaéreas.

militares, tiveram o computador como fator determinante do seu rápido desenvolvimento. Para a PO, outro fator determinante foi o aperfeiçoamento de técnicas por parte dos cientistas que haviam trabalhado durante a Guerra com PO e estavam motivados a dar continuidade ao seu trabalho. Um desses exemplos é o método simplex para resolver problemas de programação linear, desenvolvido por George Dantzig⁴⁵. A esfera de competências da PO é expandida para incluir novas técnicas matemáticas, como a teoria dos jogos e a simulação de Monte Carlo⁴⁶, etc.

Como já vimos, a PO é um corpo interdisciplinar originado nas aplicações militares durante a Segunda Guerra Mundial. Porém sua aplicação em outras atividades tem acelerado o seu desenvolvimento. A Inglaterra tem utilizado a PO na área do planejamento social e econômico do governo, a qual pode fornecer previsões úteis e quantitativas à adoção de medidas governamentais. No setor privado, as organizações enfrentam um mercado competitivo e sua agilidade, para responder a essas demandas e oportunidades, está cada vez mais dependente dos sistemas de informações. É necessário que os processos de negócios estejam em harmonia com as metas e estratégias da empresa, assim é possível disponibilizar informações e soluções de qualidade em tempo hábil. A PO é uma alternativa, podendo fornecer aos executivos elementos quantitativos para a tomada de decisão e em tempo hábil, com a ajuda dos computadores.

Era inevitável que a PO achasse o caminho das universidades. O MIT, em colaboração com a Marinha, organizou em 1948 um curso sobre as aplicações da PO e, em 1949, outro que foi realizado no *University College* de Londres, composto de dez conferências. No ano seguinte, na Universidade de Birmingham, aconteceu um curso de verão sobre Estudos do Trabalho e Pesquisa Operacional. O Instituto Tecnológico Case, em 1951, realizou uma conferência sobre as aplicações de PO a problemas do comércio e da indústria e, desde então, foi a primeira instituição de ensino superior a oferecer um curso de PO e a conferir o título de Bacharel em Ciências. A partir dessa data a PO passou a ser ministrada em várias Universidades Americanas como um curso de licenciatura, sanando os problemas referentes a

⁴⁵ George Bernard Dantzig (Portland, Oregon, 08 de novembro de 1914 – Califórnia, 13 de maio de 2005) foi um matemático que fez importantes contribuições no campo da Pesquisa Operacional, Ciência da Computação, Economia e Estatística.

⁴⁶ O Método de Monte Carlo (MMC) é um método estatístico utilizado em simulações que permite a determinação da função de distribuição de probabilidade de resultados de um modelo baseada na distribuição de seus parâmetros. Isto envolve avaliar o mesmo modelo centenas ou milhares de vezes. De acordo com (HAMMERSELEY, 1964) o nome "Monte Carlo" surgiu durante o projeto Manhattan na Segunda Guerra Mundial. No projeto de construção da bomba atômica, Ulam, von Neumann e Fermi consideraram a possibilidade de utilizar o método, que envolvia a simulação direta de problemas de natureza probabilística relacionados com o coeficiente de difusão do neutron em certos materiais.

recursos humanos para atuar no mercado de trabalho com PO. Blackett se opunha à criação de uma disciplina acadêmica de PO, por motivos desconhecidos.

No que tange à literatura e à propagação desse conhecimento, ingleses e americanos que tiveram contato com a PO, durante ou após a guerra, criaram sociedades de PO para a troca de informações e experiências. Em 1948, na Inglaterra, alguns praticantes fundaram o Clube de Pesquisa Operacional, que vem, desde então, promovendo cerca de seis encontros por ano. Foi esse Clube que organizou o curso do *University College*, já citado, e lançou a revista *The Operational Research Quarterly*, que continha resumos de artigos relevantes para a comunidade de PO.

Nos Estados Unidos, o Conselho Nacional de Pesquisas fundou em 1949 um Comitê de Pesquisa Operacional sob a coordenação do Dr. Horace. Esse comitê montou uma lista contendo o nome de, aproximadamente, 700 pessoas interessadas em PO, cujo objetivo era disseminar informações a seu respeito. Publicou, em 1951, “*Operations Research with Special Reference to Non-Military Applications*”, que descrevia os problemas dessa área e os requisitos para os seus profissionais.

Formou-se em 1952, na cidade de Cambridge, localizada no estado americano de Massachusetts, um núcleo de uma sociedade representada por pessoas interessadas nessa área. Na segunda reunião desse grupo, para a qual foram convidados outros pesquisadores, foi criada a primeira organização profissional de PO. Essa reunião foi realizada na Universidade de Colúmbia com a aprovação de estatutos e indicação de seus diretores, constituindo a *Operational Research Society of America*, tendo Dr. Philip M. Morse como presidente.

O objetivo dessa sociedade era estabelecer e manter os padrões de competência, melhorar métodos e técnicas e estimular os estudantes interessados nessa área. A partir de 1952, foram criadas em vários países novas sociedades com o objetivo de desenvolver a PO como uma ciência unificada e promover seu avanço por todas as nações. Da cooperação profissional entre os membros dessas sociedades foi criada a *International Federation of Operational Research Societies* (IFORS). Ela é formada pelas Sociedades de Pesquisa Operacional, atualmente composta de quarenta e oito países. A primeira Federação Internacional das Sociedades de Pesquisa Operacional (IFORS), organizada em Oxford em 1957, foi considerada um momento decisivo na história da PO e passou a existir oficialmente em janeiro de 1959. Podemos visualizar algumas dessas sociedades apresentadas na tabela 01⁴⁷, a seguir.

⁴⁷ Fonte: Handbook of Operation Research: foundation and fundamentals. A tabela original, em língua inglesa, encontra-se no ANEXO B dessa dissertação.

Tabela 01 - As Sociedades de Pesquisa Operacional no Mundo (As sociedades listadas são aquelas que estavam filiadas ao IFORS em 1974)			
Países	Sociedades	Data Criação	Filiação IFORS
Argentina	Sociedad Argentina de Investigación Operativa	1960	1962
Austrália	Australian Operational Research Society (1)	1959	1960
Bélgica	Société Belge pour L'Application des Méthodes Scientifiques de Gestion (2)	1958	1960
Brazil	Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional	1969	1969
Canadá	Canadian Operational Research Society	1958	1960
Dinamarca	Dansk Selskap for Operationanalyse	1962	1963
Finlândia	Soumen Operaatiotutkimussentra Ou	1973	1975
França	Association Française pour la Cybernétique Économique et Technique (3)	1956	1959
Alemanha	Deutsche Gesellschaft für Operations Research	1961	1962
Grécia	Hellenic Operational Research Society	1963	1966
Índia	Operational Research Society of India	1957	1960
Irlanda	Operational Research Society of Ireland	1965	1966
Israel	Operational Research Society of Israel	1966	1969
Itália	Associazione Italiana di Ricerca Operativa	1961	1962
Japão	Operations Research Society of Japan	1957	1961
Coréia do Sul	Operations Research Society of Korea	1970	1972
México	Asociación Mexicana de Investigación de Operaciones y Administración Científica	1964	1966
Holanda	Sectie Operationele Research	1958	1960
Nova Zelândia	Operational Research Society of New Zealand	1964	1970
Noruega	Norsk Operasjonsanalyseforening	1959	1960
Espanha	Sociedad Española de Investigación Operativa	1962	1963
África do Sul	Operations research Society of South Africa	1969	1973
Suécia	Svenska Operationsanalyseforeningen	1959	1960
Suíça	Schweizerische Vereinigung für Operations Research	1961	1963
Reino Unido	Operational Research Society (4)	1948	1959
Estados Unidos	Operational Research Society of America	1952	1959
União Soviética	Technical Committee on Operations research (5)	1970	1972

(1)De 1959 até 1972: O Conselho Australiano para Pesquisa Operacional
(2)De 1958 até 1962: parte da Sociedade Estatística Belga
(3)De 1956 até 1964: Sociedade Francesa de Pesquisa Operacional
(4)De 1948 até 1953: Clube de Pesquisa Operacional
(5)Parte do Centro de Informática da Academia de Ciências.

Notes: A Checoslováquia aderiu a federação através da Comissão Econômica-Matemática da Academia de Ciências da Checoslováquia. O Instituto de Ciências da Administração e da Sociedade da Programação Matemática aderiram à federação como "sociedades afins". O Grupo de Companhias Aéreas da IFORS, um grupo de interesse especial dedicado à pesquisa operacional sobre os problemas das companhias aéreas do mundo, também aderiu a federação.
Para nomes e endereços, atuais, dessas sociedades oficiais ver a edição recente do jornal da federação, International Abstracts in Operations Research.

Fonte: Handbook of Operation Research: foundation and fundamentals

Como podemos observar na tabela acima, no Brasil foi criada a Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional (SOBRAPO):

Fundada em 1969, após a realização, em 1968, do primeiro Simpósio de Pesquisa Operacional, realizado no ITA, em São José dos Campos, SP, por Oswaldo Fadigas Fontes Torres, Alberto Ricardo Von Ellenrieder, Roberto Gomes da Costa, Ruy Vianna Braga, Alfredo Otto Brockmeyer, Mario Rosenthal, Ricardo Augusto França Leme, Sergio Ellery Giro Barroso, Ramiro de A. Almeida Sobrinho, Joanilio Rodolpho Teixeira, Sigfrido Carlos Mazza, Nelson Ortigosa da Cunha, Antonio Salles Campos Filho, Celso Pascoli Bottura, Luiz José Fabiani, Itiro Iida, Claus Warzharier, Sergio Grinberg, Pedro Rodrigues Bueno Neto, Sergio Viana Domingues e Israel Grystz. Desde então, tem reunido a grande maioria dos

profissionais da PO no Brasil, tanto nas universidades como nas empresas e em órgãos públicos diversos, sejam eles federais, estaduais ou municipais. Filiada a IFORS (*International Federation of Operational Research Societies*) e a ALIO (*Associação Latino-Ibero-Americana de Investigação Operativa*), a SOBRAPO, por meio delas e das publicações internacionais da especialidade, mantém contato com o mundo em geral, ajudando a divulgar em congressos e revistas a produção científica dos pesquisadores brasileiros. No Brasil, a SOBRAPO foi aceita em 2007 como membro da SBPC. A SOBRAPO mantém sua própria revista, que entra em seu 38º ano de publicação sob o título Pesquisa Operacional, e que é indexada nos *International Abstracts in Operations Research* da IFORS e desde 2002 ao SciELO.⁴⁸

As contribuições das sociedades de PO passam a ser efetivadas através de publicações de artigos em revistas, periódicos e jornais com o objetivo de documentar e promover os avanços técnicos-científicos e compartilhar experiências no campo da PO. “*The Operational Research Quarterly*” foi o primeiro periódico sobre o assunto, publicado pela *Operational Research Society (UK)*⁴⁹, antes nomeada de *Operational Research Club*. O segundo foi o *Journal of the Operations Research Society of America*, publicado em novembro de 1952 pela Sociedade Norte Americana, *Operational Research Society of America*, de PO. Essa data coincidiu com a primeira reunião regular desse grupo, cujo número de membros previstos pelos seus fundadores foi o dobro das expectativas.

O sucesso dessa publicação deu origem a uma série de outras, editadas pelas sociedades de PO, que merecem destaque pela importância que representam para a divulgação dos estudos realizados na época. Para se ter uma noção da variedade de títulos que surgiram a partir de então, até 1974, pode-se visualizar as tabelas 02 e 03⁵⁰, apresentadas a seguir:

⁴⁸ SOBRAPO. **Sobre a SOBRAPO**, [198?]. Disponível em: < http://www.sobrapo.org.br/a_sobrapo.php>. Acesso em: 27 nov. 2011.

⁴⁹ United Kingdom (UK)

⁵⁰ Fonte: Handbook of Operation Research: foundation and fundamentals. As tabelas originais, em língua inglesa, encontram-se no ANEXO C dessa dissertação.

Tabela 02 - Os Jornais de Pesquisa Operacional no Mundo		
Jornal	Publicado por:	Data fundação
Operational Research Quarterly	Operational Research Society (UK)	1950
Operations Research	Operations Research Society of America	1952
Naval Research Logistics Quarterly	U.S. Office Naval Research	1954
Management Science	The Institute of Management Sciences	1954
Revue Française d'Automatique, Informatique, Recherche Opérationnelle (1)	Association Française pour la Cybernetique Économique et Technique	1956
Zeitschrift für Operations Research (2)	Deutschen Gesellschaft für Operations Research	1956
Journal of the Operations Research Society of Japan	Operations Research Society of Japan	1957
Cahiers du Centre d'Études de Recherche Opérationnelle	Centre d'Études de Recherche Opérationnelle, Brussels	1959
Revue Belge de Statistique d'Informatique et de Recherche Opérationnelle	Société Belge pour l'Application des Méthodes Scientifiques de Gestion and Société Belge de statistique	1961
Metra	Metra Group, Paris	1962
INFOR (3)	Canadian Operational Research Society and the Canadian Information processing Society	1963
Opsearch	Operational Research society of India	1964
Interfaces	The Institute of Management Sciences and the Operations Research Society of America	1971
Ricerca Operativa	Franco Angeli, editore, Milan, Italy	1973
New Zealand Operational Research	Operational Research Society of New Zealand	1973

(1) Durante os primeiros dez anos, este jornal era chamado de Revue Française de Recherche Opérationnelle, e era publicado pela Société Française de Recherche Opérationnelle, uma organização que precedeu a listada acima.

(2) Este jornal começou em 1972 como sucessor do Unternehmensforschung, o qual foi fundado em 1956. Outro jornal, Ablauf und Planungsforschung, começou a ser publicado em 1960 mas cessou por volta de 1972.

(3) Antes de 1971 este jornal era o Journal of the Canadian Operational Research Society.

Note: Esta tabela contém a lista de jornais cujo foco de atenção é a Pesquisa Operacional.

Tabela 03 - Alguns Jornais de Interesse Significativo para Trabalhadores de Pesquisa Operacional		
Jornal	Publicado por:	Data fundação
The Engineering Economist	Engineering Economy Division, American Society for Engineering Education	1955
International Journal of Production Research	Taylor and Francis LTD, London	1961
Trabajos estadística y de Investigacion Operativa (1)	Instituto de Investigacion Operativa y Estadística, Consejo Superior de Investigaciones Estadísticas, Madrid	1963
Journal of Applied Probability	Applied Probability Trust and the London Mathematical Society	1964
Transportation Science	Transportation Science Section, Operations Research Society of America	1967
Transportation Research	Pergamon Press, New York	1967
Socio-Economic Planning Sciences	Pergamon Press, New York	1967
Technological Forecasting and Social Change	American Elsevier, New York	1969
Industrial Engineering (2)	American institute of Industrial Engineers	1969
AIIE Transactions (2)	American institute of Industrial Engineers	1969
Policy Sciences	American Elsevier, New York	1970
Decision Sciences	American Institute for Decision Sciences	1970
The Bell Journal of Economics and Management Science	American telephone and Telegraph Co.	1970
Discrete Mathematics	North-Holland, Amsterdam	1971
Mathematical Programming	Mathematical Programming Society	1971
Networks	Interscience, New York	1971
IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics (3)	IEEE Systems, Man, and Cybernetics Society	1971
Stochastic Processes and their Applications	North-Holland, Amsterdam	1973
Omega	Pergamon Press, New York	1973
Computers and Operations Research	Pergamon Press, New York	1974
Policy Analysis	University of California Press, Berkeley, California	1975
Mathematics of Operations Research	The Institute of Management Sciences and the Operations Research Society of America	1976

(1) De 1950 até 1963 este jornal era chamado de Tabajos de Estadística.

(2) O antecessor do Journal of Industrial Engineering foi publicado entre 1949 e 1968.

(3) O antecessor do IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics foi publicado entre 1965 e 1970.

Notas: Esta tabela contém uma seleção arbitrária de jornais publicados em linguagem ocidental.

O chefe de Operações Navais fez uma conferência sobre PO, em maio de 1952, por motivo do décimo aniversário do grupo de Avaliação Operacional, onde “a diversidade de experiências e de organizações representadas pelos oradores e a ampla área abrangida pelos seus escritos fizeram dessa conferência um episódio importante na história da PO” (TREFETHEN, 1966, p. 57).

Um levantamento de diversos textos de PO ilustra a mudança no conteúdo desse campo, escrito ao longo de duas décadas. Morse e Kimball publicaram “*Methods of Operations Research*”, que foi a primeira publicação logo após o fim da guerra. O objetivo do livro era descrever a importância e a eficiência do uso da PO na Indústria, apesar de os exemplos serem extraídos das experiências de guerra. Uma década mais tarde, os autores vêm sob a perspectiva metodológica e técnica. Hillier and Lieberman, 1967, em seu livro “*Introduction to Operations Research*”, colocam mais ênfase nos modelos e nas técnicas, que são exemplificados com problemas não militares, tendo um considerável conteúdo matemático.

2.2 Experiências em Pesquisa Operacional na Atualidade

Nos dias de hoje, numerosas aplicações de PO têm sido documentadas em todas as áreas. Apesar da diversidade na sua área de aplicação, existe outra, que diz respeito ao seu conjunto de técnicas. Elas continuam evoluindo com tal rapidez, tornando-se difícil enumerá-las ou situá-las relativamente às suas atividades. Diante de tal dificuldade, reunir testemunhos de pesquisadores ou professores, que atuam nessa linha de pesquisa, certamente é um critério racional para se ter uma visão do que está sendo realizado e para entender a natureza dos modelos matemáticos que estão sendo projetados.

Em entrevista com o Prof. Dr. Bráulio Coelho Ávila, doutor em Engenharia Elétrica que atua na área de Ciência da Computação com ênfase em Inteligência Artificial, junto à Pontifícia Universidade Católica do Paraná, realizada por e-mail conforme consta no ANEXO D desta dissertação, no dia 23 de junho de 2010, a pesquisadora fez alguns questionamentos que podem ser verificados na reprodução do diálogo exposto a seguir:

Pesquisadora:- A Inteligência Artificial (AI) e a Pesquisa Operacional (PO) possuem pontos em comum. Ambas compartilham das mesmas técnicas, como a simulação e a modelagem matemática. A PO utiliza-se dessas técnicas para encontrar soluções ótimas para a tomada de decisões e a AI para estudar e simular o comportamento humano. Você, como

pesquisador em AI, poderia descrever a importância dos Modelos Matemáticos nas suas pesquisas, e se possível citar algum?

Prof. Ávila:- Com relação à sua afirmação, eu gostaria de colocar que a PO, hoje em dia, também não utiliza somente modelos matemáticos. Ela, por exemplo, faz uso de redes neurais e algoritmos genéticos. Assim, também não há garantia de solução ótima. Com relação à sua pergunta, eu posso afirmar que os modelos matemáticos são de grande valia para a área de IA. Atualmente, em minhas pesquisas com alunos de mestrado e doutorado, estou utilizando a Análise Formal de Conceitos. Análise Formal de Conceitos, do inglês, *Formal Concept Analysis*, é um ramo da matemática baseada na teoria dos conjuntos ordenados, particularmente na teoria dos reticulados, que utiliza matemática aplicada no estudo de conceitos e hierarquias conceituais (Bernhard Ganter and Rudolf Wille, *Formal Concept Analysis - Mathematical Foundations*. Springer-Verlag, 1996).

Formal Concept Analysis (henceforth FCA) was developed by Ganter and Wille in Darmstadt (Ganter & Wille, 1996). It is an attempt to give a formal definition of the notion of a 'concept', within the boundaries of a model-theoretic framework. Usually, research on concepts starts with an intuitive notion of existing, everyday concepts, and then tries to find characterisations of the objects belonging to that concept, for instance in terms of necessary and sufficient conditions. FCA takes a different stance, and tries to give a formal notion of the nature of concepts, independent of any particular concepts. Veja o link⁵¹ abaixo para mais informações sobre o uso de FCA. A FCA seria um bom tema de estudos para o pessoal da matemática, pois é algo muito novo (1996) e tem muita aplicação no mundo real.

Acredito que, outra forma de tomarmos conhecimento das aplicabilidades da PO na atualidade, é perscrutar na academia os projetos de pesquisa referentes a essa área. Tomamos como referencial quatro Universidades: a Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), a Universidade de São Paulo (USP), o Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) e a Universidade Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP-Guaratinguetá).

Quero deixar claro que as áreas de abrangência da PO não se esgotam nas que serão apresentadas, pois de acordo com Trefethen “[...] mesmo o pesquisador operacional mais experimentado hesitaria em assinalar todas as áreas de problemas suscetíveis ou não de tratamento pela pesquisa operacional ou em situá-la relativamente a outras disciplinas, técnicas e atividades” (TREFETHEN, 1966, p. 57).

⁵¹Disponível em <<http://www.upriss.org.uk/fca/fca.html>>. Acessado em 10 jan. 2011.

O Professor Marcos Nereu Arenales⁵² atualmente, professor titular do departamento de Matemática Aplicada e Estatística no Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação na Universidade de São Paulo (USP – São Carlos), desenvolve projetos de pesquisa nas áreas de Engenharia de Produção e Matemática Aplicada, com ênfase em Otimização e Pesquisa Operacional. Atua principalmente nos seguintes temas: otimização linear e inteira, problemas de corte e empacotamento, geração de colunas, dimensionamento de lotes, problemas integrados de otimização de grande porte e modelagem matemática. Seguem os dados referentes a essa linha de pesquisa.

Linha de Pesquisa: Otimização e Pesquisa Operacional

Objetivos:

1. Desenvolvimentos algorítmicos da otimização linear e inteira.
2. Modelagem e desenvolvimento de métodos para problemas de corte e empacotamento.
3. Modelagem e desenvolvimento de métodos para problemas de dimensionamento de lotes.

Projeto:

2006 – 2009 Teoria e Prática dos Problemas de Corte e Empacotamento

Descrição: Problemas de corte surgem em indústrias, onde itens são produzidos a partir do corte de peças em estoque, como, por exemplo, em indústrias de móveis, de papel, metalúrgicas, vidro etc. Vários objetivos devem ser levados em conta, como, por exemplo, a minimização do desperdício; como também diversas restrições decorrentes do processo de corte (corta-se placas de madeira com corte tipo guilhotinado em indústrias de móveis, bobinas de aço em indústrias metalúrgicas, as quais são restritas a processos de laminação etc.). Demandas, estáticas ou dinâmicas, dos itens devem ser atendidas, as quais podem ser conhecidas em carteira; determinadas a partir de decisões de produção de outros itens (por exemplo, a produção de um móvel pode gerar a demanda por diversos itens); estocásticas (como, produção para estoque com previsão de vendas). Nesta pesquisa identificamos novos problemas práticos, para os quais propomos modelos matemáticos e métodos de solução.

