



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Campus de Rio Claro

# Cônicas e Aplicações

**Juracélio Ferreira Lopes**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Departamento de Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador  
Prof. Dr. Wladimir Seixas

**2011**

516.3      Lopes, Juracélio Ferreira  
L864c      Cônicas e Aplicações/ Juracélio Ferreira Lopes- Rio Claro: [s.n.],  
2011.  
184 f. : il., figs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.  
Orientador: Wladimir Seixas

1. Geometria Analítica. 2. Cônicas - História e estudo. 3. Métodos Matemáticos. 4. GEOGEBRA. I. TÍTULO

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP  
Campus de Rio Claro/SP

# TERMO DE APROVAÇÃO

Juracélio Ferreira Lopes  
CÔNICAS E APLICAÇÕES

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Wladimir Seixas  
Orientador

Profa. Dra. Yuriko Yamamoto Baldin  
Departamento de Matemática - UFSCar

Prof. Dr. João Peres Vieira  
Departamento de Matemática - IGCE/Unesp

**Rio Claro, 28 de Janeiro de 2011**

*Aos que mais amo, minha família,  
dedico.*

# Agradecimentos

A Deus por ter me mostrado que a fé e a persistência são peças fundamentais na construção de um sonho. E que vencer nossas dificuldades nos faz crescer espiritualmente e nos permite ir além do que poderíamos imaginar quando estávamos no início da caminhada.

Aos que mais amo, minha família que sempre me apoiou e incentivou nesta caminhada.

Ao professor Dr. Wladimir Seixas por tão bem ter me recebido, pelo apoio científico, incentivo e companheirismo na orientação deste trabalho.

Ao amigo Júlio Cesar por ter me convencido a fazer mestrado na Unesp e também pelas suas contribuições sempre quando o tenho procurado.

Aos professores da especialização Profa. Dra. Roseli e Prof. Dr. Frederico pelo incentivo a fazer o mestrado.

Aos professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Matemática Universitária - IGCE - Unesp - Campus de Rio Claro.

À banca examinadora, pelas contribuições à realização deste sonho.

Aos meus colegas do Mestrado, em especial aos amigos Nilton, Gustavo, Henrique e José Ribamar pelo companheirismo e convivência na república “Caverna do dragão”.

Ao amigo Eduardo e família que me acolheram na cidade de Rio Claro.

Por fim, à Secretaria Estadual da Educação do Estado de Minas Gerais pelo apoio financeiro do Programa Bolsa Mestrado que tornou este sonho possível.

*Como pode a matemática, que é, afinal de contas,  
produto do pensamento humano, e independente da experiência,  
adaptar-se tão admiravelmente à realidade concreta?*

Albert Einstein.

# Resumo

Este trabalho inicia-se com uma breve investigação histórica sobre as cônicas e, em seguida, apresenta o estudo destas curvas no plano sob três aspectos: o geométrico, o analítico e o da definição unificada através da propriedade foco-diretriz. Nestas três abordagens, os principais resultados são analisados computacionalmente através do programa GEOGEBRA(<http://www.geogebra.org>). Partindo de dois destes resultados, o da reta tangente e a equação geral das cônicas em coordenadas polares, tornam-se evidentes as propriedades de reflexão das cônicas e as aplicações à Mecânica Celeste, respectivamente.

**Palavras-chave:** Geometria Analítica, Cônicas - História e estudo, Métodos Matemáticos, GEOGEBRA.

# Abstract

This work begins with a brief historical investigation on conics and presents the study of these curves in the plane under three aspects: geometrical, analytical and from the unified definition through of the property focus-directrix. In these three different approaches, the main results are analyzed computationally by using the software GEOGEBRA(<http://www.geogebra.org>). Two of these results, the tangent line and the general equation of conics written in polar coordinates, will provide the applications to reflective properties of conics and to Celestial Mechanics, respectively.

**Keywords:** Analytical Geometry, Conics - History and study, Mathematical Methods, GEOGEBRA.



# Lista de Figuras

2.1	Sistemas de coordenadas cartesianas. . . . .	28
2.2	Reta tangente e reta normal a uma curva. . . . .	29
2.3	Distância do ponto $P$ a reta $r$ . . . . .	29
3.1	Método do Elemento VI-13 aplicado a equação $y^2 = 2ax$ . . . . .	34
3.2	Cones e a representação plana do triângulo gerador. . . . .	36
3.3	Seção circular determinada pelo plano perpendicular ao eixo do cone. . . . .	37
3.4	Cortes do cone. . . . .	41
3.5	Seções cônicas definidas por Apolônio. . . . .	42
3.6	$PM$ interceptando $AC$ ou o prolongamento de $AC$ . . . . .	44
3.7	Cônicas, proposição I-33 . . . . .	47
3.8	Cônicas, proposição I-34 . . . . .	47
3.9	Cônicas, proposição V-8, V-13, V-27 . . . . .	48
5.1	Construção da elipse usando um fio inextensível. . . . .	55
5.2	Simetria da elipse em relação à reta $r$ . . . . .	56
5.3	Simetria da elipse em relação à reta $s$ . . . . .	57
5.4	Simetria em relação à reta $s$ . . . . .	58
5.5	Centro de simetria. . . . .	59
5.6	Centro de simetria. . . . .	59
5.7	Vértices da elipse pertencente ao segmento focal. . . . .	60
5.8	Vértices da elipse pertencentes à mediatriz do segmento focal. . . . .	61
5.9	Elementos da elipse . . . . .	61
5.10	Construção por régua e compasso. . . . .	62
5.11	Construção por régua e compasso. . . . .	63
5.12	Regiões do plano determinadas pela elipse. . . . .	63
5.13	Ponto qualquer $S$ de $t$ distinto de $P$ . . . . .	64
5.14	Propriedade da reta $t$ tangente à elipse. . . . .	65
5.15	Ponto da elipse no sistema ortogonal de coordenadas. . . . .	66
5.16	Ponto da elipse no sistema ortogonal de coordenadas com os focos sobre o eixo $y$ . . . . .	68
5.17	Propriedades dos parâmetros geométricos da elipse. . . . .	69
5.18	Reta tangente à elipse em $P$ . . . . .	70

5.19	Reta secante à elipse. . . . .	71
5.20	Reta $n$ normal à elipse em $P_1$ . . . . .	73
6.1	Construção da hipérbole usando uma haste e fio inextensível. . . . .	76
6.2	Construção da hipérbole. . . . .	76
6.3	Simetria da hipérbole em relação a reta $r$ . . . . .	77
6.4	Simetria da hipérbole em relação à reta $s$ . . . . .	77
6.5	Simetria da hipérbole em relação à reta $s$ . . . . .	78
6.6	Centro de simetria. . . . .	79
6.7	Centro de simetria. . . . .	79
6.8	Vértices da hipérbole. . . . .	80
6.9	Parâmetros da hipérbole. . . . .	81
6.10	Eixo conjugado. . . . .	81
6.11	Elementos da hipérbole. . . . .	82
6.12	Construção por régua e compasso. . . . .	83
6.13	Construção por régua e compasso. . . . .	83
6.14	Regiões do plano determinadas pela hipérbole. . . . .	84
6.15	Um ponto $P$ da hipérbole pertencente à reta $t$ . . . . .	85
6.16	Ponto $Q$ qualquer da reta $t$ distinto de $P$ . . . . .	85
6.17	Propriedade da reta $t$ tangente à hipérbole. . . . .	86
6.18	Ponto da hipérbole no sistema ortogonal de coordenadas. . . . .	87
6.19	Características do esboço da hipérbole. . . . .	90
6.20	Retas que interceptam $\mathcal{H}$ em um único ponto. . . . .	91
6.21	Reta tangente à hipérbole em $P_1$ . . . . .	93
7.1	Construção da parábola usando esquadro e fio inextensível. . . . .	96
7.2	Simetria em relação à reta $s$ . . . . .	96
7.3	Construção por régua e compasso. . . . .	98
7.4	Construção por régua e compasso. . . . .	98
7.5	Regiões do plano determinadas pela parábola. . . . .	99
7.6	Ponto $Q$ qualquer da reta $t$ distinto de $P$ . . . . .	99
7.7	Propriedade da reta $t$ tangente à parábola. . . . .	100
7.8	Ponto da parábola no sistema ortogonal de coordenadas. . . . .	101
7.9	Esboço da parábola. . . . .	102
7.10	Triângulo fundamental da parábola. . . . .	103
7.11	Retas que interceptam $\mathcal{P}$ em um único ponto. . . . .	103
7.12	Reta $n$ normal à parábola em $P_1$ . . . . .	105
8.1	Cônicas definidas por foco-diretriz. . . . .	107
8.2	Definição foco-diretriz e plano cartesiano . . . . .	108
8.3	Sistema $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$ e cônica com excentricidade $e = 1$ . . . . .	109

8.4	Sistema $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$ e cônica com excentricidade $0 < e < 1$ .	110
8.5	Focos e diretrizes da elipse.	112
8.6	Sistema $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$ e cônica com excentricidade $e > 1$ .	113
8.7	Focos e diretrizes da hipérbole.	115
8.8	Famílias de cônicas.	116
8.9	Esferas de Dandelin e as cônicas	117
8.10	Relação entre excentricidade e forma da elipse.	118
8.11	Relação entre excentricidade e forma da hipérbole.	119
8.12	Semelhança dos triângulos fundamentais das parábolas.	120
8.13	Elipses equivalentes.	121
8.14	Conjunto quociente $\mathcal{C}/R$ .	123
8.15	Sistema de coordenadas polares.	124
8.16	Sistema de coordenadas polares	124
8.17	Plano de coordenadas polares.	125
8.18	Transformação entre coordenadas polares e cartesianas	126
8.19	Cônicas em coordenadas polares	127
8.20	Sistema de coordenadas cartesianas e polares.	128
8.21	Diretriz perpendicular ao eixo polar.	129
8.22	Diretriz paralela ao eixo polar.	130
9.1	Superfície de revolução de uma cônica.	133
9.2	Propriedade da reta tangente.	134
9.3	Leis da reflexão da luz	134
9.4	Superfície refletora parabólica	135
9.5	Superfície refletora elíptica	135
9.6	Superfície refletora hiperbólica	135
9.7	Forno solar construído na França.	136
9.8	Antena parabólica.	137
9.9	Litotriptor e espelho elíptico.	137
9.10	Telescópio Hale e o sistema óptico Cassegrain.	138
9.11	Bilhar elíptico	138
9.12	Bilhar parabólico	139
9.13	Bilhar hiperbólico	139
10.1	Posição do centro de massa.	145
10.2	Representação da força central atuando sobre a partícula de massa $m_2$ .	147
10.3	Trajatória de uma partícula e o momento angular $\vec{L}$ .	149
10.4	Posição de uma partícula $P$ no espaço.	149
10.5	Vetores unitários em coordenadas cartesianas e polares.	150
10.6	Trajatória descrita por uma partícula $P$ em um campo de força.	154
10.7	Definindo $\sin \delta$ e $\cos \delta$ em função de $A$ e $B$	159

A.1	Tela principal do software GEOGEBRA. . . . .	169
A.2	Barra de navegação para passos da construção . . . . .	172

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>25</b>
<b>2</b>	<b>Pré-requisitos</b>	<b>27</b>
<b>I</b>	<b>Origens históricas</b>	<b>31</b>
<b>3</b>	<b>Origens das Seções Cônicas</b>	<b>33</b>
3.1	Introdução . . . . .	33
3.2	Seções Cônicas antes de Apolônio . . . . .	33
3.2.1	Problema da duplicação do cubo e a descoberta das cônicas . . . . .	33
3.2.2	Sistematização do conhecimento sobre as cônicas . . . . .	35
3.3	As cônicas de Apolônio . . . . .	39
3.3.1	Apolônio e obra . . . . .	39
3.3.2	As importantes contribuições de Apolônio para as cônicas . . . . .	40
3.3.3	Definição das cônicas . . . . .	40
3.3.4	Origem dos nomes das cônicas . . . . .	41
3.3.4.1	Propriedade fundamental das cônicas ou <i>symptome</i> na equação cartesiana . . . . .	46
3.3.5	Análise de alguns aspectos da obra de Apolônio . . . . .	46
3.3.5.1	Tangentes e normais . . . . .	46
3.3.5.2	Foco e propriedades . . . . .	48
<b>II</b>	<b>Cônicas</b>	<b>51</b>
<b>4</b>	<b>Introdução às cônicas</b>	<b>53</b>
<b>5</b>	<b>Elipse</b>	<b>55</b>
5.1	Um Tratamento Geométrico . . . . .	55
5.1.1	Construção da elipse usando um fio inextensível . . . . .	55
5.1.2	Simetrias da elipse . . . . .	56
5.1.2.1	Eixos de Simetria . . . . .	56

5.1.2.2	Centro de Simetria . . . . .	58
5.1.3	Elementos da elipse . . . . .	60
5.1.4	Determinação dos pontos de uma elipse usando régua e compasso . . . . .	61
5.1.5	Regiões do plano determinadas pela elipse e reta tangente . . . . .	63
5.1.6	Consequências da construção por régua e compasso . . . . .	64
5.2	Um Tratamento Analítico . . . . .	66
5.2.1	Equação reduzida . . . . .	66
5.2.2	Caracterização do esboço da elipse . . . . .	68
5.2.2.1	Análise dos parâmetros $a$ e $b$ na equação reduzida da elipse . . . . .	68
5.2.2.2	Simetria da elipse . . . . .	70
5.2.3	Retas tangentes e retas normais à elipse . . . . .	70
5.2.4	Propriedade da reta normal à elipse . . . . .	72
<b>6</b>	<b>Hipérbole</b> . . . . .	<b>75</b>
6.1	Um Tratamento Geométrico . . . . .	75
6.1.1	Construção da hipérbole usando uma haste e um fio inextensível . . . . .	75
6.1.2	Simetrias da hipérbole . . . . .	76
6.1.2.1	Eixos de simetria . . . . .	76
6.1.2.2	Centro de Simetria . . . . .	79
6.1.3	Elementos da hipérbole . . . . .	80
6.1.4	Determinação dos pontos de uma hipérbole usando régua e compasso . . . . .	82
6.1.5	Regiões do plano determinadas pela hipérbole e reta tangente . . . . .	84
6.1.6	Consequências da construção por régua e compasso . . . . .	84
6.2	Um Tratamento Analítico . . . . .	87
6.2.1	Equação reduzida . . . . .	87
6.2.2	Algumas propriedades da hipérbole dada pela equação reduzida . . . . .	89
6.2.3	Retas tangentes e retas normais à hipérbole . . . . .	90
6.2.4	Propriedade da reta tangente à hipérbole . . . . .	93
<b>7</b>	<b>Parábola</b> . . . . .	<b>95</b>
7.1	Um Tratamento Geométrico . . . . .	95
7.1.1	Construção da parábola usando esquadro e um fio inextensível . . . . .	95
7.1.2	Simetria da parábola . . . . .	96
7.1.3	Determinação dos pontos de uma parábola usando régua e compasso . . . . .	97
7.1.4	Região do plano determinada pela parábola e reta tangente . . . . .	98
7.1.5	Consequências da construção por régua e compasso . . . . .	99
7.2	Um Tratamento Analítico . . . . .	100
7.2.1	Equação reduzida . . . . .	101

7.2.2	Algumas propriedades da parábola dada pela equação reduzida . . . . .	102
7.2.3	Retas tangentes e retas normais à parábola . . . . .	103
7.2.4	Propriedade da reta normal a uma parábola . . . . .	105
<b>8</b>	<b>Definição unificada das cônicas</b>	<b>107</b>
8.1	Famílias de curvas . . . . .	115
8.2	Forma das cônicas . . . . .	118
8.2.1	Elipse . . . . .	118
8.2.2	Hipérbole . . . . .	119
8.2.3	Parábola . . . . .	119
8.3	Cônicas equivalentes . . . . .	120
8.3.1	Relação de equivalência entre as cônicas . . . . .	120
8.3.2	Classe de equivalência das cônicas e conjunto quociente . . . . .	122
8.4	Equações das cônicas em coordenadas polares . . . . .	123
8.4.1	Sistema de coordenadas polares . . . . .	123
8.4.2	Transformações entre coordenadas polares e cartesianas. . . . .	125
8.4.3	Equações polares das cônicas . . . . .	127
<b>III</b>	<b>Aplicações</b>	<b>131</b>
<b>9</b>	<b>Propriedades de reflexão das cônicas</b>	<b>133</b>
9.1	Propriedades de reflexão . . . . .	133
9.2	Aplicações das propriedades de reflexão . . . . .	136
9.2.1	Superfície refletoras parabólica . . . . .	136
9.2.2	Superfície refletoras elípticas . . . . .	136
9.2.3	Superfície refletora hiperbólica . . . . .	137
9.2.4	Propriedades de reflexão das cônicas em mesas de bilhar . . . . .	138
<b>10</b>	<b>Mecânica celeste e as cônicas</b>	<b>141</b>
10.1	Introdução . . . . .	141
10.2	Um breve histórico . . . . .	141
10.3	Forças e Leis de Newton . . . . .	143
10.4	Sistema de duas partículas . . . . .	144
10.4.1	Definição de força central . . . . .	147
10.4.2	Movimento de uma partícula em um campo de força central . . . . .	148
10.5	Equações do movimento de um partícula em um campo de força central . . . . .	149
10.5.1	Vetor velocidade e vetor aceleração em coordenadas polares . . . . .	151
10.5.2	Momento angular em coordenadas polares . . . . .	152
10.5.3	Equações do movimento . . . . .	153
10.6	Energia Cinética e Energia Potencial em um campo de força central . . . . .	153
10.6.1	Campo Vetorial . . . . .	153

10.6.2	Derivadas parciais num campo vetorial . . . . .	153
10.6.3	Trabalho de uma força . . . . .	154
10.6.4	Energia Cinética . . . . .	154
10.6.5	Energia Potencial . . . . .	155
10.6.6	Teorema da conservação da Energia Mecânica . . . . .	155
10.7	Determinação da órbita a partir da força central . . . . .	157
10.7.1	Equação diferencial da órbita ou trajetória . . . . .	157
10.7.2	Equação da órbita sob ação da força inversamente proporcional ao quadrado da distância . . . . .	158
10.7.3	Solução da equação diferencial da órbita e as cônicas . . . . .	159
10.7.4	Equação da órbita em termos da Energia Mecânica e determina- ção das Cônicas . . . . .	161
<b>11</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>165</b>
	<b>Referências</b>	<b>167</b>
<b>A</b>	<b>Cônicas no GEOGEBRA</b>	<b>169</b>
A.1	GEOGEBRA . . . . .	169
A.2	Construções feitas através do GEOGEBRA . . . . .	172
A.2.1	Elipse . . . . .	172
A.2.1.1	Construção do lugar geométrico dos pontos de uma elipse	172
A.2.1.2	Construção da demonstração que o ponto $P$ está sobre a elipse . . . . .	173
A.2.1.3	Construção da propriedade da reta tangente à elipse .	174
A.2.2	Hipérbole . . . . .	174
A.2.2.1	Construção do lugar geométrico dos pontos de uma hi- pérbole . . . . .	174
A.2.2.2	Construção da demonstração que o ponto $P$ está sobre a hipérbole . . . . .	175
A.2.2.3	Construção da hipérbole a partir da construção da elipse	175
A.2.2.4	Construção da propriedades da reta tangente à hipérbole	175
A.2.3	Parábola . . . . .	176
A.2.3.1	Construção do lugar geométrico dos pontos de uma pa- rábola . . . . .	176
A.2.3.2	Construção da demonstração de que o ponto $P$ está sobre uma parábola . . . . .	177
A.2.3.3	Construção da propriedade da reta tangente à parábola.	177
A.2.4	Unificação . . . . .	178
A.2.4.1	Construção das cônicas a partir da definição unificada das cônicas . . . . .	178



A.2.4.2	Construção da equação geral das cônicas pela definição foco-diretriz . . . . .	178
A.2.4.3	Construção da família de Cônicas . . . . .	178
A.2.4.4	Construção da forma e excentricidade da elipse . . . .	179
A.2.4.5	Construção da forma e excentricidade da hipérbole . .	179
A.2.4.6	Construção da forma e a excentricidade da parábola .	180
A.2.4.7	Construção da equação das cônicas em coordenadas po- lares com a diretriz perpendicular ao eixo polar . . . .	181
A.2.4.8	Construção da equação das cônicas em coordenadas po- lares com a diretriz paralela ao eixo polar . . . . .	182
A.3	Licença do GEOGEBRA . . . . .	183

# 1 Introdução

As cônicas: elipse, hipérbole e parábola compõem um assunto da matemática sobre o qual as exposições gerais são conhecidas antes da época de Euclides (325 - 265 a.C.). Estas curvas são obtidas variando a inclinação de um plano que intercepta um cone circular de duas folhas. Esta propriedade foi descoberta por Apolônio ( $\pm 262 - 190$  a.C.) que forneceu importantes contribuições sobre o assunto em seu tratado sobre as cônicas.

Através da análise dos diversos livros de Geometria Analítica e Cálculo, citados nas referências bibliográficas, observa-se que o estudo apresentado nestes textos sobre as cônicas tratam estas curvas, em sua grande maioria, apenas sob o ponto de vista de equações algébricas. Esta dissertação preocupa-se em valorizar também a exploração destas curvas sob o ponto de vista geométrico com intuito de motivar e preparar o leitor para exploração algébrica do tema. Neste sentido, para propiciar a visualização e investigação dos diversos resultados demonstrados ao longo do texto, o leitor poderá analisar as mesmas construções agora feitas através do software GEOGEBRA<sup>1</sup> acessando o CD-ROM que acompanha este trabalho. Além disso, as cônicas possuem várias aplicações e apresentar algumas delas estabelece sua importância na relação entre a matemática pura e aplicada. Sendo assim, este trabalho tem como objetivo apresentar um texto didático com inovações para o ensino das cônicas no nível universitário. Este assunto é ministrado no curso de Geometria Analítica e parte desta dissertação pode ser também utilizada na proposição de trabalhos extras, ou na preparação de pequenos projetos de iniciação científica. O interesse pelo tema se deu por dois grandes motivos:

1. Estudar algumas aplicações importantes das cônicas que não são abordadas pelos livros didáticos;
2. Utilizar recursos computacionais para a exploração deste assunto.

Esta dissertação inicia-se com o capítulo de pré-requisitos apresentando alguns resultados importantes que serão utilizados nos capítulos seguintes. O restante do texto está dividido em três partes. A primeira parte trata de uma investigação sobre a origem das cônicas e uma análise do tratamento dado a essas curvas no século III a.C.

---

<sup>1</sup>GEOGEBRA é livremente distribuído sobre a GNU *General Public Licence*. Ver Apêndice. (<http://www.geogebra.org>).

A parte II foi dividida em quatro capítulos onde nos três primeiros as curvas elipse, hipérbole e parábola são estudadas individualmente. Um tratamento unificado das cônicas é apresentado no último capítulo desta parte. Esta unificação é de fundamental importância para a aplicação destas curvas à Mecânica Celeste. A parte III, que trata das aplicações das cônicas, é composta pelos capítulos Propriedades de Reflexão das Cônicas e Mecânica Celeste. Por último, no Apêndice apresenta-se de maneira detalhada, os passos das construções feitas através do GEOGEBRA citadas ao longo desta dissertação.

## 2 Pré-requisitos

Neste trabalho, o conjunto universo estará restrito ao conjunto de pontos de um plano onde valem os axiomas da geometria euclidiana. Os pontos serão indicados por letras latinas maiúsculas  $A, B, P, Q, \dots$ , retas por letras latinas minúsculas  $r, s, t, \dots$  e planos por letras gregas minúsculas  $\alpha, \beta, \pi, \dots$ . Se  $P$  e  $Q$  são pontos distintos, a reta que os contém será citada como reta  $PQ$ , e o segmento de reta com extremidades  $P$  e  $Q$  como segmento  $PQ$  ou, simplesmente,  $PQ$ . Ao comprimento do segmento  $PQ$  está associado um único número real positivo que será também representado por  $PQ$ . A notação  $\widehat{BAC}$  será usada para indicar o ângulo convexo de vértice  $A$ , cujos lados estão contidos nas retas  $AB$  e  $AC$ .

A seguir serão apresentados definições e resultados que serão utilizados na parte II desta dissertação.

**Definição 2.1.** *Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos distintos de um plano. O lugar geométrico dos pontos equidistantes de  $A$  e  $B$  é denominada a mediatriz do segmento  $AB$ . Então, se  $r$  é mediatriz do segmento  $AB$ , para todo ponto  $P$  pertencente a  $r$  temos a igualdade entre as distâncias,  $PA = PB$ .*

**Definição 2.2.** *Dois pontos  $P$  e  $P'$  são simétricos em relação a uma reta  $m$ , que não os contém se, e somente se, a reta  $m$  é mediatriz do segmento  $PP'$ . Os pontos pertencentes à reta  $m$  são simétricos a si próprio.*

Um sistema de coordenadas cartesianas no plano  $\pi$  consiste no par de eixos perpendiculares  $Ox$  e  $Oy$  contidos neste plano, com a mesma origem  $O$ .  $Ox$  será denominado de eixo das abscissas e  $Oy$  de eixos das ordenadas. Este sistema será denotado por  $xOy$ .

Indica-se por  $\mathbb{R}^2$  o conjunto formado pelos pares ordenados  $(x, y)$ , onde  $x$  e  $y$  são números reais. O sistema de coordenadas cartesianas no plano  $\pi$  permite estabelecer uma correspondência biunívoca  $\pi \rightarrow \mathbb{R}^2$ . A cada ponto  $P$  do plano  $\pi$  faz-se corresponder um único par ordenado  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Os números  $x$  e  $y$  são as coordenadas do ponto  $P$  relativamente ao sistema  $xOy$  no qual  $x$  é a abscissa e  $y$  é a ordenada de  $P$ . As coordenadas  $(x, y)$  do ponto  $P$  são definidas do seguinte modo: se  $P$  estiver sobre o eixo  $Ox$ , o par ordenado que lhe corresponde será  $(x, 0)$ , onde  $x$  é a coordenada de  $P$  no eixo  $Ox$ . Se  $P$  estiver sobre o eixo  $Oy$ , a ele corresponderá o par  $(0, y)$ , onde

$y$  é a coordenada de  $P$  neste eixo. Por fim, se  $P$  não estiver em qualquer dos eixos, traça-se por  $P$  uma paralela ao eixo  $Oy$ , a qual corta  $Ox$  no ponto de coordenada  $x$  e uma paralela ao eixo  $Ox$ , a qual corta  $Oy$  no ponto de coordenada  $y$ . Desta forma,  $x$  será a abscissa e  $y$  será a ordenada do ponto  $P$ . Para a definição a seguir, o símbolo  $\parallel$  significa “paralelo a”.

**Definição 2.3.** *Seja  $O' = (x_0, y_0)$  um ponto qualquer em relação ao sistema cartesiano  $xOy$ . Seja  $x'O'y'$  um novo sistema de coordenadas cartesianas com origem no ponto  $O'$  tal que  $x' \parallel x$ ,  $y' \parallel y$  e  $O'x'$ ,  $O'y'$  estejam respectivamente no mesmo sentido positivo de  $Ox$  e  $Oy$ . Então, diz-se que  $x'O'y'$  foi obtido por uma translação de  $xOy$ . Se  $P$  possui coordenadas  $(x, y)$  no sistema  $xOy$  e coordenadas  $(x', y')$  no sistema  $x'O'y'$ , pela figura 2.1 obtém-se:*

$$\begin{aligned}x' &= x - x_0 \\y' &= y - y_0\end{aligned}$$

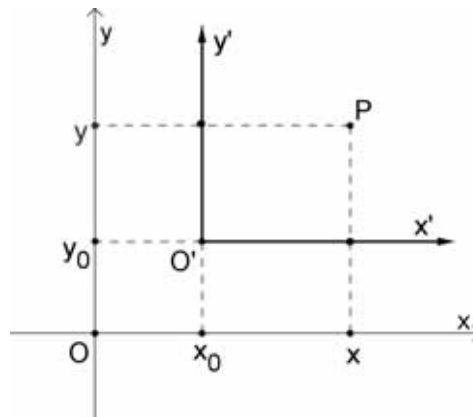


Figura 2.1: Sistemas de coordenadas cartesianas.

Entende-se por uma curva  $\mathcal{C}$  o lugar geométrico dos pontos do plano onde para quaisquer dois pontos distintos  $A$  e  $B \in \mathcal{C}$ , o segmento  $AB$  não está contido em  $\mathcal{C}$ , isto é,  $AB \not\subset \mathcal{C}, \forall A, B \in \mathcal{C}$ . Observa-se que esta definição exclui curvas poligonais que são definidas a partir da união sucessiva de segmentos de reta.

**Definição 2.4.** *Sejam  $P$  e  $Q$  dois pontos quaisquer de uma curva e  $s$  a reta secante  $PQ$ . Suponha que o ponto  $Q$  se mova ao longo dos pontos da curva aproximando-se de  $P$ . A reta  $s$  irá, então, mover-se tendendo para uma posição limite dada pela reta limite  $t$ . A reta  $t$  será denominada de reta tangente à curva no ponto  $P$ . A reta normal  $n$  à curva no ponto  $P$  será a reta perpendicular à reta tangente no ponto  $P$ . Ver a figura 2.2.*

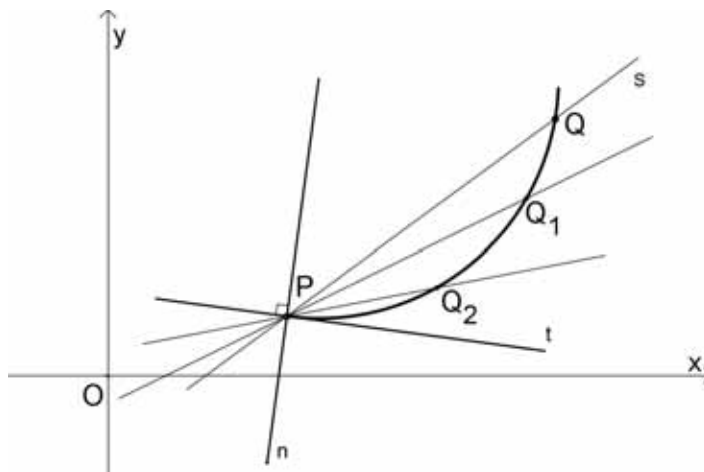


Figura 2.2: Retas tangente e normal a uma curva.

**Definição 2.5.** Seja  $r$  uma reta qualquer no plano  $\pi$  e  $P$  um ponto no mesmo plano tal que  $r \cap P = \emptyset$ . A distância entre o ponto  $P$  e a reta  $r$  é dada por:

$$d(P, r) = \min\{d(P, Y); Y \in r\}.$$

onde  $d(P, Y)$  denota a distância entre os pontos  $P$  e  $Y$ .

**Proposição 2.1.** Seja  $n$  a reta perpendicular a reta  $r$  dada que passa pelo ponto  $P$ , com  $r \cap P = \emptyset$ . A distância entre o ponto  $P$  e a reta  $r$  é igual ao comprimento do segmento  $PY$  sobre  $n$  onde  $Y = n \cap r$ .

*Demonstração.* Considere as retas  $n$  e  $r$ , os pontos  $P$  e  $Y$  nas condições do enunciado desta proposição. Seja  $Q$  um ponto qualquer sobre a reta  $r$  distinto do ponto  $Y$  conforme mostra a figura 2.3.

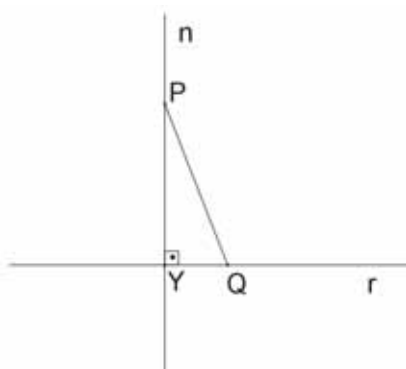


Figura 2.3: Distância do ponto  $P$  a reta  $r$ .

Observa-se que o segmento  $PQ$  é hipotenusa do triângulo retângulo  $\Delta PYQ$  o que garante que o segmento  $PY$  será menor que o segmento  $PQ$ ,  $\forall Q \in r$ . Logo, pela definição 2.5 o comprimento do segmento  $PY$  será a distância do ponto  $P$  a reta  $r$ .  $\square$

**Teorema 2.1.** *Sejam  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$  dois pontos quaisquer de uma reta  $r$ , então a inclinação  $m$  dessa reta é dada por:*

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \text{se } x_2 \neq x_1$$

*Demonstração.* Ver [1], p. 63. □

**Teorema 2.2.** *Seja  $m$  a inclinação de uma reta  $r$  que passa pelo ponto  $P_1 = (x_1, y_1)$ . Então a equação da reta  $r$  é dada por:*

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

*Demonstração.* Ver [1], p. 65. □

**Teorema 2.3.** *Sejam  $m_r$  e  $m_s$  as inclinações das retas  $r$  e  $s$  respectivamente. Então, as retas  $r$  e  $s$  são perpendiculares entre si se, e somente se,*

$$\left\{ \begin{array}{l} m_r \cdot m_s = -1 \\ \text{ou} \\ s \text{ é paralela ao eixo } Oy, \quad \text{se } m_r = 0 \\ \text{ou} \\ r \text{ é paralela ao eixo } Oy, \quad \text{se } m_s = 0. \end{array} \right.$$

*Demonstração.* Ver [1], p. 71. □

**Teorema 2.4.** *Sejam  $r$  e  $s$  retas concorrentes entre si com inclinações  $m_r$  e  $m_s$  respectivamente. Seja  $\theta$  o ângulo agudo formado entre elas, então,*

$$\theta = \left\{ \begin{array}{l} \arctg \left( \left| \frac{1}{m_r} \right| \right), \quad \text{se } s \text{ é paralela ao eixo } Oy, \\ \arctg \left( \left| \frac{1}{m_s} \right| \right), \quad \text{se } r \text{ é paralela ao eixo } Oy, \\ \arctg \left( \left| \frac{m_s - m_r}{1 + m_r m_s} \right| \right), \quad \text{se nenhuma das retas } r \text{ ou } s \text{ for paralela ao eixo } Oy. \end{array} \right.$$

*Demonstração.* Ver [1], p. 81. □

# Parte I

## Origens históricas



## 3 Origens das Seções Cônicas

### 3.1 Introdução

O interesse pelo estudo das cônicas (elipse, hipérbole e parábola) provavelmente surgiu por volta do século IV a.C. e muitos foram os matemáticos que se dedicaram ao estudo destas curvas no decorrer da história. Neste capítulo será apresentada uma breve análise, não exaustiva, a respeito da origem das cônicas antes de Apolônio e as contribuições dadas por este matemático. A importância desta investigação está no fato de que praticamente todas as definições e propriedades hoje abordadas sobre estas curvas já haviam sido apresentadas na linguagem geométrica por Apolônio por volta do século III a.C..

### 3.2 Seções Cônicas antes de Apolônio

#### 3.2.1 Problema da duplicação do cubo e a descoberta das cônicas

Segundo alguns historiadores as origens da teoria das seções cônicas são um pouco obscuras, mas podem ser fortemente atribuídas a resolução do problema da duplicação do cubo. Este problema consiste em: dada a aresta de um cubo, construir com o uso de régua e compasso a aresta de um segundo cubo cujo volume é o dobro do primeiro. Hipócrates de Chios (470 - 410 a.C.) mostrou que esse problema se reduzia em encontrar curvas com propriedades expressas na proporção contínua entre dois segmentos. Esse processo consistia em determinar médias proporcionais entre duas grandezas dadas, ou seja, dados os segmentos  $a$  e  $b$ , encontrar dois outros  $x$  e  $y$  tais que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}. \quad (3.1)$$

Hipócrates afirmou que para  $b = 2a$ , a proporção contínua (3.1) traduzia a solução do problema da duplicação do cubo, pois isolando e eliminando  $y$ , conclui-se que  $x^3 = 2a^3$ . Isto equivale, na notação atual, resolver simultaneamente quaisquer duas das três equações

$$x^2 = ay, \quad y^2 = 2ax \quad e \quad xy = 2a^2$$

que representam parábolas nos dois primeiros casos e hipérbole no terceiro. Mas a descoberta dessas curvas se deu por Menaechmus (380 - 320 a.C.) por volta de 360 ou 350 a.C.. Ele construiu as curvas com essas propriedades algébricas e conseqüentemente mostrou que o ponto de interseção delas daria as médias proporcionais desejadas. A descoberta da elipse parece ter sido feita também por ele como um simples subproduto dessa sua pesquisa.

É importante ressaltar que os matemáticos da antiguidade, para garantir que um lugar geométrico fosse realmente uma curva, achavam necessário exibí-lo estereometricamente como uma seção de um sólido ou descrevê-lo por processo cinemático de construção ([2], p. 107). Sendo assim, Menaechmus é considerado na história como o primeiro geômetra a elaborar uma representação estereométrica das seções cônicas caracterizando suas propriedades ([3], p. 227). Ele percebeu que havia uma família de curvas adequadas, que podiam ser obtidas de uma mesma fonte, cortando um cone circular reto por um plano perpendicular a um elemento do cone. Com isso, parece ter descoberto as curvas que mais tarde foram chamadas de elipse, parábola e hipérbole ([2], p. 65).

Não se sabe exatamente como Menaechmus fazia para determinar os pontos no plano pertencentes a essas curvas, mas um esboço certamente era possível usando o método euclidiano. Por exemplo, para marcar os pontos da curva satisfazendo a equação  $y^2 = 2ax$ , deveria simplesmente aplicar repetidamente o método do Elemento VI-13 como mostra a figura 3.1 abaixo.

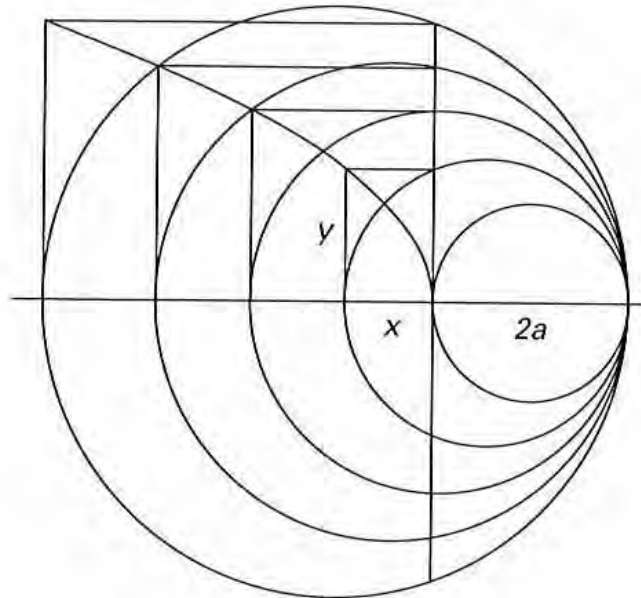


Figura 3.1: Método do Elemento VI-13 aplicado a equação  $y^2 = 2ax$ .

