

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Programa de Pós Graduação em Educação Matemática
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

**DA CARTOLINA AO COMPUTADOR: UMA
PROPOSTA PARA ESTUDO DE GEOMETRIA**

Sandra Aparecida Oriani Fassio

Orientador: Prof. Dr. Claudemir Murari

Dissertação de mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – Área de concentração: Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos, para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)

2011

BANCA EXAMINADORA

Sandra Aparecida Oriani Fassio

Aluna

Rio Claro, _____

Resultado: _____

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por todas as experiências de vida que me fazem amadurecer espiritual e emocionalmente. Aprendi que não há nada que aconteça comigo que não seja para o meu bem.

A minha família, por ter sido o apoio constante em todo e cada momento deste trabalho, sem eles não teria chegado aonde cheguei.

A meu orientador, Claudemir Murari, se mostrando muitas vezes, mais amigo do que mestre. A sua esposa Lenis por colaborar com valiosas sugestões e corrigir minhas falhas nos artigos e capítulos ligados a esta pesquisa.

A professora Miriam que também participou da banca, pelo carisma, atenção, simplicidade de tratar as pessoas e pela ajuda com os pequenos detalhes que para mim, foram muito importantes.

À professora Rosana Miskulin, que sempre me incentivou desde o primeiro momento em que estive na Unesp.

Os meus mais sinceros agradecimentos, ao professor Ruy Madsen Barbosa, que fez parte da banca, por suas importantes, seguras e competentes sugestões valorizando este trabalho.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em educação Matemática, por me permitirem aprender com eles.

À Marta, Maria Ângela, Flávia e Dirlene, minhas amigas desta “aventura acadêmica”, pelo carinho, atenção e apoio mútuo, com as quais troquei muitas dúvidas, na difícil tarefa de começar.

Aos meus amigos do grupo de formação de professores e tantos outros que estiveram comigo durante todo esse caminho.

Aos professores e alunos da escola onde realizamos a coleta de dados.

Aos professores e funcionários da Unesp que de uma maneira ou de outra estiveram presentes e colaboraram nessa jornada.

Agradeço imensamente a todos que participaram, de alguma forma, na realização desta pesquisa.

SUMÁRIO

Índice.....	ii
Resumo	iv
Abstract.....	v
Introdução.....	001
Capítulo 1: A Pesquisa.....	004
Capítulo 2: Possibilidades de Construções.....	034
Capítulo 3: Metodologia.....	087
Capítulo 4: Apresentação e Estudos dos Dados.....	092
Capítulo 5: Considerações Finais.....	142
Referencia Bibliográficas.....	146

Anexo I: Primeiro questionário aplicado aos alunos

Anexo II: Segundo questionário aplicado aos alunos

Anexo III: Modelo das fichas de atividades aplicadas aos alunos

Anexo IV: Modelo da ficha de observação do experimento de ensino

Anexo V: Atividades de geometria proposta por CECCO, E.J

Anexo VI: Algumas atividades desenvolvidas pelos alunos.

ÍNDICE

Capítulo 1: A Pesquisa.....	004
1.1 O estudo da geometria.....	004
1.2 Investigações matemáticas em sala de aula.....	012
1.3 Informática na Educação Matemática.....	014
1.4 Caleidoscópios.....	016
1.4.1 Reflexões em espelhos.....	017
1.4.2 Dois Espelhos.....	019
1.4.3 Caleidoscópios com quatro espelhos.....	024
1.5 Portasegmentos.....	026
1.6 O Software Geogebra.....	031
Capítulo 2: Possibilidades de Construções.....	034
2.1 Construções com régua não graduada e Compasso.....	034
2.2 Construções com transferidor.....	055
2.3 Construções com Esquadros.....	062
2.4 Construções com o software Geogebra.....	067
2.5 Construções com os Portasegmentos.....	073
2.6 Construções com Caleidoscópios.....	078
2.7 Construções proposta aos alunos.....	083
Capítulo 3: Metodologia.....	087
3.1 O Método Experimento de Ensino.....	088

3.2 Os Participantes.....	090
3.3 A Escola.....	090
Capítulo 4: Apresentação e Estudos dos Dados.....	092
4.1 Apresentando os alunos.....	092
4.2 Os Encontros.....	094
1º Encontro	097
2º Encontro	100
3º Encontro	101
4º Encontro	106
5º Encontro	110
6º Encontro	114
7º Encontro	122
8º Encontro	128
9º Encontro	134
10º Encontro	135
11º Encontro	139
Capítulo 5: Considerações Finais.....	142
Referencia Bibliográficas.....	146

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo analisar o envolvimento de alunos do ensino fundamental, em uma proposta de estudo da geometria que conta com o uso de diferentes recursos materiais: da cartolina ao computador, passando pelo uso de lápis, régua, caleidoscópio, esquadro, compasso, software, portasegmentos entre outros. Este trabalho foi realizado no âmbito de um projeto mais amplo que envolve uma parceria entre universidade e escola. Esse projeto mais amplo é intitulado: “O Uso de Tecnologia Informática e Materiais Manipuláveis em Geometria no Ensino Fundamental”. Tem por objetivo analisar as possibilidades do uso de tecnologia informática e materiais manipuláveis para organização de ambientes de aprendizagem que privilegiem uma atitude investigativa por parte do professor e do aluno, bem como as demandas que tal uso traz para o trabalho e a formação docente. Para o desenvolvimento desse projeto estabeleceu-se uma parceria Universidade-Escola. A presente pesquisa desenvolveu-se em atividade extracurricular. O tema abordado foi as Construções Básicas, sendo que, a quantidade de alunos definida em conjunto com as professoras que participam do projeto em parceria com a Unesp. Abordando o tema Construções Básicas, trabalhamos com transporte de segmento, transportes de ângulos, perpendiculares, ponto médio, paralelas, bissetriz, etc. A opção por coletar os dados por meio de atividade extracurricular se deu por considerar que em um grupo menor de alunos é possível observar com maior profundidade o desempenho dos mesmos. Uma alternativa para superar obstáculos como estes, têm sido o que se convencionou chamar experimentos de ensino. A geometria é de fundamental importância para o desenvolvimento do aluno, a habilidade para construções geométricas não se desenvolve espontaneamente, mas ela pode ser estimulada e trabalhada com o uso e a manipulação de objetos diferentes e em diversas situações. Esperamos com isso, contribuir para minimizar as dificuldades de ensino e aprendizagem de geometria na escola básica, bem como oferecer aos professores e pesquisadores subsídios para uma reflexão das estratégias de ensino e métodos de trabalhos, adequando-os aos avanços tecnológicos que ocorrem na sociedade.

Palavras chave: Educação Matemática. Construções Geométricas. Portasegmentos. Geogebra. Caleidoscópio.

ABSTRACT

The present work has the objective to analyze the student's commitment during fundamental instruction, in a Geometry Studying strategy which relies in using different material resources: from paperboard to computer, through the use of pencil, ruler, kaleidoscope, jet square, compass, software and port segments, as well. The present work was accomplished as part of a general project, which includes a partnership between University and school. This project wider is entitled: "The use of Information Technology and Manipulative Materials in Geometry in Fundamental Instruction". It has the objective of analysing the possibilities of the technology and manipulative materials use to organize learning environments which privilege an investigative attitude between teachers and students, as well as the demand that this use brings to the work and to the teacher training. For this project development a partnership was established among University and School. This project was developed as an extracurricular activity, focused on Basic Constructions, and the student amount was decided with the teachers, which participated in the project – UNESP-as partnership. Focusing Basic Constructions, we worked on segment transportation, angle Transportation, perpendiculars, medium point, parallels, bisector, etc. The option to collect data by extracurricular activities was due considering that in small student groups; one can observe their behavior deeper and closer. An alternative to overcome issues like that has been "known" as Teaching Experiments. Geometry is very important for the student development, the hability of geometrics constructions isn't spontaneously developed but, it can be stimulate and worked with the use and manipulation of different objects in different situations. It's our hope, with the present work to help, in order to minimize difficulties in Teaching and Learning Geometry at basic school and offer subsidy to teachers and researchers studies about Teaching strategies and work methodology, as well, in order to adjust them to the technological progress, which happens in our society.

Key words: Mathematics Education. Geometric Constructions. Port Segments. GeoGebra. Kaleidoscope.

INTRODUÇÃO

O interesse em pesquisar o tema, ensino de geometria para alunos do ensino fundamental, surgiu em decorrência da nossa própria prática. No desenvolvimento do trabalho com os alunos, percebemos que são grandes as dificuldades encontradas por eles para aprender geometria. Não mais fácil é, o professor encontrar maneiras de ensiná-la. No entanto, essas inquietações e questionamentos nos impulsionaram a buscar respostas que pudessem colaborar com nossa prática. Sentimos a necessidade de não nos acomodar diante desta situação, visto que os conhecimentos em geometria se relacionam com outras áreas do conhecimento. Por essa razão, decidimos fazer uma pesquisa que abordasse esta problemática e contribuísse com alguma proposta de ensino que pudesse ampliar as oportunidades de engajamento dos alunos na aprendizagem de geometria. Tomando como base estes questionamentos, procuramos desenvolver a seguinte proposta:

Um estudo para descrever e compreender a maneira como os alunos realizam atividades de geometria com diferentes recursos materiais, da cartolina ao computador, passando pelo uso de lápis, régua, caleidoscópio, esquadro, compasso, software e portasegmento.

O objetivo é analisar quais limitações e quais ideias matemáticas são possíveis de explorar com cada instrumento, e outros elementos que surgirem.

Sendo assim, pretendemos sugerir uma forma de trabalho que possa colaborar para diminuir as dificuldades de ensino e aprendizagem de geometria nas salas de aulas, oferecer aos professores e pesquisadores uma fonte teórica dos métodos de trabalho e ensino da geometria, através de instrumentos manipulativos e software.

Os resultados da pesquisa estão apresentados nesta dissertação que está organizada da seguinte maneira:

O capítulo 1 é composto de seis seções, numeradas abaixo, nas quais abordamos:

1. O estudo da geometria, o qual é iniciado com uma breve retrospectiva histórica do ensino de geometria e a importância de ensiná-la aos alunos. São também apontadas as dificuldades encontradas pelos professores que terminam por

excluí-la da sala de aula. Citou-se ainda a importância do uso dos materiais manipulativos, os quais funcionam como uma primeira forma de representação dos conceitos geométricos.

2. As investigações matemáticas, na perspectiva de Ponte, Brocardo, Oliveira (2006), que tratam desse assunto.
3. O impacto das diferentes tecnologias no ensino e aprendizagem da geometria; a importância de se trabalhar com os alunos utilizando o computador sob o ponto de vista de alguns autores que tratam desse tema; e algumas ações governamentais relacionadas à formação dos professores para atuarem junto aos alunos utilizando a informática. .
4. O tema Caleidoscópios, seu surgimento, modo de construção, seus diferentes tipos e suas potencialidades pedagógicas.
5. Os portasegmentos conforme concepção de Cecco (1971), o qual afirma existirem outros recursos que oferecem alternativas para o uso da régua, do compasso e que um deles é o portasegmento.
6. O software Geogebra, um programa livre, que inclui Geometria, Álgebra e Cálculo, sendo uma opção bastante eficaz para o tratamento geométrico de forma interativa, e com o qual se pode fazer construções incluindo pontos, retas, segmentos, paralelas e muitas outras.

No capítulo 2, Possibilidades de Construções, são relatadas as possíveis construções com Régua não graduada e Compasso, Transferidor, Esquadros, software Geogebra, Portasegmento e caleidoscópio. Nesse capítulo constam, também, as atividades desenvolvidas com os alunos.

O capítulo 3 trata da Metodologia adotada nesta pesquisa, que é do tipo qualitativa, amparada nas ideias descritas por Bogdan e Biklen (1994). Baseado na realização de experimentos de ensino construtivistas, propostos por Cobb & Steffe (1983), trabalhamos com duplas de alunos em atividade extracurricular. Sendo assim, apresentamos os participantes e, finalizando, a escola onde foi desenvolvido o experimento de ensino.

O capítulo 4 destina-se à Apresentação e Estudo dos Dados. Aqui apresentamos o perfil dos participantes e suas preferências. São relatados os onze encontros realizados no experimento de ensino.

Por último, no capítulo 5 temos as Considerações Finais, com ponderações a respeito do trabalho realizado.

CAPÍTULO 1

A PESQUISA

Neste capítulo é situada a pesquisa, a importância do estudo da geometria para os alunos e as dificuldades dos professores diante de tal disciplina. Discutimos sobre os materiais manipulativos como representação dos conceitos geométricos, facilitando o ensino e a aprendizagem, e as investigações matemáticas, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2006). Aborda-se neste capítulo, as diferentes tecnologias no ensino e aprendizagem da geometria, bem como algumas ações governamentais relacionadas à formação dos professores. São estudados os Caleidoscópios, seu aparecimento, construção, os tipos existentes e formação de ângulos. É apresentado o portasegmento, instrumento pouco conhecido no estudo da geometria. Cecco (1971) relata que existem recursos que simulam o uso da régua e compasso, aponta o portasegmento como sendo um deles. O autor define a construção desse instrumento e afirma ser ideal que o aluno prepare diversos portasegmentos de várias medidas e tamanhos. Para finalizá-lo, o software Geogebra que é uma opção para o tratamento da geometria.

1.1- O estudo da geometria

O ser humano sempre esteve cercado por uma quantidade variada de formas geométricas fornecidas pela natureza; desde os tempos mais antigos, o homem primitivo possuía uma capacidade natural de perceber essas configurações e de compará-las quanto à forma e o tamanho. Noções sobre curva, superfície e volume devem, provavelmente, ter surgido na mente humana da observação do meio em que viviam. Por exemplo, o arco-íris no céu sugere uma curva, as bolas de sabão têm a forma de um hemisfério e os troncos das árvores, de cilindros. Da mesma maneira, a noção de simetria deve ter sido despertada pela observação das folhas das árvores, de algumas flores e do corpo dos animais, entre outras coisas.

De modo admirável, o homem primitivo foi capaz de transformar a percepção sobre o espaço a sua volta em uma espécie de geometria rudimentar básica, que ele utilizou para construir moradias, tecer, confeccionar vasos e potes, para fazer pinturas e

ornamentos. Mas essa geometria, embora notável, era muito intuitiva e necessitava de uma fundamentação científica.

Muitos séculos foram necessários até que o homem começasse a estabelecer procedimentos gerais, a partir de situações geométricas particulares semelhantes, certamente, através de um método indutivo rudimentar, ou ainda, de um método baseado na observação e na experimentação.

Sendo assim, a geometria foi desenvolvida a partir da necessidade de medir terras, construir casas, templos e monumentos, navegar e calcular distâncias, através dos tempos. Seus registros estão presentes nos legados de todas as civilizações: babilônios, egípcios, gregos, chineses, romanos, hindus, árabes, dentre outras (GASPAR, 2003).

A geometria pode ser considerada como:

...um campo de conhecimento muito importante para a descrição e a inter-relação do homem com o espaço em que vive, podendo ser considerada como a parte da Matemática mais intuitiva, concreta e ligada com a realidade, sendo, portanto fundamental na formação dos alunos (PASSOS, 2000, p. 1).

Nas notas de aulas de Barbosa, encontramos que, desde a antiguidade as construções geométricas estiveram presentes nos trabalhos de geometria plana. Na própria obra de Euclides (300 a.C) o famoso “Elementos”, foram encontrados vários problemas de construções geométricas, intercalados entre propriedades e teoremas da geometria plana. O desenho geométrico foi considerado obrigatório nas escolas como preparação imprescindível aos cursos de engenharia e arquitetura.

Ainda segundo esse autor, o uso da régua e compasso como instrumentos correspondentes, permaneceu em estudos e pesquisas de geômetras por muitos séculos. No entanto, em 1797, o italiano Lorenzo Mascheroni, em sua obra *Geometria Del Compasso*, fornece construções geométricas apenas com o compasso. Em 1672, Georg Mohr (o Euclides dinamarquês) publicara em Amsterdam, em seu *Euclides Danicus* (obra pouco conhecida) que todo problema resolvido com régua e compasso poderia ser resolvido só com compasso. Muitos consideraram o compasso como um instrumento mais perfeito que a régua.

Em suas notas de aulas, de desenho geométrico, Barbosa argumenta ainda que em 1833, o geômetra suíço Jacob Steiner, publica um trabalho no qual prova que: todo problema de construção que pode ser resolvido por meio de régua e compasso, pode ser resolvido somente com uma régua, desde que no plano exista uma dada circunferência com centro e raio fixados. O poder construtivo da régua e compasso, juntos ou

separadamente, até o século 19, não deixou uma boa imagem na história da geometria, visto que, esses instrumentos eram considerados universais, pois com eles era possível resolver qualquer problema de construção. Dessa maneira, foi dedicado muito esforço às pesquisas, muitas vezes desnecessárias, para vários problemas, entre eles três tornaram-se famosos. O primeiro deles é Quadratura do Círculo, o segundo, Trisecção de um ângulo e o terceiro, Duplicação do Cubo. Na Quadratura do Círculo, buscava-se um quadrado equivalente (em área) a um círculo dado, em Trisecção de um ângulo, procurava-se a divisão de um ângulo qualquer em três ângulos congruentes e finalmente na Duplicação do Cubo, dado um cubo por sua aresta, desejava-se determinar a aresta de um outro cubo cujo volume tivesse o dobro do primeiro. Esse problema ficou conhecido como Délico, ou do Oráculo de Delos. Todos impossíveis de serem resolvidos com régua e compasso, mas que diante da aparente futilidade geraram importantes pesquisas.

Barbosa, conclui que as construções geométricas formam uma parte, mesmo pequena, no entanto substancial, da educação matemática reconhecida por séculos e até os dias atuais. Nos currículos escolares de nível médio durante anos, fizeram parte integrante da disciplina Desenho, hoje está diversificada em alguns conteúdos de educação artística ou desenho geométrico.

Dessa maneira, a geometria da sala de aula se apóia em um processo de formalização, que tem se desenvolvido há mais de 2.000 anos em níveis crescentes de rigor, abstração e generalização (PASSOS, 2000).

É importante ressaltar que a geometria tem tido pouco destaque nas aulas de matemática. No entanto, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (BRASIL, 1998).

Nas situações de ensino de geometria a visualização é essencial para a aprendizagem que juntamente com a representação estão relacionadas na formação do pensamento geométrico. Os diferentes tipos de visualizações necessárias, tanto em contextos matemáticos, quanto em outros, tem relação com a capacidade de criar e manipular. A visualização pode ser definida como a habilidade de pensar, em termos de imagens mentais (representação mental de um objeto ou de uma expressão), naquilo que não está diante dos olhos, no momento da ação do sujeito sobre o objeto. “O significado

léxico atribuído à visualização é o de transformar conceitos abstratos em imagens reais ou mentalmente visíveis” (NACARATO; PASSOS, 2003, p.78).

A visualização é descrita como sendo a construção de um processo visual que sofre interferências de nossa experiência prévia e também, está associada a outras imagens mentais armazenadas em nossa memória. O desenvolvimento completo do processo visual é fundamental para se obter uma percepção espacial. O estímulo visual como modelos concretos, desenhos, dobraduras, imagens na tela do computador é um modo de construir imagens mentais. “A representação pode ser gráfica, como um desenho em um papel ou um modelo manipulável, considerando seu valor como um instrumento para expressar nossos conhecimentos e ideias” (CATALÁ, FLAMARICH e AYMEMMI, 1995 apud NACARATO; PASSOS, *ibidem*, p.78).

Quando imaginamos a construção de um determinado objeto como, por exemplo uma caixa, não se pode iniciar sua construção sem, antes, formar uma imagem mental do objeto, que ainda não pode ser visto com os próprios olhos. Essa habilidade exige aprendizagem e deve ser construída em vários momentos, tanto na escola como fora dela. Contudo, na escola, essa capacidade deverá ser explorada com a observação e análise de aspectos visuais de figuras geométricas, de modo que seja possível desenhá-la. Para desenhar um objeto geométrico é necessário que o aluno seja capaz de imaginar sua forma plana e as transformações necessárias para apresentá-la na forma tridimensional, ou seja, na forma espacial. A elaboração de imagens, permitindo ver em perspectiva os objetos do espaço, é uma condição necessária para desenvolver as intuições¹, proporcionando elaborar novas figuras e, certamente, o uso de computadores traz novos elementos ao traçado utilizado apenas com régua e compasso (NACARATO; PASSOS, *ibidem*).

Com relação às figuras geométricas Fischbein (1993), considera algumas características importantes quanto à sua natureza conceitual. Por exemplo, pontos são objetos de dimensão zero, linhas são objetos unidimensionais, planos são objetos bidimensionais e os objetos reais são tridimensionais.

De maneira semelhante às ideias de Nacarato e Passos, Duval (1995) descreve que são necessárias três formas de processos com relação ao conhecimento da

¹ A intuição é uma forma de conhecimento imediato que está sempre disponível no espírito das pessoas e cuja explicitação não requer uma dedução racional guiada por uma sequência lógica de argumentos deduzidos uns dos outros (Pais, 1996, p. 72 apud NACARATO, A. M.; PASSOS, C. L. B., *ibidem*, p.23).

geometria, sendo eles a visualização, a construção e o raciocínio. *Visualização* é o processo que observa uma ilustração, para a descoberta de uma situação complexa, por uma breve olhada. *Construção* é o processo por instrumentos e *Raciocínio* está relacionado ao processo de prova e explicação. Para esse autor, esses três processos são entrelaçados em uma ação conjunta e necessária. Os problemas de geometria referem-se a um registro espacial, que dá lugar às formas de interpretações autônomas. Para essas interpretações, define os seguintes tipos de apreensões: a sequencial, que é solicitada nas tarefas de construção ou nas tarefas de descrição com o objetivo de reproduzir uma figura. Perceptiva é a interpretação das formas da figura em uma situação geométrica. Discursiva é a interpretação dos elementos da figura geométrica, enfatizando a articulação dos enunciados. Por último a Operatória, que é centrada sobre as modificações possíveis de uma figura (DUVAL, 1995 apud ALMOULOUD et al., 2004).

Nacarato e Passos (2003), baseando-se nos trabalhos de Pais (1996), ressaltam que o objetivo do ensino da geometria é oferecer ao aluno o conhecimento teórico. Para tanto, torna-se necessário o recurso tanto às bases intuitivas quanto aquele dirigido à atividade experimental.

O estudo da geometria ajuda os alunos a representarem e darem significado ao mundo, através das relações entre os modelos geométricos criados e/ou manipulados, possibilitando a compreensão de representações abstratas. Disso conclui-se o quanto seu ensino é relevante para a compreensão da matemática.

Nessa perspectiva, entendemos que atividades de construção, desenho, visualização, comparação, transformação, discussão de ideias, conjecturas e elaboração de hipóteses podem facilitar o acesso à estrutura lógica e à demonstração de conceitos geométricos.

São inúmeros os educadores e pensadores que evidenciam a importância do uso de materiais manipulativos para a aprendizagem. Sendo assim, os materiais manipuláveis são caracterizados pelo envolvimento físico dos alunos em uma situação de aprendizagem ativa. Dessa maneira, “esses materiais funcionam como uma primeira forma de representação dos conceitos” (PASSOS, 2006, p. 81).

Pais (1996), citado por Santos (2006), ao analisar a utilização de materiais manipuláveis no ensino de geometria, destaca a importância do uso de desenhos, materiais e imagens mentais para o desenvolvimento das ideias geométricas,

principalmente nas séries do ensino fundamental. Eles funcionam como recursos didáticos auxiliares e representativos do processo de construção dos conceitos geométricos, em suas correlações com os aspectos intuitivo, experimental e teórico da geometria.

Nos trabalhos de Murari (1999), Martins (2003), Almeida (2003), verifica-se a importância de recursos didáticos, mais especificamente da utilização de materiais manipulativos, também denominados de materiais concretos, na abordagem de conceitos geométricos, como forma de contribuir para a aprendizagem dos alunos.

Para Passos (2006), quando um material manipulável apresenta aplicabilidade para formar um grande número de ideias matemáticas, ele pode ser considerado um bom material didático. Nesse sentido, essa diversidade de aplicações permite que os alunos estabeleçam conexões entre os diversos conceitos intrínsecos à manipulação do material.

Reys (apud Passos, *ibidem*) definiu alguns critérios para selecionar bons materiais manipuláveis. Para isso, os materiais devem: proporcionar uma verdadeira personificação do conceito matemático ou das ideias a serem exploradas; representar claramente o conceito matemático; ser motivadores; ter uso apropriado quer em diferentes anos de escolaridade, quer em diferentes níveis de formação de conceitos; proporcionar uma base para a abstração e proporcionar manipulação individual.

Aliado aos critérios de escolha dos materiais, Castelnovo (1970), afirma que existem duas considerações a respeito das finalidades da utilização do material concreto: uma é relativa às faculdades sintéticas, as quais permitem ao aluno construir o conceito a partir do concreto e a outra é relativa às faculdades analíticas, em cujo processo, o aluno deve distinguir no objeto elementos que constituem a globalização. Por esse motivo, o objeto precisa ser móvel, permitindo transformações, para que o aluno identifique a operação que está subentendida.

Todo material didático tem um poder de influência variável sobre os alunos, pois esse poder depende do estado de cada aluno e, também, do modo como o material didático é empregado pelo professor. Assim sendo, Lorenzato (2006) verifica que a melhor das potencialidades do material didático é revelada no momento da sua construção pelos alunos, pois é durante este processo que surgem imprevistos e desafios, os quais levam os alunos a formularem conjecturas e a descobrirem caminhos

e soluções, já que a geometria é particularmente propícia para o ensino baseado na exploração e investigação.

No entanto, trabalhar com as inovações educacionais, envolvendo diversos materiais manipuláveis, pressupõe uma mudança na prática docente e essas mudanças geram incerteza. Para Borba e Penteado (2007), alguns professores procuram caminhar em uma *zona de conforto*, onde quase tudo é conhecido, previsível e controlável. Os professores, em geral, não se movimentam em direção a um território desconhecido. Porém, alguns reconhecem que a forma como estão atuando não favorece a aprendizagem dos alunos. Mesmo assim, ao nível de sua prática, não conseguem mudar para algo que não os agrada, continuando com uma prática já cristalizada. Esses professores nunca avançam para uma *zona de riscos*, na qual é preciso avaliar as consequências das ações propostas. Essas inovações educacionais levam o professor para uma zona de risco, provocando-o a repensar o conteúdo ensinado. O professor como facilitador não tem o domínio de tudo, mas está apto a levar o aluno a pensar e refletir sobre as atividades propostas que podem ter respostas além das planejadas e esperadas.

Diante do atual contexto de desenvolvimento tecnológico, não podem passar despercebidas as contribuições que o ambiente computacional traz para a formação do pensamento geométrico. Uma questão relevante a ser abordada, quando se discute o reconhecimento de representações bidimensionais, diz respeito aos objetos geométricos representados na tela do computador. Nesse sentido, o aumento do número de computadores, tem fornecido a professores e a pesquisadores novos ambientes para o ensino da geometria.

Miskulin (1999) defende que o uso de aplicativos computacionais como Geometric Supposer, Geometer's Sketchpad e Cabri Géomètre, Logo, entre outros, possibilitam contextos propícios para o desenvolvimento de noções e conceitos geométricos. Segundo a autora, esses contextos podem ser utilizados para criar ambientes exploratórios em matemática, mais especificamente, em geometria. Em contrapartida, a autora alerta que, apesar do aspecto tridimensional dos objetos representados na tela do computador, são representações planas de objetos espaciais. A autora investigou ainda possibilidades didático-cognitivas do Logo tridimensional na exploração pedagógica de conceitos geométricos, revelando que as situações-problema

trabalhadas, concebidas como atividades de “design”, constituíram-se em contextos favoráveis aos sujeitos pesquisados.

Na era da imagem e do movimento, o ensino de geometria não pode continuar a ser ensinado como há décadas atrás. Ensinar geometria de uma forma ideal exploraria o uso de computadores, aproveitando a experiência dos alunos que usufruem de vídeo-games, celulares, dentre as várias tecnologias do momento. No entanto, nem a escola e nem mesmo os professores estão acompanhando o mesmo ritmo da tecnologia e nem mesmo os professores tem formação adequada para enfrentar esse desafio (LOPES; NASSER, 2005).

Diante dessas perspectivas, são muitas as possibilidades para se focar os conceitos geométricos. O desafio é fazer uso de vários recursos materiais para organizar aulas de geometria de uma forma diferenciada. No caso desta pesquisa, os materiais utilizados foram lápis, régua, compasso, transferidores, esquadros, caleidoscópios, portasegmentos e o software Geogebra.

O portasegmento, instrumento pouco conhecido, tem sua construção descrita por Cecco (1971), como sendo do seguinte modo: pode ser confeccionado com papel cartão, cartolina, uma lâmina fina de metal, celulósida ou outro material plástico (o material mais adequado é aquele que apresenta uma superfície lisa e translúcida). Basta recortar um pedaço retangular de 1,5 a 3 cm de largura, e de 10 a 15 cm de comprimento. Esses valores podem variar de acordo com seu uso. O ideal é que o aluno prepare vários portasegmentos de diferentes medidas.

O Geogebra é um software de matemática, com o qual se pode trabalhar geometria, álgebra e cálculo dinamicamente. Ele foi desenvolvido por Markus Hohenwarter, da universidade americana Florida Atlantic University. O Geogebra é um sistema de geometria dinâmica que permite construir vários objetos: pontos, vetores, segmentos, retas, secções cônicas, gráficos representativos de funções e curvas parametrizadas, os quais podem depois ser modificados dinamicamente.

Esses materiais foram utilizados em atividades de caráter investigativo, conforme proposto por Ponte, Brocardo, Oliveira (2006). Atividades dessa natureza diferem do tradicional “exercício” bastante frequente nas aulas de matemática.

A próxima seção diz respeito às investigações matemáticas em sala de aula, as quais foram uma das bases teóricas das atividades desenvolvidas junto aos alunos.

1.2- Investigações Matemáticas em sala de aula

De acordo com Ponte, Brocardo, Oliveira (2006), investigar significa procurar conhecer o que não se sabe. Sendo assim, o termo investigação pode ser usado em vários contextos, como por exemplo, investigação científica, investigação ou inquérito sobre o que causou um acidente, investigação em atividades que envolvam uma procura de informação (fazer uma pesquisa na Internet). Para esses autores, as investigações geométricas contribuem para perceber aspectos importantes da atividade matemática, tais como a formulação e teste de conjecturas e a procura por generalizações. Eles ressaltam que a exploração de diferentes tipos de investigações geométricas pode contribuir para concretizar a relação entre situações da realidade e situações matemáticas. Essa exploração pode ainda desenvolver capacidades como a de visualização espacial e o uso de diferentes formas de representação, evidenciar conexões matemáticas, além de ilustrar fatos importantes da história e da evolução da matemática.

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (*ibidem*), a realização de uma investigação matemática envolve quatro principais momentos: O primeiro deles é o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro diz respeito à realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. O quarto, e último, se refere à argumentação, à demonstração e avaliação do trabalho realizado. A formulação das questões e a conjectura inicial, ou a conjectura e o seu teste, podem surgir em um mesmo momento. Podendo ser incluídas diversas atividades em cada um desses momentos.

Nas investigações, as situações são mais abertas, a questão pode não estar bem definida no início, ficando para quem investiga um papel fundamental na sua definição. Como os pontos de partida podem não ser os mesmos, os pontos de chegada acabam, também, sendo outros.

Ponte, Brocardo, Oliveira (*ibidem*), acreditam que o envolvimento ativo dos alunos é um aspecto relevante para sua aprendizagem. Para eles, o aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos visando atingir um objetivo. Esse é um dos aspectos relevantes das investigações. Os autores afirmam que nas

investigações matemáticas, o aluno é chamado a agir como um matemático, não apenas na formulação de questões, conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os colegas e o professor.

Entendemos com isso que todos os alunos devem experimentar atividades sob a perspectiva das investigações matemáticas. Mas como realizá-la na sala de aula de matemática? Como organizar um trabalho desse tipo? Que fases devem ser seguidas? O que se pode esperar do desempenho dos alunos? Qual deve ser o papel do professor nesse momento? A investigação pode ser planejada ao se iniciar, mas não como vai terminar.

Uma atividade de investigação ocorre normalmente em três fases: introdução da tarefa, onde o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito; realização da investigação, que pode ser tanto individual, como em duplas, em grupos ou com toda a turma; e, finalmente, a discussão dos resultados, momento em que os alunos descrevem aos colegas da sala o trabalho realizado.

No entanto, segundo os autores, essas fases podem ser realizadas de diversas maneiras, sendo geralmente uma pequena introdução, seguida da realização da investigação em pequenos grupos e a discussão dos resultados em um grande grupo.

O professor, em uma aula de investigação, segundo Ponte, Brocardo, Oliveira (2006) tem um papel de regulador da atividade, pois para que o aluno possa investigar, é necessário deixá-lo trabalhar de forma autônoma.

Os autores, em seu texto, argumentam sobre o “arranque da aula” que mesmo que seja uma fase curta, todo o restante da investigação depende dela. A tarefa pode ser fornecida aos alunos por escrito, não dispensando uma pequena introdução oral do professor. É necessário que o professor deixe claro aos alunos o que significa investigar.

O ambiente de aprendizagem que se forma em uma sala de aula, é que irá garantir o sucesso de uma investigação. O aluno tem que se sentir à vontade na sala de aula para pensar, explorar suas ideias e exprimi-las ao professor e aos colegas. Portanto, a fase introdutória da investigação não pode ser longa para que os alunos não se desinteressem pela atividade.

Diante do exposto, para os autores Ponte, Brocardo e Oliveira (*ibidem*), o professor pode provocar os alunos a realizarem investigações e explorações matemáticas. Todavia, será necessário também, promover outras atividades como

exercícios, problemas e projetos. O tipo de tarefa depende da forma como é entendida e aceita pelo aluno e o próprio desenvolvimento do trabalho tem um efeito transformador. Pode acontecer que uma tarefa que é proposta como um exercício qualquer, ou uma questão levantada por um aluno, pode se tornar uma exploração, da mesma forma que um projeto pode perder sua qualidade ao ser realizado pelas rotinas repetitivas de um manual ou de um exemplo realizado anteriormente.

Ainda segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), o objetivo de impulsionar o desenvolvimento de um espírito investigativo nos alunos pode ser realizado de várias maneiras. Existem situações em que o processo investigativo pode surgir a partir de questões que os alunos apresentem tomando por base o trabalho que está sendo realizado ou que são solicitados pelo professor. Nesses momentos, aparecem dificuldades para o professor no sentido de saber qual o rumo que as explorações podem tomar. No entanto, podem ser muito ricos em termos de aprendizagem, na medida em que se corresponde com as questões originadas das atividades e questionamentos dos alunos. Sendo assim, é necessário promover práticas de investigação, sem estabelecer um limite entre estas e outras atividades, tornando-as de forma natural para o aluno, não o conduzindo a olhar para as investigações como algo à parte da Matemática escolar.

Desta maneira, podemos detectar a preocupação dos autores com o ensino de matemática e com o desenvolvimento de uma nova metodologia de ensino que proporcione uma melhoria na compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos.

1.3- Informática na Educação Matemática

Nesta seção, mencionaremos algumas ações governamentais direcionadas à formação dos professores para utilizarem a informática, bem como estudaremos a importância de se trabalhar com os alunos utilizando o computador sob o ponto de vista de alguns autores que tratam desse tema.