⁵² Graduação em Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP-1976), mestrado em Matemática Aplicada na área de Otimização e Pesquisa Operacional pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP -1979) e doutorado em Engenharia Elétrica, área de Automação e Sistemas pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP-1984) e Livre-Docência pela Universidade de São Paulo. Esses dados e os referentes à linha de pesquisa estão disponíveis em: <http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.jsp?id=K4780011Z9>. Acesso em: 15.12.2010

Outra Universidade, a Estadual de Campinas (UNICAMP) também abriga vários pesquisadores que atuam nesta linha de pesquisa. O professor Aurélio Ribeiro Leite⁵³ é um desses pesquisadores cujas atividades envolvem principalmente os seguintes temas: métodos de pontos interiores, programação linear, sistemas de potência, resolução de sistemas lineares de grande porte, condicionadores, programação quadrática e fluxo em redes.

Nome do Grupo: Pesquisa Operacional

Área predominante: Engenharias, Engenharia de Produção

Orgão: Instituto de Matemática e Estatística e Ciência da Computação

Unidade: Departamento de Matemática Aplicada

Repercussões dos trabalhos do Grupo: O grupo tem atuado na Graduação, Pós-Graduação e Pesquisa e tem trabalhado com Problemas de Complementaridade Não-Linear, com Problemas de Corte e Empacotamento e com Métodos de Pontos Interiores para Problemas de Programação Linear, tanto no aspecto teórico de desenvolvimento de novos métodos de solução quanto de suas aplicações em problemas práticos. Os resultados destas pesquisas têm sido divulgados em congressos e revistas, tanto nacionais quanto internacionais, e têm contribuído na formação de recursos humanos através de teses de Doutorado, dissertações de Mestrado e trabalhos de Iniciação Científica.

Mischel Carmen Neyra Belderrain⁵⁴, outro exemplo, professor Associado II do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) e consultor ad-hoc da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo. Tem experiência na área de Engenharia de Produção, com ênfase em Pesquisa Operacional, atuando principalmente nos seguintes temas: análise de decisão, métodos de apoio à decisão multicritério, pesquisa operacional aplicada a área de saúde e metodologias de ensino de Pesquisa Operacional.

Nome do Grupo: Métodos Quantitativos: Aplicações de Estatística e Pesquisa Operacional

Área predominante: Engenharias, Engenharia de Produção

Orgão: Divisão de Engenharia Mecânica Aeronáutica

Unidade: Departamento de Organização

⁵³ Bacharelado em Física e em Ciências da Computação pela UNICAMP, 1986. Mestrado em Engenharia Elétrica pela UNICAMP, em 1989. Mestrado e doutorado em Computational and Applied Mathematics – Rice University (1994 e 1997).

Esses dados e os referentes à linha de pesquisa estão disponíveis em:

<<http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.jsp?id=K4721209Z6>>. Acessado em 15 dezembro de 2010.

⁵⁴ Possui graduação em Investigación Operativa - Universidad Nacional Mayor de San Marcos (1978), mestrado em Engenharia de Sistemas e Computação pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (1984) e doutorado em Engenharia Aeronáutica e Mecânica pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (1998).

Esses dados e os referentes à linha de pesquisa estão disponíveis em:

<<http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.jsp?id=K4787839Z0>>. Acessado em 15 dezembro de 2010.

Repercussões dos trabalhos do Grupo: A partir de 2007 As pesquisas estão orientadas dentro do Grupo de Estudos de Análise de Decisão - GEAD, cuja finalidade é a de prover uma linha de pesquisa permanente do estado da arte em análise de decisão para capacitar profissionais em processos de tomada de decisão em cenários complexos. O Grupo de Estudos de Análise de Decisão - GEAD é formado por professores, alunos e colaboradores do ITA que atuam na pesquisa e aplicação de teorias e ferramentas da Análise de Decisão, especialmente as relacionadas ao Apoio Multicritério à Decisão. Os temas de pesquisa em desenvolvimento estão relacionados a Estruturação de Problemas em Análise de Decisão, Decisão em Grupo e Multimetodologia. Período 2004-2006 No contexto de aplicações de Estatística e Pesquisa Operacional foram desenvolvidas várias pesquisas com ênfase na área de Saúde. Isso foi possibilitado pelo Projeto Integrado entre o ITA (leia-se Curso de Pós Graduação Engenharia Aeronautica Mecanica - Area de Produção) e a Secretaria de Saúde da Prefeitura de São José dos Campos (SJC) - SP. As pesquisas desenvolvidas foram: (a) Métodos Quantitativos aplicados ao estudo de Deterioração Cognitiva do Idoso de SJC. (b) Políticas de Controle do Sistema de Admissão Hospitalar utilizando Processos Semi-Markovianos de Decisão. (c) Modelos estatísticos para análise do Perfil Multidimensional do Idoso de SJC. Período 2003 - 2004 No contexto de Aplicações em Previsão de Séries Temporais e Classificação de Populações vem sendo desenvolvidas trabalhos e teses de Mestrado utilizando Modelos de Especialistas Globais e de Composição de Especialistas Locais.

Outra área no ITA que se utiliza das técnicas de PO é a área de Transporte Aéreo e Aeroportos, coordenada pelo Prof. Anderson Ribeiro Correia⁵⁵, coordenador do curso de Engenharia de Infraestrutura Aeronáutica do ITA. Uma das Linhas de Pesquisa dessa área compreende:

Linhas de Pesquisa: Análise Operacional de Aeroportos

Simulação da Operação Aeroportuária: lado ar (espaço aéreo, pistas e pátios) e lado terra (componentes dos terminais de passageiros e de cargas). Aplicação de técnicas de pesquisa operacional na análise de capacidade de sistemas aeroportuários.

⁵⁵ Possui graduação em Engenharia Civil pela Universidade Estadual de Campinas (1998), mestrado em Engenharia de Infraestrutura Aeronáutica pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (2000) e doutorado em Engenharia de Transportes - University of Calgary (2004).

Esses dados e os referentes à linha de pesquisa estão disponíveis em:

<<http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.jsp?id=K4131517D2>>. Acessado em 15 dezembro de 2010.

Projetos de Pesquisa:

2009-2011 Desenvolvimento de padrões de Nível de Serviço e Recomendações Operacionais para Terminais de Passageiros em Aeroportos Brasileiros.

Descrição: Projeto Financiado pela FAPESP (2009/09321-9). A saturação da capacidade em importantes aeroportos, as reduzidas possibilidades de implementação de novos aeroportos nos grandes centros e a realização da Copa do Mundo no Brasil em 2014 motivam a análise da qualidade e das condições de serviços em aeroportos brasileiros. O nível de serviço em terminais aeroportuários está relacionado com a satisfação e com a percepção que o cliente tem dos serviços oferecidos e pode influenciar na imagem do aeroporto. Nesta pesquisa o cliente foco é o passageiro e seis importantes aeroportos brasileiros serão analisados. A metodologia a ser empregada unirá conceitos de entrevistas com passageiros e de modelos de simulação para o entendimento da percepção do nível de serviço sob o ponto de vista de diferentes usuários e sob diferentes cenários. Serão três dias de coleta de dados em cada aeroporto com o apoio de uma equipe treinada e coordenada, contabilizando, no total, 18 dias de entrevistas. A intenção é desenvolver este estudo em 24 meses e ao final serão feitas recomendações de padrões de nível de serviço para aeroportos brasileiros. Tais recomendações, apresentadas por meio de um manual, visam auxiliar companhias aéreas, autoridades aeroportuárias, projetistas, gerentes e consultores no planejamento e na operação de um complexo aeroportuário. Através da melhoria do nível de serviço oferecido em um aeroporto, outras metas poderão ser atingidas, como por exemplo: a melhoria no desempenho e na qualidade das atividades, as vantagens competitivas, a redução de custos, o aumento do *market share* e a satisfação dos passageiros.

Disciplinas de PO são oferecidas em vários cursos do ITA e uma delas, descrita abaixo, é oferecida no curso de Pós-Graduação na área de Transporte Aéreo.

IT-207 - Pesquisa Operacional Aplicada a Problemas de Transporte Aéreo

Requisito recomendado: não há. Requisito exigido: não há. Horas semanais: 3-0-6. Programação linear: forma padrão e formas alternativas; algoritmo Simplex; análise de sensibilidade. Problemas do transporte, do transbordo e da designação: formulação de modelos matemáticos; métodos específicos de solução. Programação linear probabilística. Grafos e redes de transporte: definições e conceitos básicos; problema do caminho mais curto; problema do fluxo máximo. Aplicações a problemas de transporte aéreo. Processo de planejamento no transporte aéreo. Tabelas de horário; planejamento, alocação e rotação da frota de aeronaves. Planejamento e rotação de tripulações. Planejamento e operação de pátios de aeronaves em aeroportos. Gerenciamento do fluxo de tráfego aéreo. Bibliografia: Hillier,

F. S. and Lieberman, G.J., Introduction to Operation Research, 7th ed., McGraw-Hill, USA, 2000; Wells, A. T., Air Transportation: a management perspective, 3rd ed., Wadsworth, USA, 1994.

A Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP) possui no Campus de Guaratinguetá linhas de pesquisa dentro da área temática de PO e, uma delas, trabalhada pelo grupo, “GRUPO de Otimização e Logística”, liderado pelo Professor Fernando Augusto Silva. Marins⁵⁶. A seguir, alguns dos projetos trabalhados e suas linhas de pesquisa:

Linhas de Pesquisa:

- . Controle estatístico de processos robustos
- . Estudos em logística e cadeias de suprimentos
- . Métodos para tomada de decisão
- . Novas Metodologias no Ensino da Engenharia de Produção
- . O uso da Pesquisa Operacional na Administração Pública

Projetos de Pesquisa:

2010 – 2013 Processo N° 309890/2009-8. Desenvolvimento de um Modelo de Programação Matemática Multiobjetivo para o planejamento agregado da produção, comercialização e distribuição de uma usina sucroalcooleira.

2010 – 2012 Processo N° 500726/2010-8 – Edital MCT/CNPq 10/2010 –AT– NS (Nível Superior). Modelos multiobjetivos para planejamento agregado de produção e da logística em usinas sucroalcooleiras.

Todos os projetos apresentados foram extraídos do Sistema de Currículos Lattes dos professores mencionados. Em 2003, foi feita uma pesquisa análoga pelo professor Cristiano Agosti⁵⁷, a qual relata a PO nas Universidades Brasileiras. Essa pesquisa compõe uma apostila elaborada, por ele, para ministrar a disciplina de Pesquisa Operacional.

⁵⁶ Graduação em Engenharia Mecânica pela UNESP - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (1976), mestrado em Pesquisa Operacional pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (1981) e doutorado em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual de Campinas. Fez estágio de Pós-doutorado na Brunel University em Londres - Inglaterra (1994). É Diretor de Publicações da SOBRAPO - Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional e Editor Adjunto da Revista PODES-Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento. Esses dados e os referentes à linha de pesquisa estão disponíveis em: <<http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.jsp?id=K4783152U3>>. Acessado em 15 dezembro de 2010.

⁵⁷ Professor titular da Universidade do Oeste de Santa Catarina. Sua pesquisa consta no ANEXO E dessa dissertação.

Através da análise dessas linhas de pesquisa, pode-se constatar a complexidade da realidade social em que vivemos e os projetos desafiadores dessas equipes de pesquisa para atender a demanda da sociedade tanto no âmbito empresarial quanto no científico. O formalismo da PO procura descrever a lógica dessas complexas organizações sociais.

As empresas lançam mão das técnicas de PO como suportes para a gestão nas organizações. Elas enfrentam um mercado cada vez mais competitivo e globalizado e, é fundamental para qualquer empresa um sistema de informação, não só como uma solução tecnológica, mas também como uma solução de negócio. Os métodos da PO vão ao encontro a essas expectativas, pois podem ser utilizados em todas as áreas, desde o planejamento estratégico até o operacional.

3.1 Métodos, Técnicas e Noções Históricas

O aperfeiçoamento das técnicas da PO foi um fator determinante para o seu sucesso. A Programação Linear é uma das mais importantes, face à sua grande utilidade na solução de problemas de otimização. Nesse capítulo são apresentados os seus conceitos básicos e desenvolvidas as principais ideias do algoritmo Simplex para um caso extremamente simplificado. Outra técnica considerada e apresentada de forma bastante elementar é a Teoria dos Jogos. Não é o objetivo da pesquisa detalhar suas técnicas, mas sim entender suas origens que conduzem admiravelmente as histórias de seus grandes idealizadores Dantzig, Kantorovich, John von Neumann e Morgenstern.

3.1.1 O Método da Pesquisa Operacional

O método científico engloba algumas etapas e a experimentação é uma delas. Às vezes, a experimentação é possível e desempenha papel importante na PO. Porém, existem muitas situações em que essa não é viável devido à impossibilidade de submeter o sistema a esse tratamento experimental. Por exemplo, um astrônomo observa o sistema que estuda, mas não pode modificá-lo e em tal circunstância constrói representações, modelos, cujo comportamento orienta a sua pesquisa. Na PO faz-se o mesmo.

O conceito de modelo é fundamental para os estudos em PO. Um modelo é uma representação simplificada da realidade, que tem o objetivo de interpretar e compreender os seus diversos fenômenos. Se essas representações fossem tão complexas e difíceis de controlar, como a realidade, não haveria nenhuma vantagem em utilizá-las. Podemos, geralmente, construir modelos que são mais simples e ainda conseguirmos utilizá-los para prever e explicar, com alto grau de precisão, os fenômenos considerados.

A PO possui as mais diversas técnicas de modelagem matemática e uma das principais é a Programação Matemática. A palavra Programação é entendida nesse contexto como planejamento. O seu campo é vasto e suas técnicas se destacaram devido a sua grande utilidade na resolução de problemas de otimização. Em decorrência de particularidades nos processos de planejamento, as técnicas de soluções também sofreram mudanças para se adequarem às mais variadas situações.

As técnicas de PO são inúmeras, podendo ser agrupadas como Programação Linear, Programação Inteira, Programação Não-Linear, Programação Dinâmica, etc. Nos modelos

matemáticos de PO, a representação de um sistema é geralmente realizada por um conjunto de equações, inequações ou outras expressões matemáticas.

Se existem n decisões quantificáveis, podemos relacioná-las, cada uma a uma variável de decisão. Simbolicamente as variáveis de decisão são representadas por letras minúsculas com índices como x_1, x_2, \dots, x_n . A medida da eficácia procurada, normalmente, é expressa por meio de uma função numérica dessas variáveis, chamada de *função objetivo*. Pode-se representá-la como $Z=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. A limitação dos recursos pode ser representada no modelo por restrições aos valores das variáveis, que podem ser expressas matematicamente por meio de equações ou inequações.

A qualidade de um modelo depende em grande parte da imaginação e do poder criativo da equipe de pesquisa. Encontrar as variáveis adequadas e a relação correta entre elas é outro fator preponderante para o sucesso do modelo. Um projeto de PO envolve cinco fases e, apesar de a sequência não ser rígida, indica as principais etapas a serem vencidas. São elas:

1. Definição do problema: baseia-se em três aspectos principais: - descrição exata dos objetivos do estudo; - identificação das alternativas de decisão existentes; - reconhecimento das limitações, restrições e exigências do sistema.

2. Construção do modelo: a escolha apropriada do modelo é fundamental para a qualidade das soluções. Se o modelo elaborado tem a forma de um modelo conhecido, a solução pode ser obtida por métodos matemáticos convencionais. Se for muito complexo talvez seja necessária a utilização de combinações de metodologias.

3. Solução do modelo: o objetivo desta fase é encontrar uma solução para o modelo proposto, baseada geralmente em técnicas matemáticas existentes. No caso de um modelo matemático, a solução é obtida pelo algoritmo mais adequado, em termos de rapidez de processamento e precisão de resposta.

4. Validação do modelo: um modelo é válido se ele for capaz de fornecer uma previsão aceitável do comportamento do sistema. Um método comum para testar sua validade é analisar seu desempenho com dados passados do sistema e verificar se ele consegue reproduzir o comportamento que o sistema apresentou.

5. Implementação da solução: avaliadas as vantagens e a validação da solução obtida, esta deve ser convertida em regras operacionais.

3.1.2 Noções Históricas da Programação Linear

Ainda estudante na Universidade da Califórnia, em Berkeley, George B. Dantzig ficou famoso como matemático e estatístico devido a um incidente que acabou se tornando histórico. Tendo chegado atrasado à aula de estatística, deduziu que os dois problemas colocados no quadro negro eram para ser resolvidos em casa. Achou-os um pouco mais difícil do que o habitual, porém, alguns dias depois entregou suas resoluções ao professor, Jerzy Neyman⁵⁸, ainda acreditando que era uma tarefa para ser trabalhada em casa. Alguns dias depois da entrega recebeu a visita do professor ansioso para lhe dizer que os problemas que ele tinha resolvido eram exemplos de dois problemas famosos e não solucionados de estatística.

Anos mais tarde, Abraham Wald encontrou a solução para um desses problemas e, preparava a publicação em uma revista especializada, quando soube da solução de Dantzig, e então resolveu incluí-lo como co-autor. Foi assim o início da sua brilhante carreira, sua história espalhou-se nos meios acadêmicos e serviu, mais tarde, de cena para o filme “*Good Will Hunting*” (Gênio Indomável).

Durante a Segunda Guerra Mundial, Dantzig trabalhava na Força Aérea Americana e, nesse período, as operações militares tornaram-se cada vez mais complexas e o seu planejamento mais difícil. Nesse período, tornou-se um especialista em métodos de programação e planejamento usando calculadoras de mesa. Para ele, a natureza do problema original surgiu dessa experiência e a ajuda dos computadores, para resolver grandes sistemas de equações, foram fatores determinantes do sucesso do seu método. No período pós-guerra, a Força Aérea Americana investiu fundos consideráveis para o desenvolvimento dos computadores, pois eles eram necessários para a solução de uma ampla gama de problemas de planejamento.

Em 1947, Dantzig criou o Algoritmo Simplex, que é uma técnica eficiente para resolver problemas de Programação Linear (PL)⁵⁹. Apesar dos avanços da otimização computacional das últimas décadas, o seu método tem resistido ao tempo e ainda é a ferramenta mais utilizada nas aplicações de PL. Após 1950, passou a ser usado com muito

⁵⁸ Jerzy Neyman (Bendery, Rússia, 16 de abril de 1894 – 05 de agosto de 1981) foi um matemático estatístico russo-estadunidense. Emigrou para os Estados Unidos onde passou a maior parte de sua carreira profissional na Universidade da Califórnia em Berkeley, na qual chegou a ser presidente do novo departamento de estatística, em 1955. Ajudou a fazer do departamento um centro mundial de excelência para o estudo de estatística-matemática do National Medal of Science, em 1968.

⁵⁹ Passaremos a utilizar, a partir de agora, apenas PL todas as vezes que nos referirmos a Programação Linear.

sucesso nas empresas com o objetivo de reduzir despesas e maximizar os lucros. Sua importância é assinalada em Gass:

O desenvolvimento da programação linear foi considerado como um dos mais importantes avanços científicos, dos meados, do século XX, e temos que concordar com essa avaliação. Seu impacto, desde 1950, tem sido extraordinário. Hoje é a ferramenta padrão que tem economizado milhares ou milhões de dólares para muitas companhias ou negócios mesmo de tamanho moderado nas diversas nações industrializadas do mundo, e o seu uso em outros setores da sociedade tem se espalhado rapidamente. Uma grande proporção de toda computação científica, processada nos computadores, é destinada para o uso da programação linear. (GASS, 2002, p. 61)⁶⁰

Dantzig é considerado um dos idealizadores da PL juntamente com John von Neumann e Kantorovitch⁶¹. John von Neumann desenvolveu a teoria da dualidade, que é um dos conceitos mais importantes em PL. Qualquer problema de PL tem associado a ele outro problema semelhante chamado Dual, e o que o originou é denominado Primal.

Conta Kantorovich que a abordagem de seus estudos na área econômica foi acidental. Em 1938, era um professor da Universidade de Leningrado e também trabalhava para o governo soviético como consultor do *Laboratory of the Plywood Trust*. Kantorovich recebeu a incumbência de otimizar o processo de produção desse laboratório e, desde então, esse problema deixou de ser acidental, tornando-se um problema típico da área econômica. Notou que todos esses problemas eram semelhantes no que tange ao formalismo matemático e isso foi o suficiente para estudar um método para resolvê-los.

Kantorovich, em 1939, deixa evidente a importância prática desses problemas com o seu trabalho sobre a teoria da alocação ótima de recursos e com a publicação do seu livro, “*Mathematical Methods of Organizing and Planning Production*” (Métodos Matemáticos de Organização e Planejamento de Produção), pela Editora da Universidade de Leningrado. Esse livro reunia os problemas básicos da economia, suas formulações matemáticas e contemplava um esboço do método de solução; em essência continha as principais ideias das teorias de PL.

⁶⁰ *The development of linear programming has been ranked among the most important scientific advances of the mid-20th century, and we must agree with this assessment. Its impacts since just 1950 has been extraordinary. Today it is the standard tool that has saved thousands or millions of dollars for many companies or businesses of even moderate size in the various industrialized nations of the world, and its use in other sectors of society has been spreading rapidly. A major proportion of all scientific computation on computers is devoted to the use of linear programming.*

⁶¹ Leonid Vitaliyevich Kantorovich (Saint Petersburg, Russia, 19 de janeiro de 1912 – Moscou, 7 de abril de 1986) foi um matemático e economista russo. Seu trabalho ficou conhecido pela sua teoria e, desenvolvimento de técnicas, para a alocação ótima de recursos.

Porém, seus trabalhos não tiveram repercussão na União Soviética e permaneceram no anonimato até a década de 1950, após o método de Dantzig ficar conhecido.

Koopmans⁶², como Kantorovich, mostrou a importância prática desses modelos aplicados à economia e, em 1975, ambos foram laureados com o Prêmio Nobel de Ciências Econômicas por seus estudos no campo de alocação ótima de recursos, nos quais a PL desempenhou um papel fundamental. Foram os primeiros a usar a PL como instrumento na economia.

Outro problema clássico em PL, e que se originou da apreciação de um tipo de situação inteiramente diferente para a época, foi o que ficou conhecido como Transporte Hitchcock-Koopmans. Esse problema foi formulado, independentemente, por Hitchcock⁶³, em 1941, e por Koopmans, em 1947. Como o trabalho de Kantorovich, o de Hitchcock também caiu no esquecimento sendo retomados, somente, após 1947.

O problema de otimizar uma função linear sujeita a restrições lineares teve sua origem nos estudos do matemático e físico Fourier⁶⁴, em 1823. Ele desenvolveu vários métodos inovadores para resolver sistemas de inequações e o seu trabalho publicado em 1826, “*Solution d’une question particulière du calcul des inégalités*”⁶⁵ foi de grande valia para os estudos de Dantzig. Este mesmo problema foi abordado, anos mais tarde, por outro matemático francês La Vallé de Poussin⁶⁶, em 1911, que propôs um método similar de resolução.