Primeiramente, traça-se um segmento de reta de comprimento  $2a$  e um prolongamento desse segmento com medida  $x$ . Em seguida, traçam-se duas circunferências uma

de diâmetro  $2a$  e outra com diâmetro  $2a + x$  e constrói-se uma reta perpendicular passando pelo ponto onde se iniciou o prolongamento de  $2a$ . O segmento determinado pela interseção dessa perpendicular com a circunferência maior e o ponto inicial do prolongamento tem comprimento  $y$  satisfazendo a equação  $y^2 = 2ax$ . Esta relação é obtida por semelhança de triângulos a partir do triângulo de base  $x + 2a$  e altura  $y$ . O ponto da curva era marcado pela interseção das retas paralelas aos segmentos  $x$  e  $y$ . Dessa forma, obtinham-se os demais pontos da curva, partindo-se inicialmente de um novo prolongamento de comprimento  $x$ .

Acredita-se que Menaechmus, pode ter observado que o diagrama circular da figura 3.1 poderia ser pensado como curvas de nível de um certo cone e por isso a curva podia ser gerada pela seção desse cone ([4], p. 109).

Em muitos casos as seções cônicas foram apresentadas como ferramentas para solucionar certos problemas geométricos, como por exemplo, Arquimedes (287 - 212 a.C.) as usou para resolver problemas sobre esferas.

### 3.2.2 Sistematização do conhecimento sobre as cônicas

O estudo das cônicas evoluiu rapidamente e, ao final do século IV a.C. já haviam dois extensos tratados sobre o assunto, citado por Pappus (290 - 350 d.C.) em sua obra *Tesouro da Análise*. Entre esses dois, estava as *Cônicas* de Euclides (325 - 265 a.C.) composta por quatro livros escritos por volta de 300 anos a.C. O outro tratado *Lugares Sólidos* fora escrito por Aristeu (370 - 300 a.C.) um pouco antes das cônicas de Euclides ([5], p. 116).

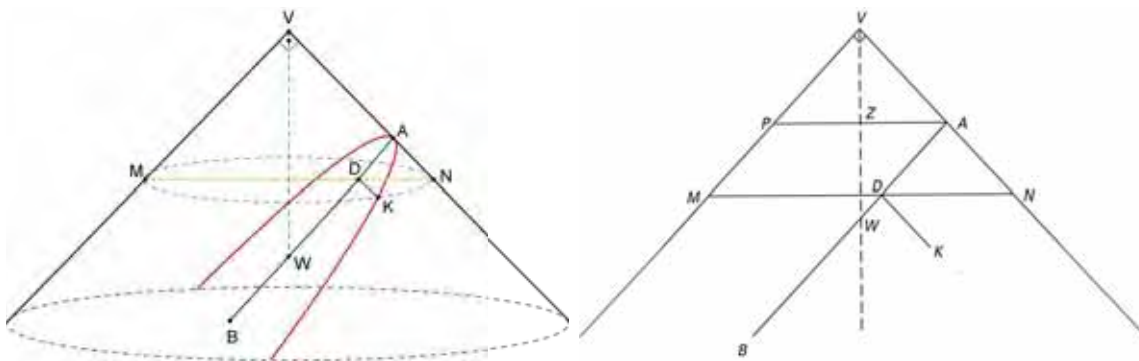
O nome *lugares sólidos* era usado pelos gregos quando se referia as seções cônicas oriundos da definição estereométrica dada por Menaechmus em sua obra.

Embora, atualmente, nenhuma dessas obras esteja disponível, um bom tratado sobre seus conteúdos pode ser inferido das extensivas referências feitas por Arquimedes aos teoremas básicos dessas curvas.

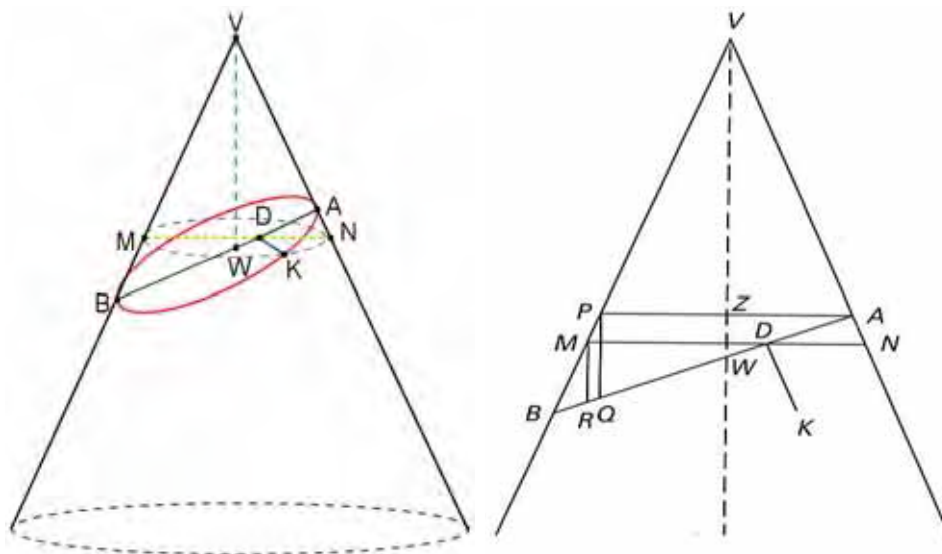
Até a época de Arquimedes as cônicas eram definidas da mesma forma como foram descobertas por Menaechmus, isto é, das seções dos três tipos de cones retos classificados conforme o ângulo do vértice fosse reto, agudo ou obtuso. A seção em cada cone era dada por um plano que cortava perpendicularmente sua reta geratriz, ou seja, a hipotenusa do triângulo retângulo rotacionado para gerar tal cone. A “seção de cone retângulo” é hoje chamada de parábola, a “seção de cone acutângulo” de elipse e a “seção de cone obtusângulo” de hipérbole. Com essas definições os matemáticos gregos derivaram o *symptome* dessas curvas, ou seja, expressão matemática que caracterizava cada uma delas. Esta expressão era obtida pela relação entre dois segmentos perpendiculares pertencentes ao plano de cada cônica onde, na linguagem atual, o comprimento destes segmentos representam a abscissa e ordenada de um ponto sobre a curva considerada.

Esses *symptomes* eram obtidos através de semelhança de triângulos na representação plana do triângulo gerador em cada tipo de cone. Observe na figura 3.2 os três tipos

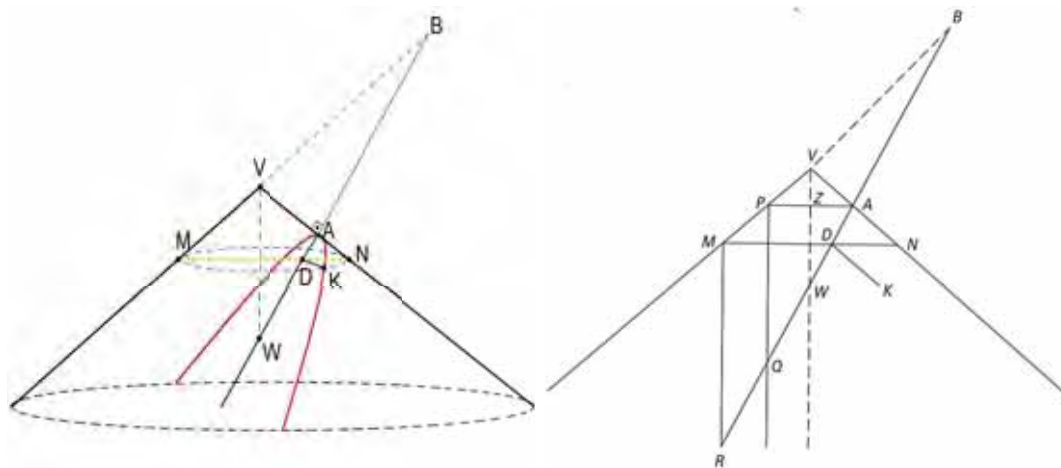
de cones com seus respectivos triângulos geradores.



(a) Cone retângulo



(b) Cone acutângulo



(c) Cone obtusângulo

Figura 3.2: Cones e a representação plana do triângulo gerador.

O ângulo no vértice  $V$  é portanto um ângulo reto (figura 3.2a), um ângulo agudo (figura 3.2b) ou um ângulo obtuso (figura 3.2c). O corte plano, perpendicular a geratriz

do cone, é indicado por  $AB$ . A curva desejada está situada no plano deste corte. Por simplicidade,  $AB$  representa também o eixo da curva. Seja  $K$  um ponto arbitrário sobre a curva e o ponto  $D$  a projeção ortogonal de  $K$  sobre a reta que passa por  $AB$ . Sendo assim, a reta suporte do segmento  $KD$  é perpendicular ao plano do triângulo gerador. Considere o plano que contém o segmento  $KD$  e que seja perpendicular a  $VW$  (eixo do cone). Este plano determinará uma seção circular cujo diâmetro será designado por  $MN$  conforme ilustra a figura 3.2. Como  $MN$  está contido no plano do triângulo gerador, conclui-se que o segmento  $KD$  é perpendicular a  $MN$  no ponto  $D$ . Pela figura 3.3 observa-se que o triângulo determinado pelos pontos  $M, K$  e  $N$  é retângulo em  $K$ .

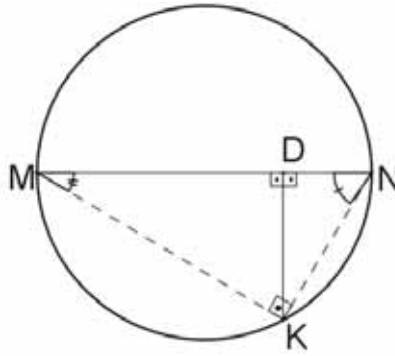


Figura 3.3: Seção circular determinada pelo plano perpendicular ao eixo do cone.

Observa-se ainda na figura 3.3 que o triângulo  $\Delta MKN$  é semelhante aos triângulos  $\Delta MDK$  e  $\Delta NDK$ . Conseqüentemente os triângulos  $\Delta MDK$  e  $\Delta NDK$  são semelhantes, então tem-se que:

$$\frac{MD}{KD} = \frac{KD}{ND}$$

Portanto, para os três tipos de cones representados na figura 3.2 conclui-se que:

$$KD^2 = MD \cdot ND. \quad (3.2)$$

Observa-se que  $KD$  e  $AD$  são segmentos perpendiculares e podem ser vistos como ordenada e abscissa do ponto  $K$  respectivamente. Desta forma, a expressão matemática associada a cada curva é obtida pela relação entre  $KD$  e  $AD$ .

No caso do cone retângulo, trace  $AP$  paralelo a  $NM$  e considere  $Z$  a interseção de  $AP$  com o eixo do cone. Por semelhança dos triângulos  $\Delta NDA$  e  $\Delta WAZ$  implica que

$$\frac{ND}{AD} = \frac{AW}{AZ} \quad \text{ou} \quad ND = \frac{AD \cdot AW}{AZ}. \quad (3.3)$$

Uma vez que  $MDAP$  é um paralelogramo tem-se que,

$$MD = 2AZ. \quad (3.4)$$

A partir das equações (3.2), (3.3) e (3.4) segue que,

$$KD^2 = 2AZ \frac{AD \cdot AW}{AZ} = 2AW \cdot AD.$$

Denotando  $KD = y$ ,  $AD = x$  e  $2AW = p$ , a equação torna-se  $y^2 = px$  que é equação canônica da parábola.

No caso do cone acutângulo e obtusângulo, trace  $AP$  paralela a  $MN$ . Considere os segmentos  $PQ$  e  $MR$  paralelos ao eixo do cone interceptando  $AB$  (ou ao prolongamento de  $AB$ ) nos pontos  $Q$  e  $R$  respectivamente.

Por semelhança dos triângulos,  $\triangle AND$  e  $\triangle MRD$  implica que

$$\frac{ND}{RD} = \frac{AD}{MD} \quad \text{ou} \quad MD \cdot ND = AD \cdot RD. \quad (3.5)$$

Como o triângulo  $\triangle MRD$  é semelhante ao  $\triangle QPA$  e  $\triangle MDB$  é semelhante ao  $\triangle PAB$ , pode-se garantir as seguintes proporções,

$$\frac{RD}{QA} = \frac{MD}{PA} = \frac{BD}{BA}$$

Portanto,

$$\frac{RD}{BD} = \frac{QA}{BA} \quad \text{ou} \quad RD = \frac{BD \cdot QA}{AB}. \quad (3.6)$$

Das equações (3.2), (3.5) e (3.6)

$$KD^2 = MD \cdot ND = AD \cdot RD = AD \cdot \frac{BD \cdot QA}{AB}. \quad (3.7)$$

Os triângulos  $\triangle APQ$  e  $\triangle AZW$  são semelhantes e  $AZ = ZP$ , então, por semelhança de triângulos,  $QA = 2WA$ . Assim (3.7) pode ser reescrita como

$$KD^2 = AD \cdot BD \cdot \frac{2AW}{AB}. \quad (3.8)$$

Ao denotar  $KD = y$ ,  $AD = x_1$ ,  $BD = x_2$ ,  $2AW = p$  e  $AB = 2a$ , conclui-se que tanto a elipse quanto a hipérbole eram obtidas de uma mesma equação, ou seja,

$$y^2 = \frac{p}{2a} x_1 x_2.$$

Dessa forma, para diferenciar uma curva da outra era necessário observar na construção dos cones acutângulo e obtusângulo, os diferentes significados geométricos do segmento  $x_2 = BD$  para cada uma delas. No caso da hipérbole (“seção de cone obtusângulo”), por exemplo, o ponto  $B$  se encontra fora do cone.

Esta última equação não é muito familiar nos dias de hoje, mas é essencialmente a forma usada por Arquimedes. Observa-se também que neste caso a hipérbole tinha apenas um ramo.

Provavelmente por volta de 200 a.C., os matemáticos consideraram importante especificar melhor o significado de  $BD = x_2$  ao obter o *symptome* de cada uma dessas duas curvas. Isto é,  $BD = AB + AD$  para a hipérbole e  $BD = AB - AD$  para a elipse. Assim, a equação (3.8) passou a ser escrita da seguinte forma:

- $KD^2 = AD \left( 2AW + \frac{2AW}{AB} AD \right)$   
ou denotando  $AD = x$ , obtém-se  $y^2 = x \left( p + \frac{p}{2a} x \right)$  para hipérbole;

- $KD^2 = AD \left( 2AW - \frac{2AW}{AB} AD \right)$   
ou denotando  $AD = x$ , obtém-se  $y^2 = x \left( p - \frac{p}{2a} x \right)$  para elipse.

### 3.3 As cônicas de Apolônio

#### 3.3.1 Apolônio e obra

Apolônio nasceu em Perga (sul da Ásia Menor), e acredita-se que tenha vivido por volta de 262 a 190 a.C.. Dos muitos tratados de Apolônio, apenas dois se preservaram em grande parte, *Dividir segundo uma razão* e *As Cônicas*. Este último foi certamente sua obra prima sendo composta por oito volumes (aproximadamente 400 proposições). Da obra original sobreviveram sete volumes, sendo quatro escritos em grego e três traduzidos para o árabe por Thabit Ibn Qurra (836 a 901). Em 1710, Edmund Halley (1656 - 1742) traduziu os sete volumes sobreviventes para o latim, possibilitando as demais traduções para as outras línguas modernas.

Quando Apolônio escreveu seu célebre tratado sobre as cônicas já tinham sido escritas exposições gerais sobre essas curvas por Aristeu e por Euclides num intervalo de um século e meio antes. Mas a obra de Apolônio foi de suma importância para tal assunto pois

*“... assim como Os elementos de Euclides substituíram textos elementares anteriores, assim em nível mais avançado o tratado sobre Cônicas de Apolônio derrotou todos os rivais no campo das seções cônicas, inclusive As Cônicas de Euclides, e na antiguidade nenhuma tentativa parece ter sido feita para aperfeiçoá-lo. Se sobrevivência é uma medida de qualidade, Os elementos de Euclides e As Cônicas de Apolônio foram claramente as melhores obras em seus campos.” ([2], p. 99)*

O Livro I de *As cônicas* começa com uma exposição da motivação para escrever a obra. Quando Apolônio estava em Alexandria, foi procurado por um geômetra chamado Naucrates, e foi a pedido dele que Apolônio escreveu uma versão apressada de *As cônicas* em oito livros. Mais tarde em Pérgamo, o autor elaborou os livros, um de cada vez, razão na qual inicia os livros IV e VII com saudações a Atalus, rei de Pérgamo. O autor descreve os quatro primeiros livros como se formassem uma introdução elementar e supõe-se que muito desse material já havia aparecido em tratados anteriores sobre cônicas. No entanto, Apolônio diz expressamente que alguns dos teoremas no livro III são de sua autoria, e não de Euclides. Nos quatro últimos livros ele trata de assuntos bastantes originais onde a teoria se expande em direções mais específicas, como por exemplo, discute sobre cônicas semelhantes, retas tangentes e normais a essas curvas e novas propriedades sobre diâmetros conjugados.

### 3.3.2 As importantes contribuições de Apolônio para as cônicas

Como mencionado na seção anterior, antes de Apolônio, a elipse, a parábola e a hipérbole eram obtidas como seções de três tipos bem diferentes de cone circular reto. Apolônio, pela primeira vez, mostrou sistematicamente que não é necessário tomar seções perpendiculares à geratriz de um cone e que de um único cone podem ser obtidas todas as três espécies de seções cônicas, simplesmente variando a inclinação do plano da seção. Esse foi um passo importante para relacionar os três tipos de curvas.

Uma segunda generalização importante dada por Apolônio foi a prova de que o cone não precisa ser necessariamente reto, mas podendo ser também oblíquo ou escaleno. Segundo Eutócio(480 - 540), ao comentar *As cônicas*, Apolônio foi o primeiro geômetra a mostrar que as propriedades das curvas não são diferentes conforme sejam cortadas de cones oblíquos ou retos.

Finalmente, Apolônio substituiu o cone de uma só folha por um cone duplo e o definiu da seguinte forma:

*“Se fizer uma reta, de comprimento indefinido e passando sempre por um ponto fixo, mover-se ao longo da circunferência de um círculo que não está num mesmo plano com o ponto de modo a passar sucessivamente por cada um dos pontos dessa circunferência, a reta móvel descreverá a superfície de um cone duplo. O ponto fixado é o vértice e o segmento de reta do vértice ao centro do círculo é o eixo... O círculo é a base do cone.” ([4], p. 112)*

Como consequência dessa definição a hipérbole passou a ser considerada como uma curva de dois ramos como é definida atualmente.

### 3.3.3 Definição das cônicas

Para definir as três curvas, Apolônio primeiro cortou o cone por um plano através do eixo. A interseção desse plano com a base do cone é o diâmetro  $CD$ . O triângulo resultante  $\Delta VCD$  é chamado de triângulo axial. A parábola, a elipse e a hipérbole são então definidas como as interseções deste cone por determinados planos que cortam o segmento  $CD$  ou o prolongamento de  $CD$  sobre uma reta  $EF$  conforme ilustra a figura 3.4. Essa reta  $EF$  é perpendicular a  $CD$  ou a um prolongamento do mesmo (figura 3.4b).



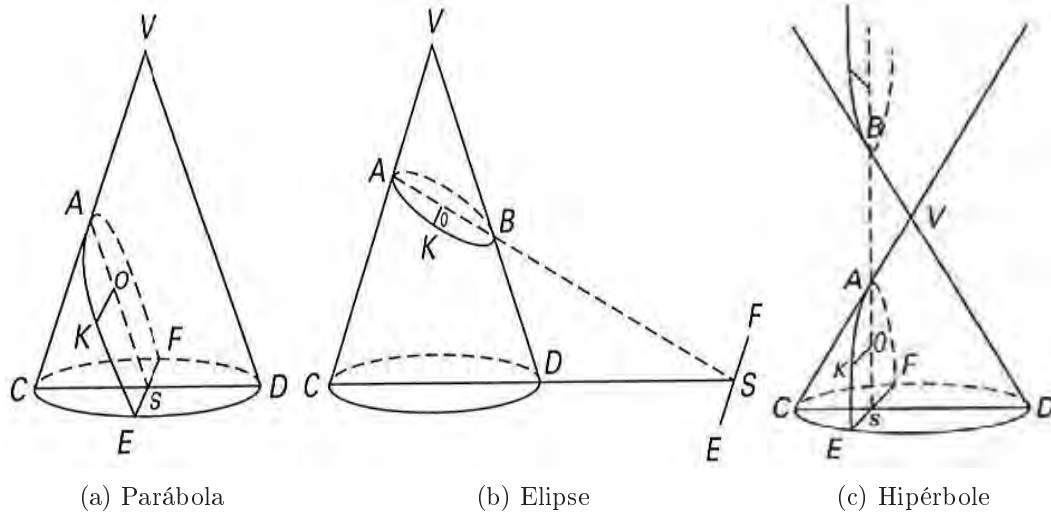


Figura 3.4: Cortes do cone.

A reta  $AS$  é a interseção dos cortes planos com o triângulo axial. Assim, as cônicas são definidas da seguinte forma:

- Se  $AS$  é paralelo ao lado do triângulo axial, a seção é uma parábola.
- Se  $AS$  interceptar ambos os lados do triângulo axial, a seção é uma elipse.
- Se  $AS$  interceptar um dos lados do triângulo axial e o prolongamento do outro lado dado além de  $V$ , a seção é uma hipérbole. Nesta situação, existem dois ramos da curva, ao contrário da hipérbole gerada pelo cone de ângulo obtuso.

Em cada caso Apolônio derivou o *symptome* (expressão matemática) da curva que será apresentado posteriormente. O método que ele utilizou foi semelhante ao que foi apresentado pelos seus predecessores. Isto é, marcando um ponto  $K$  arbitrário sobre a seção e passando por este um plano paralelo a base.

### 3.3.4 Origem dos nomes das cônicas

O nome das seções cônicas dada por Apolônio tinha um significado diferente daquele que era usado até sua época. Durante um século e meio essas curvas apresentavam designações simples dada pela forma na qual tinham sido descobertas - seção de cone acutângulo (*oxytome*), seção de cone retângulo (*orthotome*) e seção de cone obtusângulo (*amblytome*). Arquimedes ainda usava esses nomes, embora há relatos de que ele usou o nome parábola como sinônimo para a seção do cone retângulo, foi Apolônio quem introduziu os nomes elipse e hipérbole para essas curvas. As palavras elipse, parábola e hipérbole não foram inventadas expressamente, foram adotadas de uso anterior, provavelmente pelos pitagóricos, na solução de equações quadráticas por aplicação de áreas.

Será mostrado como Apolônio atribuiu esses novos nomes tomando como base a interpretação geométrica de suas expressões matemáticas obtidas para cada curva no cone duplo.

Considere as seções cônicas, construídas como mostra a figura 3.5.

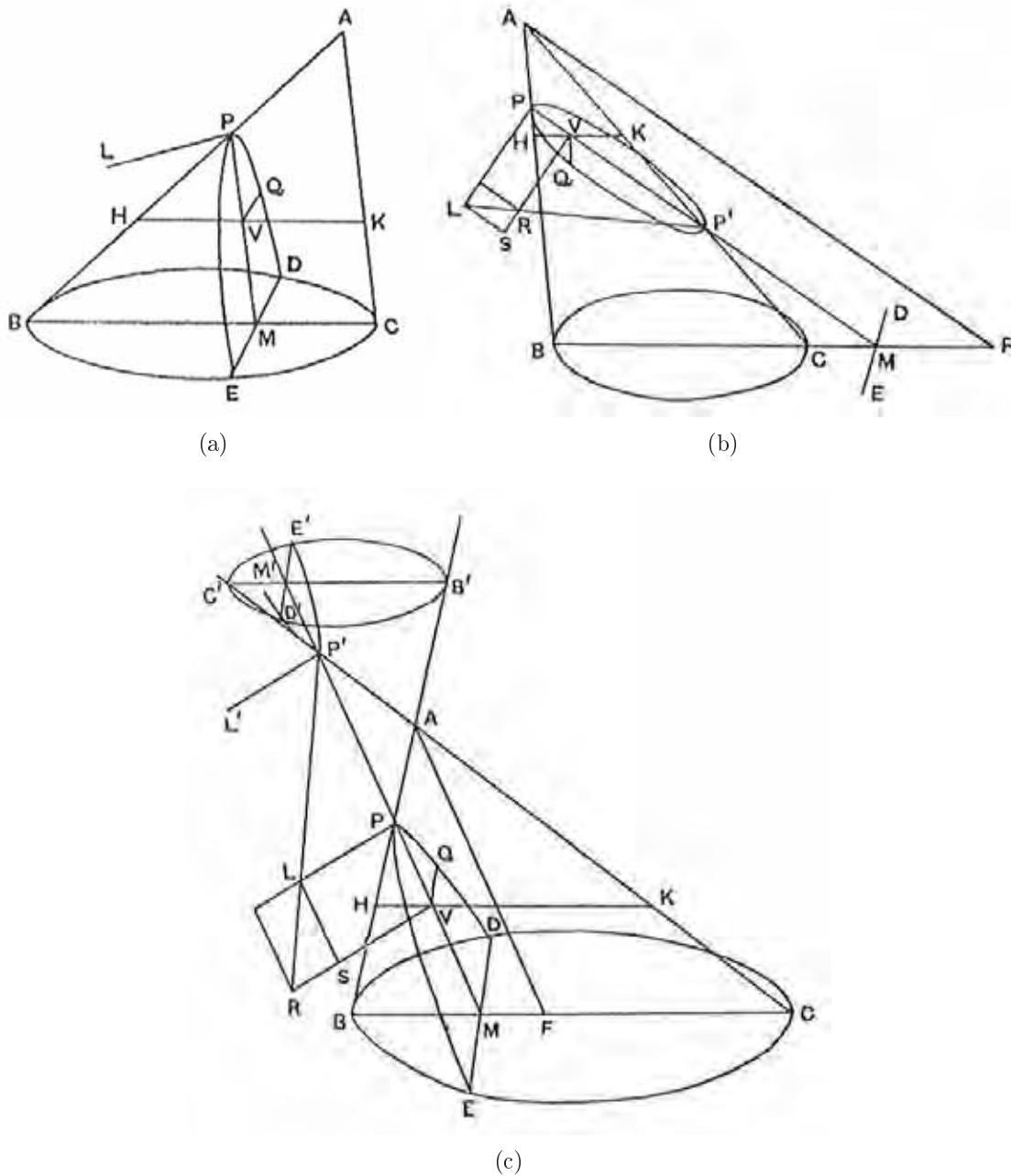


Figura 3.5: Seções cônicas definidas por Apolônio.

Da construção tem-se que:

- (a) O segmento  $BC$  é base do triângulo axial  $\Delta ABC$ .
- (b) O segmento  $DE$  no plano da base é perpendicular a  $BC$  ou ao prolongamento de  $BC$ .

- (c) O segmento  $PM$  é a interseção da seção plana com o triângulo  $\Delta ABC$ .
- (d) O segmento  $AF$  para os dois últimos casos é paralelo a  $PM$  e encontra com  $BC$  ou com um prolongamento de  $BC$ .
- (e) O ponto  $Q$  é um ponto qualquer pertencente a curva com o segmento  $QV$  perpendicular ao plano do triângulo axial. Assim,  $QV$  é perpendicular  $PM$  no ponto  $V$ .
- (f) O segmento  $HK$  é o diâmetro da seção circular determinada por um plano que contém o segmento  $QV$  sendo este plano paralelo a base  $BC$ . O segmento  $HK$  intercepta o lado  $AB$  em  $H$  e  $AC$  em  $K$ .  $QV$  é perpendicular  $HK$  no ponto  $V$ .
- (g)  $P$  ou  $P'$  é interseção da curva com um dos lados do triângulo  $\Delta ABC$ .
- (h)  $PL$  é um segmento perpendicular a  $PM$ .  $PL$  está contido no plano perpendicular a seção cônica que passa por  $P$  e seu comprimento será posteriormente definido.
- (i) O retângulo  $PVSL$  está situado num plano perpendicular ao plano da seção cônica.
- (j)  $R$  é o ponto de interseção dos segmentos  $VS$  e  $P'L$  ou dos prolongamentos destes dois segmentos.

O segmento  $PL$  é de extrema importância para caracterização das curvas. É um parâmetro que Apolônio definiu em função dos lados do triângulo axial  $\Delta ABC$  e dos segmentos  $AP$  e  $AF$  da seguinte forma:

- (1) Quando a seção for parábola,

$$\frac{PL}{PA} = \frac{BC^2}{BA.AC}. \quad (3.9)$$

- (2) Quando a seção for elipse ou hipérbole,

$$\frac{PL}{PP'} = \frac{BF.FC}{AF^2} \quad (3.10)$$

Observa-se das equações (3.9) e (3.10) que uma vez determinada a seção cônica o valor de  $PL$  é constante para qualquer ponto da curva sobre tal seção. Apolônio escreveu a expressão algébrica das três curvas basicamente relacionando o que se pode pensar como coordenadas de um ponto  $Q$  qualquer da seção com o segmento  $PL$ . Em outras palavras ele determinou uma expressão para cada uma das três curvas por uma relação entre os segmentos  $QV$ ,  $PV$  e  $PL$ . Consequentemente, a interpretação geométrica dessas relações deu origem aos nomes das seções cônicas.

Seja  $Q$  um ponto qualquer da curva gerada por uma das três seções. Sabe-se que  $HK$  é o diâmetro da circunferência que passa pelo ponto  $Q$  e o segmento  $QV$  é perpendicular a  $HK$  no ponto  $V$  então tem-se que,

$$QV^2 = HV.VK. \quad (3.11)$$

Essa relação é válida para qualquer uma das três curvas e será analisada separadamente para cada uma.

(1) Se  $PM$  for paralelo (notação:  $\parallel$ ) ao lado  $AC$  do triângulo axial

Como  $PM \parallel AC$  e  $HK \parallel BC$ , então, os triângulos  $\triangle ABC$ ,  $\triangle HPV$  e  $\triangle AHK$  são semelhantes. Daí tem-se que

$$\frac{HV}{PV} = \frac{BC}{AC} \quad \text{e} \quad \frac{VK}{PA} = \frac{BC}{BA}. \quad (3.12)$$

Dividindo ambos os membros da equação (3.11) por  $PV \cdot PA$  obtém-se,

$$\frac{QV^2}{PV \cdot PA} = \frac{HV \cdot VK}{PV \cdot PA}. \quad (3.13)$$

Substituindo (3.9) e (3.12) em (3.13) encontra-se

$$\frac{QV^2}{PV \cdot PA} = \frac{BC}{BA} \cdot \frac{BC}{AC} = \frac{BC^2}{BA \cdot AC} = \frac{PL}{PA}.$$

Logo,

$$QV^2 = PL \cdot PV$$

que interpretado geometricamente pode-se dizer que a área do quadrado de lado  $QV$  é igual a área do retângulo de lados  $PL$  e  $PV$ . Disso, a curva  $EPD$  é denominada de parábola que vem do grego *paraboli*, ou seja, aplicação sem falta ou excesso.

(2) Se  $PM$  não for paralelo ao lado  $AC$  do triângulo axial.

Nessas condições pode-se ter  $PM$  interceptando  $AC$  ou o prolongamento de  $AC$ . Essas duas situações serão analisadas conjuntamente considerando os esquemas obtidos a partir da figura 3.5 e ilustrados na figura 3.6.

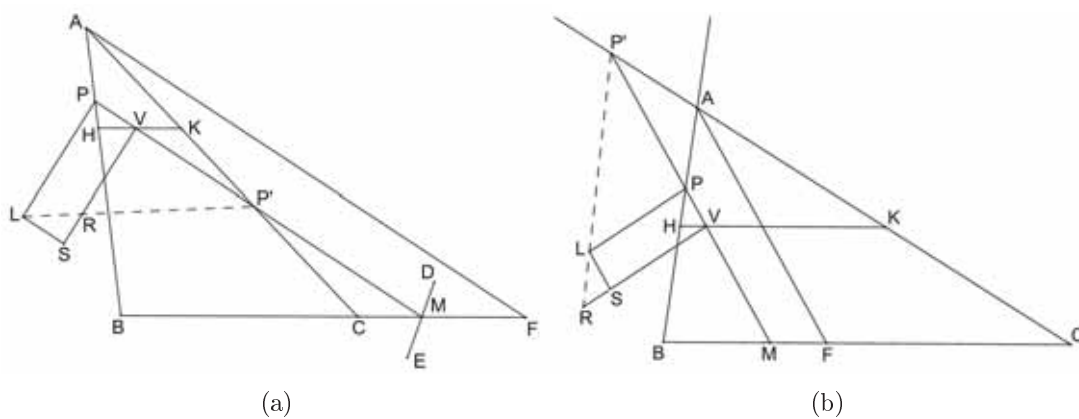


Figura 3.6:  $PM$  interceptando  $AC$  ou o prolongamento de  $AC$ .

Seguem os seguintes resultados:  $HK \parallel BC$  e  $AF \parallel PM$ , então,  $\widehat{ABF} \cong \widehat{PHV}$  e  $\widehat{AFB} \cong \widehat{P\hat{V}H}$ . Logo, os triângulos  $\triangle ABF$  e  $\triangle HPV$  são semelhantes. Daí,

$$\frac{HV}{PV} = \frac{BF}{AF}. \quad (3.14)$$

$VK \parallel FC$  e  $P'V \parallel AF$ , então,  $P'\widehat{V}K \cong A\widehat{F}C$  e  $P'\widehat{K}V \cong A\widehat{C}F$ . Logo, os triângulos  $\Delta P'VK$  e  $\Delta ACF$  são semelhantes. Daí,

$$\frac{VK}{P'V} = \frac{CF}{AF}. \quad (3.15)$$

$PL \parallel VR$ , então,  $P'\widehat{P}L \cong P'\widehat{V}R$  e  $P'\widehat{L}P \cong P'\widehat{R}V$ . Logo, os triângulos  $\Delta P'PL$  e  $\Delta P'VR$  são semelhantes. Daí,

$$\frac{PL}{PP'} = \frac{VR}{P'V}. \quad (3.16)$$

O segmento que passa pelos pontos colineares  $V$ ,  $R$  e  $S$  é paralelo a  $PL$  e  $PV \parallel LS$ , então, em ambos os casos,  $P'\widehat{L}P \cong P'\widehat{R}V$  e  $P'\widehat{V}S \cong L\widehat{S}R$ . Logo, os triângulos  $P'PL$  e  $LSR$  são semelhantes. Daí,

$$\frac{RS}{SL} = \frac{PL}{PP'}.$$

Como os segmentos  $PV$  e  $SL$  tem mesmo comprimento, obtém-se

$$RS = \frac{PL}{PP'} \cdot PV. \quad (3.17)$$

A expressão correspondente a essas duas curvas pode ser obtida da seguinte forma.

Dividindo (3.11) por  $PV.P'V$  obtém-se,

$$\frac{QV^2}{PV.P'V} = \frac{HV.VK}{PV.P'V}.$$

Substituindo (3.14) e (3.15) encontra-se

$$\frac{QV^2}{PV.P'V} = \frac{BF}{AF} \cdot \frac{CF}{AF} = \frac{BF.FC}{AF^2}.$$

Fazendo uso de (3.10) e de (3.16), obtém-se

$$QV^2 = \frac{VR.PV.P'V}{P'V} = VR.PV.$$

Assim,  $QV^2 = VR.PV$  é uma expressão geral para duas curvas, com  $VR$  representando valores diferentes para cada uma delas. Escrevendo  $VR$  em função da constante  $PL$  e analisando separadamente os dois casos tem-se:

- (a) Para  $PM$  interceptando  $AC$  observa-se pela construção da figura 3.5 que  $VR = PL - RS$ . Então

$$QV^2 = PV(PL - SR)$$

ou ainda pela equação (3.17)

$$QV^2 = PV \left( PL - \frac{PL}{PP'} PV \right)$$

que interpretada geometricamente é o mesmo que dizer que a área do quadrado aplicada ao segmento  $QV$  é igual a área do retângulo de lado  $PL$  e altura  $PV$  menos algum valor, no caso  $\frac{PL}{PP'} PV^2$ . A curva nesse caso é uma elipse termo originário do grego *ellipis* que corresponde aplicação de áreas por falta.

(b) Para  $PM$  passando pelo prolongamento de  $AC$  tem-se que

$$QV^2 = PV(PL + RS)$$

ou substituindo por (3.17)

$$QV^2 = PV \left( PL + \frac{PL}{PP'} PV \right)$$

que novamente pode ser interpretada geometricamente como a área do quadrado de lado dado pelo segmento  $QV$  sendo igual a área do retângulo de lado  $PL$  e altura  $PV$  mais algum valor, no caso  $\frac{PL}{PP'} PV^2$ . A curva é uma hipérbole termo originado do grego *yperboli*, isto é, uma aplicação de áreas por excesso.

### 3.3.4.1 Propriedade fundamental das cônicas ou *symptome* na equação cartesiana

Considere  $PL = p$  um parâmetro e  $PP' = d$  um diâmetro que irá representar o eixo maior da elipse ou o eixo transverso da hipérbole. Considere ainda o segmento  $PM$  o eixo das abscissas e uma reta paralela a  $QV$  como eixo das ordenadas. Considerando  $QV = y$  e  $PV = x$  tem-se,

(a)  $QV^2 = PL \cdot PV$  corresponde a  $y^2 = px$  para a parábola

(b)  $QV^2 = PV \left( PL \pm \frac{PL}{PP'} PV \right)$  corresponde  $y^2 = x \left( p \pm \frac{p}{d} x \right)$  para os casos da hipérbole e elipse respectivamente.

É importante ressaltar que o parâmetro  $PL$  para cada cônica, após a tradução para o latim, passou a denominar-se *latus rectum*. Na linguagem atual, o *latus rectum* é o segmento cujas extremidades pertencem à cônica de forma que este contenha um foco e seja perpendicular ao eixo focal desta curva.