Pode-se dizer que a revolução tecnológica tem oferecido aos professores e pesquisadores novos contextos para o ensino de geometria. Para Penteado (1999), com a presença do computador, a aula passa a adquirir um novo cenário, refletindo diretamente na relação do professor com os alunos e no papel desempenhado pelos

demais atores presentes. Esse novo cenário influencia na forma como os alunos e o professor agem na sala de aula, e na maneira de se comunicarem entre si.

...os computadores na sala de aula frequentemente quebram as rotinas tradicionais e permitem aos professores estabelecerem novos padrões e, algumas vezes, os próprios softwares trazem o “germe de novas práticas”. (OLSON,1988, apud PENTEADO, 1999,p.306)

Sendo assim, entendemos que ao trazer o computador para a sala de aula, o professor abre um novo canal de comunicação com seus alunos e passa a contar com mais um recurso na realização de suas tarefas. Todavia, para Borba e Penteado (2007), o computador pode ser um problema a mais na vida já atribulada do professor, mas também com ele, podem surgir novas possibilidades para o seu desenvolvimento como um profissional da educação.

Com as perspectivas anteriormente delineadas e ressaltando a importância do uso de computadores nas aulas de Matemática, torna-se necessário que o professor esteja sempre se atualizando para incorporar essas novas práticas.

O professor poderia ser preparado para atuar usando o computador no processo de ensino e aprendizagem, para a busca e articulação de informações a serem empregadas na construção de novos conhecimentos, no estudo de conteúdos específicos e no desenvolvimento de ideias, que relacionam saberes que surgem de diferentes áreas. Segundo Borba e Penteado (*ibidem*), em nível nacional, uma das primeiras ações governamentais com a intenção de estimular e promover a implementação do uso de tecnologia informática nas escolas brasileiras ocorreu em 1981, com a realização do I Seminário Nacional de Informática Educativa, onde compareceram educadores de vários estados brasileiros. Foi a partir desse evento que começaram a surgir projetos como EDUCOM, FORMAR e PRONINFE. Ainda conforme Borba e Penteado, (*ibidem*), as experiências acumuladas com esses projetos deram base para o programa do governo PROINFO – Programa Nacional de Informática na Educação – lançado em 1997 pela Secretaria de Educação a Distância (Seed/MEC). O seu objetivo é estimular e dar suporte para a introdução de tecnologia informática nas escolas de nível fundamental e médio de todo país.

Como foi exposto, existe um movimento dos órgãos governamentais no sentido de impulsionar a chegada dos computadores nas escolas. Para Almeida (2006), essas

ações têm o objetivo de desenvolver uma metodologia de formação continuada do educador (professores e coordenadores pedagógicos) para o uso do computador no ensino e na aprendizagem. As ações de formação se desenvolveram em oficinas teóricas e práticas, nas quais o professor explorava recursos computacionais aplicáveis à educação, ao mesmo tempo em que era induzido a refletir sobre suas teorias, percepções e crenças a respeito de conhecimento, ensino e aprendizagem e a estabelecer relações com sua prática pedagógica, tendo como meta, compreender *como, quando, por que e para que* integrar o computador a essa prática.

Dessa maneira, procura-se superar práticas antigas com a entrada desse novo ator informático. Essa prática está também em harmonia com uma construção de conhecimento que valoriza o processo e não o produto-resultado em sala de aula, e com uma postura que entende o conhecimento como algo que depende do sujeito. Sendo mais recente, o acesso a internet, em busca de informações e comunicar-se com especialista sobre um determinado tema, tem facilitado o trabalho de investigação de alunos que estão se iniciando na pesquisa.

1.4- Caleidoscópios

Tendo em vista que nesta pesquisa um dos materiais utilizados no estudo da Geometria são os caleidoscópios, convém iniciarmos esta seção pelo seu surgimento.

Para Murari (1999) um conjunto de espelhos pode ser considerado como caleidoscópio, desde que permita a obtenção repetida e perfeita de imagens. A palavra caleidoscópio é procedente etimologicamente das três palavras de origem grega, Kalos = Belo, Eidos = Formas, Skopein = Ver, ou seja, ver coisas belas.



Figura 01
Imagem obtida por um caleidoscópio popular

Ainda segundo Murari (*ibidem*), há muito tempo as reflexões em espelhos planos são conhecidas e estudadas, razão pela qual se encontram muitos registros relacionados à Ótica Geométrica.

Encontramos em Murari (1999) que os caleidoscópios surgiram no Brasil primeiramente nas obras de Física ou Ciências. Era um material didático para ciências, em um livro de apenas 12 páginas, da professora Maria Julieta Sebastiani Ormastroni, da coleção “Cientistas de Amanhã”, do IBCEC (Instituto Brasileiro de Educação, Ciências e Cultura- SP), sem data. Certamente foi escrito por volta de 1950 ou 1960, com o título “Brincando com Espelhos”. Era um material recreativo que dizia respeito às reflexões.

A colocação de dois espelhos articulados para a formação de ângulos e obtenção de imagens por reflexões sucessivas incentivou os estudos no que diz respeito à contagem do número de imagens. Assim, um conjunto de três espelhos planos, perpendiculares a um mesmo plano, formando uma superfície prismática triangular e com as faces espelhadas para o interior, pode fornecer, por reflexões, um visual de imagens de diferentes padrões (MURARI, *ibidem*).

1.4.1- Reflexões em Espelho

Para Barbosa (1993) a luz se propaga em linha reta em meio homogêneo, isto é, apresenta as mesmas propriedades físicas em todos os seus pontos, transparentes (quando permite a propagação e a visualização nítida de objetos) e isotrópicas (as propriedades físicas não dependem da direção em que são observadas).

Quando um feixe luminoso atinge uma superfície de separação de dois meios (transparentes), parte da luz volta para o primeiro meio e se diz refletida; e a outra avança para o segundo meio e se diz refratada. Se a superfície for lisa, a reflexão é regular, se a superfície for rugosa a reflexão é difusa. Quando o segundo meio não é transparente, mas é translúcido no caso de ser vidro fosco, neblina, papel vegetal, etc., ocorre ainda a propagação da luz, porém não há visualização dos objetos. E se for opaco, como por exemplo, madeira, tijolo, etc., a luz não se propaga (BARBOSA, *ibidem*).

Em Barbosa (*ibidem*), Murari (*ibidem*), Martins (2003), encontramos que a geração de imagens ou reflexão em um espelho é explicada pelas leis da ótica geométrica. Assim sendo:

a) O raio normal à superfície no ponto de incidência e o raio refletido estão em um mesmo plano.

b) O ângulo de incidência i (do raio incidente com a normal) é igual ao ângulo de reflexão (do raio refletido com a normal): $i = r$.

Se o raio incidente já é a normal ao espelho, o raio refletido volta na mesma direção. Quando a superfície é plana, dizemos que o espelho é plano. São consideradas imagens virtuais, como no caso dos espelhos planos, a imagem de um ponto que é o encontro dos raios refletidos ou de seus prolongamentos.

Um determinado ponto “P” em frente a um espelho plano sendo visto por um observador (olho), como se pode observar na Figura 2, “O” através do espelho parece ao observador estar em P’, atrás do espelho (imagem virtual), impressão causada pelo fato de “O” receber o raio luminoso refletido e que, vindo de “P”, incide no espelho e, segundo as duas leis da ótica geométrica, reflete-se atingindo “O”.

Temos que, em razão da primeira lei, os pontos P, I, O e também P’ estão em um mesmo plano; e pela segunda lei, resulta que P’ é o simétrico de P em relação à reta, intersecção desse plano com o plano do espelho.

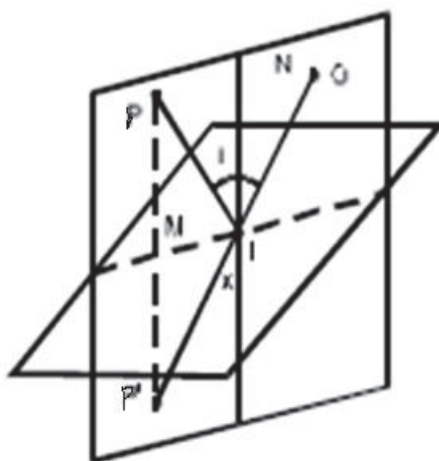


Figura 02
Reflexão em um espelho

Dessa maneira, Barbosa (1993) define o fenômeno da reflexão

1.4.2- Dois Espelhos

Se tivermos dois espelhos articulados, no formato de um livro aberto, podemos ter o surgimento de espelhos virtuais que são as reflexões de um espelho original no outro e reflexões dos espelhos virtuais nos originais. Em Murari (1999), Martins (2003) e Santos (2006), encontramos que o ângulo x de abertura entre os espelhos determina o número de imagens formadas.

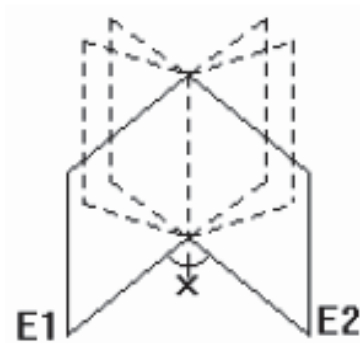


Figura 03

O ângulo x representa o ângulo de abertura entre os espelhos

Sendo P um ponto colocado entre dois espelhos articulados $E1$ e $E2$, todas as imagens do ponto P pertencem a uma circunferência de centro O , na intersecção dos espelhos.

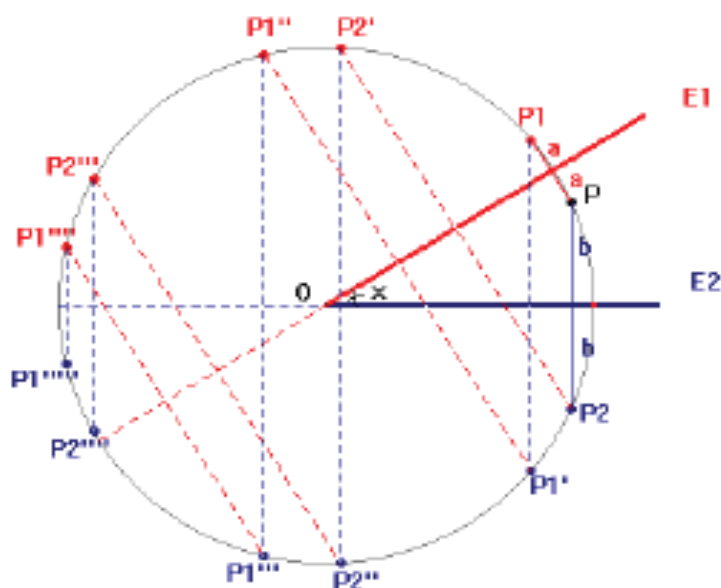


Figura 04

Processo de reflexão de imagens de um ponto P entre dois espelhos articulados

O ponto P fornece em $E1$ a imagem $P1$ e em $E2$ a imagem $P2$. $P1$ fornece $P1'$ em $E2$ e $P2$ fornece $P2'$ em $E1$, e assim sucessivamente. Sendo a , a distância de P ao espelho $E1$ e b a distância de P ao espelho $E2$, por isometria reflexional, temos que a distância de $P2$ à $P1'$ é $2a$ e de $P1$ à $P2'$ é $2b$. A partir de P as imagens são distribuídas na circunferência, de forma que a distância entre duas imagens consecutivas é, alternadamente, $2a$ ou $2b$.

Para que aconteça a repetição perfeita de imagens em dois espelhos articulados, é preciso que o dobro do ângulo de abertura entre os espelhos ($2\hat{x}$) divida 360° . Caso isso não ocorra, algumas imagens são formadas “atrás” dos espelhos virtuais e não podem ser vistas pelo observador, como ocorre com o ponto $P1''''$ da Figura 04.

Se juntarmos um terceiro espelho aos dois espelhos articulados, de tal forma que os três espelhos sejam perpendiculares a um plano, formando um prisma de base triangular, as imagens formadas em um dos espelhos formam novas imagens nos outros dois espelhos, e assim, sucessivamente, estendendo-se por todo o plano. Para que ocorra a repetição perfeita de imagens (ou geração de imagens idênticas), cada ângulo formado por dois espelhos deve satisfazer a condição de que o seu dobro seja divisor de 360° .

Portanto, sendo \hat{a} , \hat{b} e \hat{c} os ângulos formados entre os espelhos, devemos ter:

$$\frac{360^\circ}{2\hat{a}} = \frac{180^\circ}{\hat{a}} = n_1 ; \frac{180^\circ}{\hat{b}} = n_2 \text{ e } \frac{180^\circ}{\hat{c}} = n_3$$

Como \hat{a} , \hat{b} e \hat{c} são números inteiros, e também $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180^\circ$, teremos

$$\frac{180^\circ}{n_1} + \frac{180^\circ}{n_2} + \frac{180^\circ}{n_3} = 180^\circ \quad \text{ou} \quad \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1. \text{ Sendo assim temos as soluções}$$

$(n_1, n_2, n_3) = (3, 3, 3)$, $(2, 4, 4)$ e $(2, 3, 6)$, que correspondem aos ângulos dos triângulos as ternas $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}) = (60^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$, $(90^\circ, 45^\circ, 45^\circ)$ e $(90^\circ, 60^\circ, 30^\circ)$.

Para que haja a repetição perfeita das figuras obtidas com as reflexões, só podem existir então, três tipos de caleidoscópios: Equilátero, Isósceles e Escaleno, com ângulos formados pelos espelhos, nas formas $(60^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$, $(90^\circ, 45^\circ, 45^\circ)$ e $(90^\circ, 60^\circ, 30^\circ)$. Esses três tipos de caleidoscópios, por meio de bases que são colocadas no seu interior, permitem a visualização de pavimentações uniformes do plano. No entanto, a construção dessas bases envolve o estudo de conceitos geométricos que possibilita desenvolver um trabalho no ensino de geometria.

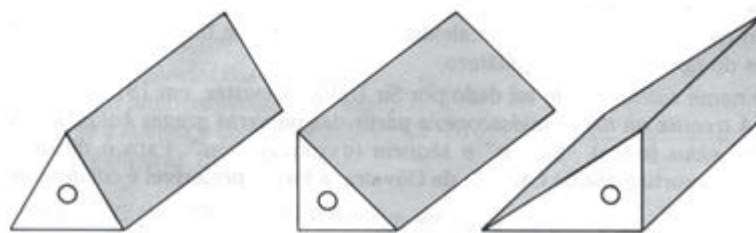


Figura 05

Os três tipos de caleidoscópios planos de três espelhos, Equilátero, Isósceles e Escaleno

Murari (1999) classifica os caleidoscópios em popular ou comercial e o educacional. O popular é conhecido como aquele que é vendido no comércio. . Seus espelhos vêm dispostos na forma equilátera e são envolvidos por uma superfície cilíndrica, em uma de suas extremidades existem alguns objetos ou pequenas figuras que, através de movimentos rotatórios, fornecem belas e imprevisíveis figuras por reflexões. Na outra extremidade há uma tampa cilíndrica com um orifício para observação.



Figura 06

Caleidoscópio popular

Já no caleidoscópio educacional, podemos prever como será o visual a ser obtido e pode ser construído da seguinte maneira:

Uma superfície prismática com três espelhos e apenas uma das bases triangulares fechada, com orifício de observação. A outra base triangular ficará aberta, à qual se ajustarão bases substituíveis. Essas bases são triângulos correspondentes à base do caleidoscópio. Geralmente são feitas de material transparente (papel vegetal) com construções gráficas de figuras geométricas adequadas, para que na reflexão múltipla forneça a pavimentação do plano desejado (mosaicos). É necessário também, um vidro plano transparente, colocado sobre dois suportes para entrada de luminosidade. O caleidoscópio educacional ficaria assentado na posição perpendicular a um vidro onde estaria colocada a base substituível.

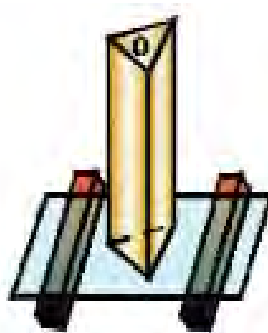


Figura 07
Caleidoscópio educacional

No entanto, Murari (1999) propõe a construção do caleidoscópio modificado, formado por três espelhos planos, o qual possibilita uma melhor visualização dos alunos, conforme figura 08. Note que se trata da anexação de um terceiro espelho (mais baixo) ao caleidoscópio com dois espelhos

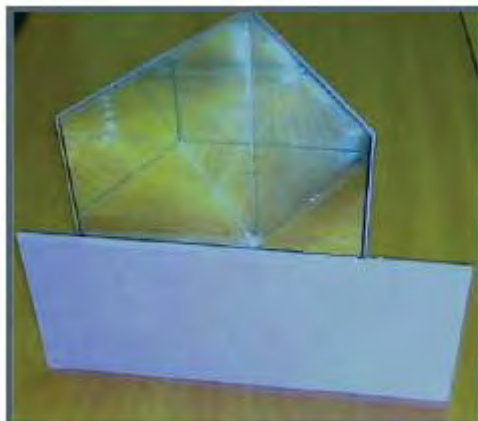


Figura 08
Caleidoscópio modificado, para uso educacional

Utilização do caleidoscópio modificado

a) Caleidoscópio Equilátero

Sobre uma folha-transferidor, dispor os espelhos articulados formando um ângulo de 60° . Encoste o terceiro espelho conforme figura 09. Observe que esse terceiro espelho é mais baixo do que os espelhos articulados, permitindo uma visão superior.

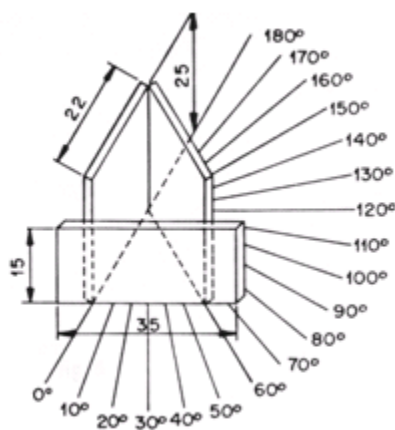


Figura 09
Ângulos do caleidoscópio modificado equilátero

b) Caleidoscópio Isósceles

Sobre a folha-transferidor, dispor os espelhos articulados formando um ângulo de 90° . Encoste o outro espelho conforme figura 10. Note que os outros dois ângulos do caleidoscópio serão de 45° .

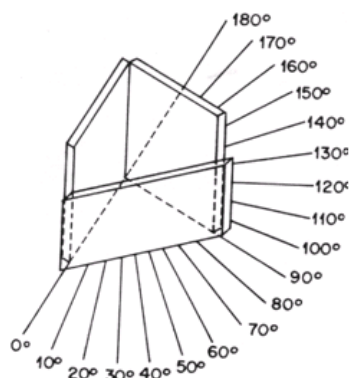


Figura 10
 Ângulos do caleidoscópio modificado *Isósceles*

c) Caleidoscópio Escaleno

Sobre a folha-transferidor, dispor os espelhos articulados formando um ângulo de 60° . Encoste o outro espelho perpendicularmente a um dos espelhos articulados, ajustando-o de tal modo a formar com o outro espelho um ângulo de 30° .

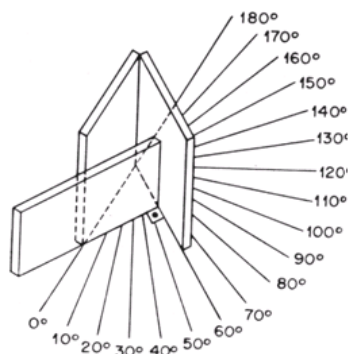


Figura 11
 Ângulos do caleidoscópio modificado *Escaleno*

Em Murari (1999) temos também um detalhamento desses caleidoscópios, que são utilizados para visualização de pavimentações.

1.4.3- Caleidoscópio com quatro espelhos

Em Murari (*ibidem*), encontramos a possibilidade de se construir Caleidoscópio com quatro espelhos planos articulados, formando superfície prismática de base retangular. Quatro espelhos planos articulados e perpendiculares a um plano, com suas

faces espelhadas voltadas para o interior, podem produzir a repetição de figuras por reflexões, de apenas dois tipos: quadrado ou retangular, dependendo da base formada pelos quatro espelhos.



Figura 12
Caleidoscópio com 4 espelhos

Podemos montar um caleidoscópio com quatro espelhos, utilizando dois conjuntos de espelhos articulados do caleidoscópio modificado. Como já citado anteriormente neste trabalho, para caleidoscópios com três espelhos planos, existem apenas três tipos para as bases triangulares: triângulos equiláteros (60° , 60° , 60°), triângulos retângulos isósceles (90° , 45° , 45°), triângulos retângulos escalenos (90° , 60° , 30°). Para o caleidoscópio de quatro espelhos, qual seria a forma angular do quadrilátero-base. De acordo com Barbosa e Murari (1998), para que as imagens coincidam em cada ângulo de par de espelhos, devemos ter que o seu dobro seja divisor de 360° , ou que cada ângulo do quadrilátero seja divisor de 180° . Sendo assim,

$$\frac{180^\circ}{a_1} = n_1$$

(inteiro positivo, $i = 1,2,3,4$, com $n_i \geq 2$) com $\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_4 = 360^\circ$,

Encontramos: (1)

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 2 \quad (1)$$

Supondo, sem perda de generalidade, que $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$, teremos, substituindo em (1) todos por n_1 , que $n_1 \leq 2$, de onde $n_1 = 2$.

Substituindo em (1) encontramos (2):

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{3}{2} \quad (2)$$

Trocamos todos por n_2 em (2), encontramos $n_2 \leq 2$, então, necessariamente, também $n_2 = 2$

Com argumentação análoga encontramos sucessivamente $n_3 = n_4 = 2$.

Como consequência, resulta que os quatro ângulos são retos, que implica na necessidade de se organizar os quatro espelhos formando por base um retângulo ou um quadrado. Generalizando, todo caleidoscópio com quatro espelhos planos deve formar uma superfície prismática de base retangular.

Estudo análogo, para k espelhos, à desigualdade $\frac{k}{n_1} \geq k - 2$ e como $n_1 \geq 2$ ($i = 1, 2, 3, \dots, k$) resulta ser $k \leq 4$, isto é: não é possível obter-se coincidências de todas as imagens em caleidoscópios com mais de 4 espelhos planos.

Apesar das opções apresentadas anteriormente, em nossa pesquisa utilizamos o caleidoscópio com dois espelhos articulados para realizar as construções geométricas.

1.5- Portasegmentos

As construções geométricas são de grande utilidade para o conhecimento geométrico do aluno. Segundo Cecco (1971), esse tipo de exercício tem valor quando se apresenta como um problema que o aluno deve pensar, raciocinar, resolver e verificar, aplicando as técnicas operatórias que se vem adquirindo. Sua apresentação deve seguir uma lógica gradual de acordo com os conhecimentos que o aluno tem, de maneira que este possa justificar cada passo e cada operação. Assim como em aritmética, não se pode encarar a resolução de situações propostas sem se conhecer previamente as técnicas operatórias. As construções geométricas devem ser precedidas do domínio de certas operações, como por exemplo: o traçado de uma reta, o transporte de um segmento, o traçado de perpendiculares e paralelas, a determinação do ponto médio de um segmento, o traçado da mediatriz e o transporte de ângulos.

Cecco (*ibidem*) propõe resolver algumas construções geométricas, usando unicamente o portasegmento. Diz ainda, que no processo de aprendizagem, seu emprego deve preceder à régua graduada e é importante que o aluno construa sua ferramenta de

trabalho. Existem outros recursos que proporcionam opções que simulam o uso da régua e compasso, um deles é o portasegmento. Sendo assim, o autor define a construção do portasegmento do seguinte modo: Pode-se confeccionar com papel cartão, cartolina, uma lâmina fina de metal, celulóide ou outro material plástico. O material mais adequado é aquele que apresenta uma superfície lisa e translúcida. Basta recortar um pedaço retangular de 1,5 a 3 cm de largura e de 10 a 15 cm de comprimento. Esses valores podem variar de acordo com seu uso. O ideal é que o aluno tenha preparado vários portasegmentos de diferentes medidas.

Seu objetivo, no entanto, é fazer com que os alunos construam os portasegmentos, oferecendo oportunidade para se comprometerem em atividades investigativas e consigam elaborar construções geométricas, as quais devem ser apresentadas em conformidade com os conhecimentos do aluno.

Cecco (1971) sugere algumas construções utilizando como única ferramenta o portasegmento; essas construções constam no capítulo 2: Possibilidades de Construções, item 2.1.5- Construções com os Portasegmentos. Porém, existem outras construções que podem ser realizadas com o referido instrumento; a seguir pretendemos apresentar algumas delas:

- 1) Construção dos ângulos de: 45° , 90° , 135° .

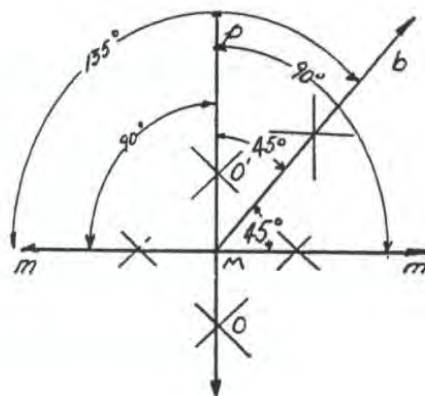


Figura 13
Ângulos de 45° , 90° e 135°

Aplicando o traçado de perpendiculares² e de bissetrizes com o portasegmento, pode ser construído ângulos de 45° , 90° , $22^\circ 30'$, 135° .

² As construções de perpendiculares e de bissetrizes utilizando o portasegmento podem ser encontradas no Capítulo 2 – Possibilidades de Construções, no item 2.1.5.

2) Construção dos ângulos de: 60° , 30° , 15° , 120°

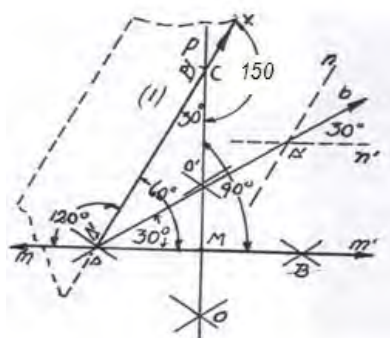


Figura 14a
Ângulos de 15° , 30° , 60° e 120°

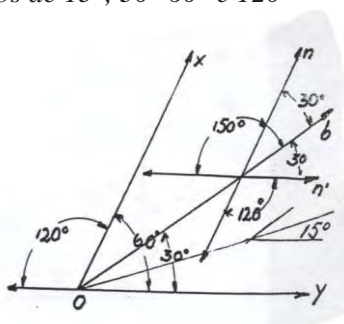


Figura 14b
Ângulos de 15° , 30° , 60° e 120°

Nesta atividade começa-se traçando a reta $\overleftrightarrow{mm'}$, sobre ela se marcam os pontos A e B e a perpendicular em seu ponto médio M. Sobre o portasegmento se marcam os pontos A' e B', tal que $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$. Coloca-se o portasegmento na posição (1), tendo que coincidir A' com A e B' com a perpendicular \bar{p} , sobre a qual se marca o ponto C. O ângulo $\hat{C}AB$ tem 60° . Mediante a bissetriz do ângulo $\hat{C}AB$ se forma o ângulo de 30° e de maneira igual pode se obter o ângulo de 15° .

3) Construir um quadrado dado seu lado.

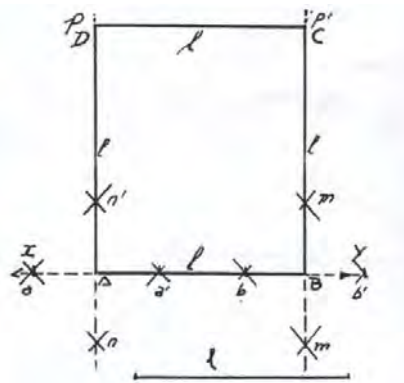


Figura 15
Quadrado1

Sobre uma reta \overleftrightarrow{xy} se toma $\overline{AB} \cong (L)$ lado. Traçam-se \overline{p} e $\overline{p'}$ perpendiculares a \overline{AB} em A e B, respectivamente. Sobre as perpendiculares tomam-se $\overline{AD} \cong \overline{AB}$ e $\overline{BC} \cong \overline{AB}$. Obtêm-se os pontos A, B, C e D que são os vértices do quadrado ABCD pedido.

4) Construir um quadrado dado sua diagonal.

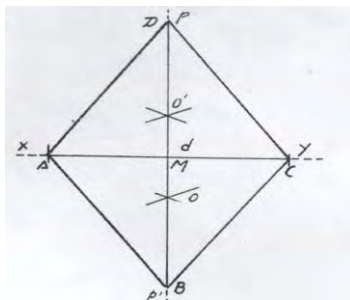


Figura 16
Quadrado2

Sobre uma reta \overleftrightarrow{xy} se toma $\overline{AC} \cong (d)$ diagonal. Traça-se a perpendicular no ponto médio de \overline{AC} . A semirreta $\overline{pp'}$ é a perpendicular à \overline{AC} que corta \overline{AC} no ponto médio ($\overline{AM} \cong \overline{MC}$). Sobre $\overline{pp'}$, a partir de M se toma $\overline{MD} \cong \overline{MB} \cong \overline{AM}$. Portanto ABCD é o quadrado pedido.

Essa mesma atividade poderia ser realizada de outra maneira:

Em um ponto A de \overleftrightarrow{xy} se traça $\overline{p'}$ perpendicular a \overleftrightarrow{xy} . Constrói-se a bissetriz \overline{ab} conforme indica a figura 17. Sobre \overline{ab} , a partir de A marca-se $\overline{AC} \cong d$. Traça-se

$\overleftrightarrow{mm'}$ perpendicular em seu ponto médio M. A reta $\overleftrightarrow{mm'}$ corta \overline{Ap} e a \overline{Ay} em B e em D. Portanto, A, B, C, D são os vértices do quadrado pedido.

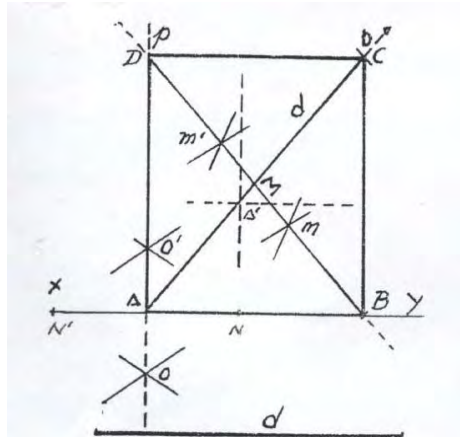


Figura 17
Quadrado3

5) Construir um losango dados a diagonal e o lado.

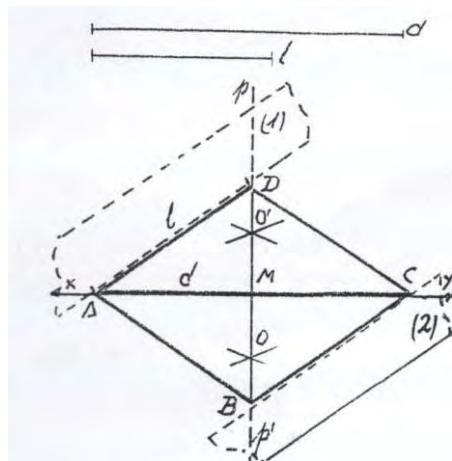


Figura 18
Losango1

Sobre uma reta \overleftrightarrow{xy} se toma a diagonal d . A diagonal $d \cong \overline{AC}$. Traça-se a mediatriz de \overline{AC} , determinando o ponto M. Com o portasegmento se toma o lado (L) e apoiando em A se marca a perpendicular $\overleftrightarrow{pp'}$ em D, na posição (1) conforme figura 18

$\overline{AD} \cong L$ (1). Dessa mesma maneira se repete a operação em (2) e se obtêm $\overline{CD} \cong L$. Portanto A, B, C, D são os vértices do losango pedido.

6) Construir um losango dado as diagonais.

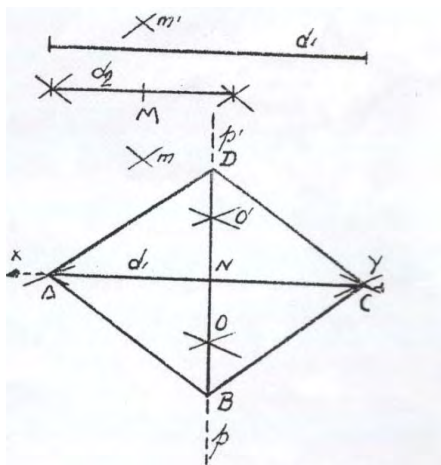


Figura 19
Losango2

Sobre uma reta \overleftrightarrow{xy} se toma $\overline{AC} \cong d_1$. Traça-se a mediatriz de \overline{AC} . Com o mesmo procedimento se divide a d_2 em partes iguais. Sobre $\overleftrightarrow{pp'}$ se toma $\overline{ND} = \overline{NB} = d_2/2$. Portanto A, B, C, D são os vértices do losango pedido.

1.6- O software Geogebra

Como vimos anteriormente, o uso de computadores possibilita contextos propícios para o desenvolvimento de noções e conceitos geométricos. Tendo em vista esta possibilidade de aquisição de conhecimentos específicos para a nossa pesquisa, escolhemos o software Geogebra, o qual é um programa livre, desenvolvido por Markus Hohenwater, que une Geometria, Álgebra e Cálculo, sendo um recurso bastante eficaz para o tratamento geométrico de forma interativa. De maneira bastante simples, é possível fazer construções incluindo pontos, retas, segmentos, paralelas e muitas outras.

O Geogebra fornece três diferentes janelas dos objetos matemáticos: a *Zona Gráfica*, a *Zona Algébrica*, ou numérica, e a *Folha de Cálculo*. Elas permitem mostrar os objetos matemáticos em três diferentes representações: gráfica, algébrica e nas células da folha de cálculo. Assim, todas as representações do mesmo objeto estão ligadas dinamicamente e adaptam-se automaticamente, às mudanças realizadas em qualquer delas, independente da forma como esses objetos foram inicialmente criados.

Ao ser iniciado, esse software mostra a janela representada abaixo. Por meio das opções de construção na barra de ferramentas, podem-se fazer construções na área de trabalho. Simultaneamente, as coordenadas e equações correspondentes são mostradas na janela de álgebra. O campo de entrada de texto é usado para escrever coordenadas, equações, comandos e funções diretamente, e estes são mostrados na área de trabalho imediatamente depois de pressionada a tecla <ENTER>.

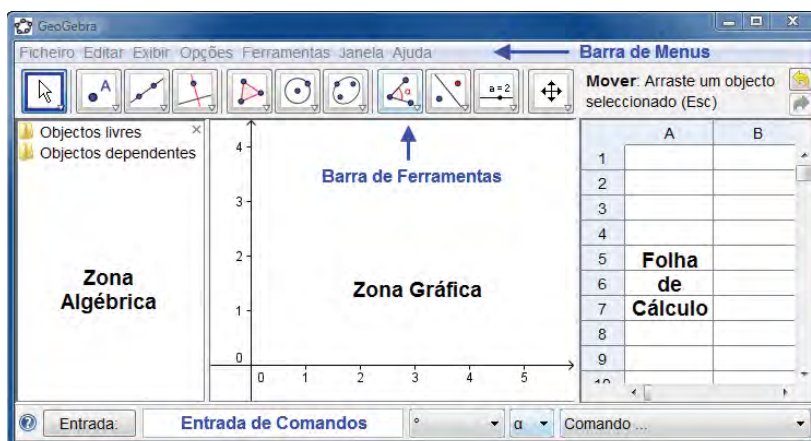


Figura 20
As três janelas do software Geogebra

Pode se mover objetos na *Zona Gráfica* arrastando-os com o mouse e, ao mesmo tempo, as suas representações algébricas são atualizadas automaticamente na *Zona Algébrica*.