⁶² Tjalling Charles Koopmans (Graveland, Holanda, 28 de agosto de 1910 – 26 de fevereiro de 1985), físico e economista holandês. Ele completou seu mestrado em física na Universidade de Utrecht e, em 1933, entrou para o programa de doutorado na Universidade de Leiden, sob a orientação de Kramers o eminente físico teórico da Holanda. Sua tese de mestrado não foi em física, mas um tópico em estatística matemática aplicável ao recente campo da econometria. Mesmo assim, Kramers serviu como seu orientador e sua dissertação foi apresentada à Faculdade de Ciências Matemáticas e Físicas, em 1936. Mudou-se para os Estados Unidos, em 1940, e após a guerra passou a fazer parte da Comissão Cowles, organismo de investigação em Economia filiada a Universidade de Chicago.

⁶³ Frank Lauren Hitchcock (New York, 1875 – 1975) foi um matemático e físico americano. Formulou o problema de transporte, em 1941, antes do conceito geral da PL ter sido formulado. Esse modelo objetiva a minimização dos custos totais escolhendo as melhores rotas de transporte.

⁶⁴ Jean Baptiste Joseph Fourier (Auxerre, França, 21 de março de 1768 – Paris, 16 de Maio de 1830), matemático e físico francês. Ficou conhecido pelos seus estudos sobre a decomposição de funções periódicas em séries trigonométricas convergentes chamadas de séries de Fourier e a sua aplicação aos problemas da condução de calor.

⁶⁵ Fourier, J.B., **Solution d’une question particulière du calcul des inegalites**, Nouveau Bulletin des Sciences par la Société philomathique de Paris, 1826.

⁶⁶ Charles-Jean Étienne Gustave Nicolas Leveux, Baron de la Vallée Poussin (Leuven, Bélgica, 14 de agosto de 1866 – 2 de março de 1962) foi um matemático Belga. Em 1914, para escapar dos alemães, aceitou o convite para lecionar em Harvard nos Estados Unidos. Depois da guerra ele retorna a Bélgica e é convidado para ser presidente do recém criado, *The International Union of Mathematician*.

Quando terminou o seu doutorado em Berkeley, em 1946, Dantzig era consultor matemático da *US Air Force Comptroller*, no Pentágono. Para que não saísse do emprego seus amigos Hitchcock e M. Wood, do pentágono, resolveram desafiá-lo. O desafio era ele conseguir mecanizar o processo de planejamento do Pentágono. Naquela época mecanizar significava utilizar equipamentos com dispositivos analógicos ou cartões perfurados, pois ainda não havia computadores eletrônicos.

Aceitou a aposta e, como matemático, começou a formular um modelo. Acabou tomando conhecimento do trabalho de Wassily Leontief⁶⁷ que o deixou fascinado. Leontief propôs, em 1932, uma grande estrutura matricial que chamou de *Interindustry Input-Output Model of the American Economy*. A matriz ficou conhecida como matriz de Leontief e o modelo, de *input-output*, e foi apresentado pela primeira vez no seu livro “*The Structure of the American Economy*”, publicado em 1941. Esse modelo era essencial para o planejamento e para que tivesse êxito, Leontief estabeleceu que era necessário o cumprimento de três passos: formulação do modelo *inter-industry*, coleta de dados para o *input* da matriz e convencer os tomadores de decisões a utilizar os dados resultantes, o *output*. Leontief recebeu o Prêmio Nobel em 1976 pelo desenvolvimento do seu modelo *Input-Output*.

Dantzig observou que, para o seu propósito, o modelo de Leontief tinha que ser generalizado, pois, a necessidade da Força Aérea era de um modelo dinâmico que mudasse com o tempo. No modelo de Leontief existia uma correspondência biunívoca entre o processo de produção e os itens a serem produzidos por esses processos, enquanto a sua necessidade consistia em um modelo com atividades alternativas.

Em 1947, Dantzig formulou um modelo matemático que representava satisfatoriamente a relação tecnológica usualmente encontrada na prática. Esse modelo utilizava um conjunto de axiomas que estabelecia a relação entre duas espécies de conjuntos. Um deles era o conjunto de itens de consumo ou produção e o outro o conjunto de processos de atividades ou produção nos quais esses itens poderiam ser *inputted* ou *outputted* em proporções pré-estabelecidas.

Criado o modelo, Dantzig começou a pensar em um método para resolvê-lo. Acreditava que os economistas pudessem ter algum interesse nesse modelo, pois tinham trabalhado com problemas de alocação de recursos escassos durante a guerra. Resolveu

⁶⁷ Wassily Leontief Wassilyovich (Munique, Alemanha, 5 de agosto de 1905 – New York, 05 de fevereiro de 1999), estudou economia, sociologia e filosofia na Universidade de Leningrado. Esteve por um ano na China, como assessor do Ministério das Ferrovias e, em 1931 emigrou para os EUA, para trabalhar para o *National Bureau of Economic Research* em New York. No ano seguinte entrou para o Departamento de Economia da Universidade de Harvard e casou-se com a poeta Estelle Marks, em 1932. Tornou-se Professor de Economia em 1946 e organizou o *Harvard Economic Research Project*, tornando-se seu diretor no período de 1948 a 1973.

procurar Koopmans, em junho de 1947, na Cowles Foundation, que naquela época ficava na Universidade de Chicago. Como Koopmans havia trabalhado durante a guerra com problemas de transporte, imediatamente ao ver o modelo apresentado entendeu que este, também, poderia ser aplicado ao planejamento econômico.

Entusiasmado, Koopmans resolveu apresentar esse modelo de programação linear aos jovens economistas que estavam iniciando sua carreira tais como: Kenneth Arrow⁶⁸, Paul Samuelson⁶⁹, Herbert Simon, Robert Dorfman⁷⁰, Leonid Hurwicz⁷¹ e Herbert Scarf⁷². Quatro deles receberam mais tarde o Prêmio Nobel, por suas pesquisas.

Dantzig tentou desenvolver um algoritmo para resolvê-lo, já que os economistas não tinham nenhuma solução ou sugestão para o seu modelo. O estudo que realizou em sua dissertação de mestrado, em Berkeley, lhe deu o *insight* que o levou a acreditar que o Método Simplex seria uma técnica de solução muito eficiente. Ele propôs esse método no verão de 1947, mas demorou aproximadamente quase um ano para que ele e seus colegas do Pentágono percebessem a sua importância.

Nesse ínterim resolveu procurar John von Neumann para lhe pedir sugestões e, em outubro de 1947, conheceu-o no Instituto de Estudos Avançados de Princeton. Comumente as pessoas iam até ele pedir sugestões para suas pesquisas, principalmente as relacionadas aos novos campos, na época, como os computadores, física atômica e programação linear. De acordo com Bronowski (1983), ele foi o homem mais inteligente que conheceu, sem exceções, uma mente extraordinariamente rápida e penetrante, o que provavelmente justificava essa procura.

⁶⁸ Kenneth Joseph Arrow (New York, 23 de agosto de 1921) é um economista americano e vencedor do Prêmio Nobel de Economia, junto com John Hicks, em 1972. É considerado um dos fundadores da moderna economia neoclássica após Segunda Guerra Mundial.

⁶⁹ Paul Anthony Samuelson (Gary, Indiana, 15 de maio de 1915 - 13 de dezembro de 2009), economista americano. Considerado o economista acadêmico mais importante do século XX. Ganhou o Prêmio Nobel de Economia em 1970.

⁷⁰ Robert Dorfman (New York, 27 de outubro de 1916 - 24 de junho de 2002) foi professor emérito de economia política na Universidade de Harvard. Dorfman publicou "*Linear Programming and Economic Analysis*" junto com Robert M. Solow e Paul A. Samuelson.

⁷¹ Leonid Hurwicz (Moscou, 21 de agosto de 1917 – Minneapolis, 24 de junho de 2008) foi um economista russo e tornou-se professor emérito da Universidade de Minnesota. Ganhou o Prêmio Nobel em Economia, em 2007, juntamente com Eric Maskin e Roger Myerson.

⁷² Eli Herbert Scarf (Filadélfia, Pensilvânia, 25 de julho de 1930) é um economista e matemático americano, professor de Economia na Universidade de Yale.

Nesse encontro, Dantzig tentou explicar a ele o problema da Força Aérea e começou falando sobre a formulação do modelo de PL em termos de atividades e itens. De repente John von Neumann levantou-se e começou a falar sobre a teoria matemática de programas lineares. Conta Dantzig que, em determinado momento, von Neumann, ao vê-lo de olhos arregalados e boca aberta, pois afinal tinha pesquisado e não tinha encontrado nenhuma literatura sobre o assunto, ele parou e disse:

Eu não quero que você pense que estou tirando tudo isso da minha manga como um mágico. Eu recentemente terminei um livro com Oscar Morgenstern sobre a teoria dos jogos. O que estou fazendo são conjecturas que os dois problemas são equivalentes. A teoria que eu estou descrevendo é análoga ao que nós temos desenvolvido para os jogos. (DANTZIG, 1991, p. 24)⁷³

Dessa conversa, dentre outras coisas, Dantzig aprendeu sobre dualidade e foi embora com a promessa de que ele pensaria em um algoritmo computacional para o seu modelo. Em pouco tempo, propôs um processo iterativo e, em 1952, Alan Hoffman⁷⁴ e seu grupo testou essa versão em alguns problemas e pôde comparar o Método Simplex com algumas outras propostas como a de T.Motzkin⁷⁵, de onde se concluiu que o Método Simplex era o mais eficiente.

Em junho de 1948, Dantzig conheceu Albert Tucker⁷⁶, que mais tarde se tornaria chefe do Departamento de Matemática em Princeton. Com alguns de seus alunos, começou um trabalho histórico sobre a Teoria dos Jogos, Programação Linear e Teoria da Dualidade. Princeton tornou-se o local onde um grupo de matemáticos fazia investigações nesse domínio. Economistas e matemáticos ficaram intrigados com a possibilidade de que o problema de alocação ótima de recursos escassos pudesse ser resolvido numericamente.

⁷³ *I don't want you to think I am pulling all this out of my sleeve on the spur of the moment like a magician. I have recently completed a book with Oscar Morgenstern on the theory of games. What I am doing is conjecturing that the two problems are equivalent. The theory that I am outlining is an analogue to the one we have developed for games.*

⁷⁴ Alan Hoffman (New York, 30 de maio de 1924), matemático americano. Foi membro do Instituto Avançado de Princeton e no período de 1951 a 1956 trabalhou no *National Bureau of Standards* em Washington.

⁷⁵ Theodore Samuel Motzkin (Berlin, Alemanha, 26 de março de 1908 – 15 de dezembro de 1970) foi um matemático e criador do algoritmo “*Fourier–Motzkin elimination*”. É um algoritmo matemático para a eliminação de variáveis de um sistema de inequações. Ele foi inventado por Fourier, em 1826, e redescoberto por Motzkin, em 1936.

⁷⁶ Albert Tucker (Oshawa, Ontario, Canada, 28 de novembro de 1905 – 25 de janeiro de 1995), matemático canadense naturalizado americano e, fez contribuições importantes em topologia, teoria dos jogos e programação não-linear.

Não muito tempo depois, houve um encontro da *Econometric Society*⁷⁷ (Sociedade Econometria) na Universidade de Wisconsin em Madison, com a participação de matemáticos e estatísticos como Hotelling e John von Neumann e economistas como Koopmans. Dantzig conta que era um jovem e desconhecido matemático, assustado por apresentar pela primeira vez para todos esses cientistas o conceito de programação linear. Depois da exposição, começou o debate sobre o tema exposto e, por alguns segundos houve um silêncio mortal na sala, quando no fundo Hotelling se levantou e disse que é sabido que o mundo não é linear. Tendo proferido essa crítica, ele sentou-se majestosamente.

Dantzig estava tentando compor uma resposta adequada, quando alguém do outro lado da sala levantou-se, era John von Neumann. Ele pediu a palavra ao Presidente dizendo que se o orador não se importasse ele gostaria de responder a pergunta. Dantzig concordou e, John von Neumann começou falando dos axiomas da programação Linear e para finalizar disse: “se você tiver uma aplicação que satisfaça os axiomas, ótimo, use-a. Se não, então não” (DANTZIG, 1991, p. 25)⁷⁸.

Hotelling tinha razão, o mundo não é linear. Felizmente, os sistemas de inequações lineares permitem-nos aproximar a maioria dos tipos de relações não lineares encontradas no planejamento prático. Dois anos após a sua primeira conferência sobre Programação Linear, foi realizado na Universidade de Chicago um simpósio sobre Programação Matemática. Koopmans foi o organizador e teve participações de economistas como: Kenneth Arrow, Paul Samuelson, Leonid Hurwitz, Robert Dorfman e Herbert Simon e matemáticos como Albert Tucker, Harold Kuhn⁷⁹ e David Gale⁸⁰.

Depois da introdução histórica proferida por Koopmans, foram apresentados 26 trabalhos sobre vários temas como teoria de programação e alocação, aplicações de modelos de alocação, propriedades matemáticas de conjuntos convexos, problemas de computação, etc. O primeiro grupo de trabalhos consistia em generalizações dos modelos de Leontief e von Neumann. O segundo em exemplos de aplicações; já o terceiro continha artigos sobre cônicas

⁷⁷ A *Econometric Society* foi fundada em 1930 por iniciativa do economista Yale Irving Fisher. É umas das sociedades mais prestigiadas no campo da economia com uma adesão a nível mundial. Seu principal objetivo é promover estudos que visam a unificação da abordagem teórica para os problemas econômicos.

⁷⁸ *If you have an application that satisfies the axioms, well use it. If it does not, then don't.*

⁷⁹ Harold Kuhn William (Santa Mônica, Califórnia, 29 de julho de 1925), professor emérito de Economia Matemática na Universidade de Princeton.

⁸⁰ David Gale (13 de dezembro de 1921 - 07 março de 2008), eminente matemático e economista americano. Ele foi professor emérito da Universidade da Califórnia, Berkeley, vinculado com os departamentos de Matemática, Economia, Engenharia Industrial e Pesquisa Operacional. Ele contribuiu para os campos da economia matemática e teoria dos jogos.

convexas e sobre o relacionamento entre otimização linear e teoria dos jogos. O quarto e último grupo apresentou métodos de solução para problemas de otimização linear.

Os trabalhos apresentados nessa conferência são, até os dias de hoje, referências básicas para qualquer estudo realizado nessa área. A exposição dos matemáticos e economistas sobre suas pesquisas e trabalhos realizados durante o período da guerra, o interesse na mecanização dos processos de planejamento, o financiamento da pesquisa e a eminência do surgimento do computador eletrônico, tudo isso fez com que o período de 1947 a 1949 fosse marcante na história da ciência e da técnica, pela maturidade das pesquisas, sendo que muitas delas tiveram início no período da guerra.

O Método Simplex acabou sendo uma ferramenta poderosa da programação matemática, e na década de 1950 surgiram novos métodos. A programação não linear surgiu em 1951 e suas aplicações comerciais começaram aparecer em 1952 com o trabalho clássico de Charnes⁸¹, Cooper⁸² e Mellon⁸³, que consistia na mistura ótima de produtos para fazer a gasolina. Depois, espalhou-se por todas as áreas. Em 1954, Willian Orchard-Hays da Rand Corporation desenvolveu o primeiro software comercial para a resolução de programas lineares. A programação estocástica foi desenvolvida em 1955 e a programação inteira em 1958.

3.1.3 Programação Linear: o Algoritmo Simplex

Para criarmos um modelo de Programação Linear (PL) precisamos identificar em um problema qual a Função Objetivo assim como suas restrições. A PL visa encontrar a melhor solução para o problema proposto, cujo modelo pode ser representado por expressões lineares. Essa técnica consiste na maximização ou minimização de uma função linear, denominada

⁸¹ Abrahan Charnes (Hopewell, EUA, 04 de setembro de 1917 – 19 de dezembro de 1992), matemático cujos estudos foram fundamentais para muitas áreas de Programação Matemática incluindo a Programação Linear. Durante a Segunda Guerra Mundial trabalhou na Reserva Naval realizando estudos de *performance* e controle de torpedos, avaliação de danos das armas, etc. Ele foi diretor do *Center for Cybernetic Studies*.

⁸² William W. Cooper (Birmingham, Alabama, EUA, 23 de julho de 1914), economista e pesquisador atuante na área de PO, Contabilidade, Marketing, Gestão de Recursos Humanos, Gestão de Riscos e Políticas Públicas.

⁸³ A família Mellon, proprietária da Gulf Oil, uma das maiores empresas petrolíferas do mundo. Uma das primeiras aplicações comerciais de Programação Linear começou nessa indústria. O êxito, dessas aplicações, foi enorme e contribuiu para isso as diversas experiências dos integrantes dessa equipe. Experiência em refinaria de petróleo e Engenharia Química, Bob Mellon, Matemática, Charnes e Economia, Administração e Contabilidade, Cooper.

Função Objetivo, respeitando um sistema linear de igualdades ou desigualdades que recebe o nome de Restrições do Modelo.

As restrições representam normalmente limitações de recursos disponíveis, ou, então, exigências e condições que devem ser satisfeitas. Essas restrições determinam uma região à qual damos o nome de Conjunto das Soluções Viáveis. A melhor delas é aquela que maximiza ou minimiza a Função Objetivo e é chamada de Solução Ótima.

Para determinar a solução de um Problema de Programação Linear (PPL)⁸⁴ torna-se necessário reduzir o problema a uma forma tal que permita a aplicação direta de um algoritmo. No caso da PL o mais utilizado é o Algoritmo Simplex e, para usá-lo, é fundamental reduzir o PPL à forma padrão:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n c_j x_j = z(x) \\ x_j \geq 0 \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad \text{onde } b_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e } j = 1, 2, \dots, n \end{array} \right.$$

A primeira equação representa a Função Objetivo e as outras são as restrições do PPL.

Com o objetivo de exemplificação pode-se considerar um PPL simples com apenas duas variáveis, resolvendo-o graficamente. Supõem-se o seguinte problema: durante a Segunda Guerra Mundial tem-se à disposição tanques e bombardeiros para atacar os inimigos. Sabe-se que um tanque causa em média 2 baixas inimigas e um bombardeiro causa 5 baixas. Tem-se apenas 4 tanques à nossa disposição e 5 bombardeiros. Um bombardeiro requer 1 soldado para pilotá-lo e um tanque requer 2 (e não cabem soldados adicionais no veículo). Tem-se a obrigação de enviar no mínimo 9 soldados para o ataque para colaborar com as tropas aliadas que também atacarão. Com quantos tanques e bombardeiros deve-se atacar para causar o maior número de baixas?

Identificando as variáveis:

x_1 – Tanques

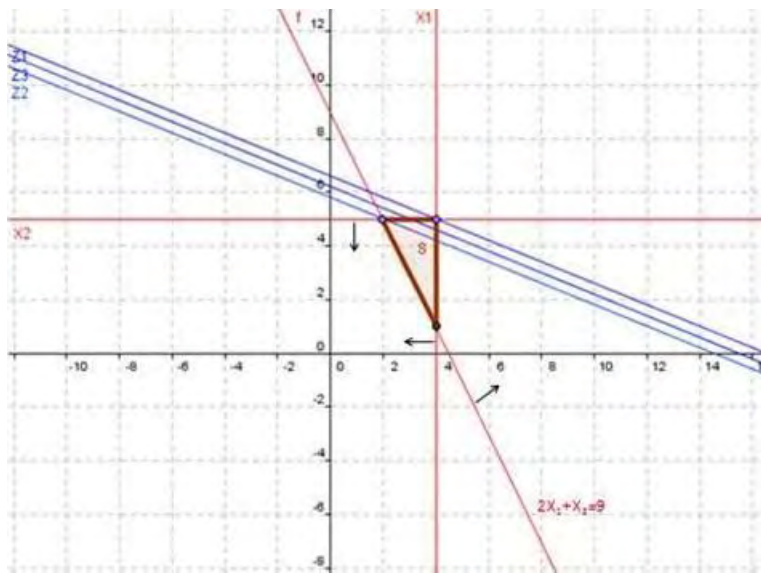
⁸⁴ Passaremos a utilizar, a partir de agora, apenas PPL todas as vezes que nos referirmos a Problema de Programação Linear.

x_2 – Bombardeiro

Maximizar $Z = 2x_1 + 5x_2$

Sujeito a:

$$\begin{cases} x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 \geq 9 \text{ e } x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Geogebra

A equação $Z = 2x_1 + 5x_2$ determina uma família de linhas retas em espaço bidimensional, cada uma delas sendo obtida atribuindo-se determinados valores para x_1 e x_2 , de forma que cada restrição seja obedecida, então para

$$x_1 = 4 \text{ e } x_2 = 5 \rightarrow Z_1 = 33$$

$$x_1 = 2 \text{ e } x_2 = 5 \rightarrow Z_2 = 29$$

$$x_1 = 3 \text{ e } x_2 = 5 \rightarrow Z_3 = 31$$

Pode-se constatar que existem vários pares (x_1, x_2) que satisfazem as restrições. Fazendo uma análise geométrica, verifica-se que cada uma das restrições determina um semiplano, e o conjunto de pontos (x_1, x_2) que, simultaneamente, satisfaz as desigualdades é a interseção dos semiplanos correspondentes. Sabe-se que um semiplano é um conjunto convexo e que a interseção de uma coleção de semiplanos também o é. Então, desse modo, o