### 3.3.5 Análise de alguns aspectos da obra de Apolônio

#### 3.3.5.1 Tangentes e normais

A definição de reta tangente e normal a um ponto qualquer das cônicas já era apresentada por Apolônio. Este fato pode ser observado pelas proposições a seguir tratadas em sua obra ([4], p. 116):

**Proposição I- 33.** *Seja  $C$  um ponto sobre a parábola  $CET$  com  $CD$  perpendicular ao diâmetro  $EB$ . Se o diâmetro for prolongado para  $A$  com  $AE = ED$ , então a reta  $AC$  será tangente a parábola em  $C$  (figura 3.7).*

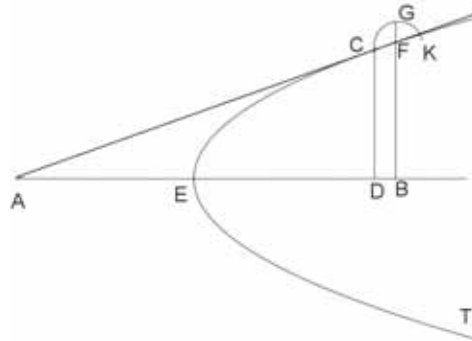
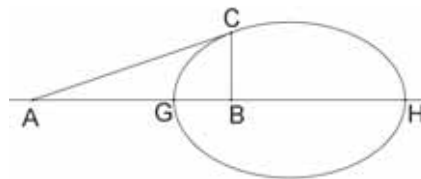
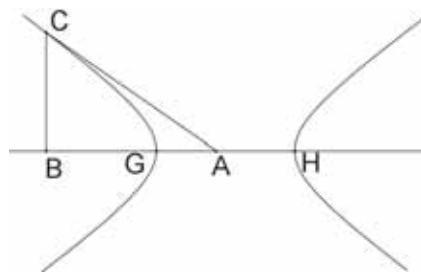


Figura 3.7: Cônicas, proposição I-33

**Proposição I - 34.** *Seja  $C$  um ponto em uma elipse ou hipérbole,  $CB$  a perpendicular do ponto  $C$  para o diâmetro ou o prolongamento deste. Sejam  $G$  e  $H$  as interseções do diâmetro com a curva e escolha  $A$  no diâmetro ou no prolongamento do diâmetro tal que  $\frac{AH}{AG} = \frac{BH}{BG}$ . Então  $AC$  será tangente a curva em  $C$ .(figura 3.8)*



(a)



(b)

Figura 3.8: Cônicas, proposição I-34

**Proposição V-8, V-13, V-27.** Em uma parábola com vértice  $A$  e simptome  $y^2 = px$ , seja  $G$  o ponto sobre o eixo tal que  $AG > p/2$ . Seja  $N$  tomado entre  $A$  e  $G$  tal que  $NG = p/2$ . Então  $NP$  é traçado perpendicular ao eixo que encontra a curva em  $P$  e  $PG$  é reta mínima de  $G$  para a curva. Reciprocamente, se  $PG$  é a reta mínima de  $G$  para curva e  $PN$  é traçada perpendicular ao eixo,  $NG = p/2$ . Finalmente,  $PG$  é perpendicular a tangente  $TP$  (figura 3.9)

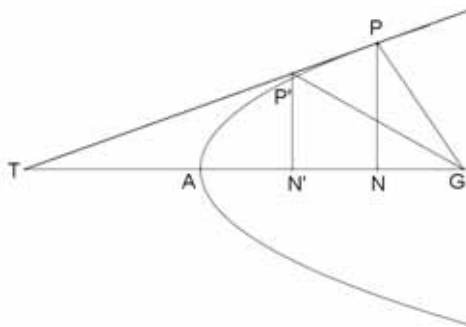


Figura 3.9: Cônicas, proposição V-8, V-13, V-27

### 3.3.5.2 Foco e propriedades

No Livro III, Apolônio trabalha com as propriedades focais da elipse e hipérbole. Na proposição III-45, por exemplo, ele define os focos de uma elipse como os pontos  $F$ ,  $G$  sobre o eixo  $AB$  tal que a área do retângulo de lados  $AF$  e  $FB$  é igual a um quarto do retângulo de lado  $PL$  (parâmetro da curva) e o eixo  $AB$ , e semelhantemente para o retângulo de lados  $AG$  e  $GB$ . (Apolônio denominou os pontos  $F$  e  $G$  de “pontos que surgem da aplicação” do retângulo para o eixo. O termo “foco” foi usado primeiramente por Johannes Kepler em 1604). Em termos algébricos, considerando a distância  $AB = 2a$  e a distância de  $F$  e  $G$  ao centro  $O$  for igual a  $c$  e o parâmetro  $PL = p$ , a condição de Apolônio pode ser traduzida pela equação

$$(a - c)(a + c) = \frac{1}{4} \cdot 2ap \quad \text{ou} \quad a^2 - c^2 = \frac{pa}{2}.$$

Dada essa definição, Apolônio apresenta, então, uma série de proposições que dão origem ao resultado bem conhecido de que **as retas que passam por um ponto qualquer da elipse, ligando esse ponto aos focos formam ângulos iguais com a reta tangente nesse ponto** ([6], p. 234).

Embora Apolônio tenha apresentado um resultado semelhante para hipérbole, ele não trabalhou com as propriedades do foco da parábola, talvez porque tivesse discutido estas em um trabalho que hoje esteja perdido. De qualquer forma, a propriedade análoga para uma parábola, que qualquer reta do foco ao ponto sobre a parábola faz um ângulo com a tangente naquele ponto igual a um feito por uma reta paralela ao eixo, foi provavelmente provado primeiramente pelo Diocles (240-180 a.C.) um contemporâneo



de Apolônio, num tratado *Sobre os espelhos flamejantes*, talvez escrito um pouco antes das *Cônicas*. Foi devido a propriedade da reflexão da parábola que dá nome a este tratado. O problema de encontrar uma superfície espelhada de forma que quando a mesma fosse exposta ao sol, os raios refletidos por ela se encontrasse em um ponto causando, assim, queimadura. Diocles mostrou que isto deveria ser verdade para um parabolóide de revolução. Há relatos sobre Arquimedes e outros que tal espelho foi usado para incendiar navios inimigos. Porém não há nenhuma evidência fidedigna para a veracidade destas narrativas.

Diocles mostrou como construir uma parábola usando a propriedade foco-diretriz. Não há referências anteriores desta propriedade particular de uma parábola, embora seja discutido no comentário de Pappus no século IV. Pappus também observou que uma elipse é determinada como o lugar geométrico dos pontos cuja razão das distâncias a um ponto fixado (o foco) e a reta fixada (a diretriz) é uma constante menor que 1, enquanto que para a hipérbole esta razão era maior que 1. Estas propriedades provavelmente também foram descobertas na época de Diocles e Apolônio.

Nas *Cônicas*, porém, havia somente a propriedade dos dois focos da elipse e hipérbole. A proposição III-51 estabelece uma definição para a hipérbole isto é, se traçar um segmento de reta de um ponto arbitrário para cada foco, “o maior dos segmentos de reta excede o menor em um valor constante e igual ao eixo dessa curva.” A proposição III - 52 mostra que numa elipse, a soma destes dois segmentos de reta são iguais ao eixo maior. Em outras palavras, se P é um ponto da curva e D, E são os dois pontos do foco, então  $PD - PE = 2a$  para a hipérbole e  $PD + PE = 2a$  para a elipse. Estas propriedades são, de fato, usadas na definição destas duas curvas atualmente.

## Parte II


## Cônicas

## 4 Introdução às cônicas

Passaremos agora ao estudo da elipse, hipérbole e parábola. Trataremos cada uma das cônicas separadamente. Todos capítulos foram divididos em dois tratamentos: um geométrico e outro analítico. Com isso, as propriedades geométricas destas curvas apresentadas no primeiro tratamento serão novamente estudadas sob o ponto de vista algébrico. Este tipo de abordagem para estes capítulos objetiva uma melhor compreensão das definições e propriedades destas curvas.

No tratamento geométrico, serão apresentados dois métodos para traçar as curvas. O primeiro deles utiliza instrumentos com fio esticados criado por Kepler (1571 – 1630) descrito em sua obra *Ad Vitellionem Paralipomena*. Este método simples de traçar estas curvas permite esboçar o lugar geométrico por elas determinadas. Com isto, pode-se estabelecer os principais elementos geométricos das cônicas no plano e analisar as propriedades de simetria das mesmas. O segundo método, usando régua e compasso é importante para obtenção dos resultados relacionados à reta tangente a estas curvas. Tais resultados são novamente abordados numa linguagem algébrica após a obtenção da equação reduzida de cada curva no tratamento analítico. As propriedades da reta tangente apresentadas justificam matematicamente as propriedades de reflexão das cônicas na parte de aplicações.

No último capítulo define-se as três curvas em termos do foco e a reta diretriz. Esta definição permite a discussão sobre o conceito de excentricidade das cônicas e sua relação com a forma destas curvas. Esta maneira unificada de tratar as cônicas permite defini-las usando coordenadas polares que é de suma importância para aplicação em Mecânica Celeste.

Em todos os capítulos desta segunda parte, após algumas demonstrações, aparecerá o símbolo  indicando que o leitor deve acessar o CD-ROM com as construções feitas no GEOGEBRA. Estas construções foram organizadas por capítulos e caso o leitor opte por ler a dissertação através do computador, basta clicar sobre a construção desejada no texto.

# 5 Elipse

## 5.1 Um Tratamento Geométrico

**Definição 5.1.** *Elipse é o lugar geométrico dos pontos para os quais a soma das distâncias a dois pontos distintos fixados é igual a uma constante, maior que a distância entre esses pontos.*

### 5.1.1 Construção da elipse usando um fio inextensível

Com base na definição 5.1, o lugar geométrico dos pontos de uma elipse pode ser esboçado da seguinte forma:

1. Marque dois pontos distintos quaisquer em um plano;
2. Tome um fio inextensível de comprimento maior que a distância entre os dois pontos marcados e fixe cada uma de suas extremidades nesses pontos;
3. Com a ponta do lápis estenda o fio no plano mantendo-o sempre estendido ao máximo e então movimente o lápis de um lado para outro.

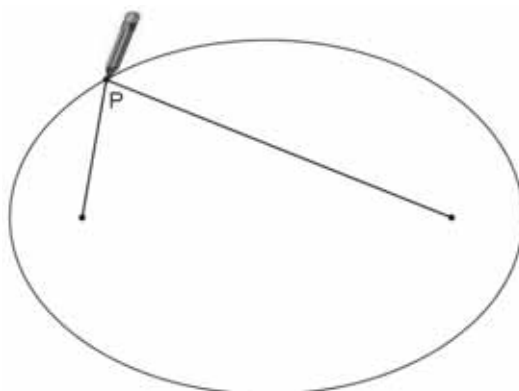


Figura 5.1: Construção da elipse usando um fio inextensível.

Assim, determina-se uma curva fechada no plano na qual observa-se facilmente que todo ponto  $P$  dessa curva satisfaz a definição 5.1 da elipse, pois a soma das distâncias

de  $P$  aos dois pontos inicialmente fixados é igual ao comprimento do fio, que é um valor constante e maior que a distância entre esses dois pontos. Os dois pontos inicialmente fixados serão denominados de **focos** da elipse e o segmento determinado por eles de **segmento focal**.

## 5.1.2 Simetrias da elipse

### 5.1.2.1 Eixos de Simetria

**Propriedade 5.1.** Toda elipse admite dois eixos (ou retas) de simetria: a reta suporte do segmento focal e a mediatriz deste segmento.

*Demonstração.* Considere  $F_1$  e  $F_2$  os focos da elipse. Seja  $r$  a reta suporte do segmento focal e  $s$  a mediatriz deste segmento. Dado um ponto qualquer pertencente à elipse pretende-se mostrar que seu simétrico em relação a essas retas também pertencem à elipse.

#### (1) Simetria em relação à reta $r$

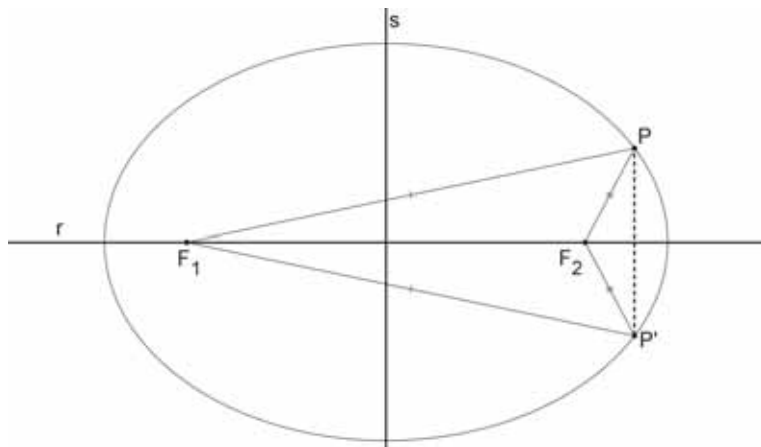


Figura 5.2: Simetria da elipse em relação à reta  $r$ .

Seja  $P$  um ponto qualquer da elipse. Pela definição 5.1 tem-se que,

$$PF_1 + PF_2 = k \quad (5.1)$$

onde  $k$  é um valor constante e maior que  $F_1F_2$ , ou seja,  $k > F_1F_2$ .

Seja  $P'$  a reflexão do ponto  $P$  em relação à reta  $r$ . Então, pela definição 2.2,  $r$  é mediatriz de  $PP'$ . Como  $F_1$  e  $F_2$  pertencem a  $r$ , pela definição 2.1

$$F_1P' = F_1P \quad \text{e} \quad F_2P' = F_2P$$

Somando os dois membros da igualdade obtém-se

$$F_1P' + F_2P' = F_1P + F_2P. \quad (5.2)$$

Segue das equações (5.1) e (5.2) que

$$P'F_1 + P'F_2 = k$$

Portanto,  $P'$  também pertence à elipse.

(2) **Simetria em relação à reta  $s$**

Considere  $P$  um ponto pertencente à elipse e  $P'$  seu simétrico em relação à reta  $s$ . Tem-se os seguintes casos:

(a) Se  $PP' = F_1F_2$

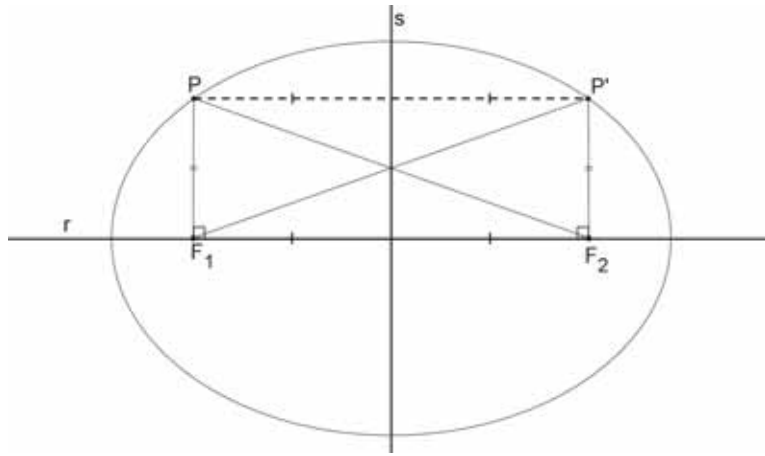


Figura 5.3: Simetria da elipse em relação à reta  $s$ .

Como a reta  $s$  é mediatriz dos segmentos  $PP'$  e  $F_1F_2$ , então,  $PP' \parallel F_1F_2$  e o quadrilátero  $F_1PP'F_2$  é um retângulo. Seguem as propriedades:

- Como  $PF_1 \parallel P'F_2$ , então  $PF_1 = P'F_2$ .
- Como  $PF_2$  e  $P'F_1$  são diagonais do retângulo  $F_1PP'F_2$ , então  $PF_2 = P'F_1$ .

Segue que  $PF_1 + PF_2 = P'F_1 + P'F_2 = k$ . Então,  $P'$  pertence à elipse.

(b) Se  $PP' < F_1F_2$  ou  $PP' > F_1F_2$

Seja  $P_1$  a projeção ortogonal de  $P$  sobre a reta  $r$  e  $P_2$  a projeção de  $P'$  sobre essa mesma reta, como mostra a figura 5.4 ( Caso  $PP' < F_1F_2$ ).

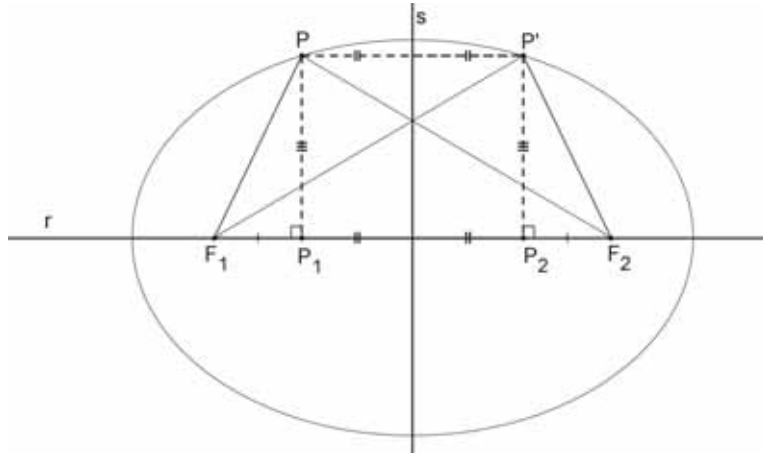


Figura 5.4: Simetria em relação à reta  $s$ .

Sendo assim, tem-se que os triângulos  $\triangle PP_1F_1$  e  $\triangle P'P_2F_2$  são retângulos em  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente. Tem-se ainda que  $PP_1 = P'P_2$  e  $P_1F_1 = P_2F_2$ . Então, pelo caso de congruência lado-ângulo-lado ( $LAL$ ) segue que  $\triangle PP_1F_1 \cong \triangle P'P_2F_2$ . Logo,  $m(\widehat{PF_1P_1}) \cong m(\widehat{P'F_2P_2})$  e

$$PF_1 = P'F_2 \quad (5.3)$$

Por outro lado, pelo caso de congruência  $LAL$  segue que  $\triangle PF_1F_2 \cong \triangle P'F_1F_2$ . Então,

$$PF_2 = P'F_1. \quad (5.4)$$

Somando ambos os membros das equações (5.3) e (5.4) e pela equação (5.1) conclui-se que

$$k = PF_1 + PF_2 = P'F_1 + P'F_2$$

Portanto,  $P'$  pertence à elipse.

□

### 5.1.2.2 Centro de Simetria

O **centro de simetria** de uma elipse é um ponto  $O$  determinado pela interseção de seus eixos de simetria.

**Propriedade 5.2.** Toda reta que passa por  $O$  intercepta a elipse num ponto  $P$  e no seu simétrico  $P'$  em relação a  $O$  tal que  $O$  é o ponto médio de  $PP'$ .

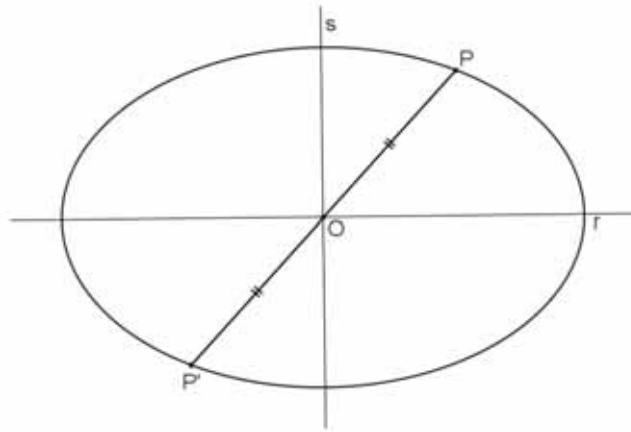


Figura 5.5: Centro de simetria.

*Demonstração.* Seja  $P$  um ponto qualquer da elipse e  $P'$  o seu simétrico em relação ao centro  $O$  dessa curva. Então,  $O$  é simultaneamente ponto médio de  $PP'$  e de  $F_1F_2$ . Sendo assim, o quadrilátero  $PF_1P'F_2$  é um paralelogramo, pois suas diagonais interceptam-se em seus pontos médios conforme mostra a figura 5.6.

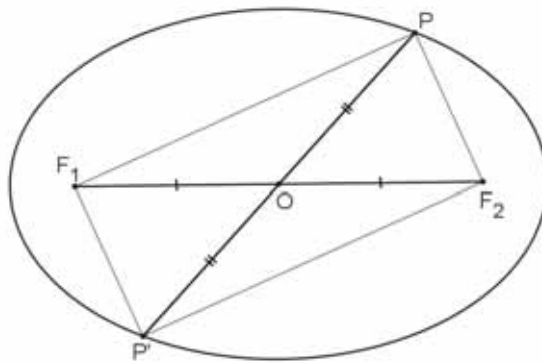


Figura 5.6: Centro de simetria.

Sabe-se que em todo paralelogramo os lados opostos são congruentes, então,

$$F_1P' = F_2P \text{ e } F_2P' = F_1P.$$

Somando essas igualdades membro a membro, tem-se

$$F_1P' + F_2P' = F_1P + F_2P \tag{5.5}$$

Por hipótese,  $P$  pertence à elipse. Então,

$$F_1P + F_2P = k. \tag{5.6}$$

Portanto, das equações (5.5) e (5.6),

$$F_1P' + F_2P' = k,$$

ou seja,  $P'$  pertence à elipse. □



### 5.1.3 Elementos da elipse

A partir da construção da elipse usando fio inextensível e de sua propriedade de simetria é possível estabelecer uma nomenclatura para alguns de seus elementos. Assim, os quatro pontos de interseção da elipse com seus eixos de simetria serão chamados **vértices**. Os dois segmentos, determinados pelo par de vértices não consecutivos, possuem comprimentos diferentes. Eles podem ser classificados em **eixo maior** e **eixo menor** da elipse conforme será mostrado a seguir.

Sejam  $A_1$  e  $A_2$  vértices da elipse sobre o eixo de simetria que contém os focos  $F_1$  e  $F_2$  e  $a = \text{constante}$  tal que  $PF_1 + PF_2 = 2a$ . Como  $A_1$  pertence à elipse tem-se que:

$$A_1F_1 + A_1F_2 = 2a \quad (5.7)$$

Por outro lado, os pares  $A_1, A_2$  e  $F_1, F_2$  são simétricos em relação à origem  $O$  conforme mostra a figura 5.7.

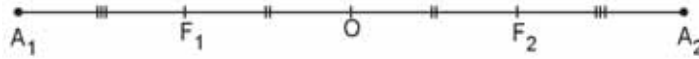


Figura 5.7: Vértices da elipse pertencente ao segmento focal.

Assim,

$$A_1O = A_2O \text{ e } F_1O = F_2O \quad (5.8)$$

e como,  $A_1F_1 = A_1O - F_1O$  e  $A_2F_2 = A_2O - F_2O$ , segue utilizando (5.8) que  $A_1F_1 = A_2F_2$ . Substituindo na equação (5.7) tem-se que:

$$A_2F_2 + A_1F_2 = 2a$$

Portanto,  $A_1A_2 = 2a$ . **O segmento que contém dois vértices da elipse e que passa pelos focos tem comprimento igual a  $2a$ .**

Sejam  $B_1$  e  $B_2$  os vértices que estão sobre a reta  $s$ . Como  $s$  é mediatriz do segmento  $F_1F_2$  tem-se que:

$$B_1F_1 = B_1F_2. \quad (5.9)$$

Como  $B_1$  pertence à elipse, tem-se

$$B_1F_1 + B_1F_2 = 2a. \quad (5.10)$$

Das igualdades (5.9) e (5.10), conclui-se que:  $B_1F_1 = a$  e  $B_1F_2 = a$ .

Mas o triângulo  $\Delta B_1OF_2$  é retângulo em  $O$  com hipotenusa de comprimento  $a$ . Observe a figura 5.8.

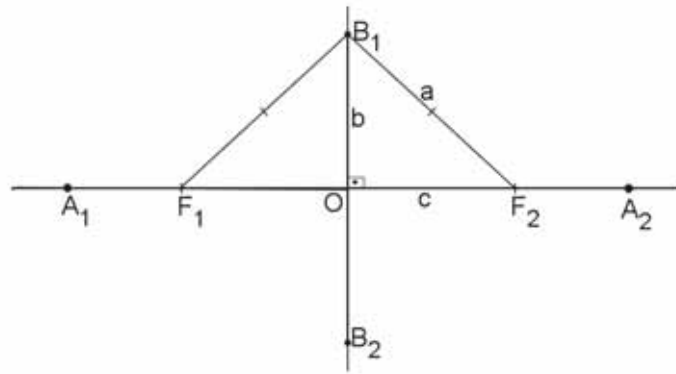
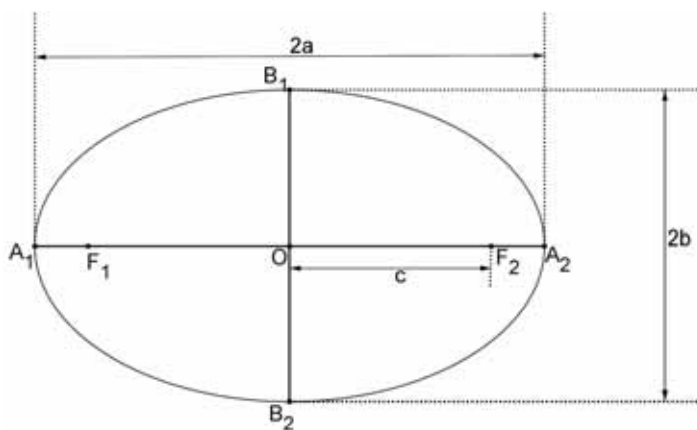


Figura 5.8: Vértices da elipse pertencentes à mediatriz do segmento focal.

Definindo  $OB_1 = b$  e  $OF_2 = c$ , então, pelo Teorema de Pitágoras tem-se que

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Segue que  $a > b$ . Consequentemente,  $A_1A_2 > B_1B_2$ . O eixo  $A_1A_2$  será denominado **eixo maior** da elipse e  $B_1B_2$  o **eixo menor**.



**Centro:**  $O$

**Focos:**  $F_1$  e  $F_2$

**Segmento focal:**  $F_1F_2$

**Distância focal:**  $2c$

**Vértices:**  $A_1, A_2, B_1$  e  $B_2$

**Eixo maior:**  $A_1A_2 = 2a$

**Eixo menor:**  $B_1B_2 = 2b$

Figura 5.9: Elementos da elipse

#### 5.1.4 Determinação dos pontos de uma elipse usando régua e compasso

Usando régua e compasso é possível obter pontos de uma elipse a partir do seguinte procedimento:

1. Marque dois pontos  $F_1$  e  $F_2$  distintos num plano;
2. Trace uma semi-reta de origem em  $F_1$  e que passe por  $F_2$ ;
3. Marque um ponto  $A$  na semi-reta  $F_1F_2$  não pertencente ao segmento  $F_1F_2$ ;

4. Com o auxílio do compasso, trace uma circunferência de centro  $F_1$  e raio  $F_1A$ . Defina  $F_1A = 2a$ ;
5. Escolha um ponto  $D$  qualquer sobre a circunferência e trace uma reta  $s$  passando pelos pontos  $F_1$  e  $D$ ;
6. Trace o segmento  $F_2D$ ;
7. Trace a mediatriz  $t$  do segmento  $F_2D$  e chame de  $B$  a interseção entre eles;
8. Considere  $P$  a interseção da mediatriz  $t$  com a reta  $s$ .

$P$  é um ponto da elipse com focos  $F_1$  e  $F_2$  conforme a demonstração abaixo.

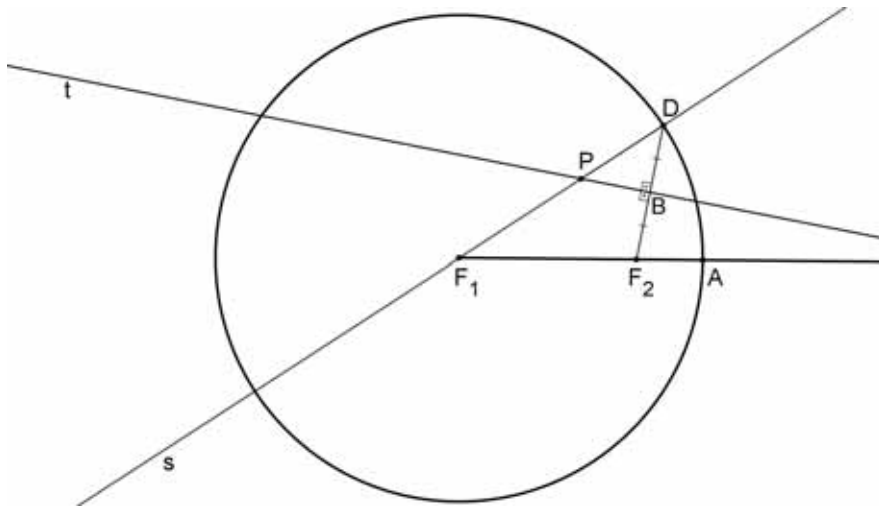


Figura 5.10: Construção por régua e compasso.

*Demonstração.* Pela construção tem-se que  $t$  é mediatriz do segmento  $F_2D$  e que  $P$  pertence a  $t$ . Logo, pela propriedade da mediatriz de um segmento,  $PF_2 = PD$ . Por outro lado, observa-se que  $F_1D = F_1P + PD = F_1P + PF_2$ . Mas  $F_1D = 2a$ , pois o segmento  $F_1D$  é o raio da circunferência. Portanto,  $F_1P + PF_2 = 2a$  para qualquer  $D$  escolhido sobre essa circunferência. Pela construção dada anteriormente, tem-se que o raio de medida igual a  $2a$  é maior que a distância entre  $F_1$  e  $F_2$ . Então, pela definição 5.1, o ponto  $P$  pertence à elipse de focos  $F_1$  e  $F_2$ .  $\square$

Para obter todos os pontos  $P$  da elipse basta repetir o procedimento escolhendo diferentes posições de  $D$  sobre a circunferência. Assim, quando  $D$  percorrer toda a circunferência de maneira dinâmica, o lugar geométrico determinado pelos pontos  $P$  será uma elipse de focos  $F_1$  e  $F_2$  conforme ilustra a figura 5.11.

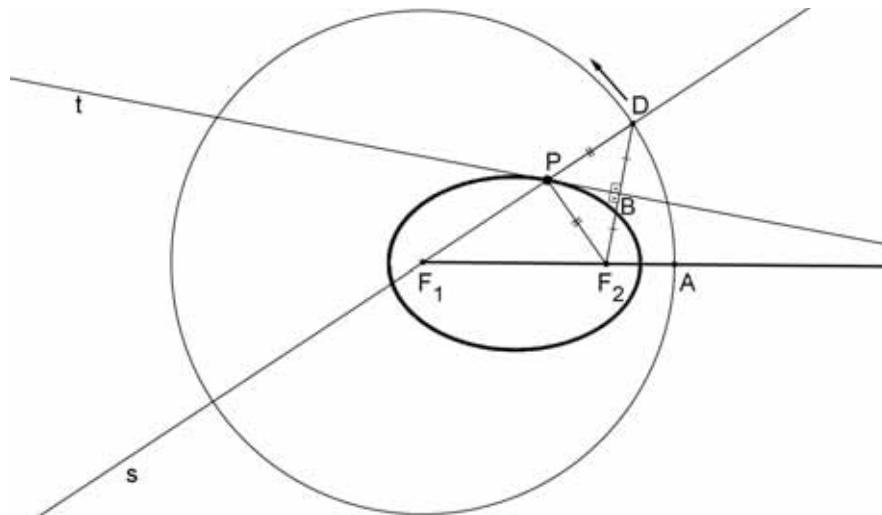




Figura 5.11: Construção por régua e compasso.

 Veja a construção A.2.1.1 no Apêndice.

 Veja a construção A.2.1.2 no Apêndice.

### 5.1.5 Regiões do plano determinadas pela elipse e reta tangente

Considerando  $F_1$  e  $F_2$  os focos da elipse e  $2a$  um valor real positivo maior que o comprimento do segmento  $F_1F_2$ , sabe-se que se  $P$  pertencer à elipse, então,  $PF_1 + PF_2 = 2a$ . Desta forma, a elipse separa os demais pontos do plano em duas regiões:

- (1) **Região focal** ( $R_f$ ) onde cada ponto  $P$  satisfaz  $PF_1 + PF_2 < 2a$
- (2) **Região não focal** ( $R_{nf}$ ) onde cada ponto  $P$  satisfaz  $PF_1 + PF_2 > 2a$

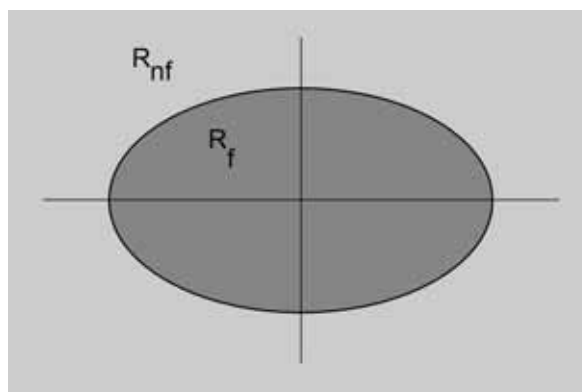


Figura 5.12: Regiões do plano determinadas pela elipse.

**Definição 5.2.** *Uma reta  $t$  é tangente à elipse num ponto  $P$  se, e somente se, nenhum ponto desta reta menos o ponto  $P$ , pertencer à região focal desta curva, ou seja, a reta  $t$  menos o ponto  $P$  está totalmente contida na região não focal da elipse.*

### 5.1.6 Consequências da construção por régua e compasso

Pela análise da construção dada por régua e compasso na seção 5.1.4 pode-se afirmar que:

**Propriedade 5.3.** A reta  $t$  mediatriz do segmento  $F_2D$  é tangente à elipse no ponto  $P$ .

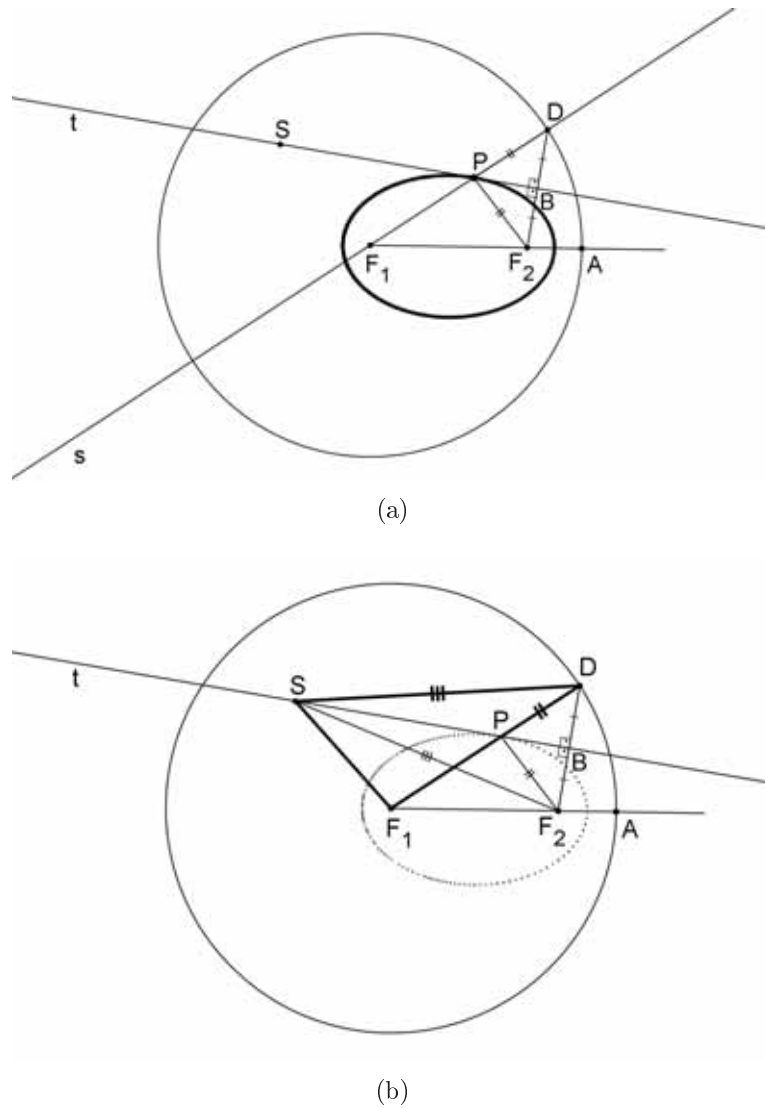


Figura 5.13: Ponto qualquer  $S$  de  $t$  distinto de  $P$ .

*Demonstração.* Tem-se que o ponto  $P$  da elipse pertence à reta  $t$ . Então, precisa-se mostrar que os demais pontos de  $t$  pertencem a região não focal desta curva. Seja  $S$  um ponto qualquer distinto de  $P$  sobre a reta  $t$ . Como  $t$  é mediatriz do segmento  $DF_2$ , então,  $SF_2 = SD$ . Segue que,  $SF_1 + SF_2 = SF_1 + SD$ .

Pela desigualdade triangular aplicada ao triângulo  $\Delta F_1SD$  tem-se que

$$SF_1 + SD > F_1D$$

$$SF_1 + SF_2 > 2a$$

Assim, pela definição dada na seção 5.1.5, o ponto  $S$  pertence à região não focal da elipse. Portanto, pela definição 5.2, a reta  $t$  é tangente à elipse em  $P$ .  $\square$

**Propriedade 5.4.** A reta tangente  $t$  à elipse num ponto  $P$  forma ângulos iguais com os segmentos do ponto  $P$  aos focos, ou seja, com  $PF_1$  e  $PF_2$ .

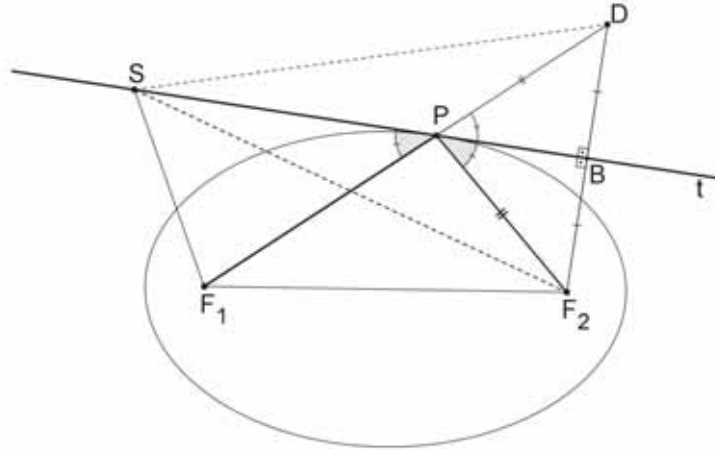


Figura 5.14: Propriedade da reta  $t$  tangente à elipse.