Cada ícone na barra de ferramentas contém um conjunto de operações similares. Para abrir essa caixa, deve se clicar na pequena flecha situada no canto inferior direito do respectivo ícone.



Figura 21
Barra de ferramentas do software Geogebra

As demais ferramentas que não estão aqui relacionadas são de simples acesso e no decorrer da utilização do programa entende-se rapidamente como manipulá-las.

As características do software Geogebra possibilitam criar atividades investigativas, as quais o aluno pode descobrir as propriedades de uma figura rapidamente. E essas investigações geométricas podem contribuir para concretizar a relação entre situações da realidade e situações matemáticas. Na próxima seção, veremos as possibilidades de Construções.

CAPÍTULO 2

POSSIBILIDADES DE CONSTRUÇÕES

Este capítulo refere-se à parte matemática da pesquisa que envolve as possibilidades de construções com régua não graduada e compasso, transferidor, par de esquadros, portasegmento, software e caleidoscópio. Algumas das construções mencionadas não farão parte do experimento de ensino, ficando apenas o seu registro para consulta do leitor. São descritas também as atividades que foram desenvolvidas com os alunos durante os encontros.

2.1.- Construções com Régua não Graduada e Compasso

Ângulos

Possuindo os conceitos de ângulos e de congruência de ângulos, podemos introduzir o seguinte:

Dois ângulos se chamam adjacentes se tem um lado comum e seus outros dois lados são semirretas complementares. Os ângulos $a\hat{A}b$ e $c\hat{A}b$, da figura 22 são adjacentes.

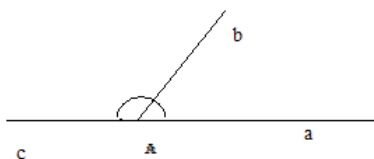


Figura 22
Ângulos adjacentes

Teorema (1): A soma das medidas de ângulos adjacentes é igual a 180° .

Demonstração: Sejam $a\hat{A}b$ e $c\hat{A}b$ os ângulos adjacentes dados da figura 22. A semirreta b passa entre os lados a e c do ângulo raso. Disso resulta um ângulo raso, ou seja, 180° .

Como novo conceito, dizemos que dois ângulos se chamam *opostos pelo vértice*, se os lados de um ângulo são semirretas complementares dos lados do outro. Os ângulos $a\hat{A}b$ e $d\hat{A}c$ da figura 23 são opostos pelo vértice.

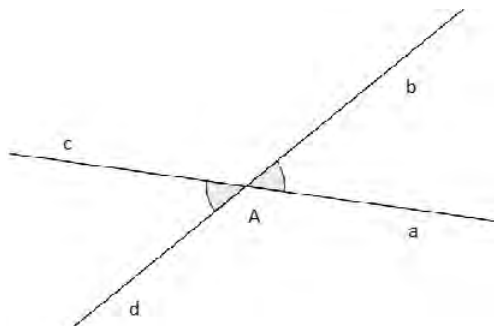


Figura 23
Ângulos opostos pelo vértice

Teorema (2): Ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Demonstração: Sejam $a\hat{A}b$ e $d\hat{A}c$ os ângulos opostos pelo vértice, dados da figura 23. O ângulo $d\hat{A}a$ é adjacente ao ângulo $a\hat{A}b$ e ao ângulo $c\hat{A}d$. Segue, do teorema anterior, que cada um dos ângulos $a\hat{A}b$ e $d\hat{A}c$ complementa o ângulo $d\hat{A}a$ até 180° , ou seja, que os ângulos $a\hat{A}b$ e $d\hat{A}c$ são congruentes.

Um ângulo de medida igual a 90° chama-se ângulo reto. Do teorema (1), resulta que o ângulo adjacente a um ângulo reto, é também reto.

Primeira Construção Fundamental: Transporte de segmento

Construção de um segmento de reta congruente a um segmento dado.

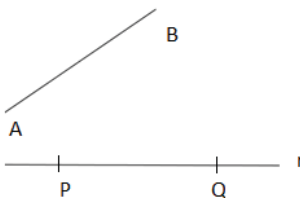


Figura 24
Transporte de segmento

É possível transportar um segmento de reta utilizando régua e compasso.

Construção: Considerando uma reta r , sobre a qual queremos transportar \overline{AB} . Marca-se um ponto P sobre r . Com a ponta seca em A , traça-se a abertura \overline{AB} . A seguir, com a ponta seca em P e utilizando a abertura \overline{AB} , marca-se Q sobre r . O segmento \overline{PQ} é congruente a \overline{AB} .

Justificativa: Como a abertura do compasso \overline{AB} é levada na reta r no ponto P , então $\overline{AB} = \overline{PQ}$.

Segunda Construção Fundamental: Transporte de ângulo

Transportar um ângulo α (dado) para uma semirreta.

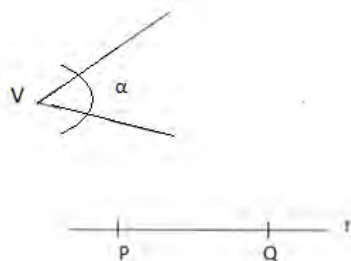


Figura 25
Transporte de ângulo

Construção: Traçar uma semirreta \overrightarrow{PQ} qualquer. Com o compasso centrado no vértice V do ângulo dado e abertura qualquer, marcamos A e B nos lados do ângulo dado. Com centro em P e raio \overline{VA} , traçamos o arco \hat{a} , que encontra \overrightarrow{PQ} em S . Com centro em S e raio AB , traçamos o arco \hat{b} . Então os arcos \hat{a} e \hat{b} determinam X . Tracemos a semirreta \overrightarrow{PX} .

O ângulo $X\hat{P}S$ é congruente ao ângulo dado.

Justificativa: Comparemos os triângulos $\triangle VAB$ e $\triangle PSX$

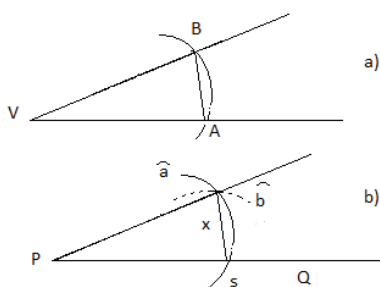


Figura 26
Ângulos transportados

Temos que:

$$\overline{VA} \cong \overline{PS} \text{ (por construção);}$$

$$\overline{VB} \cong \overline{PX} \text{ (por construção);}$$

$$\overline{AB} \cong \overline{SX} \text{ (por construção)}$$

Pelo caso L.L.L., temos $\triangle VAB \cong \triangle PSX$. Portanto, todos os seus ângulos são congruentes.

Dado um ângulo de vértice O e lados \overline{OA} e \overline{OB} , dizemos que \overline{OC} é bissetriz do ângulo \hat{AOB} , quando \overline{OC} é uma semirreta interna ao ângulo, com origem no vértice do ângulo e que divide em dois ângulos congruentes. Na Figura 27, medida de \hat{AOC} é igual à medida de \hat{BOC} .

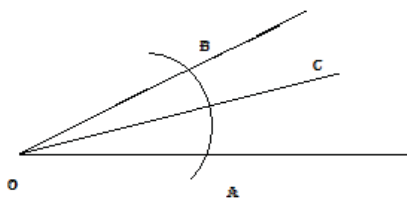


Figura 27
Bissetriz do ângulo

Terceira Construção Fundamental: bissetriz

Construção da bissetriz de um ângulo dado.

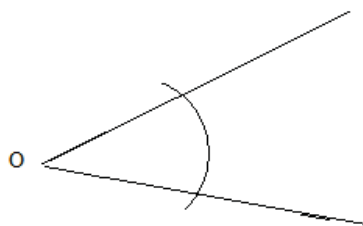


Figura 28
Ângulo dado

Construção: Centro no vértice O, traçar um arco qualquer. Marcar R e S sobre os lados do ângulo. Com centro em R, e depois em S, e mesma abertura, traçar os arcos \hat{a} e \hat{b} , internos ao ângulo. Os arcos \hat{a} e \hat{b} determinam E. Traçar a semirreta \overrightarrow{OE} . Então \overrightarrow{OE} é a bissetriz.

Justificativa: Comparemos os triângulos $\triangle OSE$ e $\triangle ORE$. Eles têm:

$\overline{OS} \cong \overline{OR}$ (por construção);

$\overline{SE} \cong \overline{RE}$ (por construção);

\overline{OE} é lado comum.

Pelo caso L.L.L. temos $\triangle OSE \cong \triangle ORE$

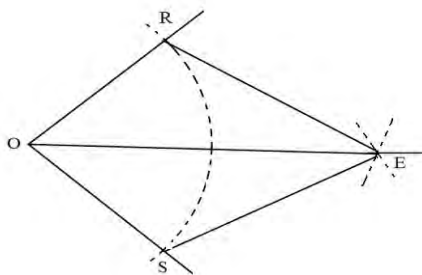


Figura 29
Comparando os triângulos

Assim, respectivamente, seus ângulos também são congruentes. Logo, $E\hat{O}S \cong E\hat{O}R$ e \overrightarrow{OE} é bissetriz.

Elementos de um Triângulo

É uma figura geométrica formada por três retas que se encontram duas a duas e não passam pelo mesmo ponto, formando três lados e três ângulos.

O triângulo pode ser classificado segundo a medida do seu lado. Triângulo escaleno: todos os lados e ângulos são diferentes. Triângulos isósceles: dois lados iguais e os ângulos opostos a esses lados iguais. Triângulo equilátero: todos os lados e ângulos iguais.

Denominamos altura, com relação ao lado \overline{BC} , ao segmento que, tem origem no vértice A, e é perpendicular ao lado \overline{BC} formando um ângulo de 90° , veja figura 30a e 30b. Da mesma forma, encontramos a medida da altura de um triângulo, através de um segmento de reta com origem em um dos vértices e perpendicular (formando um ângulo de 90°) ao lado oposto.

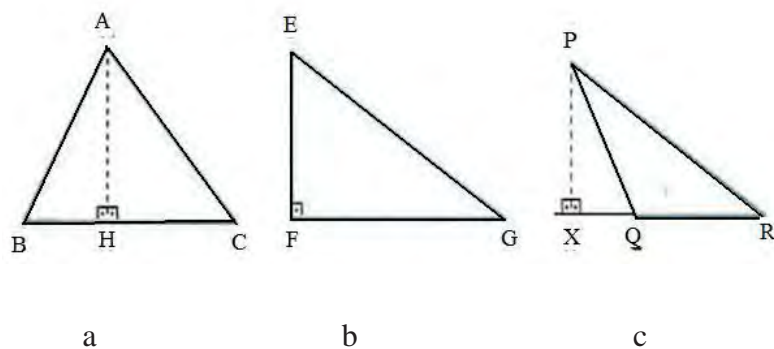


Figura 30
Alturas de triângulos

Mediana é um segmento que divide as bases do triângulo em duas partes iguais. Desta forma, temos que mediana é um segmento de reta com origem em um dos vértices do triângulo e extremidade no ponto médio do lado oposto ao vértice.

Bissetriz também é um segmento de reta com origem em um dos vértices do triângulo com a outra extremidade ao lado oposto a esse vértice. Sendo que ela divide ao meio o ângulo correspondente ao vértice.

Dado o segmento \overline{AB} , chamamos ponto médio desse segmento ao ponto M que o divide em dois segmentos congruentes, \overline{AM} e \overline{MB} , ou seja, $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.

Admitiremos agora, mais alguns resultados iniciais, sem demonstração neste texto, os quais podem ser justificados usando semelhança de triângulos. Para tanto, consideremos um triângulo ABC, com ângulo reto em C, conforme Figura 31

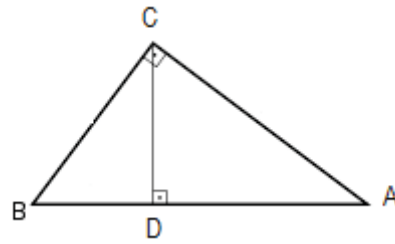


Figura 31
Triângulo ABC

(a) A medida da altura, traçada desde o vértice C, é a média proporcional entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

$$(CD)^2 = AD \cdot BD$$

(b) A medida de cada um dos catetos é a média proporcional entre a hipotenusa e sua projeção sobre a hipotenusa. $(AC)^2 = AB \cdot AD$; $(CB)^2 = AB \cdot BD$

(c) O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$$

(d) Vale a recíproca de (c).

Teorema (3): A soma das medidas de dois ângulos quaisquer de um triângulo é menor que 180° .

Demonstração: Consideremos o $\triangle ABC$, da Figura 32. Mostremos que a soma das medidas dos ângulos \hat{A} e \hat{C} é menor que 180° . Pelo vértice B, tracemos a mediana com relação ao lado \overline{AC} , interceptando no ponto O. Construir no prolongamento do segmento \overline{BO} , o segmento \overline{OD} , congruente a \overline{BO} . Temos $\triangle AOD \cong \triangle COB$, pois $\hat{AOD} \cong \hat{COB}$ (opostos pelo vértice), $\overline{AO} = \overline{CO}$ (por construção) e $\overline{OD} \cong \overline{OB}$ (por construção).

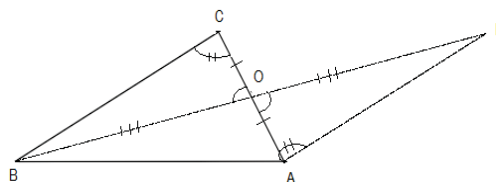


Figura 32
Soma das medidas de dois ângulos

Da congruência desses triângulos podemos escrever $O\hat{C}B \cong O\hat{A}D$. O ângulo $B\hat{A}D$ é igual à soma dos ângulos $B\hat{A}O$ e $O\hat{A}D$, visto que a semirreta \overrightarrow{AO} intercepta o segmento \overline{BD} cujos extremos se encontram nos lados do ângulo $B\hat{A}D$ e, por isso, passa entre os lados do ângulo $B\hat{A}D$.

Sendo $O\hat{A}D \cong O\hat{C}B$, concluímos que: $m(B\hat{A}D) = m(B\hat{A}O) + m(O\hat{C}B)$.

Agora, o ângulo $B\hat{A}D$ não é raso, pois o ponto D não se encontra na reta \overleftrightarrow{AB} , se ele se encontrasse em \overleftrightarrow{AB} , o ponto O não seria ponto médio de \overline{AC} , pois pertenceria à \overline{BA} , conseqüentemente \overline{AC} estaria contido em \overline{BA} e não teríamos o ΔABC .

Assim, a soma das medidas dos ângulos \hat{A} e \hat{C} , do triângulo ΔABC , não atinge 180° .

Teorema (4): Em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes, ou seja, se $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, no ΔABC , da Figura 33, então $\hat{B} \cong \hat{C}$. Denomina-se base o lado sobre qual se apóia a figura. No triângulo isósceles, considera-se base o lado de medida diferente.

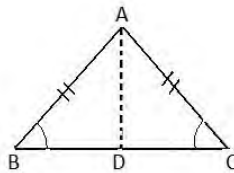


Figura 33
Triângulo isósceles

Demonstração: Tracemos a bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$. Obtemos os ângulos congruentes $B\hat{A}D$ e $C\hat{A}D$. Afirmamos que $\Delta BAD \cong \Delta CAD$, pois:

$$\overline{BA} = \overline{CA} \text{ (por hipótese)}$$

$$B\hat{A}D \cong C\hat{A}D \text{ (bissetriz)}$$

$$\overline{AD} \text{ (lado comum)}$$

Logo, os triângulos são congruentes pelo caso L.A.L. Assim, os seus demais ângulos e lados, na mesma posição, também têm a mesma medida. Portanto, $A\hat{B}D \cong A\hat{C}D$.

Teorema (5): Todo triângulo equilátero possui os três ângulos congruentes.

Perpendicularidade

Um ângulo reto tem medida igual a 90° e que, como consequência, o ângulo adjacente de um ângulo reto é também reto.

Sejam a e b duas retas que se interceptam, as semirretas dessas retas formam quatro ângulos. Seja α um deles. Qualquer um dos três ângulos restantes será, então, adjacente desse ângulo α , ou oposto pelo vértice com relação a α . Daqui se deduz que, se um dos ângulos é reto, também são retos os demais ângulos. Dizemos que duas retas são perpendiculares, se o ângulo entre elas for de 90° .

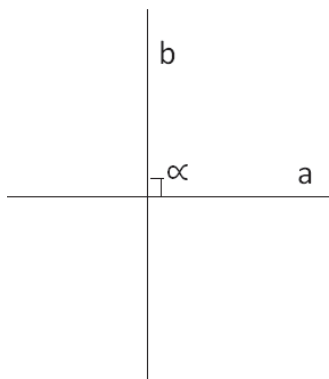


Figura 34
Perpendicular

Quarta Construção Fundamental: perpendicular

Dada uma reta r e um ponto P , construir por P , uma reta perpendicular à reta r .

1º caso: O ponto P pertence à reta r .

2º caso: O ponto P não pertence à r .

3º caso: O ponto P não pertence ou coincide com a origem de uma semirreta.

Vamos explicar cada um dos casos:

1º Caso: O ponto P pertence à reta r .

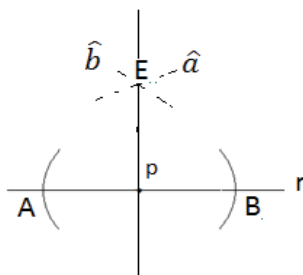


Figura 35
O ponto P pertence à reta

Construção: Com a ponta seca em P e abertura qualquer, marcamos dois pontos A e B, na reta r. Com centro em A e raio maior que AP, traçamos o arco \hat{a} e com centro em B e mesmo raio, traçamos o arco b. Os arcos a e b determinam o ponto E. \overline{EP} é a reta perpendicular a r, por P.

Justificativa: \overline{EP} por construção, intercepta o ponto P. Não podendo usar o transferidor, e mesmo se pudesse, como ter certeza de que \overline{EP} é perpendicular a r?

Formamos então os triângulos $\triangle EAP$ e $\triangle EBP$. Esses triângulos são congruentes, pelo caso L.L.L., pois tem:

$$\overline{AP} \cong \overline{BP} \text{ (por construção)}$$

$$\overline{EA} \cong \overline{EB} \text{ (por construção)}$$

\overline{EP} é lado comum

Logo, se são congruentes, todos os seus ângulos, são respectivamente congruentes e pode ser escrito como $\hat{APE} \cong \hat{BPE}$. Como $m(\hat{APE}) + m(\hat{BPE}) = 180^\circ$, e eles são congruentes, podemos concluir que $m(\hat{APE}) = m(\hat{BPE}) = 90^\circ$.

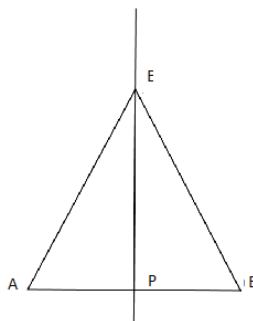


Figura 36
Ângulos congruentes

2º caso: O ponto P não pertence à r.

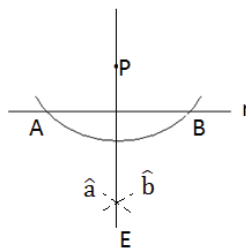


Figura 37
O ponto P não pertence à reta

Construção: Com a ponta seca em P e abertura qualquer, marcamos dois pontos A e B, na reta r. Com a mesma abertura e com a ponta seca em A e depois em B, traçamos os arcos \hat{a} e \hat{b} ; \hat{a} e \hat{b} determinam o ponto E. A reta \overleftrightarrow{EP} é a reta perpendicular a r, por P.

Justificativa: Vamos chamar de Q a intersecção de \overleftrightarrow{PE} com r. Afirmamos que $\triangle APE \cong \triangle BPE$ pelo caso L.L.L.:

$$\overline{AP} \cong \overline{BP} \text{ (por construção)}$$

$$\overline{AE} \cong \overline{BE} \text{ (por construção)}$$

$$\overline{PE} \text{ é lado comum}$$

Assim, os ângulos correspondentes são congruentes e podemos escrever $\widehat{APE} \cong \widehat{BPE}$. Comparemos agora os triângulos $\triangle APQ$ e $\triangle BPQ$. Afirmamos que são congruentes, pelo caso L.A.L., isto porque:

$$\overline{AP} \cong \overline{BP} \text{ (por construção)}$$

$$\overline{PQ} \text{ é lado comum}$$

$$\widehat{APQ} \cong \widehat{BPQ} \text{ (como queríamos provar)}$$

Novamente, os seus demais ângulos são congruentes, e podemos escrever: $\widehat{AQP} \cong \widehat{BQP}$. Como $m(\widehat{AQP}) + m(\widehat{BQP}) = 180^\circ$, segue que $m(\widehat{AQP}) = m(\widehat{BQP}) = 90^\circ$. E com isso, \overleftrightarrow{EP} é perpendicular à reta r.

Observações:

- 1) A medida desse segmento \overline{PQ} é chamada distância do ponto P à reta r.
- 2) A distância entre dois pontos A e B é o comprimento do segmento \overline{AB}

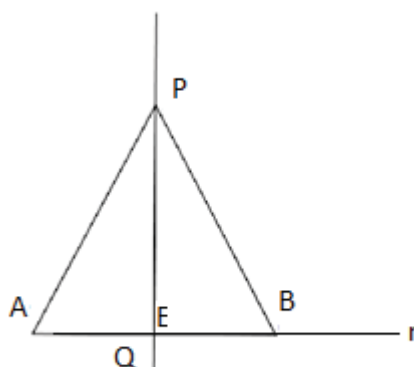


Figura 38
 \overline{EP} é perpendicular à reta r .

3º caso: O ponto P não pertence ou coincide, com a origem de uma semirreta.



Figura 39
 P coincide com a origem de uma semirreta

Neste caso, basta prolongar a semirreta na direção do ponto P , formando uma reta que contenha essa semirreta dada e caímos no 1º caso. Se ao prolongarmos a semirreta, P não pertencer a reta, então caímos no 2º caso. E assim é possível construir a perpendicular.

A mediatriz de um segmento AB é a reta perpendicular ao segmento passando por seu ponto médio M .

Quinta Construção Fundamental: mediatriz

Traçar a mediatriz de um segmento dado.



Figura 40
Segmento dado

Propriedade: Todo ponto da mediatriz, e só eles, equidista das extremidades do segmento.

Construção: Com a ponta seca em A e abertura maior que a metade de \overline{AB} (aproximadamente), traçar os arcos \hat{a} e \hat{a}' . Com centro em B e mesma abertura, traçamos os arcos \hat{b} e \hat{b}' . Os arcos \hat{a} e \hat{b} determinam o ponto E; \hat{a}' e \hat{b}' , determinam F. \overline{EF} é a mediatriz de \overline{AB} , ver figura 41.

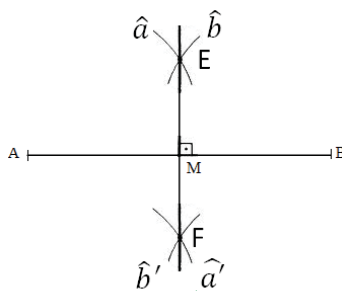


Figura 41
Mediatriz de um segmento

Justificativa: A mediatriz de \overline{AB} é uma reta que intercepta o ponto médio de \overline{AB} e é perpendicular a AB.

Basta provar que $\triangle AEF \cong \triangle BEF$, para concluir que $\widehat{AEF} \cong \widehat{BEF}$. Depois que, $\triangle AEQ \cong \triangle BEQ$, onde Q é a intersecção de \overline{EF} com \overline{AB} . Nesta segunda congruência obtemos:

$$m(\widehat{AQE}) = m(\widehat{BQE}) = 90^\circ$$

$$\overline{AQ} \cong \overline{BQ}$$

No primeiro caso, \overline{EF} e \overline{AB} são perpendiculares. No segundo caso, Q é ponto médio de AB.

Paralelismo

Sejam \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD} duas retas, cortadas por uma transversal \overleftrightarrow{AC} .

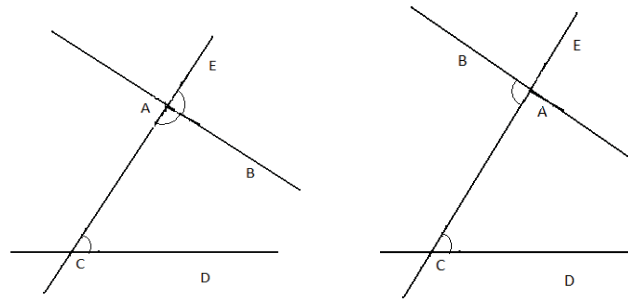


Figura 42
Reta transversal (1)

A reta \overleftrightarrow{AC} se chama *secante* com relação às retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD} . Os ângulos formados por essas retas têm nomes especiais. Se os pontos B e D se acham em um mesmo semiplano, com relação à reta \overleftrightarrow{AC} , os ângulos $B\hat{A}C$ e $D\hat{C}A$ se denominam *correspondentes internos*. Os ângulos $B\hat{A}E$ e $D\hat{C}A$ são correspondentes (ou, um interno e outro externo) Se os pontos B e D estão em diferentes semi-planos, com relação à reta \overleftrightarrow{AC} , os ângulos $B\hat{A}C$ e $D\hat{C}A$ se denominam alternos internos.

Teorema (6): Sejam \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD} duas retas e \overleftrightarrow{AC} uma secante das mesmas. Se os ângulos alternos internos são congruentes, as retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD} são paralelas.

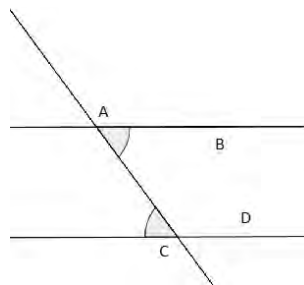


Figura 43
Reta Secante AC

Demonstração: Suponhamos que \overline{AB} e \overline{CD} não sejam paralelas, figura 44, ou seja, que se encontram em um ponto P, formando o ΔACP . Sendo os ângulos alternos internos iguais, podemos escrever: $\widehat{BAC} \cong \widehat{FCA}$ e $\widehat{EAC} \cong \widehat{DCA}$. Sendo \widehat{EAB} e \widehat{FCD} rasos, temos:

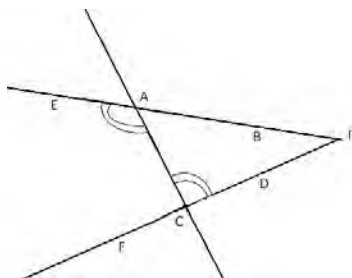


Figura 44
Reta transversal (3)

$$(1) m(\widehat{EAC}) + m(\widehat{CAB}) = 180^\circ;$$

$$(2) m(\widehat{FCA}) + m(\widehat{ACD}) = 180^\circ$$

Substituindo \widehat{EAC} por \widehat{DCA} em (1) vem: $m(\widehat{DCA}) + m(\widehat{CAB}) = 180^\circ$. Mas, isto contraria o *Teorema (3)*. Com isso, não podemos fazer a suposição de que \overline{AB} e \overline{CD} não sejam paralelas.

Teorema (7): Sejam \overline{AB} e \overline{CD} duas retas e \overline{AC} uma reta secante das mesmas. Se $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, os ângulos alternos internos formados são congruentes.

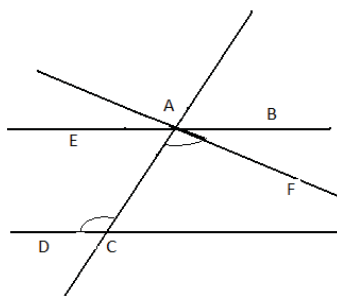


Figura 45
Ângulos alternos internos

Consideremos $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Suponhamos, por absurdo, que os ângulos alternos internos \widehat{ACD} e \widehat{CAB} não são congruentes. Transportemos o ângulo \widehat{ACD} de tal modo que o vértice C coincida com A. Obtemos $\widehat{CAF} \cong \widehat{ACD}$. Estes ângulos são alternos internos

formados pelas retas \overleftrightarrow{AF} e \overleftrightarrow{CD} , cortadas por \overleftrightarrow{AC} . Pelo Teorema (6), sendo $\widehat{CAF} \cong \widehat{ACD}$, temos $\overleftrightarrow{AF} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

Como por hipótese, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, acabamos por obter, por um ponto A, que não pertence à reta \overleftrightarrow{CD} , duas retas paralelas a \overleftrightarrow{CD} , e isto contraria o teorema (6) das paralelas.

Logo $\widehat{ACD} \cong \widehat{CAB}$.

Teorema (8): Consideremos duas retas a e b , cortadas por uma transversal c . Se os ângulos alternos internos formados são congruentes, então os ângulos correspondentes também são congruentes.

Demonstração: Suponhamos que \widehat{ABE} e \widehat{DEB} (alternos internos). Como \widehat{DEB} e \widehat{GEF} são opostos pelo vértice, o Teorema (2) nos garante sua congruência. Assim $\widehat{ABE} \cong \widehat{DEB}$ (alternos internos) e $\widehat{DEB} \cong \widehat{GEF}$ (opostos pelo vértice). Logo, podemos escrever $\widehat{ABE} \cong \widehat{GEF}$.

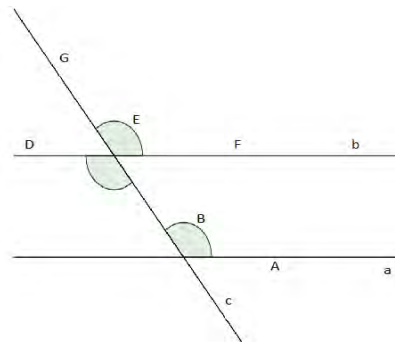


Figura 46
Ângulos correspondentes

Sexta Construção Fundamental: paralela

Dada uma reta r e um ponto A fora dela, construir por A uma reta paralela à reta r .

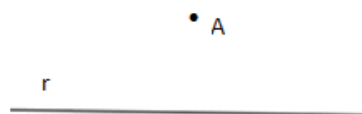


Figura 47
Ponto P fora da reta r

1ª Construção

Construção: Traçar uma reta qualquer por A , que intercepte r em B . Marquemos C em r . Temos o ângulo \widehat{ABC} , com vértice em B e tendo \overline{BC} como lado, construir um ângulo, congruente a \widehat{ABC} . O outro lado desse novo ângulo, que denominaremos \overline{AD} , é paralelo a r .

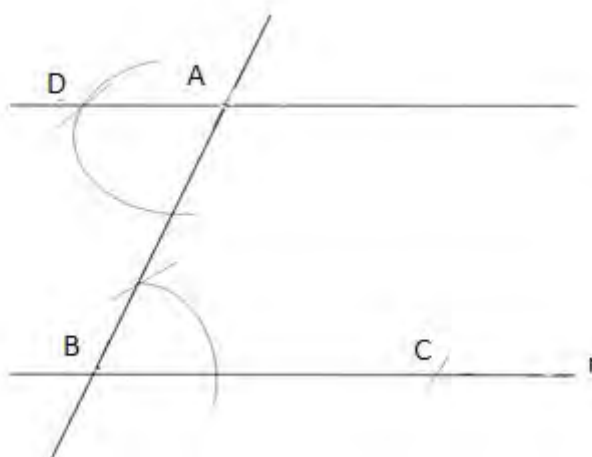


Figura 48
Traçado de retas paralelas (1)

Justificativa: Transportamos \widehat{ABC} para \widehat{BAD} . Logo, $\widehat{ABC} \cong \widehat{BAD}$. A semirreta \overrightarrow{AD} está contida em \overline{AD} reta por A . Assim, \widehat{ABC} e \widehat{BAD} , são alternos internos com relação às retas r e \overline{AD} , cortadas por \overline{AB} . Pelo Teorema (6), as retas r e \overline{AD} são paralelas.

2ª Construção

Construção: Traçar uma reta qualquer pelo ponto A , que intercepte r em B . marquemos C sobre r . temos \widehat{ABC} . Marquemos D sobre \overline{AB} tal que A se encontre, nessa reta, entre B e D . Com vértice em A e \overline{AD} como lado, construir um ângulo congruente

ao ângulo \widehat{ABC} . O outro lado desse novo ângulo, que denominaremos de \overleftrightarrow{AE} , é paralelo a r .

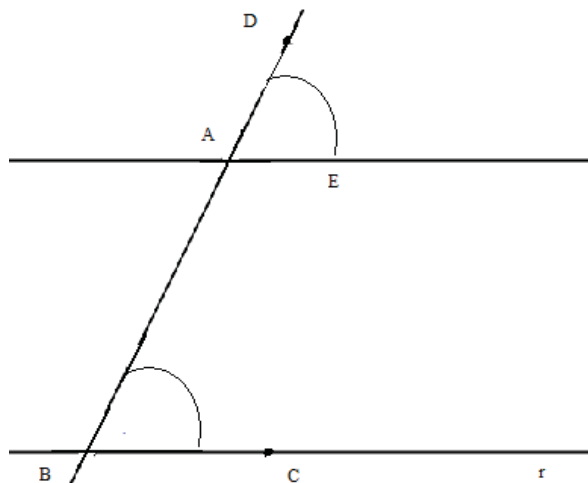


Figura 49
Traçado de retas paralelas (2)

Justificativa: marquemos F sobre \overleftrightarrow{AE} tal que A se encontre entre F e E.

$\widehat{ABC} \cong \widehat{DAE}$ por (construção)

$\widehat{FAB} \cong \widehat{DAE}$ (opostos pelo vértice), então $\widehat{FAB} \cong \widehat{ABC}$

Sendo alternos internos, pelo *Teorema (6)*, $r \parallel \overleftrightarrow{AE}$.

Teorema (9): A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .

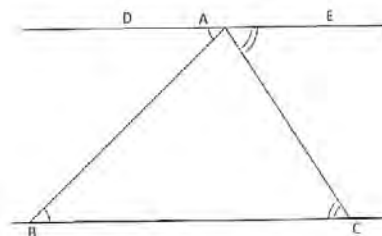


Figura 50
Medida dos ângulos de um Triângulo

Demonstração: Consideremos a reta \overleftrightarrow{BC} que contem o lado \overline{BC} do triângulo. Por A, que não pertence a \overleftrightarrow{BC} , tracemos uma paralela à \overleftrightarrow{BC} . Pelo Teorema (7), são congruentes os ângulos alternos internos: $\widehat{ABC} \cong \widehat{BAD}$ e $\widehat{ACB} \cong \widehat{CAE}$.

Sendo $m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{CAE}) = 180^\circ$ (ângulo raso), podemos escrever $m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{ACB}) = 180^\circ$

3ª Construção

Construção: Marquemos um ponto B sobre r. Centramos o compasso em B e, com abertura \overline{BA} , tracemos um arco que encontra r em C e D. Centremos o compasso em D, e, com abertura \overline{CA} , tracemos um arco que encontra o primeiro arco em E. A reta \overline{AE} é paralela à reta r.