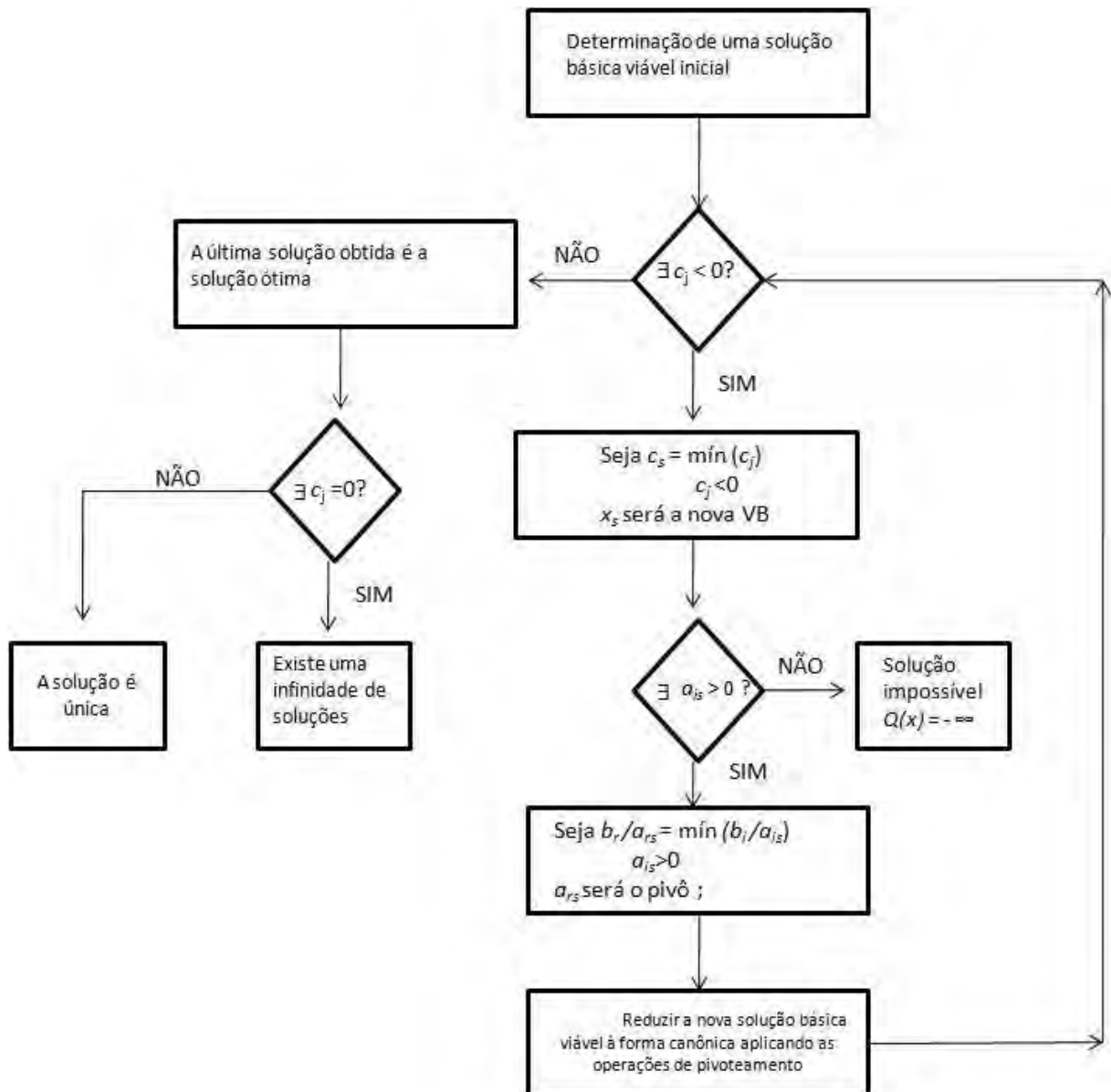
Pode-se representar as m primeiras equações e a função objetivo através do seguinte quadro:

x_1 ... x_n ... x_{n+1} ... x_{n+m} ... x_{n+m}	b
a_{11} ... a_{1n} ... a_{1n+1} ... a_{1n+m} ... a_{1n+m}	b_1
a_{21} ... a_{2n} ... a_{2n+1} ... a_{2n+m} ... a_{2n+m}	b_2
a_{m1} ... a_{mn} ... $a_{m,n+1}$... $a_{m,n+m}$... $a_{m,n+m}$	b_m
c_1 ... c_n ... c_{n+1} ... c_{n+m} ... c_{n+m}	$Z(x)$

Segue o conjunto de passos que constituem o algoritmo do Método Simplex:

1. Introduzir as variáveis de folga, uma para cada desigualdade. Monte o quadro e estabeleça uma solução básica viável inicial, a qual, usualmente, pode ser conseguida atribuindo valor zero para as variáveis originais. Como as variáveis de folga estão na forma escalonada, acharemos valores positivos para elas. A base deve estar na forma canônica, ou seja, deve ser igual a uma matriz identidade.
2. Localize o menor coeficiente negativo na última linha do quadro simplex, função objetivo exceto a última coluna, designando a coluna em que este número aparece como coluna de trabalho. Se existir mais de um candidato, escolha um deles. A variável correspondente ao menor coeficiente será a próxima variável a entrar na base.
3. Divida cada elemento da última coluna pelo correspondente coeficiente positivo da coluna de trabalho, exceto a última linha. O elemento pivô será o coeficiente da coluna de trabalho correspondente ao menor quociente. Se nenhum coeficiente da coluna de trabalho for positivo, o problema não tem solução. A variável que deve deixar a base é a que esta na mesma linha do pivô.
4. Use operações elementares sobre as linhas para converter o elemento pivô em 1 e, em seguida, reduzir a zero todos os outros elementos da coluna de trabalho.
5. Repetir os passos de 2 a 4, até não existirem mais números negativos na última linha.

Como síntese do algoritmo apresentado, segue o seu fluxograma extraído do livro (BREGALDA; OLIVEIRA; BORNSTEIN, 1983, p. 127):



O objetivo foi apresentar uma versão simplificada do Algoritmo Simplex e que, ao mesmo tempo, permitisse uma visão global. Partiu-se do princípio que as restrições eram todas do tipo \leq para $b_i \geq 0$ o que trouxe uma grande simplicidade para encontrar a solução básica inicial.

Segue um exemplo detalhado da aplicação do Algoritmo Simplex (Ibidem, p. 140).

Seja o PPL dado pelo modelo:

$$\text{Maximizar } Q(\mathbf{x}) = 5x_1 + 3x_2$$

Sujeito a:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Incluídas as variáveis de folga para colocar o modelo na forma padrão e considerando que Maximizar $Q(x)$ = Minimizar $-Q(x)$, temos:

$$3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15$$

$$5x_1 + 2x_2 + x_4 = 10$$

$$\text{Minimizar } Q(X) = -5x_1 - 3x_2$$

1º Quadro:

Passo 1: uma solução básica viável poderia ser $x_1 = x_2 = 0 \rightarrow x_3 = 15$ e $x_4 = 10$ correspondente a $Q(x) = 0$. Essa solução não é ótima, pois a linha L_3 da Função Objetivo apresenta coeficientes negativos.

Passo 2: A variável x_1 irá entrar na base, pois apresenta o menor coeficiente negativo na linha L_3 .

VB		↓	x_1	x_2	x_3	x_4	
(L_1)	x_3		3	5	1	0	15
(L_2)	← x_4		5	2	0	1	10
(L_3)			-5	-3	0	0	$Q(x)$

Passo 3: O pivô será 5 pois ele é determinado encontrando $\min \left\{ \frac{15}{3}, \frac{10}{5} \right\}$. Dessa forma fazendo $x_1 = 2$ anulamos x_4 que sai da base. Então x_1 e x_3 constituem a nova base.

Passo 4: Usando operações elementares sobre as linhas do 1º Quadro, encontra-se o próximo fazendo:

$$L_1 - \frac{3}{5}L_2 \rightarrow L_1$$

$$\frac{1}{5}L_2 \rightarrow L_2$$

$$L_3 + L_2 \rightarrow L_3$$

2º Quadro

VB	x_1	\downarrow x_2	x_3	x_4	
$\leftarrow x_3$	0	$19/5$	1	$-3/5$	9
x_1	1	$2/5$	0	$1/5$	2
	0	-1	0	1	$Q(x) + 10$

A solução $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 9$ e $x_4 = 0$ não é ótima pois a linha da Função Objetivo ainda apresenta coeficiente negativo. Repetimos o processo e determinamos que a próxima variável a entrar na base é x_2 . O pivô será $\frac{19}{5}$, pois ele é determinado encontrando $\min \{9 \div \frac{19}{5}, 2 \div \frac{2}{5}\}$. A variável que sai da Base é x_3 , então x_1 e x_2 constituem as novas variáveis da base.

Usando operações elementares sobre as linhas do 2º Quadro, encontra-se o próximo fazendo:

$$\frac{5}{19}L_1 \rightarrow L_1$$

$$L_2 - \frac{2}{19}L_1 \rightarrow L_2$$

$$L_3 + \frac{5}{19}L_1 \rightarrow L_3$$

3º Quadro

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	0	1	$5/19$	$-3/19$	$45/19$
x_1	1	0	$-2/19$	$5/19$	$20/19$
	0	0	$5/19$	$16/19$	$Q(x) + \frac{235}{19}$

Esta é uma solução ótima, pois, todos os coeficientes das variáveis da função objetivo são positivos. Portanto, temos para a solução ótima $x_1 = \frac{20}{19}, x_2 = \frac{45}{19}$ e $x_3 = x_4 = 0$

$$\text{Min } Q(x) + \frac{235}{19} = 0 \rightarrow \text{Min } Q(x) = \frac{-235}{19}$$

$$\text{Max } Q(x) = -\text{Min } Q(x) \rightarrow \text{Max } Q(x) = \frac{235}{19}$$

Hoje existem diversas ferramentas para solução de problemas de PL e uma delas, de acesso bastante fácil, é o Solver. Ele é um aplicativo do Microsoft Excel e pode também ser utilizado para resolver problemas de programação não linear.

Resolvendo esse mesmo problema na ferramenta Solver, obteremos os valores ótimos das variáveis x_1 e x_2 , respectivamente nas células B_1 e B_2 .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	x1	1,052632													
2	x2	2,368421													
3															
4	Função Ot	12,36842													
5															
6	Restrição:	15	<=	15											
7		10	<=	10											
8		1,052632	>=	0											
9		2,368421	>=	0											
10															

Parâmetros do Solver

Definir célula de destino:

Igual a: Máx Mín Valor de:

Células variáveis:

Submeter às restrições:

3.1.4 Noções Históricas da Teoria dos Jogos

“A história prega aos grandes a peça de transformá-los em símbolos; sua lenda torna-se uma espécie de palácio, de cujo dono muito se fala, mas que raramente é visto” (FERRIS, 1990, p. 57). John von Neumann é um desses grandes cientistas, para quem isso foi de fato verdadeiro. Contam-se muitas lendas, desde sua infância, da sua prodigiosa memória. Diziam que, ainda criança, ele podia memorizar os nomes, endereços e telefones de uma página da lista telefônica, em poucos minutos. Com o passar dos anos ele não perdeu esse dom, pois quando trabalhava no projeto Manhattan ele sabia todos os números da lista telefônica do seu trabalho, só não podia descartá-la, pois, não sabia alguns nomes a quem os números pertenciam.

Existem muitas histórias sobre sua distração, muitas delas contadas pela sua esposa. Contou ela que, certa manhã, ele saiu logo cedo de sua casa em Princeton para ir a Nova Iorque. Logo depois ligou para ela para perguntar por que ele estava indo para Nova Iorque. Numa outra ocasião, chamou o condutor do trem para dizer-lhe que estava com fome e pediu a ele que chamasse o vendedor de sanduíches. O condutor ocupado e impaciente disse: eu vou, e se eu o vir? Então Neumann respondeu com outra pergunta: esse trem é linear?

Muitas dessas histórias, mesmo as mais ficcionais dizem algo a respeito do seu caráter. Sua inteligência e seu raciocínio rápido o colocaram entre os principais homens da ciência do seu tempo. Todas as suas ações, seus estudos e suas histórias estampam sua paixão pela ciência e para expressar seu intelecto a frase de Toffler é perfeitamente apropriada: “Tornou-se para mim totalmente distinto, um entre o punhado de gênios supremos que modelaram a categoria do intelecto humano, um homem que é impossível reduzir a critérios finais pelos quais compreendemos nossos semelhantes” (TOFFLER, 1970, p. 74).

O testemunho de G. Pólya⁸⁵ ressalta também a genialidade de John von Neumann. Conta que ele foi um aluno singular e que, no decurso de uma palestra, falou sobre um problema não resolvido. Disse que tinha certeza de que John von Neumann voltaria para ele com a solução. Foi o que aconteceu. Quando a palestra terminou, estava com a solução rabiscada em um pedaço de papel. Anos mais tarde, quando o computador eletrônico ficou pronto para o primeiro teste, alguém sugeriu um problema relativamente simples envolvendo potência de 2. O problema se resumia em encontrar a menor potência de 2 em que o seu

⁸⁵ George Pólya (Budapeste, Hungria, 13 de dezembro de 1887 – 07 de setembro de 1985) foi um matemático húngaro. Ele é mais conhecido por seu trabalho em Educação Matemática tendo publicado vários livros sobre o assunto.

quarto dígito decimal da direita é 7. Este é um problema bastante trivial para um computador. A máquina e John von Neumann começaram juntos e ele acabou primeiro.

Por essas razões é que John von Neumann sempre esteve envolvido com assuntos inovadores da sua época como física quântica, bomba atômica, computador eletrônico, lógica, biologia, programação linear, economia, etc. John von Neumann nasceu em 1903, em Budapeste na Hungria. Em 1922, apaixonado pela matemática, inscreveu-se na faculdade de Ciências Naturais e de Matemática da Universidade de Budapeste, onde foi recebido sem dificuldades. Defendeu o doutorado em 1926. A pedido de seu pai, também se inscreveu em Química, matéria em moda na época, primeiramente em Berlim, depois em Zurique. Sua primeira publicação foi, aos 20 anos, sobre Teoria dos Conjuntos, a qual se tornou um clássico.

Dedicou parte da sua vida aos estudos da Lógica e da Teoria dos Conjuntos. Em agosto de 1930 na cidade de Königsberg, aconteceu o Segundo Congresso sobre a Teoria do Conhecimento nas Ciências Exatas, onde foi exposto pela primeira vez o Teorema da Incompletude, que tornou Gödel célebre e revolucionou a matemática, a lógica, a filosofia, a linguística e a computação. Esse Teorema, no início, não foi bem aceito no mundo científico, tendo sido apenas percebido por John von Neumann, que o classificou como sendo a maior descoberta lógica em muito tempo. Passou então a devotar uma profunda admiração pelo trabalho de Gödel, tendo afirmado que os estudos que Gödel desenvolveu sobre a lógica moderna é singular e monumental e será um marco na história. Em uma palestra intitulada “O Matemático”⁸⁶, dentre outras coisas, enalteceu o trabalho de Gödel e foi um dos primeiros a mencioná-lo nos Estados Unidos.

Durante o período de 1926 a 1930, em Berlim, trabalhou com física quântica e teoria dos operadores. Foi inspirado por novos conceitos físicos e foi necessário se aprofundar mais no estudo, puramente matemático, de operadores sobre espaço de dimensão infinita. Porque para compreender o cálculo das probabilidades, na mecânica quântica, a partir da informação representada nos vetores de estado e funções de onda é preciso dominar alguns conceitos da álgebra linear, como o conceito de operador, autovetor e de autovalor.

A ideia básica é que a geometria de vetores em um espaço de Hilbert tem as mesmas propriedades formais que a estrutura de estado em um sistema da mecânica quântica, os quais são, geralmente, de dimensão infinita. Essa conexão entre a matemática e as ciências naturais

⁸⁶ “*The Mathematician*” foi publicado em *Works of the Mind* (Vol.I nº 1) pela Editôra da Universidade de Chicago, em 1947.

é o melhor meio para que o intelecto humano possa formular teorias. Tinha consciência disso e, baseado na sua experiência, afirma que a diferença entre um físico quântico e um matemático teórico é a ênfase da linguagem, e só. Em 1928 publicou um artigo sobre a Teoria dos Jogos e, em 1932 foi publicado na Alemanha seu livro sobre Mecânica Quântica.

Em 1930, John von Neumann foi para a Universidade de Princeton, nos Estados Unidos, como professor visitante, tornando-se, no ano seguinte, professor titular. Em 1933 foi fundado o Instituto de Estudos Avançados de Princeton e ele passou a ser um dos seis professores contratados para a Faculdade de Matemática do Instituto, onde permaneceu até a sua morte. Os outros eram J.W. Alexander, Einstein, Morse, O. Veblen e H. Weyl. As instalações demoraram a ser construídas e ele acabou aceitando a hospitalidade da Universidade. A Universidade de Princeton e o Instituto de Estudos Avançados são instituições independentes.

John von Neumann gostava da vida na América e não se sentia como um refugiado e sim como um cosmopolita de atitude e um cidadão americano por escolha. Esse brilhante pesquisador gozava ainda de grande reputação pelo seu carisma. Em seus discursos era tão convincente que os ouvintes não precisavam ser um *experts* para desfrutar de suas palestras, tudo parecia fácil e natural.

Em 1940 aconteceu uma descontinuidade no seu trabalho. Até então ele era um dos melhores matemáticos puros que entendia a física, depois passou a matemático aplicado que usava recursos da matemática pura. Se a guerra fez dele um matemático aplicado, ou o seu interesse por matemática aplicada foi providencial para o esforço de guerra não importa, pois em qualquer caso ele era muito requisitado como consultor e conselheiro das forças armadas para resolver os problemas de guerra. Seus trabalhos, a partir de então, são principalmente sobre Estatística, ondas de choque, Aerodinâmica, Balística, Meteorologia e a aplicabilidade da Matemática nos jogos e computadores. Suas contribuições para os esforços de guerra foram as mais variadas.

Na mesma época em que ele aplicava seus conhecimentos em trabalhos com fins militares ainda encontrou tempo e energia para desenvolver o que chamou de teoria dos jogos, cujo campo de aplicação era a economia. Sua fundamentação foi o Teorema Minimax, provado por ele em 1928. Segundo este teorema, há sempre uma solução racional para um conflito bem definido entre dois indivíduos cujos interesses são completamente opostos. Nesse período a teoria dos jogos não tinha nenhuma conexão com interesses econômicos, mas a partir de 1940 os interesses mudaram.

Essa mudança aconteceu após o início das discussões com Oskar Morgenstern, do qual se tornou amigo. Tudo começou, conta Morgenstern, com um convite feito pelo professor Moritz Schlick, famoso filósofo e líder do chamado Círculo de Viena, para discutir alguns problemas tratados no seu livro "*Vollkommene Voraussicht und Wirtschaftliches Gleichgewicht*" (Visão Perfeita e Equilíbrio Econômico), publicado em 1935. Pertenciam a essa escola Carnap⁸⁷, Feigl⁸⁸, Frank⁸⁹, Gödel, Hahn⁹⁰, Menger⁹¹, Popper e Waismann⁹². Nem todos eles estavam presentes na ocasião. Apesar de ele não ser membro formal do grupo, participou de vários colóquios. No final de uma de suas apresentações, veio até ele um matemático chamado Eduard Cech, e disse que o que ele tinha apresentado tinha muita proximidade com o trabalho de John von Neumann, a Teoria dos Jogos, publicado em 1928. Cech delineou as ideias centrais desse artigo e recomendou a Morgenstern que o estudasse.

Foi a primeira vez que Morgenstern ouviu falar de John von Neumann. Anos mais tarde, ambos tentam recordar-se onde foi que se encontraram pela primeira vez, mas só conseguiram lembrar-se da segunda. Morgenstern deu uma palestra no Clube Nassau, em 1º de fevereiro de 1939, e von Neumann estava lá com Niels Bohr⁹³ e Oswald Veblen⁹⁴. Após a palestra, eles convidaram Morgenstern para um chá e ficaram horas falando sobre jogos e

⁸⁷ Rudolf Carnap (Ronsdorf, Alemanha, 18 de maio de 1891 – 14 de setembro de 1970), influente filósofo alemão e um dos principais membros do Círculo de Viena.

⁸⁸ Herbert Feigl (Reichenberg, Alemanha, 14 de dezembro de 1902 – 01 de junho de 1988), filósofo austríaco e membro do Círculo de Viena.

⁸⁹ Philipp Frank (Viena, Áustria, 20 de março de 1884 – Cambridge, Massachusetts, 21 de julho de 1966), físico, matemático, filósofo e membro do Círculo de Viena.

⁹⁰ Hans Hahn (Viena, Áustria, 27 de setembro de 1879 – 24 de julho de 1934) foi um matemático que fez grandes contribuições para a análise funcional, teoria dos conjuntos e topologia.

⁹¹ Karl Menger (Viena, Áustria, 13 de janeiro de 1902 – Highland Park, Illinois, 05 de outubro de 1985), matemático e filho do famoso economista Carl Menger. Contribuiu para a Teoria dos Jogos e Ciências Sociais.

⁹² Friedrich Waismann (Viena, Áustria, 21 de março de 1896 – 04 de novembro de 1959) matemático, físico e filósofo austríaco. Ele emigrou para o Reino Unido, em 1938, onde foi professor de Filosofia da Matemática na Universidade de Oxford de 1939 até sua morte.

⁹³ Niels Henrik David Bohr (Copenhaga, Dinamarca, 7 de outubro de 1885 – 18 de novembro de 1962) foi um físico cujos trabalhos contribuíram para a compreensão da estrutura atômica e da Física Quântica. Pelas suas investigações sobre a estrutura atômica, à luz da Mecânica Quântica, ganhou em 1922 o Prêmio Nobel de Física.

⁹⁴ Oswald Veblen (Decorah, Iowa, EUA, 24 de junho de 1880 – 10 de agosto de 1960) foi um matemático, geometra em cujo trabalho se encontra aplicação à Física Quântica e à Teoria da Relatividade. Após sua morte a Sociedade Matemática Americana criou um prêmio em sua homenagem, chamado Prêmio de Oswald Veblen de Geometria. Ele é concedido a cada três anos e, é a concessão de mais prestígio no reconhecimento de pesquisa em Geometria.

experimentos. Essa foi a primeira discussão, de muitas outras que aconteceram entre Morgenstern e John von Neumann sobre jogos.

Numa dessas discussões, Morgenstern falou a John von Neumann do seu interesse em estudar a Teoria dos Jogos, artigo publicado em 1928. Neumann disse que, ultimamente, estava pensando em reescrevê-lo, pois tinha novas ideias e só não havia começado por falta de tempo. Morgenstern, empolgado, começou a estudar seriamente a Teoria dos Jogos, mas se deparou com algumas dificuldades matemáticas. Isso o levou a muitas conversas com John von Neumann. Seu envolvimento com esse assunto foi grande, pois percebeu as possibilidades que esse artigo propiciava à economia. Resolveu então escrever um artigo para mostrar aos economistas a essência e o significado da Teoria dos Jogos.

Ao ler o seu manuscrito, John von Neumann observou que era muito sucinto e, portanto, não seria compreensível para aqueles que não tinham lido o seu artigo. Então, sugeriu que o refizesse. Como eles já tinham discutido muito o assunto, inclusive novas abordagens, Neumann propôs a ele para escreverem juntos o artigo. A ideia foi aceita e, em pouco tempo já tinha se tornado demasiadamente extenso para ser publicado em uma revista. John von Neumann resolveu ir à editora da Universidade de Princeton e ver se conseguiria publicá-lo lá. Conta Morgenstern (1976) que Datus Smith, então diretor de imprensa, foi muito complacente e acabaram fazendo um acordo, com o comprometimento de entregar um manuscrito de até 100 folhas.