*Demonstração.* Considere  $\widehat{SPF_1}$  e  $\widehat{BPF_2}$  os ângulos determinados pela reta  $t$  com os segmentos  $PF_1$  e  $PF_2$ , respectivamente. No triângulo  $\Delta PF_2D$ , a reta  $t$  é mediatriz do lado  $F_2D$  no ponto  $B$  e passa pelo vértice  $P$ . Então, a altura  $PB$  do triângulo  $\Delta PF_2D$  é bissetriz do ângulo  $F_2\widehat{P}D$ . Logo, os ângulos  $F_2\widehat{P}B$  e  $B\widehat{P}D$  são congruentes. Como os ângulos  $B\widehat{P}D$  e  $F_1\widehat{P}S$  são opostos pelo vértice, prova-se que  $F_1\widehat{P}S \cong F_2\widehat{P}B$ .  $\square$



Veja a construção A.2.1.3 no Apêndice.

**Propriedade 5.5.** A reta normal a um ponto  $P$  da elipse é bissetriz do ângulo  $F_1\widehat{P}F_2$ .

*Demonstração.* Esse resultado é consequência da propriedade (5.4). De fato, como a tangente no ponto  $P$  da elipse forma ângulos congruentes com os segmentos  $PF_1$  e  $PF_2$ , a reta normal que passa por  $P$  divide o ângulo  $F_1\widehat{P}F_2$  em dois ângulos de mesma medida.  $\square$

## 5.2 Um Tratamento Analítico

**Definição 5.3.** Sejam  $F_1$  e  $F_2$  pontos distintos no plano  $\pi$ ,  $2c > 0$  a distância entre eles. Seja  $a$  um número real tal que  $a > c$ . O lugar geométrico  $\mathcal{E}$  determinado pelos pontos  $X$  de coordenadas cartesianas  $(x, y)$  tais que  $d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a$  denomina-se **elipse**, onde  $d$  representa distância euclidiana entre os pontos do plano. Os pontos  $F_1$  e  $F_2$  são chamados de **focos** da elipse. O segmento  $F_1F_2$  é chamado de **segmento focal** e seu ponto médio de **centro** da elipse. O valor  $2c$  é chamado **distância focal**.

### 5.2.1 Equação reduzida

A equação reduzida da elipse  $\mathcal{E}$  será deduzida sobre um sistema ortogonal de coordenadas onde os focos pertençam ao eixo  $Ox$  para simplificar os cálculos. Assim, sejam  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$  como mostra a figura 5.15

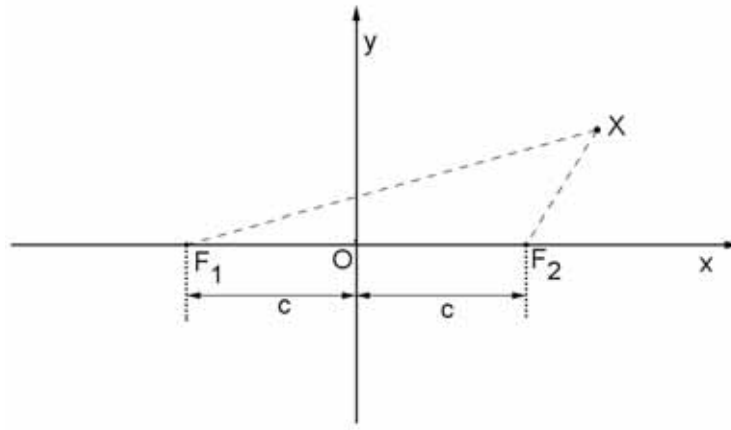


Figura 5.15: Ponto da elipse no sistema ortogonal de coordenadas.

De acordo com a definição 5.3, o ponto  $X = (x, y)$  pertence à elipse, se e somente se,  $d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a$ , ou seja,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a, \quad (5.11)$$

ou ainda,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \quad (5.12)$$

Elevando ambos os membros da equação (5.12) ao quadrado, obtém-se

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad (5.13)$$

Expandindo os quadrados e simplificando segue que

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx, \quad (5.14)$$

Elevando ao quadrado ambos os membros e expandindo os quadrados novamente, tem-se

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2. \quad (5.15)$$

Logo, agrupando os termos em  $x^2$  e  $y^2$ , obtém-se

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \quad (5.16)$$

Assim, definindo  $a^2 - c^2 = b^2$ , a equação (5.16) pode ser reescrita como

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad (5.17)$$

Dividindo ambos os membros da igualdade (5.17) por  $a^2b^2$  resulta

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (5.18)$$

Observa-se que a equação (5.18) foi obtida de (5.11) elevando duas vezes os radicais ao quadrado. Desta forma, para garantir que (5.18) é a equação da elipse para o sistema considerado, é importante mostrar que partindo-se dela chega-se a (5.11). Para isso adota-se o procedimento a seguir.

Suponha que  $X = (x, y)$  seja um ponto que satisfaça (5.18). Efetuando as operações anteriores no sentido inverso, obtém-se de (5.18), sem nenhum problema, a equação (5.16) e depois a igualdade (5.15), que agora será reescrita da forma:

$$a^2[(x - c)^2 + y^2] = (a^2 - cx)^2,$$

Extraindo a raiz quadrada dos dois membros dessa igualdade tem-se

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = |(a^2 - cx)| \quad (5.19)$$

Observa-se que pela equação (5.18),  $|x| \leq a$  e como  $c < a$ , tem-se  $|cx| < a^2$ . Logo, o número  $a^2 - cx$  é positivo. Assim, o segundo membro da equação (5.19) será  $a^2 - cx$ . Desse modo, obtém-se a equação (5.14) da qual, em seguida, obtém-se a igualdade (5.13). Essa última igualdade pode ser escrita na forma

$$(x + c)^2 + y^2 = [2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}]^2.$$

Tem-se que

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \left| [2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}] \right| \quad (5.20)$$

Analisando o valor do radicando no segundo membro, ou seja,

$$(x - c)^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2. \quad (5.21)$$



Pela igualdade (5.18), tem-se que  $x^2 \leq a^2$ . Como  $|cx| < a^2$ , o número  $-2cx$  é, em seu valor absoluto, menor que  $2a^2$ . Da igualdade (5.18) deduz que  $y^2 \leq b^2$ , ou seja,  $y^2 \leq a^2 - c^2$ . Então,  $c^2 + y^2 \leq a^2$ . Segue que toda a soma do segundo membro de (5.21) é menor que  $4a^2$ . Consequentemente, a raiz quadrada desta soma é menor que  $2a$ . Assim, o valor exibido entre módulo no segundo membro de (5.20) será positivo. Desse modo, obtém-se

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

de onde imediatamente se deduz a igualdade (5.11).

Assim, fica demonstrado que (5.18) é a equação da elipse.

**Observação 5.1.** Pode-se escolher um sistema de coordenadas cartesianas tal que o segmento focal da elipse se posiciona sobre o eixo  $Oy$  conforme mostra a figura 5.16. Neste caso, a equação da elipse será  $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ . O processo para determinar esta

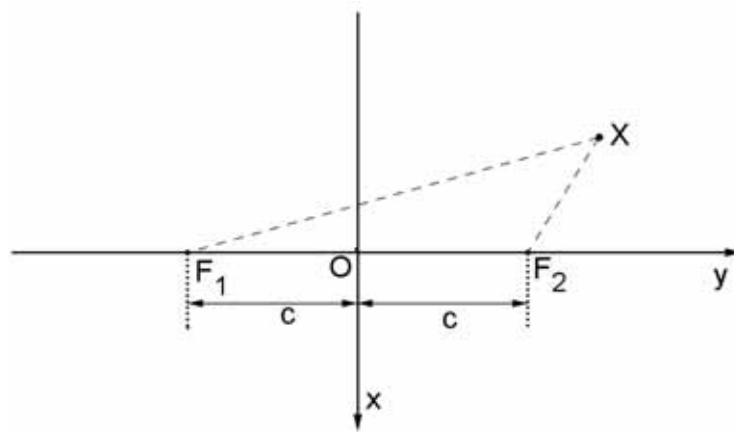


Figura 5.16: Ponto da elipse no sistema ortogonal de coordenadas com os focos sobre o eixo  $y$ .

equação é análogo ao que foi feito anteriormente.

## 5.2.2 Caracterização do esboço da elipse

Como foi apresentado na seção 5.1 pode-se desenhar uma elipse usando artifícios puramente geométricos. Pretende-se mostrar, nesta seção, uma análise da equação (5.18) da qual pode-se inferir algumas características sobre o esboço da curva que a representa. Esta análise contemplará basicamente o significado geométrico dos elementos principais dessa equação que são  $a$  e  $b$ , bem como a propriedade de simetria desta curva.

### 5.2.2.1 Análise dos parâmetros $a$ e $b$ na equação reduzida da elipse

Da equação  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  obtém-se que  $x^2 \leq a^2$  e  $y^2 \leq b^2$ , isto é,  $-a \leq x \leq a$  e  $-b \leq y \leq b$ . Desta forma, o conjunto de pontos de uma elipse estão contidos no

retângulo  $-a \leq x \leq a$  e  $-b \leq y \leq b$  chamado de **retângulo fundamental** como ilustrado na figura 5.17 (a).

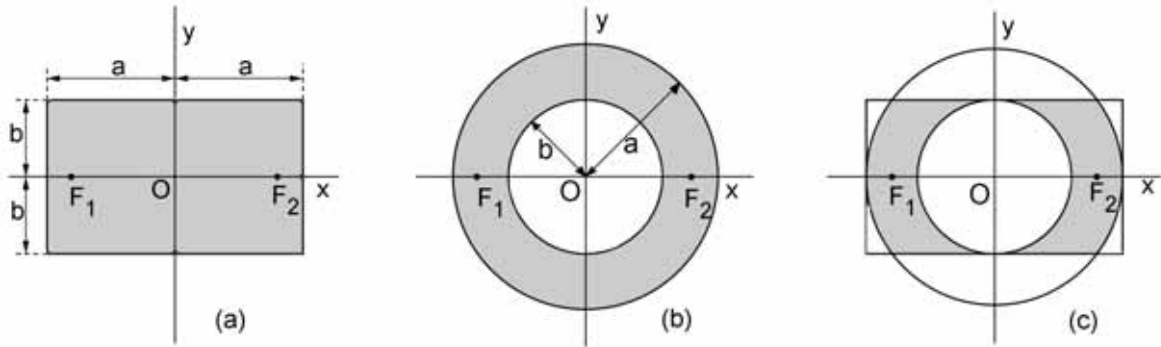


Figura 5.17: Propriedades dos parâmetros geométricos da elipse.

Partindo-se da equação (5.18) e da desigualdade  $a \geq b$  tem-se que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Isto é,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \leq 1 \leq \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

De onde conclui-se que

$$b^2 \leq x^2 + y^2 \leq a^2.$$

Com isso, o conjunto de pontos da elipse estão também contidos na coroa circular de raios  $a$  e  $b$  chamada de **coroa fundamental** conforme mostra a figura 5.17 (b)

Observa-se que a partir dos elementos  $a$  e  $b$  da equação da elipse pode-se determinar uma região no plano cartesiano onde estão contidos todos os pontos desta curva. Esta região é delimitada pela interseção das áreas do retângulo fundamental com a coroa fundamental como mostra a figura 5.17 (c). Vê-se por essa mesma figura, que a elipse dada por sua equação canônica intercepta o eixo  $Oy$  nos pontos  $(0, b)$  e  $(0, -b)$ . Uma melhor análise da interseção dessa curva com os eixos  $Ox$  e  $Oy$  pode ser obtida da seguinte forma:

- $(x, 0)$  satisfaz a equação (5.18) se, e somente se  $x = -a$  ou  $x = a$
- $(0, y)$  satisfaz a equação (5.18) se, e somente se  $y = -b$  ou  $y = b$
- $A_1 = (-a, 0)$  e  $A_2 = (a, 0)$  são os pontos de interseção da elipse com eixo  $Ox$  (eixo focal) e  $B_1 = (0, -b)$  e  $B_2 = (0, b)$  com o eixo  $Oy$  (mediatriz do eixo focal).
- Como os focos considerados foram  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$  nota-se, ainda, que a distância deles aos pontos  $B_1$  e  $B_2$  é igual a  $a$ , pois  $d(B_i, F_j) = \sqrt{c^2 + b^2} = a$ , para  $i, j = 1, 2$ . Além disso, não existe uma circunferência que contenha os pontos  $A_1, A_2, B_1$  e  $B_2$  pois  $a > b$ . Então, pode-se afirmar que a elipse não é uma circunferência nem o conjunto vazio.

### 5.2.2.2 Simetria da elipse

Observa-se que se  $X = (x, y)$  é solução de (5.18) os pontos  $(-x, -y)$ ,  $(x, -y)$  e  $(-x, y)$  também serão, pois os expoentes dessa equação são pares. Então, para todo  $X = (x, y)$  da elipse, seus simétricos em relação a  $O$ ,  $Ox$  e a  $Oy$  pertencerão a esta curva. Assim, a elipse é simétrica em relação à reta focal  $Ox$ , à mediatriz do segmento focal  $Oy$  e ao centro  $O$ .

### 5.2.3 Retas tangentes e retas normais à elipse

As retas tangentes à elipse são exatamente as retas que a interceptam em apenas um ponto como mostra a figura 5.18.

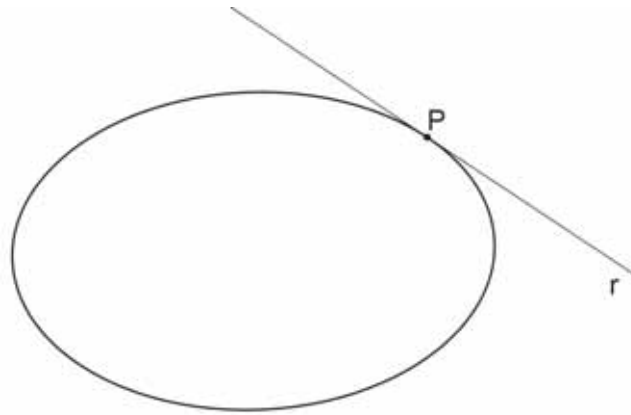


Figura 5.18: Reta tangente à elipse em  $P$ .

**Definição 5.4.** *Seja  $r$  uma reta e  $\mathcal{E}$  uma elipse:*

- (a)  *$r$  é tangente a  $\mathcal{E}$  se  $r \cap \mathcal{E}$  contém apenas um ponto  $P_1$  chamado ponto de tangência.*
- (b) *Se  $r$  é tangente a  $\mathcal{E}$ , em  $P_1$ , a reta que contém  $P_1$  e é perpendicular a  $r$  chama-se reta normal a  $\mathcal{E}$  em  $P_1$ .*

Para obter a equação da reta  $r$ , tangente à elipse dada pela equação (5.18), no ponto  $P_1 = (x_1, y_1)$  será considerada as seguintes possibilidades:

- (1) **O ponto  $P_1 = (x_1, y_1)$  pertencente a  $\mathcal{E}$  encontra-se sobre o eixo  $Ox$ , ou seja,  $y_1 = 0$ .**

Como  $P_1 = (x_1, 0)$  pertence a  $\mathcal{E}$ , pela equação (5.18) chega-se que  $x_1 = -a$  ou  $x_1 = a$ . Assim, a reta  $r$  tangente a  $\mathcal{E}$  no ponto  $P_1 = (x_1, 0)$  é definida como a reta perpendicular ao eixo  $Ox$ , ou seja, de equação

$$\begin{cases} r : x = -a \\ \text{ou} \\ r : x = a. \end{cases}$$

- (2) O ponto  $P_1 = (x_1, y_1)$  pertencente a  $\mathcal{E}$  encontra-se sobre o eixo  $Oy$ , ou seja,  $x_1 = 0$ .

Como  $P_1 = (0, y_1)$  pertence a  $\mathcal{E}$ , pela equação (5.18) chega-se que  $y_1 = -b$  ou  $x_1 = b$ . Assim, a reta  $r$  tangente a  $\mathcal{E}$  no ponto  $P_1 = (0, y_1)$  é definida como a reta paralela ao eixo  $Ox$ , ou seja, de equação

$$\begin{cases} r : y = -b \\ \text{ou} \\ r : y = b. \end{cases}$$

- (3) O ponto  $P_1 = (x_1, y_1)$  pertencente a  $\mathcal{E}$  com  $y_1 \neq 0$  e  $y_1 \neq \pm b$ .

Considere o ponto  $P_1 = (x_1, y_1)$  pertencente a  $\mathcal{E}$  com  $y_1 \neq 0$  e  $y_1 \neq \pm b$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$  um outro ponto de  $\mathcal{E}$  tal que  $x_2 \neq x_1$  e  $y_2 \neq -y_1$ . Seja  $s$  a reta secante determinadas por  $P_1$  e  $P_2$  conforme ilustra a figura 5.19.

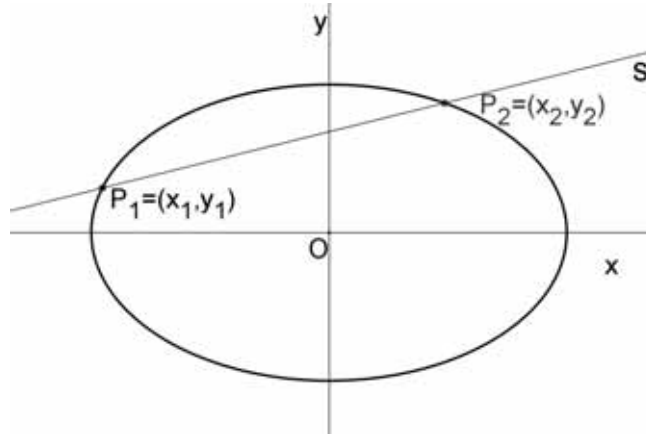


Figura 5.19: Reta secante à elipse.

Assim, a inclinação  $m_s$  da reta  $s$  pode ser obtida a partir das coordenadas de  $P_1$  e  $P_2$ . De fato,  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$  pertencem à elipse  $\mathcal{E}$  tem-se que

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad (5.22)$$

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1. \quad (5.23)$$

Subtraindo (5.22) de (5.23) obtém-se

$$\frac{(x_2^2 - x_1^2)}{a^2} + \frac{(y_2^2 - y_1^2)}{b^2} = 0$$

ou

$$\frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{a^2} + \frac{(y_2 - y_1)(y_2 + y_1)}{b^2} = 0$$

Isolando-se a razão  $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$  determina-se

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)}.$$

Assim, pelo teorema 2.1

$$m_s = -\frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)}$$

Seja  $m_t$  a inclinação da reta tangente à elipse no ponto  $P_1$ . Logo, pela definição 2.4

$$m_t = \lim_{(x_2, y_2) \rightarrow (x_1, y_1)} m_s.$$

Substituindo o valor de  $m_s$  e calculando o limite

$$\lim_{(x_2, y_2) \rightarrow (x_1, y_1)} -\frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)} = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}. \quad (5.24)$$

Pelo teorema 2.2 a equação da reta  $t$  tangente à elipse no ponto  $P_1$  é dada por

$$y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)$$

ou

$$a^2y_1y - a^2y_1^2 = -b^2x_1x + b^2x_1^2.$$

Como  $b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$  pode se escrever  $b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$  ou

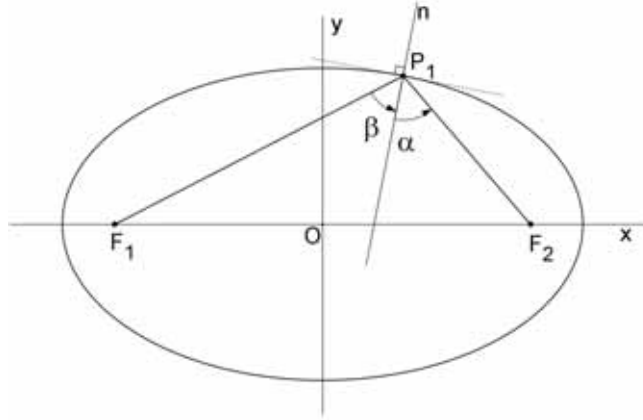
$$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$$

Uma vez determinada a inclinação da reta tangente a elipse no ponto  $P_1 = (x_1, y_1)$ , pelo teorema 2.3 inclinação  $m_n$  da reta normal  $n$  nesse ponto é  $\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$ . Assim, a equação da reta  $n$  é :

$$a^2y_1x - b^2x_1y = (a^2 - b^2)x_1y_1.$$

#### 5.2.4 Propriedade da reta normal à elipse

**Teorema 5.1.** *Sejam  $P_1$  um ponto qualquer de uma elipse,  $P_1F_1$  e  $P_1F_2$  os segmentos que ligam o ponto  $P_1$  aos focos dessa curva. A reta normal no ponto  $P_1$  é bissetriz do ângulo  $F_1\widehat{P_1}F_2$ .*

Figura 5.20: Reta  $n$  normal à elipse em  $P_1$ .

*Demonstração.* Será considerada a equação da elipse em sua forma canônica  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  e o ponto  $P_1 = (x_1, y_1)$  tal que  $y_1 \neq 0$  e  $y_1 \neq \pm b$ . Neste caso, seja  $n$  a reta normal a elipse em um ponto qualquer  $P_1 = (x_1, y_1)$  da curva. Seja  $\alpha$  o ângulo formado por  $n$  e o segmento  $P_1F_2$ , e  $\beta$  formado por  $n$  e o segmento  $P_1F_1$ . Pretende-se mostrar que  $\alpha = \beta$ . Pelo resultado da equação (5.24), a inclinação da tangente a elipse em  $P_1 = (x_1, y_1)$  é  $-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$ . Então, pelo teorema 2.3 a inclinação da reta normal  $n$  é  $\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$ . Pelo teorema 2.1 as inclinações dos segmentos  $P_1F_1$  e  $P_1F_2$  são  $\frac{y_1}{x_1 + c}$  e  $\frac{y_1}{x_1 - c}$ , respectivamente. Então, pelo teorema 2.4, resulta

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{\frac{y_1}{x_1 - c} - \frac{a^2y_1}{b^2x_1}}{1 + \left(\frac{y_1}{x_1 - c}\right)\left(\frac{a^2y_1}{b^2x_1}\right)} \right| = \left| \frac{b^2x_1y_1 - a^2x_1y_1 + a^2cy_1}{b^2x_1^2 - b^2cx_1 + a^2y_1^2} \right|$$

Como o ponto  $P_1$  esta sobre a elipse tem-se que  $b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$ . Usando esta relação e a igualdade  $c^2 = a^2 - b^2$  obtém-se

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{x_1y_1(b^2 - a^2) + a^2cy_1}{a^2b^2 - b^2cx_1} \right| = \left| \frac{-c^2x_1y_1 + a^2cy_1}{b^2(a^2 - cx_1)} \right| = \left| \frac{cy_1(-cx_1 + a^2)}{b^2(-cx_1 + a^2)} \right| = \left| \frac{cy_1}{b^2} \right|$$

Analogamente tem-se

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \left| \frac{\frac{a^2y_1}{b^2x_1} - \frac{y_1}{x_1 + c}}{1 + \left(\frac{a^2y_1}{b^2x_1}\right)\left(\frac{y_1}{x_1 + c}\right)} \right| = \left| \frac{a^2x_1y_1 + a^2cy_1 - b^2x_1y_1}{b^2x_1^2 + b^2cx_1 + a^2y_1^2} \right| = \left| \frac{x_1y_1(a^2 - b^2) + a^2cy_1}{a^2b^2 + b^2cx_1} \right| \\ &= \left| \frac{c^2x_1y_1 + a^2cy_1}{b^2(a^2 + cx_1)} \right| = \left| \frac{cy_1(cx_1 + a^2)}{b^2(cx_1 + a^2)} \right| = \left| \frac{cy_1}{b^2} \right| \end{aligned}$$

Assim,  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$  e portanto,  $\alpha = \beta$  □

# 6 Hipérbole

## 6.1 Um Tratamento Geométrico

**Definição 6.1.** *Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos para os quais a diferença das distâncias a dois pontos distintos fixados é em valor absoluto igual a uma constante, menor que a distância entre estes pontos fixados.*

### 6.1.1 Construção da hipérbole usando uma haste e um fio inextensível

1. Marque dois pontos distintos num plano;
2. Tome uma haste rígida de comprimento maior que a distância entre os pontos marcados;
3. Tome um fio inextensível de forma que seu comprimento seja menor que o comprimento da haste. É necessário que a diferença entre esses comprimentos seja menor que a distância entre os pontos fixados;
4. Prenda uma das extremidades do fio numa extremidade da haste;
5. Fixe a extremidade livre da haste em um dos pontos de forma que a mesma possa girar em torno desse ponto;
6. Fixe a extremidade livre do fio no outro ponto marcado;
7. Com a ponta do lápis aproxime o fio na lateral da haste conforme a figura 6.1;
8. Mantendo o fio sempre junto da haste rotacione-a no plano no sentido horário até que o fio fique totalmente estendido;
9. Rotacione a haste no plano no sentido contrário ao escolhido no item anterior até que o fio fique novamente estendido;
10. Execute novamente o processo a partir do item 5 só que agora fixando a extremidade da haste no outro ponto marcado.

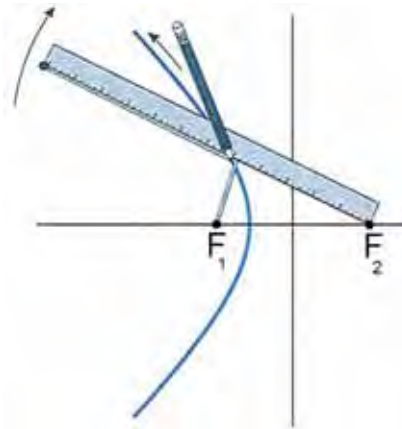


Figura 6.1: Construção da hipérbole usando uma haste e fio inextensível.

Assim, determinam-se trechos de uma curva com dois ramos nos quais observam-se que todo ponto  $P$  desses ramos satisfazem a definição 6.1 da hipérbole. De fato, a diferença entre as distâncias de  $P$  aos dois pontos inicialmente fixados é igual ao comprimento da haste menos o comprimento do fio. Veja a figura 6.2.

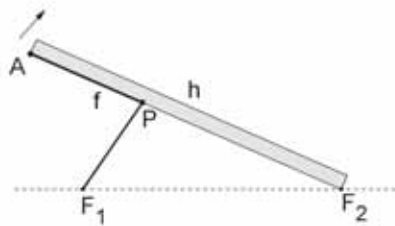


Figura 6.2: Construção da hipérbole.

Considere  $F_1$  e  $F_2$  os dois pontos inicialmente fixados,  $h$  o comprimento da haste e  $f$  o comprimento do fio que vai de  $F_1$  até  $A$ . Desta forma, para um ponto  $P$  sobre a hipérbole observa-se que  $PF_2 - PF_1 = (h - AP) - (f - AP) = h - f = \text{constante}$ .

Os pontos fixados  $F_1$  e  $F_2$  serão denominados de **focos** da hipérbole e o segmento determinado por eles de **segmento focal**.

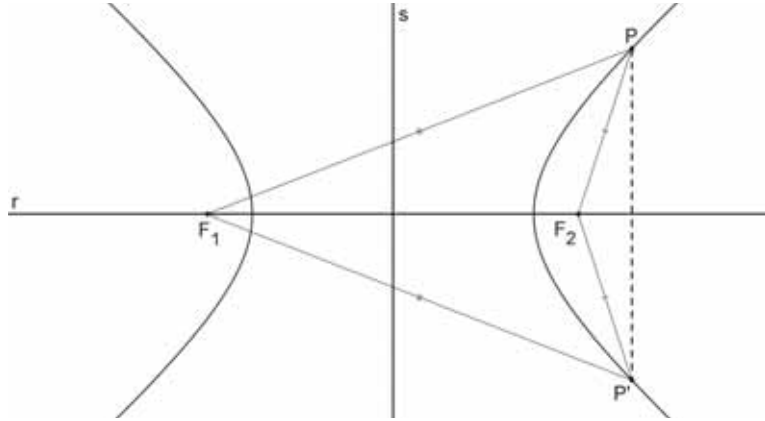
## 6.1.2 Simetrias da hipérbole

### 6.1.2.1 Eixos de simetria

**Propriedade 6.1.** Toda hipérbole admite dois eixos (ou retas) de simetria: a reta suporte do segmento focal e a mediatriz deste segmento.

*Demonstração.* Sejam  $F_1$  e  $F_2$  os focos da hipérbole. Seja  $r$  a reta que passa pelo segmento focal e  $s$  a mediatriz desse segmento. Então as retas  $r$  e  $s$  são eixos de simetria deste lugar geométrico.



Figura 6.3: Simetria da hipérbole em relação a reta  $r$ .(1) **Simetria em relação à reta  $r$** 

Seja  $P$  um ponto qualquer da hipérbole. Pela definição 6.1 tem-se que,  $|PF_1 - PF_2| = k$ , onde  $k$  é um valor constante e menor que  $F_1F_2$ . Considere  $P'$  a reflexão do ponto  $P$  em relação a reta  $r$ . Então, pela definição 2.2,  $r$  é mediatriz do segmento  $PP'$ . Como  $F_1$  e  $F_2$  pertencem a  $r$ , pela definição 2.1 tem-se que,

$$F_1P' = F_1P$$

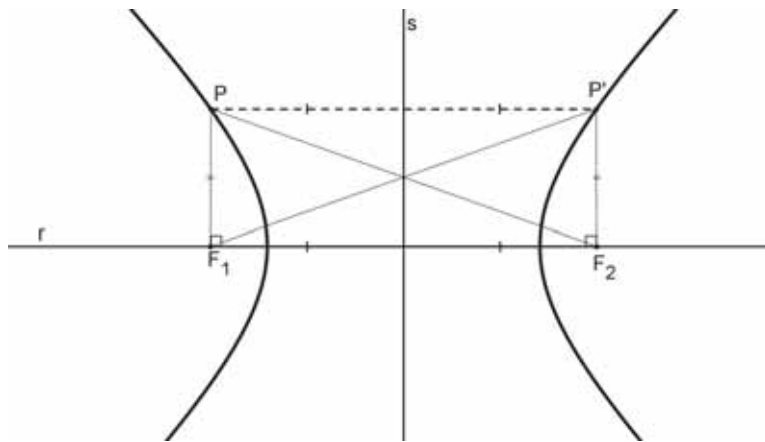
$$F_2P' = F_2P.$$

Subtraindo ambos os membros obtém-se  $|F_1P' - F_2P'| = |F_1P - F_2P| = k$ . Assim,  $P'$  também pertence à hipérbole.

(2) **Simetria em relação à reta  $s$** 

Considere  $P$  um ponto pertencente à hipérbole e  $P'$  seu simétrico em relação à reta  $s$ . Serão analisados separadamente os seguintes casos:

(a) Se  $PP' = F_1F_2$ .

Figura 6.4: Simetria da hipérbole em relação à reta  $s$ .

A reta  $s$  é mediatriz dos segmentos  $PP'$  e  $F_1F_2$ . Então,  $PP' \parallel F_1F_2$  e o quadrilátero  $F_1PP'F_2$  é um retângulo. Seguem as seguintes propriedades:

- Se  $PF_1 \parallel P'F_2$  então  $PF_1 = P'F_2$ .
- Se  $PF_2$  e  $P'F_1$  são diagonais do retângulo  $F_1PP'F_2$  então  $PF_2 = P'F_1$ .

Logo,

$$|PF_1 - PF_2| = |P'F_1 - P'F_2| = k.$$

Então,  $P'$  pertence à hipérbole.

(b) Se  $PP' < F_1F_2$  ou  $PP' > F_1F_2$

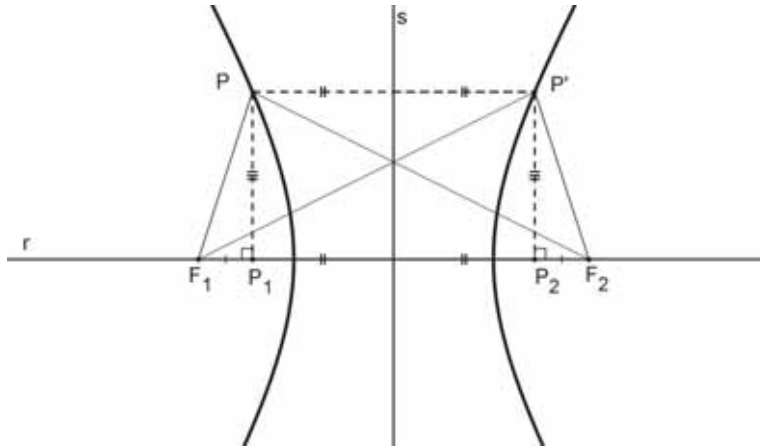


Figura 6.5: Simetria da hipérbole em relação à reta  $s$ .

Seja  $P_1$  a projeção ortogonal de  $P$  sobre a reta  $r$  e  $P_2$  a projeção de  $P'$  sobre esta mesma reta (caso  $PP' < F_1F_2$ ). Sendo assim, tem-se que os triângulos  $\Delta PP_1F_1$  e  $\Delta P'P_2F_2$  são retângulos em  $P_1$  e  $P_2$  respectivamente. Logo,  $PP_1 = P'P_2$  e  $P_1F_1 = P_2F_2$ . Então, pelo caso de congruência lado-ângulo-lado ( $LAL$ ) tem-se que  $\Delta PP_1F_1 \cong \Delta P'P_2F_2$ . Logo,  $m(\widehat{PF_1P_1}) \cong m(\widehat{P'F_2P_2})$  e

$$PF_1 = P'F_2 \quad (6.1)$$

Observa-se ainda pelo caso  $LAL$  que  $\Delta PF_1F_2 \cong \Delta P'F_1F_2$ . Assim,

$$PF_2 = P'F_1. \quad (6.2)$$

De (6.1) e (6.2) conclui-se que

$$|PF_1 - PF_2| = |P'F_1 - P'F_2| = k.$$

Então,  $P'$  pertence à hipérbole.

□

### 6.1.2.2 Centro de Simetria

O **centro de simetria** de uma hipérbole é um ponto  $O$  determinado pela interseção de seus eixos de simetria.

**Propriedade 6.2.** Toda reta que passa por  $O$  intercepta a hipérbole num ponto  $P$  e no seu simétrico  $P'$  em relação a  $O$  tal que  $O$  é o ponto médio de  $PP'$ .

*Demonstração.* Seja  $P$  um ponto qualquer da hipérbole e  $P'$  o seu simétrico em relação ao centro  $O$  desta curva.

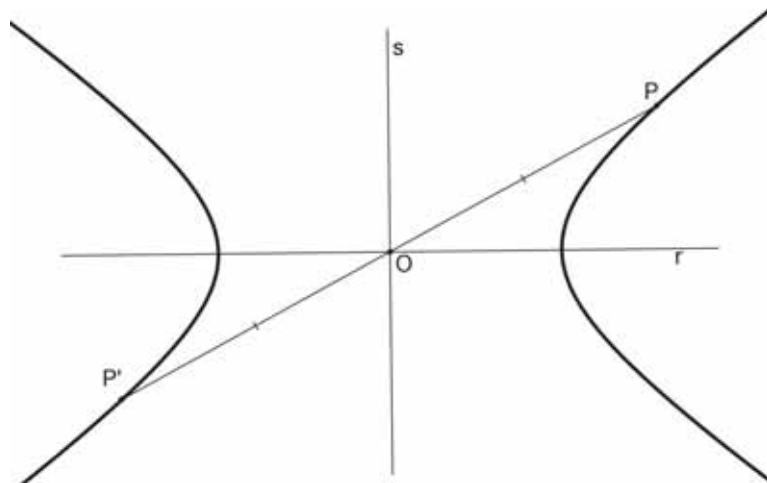


Figura 6.6: Centro de simetria.

$O$  é simultaneamente ponto médio de  $PP'$  e de  $F_1F_2$ . Sendo assim, o quadrilátero  $PF_1P'F_2$  é um paralelogramo pois suas diagonais interceptam-se em seus pontos médios.

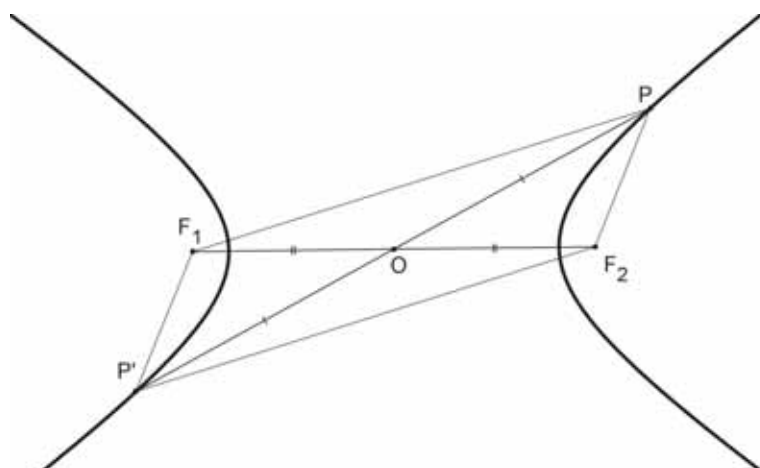


Figura 6.7: Centro de simetria.

Desde que em todo paralelogramo os lados opostos são congruentes, tem-se

$$F_1P' = F_2P$$

$$F_2P' = F_1P.$$

Subtraindo estas igualdades membro a membro, tem-se

$$|F_1P' - F_2P'| = |F_1P - F_2P|. \quad (6.3)$$

Por hipótese,  $P$  pertence à hipérbole, então

$$|F_1P - F_2P| = k. \quad (6.4)$$

Portanto substituindo (6.4) em (6.3) tem-se

$$|F_1P' - F_2P'| = k.$$

Ou seja,  $P'$  pertence à hipérbole. □

### 6.1.3 Elementos da hipérbole

A partir da construção da hipérbole usando fio inextensível e de sua propriedade de simetria é possível estabelecer uma nomenclatura para alguns de seus elementos. Desta forma, os pontos de interseção da hipérbole com o reta suporte do segmento focal serão chamados de vértices e denotados por  $A_1$  e  $A_2$ . O segmento  $A_1A_2$  será chamado de **eixo transverso** da hipérbole.