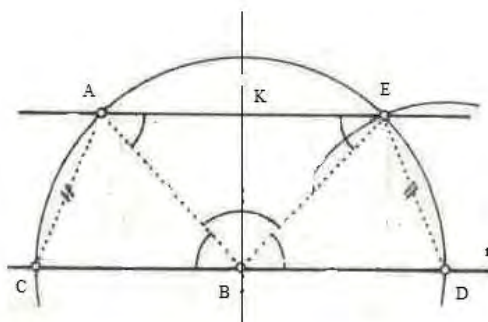


Figura 51
Traçado de retas paralelas (3)

Justificativa: Formemos triângulos $\triangle ACB$ e $\triangle EDB$. Eles são congruentes pelo caso L.L.L., pois:

$$\overline{AC} \cong \overline{ED} \text{ (por construção)}$$

$$\overline{CB} \cong \overline{DB} \text{ (por construção)}$$

$$\overline{AB} \cong \overline{EB} \text{ (por construção)}$$

Logo, $\widehat{ABC} \cong \widehat{EBD}$. O $\triangle ABE$ é isósceles, pois $\overline{AB} \cong \overline{EB}$. Logo, $\widehat{BAE} \cong \widehat{BEA}$. Por B, tracemos a perpendicular \overline{AE} , obtendo K. Temos, $\widehat{ABK} \cong \widehat{EBK}$, pois a soma das medidas dos ângulos internos dos triângulos $\triangle ABK$ e $\triangle EBK$ são iguais a 180° . Assim, $2m(\widehat{ABC}) + 2m(\widehat{ABK}) = 180^\circ$.

Portanto, $m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ABK}) = 90^\circ \rightarrow \widehat{CBK}$ reto.

Portanto, \widehat{CBK} e \widehat{BKE} são alternos internos de mesma medida. Logo, $\overline{AE} // \overline{CD}$, pelo *Teorema (6)*.

Circunferência

Circunferência é o conjunto dos pontos do plano que são equidistantes de um ponto dado. Esse ponto é chamado *centro* da circunferência. O segmento que possui uma extremidade no centro e outra em qualquer ponta da circunferência é chamado de *raio* (que tem medida positiva). Na figura 52, temos uma circunferência de centro O e raio com medida $\overline{OP} = 2$ unidades. *Corda* é um segmento que tem suas extremidades na circunferência. *Diâmetro* é uma corda que passa pelo centro da circunferência. \overline{AB} é uma corda e \overline{CD} é um diâmetro. A medida do diâmetro é o dobro da medida do raio.

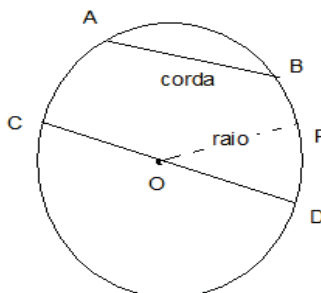


Figura 52
Raio e Corda na Circunferência

Se uma reta corta uma circunferência em dois pontos distintos, ela é secante à circunferência. A reta que passa pelo centro de uma circunferência e é perpendicular a uma secante a essa circunferência, passa necessariamente pelo ponto médio da corda determinada por essa secante.

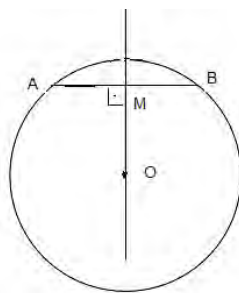


Figura 53
Secante à uma Circunferência

Dizemos que uma reta é tangente à uma circunferência se ela intercepta essa circunferência em apenas um ponto. Um problema imediato é o seguinte: “Marcado um ponto P sobre uma circunferência, como construir a tangente à circunferência por esse ponto? Ou seja, construir a tangente significa provar sua existência. Colocamos então, a seguinte construção:

Sétima Construção Fundamental: Tangente

Dado um ponto P, numa circunferência, traçar a reta tangente à circunferência por esse ponto.

Construção: Traçar uma reta passando pelo ponto P e pelo centro da circunferência. Construir, por P, uma reta perpendicular a \overline{OP} . Essa reta é tangente à circunferência por P.

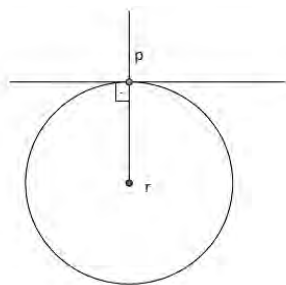


Figura 54
Ponto P e o centro da circunferência

Justificativa: Seja b a reta perpendicular ao raio, em P . Suponhamos que b não seja tangente à circunferência, ou seja, que seja secante, cortando-a nos pontos A e B , o ΔOAB é isósceles, logo $\widehat{OAB} \cong \widehat{OBA}$.

Como em um triângulo a soma das medidas de dois ângulos é sempre menor que 180° , segue que: $m(\widehat{OAB}) + m(\widehat{OBA}) < 180^\circ$, e como são ângulos iguais, cada um tem medida menor que 90° . Dessa forma, o ângulo formado pela reta b e a reta que contém o raio é $< 90^\circ$, o que contradiz a hipótese. Logo, b é tangente à circunferência em P .

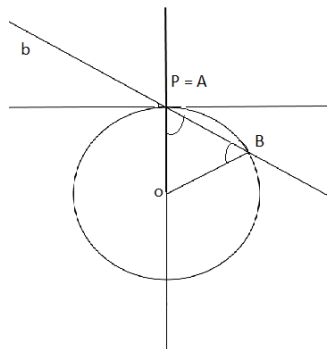


Figura 55
B é Secante à uma Circunferência

2.2- Construções com Transferidor

Nesta seção descrevemos os elementos que compõem um transferidor e quais das sete construções fundamentais são possíveis de se realizar com esse instrumento.

Os elementos de um transferidor são: **limbo:** parte do contorno do transferidor, onde se localiza a graduação; **linha de fé:** reta que passa por 0° e 180° ; é o diâmetro da circunferência definida pelo transferidor; **centro:** ponto de intersecção da linha de fé com o diâmetro perpendicular a ela. Para medir a abertura de um ângulo, basta coincidir a linha de fé com um dos lados e o centro do transferidor com o vértice do ângulo e, em seguida, observar o valor da medida do ângulo na linha de fé.

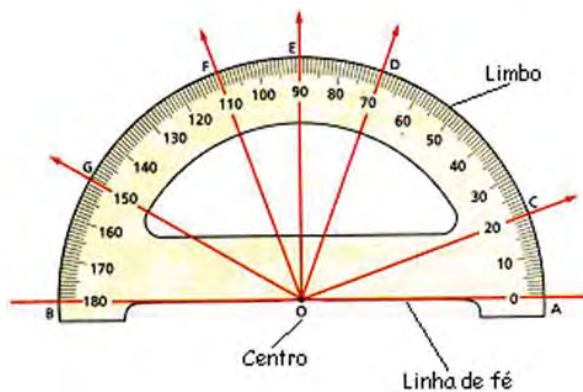


Figura 56
Elementos de um transferidor

Primeira Construção Fundamental: Transporte de segmento. Construir um segmento de reta congruente a um segmento dado.

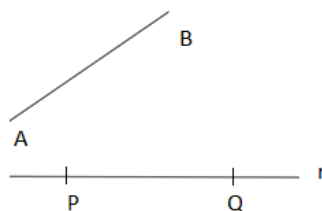


Figura 57
Transporte de segmento

Esta atividade não pode ser realizada com esse instrumento, pois ele é utilizado para medir ângulos.

Segunda Construção Fundamental: Transporte de ângulo. Transportar um ângulo α (dado) para uma semirreta.

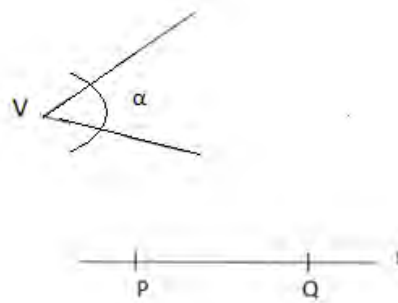


Figura 58
Transporte de ângulo

Com o transferidor é possível fazer o transporte do ângulo. Colocando a linha de fé sobre o lado do ângulo podemos ler a medida do ângulo e transportá-lo para a semirreta.

Terceira Construção Fundamental: bissetriz. Construir a bissetriz de um ângulo dado.

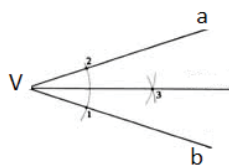


Figura 59
Bissetriz de um ângulo

Com o transferidor é possível traçar a bissetriz do ângulo. Colocando a linha de fé sobre o lado do ângulo, podemos ler a medida do ângulo e marcar a metade do referido ângulo, obtendo a bissetriz que passa por esse ponto e pelo vértice do ângulo.

Quarta Construção Fundamental: perpendicular

Dada uma reta r e um ponto P , construir por P , uma reta perpendicular à reta r .

1º caso: O ponto P pertence à reta r .

2º caso: O ponto P não pertence à r .

3º caso: O ponto P não pertence ou coincide com a origem de uma semirreta.

Vamos explicar cada um dos casos:

1º Caso: O ponto P pertence à reta r.

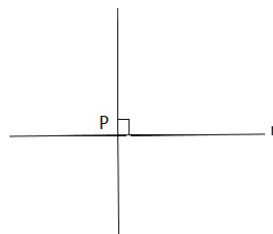


Figura 60
O ponto P pertence à reta

Com o transferidor é possível traçar a perpendicular a uma reta dada passando pelo ponto P. Posicionando a linha de fé sobre o ponto P e marcando um ângulo de 90° , ou seja, o centro do transferidor é o ponto de intersecção da linha de fé com o diâmetro perpendicular a ela. Em seguida, usar a linha de fé, como uma régua, para traçar a perpendicular.

2º caso: O ponto P não pertence à r.

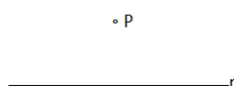


Figura 61
O ponto P não pertence à reta

Com o transferidor é possível traçar a perpendicular a uma reta dada, passando pelo ponto P, quando P não pertence à r. Se o ponto P é próximo da reta r, então é necessário somente posicionar a linha de fé sobre a reta r e encontrar o ponto P, formando um ângulo de 90° . Assim, traça-se s perpendicular a r.

3º caso: O ponto P não pertence ou coincide com a origem de uma semirreta.

Se a semirreta for prolongada, formando uma reta que contenha essa semirreta dada caímos no 1º caso. E, assim, é possível construir a perpendicular.



Figura 62

P coincide com a origem de uma semirreta

Quinta Construção Fundamental: mediatriz. Traçar a mediatriz de um segmento dado.

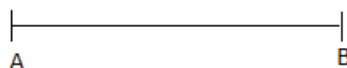


Figura 63

Segmento dado

Com esse instrumento é possível realizar esta construção.

Construção: Em um segmento dado \overline{AB} , posiciona-se a linha de fé no ponto A e marca um ângulo de 45° . Posiciona-se a linha de fé no ponto B e marca um ângulo de 45° . (ver figura 64a, 64b e 64c). Prolongando a semirreta \vec{a} e prolongando a semirreta \vec{b} encontra-se um ponto P. O ângulo \hat{P} tem 90° , posicionar a linha de fé no ângulo \hat{P} , e sobre a semirreta \vec{a} e marcar 45° . O ponto M encontrado é mediatriz de \overline{AB} .

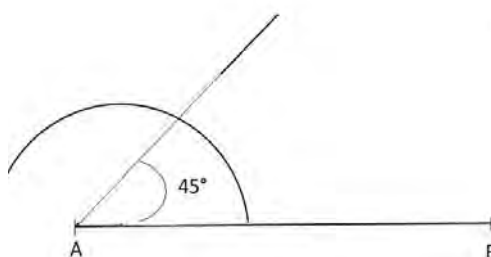


Figura 64a

Traçado de mediatriz com o transferidor em A

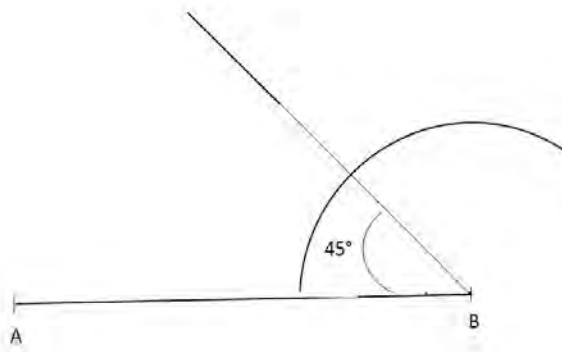


Figura 64b
Traçado de mediatriz com o transferidor em B

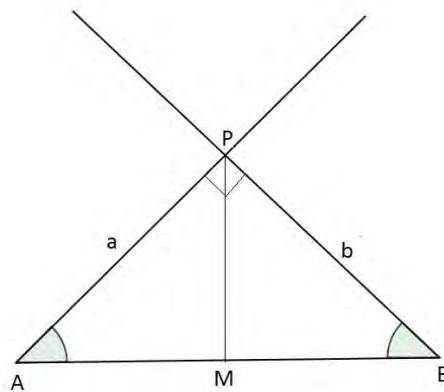


Figura 64c
Traçado de mediatriz com o transferidor em P

Sexta Construção Fundamental: Paralela. Dada uma reta r e um ponto A fora dela, construir por A uma reta paralela à reta r .

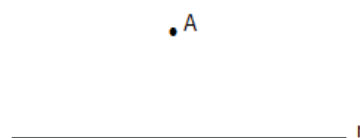


Figura 65
Ponto A fora da reta r

Com este instrumento é possível realizar a atividade da seguinte maneira:

Construção: Traçar uma reta qualquer pelo ponto A, que intercepte r em B. Marcar C sobre r; teremos o ângulo \widehat{ABC} . Se transferirmos o ângulo \widehat{ABC} para o ponto A, utilizando a reta traçada pelo ponto A como apoio, poderíamos com a linha de fé, traçar a paralela a reta r.

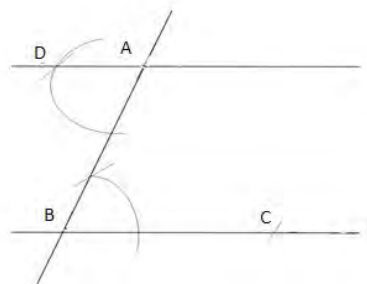


Figura 66
Paralela traçada com o transferidor

Sétima Construção Fundamental: Tangente. Dado um ponto P , numa circunferência, traçar a reta tangente à circunferência por esse ponto.

Com o auxílio do transferidor traça-se uma reta passando pelo ponto P e pelo centro da circunferência. A seguir, apóia-se a linha de fé sobre essa reta e constrói-se uma reta perpendicular a \overline{OP} . Essa reta é tangente à circunferência por P .

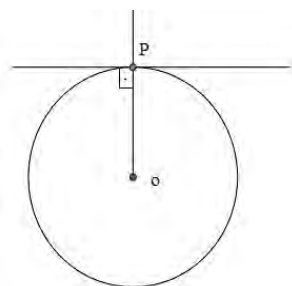


Figura 67
Reta tangente à circunferência

2.3- Construções com Esquadros

Existem dois tipos de esquadros básicos: o primeiro, com o formato de um triângulo retângulo isósceles, com ângulos de 45° , 45° e 90° ; o segundo com o formato de um triângulo retângulo escaleno com ângulos de 30° , 60° e 90° . Encontramos esquadros com ou sem escala e a escolha depende das funções que se quer explorar com o instrumento. Em nossa pesquisa, optamos por trabalhar com os esquadros sem escalas. Iniciamos agora, as possibilidades das sete construções com esse instrumentos

Primeira Construção Fundamental: Transporte de segmento. Construir um segmento de reta congruente a um segmento dado.

Com esse instrumento não foi possível realizar essa atividade, pois os esquadros utilizados não possuíam escalas.

Segunda Construção Fundamental: Transporte de ângulo. Transportar um ângulo α (dado) para uma semirreta.

Esta atividade ficou parcialmente prejudicada. Ela só se torna executável quando os ângulos a serem transportados forem os do próprio esquadro, ou seja, de medidas: 30° , 45° , 60° e 90° (ou múltiplos deles).

Terceira Construção Fundamental: bissetriz. Construir a bissetriz de um ângulo dado.

De maneira geral, não se pode traçar a bissetriz de um ângulo com esse instrumento. Porém, excepcionalmente, como no caso do transporte de ângulos, essa construção poderá ser possível para ângulos de, por exemplo, 60° , 90° , 180° , etc., para os quais pode ser utilizado o formato do esquadro para se obter essas bissetrizes.

Quarta Construção Fundamental: perpendicular

Dada uma reta r e um ponto P , construir por P , uma reta perpendicular à reta r .

1º caso: O ponto P pertence à reta r ; 2º caso: O ponto P não pertence à r ; 3º caso: O ponto P não pertence ou coincide com a origem de uma semirreta.

Vamos explicar cada um dos casos:

1º Caso: O ponto P pertence à reta r .

Com o auxílio de um par de esquadros, podemos executar a construção de perpendiculares.

Construir por P, uma reta perpendicular à reta r.

1º Passo: Coloque o primeiro esquadro, sob a reta r, formando com ela um ângulo de 90° . Apóie o segundo esquadro no primeiro conforme a figura 68.

2º Passo: Tomando cuidado para não tirar o primeiro esquadro de sua posição, deslize o segundo esquadro, apoiado no primeiro, até fazer com que a borda fique sobre P.

3º Passo: Então é só traçar a reta s, perpendicular a r.

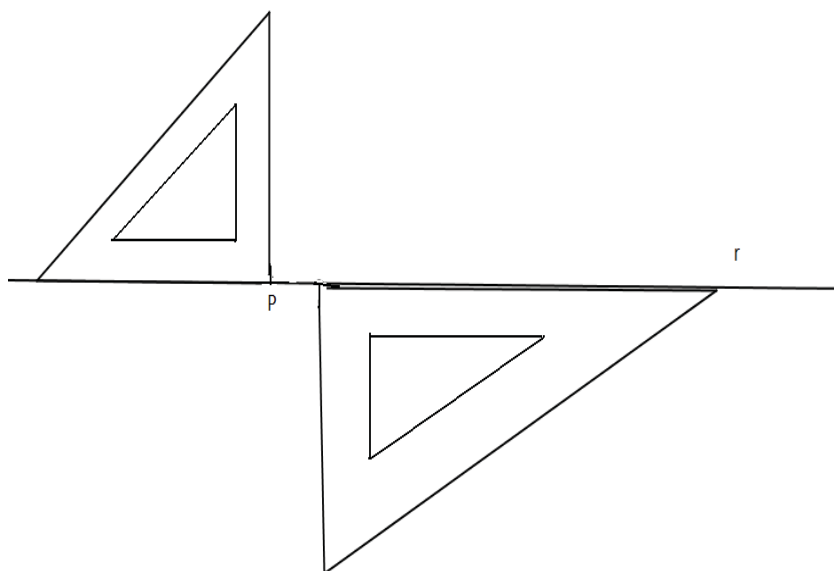


Figura 68

Posições de esquadros sob a reta r, quando o ponto P pertence à reta r.

2º caso: O ponto P não pertence à r.

Com o auxílio de um par de esquadros, podemos executar a construção de uma perpendicular à reta r quando o ponto P não pertence à r, procedendo da seguinte maneira:

1º Passo: Coloque o primeiro esquadro sob a reta r , esse esquadro servirá de apoio ao segundo esquadro. Como no 1º caso, o formato dos esquadros utilizados não tem tanta importância, pois os instrumentos servirão apenas de apoio um ao outro.

2º Passo: Tomando cuidado para não tirar o primeiro esquadro de sua posição, deslize o segundo esquadro, apoiado no primeiro, até fazer com que a borda encoste sobre o ponto P , conforme a figura abaixo.

3º Passo: Então é só traçar a reta s , perpendicular a r .

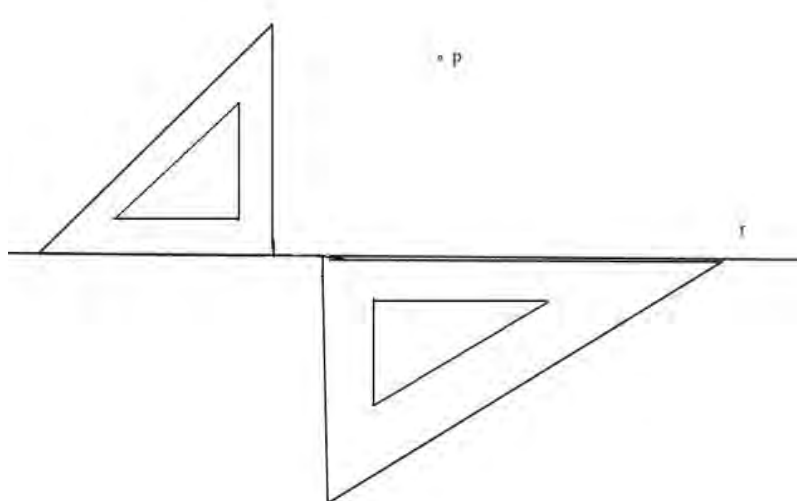


Figura 69

Posições de esquadros sob a reta r , quando o ponto P não pertence à reta r .

3º caso: O ponto P não pertence ou coincide, com a origem de uma semirreta.

Se a semirreta for prolongada, formando uma reta que contenha essa semirreta dada caímos no 1º caso. E assim é possível construir a perpendicular.

Quinta Construção Fundamental: mediatriz. Traçar a mediatriz de um segmento dado.

Com esse instrumento é possível realizar a atividade.

Construção: Em um segmento \overline{AB} posiciona-se o ângulo de 45° de um dos esquadros no ponto A e traça-se uma semirreta \vec{a} . Posiciona-se o esquadro com o ângulo de 45° no ponto B e traça-se uma semirreta \vec{b} . Prolonga-se \vec{a} e prolonga-se \vec{b} encontrando-se o ponto P na intersecção. Posicionando o mesmo ângulo de 45° no ponto P, encontramos M em \overline{AB} .

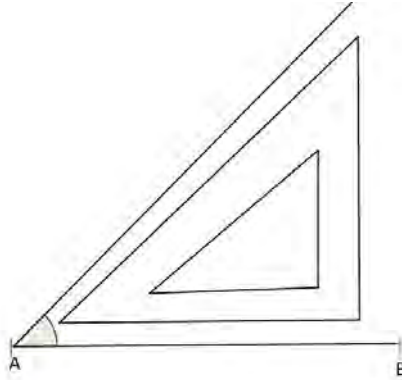


Figura 70a
Posição do esquadro em A

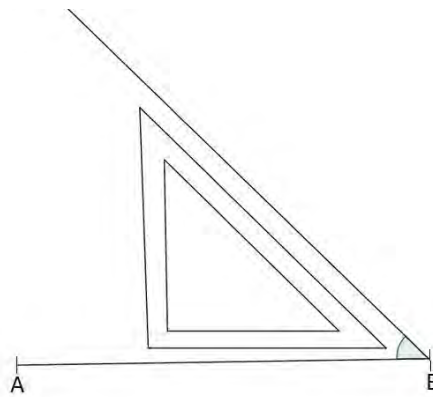


Figura 70b
Posição do esquadro em B

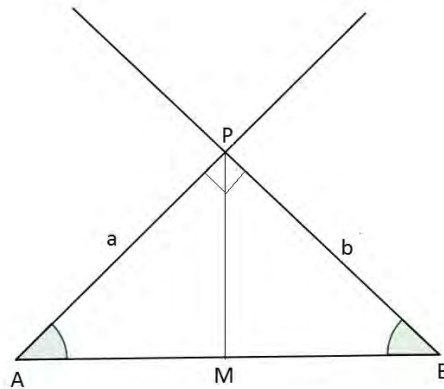


Figura 70c
Traçado de mediatriz com o esquadro em P

Sexta Construção Fundamental: paralela. Dada uma reta r e um ponto A fora dela, construir por A uma reta paralela à reta r .

Com o auxílio de um par de esquadros, podemos executar a construção de uma reta paralela a reta r quando o ponto A não pertence à r . Coloque o primeiro esquadro sob a reta r , formando um ângulo de 90° com a reta r . O primeiro esquadro servirá de apoio ao segundo esquadro. Tomando cuidado para não tirar o primeiro esquadro de sua posição. Deslize o segundo esquadro, apoiado no primeiro, até fazer com que a borda fique sobre o ponto A . Então é só traçar a reta s , paralela a r .

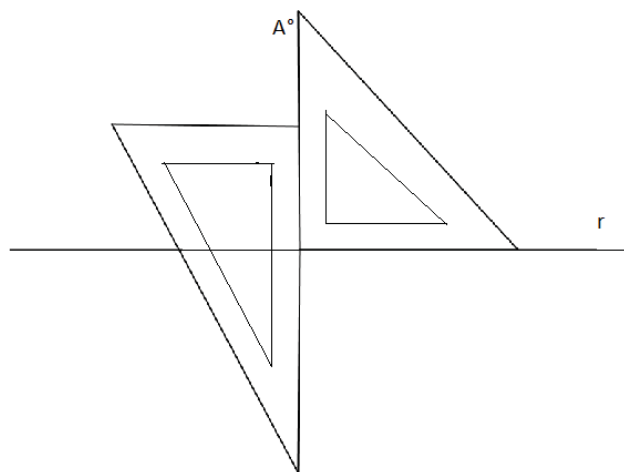


Figura 71
Traçado de paralela quando o ponto A não pertence à reta r .

Sétima Construção Fundamental: Tangente

Com o auxílio do esquadro traça-se uma reta passando por P e pelo centro da circunferência. A seguir, apóia um dos esquadros sobre a reta \overline{OP} e com a ajuda do segundo esquadro, constrói-se uma reta perpendicular a \overline{OP} . Essa reta é tangente à circunferência por P.

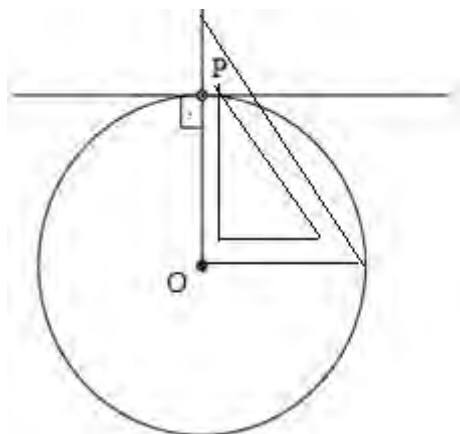


Figura 72
Posições de esquadros no traçado da tangente

2.4- Construções com o software Geogebra

Primeira Construção Fundamental: Transporte de segmento

Construir um segmento de reta congruente a um segmento dado.

Definir um segmento de reta por dois pontos, utilizando a ferramenta “segmento definido por dois pontos”. Nomear os pontos por A e B. Criar um círculo, utilizando a ferramenta “círculo definido pelo centro e um de seus pontos”, a partir do segmento de reta. A seguir, constrói-se uma semirreta com a ferramenta “semirreta definida por dois pontos”. Após, selecionar o item “compasso”, clicar em A e, em seguida, em B, no segmento de reta e, depois, clicar no início da semirreta. Ativar a ferramenta “intersecção de dois objetos” e clicar no círculo e na semirreta. Estará definido, então, um segmento de reta congruente a um segmento dado. Para conferir a medida exata do segmento transportado, clica-se na ferramenta “Distância, comprimento ou perímetro” e, em seguida, clicar em A e depois em B e, a seguir, em \overline{CF} .

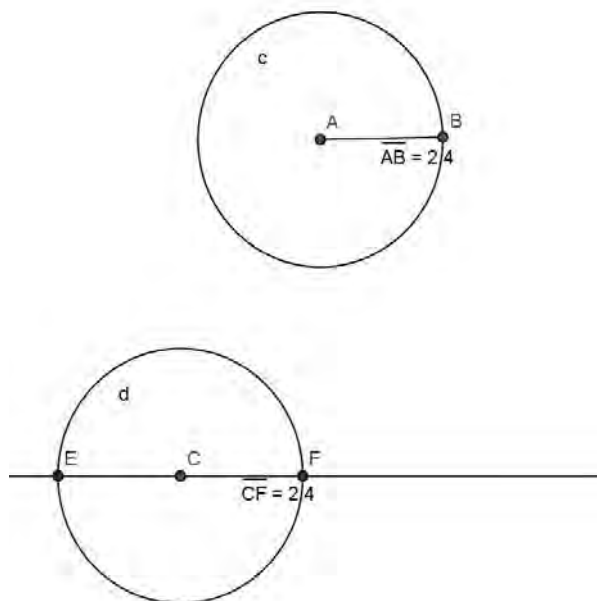


Figura 73
Transporte de segmento utilizando o software Geogebra

Segunda Construção Fundamental: Transporte de ângulo

Transportar um ângulo α (dado) para uma semirreta.

Construir um ângulo utilizando a ferramenta “segmento definido por dois pontos”. Criam-se dois segmentos formando um ângulo de qualquer medida. Criar, também, uma semirreta definida por dois pontos. Define-se nessa semirreta um ângulo de qualquer medida, através de três pontos. Usando a ferramenta “ângulo” clicar nos pontos C, B e A, no sentido horário do ângulo e obtém-se sua medida. Clicando na ferramenta mover, é possível encontrar a mesma medida do ângulo \widehat{ABC} ao movimentar o segmento \overline{DF} da semirreta.

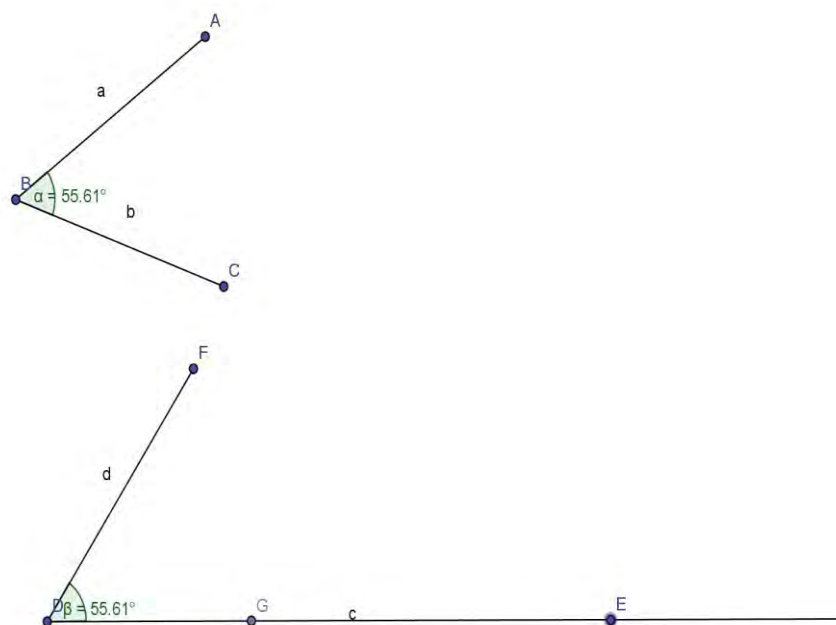


Figura 74

Transporte de um ângulo dado para uma semirreta utilizando o Geogebra

Terceira Construção Fundamental: bissetriz

Construir a bissetriz de um ângulo dado.

Marcar os pontos A, V e B, com a ferramenta “segmento definido por dois pontos” e formar um ângulo qualquer. Clicar em “bissetriz” e, em seguida, clicar nos pontos A, V e B, obtendo a bissetriz.

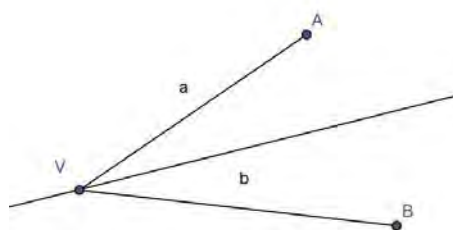


Figura 75

Bissetriz construída com o Geogebra

Quarta Construção Fundamental: perpendicular

Dada uma reta r e um ponto P, construir por P, uma reta perpendicular à reta r.

1º caso: O ponto P pertence à reta r.

2º caso: O ponto P não pertence à r.

3º caso: O ponto P não pertence ou coincide, com a origem de uma semirreta.

Vamos explicar cada um dos casos:

1º Caso: O ponto P pertence à reta r.

Construir uma reta definida por dois pontos e nomeá-la por r. A seguir, marcar um ponto qualquer na reta, nomeando-o por P. Após, escolher o item reta perpendicular, clicar em P e, em seguida, na reta r. A reta encontrada é perpendicular a r.

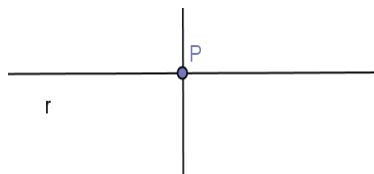


Figura 76
Ponto P pertence à reta r.

2º caso: O ponto P não pertence à r.

Construir uma reta definida por dois pontos, nomeando-a por r. A seguir, marcar um ponto qualquer fora da reta r, nomeando-o por P. A seguir, escolher o item reta perpendicular, clicar em P e, em seguida, na reta r. A reta encontrada é perpendicular a r.

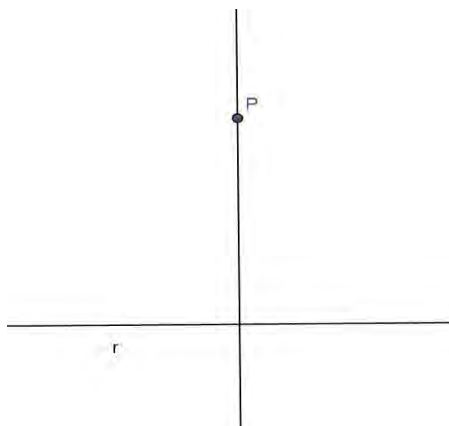


Figura 77
Ponto P não pertence à reta r.

3º caso: O ponto P não pertence ou coincide, com a origem de uma semirreta.

Construir uma semirreta definida por dois pontos e nomeá-la por r. A seguir, marcar um ponto P na origem da semirreta nomeando-o por P. Após, escolher o item reta perpendicular, clicar em P e, em seguida, na semirreta r. A reta encontrada é perpendicular a r.

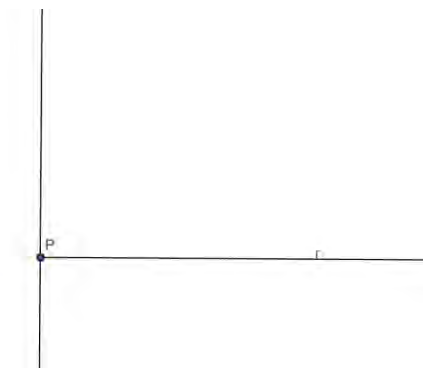


Figura 78
Ponto P coincide com a origem da semirreta

Quinta Construção Fundamental: mediatriz

Traçar a mediatriz de um segmento dado.

Construir um segmento de reta definido por dois pontos, A e B. A seguir escolher o item mediatriz, clicar nos pontos A e B. A reta encontrada é a mediatriz do segmento \overline{AB} .

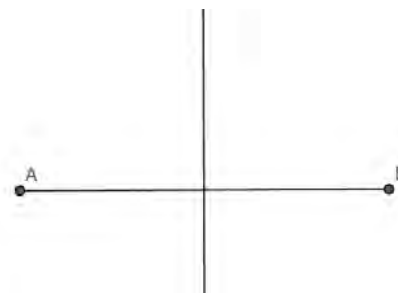


Figura 79
Traçado de mediatriz com o Geogebra

Sexta Construção Fundamental: paralela

Dada uma reta r e um ponto A fora dela, construir por A uma reta paralela à reta r .