Por insistência de Morgenstern, von Neumann deu algumas palestras na Universidade de Princeton sobre a Teoria dos Jogos, as quais os ajudaram a concentrar seus pensamentos para o que estavam escrevendo. Trabalharam intensamente entre 1941-1942, escrevendo juntos o manuscrito, ora no apartamento de Morgenstern, ora na casa de John von Neumann, que vivia com sua esposa e sua filha Klari Marina. Klari, já havia se acostumado com as intermináveis discussões e, recorda Morgenstern que:

Ela estava, na época, colecionando elefantes feitos de marfim, vidro e de todo tipo de material. Em certo momento, ela brincou conosco dizendo que ela não tinha nada a ver com o nefasto livro que crescia cada vez mais e, cada vez mais consumia nosso tempo. Será que não tem também um elefante, nele. Então nós prometemos que ficaríamos felizes em colocar um elefante no livro: quem abre as páginas do livro encontra o diagrama de um elefante, se ele sabe que deve procurar por um. (MORGENSTERN, 1976, p. 811)⁹⁵

⁹⁵ *She was at that time collecting elephants made of ivory, glass, and all sorts of other material. At one point she teased us by saying that she would have nothing more to do with the ominous book, which grew larger and larger and consumed more and more of our time if it didn't also have an elephant in it. So we promised we would happily put an elephant in the book: anyone who opens the pages can find a diagram showing an elephant if he knows that he should look for one.*

Curiosamente, quando estavam para escrever uma nova prova do Teorema Minimax, já cansados, resolveram dar continuidade ao trabalho no dia seguinte. Morgenstern resolveu, apesar da fria tarde, ir caminhando para o Instituto de Estudos Avançados. Chegando lá, como estava frio, entrou na biblioteca e deu uma olhada ao seu redor e acabou pegando o livro “*Traité Du Calcul des Probabilités*” de E. Borel⁹⁶.

Para seu espanto o livro fazia referências⁹⁷ ao Teorema Minimax de John von Neumann, referenciado no seu artigo Teoria dos Jogos de 1928. Em certo ponto do seu artigo ele utilizava esse teorema, ao invés de utilizar o Teorema do Ponto Fixo, de Brouwer⁹⁸, provando-o de forma elementar. As duas provas desse teorema, desenvolvidas por John von Neumann, não eram nada elementares. Imediatamente, ligou para John von Neumann, se encontraram e rapidamente constataram que a melhor aproximação seria proceder por considerações de convexidade. Dessa forma, a partir de 1944, ocorreu a introdução de corpos convexos na literatura moderna da economia, via Programação Linear. A noção de convexidade é fundamental no modelo de von Neumann.

Em 1942, von Neumann mudou-se para Washington, em decorrência da guerra, para trabalhar em um escritório de pesquisa da Marinha. O trabalho estava bastante adiantado e quando retornou, em dezembro de 1942, escreveram as últimas páginas. Depois que o manuscrito ficou pronto, eles foram à Editora da Universidade de Princeton explicar que o trabalho continha um pouco mais de 100 páginas. Sendo mais exato, o que era a princípio para ser um artigo, ultrapassou em muito o limite estipulado, tendo sido concluído com 1200 páginas. Conseguiram um subsídio da Universidade e do Instituto de Estudos Avançados de Princeton e em 18 de setembro de 1944 foi publicado “*A Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico*”.

⁹⁶ Referências do livro, ver ANEXO F.

⁹⁷ Referência ao Teorema de von Neumann explicitada no ANEXO F.

⁹⁸ Luitzen Egbertus Jan Brouwer (Rotterdam, Holanda, 27 de fevereiro de 1881 – 2 de dezembro de 1966) foi um matemático e filósofo holandês. Seus estudos concentraram-se, principalmente, em Topologia, Teorias dos Conjuntos e Análise Complexa. As contribuições de Brouwer para a Filosofia da Matemática foram grandes. Ele funda o Intuicionismo Matemático que concebe a intuição como uma entidade fundamental no raciocínio matemático, antagônico ao Formalismo Matemático de sua época.

3.1.5 Teoria dos Jogos: noções matemáticas elementares

A Teoria dos Jogos não surgiu durante a Segunda Guerra Mundial e, de acordo com Kjeldsen (2003), nem desempenhou papel fundamental na matemática utilizada e desenvolvida para resolver os problemas de esforço de guerra, porém, ela beneficiou-se da importância atribuída à matemática aplicada e a PO após o término da guerra tornando-se o principal tema de pesquisa matemática na RAND.

Em 1928, von Neumann publicou um artigo no qual expôs, pela primeira vez, os fundamentos da Teoria dos Jogos e desenvolveu o princípio Minimax, o qual faço algumas considerações adiante. Nesse artigo, de acordo com Kjeldsen (2003), von Neumann aponta para a possibilidade de um escopo muito mais amplo para a teoria dos jogos e justificou-se dizendo que qualquer evento pode ser considerado como um jogo de estratégia se considerarmos o efeito que tem sobre os participantes.

O desenvolvimento realmente significativo da Teoria dos Jogos iniciou-se com a publicação do livro *“The Theory of Games and Economic Behavior”* (Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico), publicado em 1944, por von Neumann e o economista Oskar Morgenstern. Ela foi construída sobre o conceito de estratégia e o seu princípio básico foi o Teorema Minimax, que prova a existência de estratégia ótima.

A teoria dos jogos é um método valioso de que dispõe o pesquisador operacional. Suas aplicações estão se tornando cada vez mais numerosas, não se limitando somente a área econômica. Podemos considerar problemas táticos ou estratégicos pertinentes a área militar como um jogo, como também, os acontecimentos sociais podem ser descritos através de modelos análogos aos de jogos de estratégia, os quais possibilitam ampla análise matemática. Assim, a competição econômica, política e outras encontram na Teoria dos Jogos um instrumento de análise.

Para estudarmos os fenômenos do mundo social temos que ter em mente que: “os homens, algumas vezes, lutam uns contra os outros e algumas vezes cooperam entre si; dispõem de diferentes graus de informação acerca do próximo, e suas aspirações os conduzem ao conflito ou à colaboração (MORGENSTERN, 1970, p. 11). Através dos estudos de von Neumann e Morgenstern mostrou-se que, os acontecimentos sociais encontram sua melhor descrição através de modelos colhidos em adequados jogos de estratégia. A matemática equaciona os conflitos e o foco são as estratégias utilizadas pelos jogadores, as quais são usualmente interpretadas como plano de ação, ou seja, como o jogador pretende jogar, do início ao fim do jogo.

A Teoria dos Jogos é o estudo formal do conflito e da cooperação. Ela se preocupa com situações nas quais os jogadores interagem, de modo que é importante para cada jogador prever a jogada dos demais jogadores. Convém acentuar que a palavra “jogador” não é, necessariamente, uma pessoa, pode ser uma equipe, uma empresa, uma nação. Ela é a aplicação da lógica matemática no processo de tomada de decisões e, de acordo com Rubinstein (1991), é vista como um inquérito sumário sobre a função e a lógica das instituições sociais e seus padrões de comportamento.

Como já visto anteriormente, a investigação de um problema de PO inicia-se pela análise do contexto com o objetivo de descrever o modelo da situação. Na Teoria dos Jogos a característica do modelo quase sempre é delineada por um conjunto de ações alternativas, A_1, A_2, \dots, A_n das quais apenas uma escolha é possível. Examina-se cada ação (A_i) e suas respectivas consequências (C_i). Muitos são os problemas que apresentam essa estrutura básica e o desafio é avaliar as consequências de cada ação, de forma que se possa estabelecer, entre elas, uma comparação quantitativa clara de suas vantagens e desvantagens.

Qualquer situação em que os indivíduos precisam fazer escolhas estratégicas e o resultado final depende da ação escolhida por cada indivíduo, pode ser modelada como um jogo. Esse modelo típico de uma situação de conflito é chamado de jogo, o qual definimos como: toda situação em que existem uma ou mais entidades cujas ações interferem nos resultados das outras. A estratégia é outro conceito fundamental na teoria dos jogos e podemos considerá-la como a descrição exata de como uma pessoa deverá agir sob quaisquer circunstâncias possíveis. As condições de jogo são mais complexas visto que as ações do oponente devem ser consideradas, ou seja, a ação de um participante depende da ação escolhida pelo seu opositor.

Os elementos básicos de um jogo são três: jogadores, estratégias e *payoff*. Jogador é qualquer indivíduo, ou organização, envolvido no processo de interação estratégica, e que tenha autonomia para tomar decisões no jogo. A estratégia representa a escolha, plano de ação, que o jogador pode fazer em um dado momento do jogo. O *payoff* representa o resultado que o jogador obtém no final do jogo, levando em conta suas próprias escolhas e a dos outros jogadores.

Alguns pressupostos básicos são necessários para garantir a operacionalidade da Teoria dos Jogos. Pressupõe-se que os jogadores façam suas escolhas racionalmente, ou seja, que suas relações de preferências que norteiam suas escolhas sejam consistentes e obedeçam a certo princípio de racionalidade. Assim, ao escolher uma estratégia, o jogador supõe que seu

oponente também o fará de forma racional, levando isso em consideração ao tomar sua decisão.

A decisão do agente afeta as decisões dos demais, dividindo a Teoria dos Jogos em duas categorias de jogos: os cooperativos e os não cooperativos. Os cooperativos ocorrem quando seus participantes procuram negociar os possíveis resultados, planejando as estratégias em conjunto. Como exemplo, duas empresas que atuam no mesmo setor querem desenvolver uma nova tecnologia, porém, nenhuma delas, isoladamente, tem *know-how* suficiente para fazê-lo sozinha. Os não cooperativos ocorrem quando não existe a possibilidade de negociação, ou seja, existem interesses conflitantes entre os participantes. Uma aplicação econômica para os jogos não cooperativos é a escolha da determinação de preços por duas empresas concorrentes que produzem o mesmo produto.

Com relação à representação, os jogos podem ser representados na forma normal ou estratégica e na forma extensiva. Na representação normal ou estratégica os jogos são apresentados em matrizes nas quais as estratégias de cada jogador são listadas nas linhas e colunas. Em cada célula da tabela aparecem os ganhos que cada uma das partes obterá caso realize as ações, às quais, ambas, estão vinculadas. Os ganhos do jogador da linha são grafados na primeira posição, à esquerda do par ordenado, e os do jogador da coluna vêm após a vírgula que os separa, à direita. Resumindo, na forma normal ou estratégica o jogo é representado em uma matriz, denominada matriz de *payoff*, que mostra os jogadores, as estratégias e os pagamentos (*payoffs*). Podemos ilustrar com um exemplo clássico da Teoria dos Jogos, o dilema dos prisioneiros.

Dois homens suspeitos de haverem cometido um crime, são presos e colocados em celas separadas. Cada um dos suspeitos pode confessar ou permanecer em silêncio. Eles conhecem as conseqüências de sua atitude, que são:

- Se um dos suspeitos confessar e seu companheiro não o fizer, o que confessou será libertado e o outro será condenado a 20 anos de reclusão.
- Se ambos confessarem, ambos permanecerão detidos por 5 anos.
- Se os suspeitos ficarem em silêncio, ambos permanecerão na prisão por 1 ano.

Vamos supor que a única preocupação de cada um dos suspeitos seja o seu próprio interesse. O jogo é ilustrado pela figura abaixo.

		Suspeito II	
		Confessar	Não Confessar
Suspeito I	Confessar	(5,5)	(Liberdade, 20)
	Não Confessar	(20, liberdade)	(1,1)

Figura 1

Como o jogo é não cooperativo eles não podem ter certeza da estratégia do outro, então do ponto de vista de um dos suspeitos a melhor alternativa é confessar, pois, se o seu oponente não confessar ele será libertado e, caso contrário permanecerá na prisão por 5 anos. Note que se houvesse cooperação a melhor opção para ambos seria não confessar, assim ambos ficariam detidos por 1 ano.

A outra forma de jogo, a extensiva, de acordo com von Neumann e Morgenstern (1953) é estritamente equivalente à forma normal ou estratégica. É necessário analisar cada caso para decidir qual a forma mais conveniente para representá-lo. O jogo, na forma extensiva, apresenta-se como árvore. A cada vértice ou nó representa um ponto, onde o jogador toma decisões e as linhas que partem do vértice representam as ações possíveis. Esse modelo de jogo especifica as possíveis ordens dos eventos, ou seja, cada jogador pode rever seu plano de ação toda vez que tem que tomar uma decisão.

A representação na forma extensiva especifica: os jogadores do jogo, a ordem do jogo, as ações possíveis de cada jogador quando é sua vez de jogar, o que o jogador sabe quando é sua vez de jogar e os *payoffs* que cada jogador recebe para qualquer sequência de ações escolhidas pelos jogadores. Podemos considerar como exemplo de jogo na forma extensiva, um jogo de dois jogadores, 1 e 2, conforme a figura abaixo:

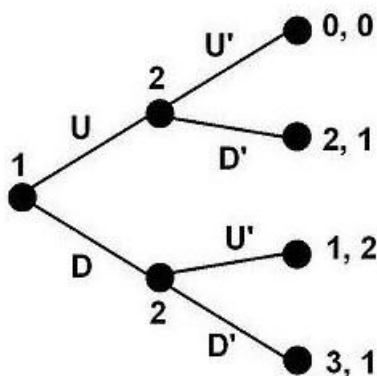


Figura 2

O jogador é identificado em cada nó não terminal pelos números 1 e 2. O par de números em cada nó terminal representa o *payoff* do jogador 1 e 2 respectivamente. As ações são representadas pelas letras U, D, U', D'. O jogador 1 inicia o jogo tendo que escolher uma dentre as duas possibilidades de ação: U e D. O jogador 2 observa a escolha do jogador 1 e então escolhe entre U' e D'. Se o jogador 1 escolher D, o jogador 2 jogará U' visando maximizar seu retorno, assim, o *payoff* do jogador 1 é 1 e do jogador 2 é 2. No entanto se o jogador 1 escolher U, o jogador 2 maximiza seu *payoff* jogando D', assim o *payoff* é (2,1).

A classificação dos jogos quanto à sequência das ações divide-se em: jogos simultâneos ou estáticos e jogos sequenciais ou dinâmicos. Jogos simultâneos ou estáticos são aqueles em que cada jogador toma sua decisão sem levar em consideração a decisão dos outros jogadores. Jogo sequencial ou dinâmico é aquele em que os jogadores executam suas ações de forma não simultânea, ou seja, o próximo jogador tem conhecimento da jogada de seu antecessor. Os exemplos vistos anteriormente retratam essas duas situações. O dilema dos prisioneiros é um exemplo de jogo simultâneo e o exemplo da Figura 2 de jogo sequencial.

Outro conceito que classifica os jogos diz respeito às informações. Um jogo de informação perfeita é aquele onde os jogadores selecionam as estratégias sequencialmente e conhecem todas as jogadas efetuadas pelos outros jogadores, o xadrez é um exemplo. “Os jogos de informação perfeita são quase exclusivamente jogos de salão. A recíproca não é, entretanto, verdadeira. O bridge e o pôquer, por exemplo, não são jogos de informação perfeita” (DAVIS, 1970, p. 25). Já um jogo de informação imperfeita é aquele onde os jogadores agem sem saber o que os outros jogadores decidiram previamente.

John von Neumann e Morgenstern desenvolveram uma fecunda teoria de jogos de duas pessoas de soma zero em seu livro “*The Theory of Games and Economic Behavior*”. O jogo de xadrez ilustra bem essa categoria de jogo, de acordo com Davis:

Aos olhos do teórico dos jogos, há quatro elementos essenciais no jogo de xadrez que nos serve de exemplo: (1) são dois os jogadores; (2) têm eles interesse diverso no que diz respeito ao resultado do jogo⁹⁹; (3) o jogo é finito¹⁰⁰; (4) surpresas estão fora de cogitação: a qualquer altura do jogo, ambos os participantes estão inteiramente informados. Jogos que apresentam essas quatro propriedades são denominados jogos de informação perfeita, finitos, de duas pessoas e de soma zero. (DAVIS, 1970, p. 26)

⁹⁹ Jogos em que os interesses dos participantes são diametralmente opostos denominam-se jogos de soma zero. A expressão “soma zero” deriva dos jogos de salão, como o pôquer, onde não se cria nem se destrói riqueza. Quem quiser ganhar dinheiro terá de ganhá-lo de outro jogador. Encerrado o jogo, a soma dos ganhos é sempre zero (as perdas são ganhos negativos). Em outras palavras, o que um perde é o que o outro ganha.

¹⁰⁰ Quer dizer que um jogador só dispõe, em cada lance, de um número finito de alternativas e o jogo se encerra após um número finito de lances.

O Teorema Minimax assevera que para qualquer jogo finito de duas pessoas, soma zero, sempre existe uma estratégia mista¹⁰¹ para cada jogador, de tal forma que a recompensa esperada tenha o mesmo valor quando os jogadores usam essas estratégias. Esse valor é a melhor recompensa que cada um pode esperar do jogo. Em um jogo de dois jogadores soma zero, é racional para cada jogador escolher a estratégia que maximiza seu ganho mínimo, ou, que minimiza o ganho máximo do outro. O par de estratégias tal que cada jogador maximiza seu *payoff* mínimo é a solução do jogo.

Para exemplificar esse teorema, vamos considerar um estudo de caso: A Batalha do Mar de Bismark.

Durante a Segunda Guerra Mundial, a metade norte da ilha de Nova Guiné era controlada pelos japoneses e a metade sul pelas tropas aliadas. Informações secretas indicaram às forças aliadas que os japoneses iriam transferir um maciço reforço de tropas e suprimentos para Lae, que fica na parte ocidental da Nova Guiné. Esse comboio passaria pelo porto de Rabaul, que fica na parte oriental da ilha de Nova Bretanha. A geografia do local permitia duas possibilidades de navegação, uma pelo norte da ilha da Nova Bretanha, que aqueles dias o tempo era chuvoso e provocava má visibilidade e a rota sul, onde o tempo era bom e apresentava boa visibilidade. As tropas aliadas dispunham de aviões de reconhecimento para pesquisar somente uma rota de cada vez e, em qualquer uma das rotas a viagem demoraria 3 dias.

O Comandante das Forças Aéreas Aliadas no Pacífico era o General George Churchill Kenney. Seu objetivo era surpreender o comboio japonês e para isso tinha que decidir onde concentrar seus aviões de reconhecimento. Os japoneses, por sua vez, queriam que seus navios ficassem expostos, aos bombardeios inimigos o menor tempo possível, e o General Kenney, o contrário. O deslocamento de aviões do Norte da Ilha para o Sul, ou vice-versa, demoraria um dia. Na região norte, devido ao mau tempo, as tropas aliadas gastariam um dia para localizar todo o comboio japonês, e na parte sul seria imediato.

O jogo é de soma zero, pois o *payoff* para a força japonesa é simplesmente o oposto para as forças aliadas. Levantados os dados, a matriz de *payoff* pode ser resumida na tabela abaixo:

¹⁰¹ Estratégia mista é aquela em que mais de uma ação pode ser tomada.

	Forças Japonesas	
Forças Aliadas	Navegar-Norte	Navegar-Sul
Busca Rota Norte	2 dias	2 dias
Busca Rota Sul	1 dia	3 dias
Matriz Payoff		

De acordo com os dados, se os aliados enviassem os seus aviões de reconhecimento para a rota certa, a escolhida pelos japoneses, existiriam duas possibilidades, a saber: no caso da rota escolhida ser a sul, as tropas aliadas teriam três dias para bombardear, porém, se fosse ao norte teriam dois dias, pois perderiam um dia localizando o comboio japonês devido o mau tempo. Se as rotas fossem divergentes, o pior caso para os aliados seria ter escolhido a rota sul e os japoneses a rota norte, pois, não encontrando o comboio japonês no sul levariam um dia para se deslocarem para o norte e mais um dia para localizarem o comboio japonês, devido o mau tempo, restando assim apenas um dia de bombardeio. Caso contrário, se o comboio japonês tivesse escolhido a rota sul e os aliados a rota norte, gastariam somente um dia para se deslocarem para o sul, tendo assim dois dias para bombardear os japoneses.

Esse modelo simplificado representa uma situação real e contem os elementos que foram relevantes para explicar a adoção da rota norte escolhida pelas tropas aliadas. Os japoneses sofreram grande baixa e, no primeiro dia de bombardeio, quase toda a frota japonesa havia sido destruída. A escolha assertiva adotada pelos aliados foi consequência do comportamento racional assumido pelos japoneses e pelos aliados ao efetuarem suas escolhas. Esse conflito ficou conhecido como a Batalha de Bismark e podemos observar na figura abaixo o mapa desse conflito, no qual, está tracejada a rota escolhida pelos japoneses.



Usando esse exemplo prático para uma melhor compreensão do critério minimax e da rota escolhida pelos aliados, consideremos a matriz de *payoff*, como segue:

Com relação às Forças Aliadas temos:

- Se escolher a rota norte, os *payoffs* possíveis são 2 e 2. Assim poderá garantir no mínimo 2 dia de bombardeio, ou seja, $\min \{2,2\} = 2$
- Se escolher a rota sul, os *payoffs* possíveis são 1 e 3. Assim poderá garantir no mínimo 1 dia de bombardeio, ou seja, $\min \{1,3\} = 1$
- O valor maxmin é $\max \{1,2\} = 2$

Com relação às Forças Japonesas temos:

- Se escolher a rota norte, os *payoffs* possíveis são 2 e 1. Assim poderá garantir que sofrerá bombardeio, no máximo, durante 2 dias, ou seja, $\max \{2,1\} = 2$
- Se escolher a rota sul, os *payoffs* possíveis são 2 e 3. Assim poderá garantir que sofrerá bombardeio, no máximo, durante 3 dias, ou seja, $\max \{2,3\} = 3$
- O valor minmax é $\min \{2,3\} = 2$

A Teoria dos Jogos adequou-se perfeitamente ao contexto militar. Na primeira década após a guerra, a RAND foi o centro de pesquisa matemática em Teoria dos Jogos. O

primeiro grupo de teóricos do Jogo, a trabalhar na RAND, foi recrutado do Painei de Matemática Aplicada. Esse grupo se envolveu com muitos projetos financiados pelos militares, inclusive um proposto por Dantzig.

Na primavera de 1948, Dantzig procurou von Neumann no Instituto de Estudos Avançados de Princeton para discutir a possibilidade de criar um projeto na Universidade para estudar profundamente os problemas de Programação Linear, Teoria dos Jogos e as estruturas matemáticas subjacentes. Esse projeto começou no verão de 1948, como experimental, com Albert W. Tucker, matemático de Princeton, como principal pesquisador desse grupo, junto com dois estudantes, Harold W. Kuhn e David Gale.