Observa-se que o comprimento do eixo transverso da hipérbole pode ser considerado como um dos parâmetros para determinação desta curva. De fato, como  $A_1$  e  $A_2$  pertencem à hipérbole, pela definição 6.1 tem-se que:

$$|A_1F_1 - A_1F_2| = 2a \text{ ou } |A_1F_2 - A_1F_1| = 2a \quad (6.5)$$

onde  $2a$  é um valor constante e menor que  $F_1F_2$ . Por outro lado, os pares  $A_1, A_2$  e  $F_1, F_2$  são simétricos em relação à origem  $O$  conforme mostra a figura 6.8.

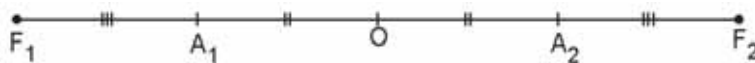


Figura 6.8: Vértices da hipérbole.

Assim,

$$A_1O = A_2O \text{ e } F_1O = F_2O \quad (6.6)$$

como,  $A_1F_1 = F_1O - A_1O$  e  $A_2F_2 = F_2O - A_2O$ , segue utilizando 6.6 que  $A_1F_1 = A_2F_2$ . Substituindo na equação 6.5 tem-se que:

$$|A_1F_2 - A_2F_2| = 2a.$$

Portanto,  $A_1A_2 = 2a$ . **O eixo transverso determinado pelos vértices da hipérbole tem comprimento igual a constante  $2a$ .**

Denote o comprimento do segmento focal  $F_1F_2$  por  $2c$ . Observa-se que a medida  $c$  pode ser também considerada um outro parâmetro para determinação dos pontos de uma hipérbole, pois para todo ponto  $P$  pertencente a esta curva tem-se a expressão  $|PF_1 - PF_2| = k$ , com  $k < F_1F_2$ . Além disto, pode-se definir um terceiro parâmetro importante para determinação da hipérbole através de uma relação entre os valores de  $a$  e  $c$ . Considere a construção dada pela figura 6.9.

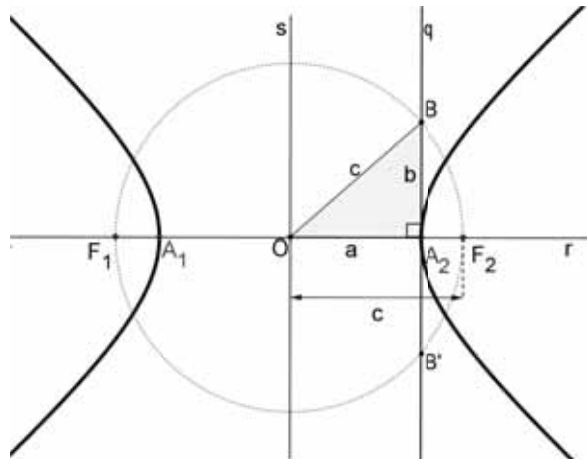


Figura 6.9: Parâmetros da hipérbole.

Seja  $q$  a reta perpendicular ao eixo transversal e que passa pelo vértice  $A_2$ . Considere a circunferência de centro  $O$  e raio  $c$ . Denote por  $B$  e  $B'$  as interseções da circunferência com a reta  $q$ . Chame de  $b$  o comprimento do segmento  $A_2B$ . Como  $OB = c$  e  $OA_2 = a$ , então pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo  $\Delta OA_2B$  tem-se que:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Denote por  $B_1$  e  $B_2$  as projeções ortogonais de  $B$  e  $B'$ , respectivamente, sobre a mediatriz  $s$  do eixo transversal. Veja a figura 6.10.

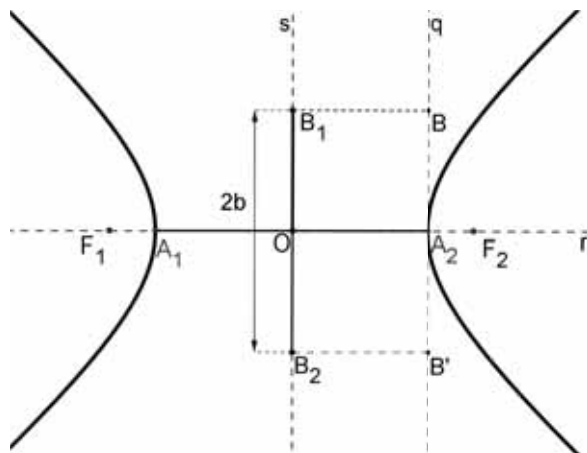
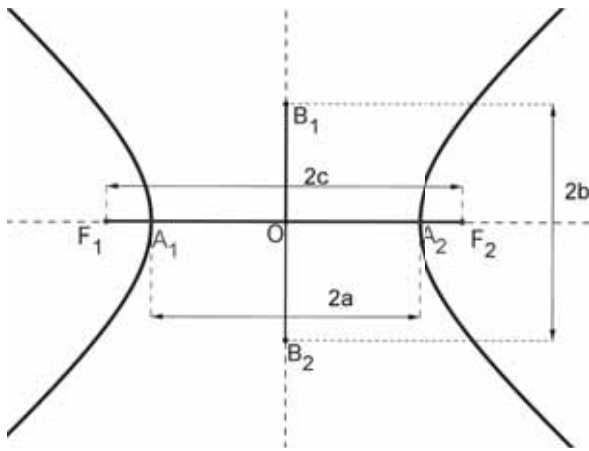


Figura 6.10: Eixo conjugado.

O segmento  $B_1B_2$  de comprimento  $2b$  será chamado de **eixo conjugado** da hipérbole.

**Observação 6.1.** Vários textos que tratam deste assunto adotam o termo **eixo real** para o eixo transverso e **eixo imaginário** para o eixo conjugado.



**Centro:**  $O$

**Focos:**  $F_1$  e  $F_2$

**Segmento focal:**  $F_1F_2$

**Distância focal:**  $2c$

**Vértices:**  $A_1$  e  $A_2$

**Eixo transverso:**  $A_1A_2 = 2a$

**Eixo conjugado:**  $B_1B_2 = 2b$

Figura 6.11: Elementos da hipérbole.

#### 6.1.4 Determinação dos pontos de uma hipérbole usando régua e compasso

Usando régua e compasso é possível obter pontos de uma hipérbole a partir do seguinte procedimento:

1. Marque dois pontos  $F_1$  e  $F_2$  distintos num plano;
2. Trace uma semi-reta de origem em  $F_1$  e que passe por  $F_2$ ;
3. Marque um ponto  $A$  na semi-reta  $F_1F_2$  pertencente ao segmento  $F_1F_2$ ;
4. Com o auxílio do compasso, trace uma circunferência de centro  $F_1$  e raio  $F_1A$ . Defina  $F_1A = 2a$ ;
5. Escolha um ponto  $D$  qualquer sobre a circunferência e trace uma reta  $s$  passando pelos pontos  $F_1$  e  $D$ ;
6. Trace o segmento  $F_2D$ ;
7. Trace a mediatriz  $t$  do segmento  $F_2D$  e chame de  $B$  a interseção entre eles;
8. Considere  $P$  a interseção da mediatriz  $t$  com a reta  $s$ . Essa interseção se dará no prolongamento à direita ou à esquerda do segmento  $F_1D$  dependendo da escolha de  $D$ .

$P$  é um ponto da hipérbole com focos  $F_1$  e  $F_2$  conforme a demonstração abaixo.

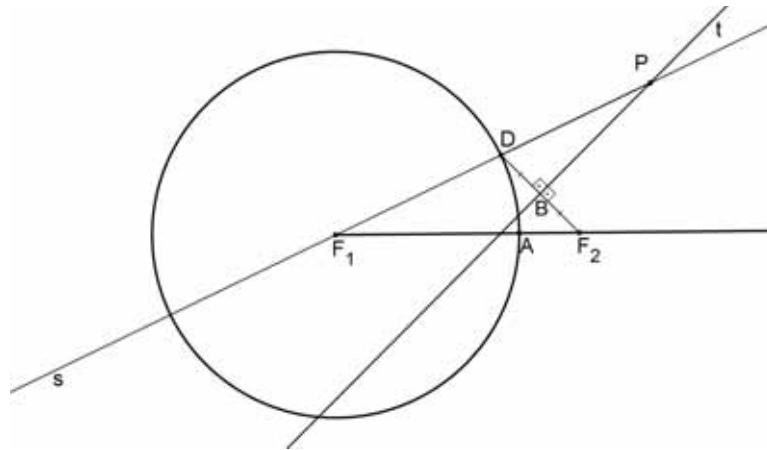


Figura 6.12: Construção por régua e compasso.

*Demonstração.* Seja  $P$  a interseção das retas  $t$  e  $s$  tal que  $P$  se encontra no prolongamento à direita do segmento  $F_1D$ . Tem-se que  $t$  é mediatriz do segmento  $F_2D$  e que  $P$  pertence a  $t$ , logo, pela propriedade da mediatriz de um segmento,  $PF_2 = PD$ . Por outro lado, observa-se que  $F_1P = F_1D + PD = F_1D + PF_2$ . Segue que  $F_1P - PF_2 = F_1D$ . Tem-se que  $F_1D$  é o raio da circunferência de medida  $2a$ , logo,  $PF_1 - PF_2$  é constante e igual a  $2a$ . Portanto  $P$  pertence a hipérbole de focos  $F_1$  e  $F_2$ . Para  $P$  no prolongamento à esquerda de  $F_1D$  a demonstração é análoga.  $\square$

Para obter os demais pontos  $P$  da hipérbole basta repetir o procedimento escolhendo diferentes posições de  $D$  sobre a circunferência. Assim, quando  $D$  percorrer toda a circunferência de maneira dinâmica, o lugar geométrico determinado pelos pontos  $P$  será uma hipérbole de focos  $F_1$  e  $F_2$  conforme mostra a figura 6.13. A interseção das retas  $t$  e  $s$  à direita de  $F_1D$  determina os pontos do ramo direito da hipérbole, assim como a interseção à esquerda de  $F_1D$  determina os pontos do ramo esquerdo.

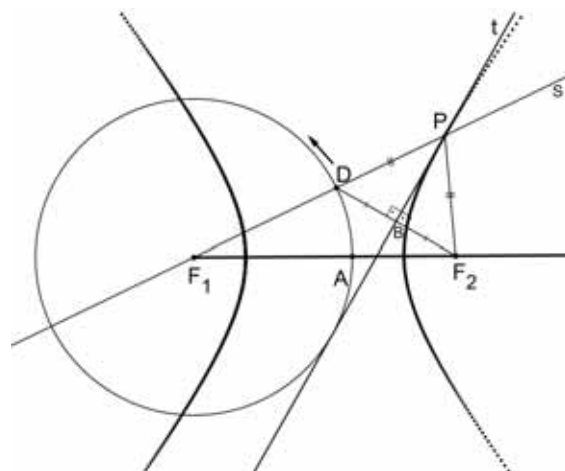
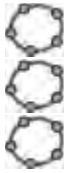


Figura 6.13: Construção por régua e compasso.



Veja a construção A.2.2.1 no Apêndice.

Veja a construção A.2.2.2 no Apêndice.

Veja a construção A.2.2.3 no Apêndice.

### 6.1.5 Regiões do plano determinadas pela hipérbole e reta tangente

Considerando  $F_1$  e  $F_2$  os focos da hipérbole e  $2a$  um valor real positivo menor que o comprimento do segmento  $F_1F_2$ , sabe-se que se  $P$  pertencer à hipérbole, então,  $|PF_1 - PF_2| = 2a$ . Desta forma, os dois ramos da hipérbole dividem o plano em três regiões, a saber:

1. **Região não focal** ( $R_{nf}$ ) situa-se entre os dois ramos da hipérbole onde cada ponto  $P'$  satisfaz  $|P'F_1 - P'F_2| < 2a$
2. **Região focal que contém  $F_1$**  ( $R_f$ ) onde cada ponto  $P'$  satisfaz  $P'F_2 - P'F_1 > 2a$
3. **Região focal que contém  $F_2$**  ( $R_f$ ) onde cada ponto  $P$  satisfaz  $P'F_1 - P'F_2 > 2a$

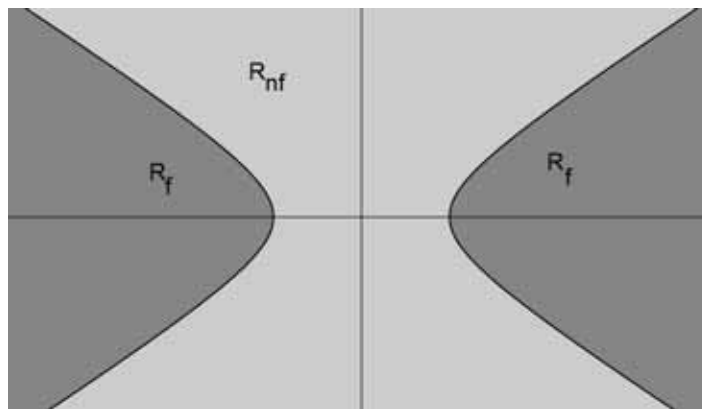


Figura 6.14: Regiões do plano determinadas pela hipérbole.

**Definição 6.2.** *Uma reta  $t$  é tangente a um ramo da hipérbole num ponto  $P$  se, e somente se, nenhum ponto desta reta menos o ponto  $P$ , pertencer à região focal determinada por este ramo, ou seja, a reta  $t$  menos o ponto  $P$  está totalmente contida na região não focal da hipérbole.*

### 6.1.6 Consequências da construção por régua e compasso

Considere  $P$  a interseção das retas  $t$  e  $s$  conforme a figura abaixo.

$P$  situa-se no prolongamento à direita do segmento  $F_1D$ , ou seja, no ramo  $h_2$  da hipérbole referente ao foco  $F_2$ , conforme ilustra a figura 6.15.



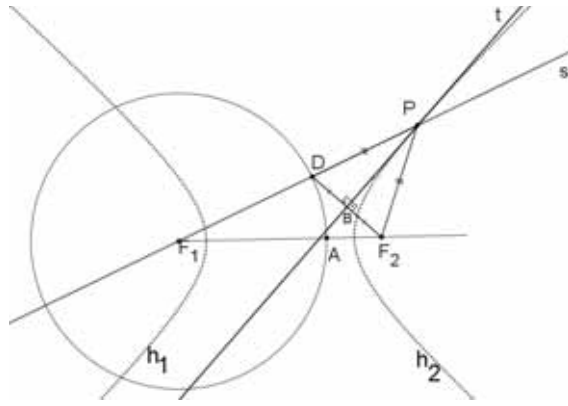


Figura 6.15: Um ponto  $P$  da hipérbole pertencente à reta  $t$ .

**Propriedade 6.3.** A mediatriz  $t$  do segmento  $F_2D$  é tangente à hipérbole no ponto  $P$ .

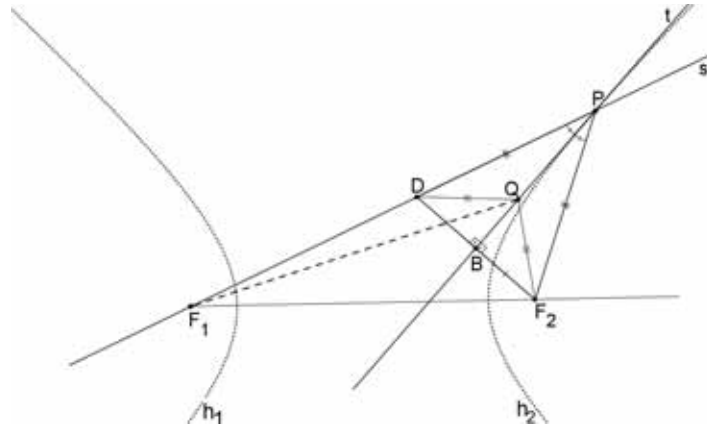


Figura 6.16: Ponto  $Q$  qualquer da reta  $t$  distinto de  $P$ .

*Demonstração.* Tem-se que  $P$  é um ponto do ramo  $h_2$  comum a reta  $t$ . Seja  $Q$  outro ponto qualquer sobre  $t$  distinto de  $P$  conforme mostra a figura 6.16. Como  $t$  é mediatriz do segmento  $F_2D$ , então,  $QF_2 = QD$ .  $P$  é um ponto da hipérbole, ou seja,  $|PF_1 - PF_2| = F_1D$ . Observa-se ainda pela figura 6.16 que para qualquer ponto  $Q$  sobre  $t$  distinto de  $P$  tem-se um triângulo  $\triangle QDF_1$ . Segue da desigualdade triangular, aplicada ao  $\triangle QDF_1$ , que

$$QD < QF_1 + F_1D \text{ ou } QD - F_1D < QF_1 \quad (6.7)$$

também,

$$QF_1 < QD + F_1D. \quad (6.8)$$

Das equações (6.7) e (6.8), tem-se

$$QD - F_1D < QF_1 < QD + F_1D.$$

Subtraindo  $QD$  membro a membro segue que

$$-F_1D < QF_1 - QD < F_1D$$

ou

$$|QF_1 - QD| < F_1D.$$

Sabendo-se que  $QD = QF_2$  e  $F_1D = 2a$ , então

$$|QF_1 - QF_2| < 2a$$

para todo  $Q$  distinto de  $P$ . Portanto,  $t$  menos o ponto  $P$  está contida na região não focal da hipérbole. Pela definição 6.2, a reta  $t$  é tangente a ramo  $h_2$  da hipérbole em  $P$ .  $\square$

**Propriedade 6.4.** A reta  $t$  tangente à hipérbole no ponto  $P$  é bissetriz do ângulo  $F_1\hat{P}F_2$ .

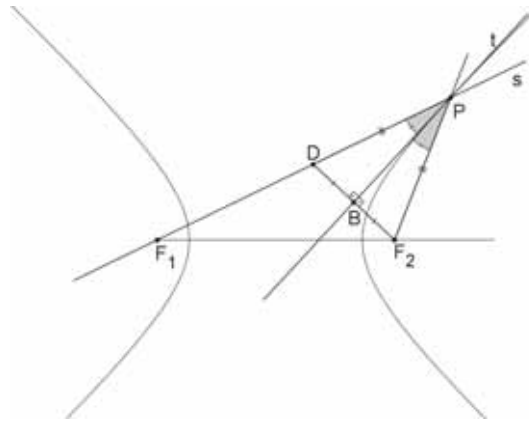


Figura 6.17: Propriedade da reta  $t$  tangente à hipérbole.

*Demonstração.* No triângulo  $\triangle DPF_2$ , tem-se que  $DP = PF_2$  pois  $P$  pertence à mediatriz do segmento  $DF_2$ . Assim, o triângulo  $\triangle DPF_2$  é isósceles, e pela construção da figura 6.17 o segmento  $PB$  é a altura desse triângulo em relação a base  $DF_2$ . Utilizando a propriedade da altura de um triângulo isósceles tem-se que  $PB$  é bissetriz do ângulo  $D\hat{P}F_2 = F_1\hat{P}F_2$ . Como a reta  $t$  contém o segmento  $PB$  implica que  $t$  é bissetriz do ângulo  $F_1\hat{P}F_2$ .  $\square$



Veja a construção A.2.2.4 no Apêndice.

## 6.2 Um Tratamento Analítico

**Definição 6.3.** *Sejam  $F_1$  e  $F_2$  pontos distintos no plano  $\pi$  e  $2c > 0$  a distância entre eles. Seja  $a$  um número real tal que  $0 < a < c$ . O lugar geométrico  $\mathcal{H}$  determinado pelos pontos  $X$  de coordenadas cartesianas  $(x, y)$  tais que  $|d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 2a$  denomina-se **hipérbole**, onde  $d$  representa distância euclidiana entre os pontos do plano. Os pontos  $F_1$  e  $F_2$  são chamados de **focos** da hipérbole. O segmento  $F_1F_2$  é chamado de **segmento focal** e seu ponto médio de **centro** da hipérbole. O valor  $2c$  é chamado de **distância focal**.*

### 6.2.1 Equação reduzida

A equação reduzida da hipérbole  $\mathcal{H}$  é obtida fixando-se o sistema de coordenadas cartesianas onde  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$  estão sobre o eixo  $Ox$ . Pela definição 6.3

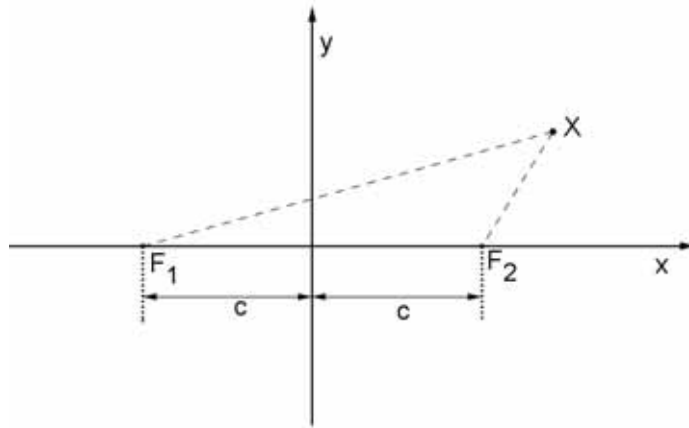


Figura 6.18: Ponto da hipérbole no sistema ortogonal de coordenadas.

o ponto  $X$  de coordenadas  $(x, y)$  pertence à hipérbole se, e somente se,  $d(X, F_1) - d(X, F_2) = \pm 2a$ . Logo  $d(X, F_1) = \pm 2a + d(X, F_2)$ , vigorando o sinal  $+$  se  $X$  estiver mais próximo de  $F_2$ . Assim,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a, \quad (6.9)$$

Elevando-se ao quadrado ambos os membros

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 + 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad (6.10)$$

Expandindo as potências e simplificando tem-se,

$$xc - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad (6.11)$$

Elevando novamente ao quadrado

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2. \quad (6.12)$$

Resultando,

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \quad (6.13)$$

Assim, definindo  $c^2 - a^2 = b^2$  a equação (6.13) pode ser reescrita como:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (6.14)$$

Observa-se que a equação (6.14) foi obtida da (6.9) eliminando duas vezes os radicais. Então, para garantir que (6.14) é a equação da hipérbole para o sistema considerado, é importante mostrar que partindo-se dela chega-se a (6.9).

Suponha que um ponto arbitrário  $X = (x, y)$  satisfaça (6.14). Efetuando os cálculos anteriores na ordem inversa obtém-se primeiro a igualdade (6.13) e depois, a igualdade (6.12) que pode ser escrita da seguinte forma:

$$(xc - a^2)^2 = a^2[(x - c)^2 + y^2]$$

Extraindo a raiz dos dois membros desta igualdade tem-se:

$$xc - a^2 = \pm a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}, \quad (6.15)$$

Se o ponto  $X = (x, y)$  estiver situado no segundo ou terceiro quadrante do plano cartesiano então  $x$  será menor que zero e o primeiro membro da igualdade (6.15) será negativo. Neste caso, o segundo membro da igualdade pode ser considerado com sinal negativo.

Se o ponto  $X = (x, y)$  estiver situado no primeiro ou quarto quadrante do plano cartesiano então  $x$  será positivo. Da equação (6.14)  $x \geq a$ . Como  $c > a > 0$  então  $cx > a^2$ , logo, o primeiro membro da equação (6.15) é positivo. Neste caso, o segundo membro deve ser tomado com o sinal positivo. Portanto, mantém-se o sinal mais ou menos após a igualdade.

Efetuando as operações necessárias, obtém-se a igualdade (6.10) de (6.11). Esta igualdade pode ser escrita da seguinte forma:

$$(x + c)^2 + y^2 = [\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \pm 2a]^2$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \left| \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \pm 2a \right|, \quad (6.16)$$

Para decidir-se sobre o sinal da expressão dentro do módulo será feito a seguinte análise:

- (1) Se o ponto  $X = (x, y)$  estiver situado no semiplano  $x > 0$ , então  $\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \left| \sqrt{(x - c)^2 + y^2} + 2a \right|$ . Assim, a expressão entre módulo será positiva.
- (2) Se o ponto  $X = (x, y)$  estiver situado no semiplano  $x < 0$ , então  $\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \left| \sqrt{(x - c)^2 + y^2} - 2a \right|$ . Neste caso, o número  $x$  é negativo e o valor absoluto da diferença  $x - c$  é igual a soma  $|x| + c$ . Pela equação (6.14) se tem  $|x| \geq a$ . Além

disso,  $c > a$ . Consequentemente  $(x - c)^2 > 4a^2$ . A soma  $(x - c)^2 + y^2$  também será maior que  $4a^2$ . Assim,  $\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$  será maior que  $2a$  e a expressão entre módulo no segundo membro será positiva.

Observa-se que, para qualquer posição do ponto  $X = (x, y)$  a igualdade (6.16) se reduz a forma

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \pm 2a$$

que é a equação (6.9). Portanto, a equação (6.9) pode ser deduzida de (6.14), ou seja, todo ponto  $X$  pertencente à hipérbole satisfaz (6.14). Esta equação é chamada de equação canônica da hipérbole.

## 6.2.2 Algumas propriedades da hipérbole dada pela equação reduzida

Algumas propriedades da hipérbole  $\mathcal{H}$  descrita pela equação 6.14:

- Nenhum ponto  $X = (x, y)$  de  $\mathcal{H}$  é interior a faixa vertical caracterizada  $-a < x < a$ . De fato, se  $X = (x, y)$  satisfaz a equação (6.14), então,  $x^2 \geq a^2$ . Consequentemente, a interseção da hipérbole com a mediatriz do segmento focal  $Oy$  é vazia. Para a ordenada de  $X$ , porém não há restrições. Qualquer que seja o valor atribuído a  $y$ , existe um  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $(x, y)$  satisfaz (6.14).
- Se  $(x, y)$  é uma solução qualquer da equação (6.14), então  $(-x, y)$ ,  $(x, -y)$  e  $(-x, -y)$  também serão, pois em tal equação todos os expoentes são pares. Logo, a hipérbole é simétrica em relação à reta focal  $Ox$ , à mediatriz do segmento focal  $Oy$  e ao centro  $O$ .
- $(x, 0)$  satisfaz (6.14) se, e somente se,  $x = a$  ou  $x = -a$ . Por isso, a interseção de  $\mathcal{H}$  com a reta focal  $Ox$  é constituída dos pontos  $A_1 = (-a, 0)$  e  $A_2 = (a, 0)$

O retângulo caracterizado pelas desigualdades  $-a \leq x \leq a$  e  $-b \leq y \leq b$ , é chamado de **retângulo fundamental** da hipérbole. As diagonais deste retângulo estão contidas nas retas dadas por

$$r_1 : y = \frac{-b}{a}x \text{ e } r_2 : y = \frac{b}{a}x,$$

que recebem o nome de **assíntotas** da hipérbole.

Na figura 6.19 apresenta-se o esboço da hipérbole  $\mathcal{H}$  e assíntotas  $r_1$  e  $r_2$  a partir da análise da equação de  $\mathcal{H}$  e de seu comportamento apresentado na seção 6.1. O posicionamento da assíntota  $r_2$  em relação à curva  $\mathcal{H}$  pode ser esclarecido da seguinte maneira: para todo ponto de abscissa  $x$  maior do que  $a$ , sejam  $H$  e  $R$ , respectivamente, os pontos da hipérbole e da reta assíntota  $r_2$  respectivamente. Dessa forma, pode-se escrever  $H = (x, b\sqrt{x^2 - a^2}/a)$  e  $R = (x, bx/a)$ . Observa-se que as ordenadas destes dois pontos se relacionam na forma  $bx/a > b\sqrt{x^2 - a^2}/a$ . A partir desta relação pode

se dizer que  $H$  está abaixo de  $R$  e que a reta assíntota  $r_2$  não intercepta  $\mathcal{H}$  no primeiro quadrante. Devido às simetrias de  $\mathcal{H}$  e  $r_2$ , pode-se afirmar que  $r_2 \cap \mathcal{H} = \emptyset$ . Além disso, a distância  $d(H, R)$  diminui à medida que  $x$  cresce no intervalo  $[a, +\infty[$ , pois

$$\begin{aligned} d(H, R) &= \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) \\ &= \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) \frac{(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{(x + \sqrt{x^2 - a^2})} = \frac{b}{a} \frac{a^2}{(x + \sqrt{x^2 - a^2})} \end{aligned}$$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow \infty} d(H, R) = 0.$$

O comportamento de  $r_1$  é análogo. Utilizando estes fatos, pode-se fazer, a mão livre, um esboço da hipérbole bastante razoável.

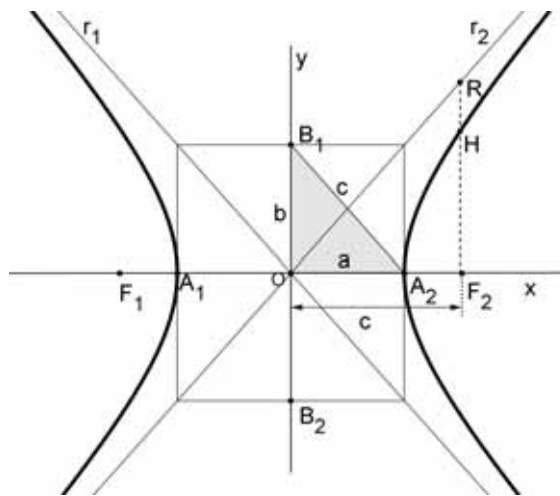


Figura 6.19: Características do esboço da hipérbole.

Observa-se que o Teorema de Pitágoras, aplicado ao triângulo retângulo  $OA_2B_1$ , confirma a relação  $c^2 = a^2 + b^2$ .

### 6.2.3 Retas tangentes e retas normais à hipérbole

A reta tangente à hipérbole tem um único ponto em comum com ela, mas nem toda reta com essa propriedade é tangente. Isto pode ser ilustrado pela figura 6.20.

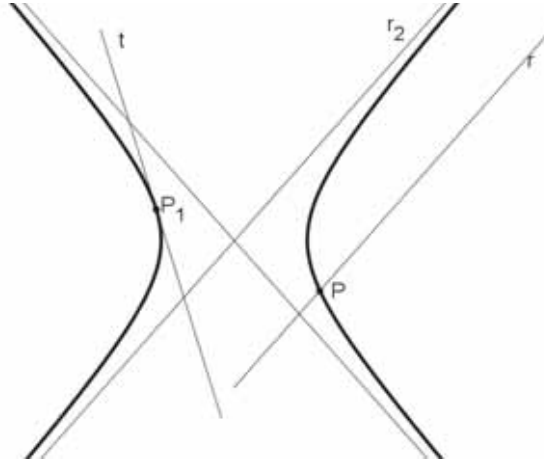


Figura 6.20: Retas que interceptam  $\mathcal{H}$  em um único ponto.

A reta  $t$  será considerada como tangente. Embora  $r$  contém um ponto  $P$  do ramo direito é paralela à assíntota  $r_2$ , sendo assim, possui pontos na região focal da curva, então não satisfaz a definição 6.2 para reta tangente.

**Definição 6.4.** *Seja  $t$  uma reta e  $\mathcal{H}$  uma hipérbole:*

- (a)  *$t$  é tangente a  $\mathcal{H}$  se não é paralela a nenhuma das assíntotas e  $t \cap \mathcal{H}$  contém apenas um ponto,  $P_1$ , chamado ponto de tangência.*
- (b) *Se  $t$  é tangente a  $\mathcal{H}$ , em  $P_1$ , a reta que contém  $P_1$  e é perpendicular a  $t$  chama-se reta normal a  $\mathcal{H}$  em  $P_1$ .*

O procedimento para obter uma equação da reta  $t$ , tangente à hipérbole  $\mathcal{H}$  de equação (6.14), conhecendo um ponto de tangência  $P_1 = (x_1, y_1)$ , será descrito a seguir.

- (1) O ponto  $P_1 = (x_1, y_1)$  pertencente a  $\mathcal{H}$  encontra-se sobre o eixo  $x$ , ou seja,  $y_1 = 0$ . Como  $P_1 = (x_1, 0)$  pertence à hipérbole  $\mathcal{H}$  conclui-se que  $x_1 = -a$  ou  $x_1 = a$ . Assim, a reta  $r$  tangente a  $\mathcal{H}$  no ponto  $P_1 = (x_1, 0)$  é definida como a reta perpendicular ao eixo  $x$ , ou seja, de equação

$$\begin{cases} r : x = -a \\ \text{ou} \\ r : x = a. \end{cases}$$

- (2) O ponto  $P_1 = (x_1, y_1)$  pertencente a um dos ramos de  $\mathcal{H}$  com  $y_1 \neq 0$ .

Sejam  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$  dois pontos pertencentes a um dos ramos de  $\mathcal{H}$  tais que  $x_1 \neq x_2$  e  $y_1 \neq y_2$ . Seja  $s$  a reta secante determinadas por  $P_1$  e  $P_2$ . Assim, a inclinação  $m_s$  da reta  $s$  pode ser obtida a partir das coordenadas de  $P_1$  e  $P_2$ . De fato,  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$  pertencem a  $\mathcal{H}$ , ou seja,

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad (6.17)$$

e

$$\frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \quad (6.18)$$

Subtraindo (6.17) de (6.18) obtém-se

$$\frac{(x_2^2 - x_1^2)}{a^2} - \frac{(y_2^2 - y_1^2)}{b^2} = 0$$

ou

$$\frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{a^2} - \frac{(y_2 - y_1)(y_2 + y_1)}{b^2} = 0$$

Simplificando encontra-se

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)}$$

Assim, pelo teorema 2.1

$$m_s = \frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)}$$

Seja  $m_t$  a inclinação da reta tangente à hipérbole no ponto  $P_1$ . Logo, pela definição 2.4,

$$m_t = \lim_{(x_2, y_2) \rightarrow (x_1, y_1)} m_s$$

Substituindo o valor de  $m_s$  e resolvendo o limite tem-se

$$\lim_{(x_2, y_2) \rightarrow (x_1, y_1)} \frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)} = \frac{b^2x_1}{a^2y_1} \quad (6.19)$$

Pelo teorema 2.2 a equação da reta  $t$  tangente a hipérbole no ponto  $P_1$  pode ser calculada por

$$y - y_1 = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)$$

ou

$$a^2y_1y - a^2y_1^2 = b^2x_1x - b^2x_1^2$$

Como  $b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2$ , pode se escrever  $b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2$  ou

$$\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$$

Assim, partindo-se da inclinação da reta tangente à hipérbole no ponto  $P_1 = (x_1, y_1)$ , pelo teorema 2.3, a inclinação  $m_n$  da reta normal  $n$  neste ponto é  $-\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$ . Portanto, a equação da reta  $n$  é dada por  $a^2y_1x + b^2x_1y = (a^2 + b^2)x_1y_1$ .



### 6.2.4 Propriedade da reta tangente à hipérbole

**Teorema 6.1.** *Sejam  $P$  um ponto qualquer da hipérbole,  $PF_1$  e  $PF_2$  os segmentos que ligam o ponto  $P$  aos focos desta curva. A reta tangente ao ponto  $P$  é bissetriz do ângulo  $F_1\hat{P}F_2$ .*

*Demonstração.* Será considerado a equação da hipérbole em sua forma canônica  $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$  e um ponto  $P_1 = (x_1, y_1)$ , com  $y_1 \neq 0$ , pertencente ao ramo desta curva situado no semiplano  $x > 0$ .

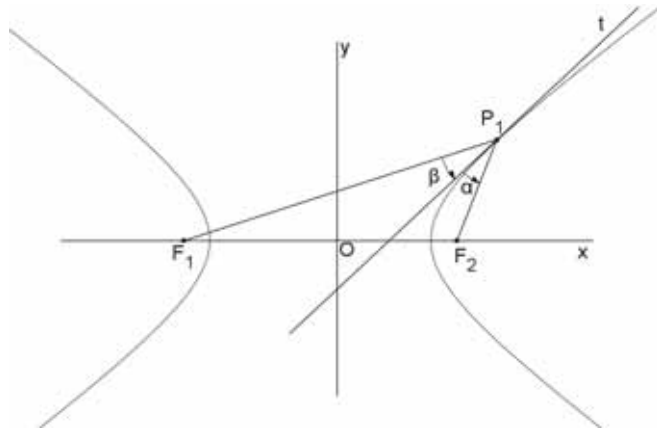


Figura 6.21: Reta tangente à hipérbole em  $P_1$ .

Seja  $t$  a reta tangente à hipérbole no ponto  $P_1 = (x_1, y_1)$ . Seja  $\alpha$  o ângulo formado por  $t$  e o segmento  $P_1F_2$  e  $\beta$  o ângulo formado por  $t$  e o segmento  $P_1F_1$ . Pretende-se mostrar que  $\alpha = \beta$ .

Pela expressão (6.19) tem-se que inclinação da reta tangente à hipérbole em  $P_1 = (x_1, y_1)$  é  $\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$ . Pelo teorema 2.1 as inclinações dos segmentos  $P_1F_1$  e  $P_1F_2$  são dadas por  $\frac{y_1}{x_1 + c}$  e  $\frac{y_1}{x_1 - c}$ , respectivamente. Então, pelo teorema 2.4, resulta

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{\frac{y_1}{x_1 - c} - \frac{b^2x_1}{a^2y_1}}{1 + \left(\frac{y_1}{x_1 - c}\right) \left(\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\right)} \right| = \left| \frac{a^2y_1^2 - b^2x_1^2 + b^2cx_1}{a^2x_1y_1 - a^2cy_1 + b^2x_1y_1} \right|$$

Como o ponto  $P_1$  está sobre a hipérbole tem-se que  $b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2$ . Usando esta relação e a igualdade  $c^2 = a^2 + b^2$  obtém-se

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{-a^2b^2 + b^2cx_1}{x_1y_1(a^2 + b^2) - a^2cy_1} \right| = \left| \frac{b^2(cx_1 - a^2)}{c^2x_1y_1 - a^2cy_1} \right| = \left| \frac{b^2(cx_1 - a^2)}{cy_1(cx_1 - a^2)} \right| = \left| \frac{b^2}{cy_1} \right|$$

Analogamente tem-se,

$$\operatorname{tg} \beta = \left| \frac{\frac{b^2x_1}{a^2y_1} - \frac{y_1}{x_1 + c}}{1 + \left(\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\right) \left(\frac{y_1}{x_1 + c}\right)} \right| = \left| \frac{b^2x_1^2 - a^2y_1^2 + b^2cx_1}{a^2x_1y_1 + a^2cy_1 + b^2x_1y_1} \right| = \left| \frac{a^2b^2 + b^2cx_1}{x_1y_1(a^2 + b^2) + a^2cy_1} \right|$$

$$= \left| \frac{b^2(a^2 + cx_1)}{c^2x_1y_1 + a^2cy_1} \right| = \left| \frac{b^2(a^2 + cx_1)}{cy_1(cx_1 + a^2)} \right| = \left| \frac{b^2}{cy_1} \right|$$

Logo,  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$  e portanto  $\alpha = \beta$ .