Construir uma reta definida por dois pontos. A seguir, criar um ponto fora de r e nomeá-lo por A . Escolher o ícone paralela, clicar no ponto A e, depois, na reta r . A reta encontrada é paralela à reta r .

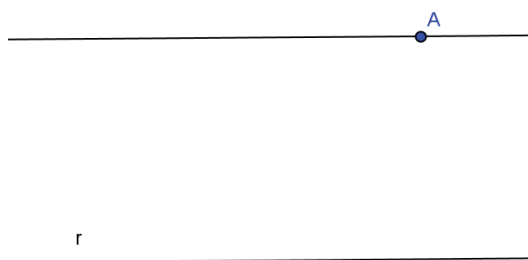


Figura 80
Traçado de paralela com o Geogebra

Sétima Construção Fundamental: Tangente

Dado um ponto P , numa circunferência, traçar a reta tangente à circunferência por esse ponto.

Construir uma circunferência, utilizando a ferramenta “círculo definido pelo centro e um de seus pontos”. A seguir, unir o centro da circunferência ao ponto P , através da ferramenta “segmento definido por dois pontos”. Traçar uma reta tangente à circunferência clicando na ferramenta “tangente” e, em seguida, no ponto P da circunferência e na circunferência. É definida a reta tangente à circunferência, pelo ponto P .

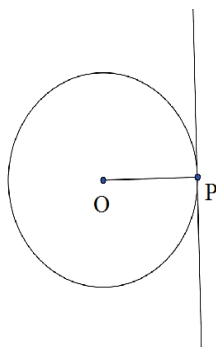


Figura 81
Traçado de tangente com o Geogebra

2.5- Construções com os Portasegmentos

Nesta seção relatamos as sete construções fundamentais elaboradas com os portasegmentos.

Primeira Construção Fundamental: Transporte de segmento. Construir um segmento de reta congruente a um segmento dado.

Construção: Para transportar um segmento dado \overline{OM} apóia o portasegmento sobre \overline{OM} , marcando no próprio instrumento a medida de \overline{OM} . Em uma reta y , transportar a medida de \overline{OM} com o portasegmento. Marcar os pontos O' e M' e traçar o novo segmento $\overline{O'M'}$ em y , conforme b).

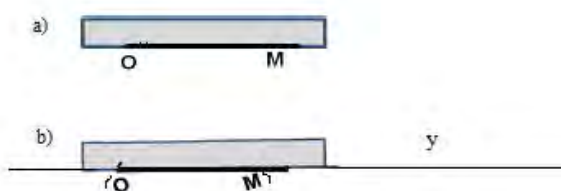


Figura 82
Transporte de segmento com o portasegmento

Segunda Construção Fundamental: Transporte de ângulo. Transportar um ângulo α (dado) para uma semirreta.

Construção: Para se transportar um ângulo utilizando o portasegmento, deve-se apoiá-lo em um dos lados do ângulo. Consideremos, por exemplo, o segmento \overline{OM} . Marcar no portasegmento o vértice O, e a intersecção N. Em uma reta y , transportar com o portasegmento o ângulo NOM. Marcar os pontos N' , O' e M' e construir o ângulo $N'O'M'$.

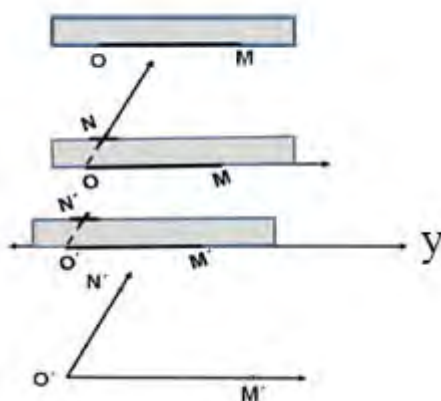


Figura 83
Transporte de ângulo com o portasegmento

Terceira Construção Fundamental: bissetriz. Construir a bissetriz de um ângulo dado.

Construção: Seja $A\hat{C}B$ o ângulo que se deseja traçar a bissetriz. Deve-se coincidir uma das bordas do portasegmento com o segmento \overline{AC} , conforme figura e traçar um segmento de reta com a outra borda do portasegmento. A seguir, posiciona-se novamente uma das bordas do portasegmento com o segmento \overline{CB} e traça-se um segmento de reta com a outra borda do portasegmento, encontrando o ponto P. Une-se o ponto C com o ponto P. A semirreta \overline{CP} é a bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$.

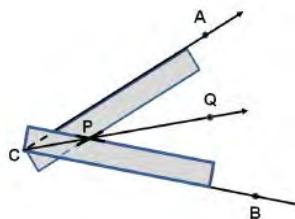


Figura 84
Traçado de bissetriz com o portasegmento

Quarta Construção Fundamental: perpendicular. Dada uma reta r e um ponto P , construir por P , uma reta perpendicular à reta r .

1º caso: O ponto P pertence à reta r .

2º caso: O ponto P não pertence à r .

3º caso: O ponto P não pertence ou coincide, com a origem de uma semirreta.

Vamos explicar cada um dos casos:

1º Caso: O ponto P pertence à reta r .

Dada uma reta r e um ponto P que pertence à reta, construir por P , uma reta perpendicular à reta r , utilizando o portasegmento. Inicia-se apoiando a borda do portasegmento sobre o ponto P encontrando o ponto A . Sendo assim, a mesma medida encontrada de um lado (2) é transferida para o outro lado do ponto P na posição (1), encontrando o ponto B . Dessa maneira, temos o segmento \overline{AB} , no qual podemos traçar a mediatriz³, encontrando a perpendicular à reta r passando pelo ponto P .

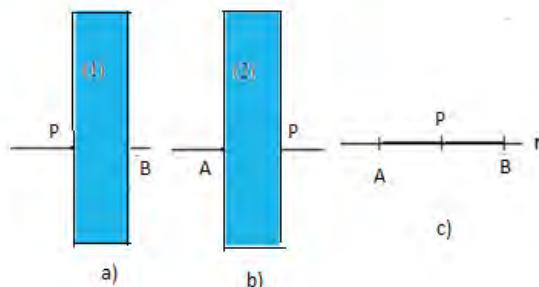


Figura 85

Traçado de perpendicular ponto P pertence à reta r .

2º caso: O ponto P não pertence à r .

Seja uma reta $\overleftrightarrow{mm'}$ e P o ponto através do qual se deseja traçar a perpendicular a $\overleftrightarrow{mm'}$. Iniciar colocando o portasegmento na posição (1), conforme figura a seguir, de maneira que uma de suas bordas corte $\overleftrightarrow{mm'}$ e contenha o ponto P . Marcar com o portasegmento os pontos A e B , de modo que A coincida com o ponto M e B com P . Colocar o portasegmento na posição (2), devendo coincidir B com P e A com um ponto de $\overleftrightarrow{mm'}$, que chamaremos de N . Temos, então, $M \in \overleftrightarrow{mm'}$ e $N \in \overleftrightarrow{mm'}$ e

³ Ver quinta construção fundamental

$\overline{MP} \cong \overline{NP}$. Traçar a mediatriz do segmento \overline{MN} , sendo \overleftrightarrow{xy} perpendicular a \overline{MN} em P';
 $\overline{MP'} \cong \overline{NP'}$. Assim $\overline{PP'}$ é a parte da perpendicular \overleftrightarrow{xy} que mede a distancia de P a $\overleftrightarrow{mm'}$.

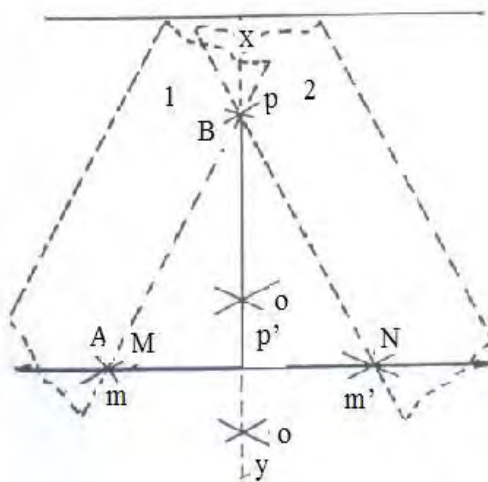


Figura 86
 Traçado de perpendicular por um ponto fora da reta

3º caso: O ponto P não pertence ou coincide, com a origem de uma semirreta.

Dada uma semirreta r e um ponto P na origem da semirreta r , construir por P, uma reta perpendicular à reta r , utilizando o portasegmento. Procede-se aumentando a semirreta de maneira que haja um espaço suficiente para que a perpendicular possa ser construída, conforme o caso número 1.

Quinta Construção Fundamental: mediatriz. Traçar a mediatriz de um segmento dado.

Para se construir a mediatriz com o portasegmento procede conforme figura 98. Traçar uma reta r passando por A e por B qualquer. Apoiar o portasegmento de acordo com a posição (1) e construir os segmentos das bordas do portasegmento. Colocar o portasegmento passando por A e por B conforme a posição (2), e construir os segmentos das bordas obtendo os pontos C e D na intersecção com os outros dois segmentos construídos. Construir a reta por C e D, que é a mediatriz de \overline{AB} .

Justificativa: Por congruência dos triângulos ACB e ADB e posteriormente dos triângulos ACM e CMB obtemos $\overline{AM} = \overline{MB}$ e $\widehat{AMC} = 90^\circ$

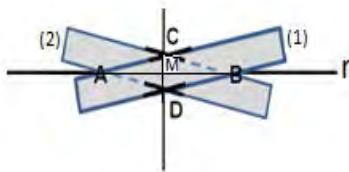


Figura 87
Traçado de mediatriz utilizando o portasegmento

Sexta Construção Fundamental: paralela. Dada uma reta r e um ponto A fora dela, construir por A uma reta paralela à reta r .

Construção: Pelo ponto A traçar uma reta b que corta r em um ponto P , conforme posição (1). Sobre b marcar B tal que $\overline{AP} = \overline{PB}$. Por B traçar uma reta m que cortará r determinando o ponto C e o segmento \overline{BC} sobre m , conforme posição (2). Sobre m toma-se $\overline{CD} = \overline{CB}$. Traçar a reta pelos pontos A e D resultando $r // \overrightarrow{AD}$.

Justificativa: Por Tales $\frac{AP}{PB} = \frac{CD}{BC} \rightarrow B\hat{P}C = P\hat{A}D$.

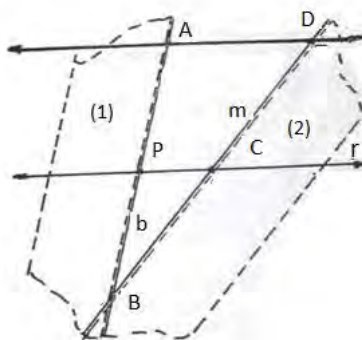


Figura 88
Traçado de paralelas utilizando o portasegmento

Sétima Construção Fundamental: Tangente. Dado um ponto P , numa circunferência, traçar a reta tangente à circunferência por esse ponto.

Construção: Com o portasegmento, traçar uma reta y que passa pelo centro O e pelo ponto P . Com o portasegmento obter o ponto O' tal que $\overline{OP} = \overline{O'P}$. Traçar a mediatriz m do segmento $\overline{OO'}$. A tangente é a reta m .

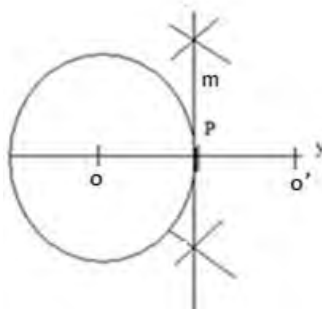


Figura 89

Traçado da tangente à circunferência utilizando o portasegmento

2.6- Construções com Caleidoscópios

As resoluções das atividades e as gravuras envolvendo o caleidoscópio, apresentadas nesta seção, foram extraídas do livro de Barbosa e Murari, *Belas Formas em Caleidoscópios, Caleidociclos e Caleidostrótons*, a ser publicado.

Primeira Construção Fundamental: Transporte de segmento. Construir um segmento de reta congruente a um segmento dado.

Não é possível transportar um segmento de reta utilizando o caleidoscópio, pois os caleidoscópios não têm escalas.

Segunda Construção Fundamental: Transporte de ângulo. Transportar um ângulo α (dado) para uma semirreta.

Essa atividade não poderia ser realizada com qualquer ângulo, somente em alguns casos é possível efetuar o transporte de ângulos com o caleidoscópio. Trata-se dos ângulos de 30° , 45° , 60° , 90° e 120° , os quais na divisão por 360 dão por resultado números inteiros, e que representam o número de cunhas (de medidas iguais) a serem

formadas pelos espelhos. Poderemos contar as cunhas e transportar para a reta, visto que com outros ângulos as cunhas não seriam iguais.

Terceira Construção Fundamental: bissetriz. Construir a bissetriz de um ângulo dado.

A construção da bissetriz de um ângulo qualquer x dependerá da posição do observador, sendo necessário considerar dois casos:

1º caso

Construção

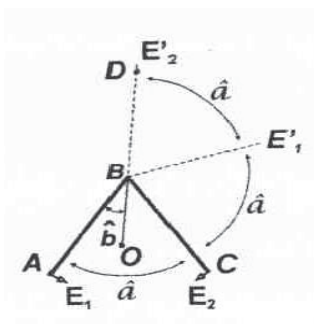


Figura 90

Traçado da bissetriz utilizando o caleidoscópio

- Coloque um espelho ao longo de \overline{AB} e o outro em \overline{BC} ;
- Seja O na posição da figura 90 e os ângulos \hat{a} e \hat{b} , onde $\hat{b} \leq \frac{1}{2}\hat{a}$;
- Contar o número de cunhas, k , preenchendo o ângulo $\hat{A}BD$ (nesse caso, $k = 3$);
- Rodar E_2 para a esquerda, deixando E_1 fixo, até que o número de cunhas, preenchendo $\hat{A}BD$ seja $2K$. Esses $2k$ ângulos são de medida $\frac{\hat{a}}{2}$.

2º caso

$$\hat{b} \geq \frac{1}{2}\hat{a}$$

Construção:

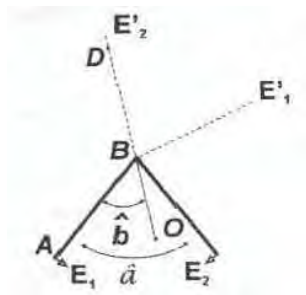


Figura 91a

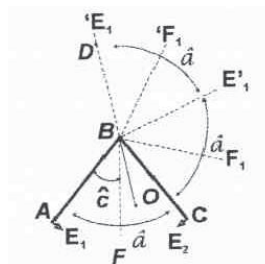


Figura 91b

Posições necessárias do caleidoscópio para o traçado da bissetriz

Conforme mostra as figuras 91a e 91b, fixamos E_2 e rodamos E_1 à direita até encontrar \overline{FB} , tal que $2k - 1$ cunhas preencham $F\hat{B}D$ ($k = 3$). Observe que as $2k - 1$ cunhas tem ângulos de medida $F\hat{B}C = \hat{a} - \hat{c}$.

Se \hat{c} é a medida do ângulo $A\hat{B}F$, temos $k\hat{a} - \hat{c} = (2k - 1) (\hat{a} - \hat{c})$, cuja resolução leva à solução: $2\hat{c} = \hat{a}$.

Quarta Construção Fundamental: perpendicular. Dada uma reta r e um ponto P , construir por P , uma reta perpendicular à reta r .

1º caso: O ponto P pertence à reta r .

2º caso: O ponto P não pertence à r .

3º caso: O ponto P não pertence ou coincide, com a origem de uma semirreta.

Vamos explicar cada um dos casos:

1º Caso: O ponto P pertence à reta r .

Dada uma reta r e um ponto P , construir por P , uma reta perpendicular à reta r , utilizando os espelhos articulados, procede-se da seguinte maneira:

Construção

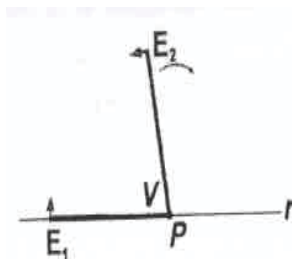


Figura 92

Traçado da perpendicular com a utilização do caleidoscópio

- Colocar o vértice V dos espelhos em P e fixar E_1 ao longo de r.
- Fazer uma rotação à direita de E_2 (com centro em P), até conseguir um ângulo de 90° .
- Traçar a perpendicular por P usando o espelho E_2 .

2º caso: O ponto P não pertence à r.

É possível traçar uma perpendicular à reta r quando o ponto P não pertence a r, seguindo os passos abaixo:

Construção

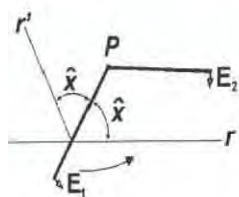


Figura 93a

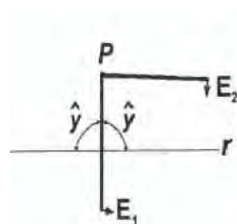


Figura 93b

Quando o ponto P não pertence a r utilizando o caleidoscópio

- Colocar o vértice V dos espelhos articulados em P e um dos espelhos interceptando r.
- Fixar E_2 e rotacionar E_1 até que a reflexão r' de r em E_1 estenda r como semirreta.
- Traçar a perpendicular de P até r usando a face do espelho E_1 , como mostra as figuras. 93a e 93b, onde $\hat{2}y = 180^\circ \rightarrow \hat{y} = 90^\circ$.

3º caso: O ponto P não pertence ou coincide, com a origem de uma semirreta.

Se a semirreta for prolongada, formando uma reta que contenha essa semirreta dada, caímos no 1º caso. E assim é possível construir a perpendicular.

Quinta Construção Fundamental: mediatriz. Traçar a mediatriz de um segmento dado.

É possível traçar a mediatriz de um segmento dado da seguinte maneira:

Construção

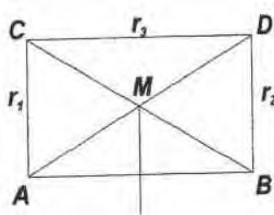


Figura 94

Traçado da mediatriz utilizando o caleidoscópio

- Construir r_1 perpendicular a \overline{AB} no ponto A.
- Construir r_2 perpendicular a \overline{AB} no ponto B.
- Por um ponto qualquer C em r_1 , construir r_3 perpendicular a r_1 , gerando o retângulo ABCD.
- Traçar diagonais (usando como régua um dos espelhos) para obter o ponto M.
- Traçar a perpendicular a \overline{AB} por M.

Sexta Construção Fundamental: paralela. Dada uma reta r e um ponto A fora dela, construir por A uma reta paralela à reta r .

É possível, utilizando os espelhos articulados a partir de uma reta r e um ponto A fora dela, construir por A uma reta paralela à reta r . Nesta atividade deve-se proceder da seguinte maneira:

Colocar o vértice dos espelhos sobre o ponto A, de modo a formar ângulos de 90° entre os espelhos e entre a intersecção de um espelho com a reta r . Usar o espelho posicionado paralelamente à reta r para traçar a reta solicitada.

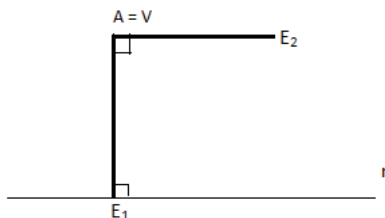


Figura 95

Traçado de paralela utilizando o caleidoscópio

Sétima Construção Fundamental: Tangente. Dado um ponto P, em uma circunferência, traçar a reta tangente à circunferência por esse ponto.

Utilizando a borda do caleidoscópio para unir o centro da circunferência ao ponto P. A seguir, é possível formar um ângulo de 90° apoiando sobre o raio e o ponto P da circunferência. A seguir, traça-se uma tangente à circunferência.

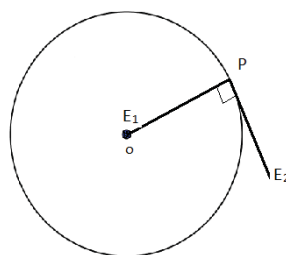


Figura 96

Traçado de tangente utilizando o caleidoscópio

2.7- Construções proposta aos alunos:

Os diferentes instrumentos possibilitaram fazer a maioria das construções fundamentais. As construções foram apresentadas aos alunos em fichas, porém, ressaltamos aqui, que os enunciados das mesmas são da forma tradicional, no entanto, se tratando de tarefas investigativas, cabe ao professor no momento da realização com os alunos criar um ambiente de aprendizagem adequado.

Assim, as construções aplicadas ao grupo de alunos no experimento de ensino foram as seguintes:

Primeira Construção Fundamental: Transporte de segmento

Construir um segmento de reta congruente a um segmento dado.

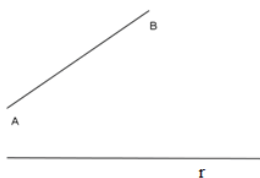


Figura 97

Um segmento de reta congruente a um segmento dado

Segunda Construção Fundamental: Transporte de ângulo

Transportar um ângulo α (dado) para uma semirreta r .

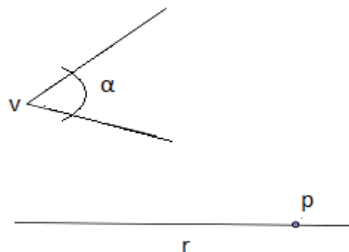


Figura 98

Transporte de ângulo

Terceira Construção Fundamental: bissetriz

Construir a bissetriz de um ângulo α dado.

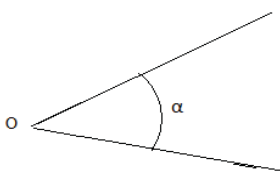


Figura 99

Construção de bissetriz

Quarta Construção Fundamental: perpendicular

Dada uma reta r e um ponto P , construir por P , uma reta perpendicular à reta r .

1º caso: O ponto P pertence à reta r .

2º caso: O ponto P não pertence à r .

3º caso: O ponto P não pertence ou coincide, com a origem de uma semirreta.

Vamos construir cada um dos casos:

1º Caso: O ponto P pertence à reta r .

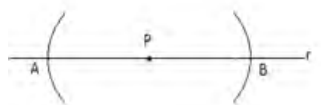


Figura 100

P pertence à reta r

2º caso: O ponto P não pertence à r.

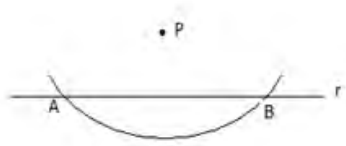


Figura 101

P não pertence à reta r

3º caso: O ponto P não pertence ou coincide, com a origem de uma semirreta.



Figura 102

P pertence à origem da reta r

Quinta Construção Fundamental: mediatriz

Traçar a mediatriz de um segmento dado.



Figura 103

Traçado de mediatriz

Sexta Construção Fundamental: paralela

Dada uma reta r e um ponto A fora dela, construir por A uma reta paralela à r.

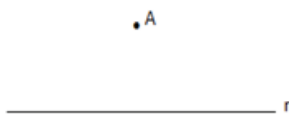


Figura 104

Construção de paralelas

Sétima Construção Fundamental: Tangente

Dado um ponto P , numa circunferência, traçar a reta tangente à circunferência por esse ponto.

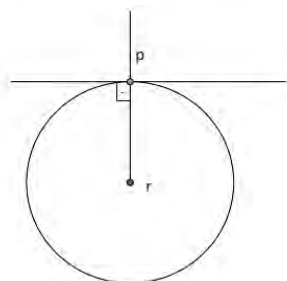


Figura 105

Tangente à circunferência por um ponto P

Após realizarem as sete construções fundamentais, executaram também algumas construções envolvendo os pontos notáveis do triângulo, o Baricentro e o Incentro. Além dessas, construíram também um quadrado dado o seu lado.

Os alunos realizaram as construções utilizando os seguintes instrumentos educacionais: régua não graduada e compasso, transferidor, par de esquadros, software Geogebra, portasegmento e caleidoscópios. As fichas contendo as atividades utilizadas no experimento de ensino encontram-se no anexo III desta pesquisa.

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA

Esta pesquisa foi realizada no âmbito de um projeto mais amplo que envolve uma parceria entre a Unesp e uma escola pública, localizada em Rio Claro, interior do estado de São Paulo. Esse projeto mais amplo é intitulado: “O Uso de Tecnologia Informática e Materiais Manipuláveis em Geometria no Ensino Fundamental”⁴. Tem por objetivo analisar as possibilidades do uso de tecnologia informática e materiais manipuláveis para organização de ambientes de aprendizagem que privilegiem uma atitude investigativa por parte do professor e do aluno, bem como as demandas que tal uso traz para o trabalho e a formação docente. Para o desenvolvimento desse projeto estabeleceu-se uma parceria Universidade-Escola. Foi constituído um grupo de pesquisa formado por professores da Universidade Estadual Paulista (Unesp- Rio Claro-SP), professoras de Matemática dessa escola e alunos da Graduação em Matemática da Unesp.

Desenvolvemos nosso trabalho em atividade extracurricular com os alunos dessa escola, sendo que a quantidade de alunos e o tópico foram definidos em conjunto com as professoras que participam desse projeto.

Procuramos desenvolver nesta pesquisa, como já dito anteriormente, uma proposta de estudo da geometria que conta com o uso de diferentes recursos materiais: da cartolina ao computador, passando pelo uso de lápis, régua, caleidoscópio, esquadro, compasso, software, portasegmentos, entre outros. Para isso fizemos, inicialmente, um levantamento de pesquisas já realizadas que evidenciam a importância de materiais manipulativos na abordagem de conceitos geométricos, a fim de contribuir para a aprendizagem dos alunos. Após este levantamento, partimos para a elaboração das atividades trabalhadas no experimento de ensino. Os encontros realizados com os alunos geraram dados, que remetem à necessidade de uma escolha da metodologia de pesquisa, para condução das informações coletadas e sobre suas potencialidades. Dessa

⁴ Financiado pela Fapesp – Modalidade de auxílio - Programa Ensino Público. Processo 2008/03559-0

maneira, consideramos este estudo como uma investigação qualitativa por abranger as características descritas por Bogdan e Biklen (1994).

Os investigadores qualitativos em educação estão continuamente a questionar os sujeitos de investigação, com o objetivo de perceber “aquilo que *eles* experimentam, o modo como *eles* interpretam as suas experiências e o modo como *eles* próprios estruturam o mundo social em que vive” (BOGDAN & BIKLEN, 1994, p. 51)

Para melhor descrever essa investigação, diante das considerações traçadas acima, e procurando uma coerência com as ideias descritas por Bogdan e Biklen (1994), baseada principalmente na realização de experimentos de ensino construtivistas, proposta por Cobb & Steffe (1983), trabalhando com duplas de alunos em atividade extracurricular.

As atividades, utilizando os diferentes materiais já mencionados, foram elaboradas com sugestões presentes, em parte, em uma apostila sobre construções geométricas, elaborada por Perissinoto Jr, A.; Murari, C.; Perez G. (1986) e nas dissertações e teses de Murari (1999), Martins (2003), Almeida (2003), Lírio (2006) e Santos (2006). Através de um planejamento das atividades, estas foram aplicadas para um grupo de alunos. Esta parte da pesquisa foi gravada em vídeo e as notas registradas em um caderno de campo, assim como o relato de cada encontro, as estratégias e as soluções apresentadas, suas dificuldades e comentários relacionados a cada atividade. Os fatos ocorridos no ambiente escolar, considerados relevantes para a pesquisa foram anotados no caderno de campo.

Foi necessário observar e registrar em detalhe o trabalho dos alunos, para conseguir descrevê-lo densamente e analisá-lo em profundidade, prestando atenção nos procedimentos desenvolvidos por eles e na sua relação com os materiais utilizados perante as questões matemáticas.

3.1 O Método Experimento de Ensino

Sabe-se que estudos realizados em sala de aula dificilmente permitem que se tenham modelos mais detalhados de como determinado estudante, ou dupla deles, pensam sobre um determinado assunto. Uma alternativa para superar obstáculos como

estes têm sido o que se convencionou chamar experimentos de ensino (COBB & STEFFE, 1983; STEFFE & TOMPHSON, 2000).

Neste tipo de pesquisa as atividades pedagógicas são propostas aos estudantes de forma que o pesquisador/professor possa "ouvir" mais detalhadamente a matemática desenvolvida por eles. Pelos “experimentos de ensino é possível se pensar como o conhecimento é produzido quando diferentes mídias são utilizadas” (BORBA e PENTEADO, 2007, P.53).

Algumas das principais atividades elaboradas foram as seguintes:

Primeira Construção Fundamental: Transporte de segmento. Construir um segmento de reta congruente a um segmento dado.

Segunda Construção Fundamental: Transporte de ângulo. Transportar um ângulo α para uma semirreta.

Terceira Construção Fundamental: bissetriz. Construir a bissetriz de um ângulo.

Quarta Construção Fundamental: perpendicular. Dada uma reta r e um ponto P , construir por P , uma reta perpendicular à reta r , para os três casos: O ponto P pertence à reta r . O ponto P não pertence à r . O ponto P não pertence ou coincide, com a origem de uma semirreta.

Quinta Construção Fundamental: mediatriz. Traçar a mediatriz de um segmento dado.

Sexta Construção Fundamental: paralela. Dada uma reta r e um ponto A fora dela, construir por A uma reta paralela à reta r .

Sétima Construção Fundamental: Tangente. Dado um ponto P , numa circunferência, traçar a reta tangente à circunferência por esse ponto. Traçar uma reta passando pelo ponto P e pelo centro da circunferência. Construir, por P , uma reta perpendicular a \overline{OP} . Essa reta é tangente à circunferência por P .

Para Murari, Perez (1986), essas são construções básicas em geometria, a partir das quais, os alunos são capazes de realizar construções mais elaboradas. Validando o argumento desses autores, após passarem pelas sete Construções geométricas fundamentais, os alunos executaram algumas atividades para as quais foi necessário esse conhecimento preliminar de construções geométricas mais refinadas como a do Incentro, Circuncentro e a construção de um quadrado dado seu lado. Os alunos realizaram tais construções utilizando todos os materiais, a régua e compasso, transferidor, esquadros, software Geogebra, portasegmentos e caleidoscópios.

3.2 Os Participantes

Os participantes desta pesquisa foram dez alunos de 7^a e 8^a séries de uma escola pública de Rio Claro localizada no interior de São Paulo, que cursavam, no momento desta pesquisa, o período da manhã.

Para o desenvolvimento destas atividades foram necessários onze encontros de aproximadamente duas horas cada. Esses encontros foram realizados semanalmente às quintas feiras.

A opção por trabalhar com alunos desta escola esteve pautada em três critérios: 1) Tratava-se de uma escola localizada em Rio Claro, a qual já existe um projeto mais amplo que envolve uma parceria entre universidade e escola. 2) A localização da escola, em Rio Claro, facilitava para meu orientador acompanhar mais de perto minhas atividades de pesquisa. 3) Os alunos de 7^a e 8^a séries de escola pública, que fizeram parte deste estudo, apresentam características similares às dos alunos com os quais desempenho minha tarefa de docente. Dessa maneira, os resultados deste estudo poderão ter uma maior influencia na minha própria prática docente.

3.3 A Escola

Descrevemos a seguir, a pesquisa de campo. O local onde foi desenvolvida a pesquisa foi o laboratório de informática, situado no interior da escola, localizada no piso superior. O laboratório de informática era composto de vários computadores, existiam, também, três mesas retangulares com quatro cadeiras cada mesa. Essas mesas serviam para desenvolver as atividades com os portasegmentos, régua compasso, esquadro, transferidor e os caleidoscópios.

Nosso primeiro contato na escola foi com a coordenadora pedagógica, a qual nos indicou a sala de informática como sendo o espaço mais apropriado para desenvolver a pesquisa.

A escola a qual realizamos o experimento de ensino foi inaugurada em 13 de Agosto de 1988, pelo secretário da educação da época Chopin Tavares de Lima e pelo Governador Orestes Quéricia. Atualmente mantêm 774 alunos, distribuídos em três períodos de aulas, manhã tarde e noite, sendo nove salas de aula no período da manhã, nove salas de aula, no período da tarde e apenas três salas de aula, no período da noite.

As atividades relacionadas a esta pesquisa foram desenvolvidas com 10 alunos de 7^a e 8^a séries do Ensino Fundamental, cujos alunos eram estudantes do período da manhã, mas participaram de nosso trabalho no período da tarde. Cada um desses encontros foi gravado em vídeo. Os relatos dos fatos ocorridos no ambiente escolar, considerados relevantes para a pesquisa, foram anotados em um caderno de campo.

CAPÍTULO 4

APRESENTAÇÃO E ESTUDO DOS DADOS

Neste capítulo apresentamos a construção dos encontros elaborados a partir dos dados coletados.

Ao propormos a realização de uma investigação em sala de aula para o estudo da geometria, passando por vários instrumentos de ensino, foi necessário determinar as bases teóricas nas quais deveríamos apoiar as atividades desenvolvidas junto aos alunos. Dessa maneira, apoiamo-nos em ideias constante na obra, *Investigações Matemáticas em Sala de Aula*, de Ponte, Brocardo e Oliveira (2006).

Não houve necessidade de realizar um estudo piloto para reformular o *design* do experimento, com a intenção de verificar se nossa proposta era viável, porque muitos dos alunos dessa escola estão inseridos em um projeto maior desenvolvido pela Unesp. Dessa maneira, alguns alunos que fizeram parte desta pesquisa já estavam familiarizados com o uso dos espelhos e caleidoscópios no estudo de simetrias, rotação, translação, etc., justamente por fazerem parte do projeto acima referido.

Este capítulo apresenta o trabalho de cada dupla: Helen e Letícia, Sérgio e Guilherme, Gabriela e Daniel, Matheus e Vinicius, Ana Carolina e Daiane. Os nomes dos alunos são fictícios porque eles assim o quiseram.

4.1 Apresentando os alunos

Helen: É natural da cidade de Rio Claro, tem 13 anos, estuda nessa escola desde a 5ª série. Atualmente está cursando a 7ª série e, segundo ela, Matemática é sua disciplina preferida, gosta de resolver problemas e fazer contas.

Letícia: Estuda nesta escola há três anos, desde a 5ª série. Letícia tem 14 anos e é aluna da 7ª série. Ciências, é a disciplina que mais se interessa na escola; para ela, é muito importante conhecermos o nosso corpo. Utiliza o computador para digitar seus

trabalhos escolares e durante as aulas de matemática, não sente dificuldades para manusear o transferidor, régua, compasso e outros materiais.

Sérgio: É aluno da 7ª série. Nas aulas de matemática, prefere os desafios e os cálculos. Sérgio se considera um bom aluno e já fez vários trabalhos em sala de aula que envolveram compasso, transferidor, régua, compasso e o software Geogebra.

Guilherme: Tem 13 anos de idade, é estudante da 7ª série, gosta de estudar matemática porque, segundo ele, é muito legal. É natural de Rio Claro, estuda nesta escola há 3 anos e não repetiu nenhuma vez. Costuma utilizar o computador para navegar na internet, fazer pesquisas e trabalhos escolares.

Gabriela: É aluna da 8ª série. Nas aulas de matemática, prefere atividades que envolvem a Geometria. Gabriela já trabalhou com o computador durante as aulas de matemática e realizou também algumas atividades com régua, compasso, transferidor e esquadros.