O trabalho desse grupo, como salienta Kjledsen:

Em seu primeiro trabalho sobre PL e Teoria dos Jogos, Kuhn, Tucker e Gale provaram o principal teorema da PL, o chamado teorema da dualidade. Esse resultado e sua conexão com o importante teorema minimax, em jogos de duas pessoas soma zero, foi interessante do ponto de vista matemático e mudou o status científico da PL. Essa conexão com a teoria dos jogos para a teoria de sistemas de inequações lineares e análise convexa ampliou o campo e fez a PL uma área de pesquisa matemática de potencial interesse. (KJLEDSEN, 2003, p. 139)¹⁰²

O grupo de Tucker publicou uma série de trabalhos, os quais constam em vários volumes dos *Annals of Mathematics Studies* (Anais de Estudos Matemáticos) sob o título *Contributions to the Theory of Games* (Contribuições para a Teoria dos Jogos). A cooperação entre a RAND e os projetos militares é refletida nessas publicações, uma vez que grande parte delas foram estudos realizados por projetos financiados pelos militares e a outra parte, escritos por pessoas da RAND.

A partir da década de 50, novos conceitos surgiram e vários prêmios Nobel foram concedidos a grandes nomes da Teoria dos Jogos. John Nash foi um deles. A sua tese de doutorado escrita em 1950, sob orientação de Tucker na Universidade de Princeton, continha as principais definições e propriedades daquilo que mais tarde seria chamado de “Equilíbrio de Nash”.

Em 2010, John Nash esteve na Faculdade de Economia e Administração da Universidade de São Paulo, durante o encontro da Sociedade Brasileira de Teoria dos Jogos, em comemoração aos 60 anos da Teoria do Equilíbrio de Nash. Esse encontro reuniu quatro

¹⁰² *In their first work on linear programming and game theory, Kuhn, Tucker, and Gale proved the main theoretical theorem in linear programming, the so-called duality theorem. This result and its connection to the important minimax theorem in two-person zero-sum games were interesting from a mathematical point of view and changed the scientific status of linear programming. Its connection to game theory, to the theory of systems of linear inequalities, and to convex analysis broadened the field and made linear programming an interesting potential mathematical research area.*

ganhadores do Prêmio Nobel: o próprio John Nash, laureado em 1994, o alemão Robert Aumann, ganhador em 2005, e Eric Maskin e Roger Myerson, premiados em 2007.

A partir das declarações dadas nesse evento, por dois desses notáveis teóricos da Teoria dos Jogos, podemos concluir, de acordo com Nash, que a Teoria dos Jogos continua sendo um campo de estudos dinâmico e os grandes avanços científicos verificados nos últimos 60 anos na área não deverão diminuir de ritmo. E complementou:

Os cientistas mais jovens envolvidos com a Teoria dos Jogos poderiam ter opiniões mais consistentes sobre as direções para onde o campo deverá seguir. Mas tenho uma opinião filosófica sobre isso, com base na história do progresso da ciência: as pesquisas continuarão, mas não sabemos se ela ainda se chamará Teoria dos Jogos. A maior complexidade levará a novas classificações, de forma semelhante ao que ocorreu com a bioquímica em relação à química. (PRÊMIOS ..., 2010)

Para Aumann (PRÊMIOS ..., 2010), “as ideias originais continuarão a brotar, mas, justamente por isso, é difícil saber para onde a Teoria dos Jogos poderá seguir em termos de novos modelos e novas aplicações”. O papel da computação na Teoria dos Jogos também é ressaltado por ele, cuja aproximação cada vez maior provocará uma modificação científica e conceitual em ambos os campos.

4.1 Aspectos Filosóficos e Metodológicos da Pesquisa Operacional

Os acontecimentos da Segunda Guerra Mundial criaram um mundo de circunstância adversa para os praticantes da ciência, que se viram envoltos com problemas de natureza desconhecida. O homem “dialoga com as coisas, com os seus semelhantes e, muitas vezes, consigo mesmo, procurando um ajuste intelectual com o contorno - ajuste indispensável para o bem viver. Esse diálogo mantido com a circunstância requer uma linguagem” (HEGENBERG, 1975, p. 1).

A linguagem indispensável com que se depararam os cientistas durante o período de guerra foi saber interpretar os acontecimentos, fazer indagações a respeito da natureza das coisas e das suas relações com as outras, e das suas qualidades. Tudo isso resultou em um sistema estritamente ligado a números e medidas. Assim, mensurar era atribuir número a um objeto obedecendo a certas restrições pré-estabelecidas e cuja intenção era explicar e prever os acontecimentos. A linguagem com essas características foi traduzida em um conjunto de métodos, chamado de PO, pois “é preciso um método de natureza sistemática, para salvaguardar as operações pelas quais nos movemos de fatos a ideias e de ideias a fatos que as provarão”. (DEWEY, 1959, p.167)

Para Miser (1993), os modelos ou métodos da ciência são descrições aproximadas da realidade, de que fazem parte todos os fenômenos do nosso universo que envolve a natureza, o homem, os artefatos do homem e suas interações. Os fenômenos trabalhados pela PO, a princípio, causaram estranheza pela sua natureza, porém foi possível construir modelos que os representassem, assim:

É um esforço para descobrir a regularidade de um fenômeno e associar essa regularidade com outro conhecimento, a fim de que o fenômeno possa ser modificado ou controlado, justamente como fazem outras pesquisas científicas. A diferença decorre dos fenômenos que são estudados, da matéria em análise. Em vez de estudar o comportamento dos elétrons, dos metais, do motor a gasolina, dos insetos ou dos homens, individualmente, a pesquisa operacional vê o que se passa, quando um complexo de homens e equipamentos executa o trabalho que lhe foi confiado. Um batalhão de soldados, uma esquadrilha de aviões, uma fábrica ou uma organização de vendas é mais do que um conglomerado de homens e máquinas: é uma atividade, um modelo de operação. Essas operações podem ser estudadas, suas regularidades determinadas e relacionadas com outras regularidades; podem, eventualmente, ser entendidas e, então modificadas e aperfeiçoadas. (MORSE, 1966, p. 117-118)

Os problemas eram submetidos à análise através dos processos mentais e dos métodos que estavam associados aos trabalhos de pesquisa das equipes envolvidas. O especialista

tentava, por meio de um processo de indução, encontrar um modelo que explicasse o fenômeno e, por dedução, procurava determinar qual seria o comportamento do sistema que mais se aproximava do seu objetivo, baseando-se na análise quantitativa para auxiliar o processo de decisão.

Os sucessos dessas aplicações se devem, de acordo com Miser (1993), às habilidades das equipes em relação à análise e avaliação de dados, ao estabelecimento das relações quantitativas e à constituição de hipóteses testáveis. Ele chama atenção para o fato de que a maioria da literatura sobre ciência faz o trabalho científico parecer que é produzido por espíritos desencarnados, deixando de falar sobre os variados repertórios de que se apropriam os pesquisadores para realizarem suas produções científicas. Esse aspecto raramente é incorporado a livros e artigos científicos.

A PO lida com problemas complexos do mundo real e, muitas vezes, depara-se com a necessidade de estimar as incertezas em suas previsões. Essas podem ser resultantes do comportamento humano, de modificações do meio ambiente ou de ações e reações de concorrentes. Mesmo em situações vulneráveis, o ato de pensar possibilita a escolha de meios alternativos eficazes.

As especulações filosóficas da PO vão ao encontro com as que o homem faz antes da realização de um ato, que é pensar reflexivamente, pois só assim poderá produzir a melhor ação. Pensar reflexivamente é uma capacidade que nos emancipa da ação rotineira, ou seja:

[...] o pensamento faz-nos capazes de dirigir nossas atividades com precisão e de planejar de acordo com fins em vista ou propósitos de que somos conscientes; de agir deliberada e intencionalmente a fim de atingir futuros objetos ou obter domínio sobre o que está, no momento, distante e ausente. Trazendo à mente as consequências de diferentes modalidades de ação, o pensamento faz-nos saber a quanta andamos ao agir. Converte uma ação puramente apetitiva, cega e impulsiva, em ação inteligente. (DEWEY, 1959, p. 26)

A filosofia é a investigação crítica e racional dos princípios relacionados ao mundo e ao homem e melhorar a condição humana através do planejamento é um dos seus objetivos. Para Ackoff¹⁰³, as práticas da PO e os debates teóricos dos quais participou contribuíram para a formação da sua base filosófica, pois eles desenvolveram princípios que favoreceram a sua prática reflexiva, constituindo um quadro para a sua prática profissional. Ele estava

¹⁰³ Russell Ackoff Lincoln (Filadélfia, 12 de fevereiro de 1919 - 29 de outubro de 2009), arquiteto e filósofo americano. Foi um teórico organizacional e professor emérito de Ciência da Administração na Wharton School, Universidade da Pensilvânia. Ele foi um pioneiro no campo da pesquisa operacional e professor de pesquisa operacional no Instituto Tecnológico Case, a primeira instituição de ensino superior a oferecer um curso de PO, de 1951 a 1964.

preocupado em estabelecer uma relação entre ciência e filosofia e foi na filosofia pragmática que encontrou essa sintonia.

Considera-se o artigo de Charles Sanders Peirce¹⁰⁴ intitulado “How to make our ideas clear”, publicado em 1878, como o primeiro esboço de uma teoria pragmática. O verdadeiro florescimento do pragmatismo como sistema e como método filosófico data do início do século XX e seus fundadores foram Charles Sanders Peirce, William James¹⁰⁵ e John Dewey¹⁰⁶. As nuances nessa visão filosófica podem ser atribuídas às divergências intelectuais dos seus fundadores.

Peirce dedicou grande parte da sua vida a questões ligadas à ciência, principalmente matemática e lógica. Em 1898, William James inaugurou o novo movimento pragmático em um discurso intitulado *Philosophical Conceptions and Pratical Results* (Concepções Filosóficas e Resultados Práticos) e, coube a Dewey conceber um pragmatismo ligado à pesquisa das questões sociais, de ordem moral e política.

O pragmatismo nasce como uma teoria relativa à prática da ciência, ou seja, ele propõe que o raciocínio seja guiado por métodos semelhantes ao da ciência, que incluem a observação do fenômeno, a formulação de hipóteses, testes e a revisão de teorias. Para Dewey (1959), a observação no trabalho científico não é somente para verificar uma ideia, mas também para criar um problema e, através deste, formular hipóteses. As observações não são consideradas como uma finalidade em si mesma, mas sempre como um meio de atingir um objetivo final.

Meios e fins são dois termos de uso corriqueiro no senso comum e Dewey (1978) os analisa primariamente como:

¹⁰⁴ Charles Sanders Peirce (Cambridge, 10 de setembro de 1839 – 19 de abril de 1914) licenciou-se em Ciências e doutorou-se em Química, em Harvard. Considerado um dos mais originais pensadores norte-americanos, Peirce deixou contribuições em múltiplas áreas do conhecimento: lógica, semiótica, astronomia, geodésia, matemática, teoria e história da ciência, econometria e psicologia.

¹⁰⁵ William James (Nova Iorque, 11 de janeiro de 1842 – 26 de agosto de 1910) foi um psicólogo e filósofo americano, com formação em medicina. Ele escreveu livros inflentes sobre psicologia, tendo como um de seus principais interesses o estudo científico da mente humana em um tempo em que a psicologia estava se constituindo como ciência.

¹⁰⁶ John Dewey (Burlington, Vermont, 20 de outubro de 1859 – 1 de junho de 1952) foi um filósofo e pedagogo americano que influenciou educadores de várias partes do mundo. Dewey é o nome mais célebre da corrente filosófica que ficou conhecida como pragmatismo, embora ele preferisse o nome instrumentalismo – uma vez que, para essa escola de pensamento, as idéias só têm importância desde que sirvam de instrumento para a resolução de problemas reais.

“[...] meios e fins aplicam-se primariamente à posição ocupada pelos diferentes atos no curso do desenvolvimento de uma atividade, e só secundariamente a coisas ou objetos. O fim, efetivamente, não é mais do que a última fase, o período terminal de uma atividade; os meios são as primeiras fases ou as fases que se têm de atravessar para que a atividade chegue ao seu termo final.” (DEWEY, 1978, p. 77).

Parece lícito afirmar que a ciência se apóia em pressupostos racionais, que sempre envolve comparações entre os meios alternativos e os fins almejados e, certamente, terá a eficiência como produto final. Racionalidade ou razão significa relação, adequação entre meios e fins. Para Dewey, meios e fins são uma constante em qualquer processo, pois:

Os fins fazem parte do processo em si, de modo que não são anteriores, externos, nem acrescentados às ações, mas fazem parte destas como antecipações de um desfecho sempre provisório do processo. Ao mesmo tempo, fins são meios que indicam uma direção, o que significa que todo fim é experimental e posto à prova na prática. (BELTRÁN, 2003, p. 55)

A relevância do pragmatismo para Churchman¹⁰⁷, Ackoff, Emery¹⁰⁸ e Beer¹⁰⁹ é ser uma corrente filosófica coerente, pois estabelece um princípio organizador e racional para as abordagens contemporâneas do pensamento sistêmico e da teoria geral dos sistemas. Os princípios do pensar e agir do homem são temas que foram abordados por vários filósofos. Um deles foi Spinoza, que escreveu sobre a maneira de pensar em seu livro intitulado “A Reforma do Entendimento Humano”. John Dewey enriqueceu a literatura mundial com algumas prescrições para o ato de pensar:

Daí a necessidade de buscar a razão das coisas, e de não aceitar passivamente a resposta do costume e da autoridade política. Que fazer? Desenvolver um método de pesquisa e de prova racional, que assentasse em base sólida os elementos essenciais das crenças tradicionais: desenvolver um método de pensar e de conhecer que a um tempo purificasse a tradição e lhe preservasse, inalterados, os valores

¹⁰⁷ Charles West Churchman (Filadélfia, Pensilvânia, 29 de agosto de 1913 – 21 de março de 2004) foi um filósofo e cientista de sistemas americano. Ficou conhecido pelos seus trabalhos nas áreas de PO e Análise de Sistemas, sendo um dos pioneiros a usar a abordagem sistêmica no ambiente de negócios.

¹⁰⁸ Frederick Edmund Emery, Fred nick (Narrogin, Austrália, 27 de agosto de 1925 - 10 de Abril de 1997) foi um psicólogo australiano. Ele foi um dos pioneiros na área de Desenvolvimento Organizacional e considerado um dos melhores cientistas sociais de sua geração.

¹⁰⁹ Antony Stafford Beer (Londres, 25 de setembro de 1926 – 23 de agosto de 2002) foi um teórico da PO e da gestão Cibernética. Ele começou estudar filosofia na University College London, porém, interrompeu seus estudos para servir ao exército britânico na Segunda Guerra Mundial. Durante a guerra trabalhou com PO e se deu conta das vantagens de sua aplicação no mundo dos negócios. Ele liderou o departamento de PO e Cibernética da United Steel.

morais e sociais; mas ainda que, purificando-os, lhes incrementasse o poder e autoridade. (DEWEY, 1959, p. 55)

Churchman, em seu livro “Introdução à Teoria dos Sistemas”, chama atenção para o fato de que o modo de pensar em nosso século é movido por uma psicologia diferente da que outrora animou a humanidade. “A nova visão da realidade, de que vimos falando, baseia-se na consciência do estado de inter-relação e interdependência essencial de todos os fenômenos – físicos, biológicos, psicológicos, sociais e culturais. [...] a concepção sistêmica vê o mundo em termos de relações e de integração” (CAPRA, 2006, p. 250, 260).

A palavra sistema criou modismo, a partir da segunda guerra, e podemos pensar que “os sistemas são constituídos de conjuntos componentes que atuam juntos na execução do objetivo global do todo” (CHURCHMAN, 1972, p. 27). Em contraposição ao pensamento cartesiano que visava à fragmentação, o sistêmico a transcende e inclui a interdisciplinaridade:

A concepção sistêmica vê o mundo em termos de relações e de integração. Os sistemas são totalidades integradas, cujas propriedades não podem ser reduzidas às de unidades menores. Em vez de se concentrar nos elementos ou substâncias básicas, a abordagem sistêmica enfatiza princípios básicos de organização. (CAPRA, 2006, p. 260)

A evolução de uma sociedade está atrelada às mudanças no sistema de valores, que serve de base a todas as suas manifestações, daí decorre a sua suprema importância para todas as ciências sociais, pois:

Os valores que inspiram a vida de uma sociedade determinarão sua visão de mundo, assim como as instituições religiosas, os empreendimentos científicos e a tecnologia, além das ações políticas e econômicas que a caracterizam. Uma vez expresso e codificado o conjunto de valores e metas, ele constituirá a estrutura das percepções, intuições e opções da sociedade para que haja inovação e adaptação social. (CAPRA, 2006, p. 182)

Para a PO, as organizações são vistas como sistemas humanos compreendidos por componentes interativos como subsistemas, processos e estruturas organizacionais. Essa estrutura estabeleceu um forte vínculo com a comunidade de negócios, auxiliando-a na tomada de decisões, o que a torna dependente desses sistemas de valores. Como afirma Capra (2006), qualquer análise dita isenta de valores dos fenômenos sociais baseia-se no pressuposto

tácito de um sistema de valores existente que está implícito na seleção e interpretação de dados.

Como o pragmatismo, a PO fundamenta-se em fenômenos consequentes, com a possibilidade de ação, onde o mundo das ideias é o cerne para organizar as observações e as experiências futuras. Para ambos, o futuro “não é uma mera palavra onde teorias, noções gerais, ideias racionais têm consequências para a ação: a razão, necessariamente, tem uma função construtiva” (Dewey, 2008, p. 125-126).

4.2 Considerações Finais

No primeiro capítulo é abordado o ideal do pensamento iluminista, que se objetiva através de um projeto civilizatório, onde a razão e o método científico são às únicas fontes de conhecimento válidas. Séculos depois, a ciência transformou o mundo com suas tecnologias, sem o homem “perceber nessa transição os efeitos duradouros que poderão ser inscritos na imagem do homem que a ciência molda” (BRONOWSKI, 1983, p.13).

Existe um consenso entre os estudiosos da sociedade humana que a imagem do homem moderno é representada pela sua racionalidade. Muitos filósofos entendem a modernidade como um grande processo de racionalização, contudo existe muita discussão sobre o que a constitui e, de acordo com o historiador Peter Burke (2009, p.165), “o conceito de modernidade é que ele é parte de um pacote, ou de uma mala, em que coisas demais foram colocadas e por isso a tampa não se fechou”.

Nesse investigar retroativo da modernidade ao século das luzes, pode-se constatar, através da história da PO, que a racionalidade que a modernidade instaura envolve atividades racionais, científicas e tecnológicas. Através da sua história também é possível resgatar um acervo rico de temas para discussões e reflexões no mundo atual. Alguns temas podem ser sugeridos, tais como: a importância da matemática aplicada, a interdisciplinaridade, a evolução da matemática aplicada através das interações entre resolução de problemas práticos e pesquisa, valorização da matematização com a globalização de procedimentos e métodos, a matemática como constituidora da racionalidade moderna, a modelagem matemática, como o conhecimento científico pode ser moldado pelos interesses políticos e sociais, ou seja, as pesquisas e as formulações matemáticas podem ser usadas para atender a muitos propósitos.

Outro fator preponderante na história da PO eram questões relativas às mudanças provocadas pelo conhecimento científico, em especial o matemático, nas organizações sociais

e militares durante e após o regime da Segunda Guerra Mundial. Essas mudanças aliadas à transferência de tecnologias de esforço militar para o planejamento social após a guerra mudou o curso da história.

Dada a importância do papel assumido pela matemática durante as guerras surge um novo campo de investigação, Matemática e Guerra. É um campo relativamente novo e, entre os dias 29 e 31 de agosto de 2002, foi realizado em Karlskrona, Suécia, o Encontro Científico Internacional sobre Matemática e Guerra (*Mathematics and War International Scientific Meeting*). Matemáticos, historiadores da Matemática e filósofos reuniram-se para discutir uma ampla variedade de questões, cada um expondo sua própria perspectiva sobre o tema “Matemática e Guerra”.

A maioria dessas contribuições, foram reunidas e publicadas, em 2003, em um livro intitulado “*Mathematics and War*”. Tinne Hoff Kjeldsen, historiador e filósofo matemático, foi um dos participantes desse encontro. Seu trabalho versou sobre a importância da Segunda Guerra Mundial para o surgimento de novas disciplinas de Matemática Aplicada e o tema envolvido foi sobre Pesquisa Operacional, Teoria dos Jogos, Programação Matemática, Teoria dos Sistemas de Inequações Lineares e Teoria de Convexidade.

Durante varias décadas, o envolvimento da ciência com a guerra tem provocado debates radicais sobre sua natureza e o papel assumido pela comunidade científica, no que diz respeito ao seu envolvimento com a guerra. Há uma consciência generalizada de que a matemática é uma das ciências provocadoras desse debate, devido a sua contribuição à indústria bélica e às estratégias de guerra. Essa relação suscita uma dupla interpretação: em um sentido pode-se questionar a importância da matemática para o armamento de guerra e, no sentido oposto, a importância dos armamentos de guerra para o desenvolvimento matemático. No primeiro caso, o fruto dessa relação é bastante evidente. A própria historia da PO mostra a importância da matemática no desenvolvimento das tecnologias bélicas.

No segundo caso, podemos constatar, também, com o regime que se configurou durante a Segunda Guerra Mundial. Foi um período de intenso desenvolvimento científico e tecnológico, com a presença massiva do governo federal americano no planejamento e financiamento da ciência. As universidades, como instituições, foram fortalecidas, pois eram os canais onde os contratos eram firmados com os cientistas de acordo com o planejamento e política científica. As indústrias também foram utilizadas com essa mesma finalidade. Vários projetos foram criados com esse propósito e o maior deles foi o projeto da construção da bomba atômica, o projeto Manhattan, o qual empregou 130.000 pessoas, em 1945.

Sabe-se que nenhuma dessas relações é excludente, e que a “[...] história não apresenta a matemática como um empreendimento diabólico, inseparavelmente associado com a guerra, e nem sugere [...] qualquer justificção ingênua da mesma” (MIGUEL, 2006, p. 9). Essa mentalidade bélica, argumenta Miguel, “teria constituído o principal fator que teria levado ao surgimento histórico do matemático profissional e do professor de matemática, bem como ao surgimento da matemática e da educação matemática como práticas sociais autônomas de pesquisa” (MIGUEL, 2006, p. 1).

A intervenção do homem nos processos sociais é orientada pela inteligência humana e, de acordo com Dewey, na interpretação de Beltrán, ela deixa de ser um atributo individual para se constituir em um problema social, pois, é “o recurso de que nossa espécie é dotada para assegurar sua sobrevivência” (BELTRÁN, 2003, p. 50). Sob essa perspectiva, usá-la racionalmente, significa dizer que: a evolução cultural, social e científica garantirá a evolução biológica das espécies.