□

# 7 Parábola

## 7.1 Um Tratamento Geométrico

**Definição 7.1.** *Fixados uma reta e um ponto não pertencente a ela denomina-se parábola o lugar geométrico dos pontos que são equidistantes da reta e do ponto fixados.*

### 7.1.1 Construção da parábola usando esquadro e um fio inextensível

Pode-se esboçar um trecho de uma parábola da seguinte forma:

- (1) Tome um esquadro no formato de triângulo retângulo escaleno;
- (2) Trace uma reta no plano;
- (3) No mesmo plano marque um ponto não pertencente a esta reta tal que a distância entre a reta e o ponto seja menor que a medida do cateto maior do esquadro;
- (4) Tome um fio inextensível de forma que seu comprimento seja igual ao cateto maior do esquadro;
- (5) Nesse cateto do esquadro, escolha a extremidade que possua o menor ângulo agudo e prenda uma extremidade do fio;
- (6) Prenda a outra extremidade livre do fio no ponto marcado;
- (7) Apóie o cateto menor do esquadro sobre a reta traçada e use a ponta do lápis para manter o fio sempre esticado conforme a figura 7.1;
- (8) Movimente o esquadro sobre a reta traçada, mantendo o fio sempre esticado com a ponta do lápis.

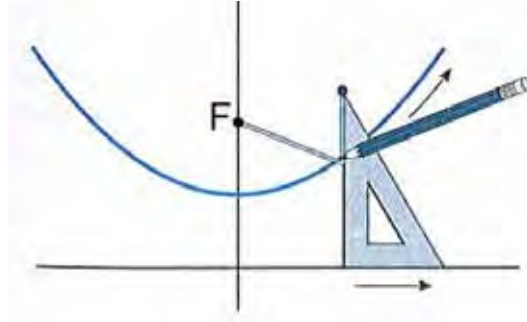


Figura 7.1: Construção da parábola usando esquadro e fio inextensível.

Os pontos da curva obtida por essa construção pertencem a uma parábola, pois observa-se que para cada ponto  $P$  sobre a curva, a distância entre  $P$  e a reta traçada é igual ao comprimento do fio entre  $P$  e o ponto marcado. Assim,  $P$  é equidistante da reta e do ponto fixados.

A reta fixada será chamada de **diretriz** da parábola e o ponto fixado não pertencente à diretriz será chamado de **foco**.

### 7.1.2 Simetria da parábola

**Propriedade 7.1.** A reta perpendicular à diretriz da parábola e que passa pelo foco é o eixo de simetria dessa curva.

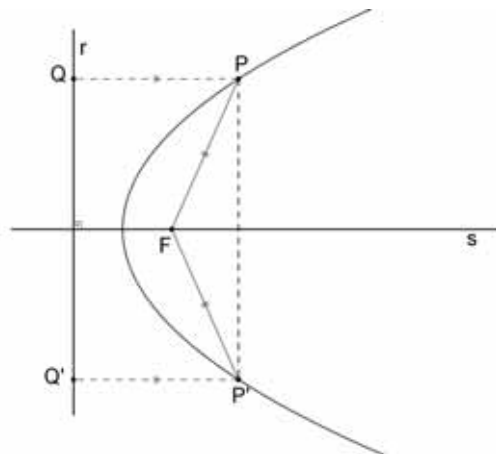


Figura 7.2: Simetria em relação à reta  $s$ .

*Demonstração.* Sejam  $r$  a reta diretriz da parábola e  $s$  a reta perpendicular a  $r$  e que passa pelo foco  $F$ . Seja  $P$  um ponto pertencente à parábola e  $P'$  o simétrico de  $P$  em relação a  $s$ . Pela definição 2.2 tem-se que  $s$  é mediatriz do segmento  $PP'$ . Como  $F$  pertence a  $s$ , pela definição 2.1 tem-se

$$FP = FP' \quad (7.1)$$

Conforme mostra a figura 7.2, considere  $Q$  a projeção ortogonal de  $P$  sobre a reta  $r$  e  $Q'$  projeção ortogonal de  $P'$  sobre a mesma reta. Então,

$$PQ = P'Q' \quad (7.2)$$

Uma vez que  $P$  pertence à parábola, então, pela definição 7.1  $FP = PQ$ . Desta igualdade e da equação (7.2) tem-se que,

$$FP = P'Q' \quad (7.3)$$

Das equações (7.1) e (7.3) obtém-se

$$FP' = P'Q'.$$

Ou seja,  $P'$  é equidistante da reta  $r$  e do foco  $F$ . Portanto,  $P'$  pertence à parábola dada.  $\square$

### 7.1.3 Determinação dos pontos de uma parábola usando régua e compasso

Usando régua e compasso pode-se determinar pontos de uma parábola da seguinte forma:

1. Trace uma reta  $r$  e marque um ponto  $F$  não pertencente a  $r$ ;
2. Trace uma reta  $s$  perpendicular à reta  $r$  passando por um ponto  $D$  qualquer de  $r$ ;
3. Trace o segmento  $FD$ ;
4. Com auxílio do compasso, desenhe a mediatriz  $t$  do segmento  $FD$ ;
5. Considere  $P$  a interseção das retas  $t$  e  $s$ .

$P$  é um ponto da parábola de foco  $F$  e diretriz  $r$  conforme a demonstração abaixo.

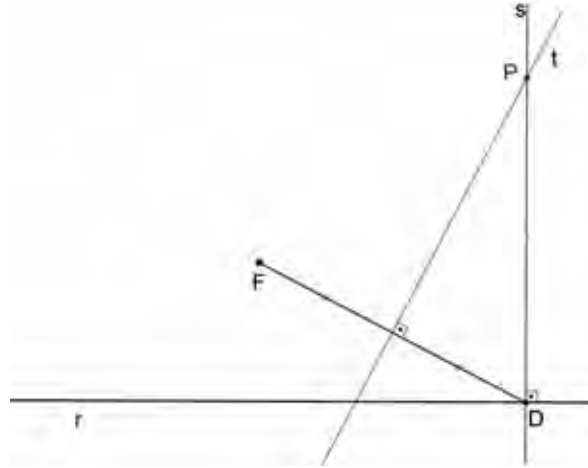


Figura 7.3: Construção por régua e compasso.

*Demonstração.* Tem-se que  $P$  pertence à reta  $s$  que é perpendicular à diretriz  $r$  no ponto  $D$ . Então, a distância de  $P$  a reta  $r$  é dada pelo segmento  $PD$ . Tem-se ainda que  $P$  pertence a  $t$  mediatriz do segmento  $FD$ . Logo, pela propriedade da mediatriz,  $PF = PD$ . Assim,  $P$  é equidistante do ponto  $F$  e da reta  $r$ . Portanto, pela definição 7.1,  $P$  pertence à parábola de foco  $F$  e diretriz  $r$ .  $\square$

Para obter os demais pontos  $P$  da parábola basta repetir o procedimento escolhendo diferentes posições de  $D$  sobre a reta diretriz  $r$  conforme ilustra a figura 7.4.

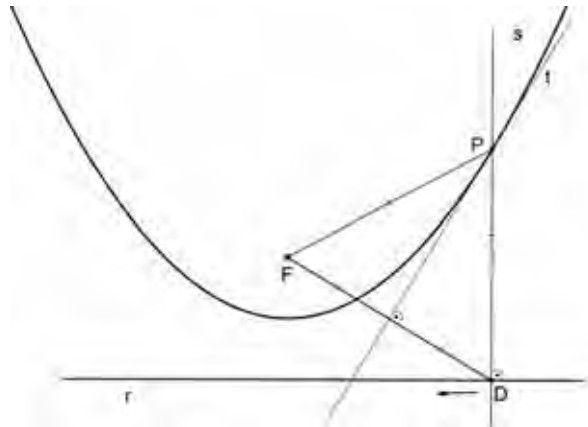


Figura 7.4: Construção por régua e compasso.



Veja a construção A.2.3.1 no Apêndice.



Veja a construção A.2.3.2 no Apêndice.

#### 7.1.4 Região do plano determinada pela parábola e reta tangente

A parábola divide os demais pontos do plano em duas regiões denominadas:

- (1) **Região focal da curva** ( $R_f$ ) onde cada ponto  $P$  tem distância até o foco menor que a sua distância até a diretriz, ou seja,  $P$  satisfaz a desigualdade  $PF < PD$ .
- (2) **Região não focal da curva** ( $R_{nf}$ ) onde cada ponto  $P$  tem distância até o foco maior que a distância até a diretriz, satisfazendo  $PF > PD$ .

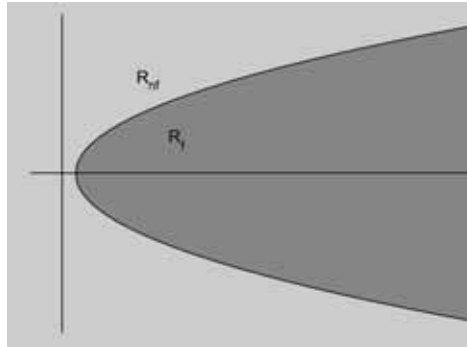


Figura 7.5: Regiões do plano determinadas pela parábola.

**Definição 7.2.** Uma reta  $t$  é tangente à parábola num ponto  $P$  se, e somente se, nenhum ponto desta reta menos o ponto  $P$ , pertencer à região focal desta curva, ou seja, a reta  $t$  menos o ponto  $P$  está totalmente contida na região não focal da parábola.

### 7.1.5 Consequências da construção por régua e compasso

**Propriedade 7.2.** A reta  $t$ , mediatriz do segmento  $FD$ , é tangente à parábola no ponto  $P$ .

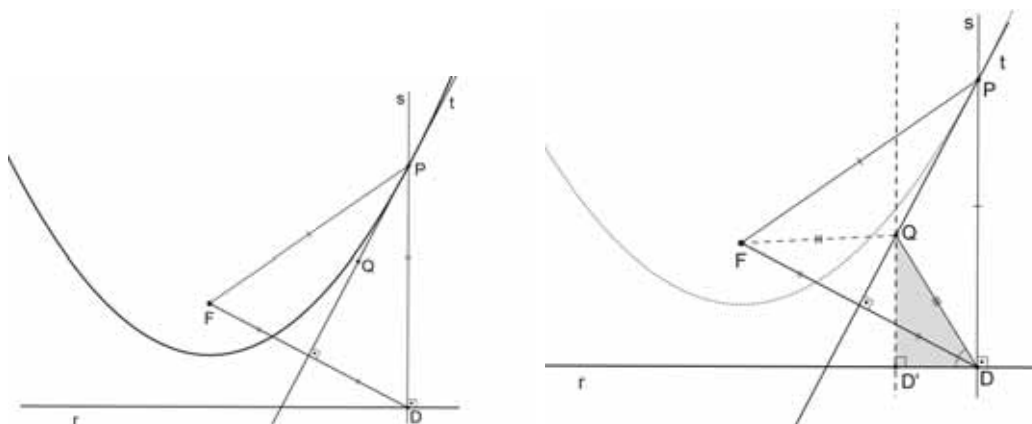


Figura 7.6: Ponto  $Q$  qualquer da reta  $t$  distinto de  $P$ .

*Demonstração.* Seja  $P$  ponto de interseção da parábola com a reta  $t$ . Considere um outro ponto  $Q$  qualquer distinto de  $P$  sobre a reta  $t$ . Como  $t$  é mediatriz do segmento

$FD$ , então  $QF = QD$ . Seja  $D'$  o ponto de interseção da reta diretriz  $r$  com a reta perpendicular que passa por  $Q$ . Então,  $QD'$  é a distância entre o ponto  $Q$  e a diretriz  $r$ . O triângulo  $\triangle QD'D$ , é reto em  $D'$  e o lado  $QD$  é oposto ao ângulo  $\widehat{QD'D}$ . Então  $QD > QD'$  para qualquer ponto  $Q$  escolhido sobre a reta  $t$ . Das relações,  $QF = QD$  e  $QD > QD'$ , conclui-se que a distância do ponto  $Q$  ao foco é maior que a distância do mesmo em relação à diretriz  $r$ . Assim,  $Q$  pertence a região não focal da parábola. Logo, pela definição 7.2,  $t$  é tangente à parábola em  $P$ .  $\square$

**Propriedade 7.3.** A reta  $t$  tangente à parábola em um ponto  $P$  qualquer forma ângulos iguais com o segmento  $PF$  e com a reta  $l$  que passa por  $P$  e paralela ao eixo da parábola.

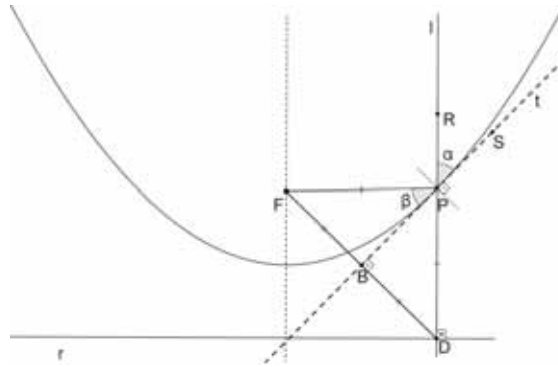


Figura 7.7: Propriedade da reta  $t$  tangente à parábola.

*Demonstração.* Seja  $t$  a reta tangente a parábola no ponto  $P$  e  $l$  a reta que passa por  $P$  paralela ao eixo da parábola. Seja  $D$  ponto de interseção da reta  $l$  com a diretriz  $d$  da parábola e  $B$  a interseção da reta  $t$  com o segmento  $FD$ . Sejam os pontos  $R$  e  $S$  sobre as reta  $l$  e  $t$  respectivamente conforme a figura 7.7. Considere  $\alpha$  a medida do ângulo  $\widehat{RPS}$  e  $\beta$  a medida do ângulo  $\widehat{FPB}$ . Pretende-se mostrar que  $\alpha = \beta$ . De fato, no triângulo  $\triangle FPD$ , o vértice  $P$  pertence à mediatriz do segmento  $FD$ . Então,  $FP = PD$  e o  $\triangle FPD$  é isósceles. Assim, a altura  $PB$  do triângulo  $\triangle FPD$  em relação ao vértice  $P$  é também bissetriz do ângulo  $\widehat{FPD}$ . Segue que o ângulo  $\widehat{FPB}$  é congruente ao ângulo  $\widehat{BPD}$ , isto é,  $\widehat{BPD}$  tem medida igual a  $\beta$ . Como os ângulos  $\widehat{BPD}$  e  $\widehat{RPS}$  são opostos pelos vértices, conclui-se que  $\alpha = \beta$ .  $\square$



Veja a construção A.2.3.3 no Apêndice.

## 7.2 Um Tratamento Analítico

**Definição 7.3.** Sejam  $r$  uma reta e  $F$  um ponto qualquer não pertencente a  $r$ , isto é,  $r \cap F = \emptyset$ . O lugar geométrico dos pontos  $X$  de coordenadas cartesianas  $(x, y)$



equidistantes de  $F$  e  $r$  chama-se **parábola**. O ponto  $F$  é chamado de **foco** e a reta  $r$ , **diretriz**. O número positivo  $p$  tal que  $d(F, r) = 2p$  é chamado de **parâmetro** da parábola, onde  $d$  é a distância euclidiana.

### 7.2.1 Equação reduzida

Para obter a equação da parábola  $\mathcal{P}$ , considera-se o sistema ortogonal de coordenadas cuja origem é o vértice de  $\mathcal{P}$ , tal que o foco pertença ao semi-eixo positivo das abscissas, conforme a figura 7.8. Em relação a este sistema o foco é  $F(p, 0)$  e a diretriz é a reta  $r : x = -p$ .

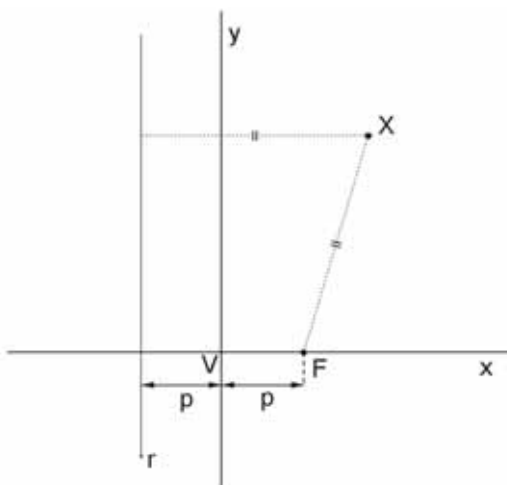


Figura 7.8: Ponto da parábola no sistema ortogonal de coordenadas.

Seja  $X$  um ponto de coordenadas cartesianas  $(x, y)$ . Pelo corolário 2.1 conclui-se que  $d(X, r) = |x + p|$ . Sabe-se que  $d(X, F) = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}$ .

Pela definição (7.3),  $X$  pertence à parábola se, e somente se,  $|x + p| = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}$ . Elevando ao quadrado obtém-se a igualdade

$$|x + p|^2 = (x - p)^2 + y^2$$

que por sua vez é equivalente a  $x^2 + 2px + p^2 = x^2 - 2px + p^2 + y^2$ . Simplificando, obtém-se

$$y^2 = 4px \tag{7.4}$$

Esta equação é chamada de equação reduzida da parábola  $\mathcal{P}$ . Pode-se obter outras formas para equação reduzida da parábola, dependendo de como o foco se situa em relação aos eixos coordenados.

Se o sistema tem origem no vértice  $V$  da parábola e o foco pertencente ao semi-eixo negativo das abscissas, então  $F = (-p, 0)$  e a diretriz terá equação  $r : x = p$ .

Logo,  $X = (x, y)$  pertence à parábola se, e somente se,  $d^2(X, F) = d^2(X, r)$ , isto é,  $(x + p)^2 + y^2 = |x - p|^2$ . Desenvolvendo os quadrados e simplificando, obtém-se

$$y^2 = -4px \quad (7.5)$$

que é outra equação reduzida da parábola. Esta equação resulta também da simples troca de  $x$  por  $-x$  na equação (7.4).

Se  $V = O$  (origem do sistema) e o foco pertencer ao semi-eixo positivo ou ao semi-eixo negativo das ordenadas, as equações obtidas serão, respectivamente,

$$x^2 = 4py \text{ e } x^2 = -4py \quad (7.6)$$

também designadas como equações reduzidas da parábola. Os esboços correspondentes as equações (7.5) e (7.6) são dadas pela figura 7.9.

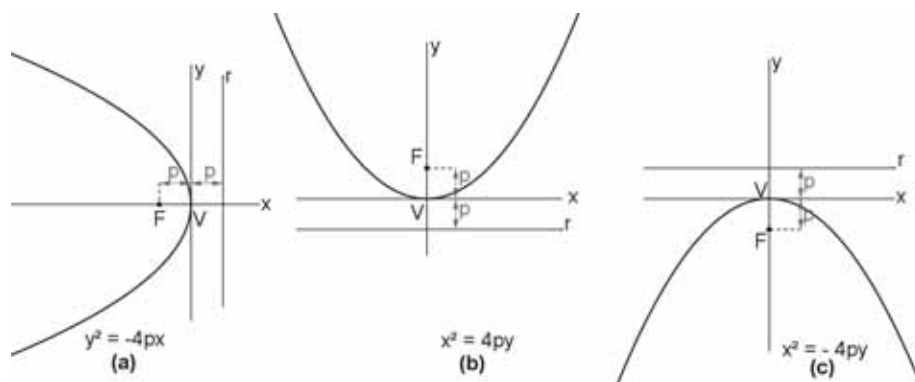


Figura 7.9: Esboço da parábola.

## 7.2.2 Algumas propriedades da parábola dada pela equação reduzida

Algumas propriedades da parábola  $\mathcal{P}$  podem ser obtidas da equação (7.4):

**Propriedade 7.4.** Se  $(x, y)$  satisfaz a equação, então  $x \geq 0$ . Ou seja, nenhum ponto de  $\mathcal{P}$  tem abscissa negativa.

**Propriedade 7.5.** A parábola é simétrica em relação ao eixo  $Ox$ , mas não em relação à reta que contém o vértice e é perpendicular ao eixo  $Ox$ , nem em relação ao vértice  $O$ .

**Propriedade 7.6.** O vértice  $O$  é o único ponto de interseção da parábola com seu eixo de simetria. De fato, da equação (7.4) quando  $y = 0$  implica em  $x = 0$ .

Sejam  $A$  e  $B$  as interseções de uma reta com a parábola tal que esta reta contenha o foco e seja perpendicular ao seu eixo de simetria desta curva. O triângulo  $VAB$  é chamado de **triângulo fundamental da parábola**. Trata-se de um triângulo isósceles, de base igual a amplitude focal  $AB$  e altura igual ao parâmetro  $p$  conforme ilustra a figura 7.10.

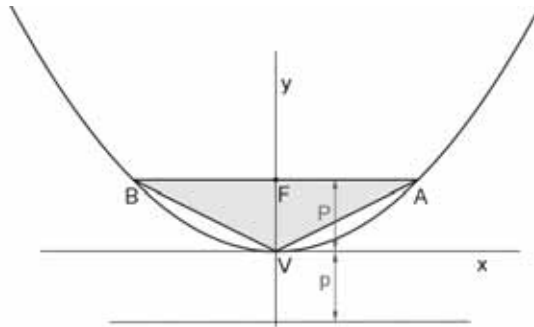


Figura 7.10: Triângulo fundamental da parábola.

### 7.2.3 Retas tangentes e retas normais à parábola

A reta tangente à parábola tem um único ponto em comum com ela, mas de forma análoga ao caso da hipérbole, nem toda reta com essa propriedade é tangente, conforme mostra a figura 7.11.

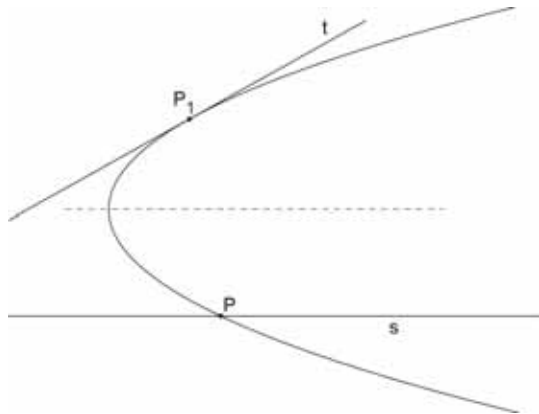


Figura 7.11: Retas que interceptam  $\mathcal{P}$  em um único ponto.

Embora a reta  $s$ , paralela ao eixo da parábola, tenha apenas um ponto em comum com essa curva, não satisfaz a definição 7.2 de reta tangente.

**Definição 7.4.** *Seja  $t$  uma reta e  $\mathcal{P}$  uma parábola.*

- (a)  *$t$  é tangente a  $\mathcal{P}$  se não é paralela ao eixo da parábola e  $t \cap \mathcal{P}$  contém apenas um ponto,  $P_1$ , chamado ponto de tangência.*
- (b) *Se  $t$  é tangente a  $\mathcal{P}$ , em  $P_1$ , a reta que contém  $P_1$  e é perpendicular a  $t$  chama-se reta normal a  $\mathcal{P}$  em  $P_1$ .*

Será considerado dois casos para a equação da reta  $t$  tangente à parábola  $\mathcal{P}$ :  $y^2 = 4px$  no ponto  $P_1 = (x_1, y_1)$ :

- (1) O ponto  $P_1 = (x_1, y_1)$  é vértice de  $\mathcal{P}$ , ou seja,  $y_1 = 0$ .

Como  $P_1 = (x_1, 0)$  pertence à parábola  $\mathcal{P}$  chega-se que  $x_1 = 0$ . Assim, a reta  $t$  tangente a  $\mathcal{P}$  no ponto  $P_1 = (x_1, 0)$  é uma reta perpendicular ao eixo  $x$  de equação  $r : x = 0$ , ou seja, o próprio eixo  $Oy$ .

- (2) O ponto  $P_1 = (x_1, y_1)$  pertence a  $\mathcal{P}$  mas é diferente do vértice de  $\mathcal{P}$ , isto é,  $y_1 \neq 0$ . Sejam  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$  dois pontos pertencentes a  $\mathcal{P}$  tais que  $x_1 \neq x_2$  e  $y_1 \neq -y_2$ . Seja  $s$  a reta secante determinada por  $P_1$  e  $P_2$ . Assim, a inclinação  $m_s$  da reta  $s$  pode ser obtida a partir das coordenadas de  $P_1$  e  $P_2$ . De fato, se  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$  pertencem a  $\mathcal{P}$  tem-se que

$$y_1^2 = 4px_1 \quad (7.7)$$

$$y_2^2 = 4px_2 \quad (7.8)$$

Subtraindo a equação (7.7) de (7.8) obtém-se

$$y_2^2 - y_1^2 = 4p(x_2 - x_1)$$

ou

$$(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 4p(x_2 - x_1)$$

Simplificando encontra-se

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4p}{y_2 + y_1}$$

ou, pelo teorema 2.1,

$$m_s = \frac{4p}{y_2 + y_1}$$

Seja  $m_t$  a inclinação da reta tangente à parábola no ponto  $P_1$ . Logo, pela definição 2.4,

$$m_t = \lim_{(x_2, y_2) \rightarrow (x_1, y_1)} m_s = \lim_{(x_2, y_2) \rightarrow (x_1, y_1)} \frac{4p}{y_2 + y_1} = \frac{2p}{y_1} \quad (7.9)$$

Pelo teorema 2.2 a equação da reta  $t$  tangente à parábola no ponto  $P_1$  pode ser calculada por

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_1}(x - x_1)$$

ou

$$y_1y - y_1^2 = 2px - 2px_1.$$

Como  $y_1^2 = 4px_1$  pode-se escrever  $y_1y = 2p(x + x_1)$

Pelo teorema 2.3 o coeficiente angular da reta normal é  $-\frac{y_1}{2p}$  e sua equação é

$$y_1x + 2py = x_1y_1 + 2py_1$$

### 7.2.4 Propriedade da reta normal a uma parábola

**Teorema 7.1.** *Sejam  $P_1 = (x_1, y_1)$  um ponto qualquer da parábola  $\mathcal{P}$ ,  $P_1F$  o segmento que liga o ponto  $P_1$  ao foco dessa curva e  $n$  a reta normal a  $\mathcal{P}$  em  $P_1$ . Seja  $r$  a reta que contém  $P_1$  e é paralela ao eixo da parábola. Então, a reta normal  $n$  é bissetriz do ângulo formado pelo segmento  $P_1F$  e a reta  $r$ .*

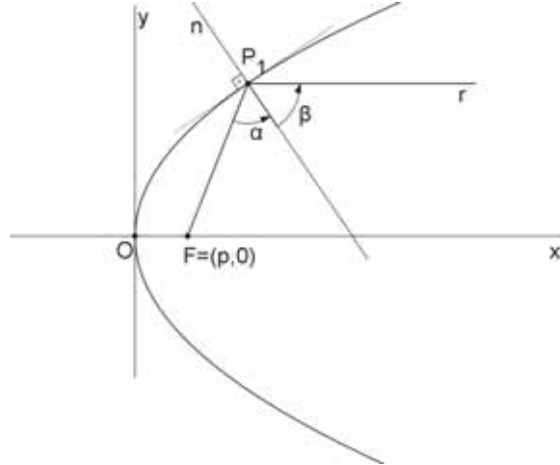


Figura 7.12: Reta  $n$  normal à parábola em  $P_1$ .

*Demonstração.* Considere a equação da parábola na forma canônica

$$y^2 = 4px$$

Sejam  $n$  a normal à parábola  $\mathcal{P}$  no ponto  $P_1 = (x_1, y_1)$ ,  $r$  a reta paralela ao eixo da parábola, e o segmento  $P_1F$ , tal como mostra a figura 7.12. Considere  $\alpha$  o ângulo formado por  $n$  e o segmento  $P_1F$  e  $\beta$  o ângulo formado por  $n$  e  $r$ . Pretende-se mostrar que  $\alpha = \beta$ . Pela expressão (7.9) a inclinação da reta tangente à parábola em  $P_1 = (x_1, y_1)$  é  $\frac{2p}{y_1}$ . Logo, pelo teorema 2.3, a inclinação da reta  $n$  é  $-\frac{y_1}{2p}$ .

Pelo teorema 2.1 inclinação do segmento  $P_1F$  é  $\frac{y_1}{x_1 - p}$ . Assim, pelo teorema 2.4 tem-se que

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{-\frac{y_1}{2p} - \frac{y_1}{x_1 - p}}{1 - \frac{y_1^2}{2p(x_1 - p)}} \right| = \left| \frac{-x_1 y_1 + p y_1 - 2p y_1}{2p x_1 - 2p^2 - y_1^2} \right| = \left| \frac{-x_1 y_1 - p y_1}{2p x_1 - 2p^2 - y_1^2} \right|.$$

Como  $P_1 = (x_1, y_1)$  está sobre a parábola, então,  $y_1^2 = 4p x_1$ . Substituindo este valor de  $y_1^2$  na última igualdade, tem-se que

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{-x_1 y_1 - p y_1}{2p x_1 - 2p^2 - 4p x_1} \right| = \left| \frac{-y_1(x_1 + p)}{-2p(x_1 + p)} \right| = \left| \frac{y_1}{2p} \right| \quad (7.10)$$

Uma vez que a inclinação de  $r$  é 0, resulta:

$$\operatorname{tg} \beta = \left| \frac{0 - \left(\frac{-y_1}{2p}\right)}{1 + 0 \left(\frac{-y_1}{2p}\right)} \right| = \left| \frac{y_1}{2p} \right|. \quad (7.11)$$

Portanto, de (7.10) e (7.11), conclui-se que  $\alpha = \beta$

□

## 8 Definição unificada das cônicas

Uma definição geral das cônicas pode ser dada por:

**Definição 8.1.** *Dados uma reta  $r$  e um ponto  $F$  não pertencente à reta. A elipse, a hipérbole e a parábola podem ser definidas como o lugar geométrico dos pontos cuja razão das distâncias ao ponto  $F$  e a reta  $r$  é uma constante real positiva que depende de cada curva. Esta constante será chamada de **excentricidade**. A reta  $r$  será chamada de **diretriz** e o ponto  $F$  dado será chamado de **foco**.*

Sejam  $r$  a reta diretriz,  $F$  o foco,  $d$  a distância euclidiana e  $P$  um ponto qualquer da curva. Então, a interpretação geométrica da definição 8.1 pode ser dada pela figura 8.1 onde  $e_1$ ,  $e_2$  e  $e_3$ , distintos dois a dois, são as excentricidades da elipse, hipérbole e parábola, respectivamente.

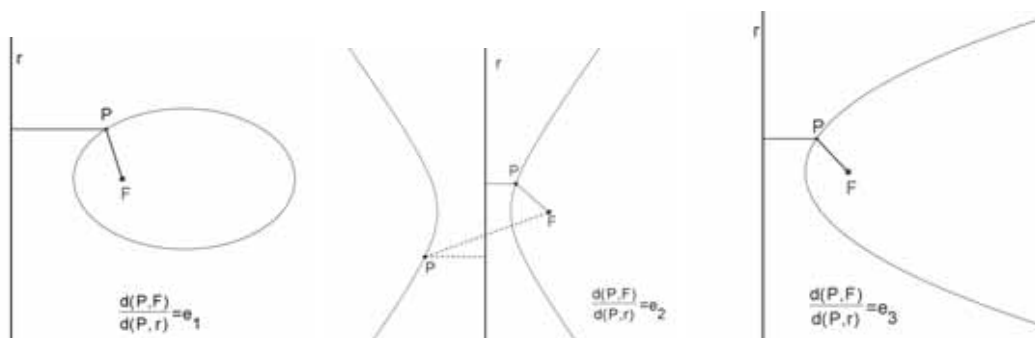


Figura 8.1: Cônicas definidas por foco-diretriz.



Veja a construção A.2.4.1 no Apêndice.

A seguir obtém-se a expressão analítica das cônicas partindo-se da definição 8.1.

Considere o sistema de coordenadas cartesianas  $xOy$ , em que o eixo  $Oy$  coincida com a reta diretriz  $r$  e o eixo  $Ox$  seja a reta perpendicular a  $r$  passando pelo foco  $F$ . Considere  $F$  com coordenadas  $(2p, 0)$ , onde  $p > 0$  conforme a figura 8.2.

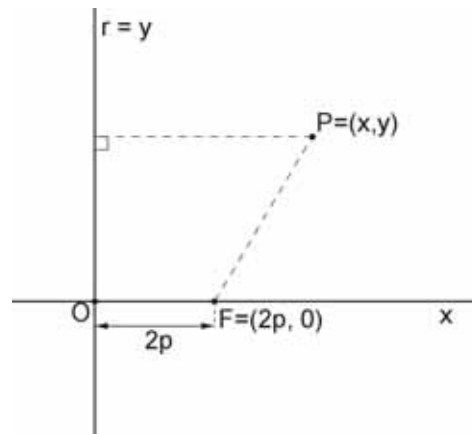


Figura 8.2: Definição foco-diretriz e plano cartesiano

Seja  $P = (x, y)$  um ponto qualquer sobre qualquer uma das cônicas. Pela definição 8.1 tem-se que

$$\frac{d(P, F)}{d(P, r)} = e \quad (8.1)$$

onde  $e$  é a excentricidade da cônica e  $d$  é a distância euclidiana. Tem-se que  $d(P, F) = \sqrt{(x - 2p)^2 + y^2}$  e pela proposição 2.1 conclui-se que  $d(P, r) = |x|$ . Reescrevendo a equação (8.1) em coordenadas cartesianas obtém-se

$$\sqrt{(x - 2p)^2 + y^2} = e|x|$$

Elevando ao quadrado ambos os membros

$$(x - 2p)^2 + y^2 = e^2 x^2$$

Expandindo e simplificando

$$(1 - e^2)x^2 - 4px + y^2 + 4p^2 = 0 \quad (8.2)$$

que é a **equação geral de uma cônica** dada pela definição 8.1. Para determinar cada uma das três cônicas será analisado os valores da excentricidade  $e$ . Divide-se nos seguintes casos:

**Caso  $e = 1$**

A equação (8.2) torna-se:

$$-4px + y^2 + 4p^2 = 0.$$

Isolando  $y$  e simplificando,

$$y^2 = 4p(x - p) \quad (8.3)$$

Considerando  $\bar{O} = (p, 0)$  pode-se definir um outro sistema de coordenadas  $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$  onde  $\bar{O}$  é a origem. Fazendo a translação do sistema  $xOy$  para  $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$ , pela definição 2.3, pode-se garantir as seguintes relações entre as coordenadas:

$$\bar{x} = x - p \text{ e } \bar{y} = y.$$



Assim a equação (8.3) pode ser reescrita como

$$\bar{y}^2 = 4p\bar{x}$$

que é a **equação reduzida da parábola** no sistema  $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$  obtida na seção 7.2.

Após a translação para o sistema  $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$  tem-se:

- Coordenadas do foco:  $F = (p, 0)$
- Equação da diretriz:  $r : \bar{x} = -p$
- Representação geométrica:

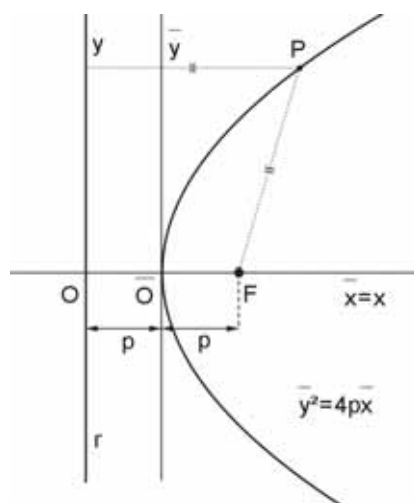


Figura 8.3: Sistema  $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$  e cônica com excentricidade  $e = 1$ .

### Caso $0 < e < 1$

Para  $0 < e < 1$ , então  $1 - e^2 > 0$ . Dividindo a equação (8.2) por  $1 - e^2$  obtém-se:

$$x^2 - \frac{4p}{1 - e^2}x + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{-4p^2}{1 - e^2}.$$

Completando os quadrados, tem-se

$$x^2 - \frac{4p}{1 - e^2}x + \frac{4p^2}{(1 - e^2)^2} + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{4p^2}{(1 - e^2)^2} - \frac{4p^2}{1 - e^2}.$$

Simplificando,

$$\left(x - \frac{2p}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{4p^2e^2}{(1 - e^2)^2}.$$

Dividindo membro a membro por  $\frac{4p^2e^2}{(1 - e^2)^2} = \left(\frac{2pe}{1 - e^2}\right)^2$  tem-se,

$$\frac{\left(x - \frac{2p}{1 - e^2}\right)^2}{\left(\frac{2pe}{1 - e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{4p^2e^2}{1 - e^2}} = 1,$$

que pode ser escrita da forma

$$\frac{\left(x - \frac{2p}{1-e^2}\right)^2}{\left(\frac{2pe}{1-e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{2pe}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2} = 1. \quad (8.4)$$

Efetuada a translação para o sistema  $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$  com origem  $\bar{O} = \left(\frac{2p}{1-e^2}, 0\right)$  dada por

$$\begin{cases} \bar{x} = x - \frac{2p}{1-e^2} \\ \bar{y} = y \end{cases},$$

definindo  $a = \frac{2pe}{1-e^2}$  e  $b = \frac{2pe}{\sqrt{1-e^2}}$  a equação (8.4) pode ser reescrita como

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1 \quad (8.5)$$

que é a **equação reduzida da elipse** no sistema  $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$  obtida na seção 5.2.