Daniel: Nas aulas de matemática, prefere realizar atividades que envolvem cálculos. Dentre as disciplinas escolares, sua favorita é ciências. Conhece o software Cabri Géomètre, com o qual realizou várias atividades em sala de aula com a ajuda do professor. Daniel é aluno da 8ª série desta escola.

Matheus: É atualmente aluno da 8ª série. Para Matheus, a Matemática é muito importante. Em sua opinião, é necessário saber matemática para passar nos vestibulares e concursos. Já participou de outros projetos dentro da escola, os quais envolviam espelhos, software Geogebra e outros materiais. Matheus tem 15 anos de idade e é natural da cidade de Rio Claro

Vinicius: Também tem 13 anos, é natural de Rio Claro, estuda nesta escola desde o início deste ano. Vinicius está cursando a 7ª série; para ele as aulas de matemática são divertidas e legais. Dentre as disciplinas escolares, Matemática é sua preferida. Vinicius não repetiu nenhuma vez e se considera um ótimo aluno.

Ana Carolina: Já realizou vários trabalhos escolares que utilizaram régua, esquadros, compasso, transferidor e o Geogebra. Ana Carolina tem 13 anos de idade, é natural da cidade de Rio Claro e se considera uma excelente aluna.

Daiane: Prefere executar atividades que envolvem Geometria, é aluna da 8ª série. Matemática é sua disciplina favorita na escola, já trabalhou com o computador na sala de informática e gostou muito.

4.2 Os Encontros

O universo dessa investigação, como já mencionado neste trabalho, foi composto por alunos de 7ª e 8ª séries do ensino fundamental de uma escola pública da cidade de Rio Claro, interior do estado de São Paulo. A coleta e análise dos dados tiveram como referencial teórico, os aspectos da investigação em sala de aula baseados em Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) e contou ainda com os trabalhos de Nacarato; Passos (2003), Miskulin (1999) entre outros.

O convite aos alunos foi feito pelas professoras de matemática com quem foi feito contato prévio. As professoras explicaram aos alunos que se tratava de um trabalho de pesquisa que visava a elaboração de uma dissertação de mestrado, o qual se realizaria em horários extraclasse. Nesse trabalho, eles iriam aprender um pouco mais sobre geometria e seria uma atividade voluntária. Porém, quem se dispusesse a colaborar com a pesquisa, deveria comprometer-se a participar de todos os encontros, os quais teriam a duração aproximada de duas horas cada um. Também foi explicado para os alunos que a participação nessa atividade não levaria a acréscimo nas notas da disciplina, apesar da relação com o conteúdo matemático das aulas.

A coleta de dados teve início no segundo semestre de 2010, em um total de onze encontros semanais, com duração de duas horas cada um.

Com a intenção de reproduzir, com maior veracidade possível, os encontros realizados com os alunos, elaboramos um formulário, o qual tomamos como base o de Murari (1999) que denominamos “Ficha de Observação”. Esse formulário era por nós preenchido em todos os encontros e temos essa ficha reproduzida nos anexos (anexo IV).

No primeiro encontro compareceram no horário combinado os dez alunos. Dessa maneira, foram formadas cinco duplas de alunos. No entanto, uma dessas duplas (Ana Carolina e Daiane) desistiu já no segundo encontro, pela coincidência de horário de reforço de outra disciplina. Outra dupla, composta por Helen e Letícia, também se desfez depois do terceiro encontro, pois no mesmo horário do experimento de ensino estava havendo um treinamento de dança para uma apresentação local. A terceira dupla (Gabriela e Daniel) desistiu depois do terceiro encontro, alegando estar “sem tempo” para participar das atividades. O aluno Sérgio, desistiu, depois do oitavo encontro, sem motivo algum, mas seu parceiro de dupla, Guilherme, continuou a desenvolver as atividades propostas. Assim, ao final do experimento apenas três alunos permaneceram: Vinícius e Matheus (que tinham no início formado uma dupla) e Guilherme.

Os resultados apresentados nesta dissertação estão baseados na análise elaborada a partir de todos os encontros realizados com os alunos, o que inclui aqueles que completaram os onze encontros programados e aqueles que participaram de apenas alguns encontros, pelos motivos diversos já mencionados. A formação das duplas foi espontânea, cada um escolheu com quem gostaria de trabalhar, não ocorrendo restrições prévias, com a hipótese de que isto poderia garantir um bom trabalho dos grupos formados.

Os alunos que participaram espontaneamente do experimento de ensino, apresentavam, particularmente, uma disposição favorável em relação aos instrumentos, mostrando cada um, maior satisfação em trabalhar, uns com o computador, outros com o caleidoscópio ou portasegmentos, prática essa observada em relação a todos os materiais que foram utilizados neste experimento. Dessa maneira, o leitor deverá levar em consideração os dados e resultados tendo em vista esses aspectos.

Nossa pretensão inicial era que as duplas de alunos fossem capazes de utilizar os conhecimentos matemáticos na resolução das atividades propostas e, por acréscimo, que

desenvolvessem a capacidade de realizar investigações, promovendo atitudes, tais como a persistência e o gosto pelo trabalho investigativo.

As atividades foram de um modo geral, realizadas pelas duplas e discutidas com toda a turma. Durante os encontros, os alunos foram encorajados a comunicar, debater ideias e a decidir sobre o caminho a seguir na exploração das atividades propostas. Na fase de discussão com todos os alunos, deixamos que eles apresentassem as descobertas realizadas e as discutissem. Essa fase complementava o trabalho realizado no grupo, porque promovia uma discussão aprofundada do que realizaram em duplas, uma organização maior do raciocínio e uma discussão dos aspectos mais difíceis para eles.

Foram vários momentos. No primeiro momento, houve a familiarização com os principais comandos do software Geogebra. Os alunos foram desafiados a elaborar diversas construções básicas. Os alunos foram apresentados ao ambiente computacional Geogebra, considerando o que afirma Miskulin (1999), que os ambientes computacionais possibilitam contexto propício para a exploração e desenvolvimento de noções e conceitos geométricos.

Em um segundo momento, os alunos confeccionaram os portasegmentos de diversas medidas. Cecco (1971) sugere que os próprios alunos construam os seus portasegmentos, dessa maneira criam-se situações para se engajarem em atividades investigativas.

No terceiro momento, foram apresentados aos alunos os caleidoscópios. Como já mencionado neste trabalho, alguns dos alunos envolvidos no experimento já haviam trabalhado com espelhos e caleidoscópios, por já terem participado de outros projetos utilizando estes instrumentos. Após a familiarização com o software Geogebra, a construção dos portasegmento e o desenvolvimento de algumas atividades com os espelhos e caleidoscópios, os alunos iniciaram as construções básicas geométricas passando pelos vários instrumentos. Na sequência são relatados os detalhes de cada encontro realizado com os alunos.

1º Encontro

Nesse primeiro encontro de trabalho compareceram os dez alunos, ocasião em que foi explicado o objetivo da pesquisa e a necessidade de filmagem dos experimentos. Dois questionários iniciais, chamados de Questionário um (anexo I) e Questionário dois (anexo II), foram preenchidos pelos alunos antes de iniciarem o trabalho com o computador. No primeiro questionário havia perguntas para conhecer a opinião dos alunos com relação ao uso de diferentes instrumentos para o estudo da geometria. O segundo questionário se referia a perguntas pessoais.

Após os alunos responderem aos dois questionários, eles se organizaram em duplas e foram explorar o software Geogebra. As duplas, formadas de maneira espontânea, eram: Helen e Letícia; Sérgio e Guilherme; Gabriela e Daniel; Matheus e Vinicius e a dupla Ana Carolina e Daiane.

Em Villareal (1999), encontramos que a decisão de se optar por duplas de alunos, está pautada na seguinte questão: ao trabalhar em conjunto, produzem diálogos que indicam os processos percorridos ao resolver um determinado problema de maneira espontânea e ocorre também entre eles um auxílio mútuo.

O software escolhido para esta pesquisa foi selecionado levando em conta os critérios baseados em Nóbriga (2010). Primeiro, por ser de fácil manipulação, sem ter necessidade de conhecimentos anteriores de programação ou computação; segundo, é possível abordar os conteúdos matemáticos propostos; e terceiro, é um software livre, ou seja, que pode ser usado, copiado, estudado e redistribuído sem restrições.

Neste encontro, os alunos se mostravam animados e alguns deles já conheciam o software, como é o caso de Vinicius e Matheus, que não revelaram grandes dificuldades com os principais comandos. Mesmo assim, foram explicados todos os ícones da barra de ferramentas do Geogebra e, a seguir, foi permitido que eles explorassem tais ferramentas. Os comandos básicos do software constam na seção 1.6 do capítulo I, desta dissertação.

Elaboramos algumas construções geométricas básicas como, por exemplo: criar um segmento de reta definido por dois pontos, marcar o ponto médio de um segmento, paralela, perpendicular, construir uma circunferência e construir uma tangente à circunferência. Estas atividades foram realizadas para que ocorresse uma familiarização com o software e para poderem desenvolver as atividades que fazem parte da nossa coleta de dados, sem grandes dificuldades com os principais comandos.

Os alunos foram orientados a construir, primeiramente, o segmento a partir de dois pontos e, a seguir, iniciar a construção do ponto médio. Da mesma maneira, executaram a construção da paralela, da perpendicular, da circunferência e da tangente à circunferência, sempre partindo da construção de um segmento, utilizando o recurso do software.

Durante a elaboração das atividades, eles foram observando as características do software, explorando cada ícone da barra de ferramentas para poder concluir as operações nesse ambiente computacional.

A construção do segmento definido por dois pontos, eles conseguiram realizar por si próprios, pois o software permite, através de sua barra de ferramentas, que o segmento seja construído a partir de dois pontos marcados na área gráfica do software. Dando sequência às atividades, os alunos conseguiram obter o ponto médio de um segmento, após a explanação da pesquisadora do que é ponto médio. Nesse momento, a pesquisadora aproveitou a oportunidade para esclarecer que, ponto médio é o ponto de equilíbrio de um segmento de reta. Podemos definir o ponto médio como o ponto que divide o segmento de reta exatamente ao meio, gerando dois novos segmentos iguais. No entanto, eles sabiam encontrar o meio do segmento, por já terem visto esse assunto em sala de aula, mas não sabiam que se chamava “ponto médio”. Isto está presente na seguinte passagem:

Helen e Letícia: *“Então, ponto médio é encontrar um ponto que fica no meio do segmento”*.

Faremos a citação de apenas uma das cinco duplas, no entanto, as demais tiveram quase que a mesma reação. Passado esse momento, conseguiram obter o ponto médio do segmento com o recurso do Geogebra.

Para a construção da paralela, iniciaram a partir de dois pontos na tela, para construir um segmento definido por dois pontos. Realizaram várias tentativas para encontrar uma maneira de traçar uma reta paralela a um segmento. Os alunos, de modo geral, clicaram nos extremos do segmento para encontrar a reta paralela. Nesse caso a paralela traçada ficava em cima do segmento construído por eles. A pesquisadora interrompeu explicando como deveriam proceder para a reta ficar paralela a um segmento, utilizando os recursos do Geogebra. Antes, porém, a pesquisadora deu alguns

exemplos de retas paralelas. Foi relatado aos alunos que, duas retas distintas no plano são paralelas quando não têm nenhum ponto em comum, ou melhor, as retas paralelas nunca se cruzam.

Após conseguirem realizar a atividade, foi aproveitado o momento para descobrirem a ferramenta “arrastar objeto” da barra de ferramentas do Geogebra. Observaram que movendo o segmento pelos extremos, a reta traçada pelo software continuava paralela, pois ela acompanhava o movimento do mouse. Entretanto, cabia a eles descobrirem outras propriedades que envolviam essa construção.

A construção da perpendicular exigiu que a pesquisadora recordasse com eles o que é uma perpendicular. Duas retas são perpendiculares, se o ângulo entre elas mede 90° . O software traz a opção, em um dos ícones da sua barra de ferramentas; no entanto, é necessário saber, onde a perpendicular deve ser traçada. A partir do segmento criado por dois pontos, o aluno deveria clicar no segmento e, a seguir, em qual dos extremos ele quer a perpendicular. Algumas das duplas reagiram da seguinte maneira:

Sérgio e Guilherme: *“Ahhh!!! Professora, perpendicular é quando cruza uma reta na outra e forma uma cruz?”*

Gabriela e Daniel: *“Agora ficou mais fácil, professora!!! É só clicar no ponto onde quer a reta perpendicular e ela aparece!!”*

As duplas Helen e Letícia e Ana Carolina e Daiane tiveram reações semelhantes às citadas anteriormente. No entanto, Matheus e Vinicius realizaram a atividade sem qualquer dificuldade, antes mesmo de ouvirem a explicação da pesquisadora do significado das retas perpendiculares.

Para construírem uma circunferência e uma tangente à circunferência, a dificuldade encontrada foi que no software existem duas opções para se criar um círculo. A primeira é o círculo definido pelo centro e um de seus pontos; e a outra opção é o círculo dados o centro e o raio. Os alunos construíram o círculo através das duas opções. Porém, ao traçarem a reta tangente utilizando o software, demonstraram dificuldade, pois era necessário que descobrissem a posição a ser traçada. Nesse instante do encontro, a pesquisadora, propiciou que as duplas comunicassem os resultados e os

processos mais significativos da investigação realizada e estimulou os alunos a questionarem-se mutuamente.

A partir dessas atividades, eles conseguiram através do ambiente computacional Geogebra, observar algumas propriedades geométricas intrínsecas aos segmentos, a reta paralela e a tangente a uma circunferência, visto que o Geogebra possibilita a verificação do paralelismo e do perpendicularismo.

2º Encontro

Neste encontro, a atividade abordada foi a construção dos portasegmentos, conforme sugestão de Cecco (1971), que recomenda que os próprios alunos construam os seus portasegmentos.

Houve um fato que alterou a rotina deste encontro. Ana Carolina e Daiane teriam que fazer aulas de reforço de língua portuguesa, no mesmo horário dos nossos encontros. Tentaram mudar o horário com a professora do reforço, mas não obtiveram êxito e foram obrigadas a desistir de participar da pesquisa. Assim, permaneceram quatro duplas, sendo elas: Helen e Letícia; Sérgio e Guilherme; Gabriela e Daniel; Matheus e Vinicius.

Os alunos estavam curiosos para este encontro, eles nunca ouviram a palavra portasegmento; não tinham noção do que seria e muito menos que com ele se poderia trabalhar geometria.

Aos alunos foram distribuídas algumas folhas de cartolinas coloridas, régua e tesoura. A pesquisadora solicitou que confeccionassem portasegmentos de várias medidas e tamanhos, para serem utilizados nos futuros encontros.

Pesquisadora: *“O portasegmento tem o formato de uma régua não graduada, vocês vão fazer vários portasegmentos de diferentes tamanhos e medidas, para serem utilizados nas outras atividades dos próximos encontros.”*

Matheus e Vinicius: *“Posso fazer do tamanho que eu quiser?”*

Pesquisadora: *“Pode! Você vai utilizá-lo como se fosse uma régua.”*

Matheus e Vinícius: *“Então é melhor que seja parecido com uma régua mesmo... mais ou menos como uma régua de verdade.”*

Nesse encontro as quatro duplas confeccionaram os portasegmentos para serem utilizados nas atividades de construções geométricas. Não houve dificuldade, já que os portasegmentos têm o formato de retângulos de diversas medidas.

Todos os portasegmentos foram confeccionados pelos alunos em cartolina de diferentes cores, medidas e tamanhos.

3º Encontro

Permanecemos neste encontro com a mesma quantidade de alunos do encontro anterior, ou seja, quatro duplas: Helen e Letícia; Sérgio e Guilherme; Gabriela e Daniel; Matheus e Vinicius. Os alunos tiveram contato com os espelhos e caleidoscópios.

Os espelhos utilizados possuíam, na parte superior de seu contorno, uma fita adesiva a qual servia como proteção quando manipulado. Os caleidoscópios utilizados neste trabalho foram os instrumentos formados por dois espelhos planos articulados, com as medidas: 20 cm x 25 cm. Os espelhos foram colados sobre uma base de papel resistente (papelão, papel cartão ou *eva*), deixando entre eles um espaço correspondente a duas vezes a espessura do espelho, para ser possível a articulação dos mesmos. O caleidoscópio tem a forma de um livro aberto.

O caleidoscópio não foi surpresa para alguns alunos, como é o caso de Helen, Letícia, Matheus e Vinícius, pois já trabalharam com espelhos e caleidoscópios em outro projeto com parceria da Unesp.

O início da atividade foi feito a partir da ficha ilustrada na figura 106.

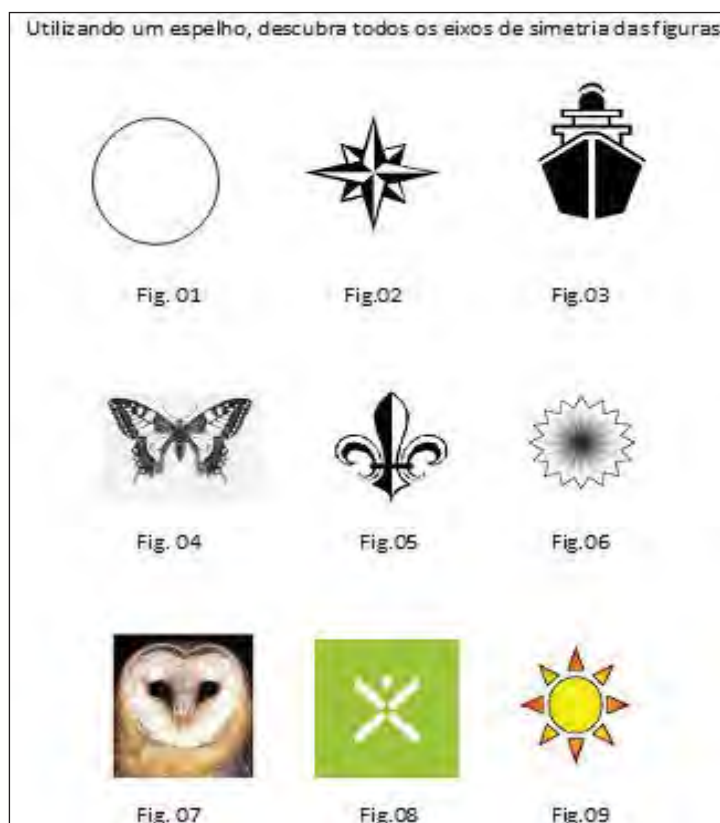


Figura 106

Ficha: encontrar os eixos de simetria das figuras

A pesquisadora propôs que trabalhassem em duplas, as quais poderiam ser diferentes dos encontros anteriores. Entretanto, os alunos preferiram permanecer com os mesmos parceiros. Gabriela e Daniel iniciaram pela circunferência, tentando encontrar os eixos de simetria, porém não conseguindo chegar de imediato ao resultado, partiram rapidamente para a próxima figura. Helen e Letícia tiveram reações bastante diferentes, não esperavam encontrar simetria na natureza, como é o caso da gravura da borboleta e da coruja. Sérgio e Guilherme, ficaram surpresos em descobrir que uma mesma figura tenha mais de um eixo de simetria. Matheus e Vinicius concluíram que é muito difícil calcular o número exato de eixos de simetria de determinadas figura da ficha.

A pesquisadora lembrou-lhes que uma figura geométrica se diz simétrica se for possível dividi-la por uma reta, de forma que as duas partes obtidas possam se sobrepor por dobragem. As retas que levam a esse tipo de divisão chamam-se eixos de simetria da figura. Todavia, existem figuras que podem ter vários eixos de simetria ou nenhum.

Com a circunferência, foi possível explorar o entendimento dos conceitos de corda, diâmetro, arco e semicírculos, revelados no momento em que colocavam o

espelho sobre a figura. A pesquisadora explicou que se o espelho não passasse pelo centro da circunferência, formariam arcos e cordas, sendo concluído por eles que aquele não seria um eixo de simetria porque a parte da figura no papel mais a sua reflexão, não davam a figura inteira.

Nas figuras da borboleta e da coruja todos os grupos concluíram, sem dificuldades, a existência de apenas um eixo de simetria. A pesquisadora aproveitou a oportunidade para que pudessem observar a existência de outras simetrias na natureza, como acontece, por exemplo, com algumas folhas de árvores.

Nas figuras 02, 06 e 09 foi possível observar a existência de mais de um eixo de simetria.

Dando continuidade às atividades relacionadas a esse encontro, distribuímos para cada dupla, um caleidoscópio e alguns objetos. A pesquisadora sugeriu que colocassem alguns objetos como, por exemplo: régua, fita de papel e canudinho entre os dois espelhos, de maneira que os espelhos permanecessem fixos e pudessem formar figuras geométricas e, também, que observassem as reflexões dos objetos nos espelhos.

Nesta atividade, o caleidoscópio permaneceu fixo sobre a mesa e as duplas moviam a fita de papel entre os espelhos, observando o que acontecia quando eles aproximavam ou diminuíaam a distância da fita em relação à abertura dos espelhos. A pesquisadora questionava as conclusões que poderiam advir dessas observações.

Matheus e Vinícius: *“Dependendo do jeito que fica a fita, a figura que aparece no espelho tem os lados iguais.”*

Sérgio e Guilherme: *“Quanto mais a fita se aproxima da abertura dos espelhos, a figura vai ficando menor. E quanto mais longe da abertura dos espelhos, a figura vai ficando maior.”*

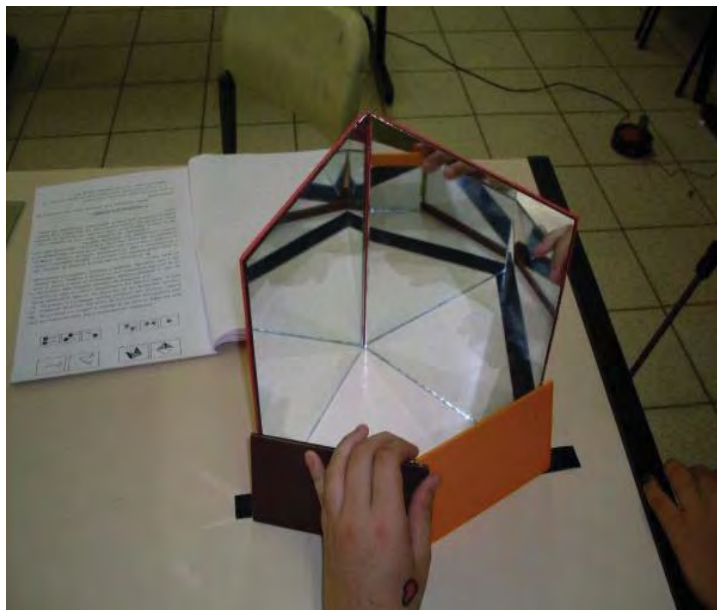


Figura 107
Formando figuras com o caleidoscópico

O interesse nesta tarefa foi tanta que a presença da pesquisadora na sala neste momento, passou quase despercebida, carecendo de poucas interferências. A atividade promoveu o envolvimento das duplas de alunos interessados no próprio material, pelas variadas figuras que se formam em seu interior.

Os círculos coloridos representando pontos foram entregues para as duplas de alunos. Eles colocavam estes círculos coloridos entre os espelhos com várias aberturas de ângulos e diversas posições dos pontos, obtendo alguns vértices de figuras. Por meio da fórmula de imagens, verificaram que além da imagem real do ponto, um ângulo de 30° fornecia mais onze imagens, que o ângulo de 45° fornecia mais sete imagens, e o ângulo de 60° , mais cinco imagens. Através dos espelhos, eles foram capazes de comprovar a função da fórmula de imagens, testando as transformações que ocorriam quando os mesmos pontos eram colocados em outras posições, com relação à bissetriz (nela, próximos a ela, ou próximos aos espelhos). As duplas de alunos puderam perceber também, a relação que existe entre a posição do objeto e a abertura do ângulo do caleidoscópico.

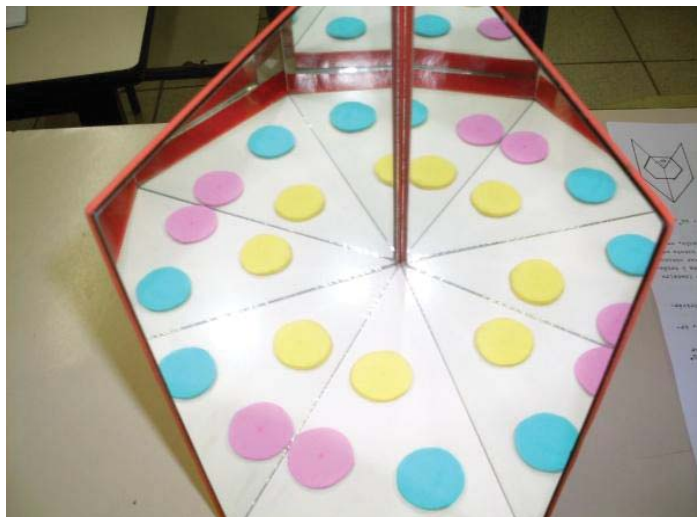


Figura 108
Círculos coloridos no caleidoscópio

Com o caleidoscópio foi possível calcular o número e a distribuição das imagens obtidas de um ponto, abertura de ângulo, construção de vários vértices gerados pelos objetos e suas imagens, simetrias e obtenção de diversos polígonos regulares.

Com os demais objetos colocados no interior do caleidoscópio, as duplas obtinham resultados de simetria e reflexão. Uma das duplas colocou um caleidoscópio em frente ao outro, dizendo que as imagens geradas entre eles eram infinitas.

Enfim, a participação foi tanta que cada dupla queria demonstrar seus resultados individuais, devido ao encantamento com o caleidoscópio.

Dessa maneira, as duplas de alunos trabalharam de maneira informal, e conseguiram, sem muito rigor, mas de forma eficiente, verificar alguns conceitos como ângulos centrais, vértices, polígonos e simetria.

O encontro transcorreu em um ambiente agradável, com a participação ativa de todas as duplas, sendo possível perceber o contentamento de todos no transcorrer das atividades.

Queremos deixar claro aos leitores que não houve um estudo aprofundado com relação aos ângulos e nem quanto à fórmula que explica as imagens geradas pelo caleidoscópio. Esse encontro era apenas para os alunos se familiarizarem com o material, pois o caleidoscópio seria utilizado, posteriormente, na realização das sete construções fundamentais em geometria.

4º Encontro

A partir deste até o 8º encontro, permaneceram quatro alunos, duas duplas: Sérgio e Guilherme; Matheus e Vinicius. Helen e Letícia não compareceram mais ao experimento porque resolveram participar de um treinamento de dança. Gabriela e Daniel porque estavam “sem tempo” disponível para participar do experimento naquele horário.

Este encontro foi para fazerem a primeira construção fundamental: Transporte de segmento. A atividade fazia parte da Ficha nº 1 (anexo III) e continha o seguinte enunciado: construir um segmento de reta congruente a um segmento dado. Essa atividade deveria ser construída utilizando, inicialmente, régua e compasso e, a seguir, os instrumentos nesta sequência: o transferidor, o par de esquadros, o software Geogebra, o portasegmento e, finalmente, o caleidoscópio.

Sabemos que uma atividade de investigação desenvolve-se, de modo geral, em três fases: na introdução da tarefa, na realização da investigação e na discussão dos resultados com toda a turma. Dessa maneira, a pesquisadora introduziu a primeira atividade aos alunos, distribuindo a eles régua e compasso. Iniciando a atividade do 4º encontro, no item (a) da ficha nº1. A pesquisadora deu o arranque da tarefa com a seguinte questão: Se tivermos de material apenas uma régua e um compasso, como podemos transportar este segmento de reta sobre outra reta? Sabemos que o professor tem um papel fundamental nas aulas de investigação. Nesta fase de arranque da investigação, por um lado, é determinante garantir que os alunos se sintam motivados para realizarem a tarefa e por outro, o professor deve dar uma atenção especial para a própria tarefa, escolhendo questões ou situações iniciais que sejam um desafio para os alunos. A partir disso, os alunos começaram manipulando a régua e o compasso, os quais, embora sejam instrumentos muito naturais do dia a dia, em geral, estão pouco presentes nas aulas de matemática. A atitude investigativa na abordagem da tarefa deve ser estimulada pela pesquisadora, no entanto, no presente encontro, esta fase demorou algum tempo, mas sendo muito importante na investigação para começarem a formular questões e conjecturas. Foi nesta fase que os alunos se apropriaram dos dados e do sentido da tarefa a ser realizada.

As duplas não sabiam segurar o compasso corretamente. A maneira como eles seguravam o material, alterava sua medida. Neste caso, foi necessária a intervenção da pesquisadora para mostrar-lhes o modo correto de se usar o compasso, de forma a não

alterar o que foi medido por eles. Explicou-se que a ponta seca do compasso deveria estar fincada em um dos extremos do segmento dado e a outra ponta (que contém o grafite) no outro extremo, fixando assim, a medida do segmento a ser transportado para a reta.

Após a explanação e alguns exemplos na lousa, uma das duplas teve ainda alguma dificuldade. Porém, levamos em consideração que se tratava do primeiro encontro em que o compasso estava sendo utilizado e que não estavam habituados a manuseá-lo corretamente.

Sérgio e Guilherme: *“É difícil transportar o segmento para a reta com a mesma medida, não consigo segurar no compasso só por essa ponta de cima. Então eu seguro no compasso de lado e muda a medida do segmento...”*

Ainda na ficha nº1, item (b), a mesma atividade era para ser resolvida somente utilizando o transferidor, ou seja, transportar o segmento para uma reta com o uso de um transferidor. A pesquisadora advertiu que não seria possível fazer qualquer marca no instrumento, a fim de transportar as medidas.

Após a introdução da atividade, as duplas discutiram entre si para encontrar uma maneira de resolvê-la. Passada esta fase da introdução da tarefa e da discussão em duplas, os alunos relataram aos colegas e à pesquisadora que era impossível transportar o segmento para a reta com a condição de não poder marcar no instrumento. Os alunos concluíram que se pudessem fazer alguma marca com o lápis na base do transferidor da medida do segmento, seria possível transferir a medida para a reta. Tendo em vista a condição estabelecida pela pesquisadora, tornou-se impossível realizar a atividade. Esta dedução dos alunos pode ser apreciada nas seguintes falas:

Sérgio e Guilherme: *“Não é possível realizar a atividade porque se pudesse marcar no transferidor poderia, mas não pode, então não dá para passar a medida para a reta!”*

Matheus e Vinicius: *“Não tem como pegar a medida do segmento... é impossível realizar a atividade!”*

Ainda fazendo parte desta mesma ficha nº1, item (c), a atividade era para ser resolvida utilizando-se apenas um par de esquadros. Transportar o segmento para uma reta com o uso de um par de esquadros. A pesquisadora advertiu, novamente, que não era para fazer qualquer marca no instrumento. Convém lembrar que os esquadros utilizados pelos alunos eram sem escalas, ou seja, eles não tinham qualquer numeração que pudesse ser utilizado como uma régua graduada.

Como no caso do transferidor que não foi possível realizar a atividade, os alunos perceberam que alguns instrumentos de desenho não realizam todas as construções geométricas. Estas colocações puderam ser ouvidas nas seguintes falas:

Sérgio e Guilherme: *“Ah! Professora... agora ficou mais fácil, se com o transferidor não pode fazer porque não podia marcar nele, então com os esquadros é a mesma coisa. Não tem como pegar a medida e passar para a reta. É impossível realizar a atividade!”*

Matheus e Vinicius: *“Exatamente é como no caso do transferidor. É impossível!”*

Na ficha nº1, item (d), a atividade consistia em transportar o segmento para uma reta com o uso do software Geogebra.

Neste momento houve muita discussão entre as duplas para a realização deste item da ficha. Foi necessária a interferência da pesquisadora por muitas vezes para auxiliá-los na realização desta atividade. As duplas relataram aos colegas e à pesquisadora as seguintes falas:

Sérgio e Guilherme: *“Primeiro você faz uma reta definida por dois pontos. Depois faz um segmento de dois pontos e depois usa o compasso para medir os pontos e transportar o segmento”*

Matheus e Vinicius: *“Utilizamos a ferramenta compasso e criamos uma circunferência. Medimos a reta do centro da circunferência até o final, e passamos para a reta definida por dois pontos.”*

Fazendo parte da ficha nº1, o item (e), solicitava que realizassem a mesma atividade, transportar o segmento para uma reta, dessa vez utilizando o portasegmento. A partir deste momento, a pesquisadora anunciou aos alunos que no caso do portasegmento, poderia ser marcada a medida no próprio instrumento.

A pesquisadora explicou que segundo Cecco (1971), o portasegmento é um instrumento que simula o uso da régua e compasso. Este mesmo autor em seus relatos sobre construções geométricas básicas, sugere que podemos assinalar no próprio instrumento as medidas que estamos utilizando para realizar as construções.

Observamos que este item da ficha nº 1, foi a atividade realizada com maior rapidez e sem muito debate entre as duplas. Passada a fase da discussão em duplas, os alunos apresentaram as seguintes colocações:

Matheus e Vinicius: *“Transportamos o segmento dado utilizando o portasegmento da seguinte maneira: pegamos a medida do segmento e marcamos no portasegmento. Pegamos essa medida assinalada no portasegmento e passamos para a reta.”*

Relatamos apenas uma das duplas, a outra dupla de alunos Sérgio e Guilherme, fizeram exatamente o mesmo comentário, não havendo, portanto, a necessidade das duas falas.

A última atividade da ficha nº1, o item (f), consistia em realizar a atividade com o caleidoscópio.

Após a distribuição dos caleidoscópios os alunos passaram para o momento da investigação da atividade em dupla, fazendo inúmeras tentativas de colocação do caleidoscópio sobre o segmento dado. Os alunos tentaram refletir o segmento sobre a reta de várias maneiras, mas como não poderia ser assinalada no caleidoscópio a medida do segmento a ser transportado, tornava-se impossível a realização da atividade. Na discussão dos resultados com a turma, chegou-se a um consenso, de que a atividade era impossível de ser realizada, uma vez que a medida do segmento não poderia ser marcada no instrumento.

Após essas discussões, e terminada as atividades que constavam na ficha nº1, fizemos um balanço bastante positivo deste encontro, uma vez que foram discutidas ideias importantes ligadas à exploração de uma investigação. Os alunos se mostraram

entusiasmados e buscavam sempre se manifestar. As atividades da ficha n° 1 possibilitaram analisar aspectos, nos quais os alunos demonstravam ter dificuldades e lhes proporcionou olhar para uma tarefa de investigação como um todo e não como uma sequência de exercícios não relacionados. Os comentários e as discussões dos alunos ao trabalho realizado refletiram o gosto que tiveram em explorar estas atividades e se referiram à maior facilidade com que fizeram o item (e), comparando-o com as demais investigações dos itens da ficha n° 1: “*O item (e) foi o mais fácil até agora.*”

5º Encontro

Os alunos estavam ansiosos e animados para iniciarem as atividades, pois no encontro realizado na semana anterior, as discussões indicaram que eles estavam interessados em realizar as atividades, pois eram diferentes das realizadas em sala de aula.

Neste encontro, as duplas de alunos Sérgio e Guilherme; Matheus e Vinicius iniciaram a ficha n° 2, com a segunda construção fundamental, transporte de ângulos. A atividade fazia parte do item (a) e consistia em transportar um ângulo α (dado) para uma semirreta r , utilizando régua e compasso.