Referências

- ARENDDT, H. **A Condição Humana**. 10. ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2004.
- ACKOFF, R. L.; SASIENI, M. W. **Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1971.
- BARROS, G. **Racionalidade e Organizações: Um Estudo sobre o Comportamento Econômico na Obra de Herbert A. Simon**. 2004. Tese (Mestrado em Economia) – Departamento de Economia da Faculdade de Economia, Administração e Ciências Contábeis, São Paulo: Universidade de São Paulo. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/.../Racionalidade_e_Organizacoes.pdf>. Acesso em 01 nov. 2010.
- BELTRÁN, F. **Democracia Como Vida**, p. 49-59. In: SEBARROJA, J. C. (Org.). **Pedagogias do Século XX**. Tradução Fátima Murad. Porto Alegre: Artmed, 2003.
- BERLINSKI, D. **O Advento do Algoritmo: a idéia que governa o mundo**. Tradução Leila Ferreira de Souza Mendes. São Paulo: Globo, 2002.
- BICUDO, I. **Os elementos/Euclides**. São Paulo: UNESP, 2009.
- BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas**. São Paulo: UNESP, 1999.
- BICUDO, M. A. V. (Org.); BORBA, M. C. (Org.) **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2005.
- BLOCH, M. **Apologia da História: ou O Ofício de Historiador**. Tradução André Telles. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2001.
- BREGALDA, P. F.; OLIVEIRA, A. A. F.; BORNSTEIN, C. T. **Introdução à Programação Linear**. 2. ed. Rio de Janeiro: Campus Ltda, 1988.
- BRONOWSKI, J. **A Escalada do Homem**. Tradução Núbio Negrão. 2º ed. São Paulo: Martins Fontes/Editora Universidade de Brasília, 1983.
- BURKE, P. **O Historiador Como Colunista**. Tradução Roberto Muggiati. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2009.
- CAPRA, F. **O Ponto de Mutação**. Tradução Álvaro Cabral. São Paulo: Cultrix, 2006.
- CAMPBELL, V. **How Rand Invented The Postwar World**, 2004. Disponível em: <<http://www.rand.org/content/dam/rand/www/external/about/history/Rand.IT.Summer04.pdf>>. Acesso em 12 jan. 2011.
- CHURCHMAN, C. W. **Introdução à Teoria dos Sistemas**. Tradução Francisco M. Guimarães. 2. ed. Petrópolis, RJ: Editora Vozes Ltda, 1972.

DANTZIG, G. B. **Linear Programming**, p. 19-31. In: LENSTRA, J. K (Org.); KAN, A. H. G. R. (Org.); SCHRIJVER, A. (Org.). **History of Mathematical Programming**. New York: Elsevier Science Publishing Company, 1991.

D'AMBROSIO, U. **A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática**, p. 97-115. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Unesp, 1999.

DAVIS, M. D. **Teoria dos Jogos: uma introdução não técnica**. Tradução Leonidas Hegenberg e Octanny Silveira da Mota. São Paulo: Editora Cultrix, 1970.

DEWEY, J. **Como Pensamos**. Tradução Haydée de Camargo Campos. 3. ed. São Paulo: Companhia Editôra Nacional, 1959.

DEWEY, J. **Vida e Educação**. Tradução Anísio S. Teixeira. 10. ed. São Paulo: Edições Melhoramentos, 1978.

DEWEY, J. **O Desenvolvimento do Pragmatismo Americano**. Tradução de Cassiano Terra Rodrigues. Revista Eletrônica de Filosofia, v. 5, n. 2, p. 119-132, Jul 2008.

DUREN, P.; ASKEY, R. A.; EDWARDS H. M.; MERZBACH U. C. **A Century of Mathematics in America**. v. 3. American Mathematical Society Press, 1989.

ELLENRIEDER, A. **Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro: Almeida Neves, 1971.

FERRIS, T. **O Despertar na Via Láctea**. Tradução de Waltensir Dutra. Rio de Janeiro: Campus, 1990.

FORTUN, M.; SCHWEBER, S. S. **Scientists and the Legacy of World War II: The Case of Operations Research (OR)**. Social Studies of Science, v. 23, n. 4, p. 595-642, nov. 1993.

GASS, S. I. **The First Linear-Programming Shoppe**. Informs, n. 1, v. 50, p. 61-68, Jan-Feb. 2002.

GLICK, S. P.; CHARTERS, L. I. **War, Games and Military History**. Journal of Contemporary History, v. 18, n. 4, p. 567-582. Oct. 1983.

GOLDSTINE, H. H; WAGNER, E. P. **Scientific Work of J. von Neumann**. American Association for the Advancement of Science, v. 125, p. 683-684, abr. 1957.

GOMES, M. L. M. **Quatro visões iluministas sobre a educação matemática: Diderot, D'Alembert, Condillac e Condorcet**. 2003. Tese (Doutorado em Educação) – Departamento de Educação da Faculdade de Educação. Campinas: Universidade Estadual de Campinas. Disponível em: <<http://www.cutter.unicamp.br/document/?code=vtls000297451&fd=y>>. Acesso em: 01 nov. 2010.

HALMOS, P. R. **The Legend of John von Neumann**. American Mathematical Monthly. v. 80, n. 4, p. 382-394. Apr. 1973.

- HEGENBERG, L. **Significado e Conhecimento**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1975.
- HENDERSON, L. J. **Organização para Pesquisa Operacional**, p. 86-98. In: TREFETHEN, F. N. (Org.); McCLOSKEY, J. F. (Org.). **Pesquisa Operacional: como instrumento de gerência**. Tradução Léo Magarinos de Souza Leão. Rio de Janeiro: USAID, 1966.
- HINDRICHS, G. **Toward a Philosophy of Operations Research**. *Philosophy of Science*, Vol 20, p. 59-66, jan. 1953.
- KIRBY, M.; ROSENHEAD, J. **IFORS' Operational Research Hall of Fame Russell L. Ackoff**. *International Transactions in Operational Research*, v. 12, p. 129-134, Jan. 2005. Disponível em: <http://www3.interscience.wiley.com/cgi-bin/fulltext/118662847/PDFSTART>>. Acesso em 17 jun. 2010.
- KJELDSEN, T. H. **New Mathematical Disciplines and Research in the Wake World War II**, p. 126-152. In: Booß-Bavnbek (Org.); Høyrup, J. (Org.). **Mathematics and War**. Dinamarca: Birkhäuser Basel, 2003.
- LACROIX, A. **A Razão: análise da noção, estudo de textos: Platão, Aristóteles, Kant, Heidegger**. Tradução Márcio Alexandre Cruz. Petrópolis, RJ: Vozes, 2009.
- LÉVY, P. **A Conexão Planetária: O mercado, o ciberespaço, a consciência**. Tradução Maria Lúcia Homem; Ronaldo Entler. São Paulo: Editora 34, 2001.
- MACHADO, N. J. **Educação: projetos e Valores**. São Paulo: Escrituras Editora, 2000.
- _____. **Cidadania e Educação**. São Paulo: Escrituras Editora, 1997.
- _____. **Matemática e Educação: Alegorias, tecnologias e temas afins**. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2002.
- _____. **Matemática e Língua Materna: análise de uma impregnação mútua**. 4. ed. São Paulo: Cortez, 1998.
- McARTHUR, C. W. **Operations Analysis in the U.S. Army Eighth Air Force in World War II**, *History of Mathematics*, v. 4. Chicago: The University of Chicago Press, 1951.
- MIGUEL, A. **Pesquisa em Educação Matemática e mentalidade bélica**. *Bolema*, Rio Claro, n. 25, p. 1-16, 2006.
- MINSKY, M. **A Sociedade da Mente**. Tradução Wilma Ronald de Carvalho. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989.
- MIROWSKI, P. **Machine Dreams: economics becomes a cyborg science**. New York: Cambridge University Press, 2002.
- _____. **Cyborg Agonistes: Economics Meets Operations Research in Mid-Century**. *Social Studies of Science*, v. 29, p. 685-718, oct. 1999.

MIROWSKI, P.; SENT, E. **Science Bought and Sold: Essays in Economics of Science**. Chicago: The University of Chicago Press, 2002.

MISER, H. J. **A Foundational concept of science appropriate for validation in operational research**. European Journal of Operational Research, n. 66, p. 204-215, 1993.

MORDER, J.; ELMAGHRABY, S. **Handbook of Operations Research: Foundations and Fundamentals**. New York: Litton Educational, 1978.

MORGENSTERN, O. **The Collaboration Between Oskar Morgenstern and John von Neumann on the Theory of Games**. Journal of Economic Literature, v. 14, n. 3, p. 805-816. Sep. 1976.

MORGENSTERN, O. **Prefácio**. In: DAVIS, M. D. **Teoria dos Jogos: uma introdução não técnica**. Tradução Leonidas Hegenberg e Octanny Silveira da Mota. São Paulo: Editora Cultrix, 1970. p. 11-13.

MORSE, P. M. **O Progresso da Pesquisa Operacional**. In: TREFETHEN, F. N. (Org.); McCLOSKEY, J. F. (Org.). **Pesquisa Operacional: como instrumento de gerência**. Tradução Léo Magarinos de Souza Leão. Rio de Janeiro: USAID, 1966. p. 117-134.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Biographies Warren Weaver**. School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland, August 2005. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Weaver.html>. Acesso em: 17 jun. 2010.

POSTMAN, N. **Tecnopólio: a rendição da cultura à tecnologia**. Tradução de Reinaldo Guarany. São Paulo: Nobel, 1994.

Prêmios Nobel discutem Teoria dos Jogos em São Paulo. [S.l.], 2010. Disponível em: <http://noticias.uol.com.br/ultnot/cienciaesauade/ultimas-noticias/2010/08/04/premios-nobel-discutem-teoria-dos-jogos-em-sao-paulo.jhtm>. Acesso em 10 jan. 2011.

ROUANET, S. P. **Mal-estar na Modernidade: ensaios**. 2. ed. São Paulo: Companhia das Letras, 1993.

RUBINSTEIN, A. **Comments on The Interpretation of Game Theory**. The Econometric Society, v. 59, n. 4, p. 909-924. Jul. 1991.

SANTOS, B. S. **A Crítica da Razão Indolente: Contra o desperdício da experiência**. São Paulo: Cortez, 2002.

SIMON, H. A. **The Shape of Automation: for Men and Management**. New York: Harper & Row, 1965.

TEIXEIRA, A. **Bases da Teoria Lógica de Dewey**. Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos, Rio de Janeiro, v. 23, n. 57, p. 3-27. jan-mar 1955.

TOFFLER, A. F. **O Choque do Futuro**. Tradução de Eduardo Francisco Alves. Petrópolis, RJ: Vozes Ltda, 1970.

TREFETHEN, F. N. **História da Pesquisa Operacional**, p. 27-57. In: TREFETHEN, F. N. (Org.); McCLOSKEY, J. F. (Org.). **Pesquisa Operacional: como instrumento de gerência**. Tradução Léo Magarinos de Souza Leão. Rio de Janeiro: USAID, 1966.

VAINFAS, R. **Os Protagonistas Anônimos da História: micro-história**. Rio de Janeiro: Campus, 2002.

von NEUMANN, J.; MORGENSTERN, O. **The Theory of Games and Economic Behavior**. Princeton: Princeton University Press, 1953.

ANEXOS

ANEXO A – Dimensionamento dos comboios¹¹⁰

O problema

- ✓ Navios navegando sozinhos eram alvos fáceis.
- ✓ A solução encontrada foi o deslocamento em comboios.
- ✓ Para protege-los, navios de guerra acompanhavam a viagem.
- ✓ Mas, um número não adequado para esta proteção, significou muitas vezes, perdas enormes.



A questão era: como garantir um suprimento de necessidades através do atlântico, desde os EUA até a Inglaterra?



¹¹⁰ Problema extraído da apostila, Introdução sobre PO, elaborada pelo Prof. Dr. José Arnaldo Barra Montevechi para o curso MBA da Engenharia de Produção. O Prof. Dr. José Arnaldo Barra Montevechi é engenheiro mecânico e doutor pela Universidade de São Paulo. Tem experiência na área de Engenharia de Produção, atuando principalmente nos seguintes temas: engenharia econômica, simulação, otimização, simulação de Monte Carlo e Pesquisa Operacional.

Os comboios



- ✓ Em 42, para um comboio de 40 navios mercantes, eram necessários cerca de 6 navios de guerra para a sua proteção.
- ✓ O problema era que o número destes navios de proteção era limitado.



O problema



- ✓ O desafio que se colocava era: *pode-se diminuir o número de perda de navios mercantes, sem um aumento demasiado nos navios de proteção?*
- ✓ A única variável que podia ser alterada era o número de navios no comboio.
- ✓ Uma equipe estudou o problema e verificou que o tamanho do comboio tinha a ver com o número de perdas.

Dados de 41 a 42

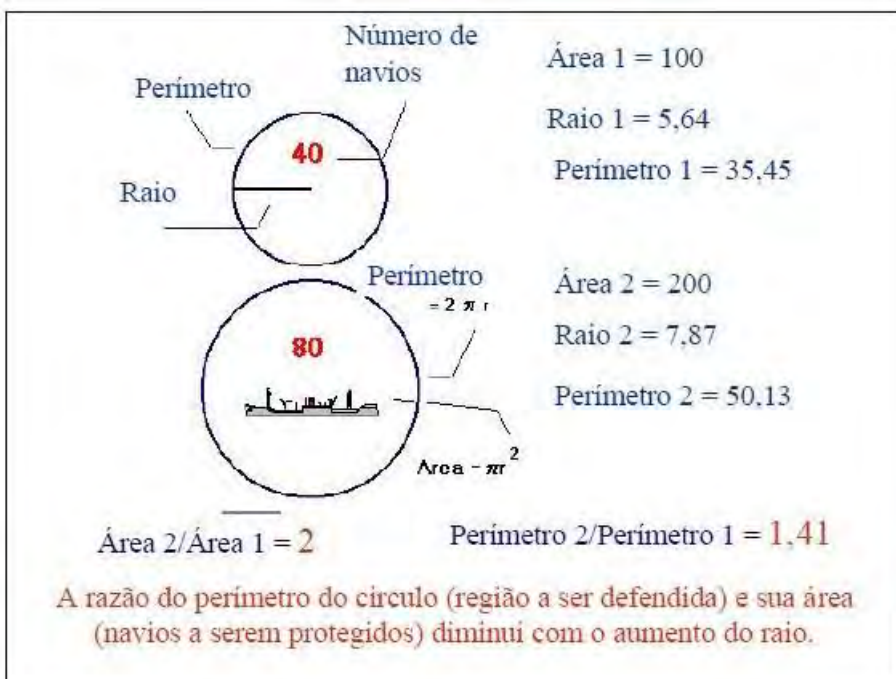
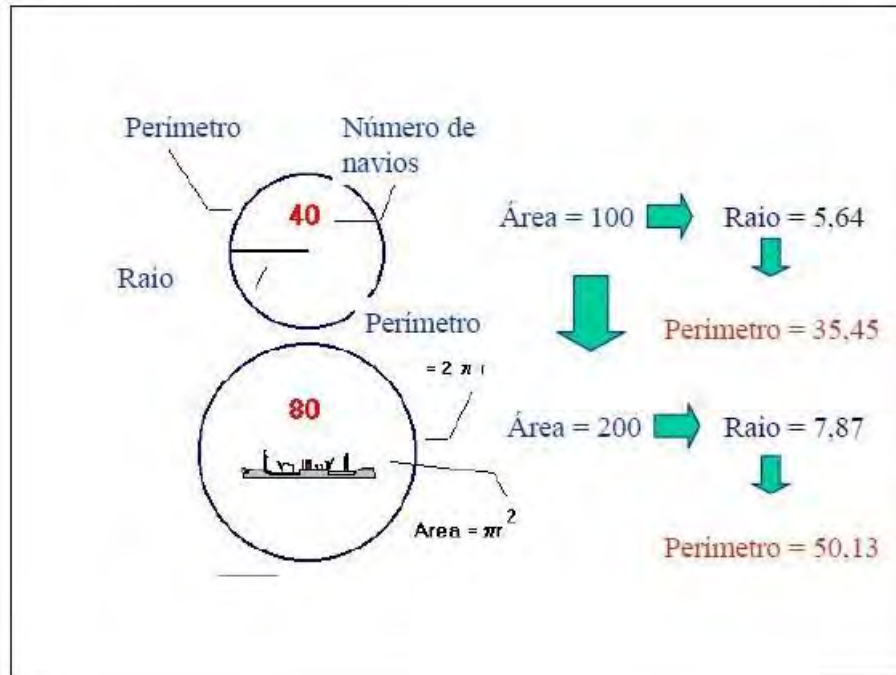


- ✓ < 45 navios no comboio, a perda média era de 2,6%;
- ✓ > 45 navios no comboio, a perda média era de 1,7%;
- ✓ O número de navios afundados continuava praticamente o mesmo, para um número praticamente igual de navios de proteção.

Qual a explicação?

A questão era o perímetro de defesa necessário para o comboio.





O que significou para os ingleses?

- ✓ Um comboio maior era melhor.
- ✓ Um número maior de navios poderiam ser protegidos sem um aumento demasiado nos navios de proteção.
- ✓ Um exemplo claro de melhor utilização de recursos.
- ✓ Este tem sido um exemplo de busca de uma utilização ótima para recursos limitados.



ANEXO B – As Sociedades de Pesquisa Operacional no Mundo

THE HISTORY, NATURE, AND USE OF OPERATIONS RESEARCH 15

TABLE 1. THE OPERATIONS RESEARCH SOCIETIES OF THE WORLD
(The societies listed are those adhering to the International Federation of
Operational Research Societies in 1974.)

Country	Society	Date Founded	Date Joined IFORS
Argentina	Sociedad Argentina de Investigación Operativa	1960	1962
Australia	Australian Operational Research Society ¹	1959	1960
Belgium	Société Belge pour l'Application des Méthodes Scientifiques de Gestion ²	1958	1960
Brazil	Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional	1969	1969
Canada	Canadian Operational Research Society	1958	1960
Denmark	Dansk Selskab for Operationanalyse	1962	1963
Finland	Suomen Operatiotutkimusseura Oy	1973	1975
France	Association Française pour la Cybernétique Economique et Technique ³	1956	1959
Germany	Deutsche Gesellschaft für Operations Research	1961	1962
Greece	Hellenic Operational Research Society	1963	1966
India	Operational Research Society of India	1957	1960
Ireland	Operations Research Society of Ireland	1965	1966
Israel	Operations Research Society of Israel	1966	1969
Italy	Associazione Italiana di Ricerca Operativa	1961	1962
Japan	Operations Research Society of Japan	1957	1961
South Korea	Operations Research Society of Korea	1970	1972
Mexico	Asociación Mexicana de Investigación de Operaciones y Administración Científica	1964	1966
Netherlands	Sectie Operationele Research	1958	1960
New Zealand	Operational Research Society of New Zealand	1964	1970
Norway	Norsk Operasjonanalyseforening	1959	1960
Spain	Sociedad Española de Investigación Operativa	1962	1963
South Africa	Operations Research Society of South Africa	1969	1973
Sweden	Svenska Operationsanalyseforeningen	1959	1960
Switzerland	Schweizerische Vereinigung für Operations Research	1961	1963
United Kingdom	Operational Research Society ⁴	1948	1959
United States	Operations Research Society of America	1952	1959
USSR	Technical Committee on Operations Research ⁵	1970	1972

¹From 1959 to 1972: The Australian Joint Council for Operational Research.

²From 1958 to 1962: a part of the Belgian Statistics Society.

³From 1956 to 1964: Société Française de Recherche Opérationnelle.

⁴From 1948 to 1953: Operational Research Club.

⁵A part of the Computer Center of the Academy of Sciences.

Notes: Czechoslovakia adheres to the federation through the Economic-Mathematical Commission of the Czechoslovak Academy of Sciences. The Institute of Management Sciences and the Mathematical Programming Society adhere to the federation as "kindred societies." The Airline Group of IFORS, a special-interest group devoted to operations research on the problems of the world's airlines, also adheres to the federation.

For current names and addresses of officials of these societies, see a recent issue of the federation's journal, *International Abstracts in Operations Research*.

ANEXO C – Jornais de Pesquisa Operacional no Mundo

THE HISTORY, NATURE, AND USE OF OPERATIONS RESEARCH 17

TABLE 2. THE OPERATIONS RESEARCH JOURNALS OF THE WORLD.

Journal	Published by	Date Founded
<i>Operational Research Quarterly</i>	Operational Research Society (UK)	1950
<i>Operations Research</i>	Operations Research Society of America	1952
<i>Naval Research Logistics Quarterly</i>	U.S. Office of Naval Research	1954
<i>Management Science</i>	The Institute of Management Sciences	1954
<i>Revue Française d'Automatique, Informatique, Recherche Opérationnelle</i> ¹	Association Française pour la Cybernetique Économique et Technique	1956
<i>Zeitschrift für Operations Research</i> ²	Deutschen Gesellschaft für Operations Research	1956
<i>Journal of the Operations Research Society of Japan</i>	Operations Research Society of Japan	1957
<i>Cahiers du Centre d'Études de Recherche Opérationnelle</i>	Centre d'Études de Recherche Opérationnelle, Brussels	1959
<i>Revue Belge de Statistique d'Informatique et de Recherche Opérationnelle</i>	Société Belge pour l'Application des Méthodes Scientifiques de Gestion and Société Belge de Statistique	1961
<i>Metra</i>	Metra Group, Paris	1962
<i>INFOR</i> ³	Canadian Operational Research Society and the Canadian Information Processing Society	1963
<i>Opsearch</i>	Operational Research Society of India	1964
<i>Interfaces</i>	The Institute of Management Sciences and the Operations Research Society of America	1971
<i>Ricerca Operativa</i>	Franco Angeli, editore, Milan, Italy	1971
<i>New Zealand Operational Research</i>	Operational Research Society of New Zealand	1973

¹During its first ten years, this journal was named the *Revue Française de Recherche Opérationnelle*, and was published by the Société Française de Recherche Opérationnelle, an organization that preceded the one listed above.

²This journal was started in 1972 as the successor to *Unternehmensforschung*, which was founded in 1956. Another journal, *Ablauf- und Planungsforschung*, began publication in 1960, but ceased publication about 1972.

³Before 1971 this journal was the *Journal of the Canadian Operational Research Society*.

Note: This table lists only journals that center most of their attention on operations research.

TABLE 3. SOME JOURNALS OF SIGNIFICANT INTEREST TO OPERATIONS RESEARCH WORKERS.