### Focos e diretrizes da elipse

Após a translação para o sistema  $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$  e definindo  $F = F_1$  como um dos focos da elipse e  $r = r_1$ , tem-se:

- Coordenadas do foco:  $F_1 = \left(2p - \frac{2p}{1-e^2}, 0\right) = \left(-\frac{2pe^2}{1-e^2}, 0\right) = (-ae, 0)$
- Equação da diretriz:  $r_1 : \bar{x} = -\frac{2p}{1-e^2} = -\frac{a}{e}$
- Representação geométrica:

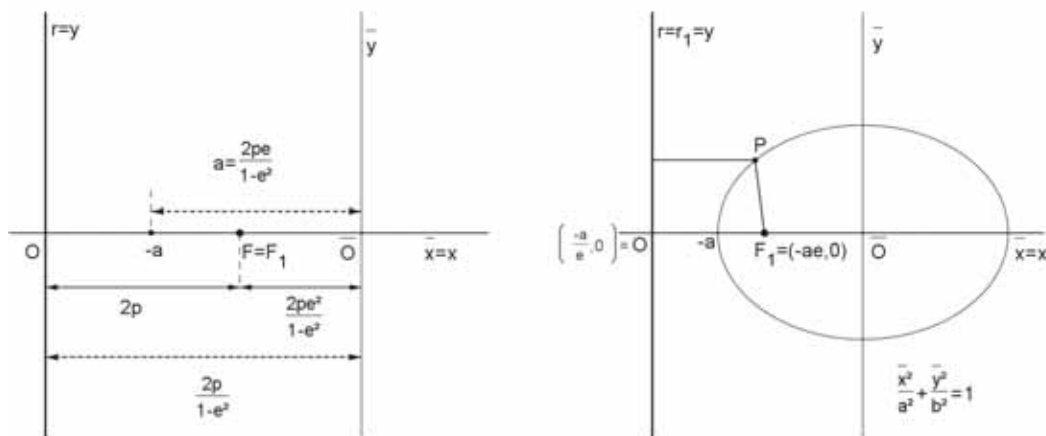


Figura 8.4: Sistema  $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$  e cônica com excentricidade  $0 < e < 1$ .

No sistema  $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$  nota-se que  $F_1$  e  $r_1$  estão situados à esquerda da origem  $\bar{O}$  conforme mostra a figura 8.4. Considere agora os simétricos de  $F_1$  e  $r_1$  em relação ao eixo  $\bar{O}\bar{y}$ , ou seja, o ponto  $F_2 = (ae, 0)$  e a reta  $r_2 : \bar{x} = \frac{a}{e}$ . Então,  $F_2$  e  $r_2$  são respectivamente, o outro foco e outra diretriz da elipse que satisfazem a equação (8.5). De fato, seja  $P = (\bar{x}, \bar{y})$  um ponto qualquer da elipse com excentricidade  $e$  dada anteriormente. Se  $F_2$  e  $r_2$  são respectivamente foco e diretriz desta elipse então, a definição 8.1 é satisfeita, ou seja,

$$\frac{d(P, F_2)}{d(P, r_2)} = e \text{ ou } d(P, F_2) = ed(P, r_2).$$

Em coordenadas cartesianas no sistema  $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$  tem-se

$$\sqrt{(\bar{x} - ae)^2 + \bar{y}^2} = e \left| \frac{a}{e} - \bar{x} \right|.$$

Elevando ao quadrado ambos os membros

$$(\bar{x} - ae)^2 + \bar{y}^2 = e^2 \left( \frac{a}{e} - \bar{x} \right)^2.$$

Expandindo e simplificando tem-se que

$$(1 - e^2)\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = (1 - e^2)a^2.$$

Dividindo membro a membro por  $(1 - e^2)a^2$

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{(1 - e^2)a^2} = 1.$$

Contudo,  $(1 - e^2)a^2 = (1 - e^2) \left( \frac{2pe}{1 - e^2} \right)^2 = b^2$ . Conclui-se que

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1$$

Assim, a elipse é uma cônica que possui dois focos e duas diretrizes conforme ilustra a figura 8.5.

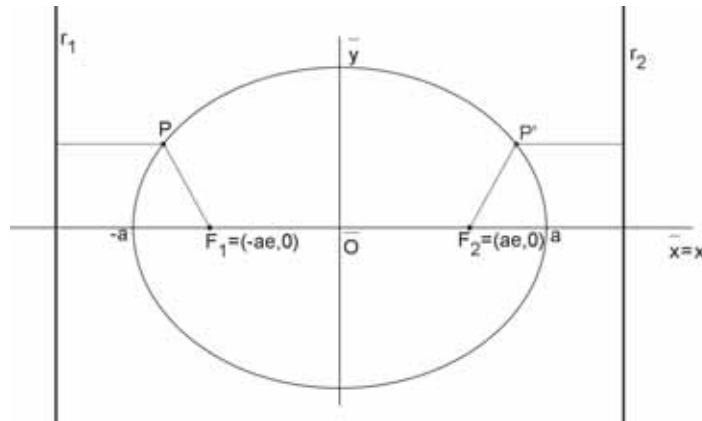


Figura 8.5: Focos e diretrizes da elipse.

### A relação entre a distância focal e a excentricidade da elipse

Seja  $2c$  a distância focal de uma elipse dada pelo comprimento do segmento  $F_1F_2$ . Considerando o sistema cartesiano anterior onde  $F_1 = (-ae, 0)$  e  $F_2 = (ae, 0)$ , então,  $F_1F_2 = 2ae$ . Segue que,

$$2c = 2ae \text{ ou } e = \frac{c}{a}.$$

Ou seja, a excentricidade  $e$  pode ser expressa pela razão  $\frac{c}{a}$ . Nota-se que esta razão mede o quanto os focos se afastam ou se aproximam do centro  $\bar{O}$  ou dos vértices  $(-a, 0)$  e  $(a, 0)$  da elipse, justificando o emprego da palavra excentricidade.

#### Caso $e > 1$

Para  $e > 1$ , então  $e^2 - 1 > 0$ . Dividindo a equação (8.2) por  $e^2 - 1$  e invertendo o sinal dos termos de ambos os lados obtém-se:

$$x^2 + \frac{4p}{e^2 - 1}x - \frac{y^2}{e^2 - 1} = \frac{4p^2}{e^2 - 1}.$$

Completando os quadrados, tem-se

$$x^2 + \frac{4p}{e^2 - 1}x + \frac{4p^2}{(e^2 - 1)^2} - \frac{y^2}{e^2 - 1} = \frac{4p^2}{e^2 - 1} + \frac{4p^2}{(e^2 - 1)^2}.$$

Simplificando,

$$\left(x + \frac{2p}{e^2 - 1}\right)^2 - \frac{y^2}{e^2 - 1} = \frac{4p^2e^2}{(e^2 - 1)^2}.$$

Dividindo membro a membro por  $\frac{4p^2e^2}{(e^2 - 1)^2} = \left(\frac{2pe}{e^2 - 1}\right)^2$  tem se,

$$\frac{\left(x + \frac{2p}{e^2 - 1}\right)^2}{\left(\frac{2pe}{e^2 - 1}\right)^2} - \frac{y^2}{\frac{4p^2e^2}{e^2 - 1}} = 1,$$

que pode ser escrita da forma

$$\frac{\left(x + \frac{2p}{e^2 - 1}\right)^2}{\left(\frac{2pe}{e^2 - 1}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{2pe}{\sqrt{e^2 - 1}}\right)^2} = 1. \quad (8.6)$$

Efetuada a translação para o sistema  $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$  de origem  $\bar{O} = \left(-\frac{2p}{e^2 - 1}, 0\right)$  com

$$\begin{cases} \bar{x} = x + \frac{2p}{e^2 - 1} \\ \bar{y} = y \end{cases},$$

definindo  $a = \frac{2pe}{e^2 - 1}$  e  $b = \frac{2pe}{\sqrt{e^2 - 1}}$ , a equação (8.6) pode ser reescrita como

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1 \quad (8.7)$$

que é a **equação reduzida da hipérbole** no sistema  $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$  obtida na seção 6.2.

### Focos e diretrizes da hipérbole

Definindo  $F = F_1$  e  $r = r_1$  em que  $F = (2p, 0)$  e  $r : x = 0$ , após a translação para o sistema  $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$  tem-se:

- Coordenadas do foco:  $F_1 = \left(2p + \frac{2p}{e^2 - 1}, 0\right) = \left(\frac{2pe^2}{e^2 - 1}, 0\right) = (ae, 0)$
- Equação da diretriz:  $r_1 : \bar{x} = \frac{2p}{e^2 - 1} = \frac{a}{e}$
- Representação geométrica:

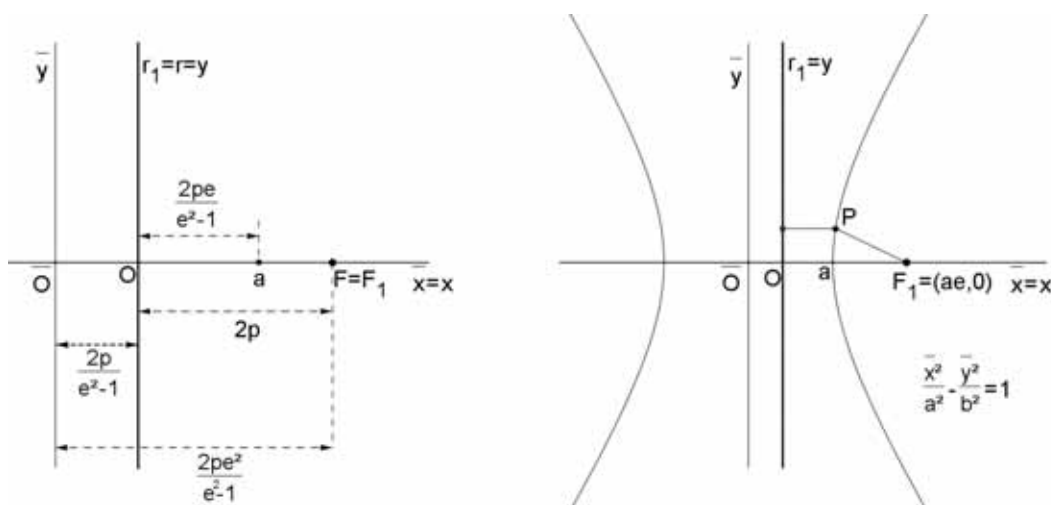


Figura 8.6: Sistema  $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$  e cônica com excentricidade  $e > 1$ .

No sistema  $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$  nota-se que  $F_1$  e  $r_1$  situados à direita da origem  $\bar{O}$  conforme mostra a figura 8.6. Considere agora os simétricos de  $F_1$  e  $r_1$  em relação ao eixo  $\bar{y}$ , ou seja, o ponto  $F_2 = (-ae, 0)$  e a reta  $r_2 : \bar{x} = -\frac{a}{e}$ . Então,  $F_2$  e  $r_2$  são respectivamente, o outro foco e outra reta diretriz da hipérbole que satisfazem a equação (8.7). De fato, seja  $P = (\bar{x}, \bar{y})$  um ponto qualquer da hipérbole de excentricidade  $e$  no sistema  $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$  considerado anteriormente. Se  $F_2$  e  $r_2$  são respectivamente foco e diretriz dessa hipérbole então, a definição 8.1 é satisfeita, ou seja,

$$\frac{d(P, F_2)}{d(P, r_2)} = e \text{ ou } d(P, F_2) = ed(P, r_2).$$

Em coordenadas cartesianas no sistema  $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$  tem-se

$$\sqrt{(\bar{x} + ae)^2 + \bar{y}^2} = e \left| \bar{x} + \frac{a}{e} \right|.$$

Elevando ao quadrado ambos os membros

$$(\bar{x} + ae)^2 + \bar{y}^2 = e^2 \left( \bar{x} + \frac{a}{e} \right)^2$$

e desenvolvendo os quadrados e simplificando tem-se

$$(1 - e^2)\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = (1 - e^2)a^2 \text{ ou } (e^2 - 1)\bar{x}^2 - \bar{y}^2 = (e^2 - 1)a^2.$$

Dividindo membro a membro por  $(e^2 - 1)a^2$

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{(e^2 - 1)a^2} = 1$$

Como  $(e^2 - 1)a^2 = (e^2 - 1) \left( \frac{2pe}{e^2 - 1} \right)^2 = b^2$ , então obtém-se

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1$$

Diz-se então que a hipérbole é uma cônica que possui dois focos e duas diretrizes conforme ilustra a figura 8.7.

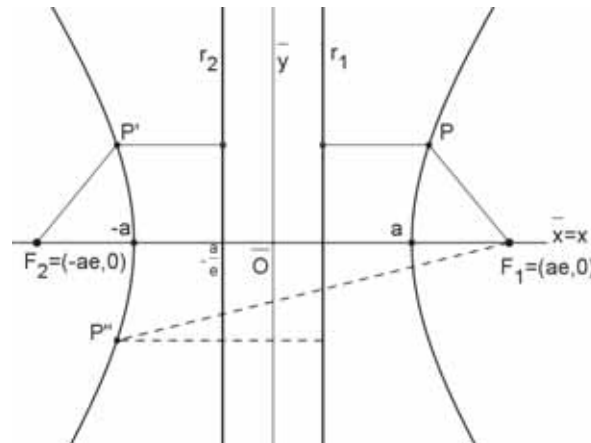


Figura 8.7: Focos e diretrizes da hipérbole.

### A relação entre a distância focal e a excentricidade da hipérbole

Seja  $2c$  a distância focal de uma hipérbole dada pelo comprimento do segmento  $F_1F_2$ . Considerando o sistema cartesiano anterior onde  $F_1 = (ae, 0)$  e  $F_2 = (-ae, 0)$ , então,  $F_1F_2 = 2ae$ . Segue que,

$$2c = 2ae \text{ ou } e = \frac{c}{a},$$

ou seja, a excentricidade da hipérbole pode ser expressa pela razão  $\frac{c}{a}$ .



Veja na construção A.2.4.2 no Apêndice a análise da expressão

$$(1 - e^2)x^2 - 4px + y^2 + 4p^2 = 0$$

## 8.1 Famílias de curvas

A partir dos três casos analisados anteriormente, a definição 8.1 pode ser reescrita da seguinte forma:

**Definição 8.2.** *Seja  $r$  uma reta e  $F$  um ponto não pertencente a  $r$ . Então, uma cônica  $C$  com diretriz  $r$ , foco  $F$  e excentricidade  $e$  é o conjunto de todos os pontos  $P$  tais que:*

$$\frac{d(P, F)}{d(P, r)} = e$$

onde  $d$  representa distância euclidiana. Se  $0 < e < 1$ , a cônica será uma elipse;  $e = 1$  será uma parábola e  $e > 1$  será uma hipérbole.

Nota-se da definição 8.2 que, uma vez fixada uma reta e um ponto não pertencente a ela, determina-se uma única parábola que estará associada a excentricidade 1. Para a elipse e a hipérbole tem-se uma família de curvas, ou seja, para cada número real no intervalo  $0 < e < 1$  determina-se uma elipse e para  $e > 1$  uma hipérbole. Isto pode ser ilustrado pela figura 8.8:

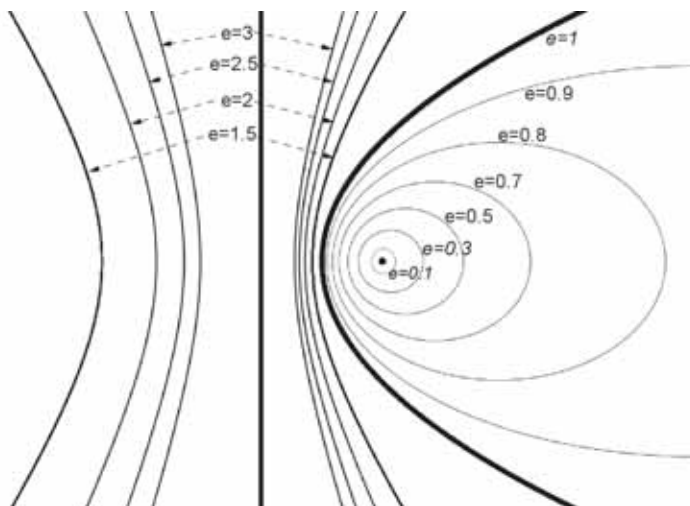


Figura 8.8: Famílias de cônicas.

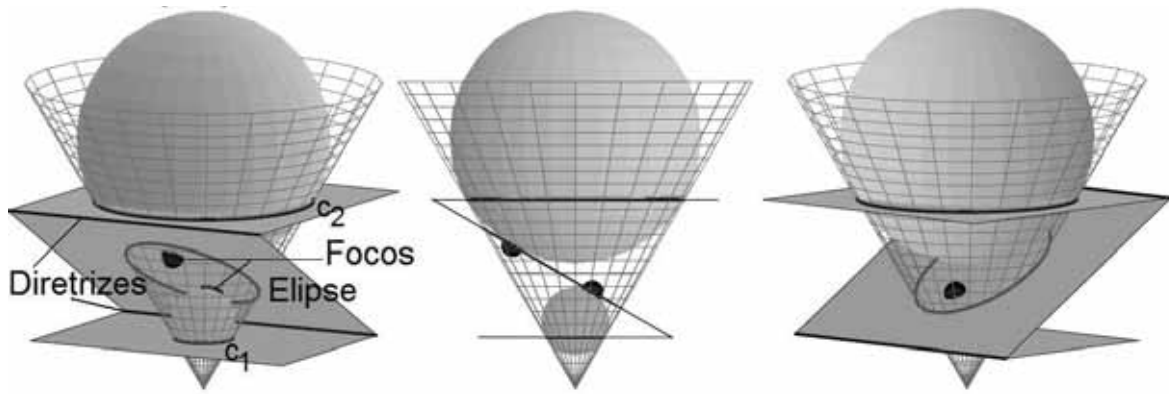


Veja a construção A.2.4.3 no Apêndice.

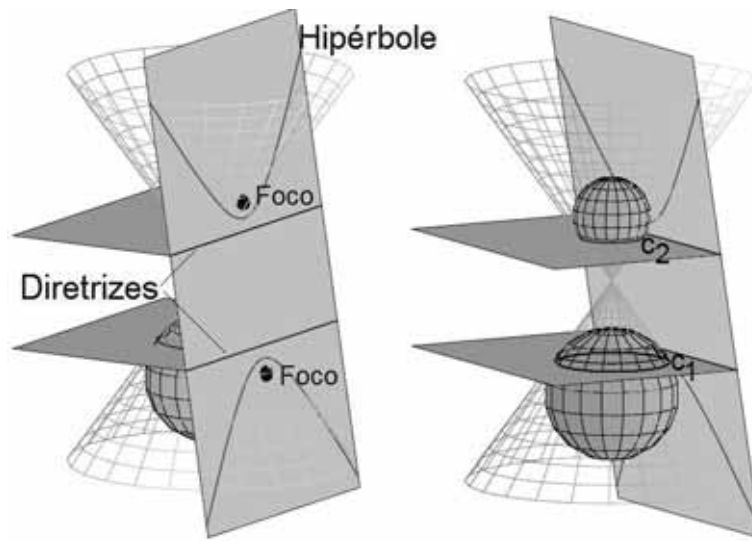
**Observação 8.1.** O estudo da teoria das cônicas no espaço tridimensional não será tratado neste trabalho. No entanto, pode-se justificar o surgimento da reta diretriz na definição 8.2 utilizando-se do trabalho do matemático belga G.P. Dandelin (1794 - 1847), escrito em 1822.

Segundo a definição de Dandelin, dado um cone e um plano, não passando pelo vértice, há sempre uma ou duas esferas tangentes simultaneamente ao cone e ao plano. A curva de interseção do plano com o cone é uma cônica e o(s) ponto(s) de tangência da(s) esfera(s) com o plano é(são) o(s) foco(s) dessa cônica conforme ilustra a figura 8.9. A reta diretriz para cada cônica é dada pela interseção do plano da cônica com o plano que contém  $c_1$  ou  $c_2$ , onde  $c_1$  e  $c_2$  são as circunferências obtidas pela interseção das esferas com o cone.

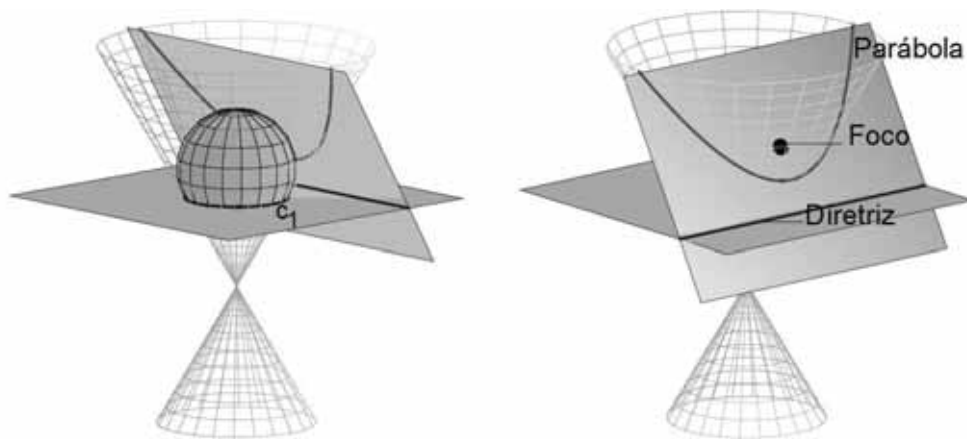




(a)



(b)



(c)

Figura 8.9: Esferas de Dandelin e as cônicas

Um estudo mais detalhado sobre o trabalho de Dandelin é feito na referência [7].

## 8.2 Forma das cônicas

### 8.2.1 Elipse

Quanto a forma da elipse pode-se dizer que algumas são mais alongadas e outras mais arredondadas. Isso se dá pelo fato da elipse estar estreitamente vinculada ao seu retângulo fundamental estudado na seção 5.2.2 ou a sua excentricidade.

Em relação ao retângulo fundamental, se ele for alongado o mesmo se dará com a elipse; se o retângulo for “quase um quadrado”, a elipse será “quase uma circunferência”. Para esta análise o que importa é quanto o parâmetro  $a$  é maior que  $b$  e isso pode ser medido pelo quociente  $\frac{b}{a}$  que é designado por **centralidade da elipse**. Esta razão pertence ao intervalo  $]0,1[$  pois  $0 < b < a$ . Assim quanto mais próximo  $\frac{b}{a}$  estiver de 1, mais o retângulo fundamental se aproximará de um quadrado e portanto mais arredondada será a elipse. Por outro lado, quanto mais próximo  $\frac{b}{a}$  estiver de 0 mais alongada será a elipse. A excentricidade  $e$ , dada pela razão  $\frac{c}{a}$ , é outro indicador da forma desta curva. Uma vez que  $\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1$  quando um dos valores  $\frac{b}{a}$  ou  $\frac{c}{a}$  se aproxima de 1 o outro se aproxima de 0. Em outras palavras, quanto maior a excentricidade menor será sua centralidade e vice-versa. Por isso, são mais alongadas as elipses para as quais  $\frac{c}{a}$  é mais próximo de 1, e mais arredondadas aquelas para quais  $\frac{c}{a}$  está mais próximo de 0. Observe a figura 8.10.

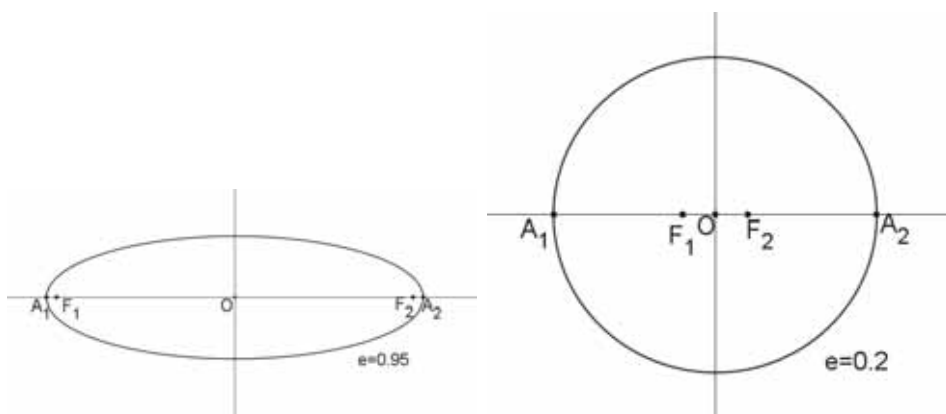


Figura 8.10: Relação entre excentricidade e forma da elipse.

Embora as elipses não sejam circunferências, usando os conceitos vistos anteriormente é aceitável afirmar que uma circunferência é uma “elipse de excentricidade nula”, ou seja, tem-se  $a = b$  e  $e = 0$ .



Veja a construção A.2.4.4 no Apêndice.

### 8.2.2 Hipérbole

As inclinações das assíntotas da hipérbole tem estreita ligação com o formato desta curva. Como as inclinações são determinadas pelo número  $b/a$ , que está associado ao retângulo fundamental, então o formato da hipérbole também depende de seu retângulo fundamental. Os valores de  $b/a$  próximos de 1 indicam que este retângulo se assemelha a um quadrado; valores muito maiores que 1 ou muito próximos de 0 indicam que ele é mais alongado (alto e estreito, ou baixo e comprido). A relação  $c^2 = a^2 + b^2$ , dividida membro a membro por  $a^2$ , fornece  $(c/a)^2 = 1 + (b/a)^2$ . Pode-se utilizar o número  $e = c/a$ , ou seja, a excentricidade da hipérbole, como indicador da sua forma (note que  $e > 1$ , ao contrário da excentricidade da elipse, que pertence ao intervalo  $]0, 1[$ ). Quando  $e$  é um número “muito próximo” de 1,  $b/a$  é “muito próximo” de 0, indicando que a altura do retângulo fundamental é muito menor que sua base. Os ramos da hipérbole são, portanto, mais fechados nas proximidades dos vértices, e abrem-se lentamente à medida que  $|x|$  cresce conforme mostra a figura 8.11. Por outro lado se  $e$  é muito maior que 1 então  $b/a$  também será. O retângulo fundamental tem altura muito maior que a base. Neste caso, na vizinhança dos vértices os ramos da hipérbole tendem para as retas  $x = a$  e  $x = -a$ , e seus pontos afastam-se lentamente delas à medida que  $|x|$  cresce como mostra a figura 8.11.

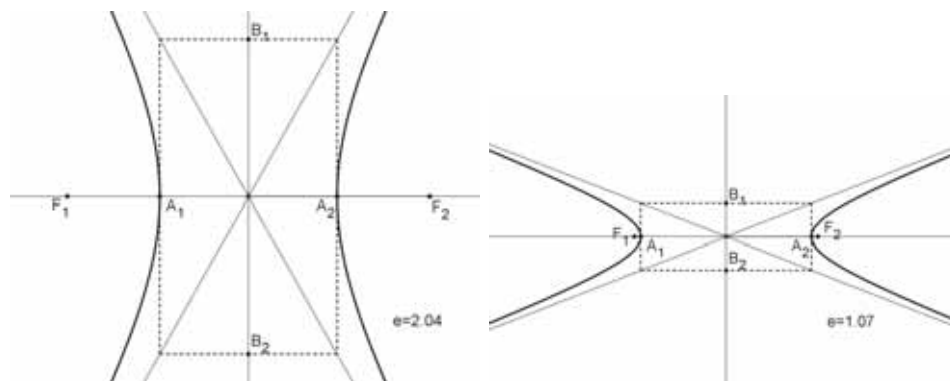


Figura 8.11: Relação entre excentricidade e forma da hipérbole.

 Veja a construção A.2.4.5 no Apêndice.

### 8.2.3 Parábola

Como toda parábola tem excentricidade igual a 1 pode-se dizer então que todas elas são semelhantes. Para visualizar melhor essa propriedade pode-se analisar o triângulo fundamental associado a cada parábola figura 8.12.

Se este for “mais alongado”, isto é, se  $p$  fosse bem maior que o comprimento de  $AB$ , a parábola seria “mais fechada”. Se, ao contrário,  $AB$  tivesse comprimento bem maior

que  $p$ , a parábola seria “mais aberta”. Pela definição da parábola é fácil observar que o comprimento de  $AB$  é o dobro da distância do foco à diretriz, ou seja, o comprimento de  $AB$  para todas as parábolas, é  $4p$ . Observa-se também que a medida do ângulo  $\widehat{AVB}$  é a mesma, qualquer que seja a parábola considerada. Portanto, os triângulos fundamentais de todas as parábolas são semelhantes, independentemente do valor de  $p$ .

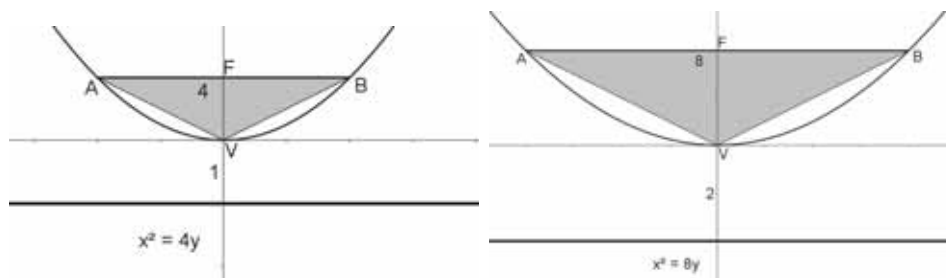


Figura 8.12: Semelhança dos triângulos fundamentais das parábolas.



Veja a construção A.2.4.6 no Apêndice.

## 8.3 Cônicas equivalentes

O estudo da relação entre as cônicas e suas excentricidades é imprescindível para a análise e comparação das formas geométricas determinadas por estas curvas. Sendo assim, pretende-se nesta seção trabalhar com classes de equivalências do conjuntos das cônicas no plano.

### 8.3.1 Relação de equivalência entre as cônicas

**Definição 8.3.** Seja  $E \neq \emptyset$ . Chama-se relação sobre  $E$  a todo subconjunto  $R$  de  $E \times E$ .

**Definição 8.4.** Uma relação  $R$  sobre um conjunto  $E$  não vazio é chamada relação de equivalência sobre  $E$  se, e somente se,  $R$  é reflexiva, simétrica e transitiva, isto é, se são verdadeiras as sentenças:

- i)  $(\forall x)(x \in E \implies xRx)$
- ii)  $(\forall x \forall y)(xRy \implies yRx)$
- iii)  $(\forall x \forall y \forall z)(xRy \text{ e } yRz \implies xRz)$

**Definição 8.5.** Seja  $E$  um conjunto não vazio com  $a, b \in E$  e  $R$  uma relação de equivalência sobre  $E$ . Se o par  $(a, b) \in R$ , então diz-se que  $a$  é equivalente a  $b$  módulo  $R$  denotando-se por  $a \equiv b \pmod{R}$ .

Seja  $\mathcal{C}$  o conjunto de todas as cônicas no plano e  $e > 0$  a excentricidade de cada uma destas curvas. É possível definir uma relação entre os elementos de  $\mathcal{C}$  através da igualdade das excentricidades destes elementos. De fato, sejam  $a$  e  $b$  cônicas pertencentes ao conjunto  $\mathcal{C}$ . Diz-se que  $a$  se relaciona com  $b$  pela relação  $R$  se a excentricidade de  $a$  for igual a excentricidade de  $b$ . Esta relação é denotada por  $aRb$ .

Analisando a relação  $R$  para  $a, b, c \in \mathcal{C}$  tem-se que:

- i)  $aRa$ , pois  $\forall a \in \mathcal{C}$ ,  $a$  tem mesma excentricidade de  $a$ .
- ii)  $aRb \implies bRa$ . Se a excentricidade de  $a$  é igual a excentricidade de  $b$ , então a excentricidade de  $b$  é igual a excentricidade de  $a$ .
- iii)  $aRb$  e  $bRc \implies aRc$ . Se  $a$  e  $b$  têm a mesma excentricidade e a excentricidade de  $b$  é igual a excentricidade de  $c$ , então a excentricidade de  $a$  é igual a excentricidade de  $c$ .

Portanto, pela definição 8.4 a relação  $R$  é uma relação de equivalência.

**Exemplo 8.1.** Sejam  $\mathcal{E}_1$  e  $\mathcal{E}_2$  elipses com equações canônicas  $\mathcal{E}_1 : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  e  $\mathcal{E}_2 : \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ . De acordo com o estudo visto anteriormente, a excentricidade de uma elipse pode ser dada por  $e = \frac{c}{a}$ . Sabe-se que  $c$  é a distância focal da elipse e  $c^2 = a^2 - b^2$  onde  $a$  e  $b$  são respectivamente as medidas do eixo maior e eixo menor da elipse. Desta forma, tem-se que  $e_{\mathcal{E}_1} = e_{\mathcal{E}_2} = 0,6$  e portanto  $\mathcal{E}_1$  e  $\mathcal{E}_2$  são equivalentes. Logo, pela definição 8.5,  $\mathcal{E}_1 \equiv \mathcal{E}_2 \pmod{(R)}$ . A figura 8.13 representa geometricamente  $\mathcal{E}_1$  e  $\mathcal{E}_2$  no plano cartesiano.

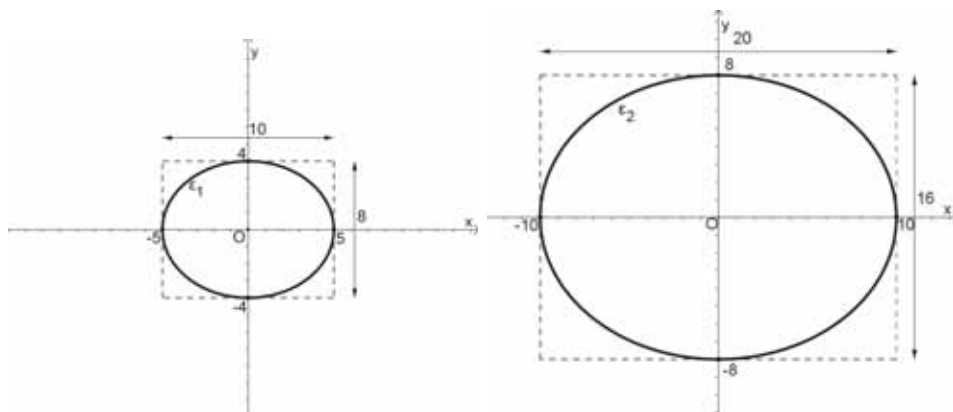


Figura 8.13: Elipses equivalentes.

Observa-se que o retângulo fundamental de  $\mathcal{E}_1$  e  $\mathcal{E}_2$  são semelhantes, ou seja, suas dimensões são proporcionais. Por este exemplo observa-se que embora duas cônicas equivalentes possam ter expressões analíticas diferente elas têm a mesma forma geométrica. Isto significa que as cônicas equivalentes se identificam ou se sobrepõem após uma ampliação ou redução de uma delas.

### 8.3.2 Classe de equivalência das cônicas e conjunto quociente

**Definição 8.6.** *Seja  $R$  uma relação de equivalência sobre um conjunto  $E$ . Dado  $a \in E$ , chama-se classe de equivalência determinada por  $a$ , módulo  $R$ , o subconjunto  $\bar{a}$  de  $E$  constituído pelos elementos  $x$  tais que  $xRa$ . Em símbolos:*

$$\bar{a} = \{x \in E \mid xRa\}$$

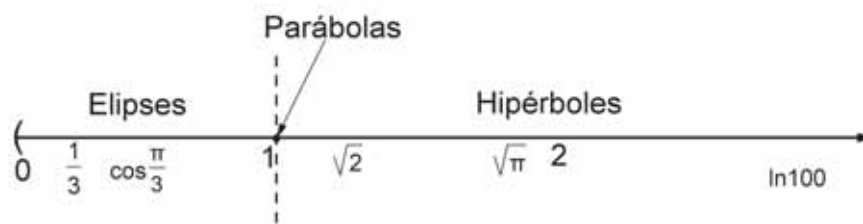
Pela definição 8.6 pode-se dizer que uma classe de equivalência no conjunto  $\mathcal{C}$  das cônicas é um subconjunto formado por todas as cônicas que possuem a mesma excentricidade. Desta forma as classes pertencentes ao conjunto  $\mathcal{C}$  podem ser agrupadas em três grandes subconjuntos:

- i)* O conjunto de todas as classes de cônicas com excentricidade  $e$  tal que  $0 < e < 1$ . Os elementos destas classes são elipses.
- ii)* O conjunto de todas as classes de cônicas com excentricidade  $e > 1$ . Os elementos destas classes são hipérbolos.
- iii)* O conjunto formado por apenas uma classe representada pela excentricidade  $e = 1$ . Nesta classe encontram-se todas as parábolas.

Conclui-se que cada uma destas classes é composta por cônicas com expressões analíticas diferentes mas que possuem a mesma forma do ponto de vista geométrico. Isto significa que o retângulo fundamental das elipses de uma mesma classe são proporcionais pois eles definem o valor da excentricidade. O mesmo acontece com as classes das hipérbolos. Em relação as parábolas, o fato de todas pertencerem a uma única classe implica que os triângulos fundamentais de todas estas curvas são proporcionais. Generalizando, pode-se dizer que todos os elementos de  $\mathcal{C}$  pertencentes a uma mesma classe possuem representações geométricas que se sobrepõem quando rotacionadas, ampliadas ou reduzidas adequadamente.

**Definição 8.7.** *O conjunto das classes de equivalência módulo  $R$  é indicado por  $E/R$  e é chamado de quociente de  $E$  por  $R$ .*

Pela definição 8.7 o conjunto das classes de equivalência de  $\mathcal{C}$  módulo  $R$  onde  $R$  é a relação dada pela igualdade das excentricidades das cônicas é indicado por  $\mathcal{C}/R$ . Este conjunto é chamado de conjunto quociente de  $\mathcal{C}$  por  $R$  cuja representação geométrica pode ser dada pela figura 8.14.

Figura 8.14: Conjunto quociente  $\mathcal{C}/R$ .

Conforme apresentado no Capítulo 3, sabe-se que uma cônica é obtida geometricamente pela interseção de um plano com um cone duplo. Sabe-se também que a determinação de cada uma das cônicas se dá através da variação da inclinação deste plano. Desta forma, conclui-se que a excentricidade de uma cônica está diretamente relacionada com a inclinação do plano que intersecta um cone duplo, uma vez que cada cônica está associada a um valor diferente de excentricidade. Além disso, mantendo-se constante a inclinação do plano que determina uma seção cônica pode-se dar uma interpretação geométrica de classes de equivalência das cônicas. Uma classe de equivalência é obtida geometricamente quando fixada a direção do vetor normal do plano que intersecta o cone. As diversas cônicas em uma mesma classe de equivalência serão as interseções obtidas pelos planos paralelos ao plano que gerou o representante da classe de equivalência.

## 8.4 Equações das cônicas em coordenadas polares

Nos aspectos analíticos das cônicas apresentados até aqui tem-se empregado exclusivamente o sistema de coordenadas cartesianas. Será introduzido nesta seção outro sistema de coordenadas no plano, denominado **sistema de coordenadas polares**. Este sistema é de grande utilidade na representação de lugares geométricos pois simplifica as equações e estudo das curvas determinadas por estes lugares. Além disto, as cônicas dadas em coordenadas polares são de extrema importância para a aplicação em Mecânica Celeste no capítulo subsequente.