Como realizado nos encontros anteriores, a atividade foi introduzida aos alunos, para que reconhecessem a situação, iniciassem a exploração inicial e a formulação de conjecturas. A introdução foi feita da seguinte maneira:

Pesquisadora: “*Desta vez, eu tenho uma régua e um compasso, como eu poderia transportar um ângulo α (dado) para uma semirreta r ?*”

A pesquisadora certificou-se, passando pelas duplas, de que haviam entendido o sentido da atividade e o que era esperado deles no final de cada item da ficha. Esses momentos iniciais são muito relevantes, quando os alunos têm pouca ou quase nenhuma experiência com as investigações.

Como dito anteriormente, temos que garantir nesta fase inicial, a qual pode ser chamada de arranque da aula, que os alunos compreendam o que significa investigar. Para isso, eles precisam entender a natureza deste tipo de atividade que é diferente das

atividades rotineiras da sala de aula. O aluno, em uma atividade investigativa, não está diante de uma questão para a qual se tem uma resposta pronta. Na atividade investigativa, ele deve formular as questões tendo como base, a situação que lhe é apresentada.

Sendo assim, o item (a) requereu que as duplas discutissem seus pontos de vista, antes de exporem os resultados de suas conjecturas aos colegas. Esta interação será determinante no que se refere ao encaminhamento que a investigação irá tomar.

A pesquisadora interferiu fazendo uma breve introdução, fornecendo algumas indicações a respeito da atividade que as duplas de alunos deveriam fazer, visto que estavam gastando muito tempo nesta fase da atividade. A dificuldade de manipular o compasso foi um dos complicadores na resolução da atividade. Esta questão pode ser observada na fala dos alunos, compartilhada com os colegas:

Sérgio e Guilherme: *“O que é difícil professora, é medir e marcar o ângulo sem alterar a medida do ângulo. Não conseguimos segurar o compasso só pela pontinha de cima.”*

Matheus e Vinicius: *“quando a gente consegue segurar o compasso pela pontinha, daí a medida dá certo senão não dá certo.”*

Dando sequência ao experimento de ensino, o item (b) desafiava os alunos a realizarem a mesma atividade, ou seja, transportar um ângulo α (dado) para uma semirreta r , mas agora usando o transferidor.

A tarefa, como já realizada anteriormente, foi introduzida aos alunos para iniciarem a exploração inicial de como chegar à solução.

As duplas tentavam posicionar o transferidor sobre o ângulo para transportá-lo para a semirreta. Esta atividade demorou pouco tempo em relação a algumas das investigações já realizadas. Acreditamos pelo fato do transferidor ser um instrumento utilizado frequentemente em sala de aula de matemática.

Isto pode ser comprovado nos depoimentos dos alunos, na fase da exposição da investigação aos colegas. Os alunos contaram que já haviam realizado atividades semelhantes a estas em sala de aula. Em seus relatos, descreveram que é possível fazer o transporte do ângulo para uma semirreta, colocando a linha de fé sobre o lado do ângulo, ler a medida do ângulo e transportá-lo para a semirreta.

Continuando a resolução dos demais itens desta ficha, o próximo item (c), consistia em realizar a mesma tarefa, mas agora o instrumento a ser analisado por eles seria um par de esquadros. A pesquisadora instigava-os a refletir sobre a possibilidade de se realizar a mesma tarefa utilizando um par de esquadros.

Com as duplas já reunidas, observamos que foi quase de imediato, a descoberta de que o próprio esquadro tinha o formato de um ângulo. Os alunos tentavam posicionar os esquadros sobre o ângulo dado, porém a medida do ângulo dado na ficha não coincidia com as medidas do formato dos esquadros. Em seus depoimentos aos colegas falaram justamente isto:

Sérgio e Guilherme: *“Se o ângulo dado na ficha fosse um ângulo igual ao dos esquadros, certamente seria possível realizar a atividade, como não é igual então não é possível”*

Matheus e Vinicius: *“não é possível realizar a atividade porque o formato do esquadro tem outra medida de ângulo, senão daria certo.”*

Complementando as falas dos alunos a pesquisadora disse-lhes que, de fato, se o ângulo a ser transportado fosse de medidas como 30° , 45° , 60° ou 90° (ou múltiplos destes), poderia ser utilizado o formato do próprio esquadro; caso contrário, não seria possível realizar o transporte de ângulos com este instrumento.

Ainda na realização da mesma atividade, mas agora sendo o item (d) da ficha, era proposto que utilizassem o software Geogebra. A atividade foi iniciada como as demais atividades investigativas do encontro; no entanto, as duplas de alunos levaram algum tempo para descobrir a medida do ângulo no software, a qual é fornecida usando a ferramenta “ângulo”, clicando-se nos pontos que formam o ângulo, no sentido horário. Nas discussões realizadas em grupo constatamos nossa observação.

Sérgio e Guilherme: *“Fizemos uma reta definida por dois pontos e fizemos uma semirreta definida por dois pontos. Depois medimos os ângulos até dar a mesma medida de ângulo. E para saber a medida do ângulo tem que clicar no sentido horário dele”*

Matheus e Vinicius: *“Usamos o medidor de ângulo, assim achamos o ângulo exato que nós tínhamos que transferir, então criamos um segmento definido por três pontos na reta e medimos seu ângulo. Depois movemos essa reta até acharmos o ângulo exato que era da primeira reta definida por três pontos .”*

Continuando com as atividades da ficha, no item (e) era proposto aos alunos que realizassem a mesma atividade usando como instrumento o portasegmento. Nesta atividade, os alunos tiveram um pouco de dificuldade na realização do reconhecimento e levantamento das conjecturas, visto que o portasegmento é um material desconhecido por eles em sala de aula. Somente conseguiram realizar a tarefa após a intervenção da pesquisadora, que disse a eles que para se transportar um ângulo utilizando o portasegmento, dever-se-ia apoiar o portasegmento em um dos lados do ângulo, marcar no próprio portasegmento o vértice do ângulo e assinalar, também, a intersecção do portasegmento com o outro lado do ângulo. Feito isso, é só transportar com o portasegmento o ângulo marcado para a reta e construir o ângulo dado.

Para a resolução da mesma atividade utilizando o caleidoscópio, os alunos não levantaram conjecturas. Quando lhes foi entregue o caleidoscópio para que fosse transportado o ângulo dado com o auxílio apenas deste instrumento, a resolução foi quase de imediato. As ideias apresentadas pelas duplas eram muito próximas, pois procederam quase da mesma maneira. Abriam o caleidoscópio e apoiaram a abertura dos espelhos sobre o ângulo dado e transportaram para uma reta. Foi necessária a interferência da pesquisadora para auxiliá-los na resolução, a qual questionou se achavam estar correta esta maneira de resolver o transporte de ângulo. Os alunos proferiram as seguintes falas:

Sérgio e Guilherme: *“Claro que está. Transportamos o mesmo ângulo”*

Matheus e Vinicius: *“o que não pode é mexer na abertura do caleidoscópio, tem que pegar a mesma abertura e passar para a reta. E pronto!”*

A pesquisadora disse-lhes que a atividade com o caleidoscópio não poderia ser realizada com qualquer ângulo e que somente em alguns casos, é possível efetuar o transporte de ângulos com a ajuda do caleidoscópio. Trata-se dos ângulos de 30° , 45° ,

60° , 90° e 120° , os quais na divisão por 360 dão por resultado números inteiros, os quais representam o número de cunhas (de medidas iguais) a serem formadas pelos espelhos. Poderemos contar as cunhas e transportar para a reta, visto que com outros ângulos as cunhas não seriam iguais.

Este encontro foi encerrado com o término da discussão sobre transporte de ângulo com a ajuda do caleidoscópio. Concluímos que este foi um encontro bastante rico em discussões e formação de conjecturas pelos alunos. Observamos que começavam a perceber o sentido de uma atividade investigativa. Nosso trabalho promoveu atitudes e gosto pelo trabalho investigativo. Consideramos que todos os alunos fizeram as medições com os instrumentos propostos, levantaram suas conjecturas e discutiram suas ideias com os demais colegas

6º Encontro

Dando continuidade ao experimento de ensino, as atividades a serem realizadas, neste encontro faziam parte das fichas n^o3, n^o4 e n^o5. Esse encontro foi um pouco mais longo que os demais, valendo-nos do fato de que os alunos estavam mais familiarizados com os instrumentos da nossa pesquisa e se mostravam interessados na realização das atividades. Sendo assim, o item (a) propunha o seguinte: construir a bissetriz de um ângulo α (dado), utilizando a régua não graduada e compasso.

Para a realização desta atividade, as duplas não demonstraram ter dificuldades, pois o conteúdo de ângulos já tinha sido abordado na 6ª série do ensino fundamental, razão pela qual não houve necessidade de muita interferência da pesquisadora.

No momento de os alunos relatarem aos colegas suas descobertas apresentaram ideias semelhantes. Em síntese, disseram que firmaram a ponta seca do compasso no vértice do ângulo e traçaram um arco qualquer no ângulo. neste arco, encontrando as laterais do ângulo, marca-se dois pontos A e B. Colocando a ponta seca do compasso em A traçam-se outro arco, interno ao ângulo, e a seguir, colocam-se a ponta seca em B e traçam se mais um arco interno do ângulo. O encontro destes arcos internos foi denominado de ponto P. Ligaram o vértice ao ponto P e encontraram a bissetriz do ângulo.

O item (b) consistia em realizar a mesma atividade utilizando o transferidor. Sendo assim, este item da ficha foi iniciado como os itens anteriores, primeiramente para o reconhecimento inicial da atividade.

Percebemos, enquanto caminhávamos entre os alunos, que tentavam colocar o transferidor sobre o ângulo e procuravam encontrar a metade do ângulo.

Em seus relatos aos colegas, disseram ser possível a realização da atividade com este instrumento, colocando a linha de fé sobre um dos lados do ângulo. Após isso, era só ler a medida do ângulo e marcar a metade dele, obtendo a bissetriz que passaria por este ponto e pelo vértice do ângulo.

No momento de realizar a discussão em grupo sobre a possibilidade de se construir a bissetriz com os esquadros, as duplas relataram que era impossível a realização desta atividade com este material. Neste momento, houve a intervenção da pesquisadora que lhes disse que com alguns ângulos é possível traçar a bissetriz utilizando os esquadros aproveitando o próprio formato dos instrumentos. O primeiro esquadro com o formato de um triângulo retângulo isósceles de 45° , 45° e 90° e o segundo com o formato de um triângulo retângulo escaleno de 30° , 60° e 90° , possibilitam obter-se as bissetrizes dos ângulos de 60° , 90° e de 180° . O item (d) da ficha era para que utilizassem o Geogebra na realização da atividade. As duplas de alunos construíram um ângulo, inicialmente, utilizando dois segmentos de reta formados por dois pontos. Clicaram em “bissetriz” e, em seguida, clicaram nos pontos que formavam o ângulo, obtendo a bissetriz.

No 1º encontro do experimento de ensino os alunos se familiarizaram com o software Geogebra, com suas ferramentas e seus ícones, apesar de alguns dos alunos do experimento já conhecerem este programa. Assim, não encontraram dificuldades para realizarem a bissetriz de um ângulo, razão pela qual não houve o levantamento das conjecturas; apenas a discussão de como haviam realizado a atividade.

Na realização da atividade com o portasegmento, os alunos o colocavam de diversas maneiras para encontrar um jeito de achar a bissetriz do ângulo. Esta fase de exploração da atividade investigativa foi bastante longa, e houve, por muitas vezes, a necessidade da interferência da pesquisadora. No entanto, mesmo diante do desafio encontrado por eles, conseguiram realizar a atividade. No relato em grupo para a discussão das conjecturas diziam ser necessário posicionar a borda do portasegmento com o segmento de reta e traçar uma reta. A seguir, posicionar o portasegmento na outra

borda do segmento, que forma o ângulo, e traçar outra reta. No encontro das retas feitas pelo portasegmento seria marcado o ponto P. Depois, era só unir o vértice do ângulo com este ponto para encontrar a bissetriz.

Com os caleidoscópios em mãos, para realizarem o item (f), os alunos fizeram inúmeras tentativas, mas não conseguiram realizar a atividade sem a interferência da pesquisadora, a qual explicou que a construção da bissetriz de um ângulo qualquer x dependerá da posição do observador. Assim, é necessário colocar um dos espelhos em um dos lados do ângulo e o outro espelho no outro lado do ângulo (como se colocasse a abertura do caleidoscópio em cima do ângulo dado) O observador vai contar as cunhas. Por exemplo para a bissetriz de um ângulo de 60° . Deve-se saber, antes, que com o ângulo de 60° temos seis cunhas; então, para formar a bissetriz de 60° (que é um ângulo de 30°), deve-se dobrar o número de cunhas. Como já dissemos anteriormente, para os ângulos divisores de 360° , o número de cunhas é exato e que para outras medidas de ângulos, a bissetriz poderá ser encontrada informalmente, sendo de valor aproximado.

Em nossa pesquisa, no capítulo 2, no item 2.1.6 - Construções com Caleidoscópios constam duas maneiras para se encontrar uma bissetriz. No entanto, diante das dificuldades encontradas por eles, optamos em relatar apenas uma das construções.

Com esta discussão, terminamos a resolução das atividades da ficha nº3 e iniciamos a ficha nº4. O item (a), como nas demais fichas já realizadas, consistia em traçar uma perpendicular. Dada uma reta r e um ponto P, construir por P, uma reta perpendicular à reta r , utilizando a régua não graduada e compasso.

Com os alunos reunidos em duplas, para a exploração inicial da tarefa, percebemos que mostravam dificuldade em manusear o compasso. Foi necessário algum tempo para descobrirem a posição do instrumento em relação ao ponto P para se traçar a perpendicular.

Na fase das discussões com os demais colegas, as duplas defenderam ideias semelhantes. Em resumo, relataram que já haviam realizado esta atividade em sala de aula, por esta razão, se recordaram que era para centrar o compasso no ponto P e marcar dois pontos na reta, pontos A e B. Depois, centrar o compasso nos pontos que foram marcados e marcar a mediatriz deste segmento formado pelos pontos A e B, encontrando, assim, a reta perpendicular.

Na resolução da mesma atividade com o transferidor (item b, ficha nº4), os alunos levantaram conjecturas relevantes. Registramos aqui a fala de uma das duplas:

Matheus e Vinicius: *“Se o ponto está na reta, podemos colocar o centro do transferidor em cima do ponto onde deveria passar a perpendicular e marcar 90°. Ligar o ponto onde foi assinalado o ângulo de 90°, que é onde se deve passar a perpendicular.”*

Com estas argumentações, concluímos ser possível construir por P uma reta perpendicular à reta r, utilizando o transferidor. Os alunos posicionaram a linha de fé sobre o ponto P, marcando um ângulo de 90° e em seguida, a linha de fé foi utilizada como uma régua para traçar a perpendicular.

Continuando com as atividades da ficha nº 4, agora seria o momento da utilização do esquadro. Dada uma reta r e um ponto P, construir por P, uma reta perpendicular à reta r.

Com os alunos organizados em duplas para o levantamento das conjecturas, percebemos certa dificuldade quanto ao posicionamento do esquadro em relação ao ponto por onde deveria passar a perpendicular. No entanto, conseguiram realizar a atividade. As falas dos alunos vêm confirmar o que já havíamos percebido durante a realização do encontro.

Sérgio e Guilherme: *“É que nós não sabíamos qual dos esquadros deveria formar uma perpendicular com a reta, se era o esquadro maior embaixo ou vice e versa”*

A pesquisadora lhes disse que para esta atividade não importava o formato dos esquadros, pois serviriam apenas de apoio. Seria necessário colocar um dos esquadros sob a reta r formando um ângulo de 90° com o outro esquadro. Um esquadro serviria de apoio ao outro, tomando o cuidado de não tira-los de sua posição. Dever-se-ia deslizar um esquadro apoiado no outro, até fazer com que sua borda ficasse sobre P. Então, era só traçar uma reta s, perpendicular a r.

Quanto à utilização do software para a resolução da atividade obtivemos as seguintes conjecturas:

Sérgio e Guilherme: *“será que não podemos traçar duas retas formando um ângulo de 90° , mas não pedir perpendicular no software?”*

Matheus e Vinicius: *“No software, se pedir para traçar a perpendicular, o ângulo das retas tem 90° .”*

No momento das discussões, a pesquisadora explicou que duas retas são perpendiculares quando se forma um ângulo de 90° entre elas. No software, existe a opção de reta perpendicular. Quando clicamos nesta opção o ângulo entre as retas têm 90° ; no entanto, se fizermos duas retas quaisquer que se cruzam, pode ser que o ângulo formado entre elas não seja de 90° .

Na realização da atividade com o portasegmento (item e da ficha 4), os alunos tentaram fazer passar a mediatriz pelo ponto P. Realizaram inúmeras tentativas, chegando passar a perpendicular próxima do ponto.

Sérgio e Guilherme: *“Ah!!! Professora a minha perpendicular nunca dá certo em cima do ponto!!”*

Pesquisadora: *“E se você pegar a mesma medida dos dois lados do ponto? será que não daria certo? Vamos tentar...”*

Matheus e Vinicius: *“Mas como vamos fazer para o ponto ficar no meio e fazer igual como na mediatriz”*

Gastou-se bastante tempo nesta atividade para descobrirem uma maneira de como o portasegmento poderia ser utilizado para transportar a mesma medida dos dois lados do ponto P. Depois de marcada na reta as mesmas medidas dos dois lados do ponto P com as bordas do portasegmento, utilizaram da mesma construção da mediatriz para encontrar a perpendicular que passasse por esse ponto P.

No momento da utilização do caleidoscópio, Ficha n°4, item (f), para traçar a perpendicular a pesquisadora instigou-os dizendo:

Pesquisadora: “*A perpendicular deve formar um ângulo de 90° com a reta, vocês se lembram?*”

Sérgio e Guilherme: “*Se eu formar um ângulo de 90° , em cima do ponto é uma perpendicular e se o ângulo de 90° for na reta?*”

Matheus e Vinicius: “*Onde devo colocar o vértice dos espelhos? No ponto ou eu faço um ângulo de 90° e coloco o lado do espelho em cima do ponto?*”

Este momento foi muito interessante do ponto de vista do pensamento matemático, e não seria usufruído pelos demais, se não houvesse a possibilidade de por em comum os resultados do trabalho em dupla.

A pesquisadora, salientando o grande valor das explorações desenvolvidas pelas duplas, afirmou a eles que uma mesma atividade pode ser resolvida de várias maneiras.

Com esta atividade terminamos a resolução da ficha nº 4. Iniciamos a ficha nº 5, diante dos pedidos dos alunos, que se mostravam interessados com a resolução das atividades, embora fossem conteúdos matemáticos já abordados em sala de aula, no experimento de ensino, eram tratados de forma diferente.

O item (a) consistia em construir uma perpendicular com o seguinte enunciado: dada uma reta r e um ponto P , construir por P , uma reta perpendicular à reta r . Esse era o 2º Caso de perpendicular, no qual o ponto P não pertence à reta r e os instrumentos a serem utilizados seriam a régua e compasso.

Nesta fase inicial de arranque da investigação, era fundamental garantir que os alunos se sentissem motivados a desenvolver a atividade. A pesquisadora procurou criar um ambiente adequado ao trabalho investigativo, escolhendo situações iniciais que se constituíssem em um verdadeiro desafio para os alunos.

Pesquisadora: “*Quero que a perpendicular passe pelo ponto P . Vamos usar apenas a régua e o compasso. Como vamos fazer? Será que dá para fazer essa perpendicular? Vamos tentar?*”

As duplas analisaram inicialmente a atividade, tentaram algumas posições com o compasso, discutiram sobre a possibilidade de executar a tarefa e formularam as seguintes conjecturas:

Sérgio e Guilherme: *“Se eu centrar no ponto e abrir o compasso até atingir a reta, pode marcar um arco na reta e nesse arco na reta, acho a mediatriz e traço a perpendicular que vai passar pelo ponto P”*

Matheus e Vinicius: *“Pensamos em fazer a mesma coisa, só que quando encontro o meio desse arco na reta, esse traço que liga o meio do arco e o ponto P já é a perpendicular”*

A pesquisadora tentou clarear as ideias da turma, dizendo ter compreendido ambas as colocações.

No nosso acompanhamento das investigações dos alunos, procuramos atingir um equilíbrio entre dois pólos; por um lado, dando-lhes autonomia, a qual é necessária para não comprometer a sua autoria da investigação e, por outro lado, garantindo que o trabalho dos alunos caminhasse e fosse significativo do ponto de vista da disciplina de matemática. Com este duplo objetivo, procuramos interagir com as duplas tendo em vista as necessidades particulares de cada um.

Esta construção com o transferidor, item (b) da Ficha nº5, era semelhante àquelas que realizaram para traçar a perpendicular, quando P pertence à reta. Portanto, estas conjecturas, eles já haviam formulado naquele momento. Em resumo, as ideias dos alunos foram as seguintes: Se o ponto P estiver próximo da reta r , então se pode posicionar a linha de fé sobre a reta r e encontrar o ponto P, formando um ângulo de 90° e traçar a perpendicular. Mas, se o ponto P estiver em uma distância maior que o transferidor possa alcançar, torna-se impossível realizar a atividade.

Com o par de esquadros, Ficha nº5 item (c), eles se recordaram da resolução anterior, quando o ponto P pertencia à reta e a executaram deslizando um esquadro no outro.

Na utilização do Geogebra, Ficha nº5, item (d), para o traçado da perpendicular, quando o ponto P não pertence à reta r , não houve levantamento de conjecturas, pois no software é semelhante o traçado de perpendicular quando o ponto pertence e quando o

ponto não pertence à reta: após ter construído a reta r , marca-se um ponto qualquer fora de r , escolhe-se o ícone “reta perpendicular”, clica-se em P e, em seguida, na reta r . A reta encontrada é perpendicular a r .

Com o material portasegmento, para se traçar a perpendicular quando P não pertence à reta r , foi necessário o auxílio da pesquisadora em diversos momentos. Percebemos que o motivo principal foi devido o portasegmento ser um material pouco conhecido em sala de aula, o que gerou tanta dificuldade para se traçar a perpendicular quando o ponto está fora da reta.

A resolução desta atividade utilizando o portasegmento se encontra nesta pesquisa, no capítulo 2, seção 2.1.5 em Construções com o Portasegmento. É o segundo caso de traçado de perpendicular, da quarta construção fundamental.

O item (f) da ficha 5, requeria o uso do caleidoscópio na resolução da construção. Na resolução da perpendicular quando o ponto P pertencia à reta, os alunos levantaram a conjectura, se era necessário o vértice dos espelhos estarem em cima do ponto, ou se formasse um ângulo de 90° com os lados dos espelhos em cima do ponto. Na resolução junto aos alunos, esta construção ficou bastante semelhante, pois para eles, desde que se formasse um ângulo de 90° (não importando se o vértice estava ou não no ponto), poderia ser traçada uma perpendicular.

Terminada a exposição das duplas sobre os resultados encontrados, terminamos este encontro. Podemos afirmar que foi proporcionada aos alunos a oportunidade de exporem seus raciocínios. Por meio dos questionamentos realizados pela pesquisadora não apenas ficou evidente para os alunos que se estava raciocinando matematicamente sobre as afirmações deles, como também os ajudou a desenvolverem suas argumentações.

Percebemos, durante as discussões realizadas, que a investigação proporcionou, muitas vezes, o estabelecimento de conexões com outros conceitos matemáticos. Ficamos atentos a estas conexões e estimulamos os alunos a refletirem sobre elas. Procuramos, durante as discussões dos resultados, promover a participação equilibrada durante o encontro.

7° Encontro

Iniciamos este encontro com algumas perguntas dos alunos sobre a duração dos encontros. Lamentaram quando dissemos a eles que restavam apenas mais alguns. Diante da nossa resposta disseram que seria melhor realizar menos atividades por encontros, porque desta maneira iria demorar mais para acabar. Eles se mostravam animados e, segundo alguns, ficavam esperando ansiosos para chegarem as tardes de quinta-feira, que era o dia da realização de nossos encontros.

A partir destes diálogos iniciamos a ficha n°6; usando régua não graduada e compasso para realizar o 3° caso de perpendicular, dada uma semirreta r e um ponto P , construir por P , uma semirreta perpendicular à reta r , onde o ponto P não pertence ou coincide, com a origem de uma semirreta.



Figura 109
Ponto P na origem da semirreta

As fichas foram distribuídas aos alunos e, como nas fichas anteriores, foi iniciada dando um tempo para o reconhecimento inicial da atividade e para a formulação de conjecturas.

A pesquisadora deu o arranque do encontro, levantando algumas questões que levassem os alunos a investigar. Depois de alguns minutos, uma das duplas levantou a seguinte questão:

Sérgio e Guilherme: *“Professora? Posso prolongar essa reta?”*

Pesquisadora: *“Com certeza que pode! Você precisa passar uma perpendicular por esse ponto! E como você poderia fazer?”*

Matheus e Vinicius: *“Professora, se pode prolongar a reta, então vai ficar igual aquela perpendicular que o ponto pertence à reta!”*

Pesquisadora: *“Bem lembrado! E como era essa construção, alguém se lembra? Como podemos fazer então?”*

Os alunos realizaram sem nenhuma dificuldade a atividade recordando o 1º caso de perpendicular, quando o ponto pertence à reta, pois bastava prolongar a semirreta formando uma reta contendo esse ponto, e cairíamos no 1º caso. Lembrando, aos nossos leitores que no nosso desenho o ponto se localizava na origem da semirreta. A pesquisadora instigou-os dizendo: E se prolongassem essa reta e o ponto não estivesse na reta? A resposta veio logo em seguida que cairia no 2º caso de perpendicular. E assim foi possível com a régua e compasso construírem a perpendicular.

Os itens (b) e (c) da ficha consistiam, respectivamente, em realizar a construção com o transferidor e depois com o par de esquadros.

Após descobrirem que era possível prolongar a semirreta e cairiam no 1º caso de perpendicular, os alunos não tiveram qualquer dúvida: prolongaram a semirreta e executaram a atividade como no 1º caso.

Com o software, item (d), a atividade também não levantou conjecturas, pois o ponto pertencia ou coincidia com a semirreta. As duplas, rapidamente, após terem construído a semirreta, clicaram na origem da semirreta e na semirreta e a perpendicular foi traçada pelo software.

Na realização dos itens (e) e (f), nos quais era solicitada a construção com o portasegmento e com o caleidoscópio, aconteceu a mesma coisa que nos itens (b) e (c), prolongaram a semirreta e caíram no 1º caso.

Com isso, terminamos de realizar todos os itens da ficha nº6 e iniciamos, em seguida, a ficha nº7. Como realizado anteriormente, a pesquisadora, deu o arranque inicial da construção:

Pesquisadora: *“E agora vamos traçar a mediatriz de um segmento dado, usando apenas a régua não graduada e compasso. Será que é possível? Vamos tentar? Vocês acham que dá certo?”*

No levantamento inicial das hipóteses formuladas pelos alunos, após alguns minutos, uma das duplas fez a seguinte pergunta:

Sérgio e Guilherme: *“Professora! Mas o traçado da mediatriz é bem parecido com o da perpendicular!”*

Pesquisadora: *“É parecido? Então não é igual? E por que não é igual?”*

Sérgio e Guilherme: *“Professora, na verdade é igual. Só muda o nome. É que uma chama mediatriz e a outra perpendicular.”*

Pesquisadora: *“Só isso! Veja direito. Será que é mesmo só o nome que é diferente?”*

Ficaram em silêncio por um tempo, sem saber dizer de imediato, qual era a diferença. Em uma folha separada traçaram uma perpendicular. E nenhuma resposta surgiu.

Pesquisadora: *“Então são iguais mesmo? O que vocês descobriram?”*

Uma das duplas se manifestou assim que chegaram à descoberta:

Matheus e Vinicius: *“A perpendicular é traçada na reta ou na semirreta. Centrando o compasso em um ponto ou em um dos arcos feito pelo compasso e traçado a perpendicular. Com a mediatriz o compasso é centrado no início do segmento, traçado os arcos, e é encontrado o meio do segmento. Por isso que se chama mediatriz. Porque é o meio do segmento.”*

Pesquisadora: *“Então perpendicular é na semirreta e mediatriz é no segmento.”*

O item (b) da ficha nº7 consistia em realizar a construção da mediatriz com o transferidor. De imediato uma das duplas questionou?

Sérgio e Guilherme: *“Professora, não tem como achar a metade do segmento com o transferidor! Em cima ele é uma circunferência, e embaixo não é numerado! É impossível realizar a tarefa.”*

Matheus e Vinicius: *“É verdade professora, é impossível mesmo. Não dá para achar o meio do segmento.”*

Depois de gastarem algum tempo acabaram desistindo de investigar a atividade, que era para averiguar a possibilidade de encontrar a mediatriz de um segmento dado com o transferidor. A pesquisadora auxiliou-os na construção, dizendo-lhes ser possível a realização explicou-lhes como deveriam proceder: em um segmento dado \overline{AB} , posiciona-se a linha de fé no ponto A e marca-se um ângulo de 45° . Posiciona-se a linha de fé no ponto B e marca-se um ângulo de 45° . Prolongando a semirreta \vec{a} e prolongando a semirreta \vec{b} encontra-se um ponto P. O ângulo \hat{P} tem 90° ; posicionar a linha de fé no ângulo \hat{P} e sobre a semirreta \vec{a} e marcar 45° . O ponto M é mediatriz de \overline{AB} .

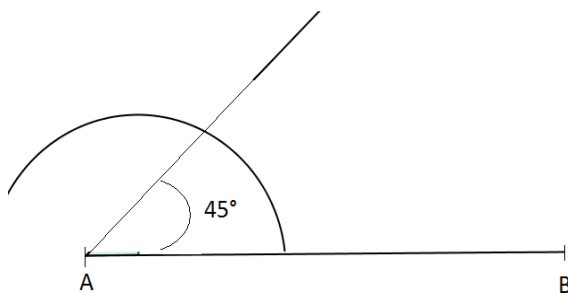


Figura 110

Posição do transferidor no ponto A para o traçado da mediatriz.

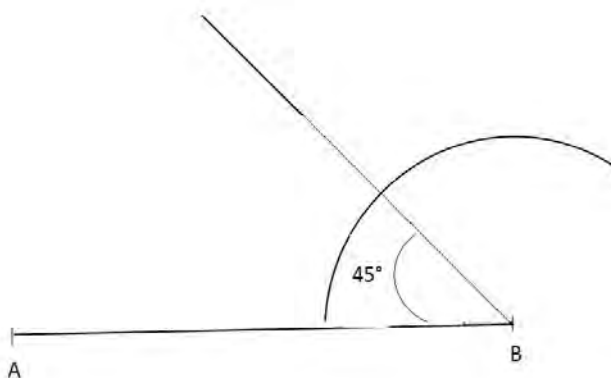


Figura 111

Posição do transferidor no ponto B para o traçado da mediatriz.

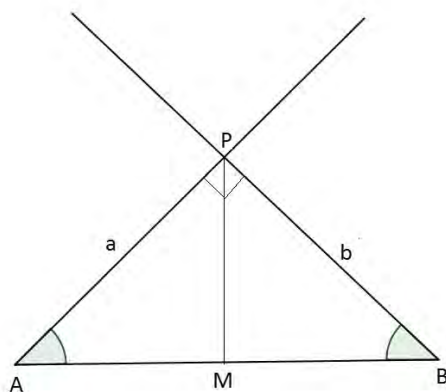


Figura 112
Traçado da mediatriz pelo ponto P com o transferidor

Na resolução da construção com o par de esquadros, os alunos investigaram, tentaram arrumar uma justificativa, mas, ainda assim, a pesquisadora teve que intervir explicando que em um segmento \overline{AB} posiciona-se o ângulo de 45° de um dos esquadros no ponto A e traça-se uma semirreta \vec{a} (ver figura). Posiciona-se o esquadro com o ângulo de 45° no ponto B e traça-se outra semirreta \vec{b} . Prolonga-se \vec{a} e prolonga-se \vec{b} e encontra-se o ponto P . Posicionando o mesmo ângulo de 45° no ponto P , encontramos M em \overline{AB} .

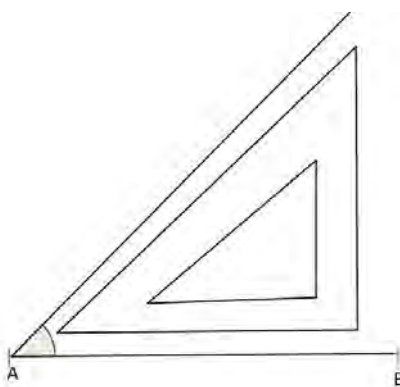


Figura 113
Posição do esquadro no ponto A para o traçado da mediatriz

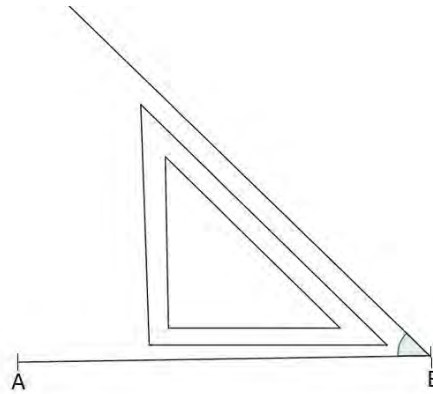


Figura 114
Posição do esquadro no ponto B para o traçado da mediatriz

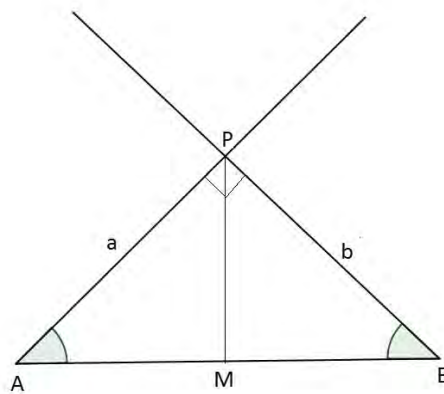


Figura 115
Traçado da mediatriz com o esquadro

Na realização da construção com o software não houve conjecturas, pois o Geogebra é de fácil entendimento e, recordando neste momento, que no 1º encontro os alunos familiarizaram-se com seus ícones. Sem qualquer dificuldade, construíram um segmento de reta e definiram os pontos A e B. A seguir, escolheram o item mediatriz, clicaram no ponto A, em seguida, no ponto B, e encontraram a mediatriz do segmento \overline{AB} .

O item (e) pedia para traçar a mediatriz de um segmento dado, utilizando o portasegmento. No traçado da perpendicular, quando o ponto estava na origem da semirreta os alunos, com a intervenção da pesquisadora, chegaram a resolver a

atividade. Como o traçado da perpendicular com o portasegmento se assemelha, em algumas partes de sua construção com o traçado da mediatriz, neste momento, eles se recordaram de como haviam elaborado a construção da perpendicular, quando o ponto estava na origem da semirreta e executaram de forma análoga.

No momento da realização da construção com o caleidoscópio foi necessário, por diversas vezes, o auxílio da pesquisadora. Na colocação dos caleidoscópios para formar as duas perpendiculares, eles não encontraram dificuldade. No entanto, eles não conseguiram formar um retângulo e traçar as diagonais, usando como régua um dos espelhos para obter o ponto M. Tal dificuldade se justifica pelo fato de que o caleidoscópio não é utilizado nas aulas de matemática, apesar de ser um instrumento que oferece vários outros recursos, como já citado no item, 1.4 Caleidoscópio, no capítulo 1 desta pesquisa.