Journal	Published by	Date Founded
<i>The Engineering Economist</i>	Engineering Economy Division, American Society for Engineering Education	1955
<i>International Journal of Production Research</i>	Taylor and Francis Ltd., London	1961
<i>Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa</i> ¹	Instituto de Investigación Operativa y Estadística, Consejo Superior de Investigaciones Estadísticas, Madrid	1963
<i>Journal of Applied Probability</i>	Applied Probability Trust and the London Mathematical Society	1964
<i>Transportation Science</i>	Transportation Science Section, Operations Research Society of America	1967
<i>Transportation Research</i>	Pergamon Press, New York	1967
<i>Socio-Economic Planning Sciences</i>	Pergamon Press, New York	1967
<i>Technological Forecasting and Social Change</i>	American Elsevier, New York	1969
<i>Industrial Engineering</i> ²	American Institute of Industrial Engineers	1969
<i>AIE Transactions</i> ²	American Institute of Industrial Engineers	1969
<i>Policy Sciences</i>	American Elsevier, New York	1970
<i>Decision Sciences</i>	American Institute for Decision Sciences	1970
<i>The Bell Journal of Economics and Management Science</i>	American Telephone and Telegraph Co.	1970
<i>Discrete Mathematics</i>	North-Holland, Amsterdam	1971
<i>Mathematical Programming</i>	Mathematical Programming Society	1971
<i>Networks</i>	Interscience, New York	1971
<i>IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics</i> ³	IEEE Systems, Man, and Cybernetics Society	1971
<i>Stochastic Processes and their Applications</i>	North-Holland, Amsterdam	1973
<i>OMEGA</i>	Pergamon Press, New York	1973
<i>Computers and Operations Research</i>	Pergamon Press, New York	1974
<i>Policy Analysis</i>	University of California Press, Berkeley, California	1975
<i>Mathematics of Operations Research</i>	The Institute of Management Sciences and the Operations Research Society of America	1976

¹ From 1950 through 1963 this journal was named *Trabajos de Estadística*.

² A predecessor, the *Journal of Industrial Engineering*, was published between 1949 and 1968.

³ A predecessor, the *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics*, was published between 1965 and 1970.

Note: This table contains an arbitrary selection of journals published in western languages. For others, see the references for later chapters in this handbook, and issues of *International Abstracts in Operations Research*.

ANEXO D - Entrevista com o Prof. Dr. Bráulio Coelho Ávila

Re: PO-Viviane

De:

Bráulio Coelho Ávila



Não mostrar mais esta mensagem

[Cancelar](#) [Continuar](#)

Ola Viviane,

com relação à sua afirmação, eu gostaria de colocar que a PO, hoje em dia, também não utiliza somente modelos matemáticos. Ela, por exemplo, faz uso de redes neurais e algoritmos genéticos. Assim, também não há garantia de solução ótima.

Com relação à sua pergunta, eu posso afirmar que os modelos matemáticos são de grande valia para a área de IA. Atualmente, em minhas pesquisas com alunos de mestrado e doutorado estou utilizando a Análise Formal de Conceitos.

Análise Formal de Conceitos, do inglês, Formal Concept Analysis, é um ramo da matemática baseada na teoria dos conjuntos ordenados, particularmente na teoria dos reticulados, que utiliza matemática aplicada no estudo de conceitos e hierarquias conceituais. ([Bernhard Ganter and Rudolf Wille](#), Formal Concept Analysis - Mathematical Foundations. Springer-Verlag, 1998.)

Formal Concept Analysis (henceforth FCA) was developed by Ganter and Wille in Darmstadt (Ganter & Wille, 1998). It is an attempt to give a formal definition of the notion of a 'concept', within the boundaries of a model-theoretic framework.

Usually, research on concepts starts with an intuitive notion of existing, everyday concepts, and then tries to find characterisations of the objects belonging to that concept, for instance in terms of necessary and sufficient conditions. FCA takes a different stance, and tries to give a formal notion of the nature of concepts, independent of any particular concepts.

Veja o link abaixo para mais informações sobre o uso de FCA.

<http://www.uprise.org.uk/fca/fca.html>

A FCA seria um bom tema de estudos para o pessoal da matemática, pois é algo muito novo (1998) e tem muita aplicação no mundo real.

Caso exista mais questões não hesite em me contactar.

Abraços,

Bráulio

ANEXO E - Pesquisa Operacional nas Universidades Brasileiras

UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas (SP)

Desenvolve, desde 1975, aplicações de modelos de simulação no planejamento de recursos hídricos (Faculdade de Engenharia Civil) e de P.O na agricultura, formando um grupo de consultores independentes (UNISOMA) e vários convênios com empresas como a PETROBRÁS, ELETROBRÁS, TELEBRÁS e IBM, dentre outras.

INPE - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (SP)

Criou cursos de pós-graduação, a partir de 1978, em várias linhas, dentre elas: o desenvolvimento de softwares, pesquisas relacionadas à inteligência artificial e P.O (otimização combinatória, aplicada em áreas da Coordenação de Observação da Terra, processos estocásticos e simulação). Utiliza os resultados destas pesquisas, por exemplo, em trabalhos de roteamento de distribuição de água para comunidades do Ceará (Governo do Estado), estudos de confiabilidade do primeiro satélite brasileiro, por meio de simulação, e otimização dos processos de operação de fábricas de circuitos impressos.

ITA - Instituto Tecnológico da Aeronáutica (SP)

Desde 1961, mantém cursos de pós-graduação em Eng^a da Produção e, a partir de 1973, em P.O., desenvolvendo processos estocásticos e planejamento da produção aplicados às áreas de planejamento energético, transportes aéreos e planejamento da produção de empresas, como a EMBRAER.

IME - Instituto Militar de Engenharia

A P.O é parte do curso de Eng^a de Sistemas. O Instituto relaciona-se com a Marinha, o Exército e com diversas empresas, aplicando suas pesquisas em projetos nas áreas de comunicação via satélite, problemas de localização e de roteamento (otimização) e de qualidade em sistemas (gestão em Qualidade Total e qualidade de softwares).

USP - Universidade de São Paulo (SP)

Mantém cursos de P.O em nível de pós-graduação desde a década de 60. Os principais núcleos de P.O estão na Escola Politécnica (Departamento de Eng^a da Produção, Eng^a Naval e Eng^a de Transportes), Faculdade de Economia e Administração e Instituto de Matemática e Estatística (Centro de Computação e Matemática Aplicada). Relaciona-se com empresas

como a INFRAERO, MARINHA, DERSA e DOCAS, além de atuar junto aos mercados financeiros e Bolsa de Valores (bolsa de mercado futuro, através de simulação, cenários e análises de risco).

UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro (RJ)

A COPPE (Coordenação dos Programas de Pós-graduação de Engenharia) criou o Programa de Eng^a da Produção em 1967, com as áreas de Gerência da Produção e de Pesquisa Operacional. Os Programas de Eng^a de Sistemas, Computação, Administração, Eng^a de Transportes e o Instituto de Matemática também incluem a P.O. . As áreas de concentração teórica destes grupos são: programação matemática, grafos, combinatória, aplicações estatísticas, simulação, otimização, ciências da computação (desenvolvimento de softwares e algoritmos). A COPPE relaciona-se com diversas empresas públicas (Telerj, Cepel, governos estaduais) e privadas (IBM). Sua contribuição teórica ao desenvolvimento da P.O pode ser atestada pelo número de Teses defendidas (331, até 1992).

PUC - Pontifícia Universidade Católica (RJ)

Inclui a P.O em seus cursos de Eng^a Industrial, Eng^a Elétrica, Informática, Eng^a da Produção e de Sistemas. As aplicações estão nas áreas de finanças (análises de investimentos de risco e mercado de capitais), gerência da produção (logística, localização, planejamento empresarial e controle de qualidade) e na área de transportes (redes, planejamento de operações). Desenvolve os aspectos metodológicos, como a modelagem, para problemas de grande porte, na área de programação matemática, bem como estudos de previsão (redes neurais), de análise de séries temporais e de inteligência artificial nos processos de decisão. Relaciona-se com diversas empresas, como a PETROBRÁS, Cia. Vale do Rio Doce, DATAPREV, MBR, Estaleiro Mauá, Rede Globo, Bamerindus e Brahma.

UFV - Universidade Federal de Viçosa (MG)

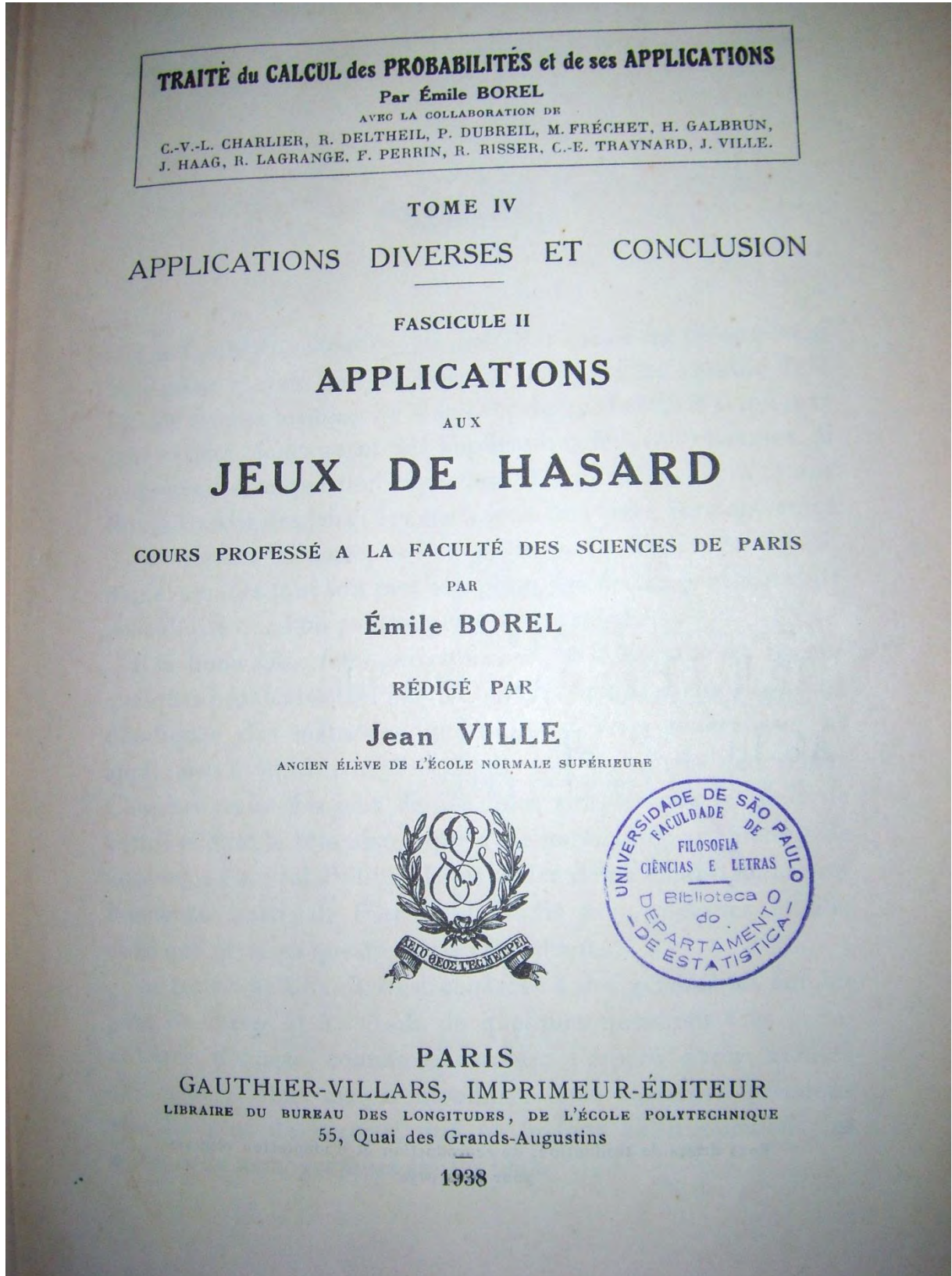
A P.O desenvolveu-se, a partir dos anos 60, com a criação da disciplina de Programação Linear a cargo do Departamento de Matemática, no curso de mestrado em Economia Rural. Com a aquisição do primeiro computador, na década de 70, disciplinas de Programação Linear e Não-Linear foram incorporadas também a outros cursos (Eng^a Florestal, de Alimentos, Eng^a Agrícola e de Zootecnia). Nos anos 80, foi criado o curso de graduação em Informática e novas disciplinas de P.O foram incluídas nos diversos cursos de graduação. A UFV desenvolveu sistemas de Programação Linear e Otimização em Redes (PROL, PROLIN - para microcomputadores, e REDE) para aplicação em problemas de localização, tipo e

tamanho de baterias de fornos para carvão vegetal, planejamento florestal, avaliação genética de espécies, gerenciamento de laticínios e para atividades de controle na central de processamento de dados, dentre outras.

Outras Universidades

Muitas outras Instituições brasileiras mantêm cursos de graduação e de pós-graduação em que as aplicações das técnicas de P.O são enfatizadas. É o caso da U.F. de Juiz de Fora, que criou o Grupo de Estudos de Simulação, que atua em análises de impacto por simulação; Núcleo de Pesquisas Econômicas, atuando em análises e previsões da produção industrial de M.G., através de séries temporais. A Faculdade de Eng^a Elétrica desenvolve com a EMBRAPA softwares para a agropecuária e um projeto de informatização da pecuária leiteira (técnicas de análise de Cluster; para classificar dados de questionários, entrevistas e bases de dados da EMBRAPA). A U.F. do Ceará atua junto a diversas empresas de petróleo, energia, telecomunicações e siderurgia, dentre outras. Na área de alimentos, desenvolve com a FRUTOP um sistema de otimização da produção, atualizando o modelo através da geração de dois cenários mensais, visando determinar a alocação de máquinas, quantidade matéria-prima, dimensionamento e divisão da mão-de-obra, por turnos e por máquina, e planejamento da produção, por produto e por máquina.

ANEXO F – Teorema de von Neumann in *Traité du Calcul des Probabilités et de ses Applications*



entre n manières distinctes de conduire son jeu, soient A_1, A_2, \dots, A_n , et que B ait le choix entre les manières B_1, B_2, \dots, B_m . A chaque choix de A et de B correspondra pour B une espérance mathématique bien définie, soit a_{ij} l'espérance de B si A joue suivant la règle A_i et que B joue suivant la manière B_j .

Si A et B, au lieu de se tenir à une manière de jouer toujours la même, affectent à ces manières des probabilités choisies à l'avance, soient

$$\begin{array}{llll} x_1, & x_2, & \dots, & x_n \text{ pour A,} & x_i \geq 0, & \Sigma x_i = 1; \\ X_1, & X_2, & \dots, & X_m \text{ pour B,} & X_j \geq 0, & \Sigma X_j = 1; \end{array}$$

l'espérance mathématique de B sera

$$(1) \quad G = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i X_j.$$

A ayant réparti ses probabilités d'une certaine façon, soit

$$(x) = x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_n$$

son choix, le gain moyen de B aura pour maximum l'expression

$$\text{Max}_X G$$

donc, par un choix convenable de (x) , A pourra agir de manière que, quel que soit le comportement de B, le gain moyen G de ce dernier soit limité par l'inégalité

$$(2) \quad G \leq \text{Min}_x \text{Max}_X G.$$

Inversement, B pourra agir de manière que, quel que soit le comportement de A, l'on ait l'inégalité

$$(3) \quad G \geq \text{Max}_X \text{Min}_x G.$$

Théorème de M. von Neumann. — M. von Neumann a démontré que les deux limites figurant dans (2) et (3), entre lesquelles les joueurs peuvent enfermer G, sont égales. Nous allons donner une démonstration élémentaire de cette proposition.

Nous poserons, pour $j = 1, 2, \dots, m$,

$$f_j(x) = a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \dots + a_{nj}x_n.$$

Le système (x) étant choisi, la quantité $\text{Max}_x G$ n'est autre que la plus grande des valeurs

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x).$$

Soit μ le nombre $\text{Min}_x \text{Max}_x G$, et soit (x^0) un système (x) tel que pour $(x) = (x^0)$ l'on ait

$$\text{Max}_x G = \mu.$$

Le nombre μ est donc défini par les deux conditions :

α . Quel que soit (x) il existe une valeur de j telle que

$$f_j(x) \geq \mu.$$

β . Il existe au moins un système (x^0) tel que pour $(x) = (x^0)$ l'on ait pour toute valeur de j

$$f_j(x^0) \leq \mu.$$

Astreignant toujours les variables x_1, x_2, \dots, x_n à être non négatives, mais faisant abstraction de la condition $\sum x_i = 1$, la condition (α) peut s'exprimer par :

(α') . Quel que soit (x) , il existe une valeur de j telle que

$$f_j(x) \geq \mu(x_1 + x_2 + \dots + x_n), \quad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

D'après le théorème que nous avons démontré sur les formes linéaires, il existe donc un système de coefficients non négatifs

$$X_1^0, X_2^0, \dots, X_m^0, \quad \sum X_i^0 = 1,$$

tels que la forme $\sum X_j f_j$ satisfasse à

$$\sum X_j f_j \geq \mu(x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

Si donc le joueur B choisit ce système de valeurs

$$(X^0) = (X_1^0, X_2^0, \dots, X_m^0)$$

comme probabilités de jouer suivant les manières B_1, B_2, \dots, B_m , son espérance mathématique satisfera à

$$G \geq \mu$$

JEAN VILLE.

170
 quelle que soit la manière de jouer de A, ce qui établit la proposition de M. von Neumann.

Extension de la théorie précédente au cas continu. — Passons maintenant au cas où les différentes manières de jouer qui sont à la disposition des joueurs A et B peuvent être considérées comme formant un ensemble continu. Nous supposons que cet ensemble est le segment $(0, 1)$. Si A choisit le point d'abscisse x , B le point d'abscisse y , l'espérance mathématique de B sera une fonction de x et y , soit $K(x, y)$. La manière de jouer de A sera définie par une fonction $F(x)$:

$F(x)$ = probabilité que A choisisse un point d'abscisse $\leq x$.

Et la manière de jouer de B par une fonction analogue $\Phi(y)$.

A et B ayant choisi F et Φ respectivement, le gain moyen de B sera

$$G = \int_0^1 \int_0^1 K(x, y) dF d\Phi.$$

Nous allons étendre le théorème de M. von Neumann à ce cas; il faut démontrer que

$$\min_r \max_\Phi G = \max_\Phi \min_r G.$$

Si aucune restriction n'est imposée à la fonction K , le théorème n'est pas forcément vrai. Prenons par exemple pour K la définition suivante :

$K = 0$ pour $x = y$,

$K = +1$ pour $x = 1, y < 1$, et pour $x < y < 1$,

$K = -1$ pour $y = 1, x < 1$, et pour $y < x < 1$.

Pour cette fonction K particulière, on démontre sans peine que, quelle que soit F , il existe une fonction Φ telle que $G > 1 - \varepsilon$, et quelle que soit Φ , il existe une fonction F telle que $G < -1 + \varepsilon$. Le théorème de M. von Neumann est donc en défaut.

Nous allons montrer que si K est une fonction continue de x et y dans le domaine fermé $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, le théorème est vrai. Supposons que A ait choisi une fonction F . La quantité $\max_\Phi G$ n'est autre que le maximum, quand y varie de 0 à 1, de la fonction de y :

$$\int_0^1 K(x, y) dF(x).$$

Cette fonction de y étant continue, il s'agit d'un vrai maximum, et non pas seulement d'une borne supérieure. Soit μ la borne inférieure, quand on fait varier F , de $\text{Max } G$. Cette borne inférieure est effectivement atteinte pour au moins une forme de la fonction F . Ceci résulte de la compacité de l'ensemble des fonctions F et du fait que si une suite de fonctions F :

$$F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$$

converge vers une fonction F_0 , on a, par suite de la continuité de K ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^1 K(x, y) dF_n(x) = \int_a^1 K(x, y) dF_0(x)$$

uniformément par rapport à y .

Le nombre μ est donc défini par les deux conditions :

1. Quelle que soit $F(x)$, il existe une valeur au moins de y telle que :

$$\int_a^1 K(x, y) dF(x) \geq \mu.$$

2. Il existe une fonction $F_0(x)$ telle que, quelle que soit la fonction $\Phi(y)$, l'on ait

$$\int_a^1 K(x, y) dF_0(x) d\Phi(y) \leq \mu.$$

Soit maintenant un nombre ε positif arbitraire. Nous pouvons trouver un entier n assez grand tel que, pour

$$|x' - x''| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |y' - y''| < \frac{1}{n},$$

nous ayons

$$(1) \quad |K(x', y') - K(x'', y'')| < \varepsilon.$$

Ce nombre n étant choisi, nous poserons

$$\alpha_{ij} = K\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Soit y une valeur comprise entre 0 et 1, et $\frac{j}{n}$ sa valeur approchée

à $\frac{1}{n}$ près par excès. D'après (1) nous aurons

$$(2) \quad \left| \int_0^1 K(x, y) dF(x) - \int_0^1 K\left(x, \frac{j}{n}\right) dF(x) \right| < \varepsilon.$$

Soient maintenant n valeurs non négatives de somme égale à 1

$$(3) \quad x_1, x_2, \dots, x_n, \quad x_i \geq 0, \quad \Sigma x_i = 1.$$

Si nous considérons la fonction $F(x)$ en escalier qui pour $x = \frac{i}{n}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) présente une discontinuité d'amplitude x_i , nous déduisons de (3) et de (2) que :

γ . Quel que soit le système x_1, x_2, \dots, x_n de valeurs non négatives, de somme égale à 1, il existe une valeur de j au moins telle que

$$(4) \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \geq \mu - \varepsilon.$$

Il existe donc, d'après le théorème déjà utilisé dans la démonstration de la proposition de M. von Neumann pour le cas discontinu, un système de valeurs

$$y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0; \quad y_j^0 \geq 0, \quad \Sigma y_j^0 = 1,$$

telles que, quel que soit le système de valeurs x_i satisfaisant à (3), nous ayons

$$(5) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j^0 \geq \mu - \varepsilon.$$

Soit $\Phi_0(y)$ la fonction Φ en escalier qui présente aux points $y = \frac{j}{n}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) des discontinuités d'amplitude y_j^0 . D'après (5), nous aurons pour $x = \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$

$$(6) \quad \int_0^1 K(x, y) d\Phi_0(y) \geq \mu - \varepsilon.$$

Comme nous déduisons de (1) que si $\frac{i}{n}$ est la valeur approchée de x à $\frac{1}{n}$ près par excès, nous avons

$$\left| \int_0^1 K(x, y) d\Phi(y) - \int_0^1 K\left(\frac{i}{n}, y\right) d\Phi(y) \right| < \varepsilon,$$

nous concluons d'après (6) que, quel que soit x :

$$(7) \quad \int_0^1 K(x, y) d\Phi_0(y) \geq \mu - 2\varepsilon.$$

Le nombre ε étant arbitrairement petit, nous voyons donc que de (7) nous pouvons conclure que

$$\text{Max}_{\Phi} \text{Min}_{F} G = \text{Min}_{F} \text{Max}_{\Phi} G,$$

ce qui montre que pour K continu, le théorème de M. von Neumann est vrai.