Com esta atividade terminamos o 7º encontro. Notamos durante este encontro que algumas atividades exigiam que recordassem de construções anteriores, já elaboradas em encontros precedentes do experimento e, através do nosso trabalho investigativo, puderam se recordar com facilidade. Estas situações, especialmente criadas por nós, serviram como indicativos de que os alunos raciocinaram matematicamente.

Em alguns momentos deste encontro achamos importante ajudá-los a fazer um resumo da atividade, descrevendo os seus progressos e recuos nos objetivos que pensavam e os caminhos que seguiam. Pensamos também, ser fundamental para a compreensão dos alunos que o objetivo não é dizer se está certo ou errado, mas que reflitam sobre o processo investigativo.

8º Encontro

Na realização deste encontro estava havendo uma comemoração para os professores no pátio da escola. Havia um ambiente festivo, com músicas e apresentações. Mesmo diante disto, os alunos compareceram para realizarmos o encontro programado, na sala de informática da escola. Estiveram presentes as duas duplas de alunos, com as quais iniciamos a realização das atividades da Ficha nº 8, item

(a). Nesta ficha continha a seguinte instrução: Paralela. Dada uma reta r e um ponto A fora dela, construir por A uma reta paralela à r . 1ª Construção. Utilizando régua e compasso.

A pesquisadora, dando o arranque habitual da atividade, questionou: “*E agora como podemos construir uma reta paralela passando pelo ponto A ? Vamos pensar se é possível de ser realizada esta atividade.*”

Depois de alguns minutos de conversa entre as duplas, de alguns manuseios com a régua e o compasso sobre o papel, surgiu a primeira questão:

Sérgio e Guilherme: “*Professora, estamos achando que não é possível de realizar a atividade*”

Pesquisadora: “*Será? Tente mais um pouco, estou achando que essa é possível sim.*”

Matheus e Vinicius: “*É verdade professora, essa está difícil de fazer.*”

Para animá-los a pesquisadora auxiliou-os, depois de realizarem algumas tentativas sem chegar a um resultado.

Pesquisadora: “*E se traçarmos uma reta qualquer pelo ponto A . Onde essa reta cortou r podemos marcar um ponto, e chamá-lo de B .*”

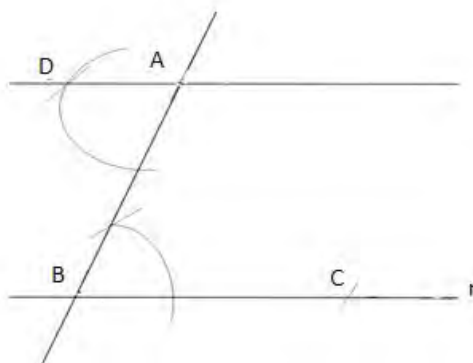


Figura 116
Construção de paralelas

A pesquisadora lembrou-lhes que se os ângulos alternos e internos \hat{A} e \hat{B} fossem iguais, poderia ser traçada uma paralela, pelo ponto A. Desta maneira, foram desenvolvendo a atividade, mas com a pesquisadora interferindo.

Nesta mesma construção, realizada com o transferidor, surgiram conjecturas muito interessantes:

Sérgio e Guilherme: *“Se dá para transferir o ângulo, então dá para fazer com o transferidor. Mas ainda não sei como”*

Pesquisadora: *“Muito bem! Então vamos transferir esse ângulo para o ponto A. Será que dá certo? Vamos tentar. A idéia parece boa.”*

Matheus e Vinicius: *“É mesmo professora, se transferindo o ângulo, sai paralela, o segredo então é transferir o angulo.”*

As tentativas foram inúmeras, pois estavam querendo fazer uma descoberta. Sabiam que era possível, mas não conseguiam fazer a transferência do ângulo.

Passado algum tempo e, com algumas pequenas interferências da pesquisadora, chegaram à resolução da tarefa. Em seus relatos disseram que passaram uma reta cortando o ponto A. Quando esta reta cortou r foi marcado um ponto B. Com o transferidor passaram o ângulo encontrado em r , para o ponto A. Utilizando a linha de fé traçaram uma paralela à r .

No cumprimento da atividade utilizando um par de esquadros, os alunos se recordaram de como fizeram as construções das perpendiculares com os mesmos. Uma das duplas lembrou que, geralmente, estes instrumentos servem de apoio um ao outro. Após isso, a resolução da construção foi quase de imediato. Apoiaram um dos esquadros na reta r , e deslizaram o outro, formando um ângulo de 90° com r , até chegar ao ponto A e traçar a paralela.

Notamos que na realização das construções das outras fichas, rapidamente, os procedimentos eram recordados por eles.

Com o software, a atividade para se traçar uma paralela é muito simples. Diante disso, os alunos não tiveram dificuldade. Construíram uma reta definiram por dois

pontos. Logo a seguir criaram um ponto fora de r e o nomearam por A. Escolheram o ícone paralela, clicaram no ponto A depois na reta e foi encontrada a paralela.

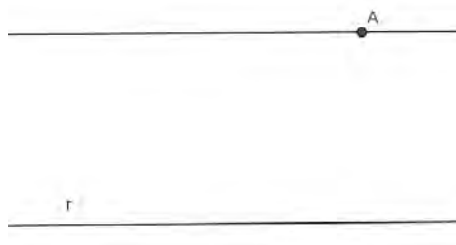


Figura 117
Traçado de paralela com o Geogebra pelos alunos

Na realização da paralela por um ponto usando o portasegmento, os alunos fizeram de uma forma diferente proposto por Cecco (1971). No 2º encontro, realizamos a construção de vários portasegmentos. Por este motivo, tinham em mãos portasegmentos de várias medidas e tamanhos. Diante disso, quando a pesquisadora entregou-lhes a ficha e pediu para realizarem a atividade com o portasegmento, não houve qualquer conjectura, empilharam os portasegmentos, forçando a coincidir o ponto A com a reta, para traçar a paralela. Certamente a paralela foi traçada, visto que haviam portasegmentos de várias larguras. Apesar disso, a pesquisadora questionou:

Pesquisadora: *“Já fizeram a paralela? Será que não existe outro modo de realizar essa construção?”*

Sérgio e Guilherme: *“Ah professora! Você acha que está errado? Mas saiu a paralela!”*

Pesquisadora: *“Não acho que esteja errado, mas acredito que deve haver outra maneira. Vamos tentar? E se não tivéssemos todos esses portasegmentos que temos aqui, como eu poderia fazer? Vamos imaginar que tivéssemos apenas um.”*

Com o auxílio da pesquisadora, os alunos elaboraram a construção proposta por Cecco (1971); no entanto, em seus relatos foram unânimes em dizer que jamais imaginaram que poderia ser realizada desta maneira. Esta construção se encontra em nossa pesquisa no capítulo 2, na seção 2.1.5, atividades com o portasegmento.

Para realizar a mesma atividade com o caleidoscópio, os alunos se recordaram, novamente, dos traçados das perpendiculares. Isso pode ser notado nas seguintes falas:

Sérgio e Guilherme: *“Dá para traçar paralela se fizermos duas perpendicular.”*

Pesquisadora: *“Por que duas perpendiculares? Não pode ser uma perpendicular? Por que você acha que são duas?”*

Matheus e Vinicius: *“É mesmo professora, se traçar duas perpendiculares, dá certo. Mas só com uma não dá.”*

Pesquisadora: *“Vamos tentar então.”*

Os alunos executaram esta atividade de maneira diferente da proposta pela pesquisa. Eles fizeram duas perpendiculares com a reta r e assinalaram a medida do ponto A até a reta. Marcaram nos espelhos e passaram este valor para a outra perpendicular. Ligaram os pontos encontrados e traçaram a paralela.

Pesquisadora: *“Vamos imaginar que eu não possa fazer essa marca que vocês fizeram nos espelhos. Como ficaria então?”*

As duplas continuavam entusiasmadas com a investigação e não desistiam de descobrir uma maneira que pudessem validar suas respostas. Depois de algumas tentativas posicionando o caleidoscópio sobre o ponto A , surgiu uma questão:

Matheus e Vinicius: *“É verdade professora. Com uma perpendicular sobre o ponto, posso utilizar o lado do espelho feito uma régua e traçar uma paralela, a partir do ponto.”*

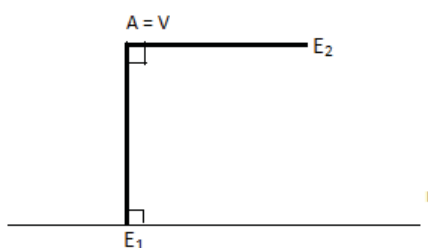


Figura 118
Posição do caleidoscópio para o traçado de paralelas

Pesquisadora: *“Muito bem! Então, vocês descobriram duas maneiras de traçar paralelas. Isso foi muito interessante.”*



Figura 119
Alunos trabalhando com os caleidoscópios

Com a construção envolvendo o caleidoscópio chegamos ao final de mais um encontro. Observamos que tudo o que ocorre em uma aula de investigação matemática, depende da maneira como o professor estabelece um ambiente de aprendizagem, que gere a participação dos alunos. Várias discussões realizadas ao longo deste encontro, incidiram sobre aspectos particulares, como por exemplo, o uso de material manipulativo na realização de investigações. Todavia, em todos eles esteve presente a

ideia de que o trabalho com atividades investigativas permite que o professor ofereça aos alunos, tempo e oportunidade para organizarem as suas conjecturas.

9º Encontro

Neste encontro, estiveram presentes, Matheus, Vinicius e Guilherme. Sérgio, não compareceu mais aos encontros, sem apresentar justificativa. Porém, Guilherme, mesmo sozinho, continuou a desenvolver as atividades propostas. Deste modo, ficaram até o final do experimento apenas três alunos: a dupla Vinicius e Matheus e o aluno Guilherme, o qual não desistiu por saber que restavam apenas mais dois encontros a serem realizados.

A ficha nº9 consistia da 2ª construção da paralela, utilizando apenas régua e compasso. Esta atividade seria desenvolvida apenas com estes dois instrumentos, visto que já havia sido construída com os demais materiais.

A pesquisadora iniciou a atividade da maneira como já havia feito com as outras construções.

Pesquisadora: *“Vamos fazer mais uma construção de paralela. Apenas com a régua não graduada e compasso. Como podemos começar?”*

Passados alguns minutos para o reconhecimento inicial da atividade pelos alunos, a pesquisadora instigou-os:

Pesquisadora: *“E aí por onde podemos começar?”*

Matheus e Vinicius: *“Temos que começar passando uma reta pelo ponto A.”*

Guilherme: *“Se começar assim, vai ficar igual a 1ª construção de paralela.”*

Com a interferência constante da pesquisadora, auxiliando-os, conseguiram realizar a construção da paralela. Nesta atividade era necessário que tivessem uma

maior familiarização com o compasso. Notamos, ter sido este o principal fator de dificuldade para a realização da atividade.



Figura 120
Alunos trabalhando com os vários instrumentos

Continuando o encontro, a ficha seguinte consistia no 3^a caso de construção da paralela, utilizando régua não graduada e compasso. Como na atividade anterior, por muitas vezes, houve necessidade do auxílio da pesquisadora para a realização da atividade. Estes dois casos de construções de paralelas são construções mais elaboradas, as quais exigem um pouco mais dos alunos. Estas construções resolvidas, se encontram no capítulo 2, seção 2.1.1, Construções com Régua não graduada e Compasso.

Neste encontro foram realizadas apenas estas duas construções. Embora, o processo de justificação da construção não esteve muito presente na realização da investigação, ainda assim, houve o levantamento de várias conjecturas.

10º Encontro

Este era o penúltimo encontro a ser realizado. Os alunos estavam ansiosos para descobrirem quais construções seriam realizadas neste dia. A pesquisadora introduziu a tarefa assegurando-se de que todos haviam compreendido o que tinha sido pedido. A atividade seria a Tangente (ficha nº11, item (a)). Dado um ponto P, em uma

circunferência, traçar a reta tangente à circunferência por este ponto. Os instrumentos utilizados foram régua e compasso.

Pesquisadora: *“Alguém sabe o que é uma reta tangente? Vocês já ouviram falar a palavra tangente? Como vamos passar uma tangente por P”*

Foi dado o tempo necessário para elaborarem suas conjecturas. A dupla e Guilherme começaram a resolução da construção. A pesquisadora aproveitou para explicar-lhes que uma reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio traçado no ponto de tangência. No momento do relato dos alunos acerca da atividade realizada, notou-se que a atividade não era difícil de ser realizada com régua e compasso. Ligaram o centro ao ponto P, traçaram uma perpendicular passando pelo ponto P.

A mesma atividade realizada com o transferidor, (item (b)), Tangente. Dado um ponto P, em uma circunferência, traçar a reta tangente à circunferência por esse ponto, utilizando transferidor. Os alunos iniciaram a atividade tão logo adquiriram a ficha.

Na discussão dos resultados disseram que usaram o transferidor para traçar uma reta passando pelo ponto P e pelo centro da circunferência. Depois, apoiaram a linha de fé sobre esta reta e construíram uma perpendicular passando pelo ponto P.

Observamos, durante a realização da atividade, a destreza com que manuseavam o transferidor, não demonstrando qualquer dificuldade. Eles compreenderam rapidamente o significado de reta tangente.

Passando para o próximo item a ser resolvido, agora seria a vez de utilizarem os esquadros na construção da reta tangente. No momento de apresentar o resultado disseram que traçaram uma reta passando por P e pelo centro da circunferência, a seguir construíram uma perpendicular com um esquadro apoiado no outro.

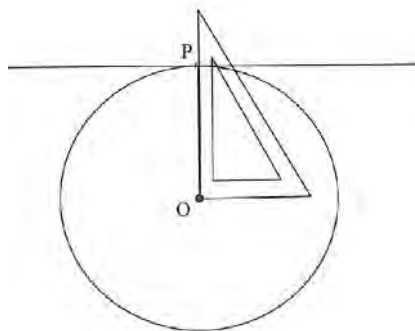


Figura 121
Reta tangente com os esquadros

Com o software Geogebra, após terem construído um “círculo definido pelo centro e um de seus pontos”, uniram o centro da circunferência ao ponto P, através da ferramenta “segmento definido por dois pontos”. Construíram uma tangente à circunferência, clicando na ferramenta “tangente” e, a seguir, no ponto P da circunferência.

Na realização da construção com o portasegmento, item (e), exigiu um pouco mais dos alunos na formulação de conjecturas. Depois do reconhecimento da atividade perceberam que traçar a tangente com o portasegmento era um pouco diferente das demais construções realizadas nesta ficha. Foi necessária a recordação do traçado da perpendicular quando o ponto pertencia à reta. Foram inúmeras tentativas, pois dispunham de apenas um portasegmento. Aos poucos, e com o apoio da pesquisadora, conseguiram realizar a construção.

Na utilização do caleidoscópio para realizar a construção da ficha nº11, item (f), apenas perguntaram se poderiam utilizar as bordas do caleidoscópio como régua. A partir desse momento, notamos que ligaram o centro da circunferência ao ponto P. Formaram um ângulo de 90° , centrado o vértice do caleidoscópio no ponto P e traçaram a reta tangente à circunferência.



Figura 122
Alunos realizando as atividades

Com essa atividade terminamos a ficha n°11 com a proposta de resolução das sete construções fundamentais em geometria, passando por régua e compasso, transferidor, par de esquadros, software Geogebra, portasegmento e caleidoscópio. A partir desta ficha resolvemos aplicar algumas construções que envolvessem estas sete construções fundamentais estudadas neste experimento.

A Ficha n°12, item (a) foram trabalhados os pontos notáveis de um triângulo, com a construção do Baricentro. A pesquisadora usou do momento para explicar aos alunos que a mediana de um triângulo é o segmento de reta que une um vértice ao ponto médio do lado oposto e que um triângulo admite três medianas. As medianas de um triângulo intersectam-se num ponto chamado baricentro.

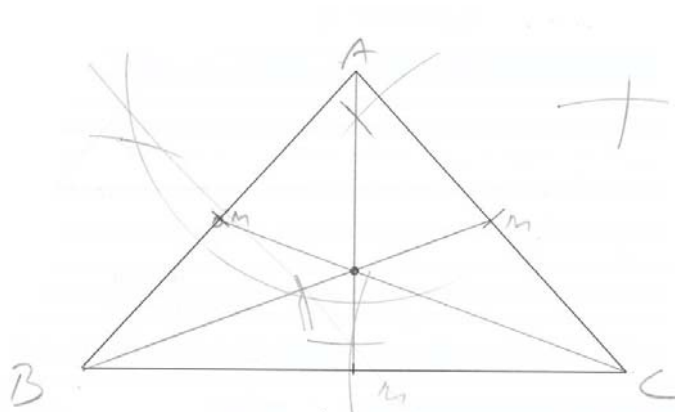


Figura 123
Baricentro construído pelos alunos

Os alunos teriam que usar dos conhecimentos anteriores para realizar a atividade. Construíram o Baricentro, passando por todos os instrumentos já citados neste encontro. Em cada item da ficha houve a exploração inicial da situação, para que pudessem formular as questões e conjecturas. Foi nesta fase que os alunos foram se embrenhando na situação e, apropriando-se do sentido da construção, puderam justificar suas conjecturas.

Ao término desta ficha encerramos este encontro. De modo geral, a fase introdutória das atividades do experimento de ensino por nós realizado, foi relativamente breve para que os alunos não perdessem o interesse pela atividade, e o tempo disponível do encontro fosse bem aproveitado para a realização da investigação.

11° Encontro

Iniciamos o último encontro com lamentos dos alunos, pois gostariam que houvesse mais encontros, porque gostaram muito de realizar as atividades passando pelos vários instrumentos. Neste encontro foi possível realizar as fichas nº 13, nº 14 e nº 15.

As fichas nº13 e nº 14 se referiam aos Pontos notáveis de um triângulo, Incentro e Circuncentro. A pesquisadora aproveitou a oportunidade para apresentar-lhes alguns tópicos de geometria para que pudessem compreender os conceitos de Incentro e Circuncentro. Antes de iniciar a construção do Incentro a pesquisadora deu o arranque da aula, certificando-se de que todos os alunos tinham compreendido o que estava sendo solicitado. Foi neste momento que explicou que em todo triângulo as três bissetrizes internas concorrem em um mesmo ponto e que o Incentro é o centro da circunferência inscrita. Os alunos souberam realizar a atividade passando por todos os instrumentos utilizados no experimento. Em seus relatos disseram não ter tido dificuldades por já haverem realizado várias bissetrizes com os materiais do experimento.

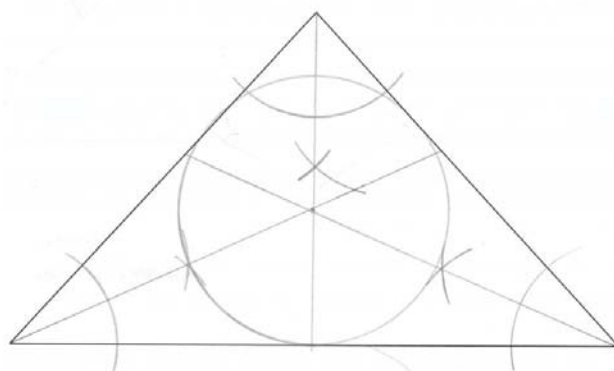


Figura 124
Incentro construído pelos alunos

Na construção do Circuncentro, novamente, a pesquisadora introduziu o conceito aos alunos dizendo que a mediatriz do lado de um triângulo é uma reta perpendicular ao lado no seu ponto médio. Se traçarmos as mediatrizes dos três lados de um triângulo, elas intersectam-se em um ponto O , chamado Circuncentro. Este ponto tem à mesma distância dos três vértices do triângulo e é o centro de uma circunferência circunscrita no mesmo. Os alunos realizaram a construção do Circuncentro com todos os materiais utilizados nesta pesquisa. Não notamos qualquer dificuldade por parte deles, pois sabiam exatamente o que deveria ser feito.

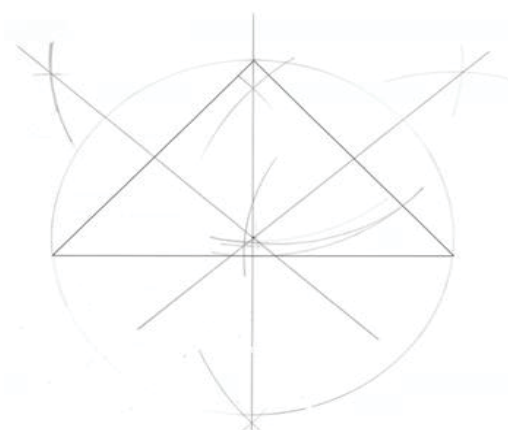


Figura 125
Circuncentro construído pelos alunos

Na última ficha, (Ficha nº15), foi proposto que construísse um quadrado dado o seu lado, valendo-se de todos os materiais até agora utilizados no experimento. Sem dificuldades, eles puderam perceber que nem todos os instrumentos possibilitavam realizar esta construção, como visto nas fichas anteriores.

Na discussão dos resultados, disseram que tiveram apenas de recordar das sete construções fundamentais já realizadas nas fichas anteriores.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esperamos que o trabalho com diversos materiais manipulativos e a utilização do software Geogebra por meio de atividades investigativas, possa contribuir para minimizar as dificuldades no ensino e aprendizagem, visto que a geometria é de fundamental importância para o desenvolvimento do aluno. De acordo com Nacarato e Passos, (2003), a habilidade para o desenho geométrico não se desenvolve espontaneamente, mas ela pode ser estimulada, trabalhada com o uso e a manipulação de objetos diferentes e em diversas situações. Além do mais, Penteadó (1999) destaca que a presença da informática traz um novo ritmo tanto às ações do professor quanto às dos alunos.

Os resultados apresentados a partir da análise dos dados levam-nos a inferir que os conceitos das construções geométricas foram apreendidos. Ressaltamos, ainda, que as atividades proporcionaram habilidades no uso dos materiais como régua, compasso, transferidor, esquadros, caleidoscópios, portasegmento e o software Geogebra. Sendo assim, voltando ao questionamento principal da nossa pesquisa, podemos afirmar que organizar uma proposta de ensino de geometria que conte com o uso de diferentes recursos materiais: da cartolina ao computador, passando pelo uso de lápis, régua, caleidoscópio, esquadro, compasso, softwares, portasegmentos entre outros, traz-nos muitas contribuições para o conhecimento dos conteúdos abordados. Tendo em vista que os alunos desenvolveram as construções propostas de forma progressiva, recorrendo a conceitos estudados em situações anteriores e ocorrendo sempre interação entre as duplas formadas, entre o grupo, quando relatavam suas descobertas e entre aluno-professor. Esta interação e envolvimento podem ser percebidos através dos diálogos e as construções realizadas por eles durante os encontros.

Percebemos que os caleidoscópios, por proporcionarem visuais magníficos, através de sua manipulação, contribuíram para despertar no aluno o interesse em realizar as construções e o entendimento dos conceitos geométricos relacionados. Entendemos que a sequência de construções (Anexo III), e o modo gradativo como foram abordados os conteúdos, permitem-nos afirmar que os conceitos estudados foram compreendidos.

Em nosso trabalho investigativo prevíamos como os encontros iriam começar, mas não como iriam acabar. Os diversos percursos que os alunos seguiram, seus avanços e recuos, as contrariedades que surgiram entre eles, a forma de reagirem diante das intervenções da pesquisadora, constituem-se em fatores que não podem ser previstos em uma aula de investigação. Foi possível praticar as três fases de uma atividade de investigação, a qual se desenvolve, geralmente, com a introdução da tarefa, a realização da investigação, que pode ser realizada individualmente, aos pares ou em pequenos grupos ou ainda com toda a turma. E, finalmente, tínhamos a discussão dos resultados, um momento muito produtivo, ocasião em que os alunos expunham os resultados encontrados pelas duplas.

O ambiente de aprendizagem criado no experimento de ensino foi fundamental, em se tratando de uma pesquisa investigativa. Os alunos se sentiram à vontade e lhes foi dado o tempo necessário para colocação das questões, dos pensamentos, para a exploração e expressão de suas ideias, tanto para a pesquisadora, como para os demais alunos. Estes sentiram suas ideias valorizadas, o que garantiu o sucesso na investigação. Sabemos que na fase inicial de uma investigação, devemos propiciar este tipo de ambiente e comunicar-lhes o papel que devem desempenhar. Os alunos sabiam que podiam contar com o apoio da pesquisadora, mas que o bom êxito da atividade dependia da sua própria iniciativa.

Assegurávamo-nos de que os alunos haviam compreendido a atividade que iriam realizar, permanecendo na retaguarda, procurando entender como o trabalho ia se processando e apoiando-os quando era necessário.

Procuramos durante os encontros, fazer uso dos vários processos que caracterizam a atividade investigativa em matemática, entre os quais destacamos a exploração e formulação de questões, a formulação de conjecturas, o teste e a reformulação de conjecturas e, ainda, a justificação de conjecturas e avaliação do trabalho.

A exploração inicial da situação no decorrer dos encontros foi uma fase em que as duplas gastaram muito tempo. Chegamos a pensar que nada estava acontecendo e que eles estavam com muitas dificuldades. Contudo, conseguimos descobrir que esta foi a fase decisiva para que começassem a formular questões e conjecturas. Foi nesta etapa que os alunos se familiarizaram e se apropriaram mais completamente do sentido da atividade.

Em alguns dos encontros, como é natural, foi necessária a intervenção da pesquisadora, visto que as respostas começavam a se mostrar infrutíferas ou sem sentido, e não se chegaria a um consenso geral. Assim, foi preciso dar o encaminhamento para a concordância das ideias e apreensão dos temas estudados.

Cumpramos ressaltarmos que os portasegmentos utilizados nesta pesquisa, por terem sido confeccionados com cartolina, propiciaram certa dificuldade de manipulação no momento de realizarem os traçados das construções.

Realçamos que o software Geogebra viabiliza a comunicação matemática, bem como, permite organizar o pensamento por meio da resolução das construções geométricas. No entanto, os recursos como régua e compasso, transferidor, esquadros, caleidoscópios e o portasegmento, se caracterizam pela combinação de vários instrumentos em uma atividade com várias ações de construção, por exemplo, em um momento, uso a régua, depois os esquadros, o transferidor. Estes recursos exigiram dos alunos coordenação visual e motora, e também habilidade no desenvolvimento das construções. Enfatizamos que com esses materiais foi possível o controle dos traçados de maneira mais simples que no computador. Nas construções geométricas com o recurso do Geogebra foi possível a manipulação, animação e simulações, permitindo aos alunos verificar diferentes situações beneficiando a exploração da tarefa.

Destacamos que, de acordo com Nacarato e Passos (2003), as atividades de construções, desenho, visualização, discussão de ideias, conjecturas e a elaboração de hipóteses facilitaram o acesso à estrutura lógica e a demonstração dos conceitos geométricos, conforme observamos durante a realização dos encontros. No experimento com os alunos, os materiais utilizados facilitaram a aprendizagem, visto que, a diversidade de materiais para realizar uma mesma atividade, permitiu que os alunos estabelecessem conexões entre os diversos conceitos intrínsecos à manipulação do material.

Finalizando, gostaríamos de ressaltar que, durante a prática desta pesquisa, percebemos que a realização de investigações matemáticas pelos alunos contribuiu de modo significativo para a sua aprendizagem em construções geométricas e desenvolveu neles o gosto pela disciplina desenho geométrico. Ao estimularmos os alunos a investigarem as construções geométricas, propiciamos o desenvolvimento de ideias e a capacitação de dar sequência a uma questão. Destacamos também, que o fato de termos praticado o papel de ouvinte da fala dos alunos, nos levou a reconhecer e dar valor às

suas concepções como sendo de extrema importância no processo de aprendizagem da matemática. A tentativa de entender e dar sentido ao que os alunos estavam fazendo, trouxe-nos diferentes perspectivas sobre a própria matemática e as estratégias criadas por eles.

Destacamos que nossa pesquisa foi realizada com um número bem reduzido de alunos comparado com a realidade das salas de aulas. Sabemos pela nossa prática e pelas discussões trazidas em nosso grupo de pesquisa sobre formação de professores⁵, que ser professor hoje mostra mesmo aos olhos de um observador comum, traços evidentes de precarização, bastante visíveis em comparação com datas passadas. É fácil constatar a perda de prestígio, de poder aquisitivo, de condições de vida e, acima de tudo de respeito e satisfação no exercício docente atualmente. Estamos conscientes de todos estes pontos, no entanto com esta dissertação gostaríamos de poder contribuir com novas possibilidades de ensino e aprendizagem de geometria, trazendo novas ideias e desafios para professores e pesquisadores.

⁵Grupo de Pesquisa: Processos de Formação e Trabalho Docente dos Professores de Matemática IGCE/Unesp/Rio Claro. <http://www.rc.unesp.br/igce/pgem/gfp/>

Referências

ALMEIDA, M. E. B. de. *Inclusão digital do professor: formação e prática pedagógica*. São Paulo: Articulação, 2006. 236p.

ALMEIDA, S. T. *Um estudo de pavimentações do plano utilizando caleidoscópios e o software Cabri-Géomètre II*. 2003. 148f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

ALMOULOUD, S.A. et al. *A Geometria no Ensino Fundamental: reflexões sobre uma experiência de Formação Envolvendo Professores e alunos*. Revista Brasileira de Educação, set-out-nov-dez, número 027. Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação. São Paulo, Brasil. 2004, p.94-108. Disponível em: <<http://redalyc.uaemex.mx/pdf/275/27502707.pdf>>, acesso em 30 Abril. 2010.

BARBOSA, R. M. *Descobrimos Padrões em Mosaicos*. São Paulo: Atual, 1993. 126p.

BARBOSA, R. M. *Desenho geométrico (Licenciatura em matemática) Notas de Aula*. Sem Data

BARBOSA, R. M.; MURARI, C. *Aprendendo construir novos mosaicos, agora em caleidoscópios com quatro espelhos*. Revista de Educação Matemática, São Paulo: n. 4, p. 57-66, 1998.

BOGDAN, R. BIKLEN, S. *Pesquisa Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Lisboa: Porto Editora, 1994. 336p.

BORBA, M. C. & PENTEADO, M. G. *Informática e educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. 99p. 3ª edição. 2ª reimpressão.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática. Terceiro e Quarto ciclos do Ensino Fundamental* – Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p.

CASTELNUOVO, E. *Didática de La Matemática Moderna*. México: Trillas, 1970.

CECCO, E.J.de. *Geometria del portasegmentos*. Conceptos de Matemática. Vol. V, n. 18, p. 21-26 e 34 -1971.

_____ *Geometría del portasegmentos*. Conceptos de Matemática. Vol. V, n. 19, p. 33-38 e 44 – 1971.

_____ *Geometría del portasegmentos*. Conceptos de Matemática. Vol. V, n. 20, p. 27-32 - 1971

COBB, P.; STEFFE, L. *The Constructivist Researcher as Teacher and Model Builder*. Journal for Research in Mathematics Education, Reston, VA: NCTM, 1983.

DOLCE, O; POMPEO, J.N. *Fundamentos de Matemática Elementar*. São Paulo: Atual, 1985. 342p. V.9.

FISCHBEIN, E. *The Theory of Figural Concepts. Education Studies in Mathematics*. pp. 139-162. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1993.

GASPAR, M. T. J. *Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores*. 2003. 307 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

HOHENWARTER, M; PREINER, J. *Ajuda GeoGebra 3.0*. Disponível em: <<http://www.passeiospelamatematica.net/manual%20geogebra.pdf>> Acesso em: 14 de Jul. 2010

KOSTOVSKII, A.N. *Geometrical Constructions Using Compasses Only*.(translated from the Russian by Moss, H.) Blaisdell Publishing Company. New York. London.1961.80p.

KUTUZOV, B.V. *School Mathematics Study Group – Studies in Mathematics*. (translated by Gordon, L. I.; Shater, E. S.) V 4 Geometry. University of Chicago. Moscow.1960.

LÍRIO, S. B. *A tecnologia informática como auxílio no ensino de geometria para deficientes visuais*.2006. 115f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

LOPES, M.L.M.L.; NASSER, L. *Geometria na era da Imagem e do movimento*. Instituto de Matemática/ UFRJ. Proj. Fundação. SPEC/PADCT/CAPES. Rio de Janeiro. 2005. 157 p.

LORENZATO, S.(Org.). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. pp. 03- 37; 77 – 92. (Coleção Formação de professores)

MARMO, C. *Curso de desenho*. São Paulo. Moderna. 1974. 139p. Livro 1.

MARTINS, R. A. *Ensino-aprendizagem de geometria: uma proposta fazendo uso de caleidoscópios, sólidos geométricos e softwares educacionais*. 2003. 246f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

MISKULIN, R. G. S. *Concepções Teórico-Metodológicas sobre a Introdução e a Utilização de Computadores no Processo Ensino/Aprendizagem da Geometria*. 1999. 577f. Tese (Doutorado em Educação)- Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

MURARI, C. *Ensino-aprendizagem de geometria nas 7ª e 8ª séries via caleidoscópios*. 1999. 347f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

NACARATO, A. M.; PASSOS, C. L. B. *A geometria nas séries iniciais: uma análise sob a perspectiva prática pedagógica e da formação de professores*. São Carlos: EdUFSCar, 2003.152 p.

NÓBRIGA, J.C.; ARAÚJO, L.C.L. *Aprendendo matemática com o geogebra*. Editora Exato, 2010.

PAIS, L. C. *Intuição, Experiência e Teoria Geométrica*. Zetetiké, Campinas: CEMPEM/FE/UNICAMP, v.4, n.6, julho/dezembro, PP.65-74. 1996.

PASSOS, C. L. B. *Materiais Manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática*. In LORENZATO, S.(Org.). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. pp. 77-92; 178 p. (Coleção Formação de professores).

_____. *Representações, interpretações e prática pedagógica: A geometria na Sala de Aula*. 2000. 348f. Tese (Doutorado em Educação)- Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

PETERSEN, J. *Construções Geométricas*. (traduzido por: Woiler,S.; Carl, H.M. de B.)Nobel. São Paulo. 1965. 157p.

PENTEADO, M.G. *Novos atores, novos cenários: discutindo a inserção dos computadores na profissão docente*. In BICUDO, M.A.V. (org). *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas*. São Paulo: Editora da UNESP, 1999. pp. 297-313.

PERISSINOTO JR, A.; MURARI, C.; PEREZ G. *Apostila de Geometria: Construções Geométricas*. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. 1986. 63p.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.152p.

SANTOS, M. R. *Pavimentação do plano: Um estudo com professores de matemática e Arte*. 2006.177p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

SILVA, A.P.da; FERRARA, A.A.P. *Geometria Aplicada (Desenho Geometrico)* LPM Editora. São Paulo. 1966. 183p.

SMOGORZHEVSKII, A.S. *The Ruler in Geometrical Constructions*.(translated from the Russian by Moss, H.) Blaisdell Publishing Company. New York. London.1961.85p.

STEFFE, L.P. e TOMPHSON, P.W. *Teaching Experiment Methodology: underlying principles and essential elements*, In: LESH, R. ; KELLY, A.E.(ed). *Mathematics and Science Education*. Hillsdale: Erlbaum, 2000.

VILLAREAL, M. E. *O pensamento matemático de estudantes universitários de cálculo e tecnologias informáticas*. 1999. 387f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.