### 8.4.1 Sistema de coordenadas polares

Para determinar-se a posição de um ponto neste sistema toma-se como referência um ponto fixado  $O$ , denominado pólo, e uma semi-reta fixada  $Ox$  denominada eixo polar, conforme ilustra a figura 8.15.

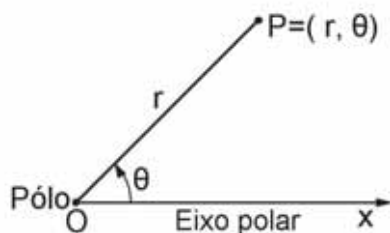


Figura 8.15: Sistema de coordenadas polares.

Seja  $P$  um ponto qualquer no plano. O segmento de reta  $OP$  de comprimento  $r$  é denominado raio vetor. O ângulo  $\theta$  determinado pelo eixo polar  $Ox$  e o segmento  $OP$  é denominado ângulo polar. Então, as coordenadas polares de  $P$  é dada pelo par: raio vetor  $OP = r$  e o ângulo polar  $\theta$  com representação  $P = (r, \theta)$ .

A reta perpendicular ao eixo polar passando pelo pólo  $O$  é denominada eixo ortogonal ou eixo  $Oy$ . O ângulo  $\theta$  é medido partindo-se do lado de origem determinado pelo eixo polar até o outro lado denominado lado extremidade de  $\theta$  determinado por  $r$ . A coordenada polar  $\theta$  será positiva quando medida no sentido anti-horário e negativa no sentido horário. A coordenada linear  $r$  será positiva quando coincidir com o lado extremidade de  $\theta$  e negativa se estiver sobre o prolongamento de tal lado conforme mostra a figura 8.16.

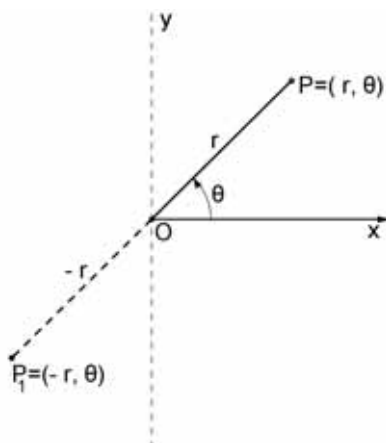


Figura 8.16: Sistema de coordenadas polares

É fácil ver que dado um par de coordenadas polares  $(r, \theta)$  determina-se um único ponto no plano polar. Entretanto, a recíproca não é verdadeira pois um ponto  $P$  determinado pelas coordenadas  $(r, \theta)$  pode ser também determinado por  $(r, \theta + 2\pi n)$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ . Percebe-se que no sistema cartesiano se estabelece uma correspondência biunívoca entre cada ponto e um par de números reais mas esta correspondência não é biunívoca no sistema polar. Neste último sistema um ponto pode ser representado por infinitos pares de coordenadas polares. Entretanto, o uso de apenas um par de



coordenadas polares neste trabalho será suficiente para representar qualquer ponto no plano. Sendo assim, para um ponto  $P$  será considerado o raio vetor  $r$  não negativo e  $0 \leq \theta < 360^\circ$ . As coordenadas com estas características são denominadas **coordenadas principais** de  $P$ .

Conforme mostra a figura 8.17, o plano de coordenadas polares é determinado por uma série de circunferências concêntricas e de retas concorrentes de forma que o centro destas circunferências e a interseção destas retas é dado pelo pólo  $O$ . Os raios das circunferências são múltiplos inteiros do menor raio tomado como unidade de medida e os ângulos formado entre cada par de retas adjacentes são congruentes. Para exemplificar a representação de um ponto no plano de coordenadas polares observa-se na figura 8.17 o ponto  $P$  de coordenadas  $P = \left(5, \frac{\pi}{6}\right)$ .

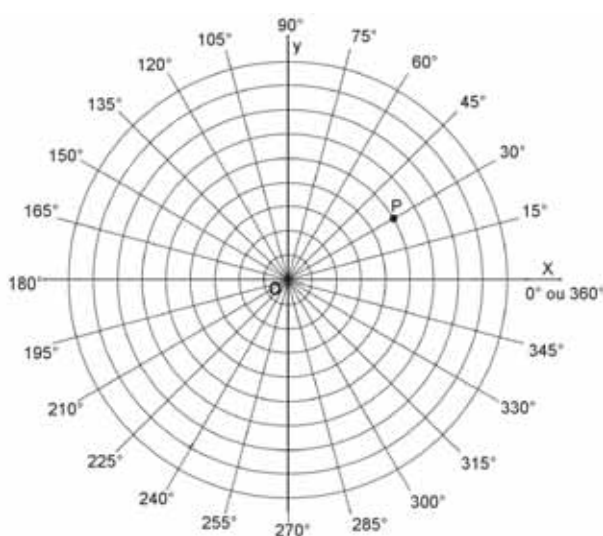


Figura 8.17: Plano de coordenadas polares.

## 8.4.2 Transformações entre coordenadas polares e cartesianas.

Frequentemente, para um lugar geométrico especificado é conveniente transformar a equação polar na equação cartesiana e vice-versa. Para efetuar estas transformações deve-se conhecer as relações que existem entre as coordenadas cartesianas e polares de um ponto qualquer sobre o lugar geométrico. Estas relações podem ser obtidas de forma mais simples quando o pólo e o eixo polar do sistema polar coincidem, respectivamente, com a origem e com o eixo  $x$  positivo do sistema de coordenadas cartesianas, conforme mostra a figura 8.18.

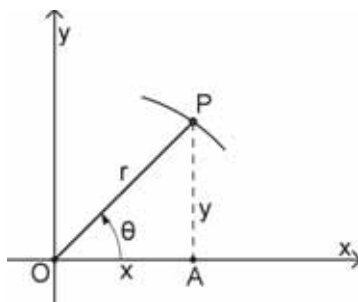


Figura 8.18: Transformação entre coordenadas polares e cartesianas

Seja  $P$  um ponto de coordenadas cartesianas  $(x, y)$  e coordenadas polares principais  $(r, \theta)$ . Seja  $AP$  a reta perpendicular ao eixo  $x$  passando por  $P$ . De forma imediata, obtém-se do triângulo  $\triangle OAP$  as seguintes relações:

$$x = r \cos \theta \quad (8.8)$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta \quad (8.9)$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (8.10)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}. \quad (8.11)$$

Das relações (8.8), (8.9), (8.10) e (8.11) obtém-se

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (8.12)$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (8.13)$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (8.14)$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \quad (8.15)$$

As relações (8.8) e (8.9) permitem converter as coordenadas polares em cartesianas e as relações (8.12) e (8.15), as coordenadas cartesianas em polares. Como  $\theta$  pode ser expresso por uma função trigonométrica, as relações (8.10), (8.11), (8.13) e (8.14) são importantes para auxiliar a manipulação algébrica nesta situação.

### 8.4.3 Equações polares das cônicas

Partindo-se da definição 8.1 que caracteriza as cônicas pela propriedade foco-diretriz é possível obter a equação geral destas curvas em coordenadas polares. De fato, sejam  $F$  e  $d$  respectivamente o foco e a reta diretriz de uma cônica  $\mathcal{C}$  qualquer posicionada no sistema cartesiano  $xOy$  de forma que  $d$  concida com o eixo  $y$  e  $F$  possua coordenadas cartesianas  $(q, 0)$  onde  $q > 0$ . Neste mesmo sistema  $xOy$  considere o eixo polar  $O'x$  numa posição sobre o eixo  $x$  tal que o pólo  $O'$  se identifique com o foco  $F$  conforme ilustra a figura 8.19.

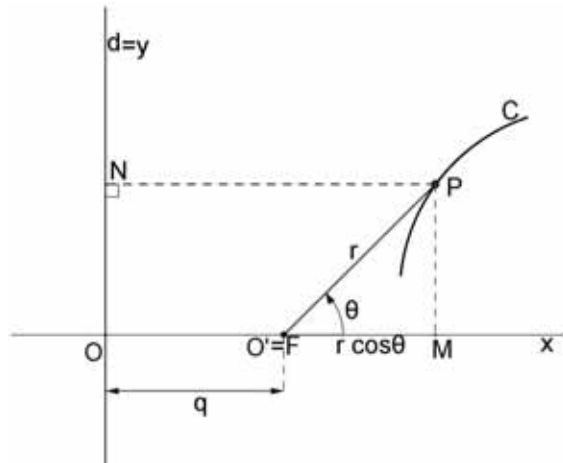


Figura 8.19: Cônicas em coordenadas polares

Seja  $P$  um ponto qualquer da cônica  $\mathcal{C}$  onde as coordenadas polares de  $P$  são  $(r, \theta)$ . Defina  $OF = q$ . Considerem  $M$  e  $N$  as projeções ortogonais de  $P$  sobre  $d$  e  $O'x$  respectivamente.

É fácil ver que  $FM = r \cos \theta$ . Pela definição 8.1 tem-se que:

$$\frac{FP}{PN} = e \quad (8.16)$$

onde  $e$  é a excentricidade da cônica.

Na construção dada pela figura 8.19 observa-se que:

$$FP = r \text{ e } PN = OF + FM = q + r \cos \theta.$$

Substituindo na equação (8.16) obtém-se

$$\frac{r}{q + r \cos \theta} = e,$$

onde isolando o valor de  $r$  conclui-se que

$$r = \frac{eq}{1 - e \cos \theta}, (\theta \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ para } e = 1) \quad (8.17)$$

que é a **equação geral das cônicas em coordenadas polares** .

A equação (8.17) é equivalente a equação (8.2). De fato, de (8.17) obtém-se que

$$r - r e \cos \theta = eq \quad (8.18)$$

Considere o sistema de coordenadas cartesianas  $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$  tal que  $\bar{O} = O' = F$  e  $\bar{x} = x$  conforme mostra a figura 8.20.

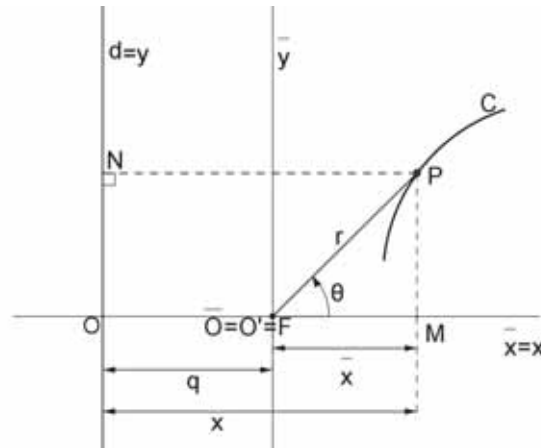


Figura 8.20: Sistema de coordenadas cartesianas e polares.

No sistema  $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$  tem-se que  $r = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}$  e  $\bar{x} = r \cos \theta$ , então a equação 8.18 pode ser reescrita como

$$\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} - \bar{x}e = eq \text{ ou } \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} = e(\bar{x} + q). \quad (8.19)$$

Efetuada a translação para o sistema  $xOy$  em que

$$\begin{cases} x = \bar{x} + q \\ y = \bar{y}, \end{cases}$$

a expressão (8.19) torna-se

$$\sqrt{(x - q)^2 + y^2} = ex,$$

e elevando ambos os membros ao quadrado

$$(x - q)^2 + y^2 = e^2 x^2.$$

Desenvolvendo o quadrado e simplificando

$$(1 - e^2)x^2 - 2qx + y^2 + q^2 = 0.$$

Definindo  $q = 2p$  obtém-se

$$(1 - e^2)x^2 - 4px + y^2 + 4p^2 = 0$$

que é a equação (8.2).

Conclui-se que as equações (8.17) e (8.2) são equivalentes. Portanto, a partir da equação (8.17) obtém-se uma elipse para  $0 < e < 1$ , parábola para  $e = 1$  e hipérbole para  $e > 1$ .

A equação (8.17) foi determinada considerando o foco  $F$  com coordenadas cartesianas  $(q, 0)$ ,  $q > 0$  no sistema  $xOy$ . Considere o foco e o pólo coincidindo com a origem do sistema  $xOy$  e eixo polar sobre o eixo  $Ox$ . De maneira análoga ao procedimento usado para determinar a equação 8.17, pode-se obter outras formas da equação polar para as cônicas considerando os seguintes casos:

1) **A reta diretriz  $d$  é perpendicular ao eixo polar.**

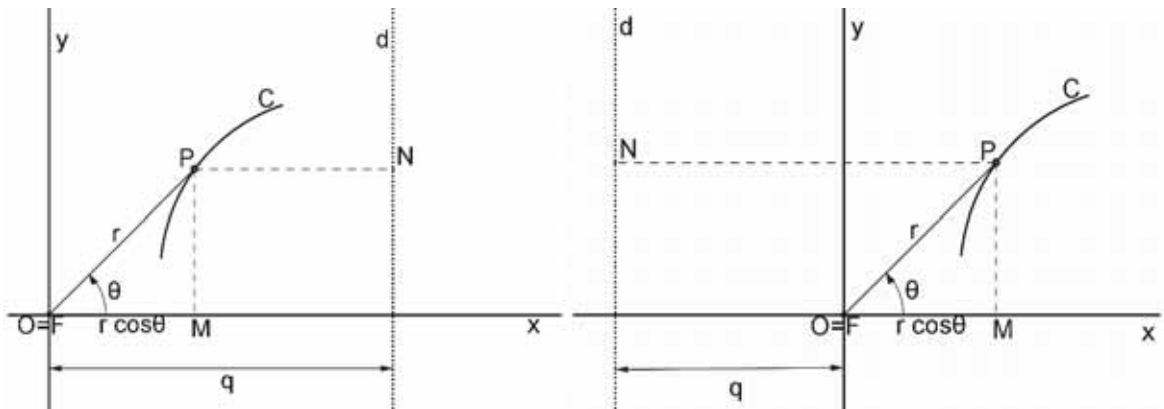


Figura 8.21: Diretriz perpendicular ao eixo polar.

Obtém-se a equação

$$r = \frac{eq}{1 \pm e \cos \theta},$$

onde o sinal positivo ou negativo deve ser usado conforme a diretriz se encontre à direita ou à esquerda do foco, respectivamente.



Veja a construção A.2.4.7 no Apêndice.

2) A reta diretriz  $d$  é paralela ao eixo polar.

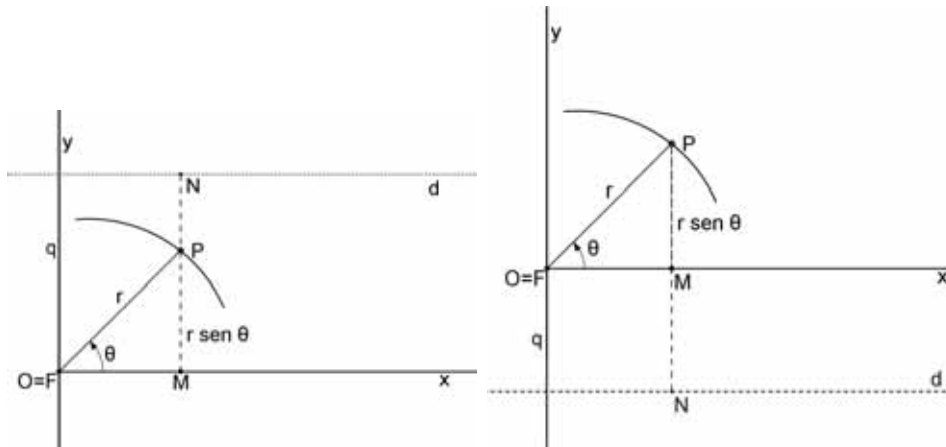


Figura 8.22: Diretriz paralela ao eixo polar.

Obtém-se a equação

$$r = \frac{eq}{1 \pm e \operatorname{sen} \theta},$$

onde o sinal positivo ou negativo deve ser usado conforme a diretriz se encontre acima ou abaixo do eixo polar, respectivamente.



Veja a construção A.2.4.8 no Apêndice.

Parte III

Aplicações

## 9 Propriedades de reflexão das cônicas

As superfícies geradas pela revolução de uma parábola, elipse ou hipérbole, cada uma delas em torno de seu eixo focal, apresentam propriedades de reflexão que podem ser observadas em diversas aplicações tecnológicas. Neste capítulo serão apresentadas algumas destas aplicações e em seguida uma breve análise das propriedades de reflexão das cônicas através das mesas de bilhar elípticas, parabólicas e hiperbólicas.

### 9.1 Propriedades de reflexão

Considere os três tipos de superfícies geradas pela revolução de uma cônica em torno do seu eixo focal como ilustra a figura 9.1.

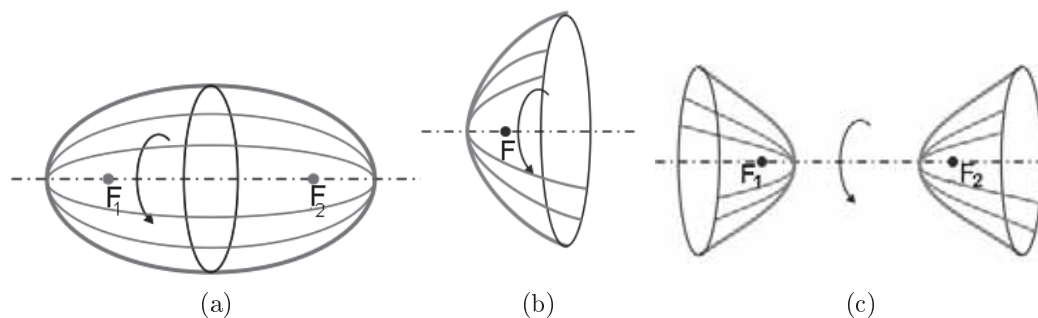


Figura 9.1: Superfície de revolução de uma cônica.

Pelas propriedades da reta tangente a uma cônica já apresentada em capítulos anteriores deste trabalho, tem-se os seguintes resultados:

1. A reta tangente à elipse num ponto  $P$  forma ângulos iguais com os segmentos que unem  $P$  aos focos (Figura 9.2 a).
2. A reta tangente à hipérbole num ponto  $P$  forma ângulos iguais com os segmentos que unem  $P$  aos focos (Figura 9.2 b).



3. A reta tangente a um ponto  $P$  da parábola forma ângulos iguais com a reta que passa por  $P$  paralela ao eixo de simetria e com o segmento que liga  $P$  ao foco (Figura 9.2 c).

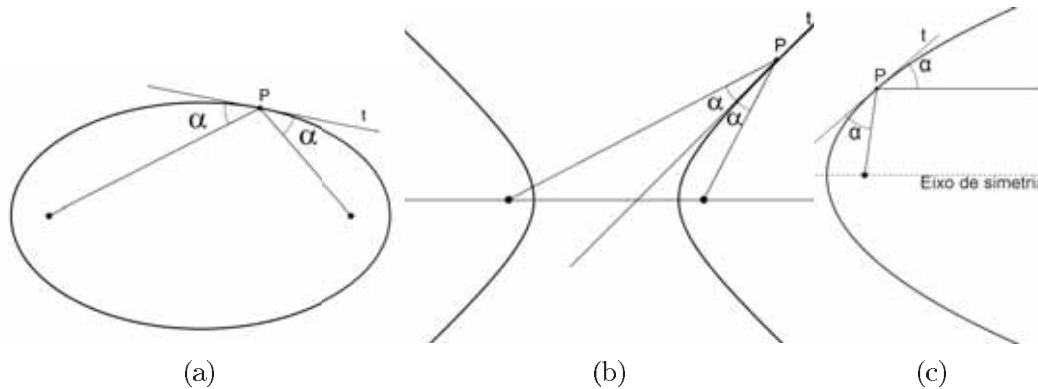


Figura 9.2: Propriedade da reta tangente.

Pelas **Leis da reflexão da luz** tem-se que:

- i) O raio incidente  $Ri$ , a reta normal  $n$  e o raio refletido  $Rr$  são coplanares;
- ii) O ângulo de incidência  $\theta_i$  é igual ao ângulo de reflexão  $\theta_r$ .

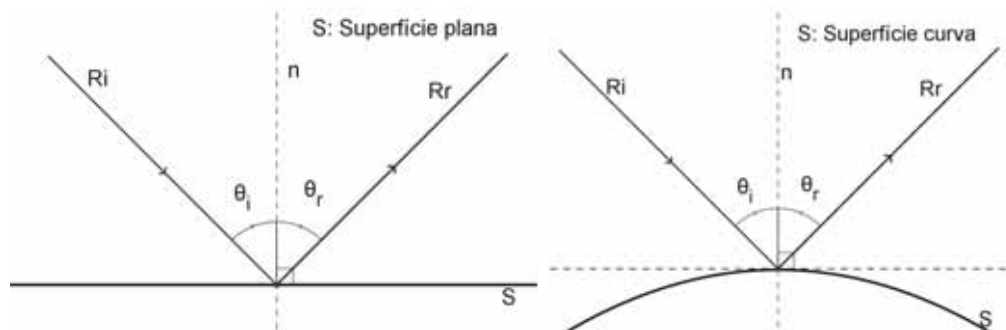


Figura 9.3: Leis da reflexão da luz

Pelos resultados da reta tangente a uma cônica e pelas leis da reflexão, pode-se enunciar as propriedades ópticas das superfícies de revolução ilustradas na figura 9.1. Estas propriedades são:

**Proposição 9.1.** *Se a fonte de luz estiver situada no foco de um espelho parabólico todos seus raios refletidos serão paralelos ao eixo de simetria. Se os raios chegarem a superfície deste espelho paralelamente ao eixo de simetria serão refletidos para o foco.*

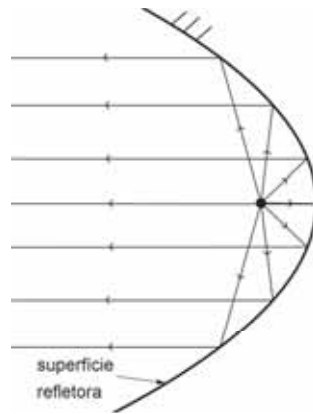


Figura 9.4: Superfície refletora parabólica

**Proposição 9.2.** *Se fonte de luz estiver situada em um dos focos de um espelho elíptico todos os raios refletidos por este espelho se concentrarão no outro foco.*

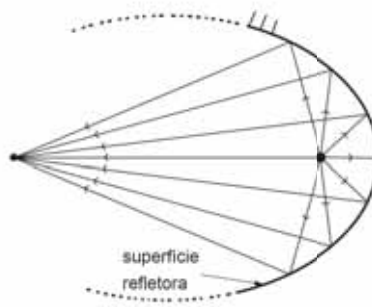


Figura 9.5: Superfície refletora elíptica

**Proposição 9.3.** *Se a luz for dirigida a um dos focos de um espelho hiperbólico será refletida em direção ao outro foco.*

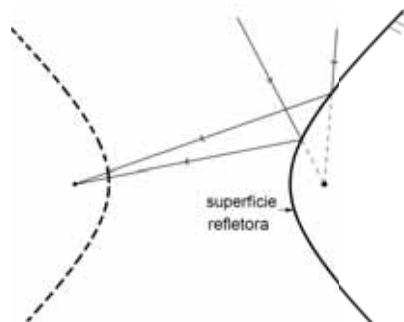


Figura 9.6: Superfície refletora hiperbólica

## 9.2 Aplicações das propriedades de reflexão

### 9.2.1 Superfície refletoras parabólica

Pela proposição 9.1 observa-se que os raios de luz ao encontrarem um espelho parabólico convergirão para foco deste espelho. Esta propriedade é aplicada nos coletores solares onde a temperatura no ponto focal pode chegar a  $3.500^{\circ}C$  e, neste ponto, é colocado o dispositivo que irá utilizar a energia concentrada. Esta energia pode ser usada para gerar eletricidade, derretimento de aço, fazer combustível de hidrogênio, ou nanomateriais. O maior forno solar do mundo está em Odeillo nos Pirinéus Orientais, na França, inaugurado em 1970. Veja a figura 9.7 .



Figura 9.7: Forno solar construído na França.

O espelho parabólico também é usado em certos telescópios para refletir os raios de luz emitidos pelos corpos celestes a um outro espelho ou a uma lente. Por exemplo, o telescópio Hale, do observatório no Monte Palomar na Califórnia que possui o maior espelho côncavo do mundo. Os espelhos côncavos de qualquer telescópio são parabólicos, pois apresentam nitidez muito maior nas imagens de objetos distantes em relação aos espelhos côncavos esféricos. Pode-se citar também os refletores parabólicos dos holofotes, faróis de automóveis e de motocicletas, onde a luz segue o caminho inverso, isto é, o feixe divergente que sai do foco torna-se paralelo após ser refletido permitindo uma maior iluminação de objetos distantes.

O comportamento de uma onda de rádio em uma antena receptora parabólica é análogo ao comportamento da luz no espelho com este mesmo formato. Isto é, se estas ondas encontrarem a antena numa direção paralela ao seu eixo de simetria, refletirá na direção do aparelho que se encontra no foco desta antena.

### 9.2.2 Superfície refletoras elípticas

Os dentistas usam refletores elípticos que tem como objetivo concentrar o máximo de luz onde se está trabalhando e também evitar que os raios luminosos ofusquem a visão do paciente, causando um certo desconforto. Assim, o refletor usado neste caso

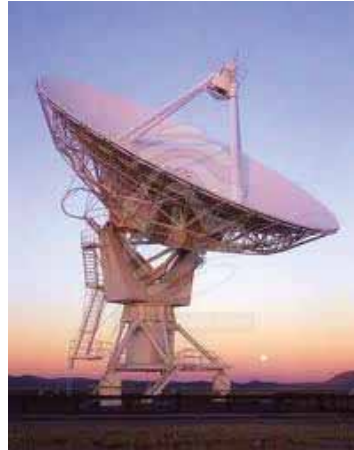


Figura 9.8: Antena parabólica.

possui uma lâmpada situada no foco mais próximo da superfície do espelho de onde os raios luminosos são emitidos em direção ao outro foco situado no local onde irá atuar o dentista.

A litotripsia extracorpórea por ondas de choque é o procedimento mais frequentemente usado para tratamento de cálculo renal. Neste procedimento, as ondas de choque criadas fora do corpo viajam através da pele e tecidos até encontrarem os cálculos mais densos, pulverizando-os. O litotriptor possui um espelho elíptico que concentra os raios emitidos num determinado ponto com grande precisão. Veja figura 9.9.

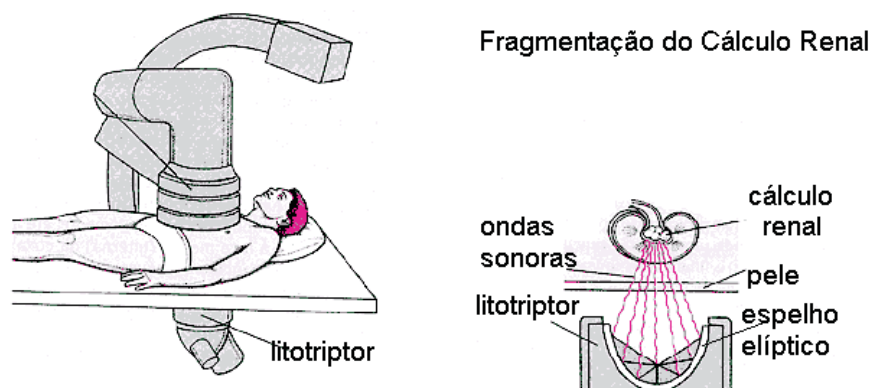


Figura 9.9: Litotriptor e espelho elíptico.

### 9.2.3 Superfície refletora hiperbólica

O espelho hiperbólico é também usado em telescópios como um espelho secundário, ou seja, além do espelho parabólico principal. Sua importância está em redirecionar a luz do foco principal para um ponto mais conveniente, colocando-se um espelho refletor hiperbólico (posicionado sobre um dos ramos da hipérbole) com seu 'foco' coincidindo com o foco do espelho principal conforme mostra a figura 9.10. Seu objetivo é fazer com que a imagem, após ser refletida, seja formada na posição do foco do outro ramo

da hipérbole. Essa construção foi proposta por Cassegrain em 1672 e várias montagens deste tipo são usadas no telescópio de Hale citado anteriormente.

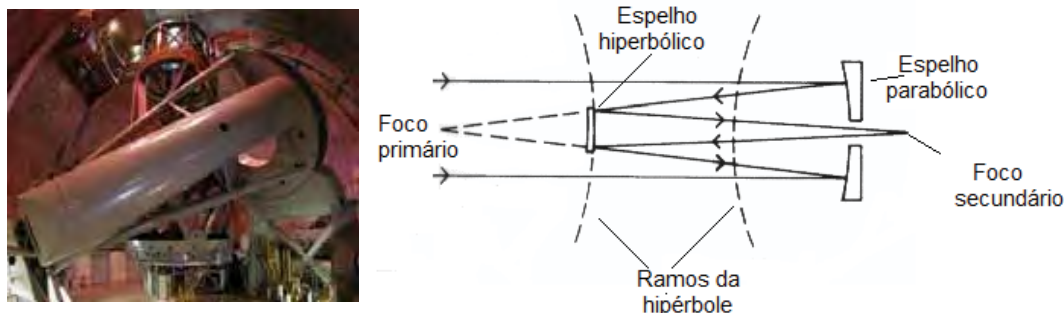


Figura 9.10: Telescópio Hale e o sistema óptico Cassegrain.

## 9.2.4 Propriedades de reflexão das cônicas em mesas de bilhar

Uma outra forma interessante de observar as propriedades de reflexão das cônicas é através das seguintes mesas de bilhar:

### 1. Bilhar elíptico

O bilhar elíptico possui uma única tabela no formato de uma elipse com um buraco num dos focos conforme ilustra a figura 9.11. Uma bola colocada no segundo foco ao ser atirada em qualquer direção do bilhar deverá cair no buraco. O mesmo acontecerá com a bola se ela for colocada em qualquer outra posição do bilhar e atirada em direção ao segundo foco.



Figura 9.11: Bilhar elíptico

## 2. Bilhar parabólico

O bilhar parabólico tem uma das tabelas formada por um arco de parábola com um buraco no foco. Uma bola atirada paralelamente às tabelas laterais (isto é, na direção do eixo da parábola) deverá cair no buraco.



Figura 9.12: Bilhar parabólico

## 3. Bilhar hiperbólico

O bilhar hiperbólico tem uma tabela na forma de um ramo de hipérbole com o outro ramo desta curva desenhado conforme ilustra a figura 9.13. O foco correspondente à hipérbole-tabela está desenhado na parte superior e no foco correspondente ao ramo desenhado há um buraco. Uma bola atirada em direção ao foco desenhado deverá cair no buraco.

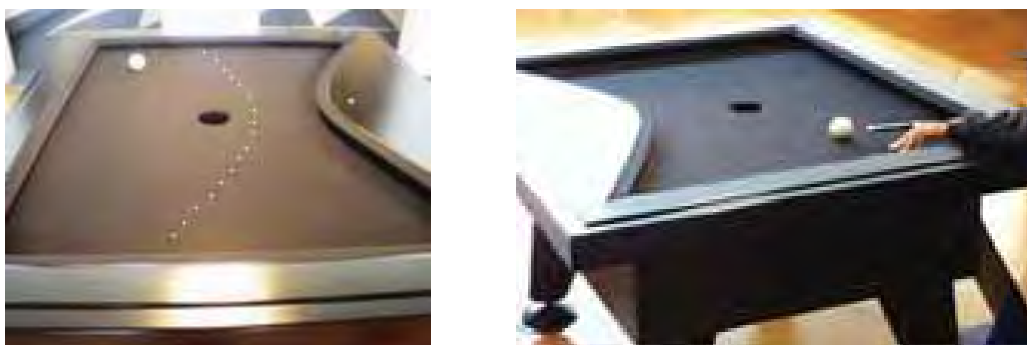


Figura 9.13: Bilhar hiperbólico

# 10 Mecânica celeste e as cônicas

## 10.1 Introdução

A Mecânica Celeste é a parte da Astronomia que estuda o movimento dos corpos celestes. A análise do movimento orbital desses corpos é uma das ciências mais antigas e este capítulo tem como objetivo mostrar como se dá aplicação das seções cônicas para este tipo de análise. Muitos foram os estudiosos que tentaram explicar o movimento dos corpos celestes no decorrer da história e na primeira parte deste capítulo apresenta-se um breve histórico sobre estas tentativas. Partindo-se dos princípios da Mecânica Clássica que são as Leis de Newton, dadas como postulados, será analisado o sistema de interação entre dois corpos e definido Força central. Em seguida, serão apresentadas as equações do movimento de uma partícula em coordenadas polares sob a ação desta força. Será mostrado também que movimento de uma partícula num campo de força central ocorre em um plano e a energia total de uma partícula que se move em tal campo é conservada. Através desses resultados será obtida a equação diferencial da órbita ou trajetória da partícula cuja solução representa uma elipse, hipérbole ou parábola dependendo da energia mecânica desta partícula.

É importante ressaltar que as Leis de Kepler para o movimento planetário possibilitou a formulação da Lei da Gravitação Universal descoberta por Newton, conforme o relato histórico a seguir. No entanto, neste capítulo será apresentada a teoria sobre o movimento dos corpos celestes em ordem cronológica inversa, ou seja, partindo-se da força gravitacional de Newton obtém-se a trajetória destes corpos.

## 10.2 Um breve histórico

As primeiras tentativas para explicar o movimento dos corpos celestes são devidas aos gregos, no século IV a. C.. Ao tentar reproduzir os movimentos destes corpos, os gregos estabeleceram um modelo no qual a Terra era situada no centro do Universo (teoria geocêntrica) e os planetas, bem como o Sol, a Lua e as estrelas estariam incrustados em esferas que giravam em torno da Terra. Na tentativa de melhor ajustar o modelo aos fatos observados, os gregos tiveram que lançar mão de um grande número

de esferas para explicar o movimento de um único planeta. Isto tornou o universo grego muito complicado e, durante muitos anos, várias tentativas foram feitas para se conseguir um modelo mais simples.

Nas tentativas de simplificação do modelo grego, aquela que obteve maior êxito foi a teoria geocêntrica do astrônomo Ptolomeu, que viveu na Alexandria, no século II a.C. Ptolomeu supôs que os planetas moviam-se em círculos, cujos centros giravam em torno da Terra. Com isto, além de apresentar um modelo mais simples do que os gregos ele conseguiu um melhor ajustamento aos movimentos observados no céu. Em virtude da razoável precisão das previsões feitas com o sistema de Ptolomeu e de sua teoria geocêntrica que se adaptava muito bem à filosofia religiosa da Idade Média, suas idéias perduraram durante praticamente treze séculos.

O astrônomo polonês, Nicolau Copérnico (1473-1543), apresentou um modelo mais simples, onde o sol estaria em repouso e os planetas, inclusive a Terra giravam em torno dele em órbitas circulares (teoria heliocêntrica). Com sua teoria, Copérnico conseguiu uma descrição dos movimentos dos corpos celestes tão satisfatória quanto aquela obtida por Ptolomeu, com a vantagem de ser um modelo mais simples do que o geocêntrico. Entretanto, um sistema em que o Sol era considerado imóvel e a Terra passava a ser um planeta em movimento era fundamentalmente contra as convicções religiosas na época. O livro no qual Copérnico apresentava a sua teoria causou grandes polêmicas e terminou sendo colocado na lista dos livros proibidos pela igreja.

Galileu Galilei (1564 - 1642) introduziu o método experimental para o estudo dos fenômenos físicos, e além de seus trabalhos no campo da Mecânica, também deu enorme contribuição para o desenvolvimento da Astronomia. Ele construiu o primeiro telescópio para o uso em observações astronômicas com as quais realizou uma série de descobertas. Com isso, Galileu passou a defender e a divulgar a teoria de que a Terra, assim como os demais planetas, se movem em torno do Sol, como afirmava o astrônomo Copérnico em sua teoria heliocêntrica. Estas idéias foram apresentadas em sua obra *Diálogos Sobre os Dois Grandes Sistemas do Mundo* publicada em 1632. A obra foi condenada pela igreja e Galileu se viu obrigado a renegar suas idéias através de uma “confissão”, lida em voz alta perante o Santo Conselho da Igreja.

Alguns anos depois, o astrônomo dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601), começou a desenvolver um importante trabalho no sentido de obter medidas mais precisas das posições dos corpos celestes. Em seu observatório, muito bem equipado para a época, Tycho Brahe realizou, durante cerca de 20 anos, rigorosas observações planetárias, verificando que o sistema de Copérnico não se adaptava satisfatoriamente a essas observações.

Os dados colhidos por Tycho Brahe, cuidadosamente tabelados, constituíram a base do trabalho que foi desenvolvido, após sua morte, por seu discípulo, o astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630). Entusiasmado pela simplicidade do sistema de Copérnico, Kepler acreditava que seria possível realizar alguma correção neste modelo,



de modo a torná-lo mais ajustado aos movimentos dos corpos celestes realmente observados. Desenvolveu seu trabalho analisando cuidadosamente, com grande habilidade matemática, durante cerca de 17 anos, a grande quantidade de dados coletados por Tycho Brahe.

O trabalho de Kepler foi coroado de êxito, tendo conseguido descobrir as três leis sobre o movimento dos planetas, que deram origem ao nascimento da Mecânica Celeste. Estas leis podem ser enunciadas da seguinte forma:

1. **Lei das órbitas elípticas** - Os planetas que giram em torno do sol descrevem uma órbita elíptica da qual o Sol ocupa um dos focos.
2. **Lei das áreas** - O raio vetor do Sol até o planeta varre áreas iguais em tempos iguais.
3. **Lei harmônica** - O quadrado do período da órbita (que é o quadrado da duração de um ano planetário) é proporcional ao cubo do comprimento do eixo maior da órbita elíptica. Ou simplesmente, o período  $T$  e o semi-eixo principal  $a$  da órbita estão relacionados pela equação:  $T^2 = Ca^3$  onde  $C$  é uma constante.

No dia de Natal de 1642, ano da morte de Galileu, nascia em uma pequena cidade da Inglaterra, Isaac Newton(1642-1727), o grande físico e matemático que formulou as leis básicas da mecânica. Ao estruturar os princípios da Mecânica, Newton se baseou em estudos de grandes físicos que o precederam. Em 1686, Newton apresentava pronta para ser impressa a 1ª edição de sua famosa obra *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, onde foram publicadas as três leis que recebem seu nome e que serão vistas em detalhes na seção seguinte.

Com o trabalho de Kepler, as leis básicas dos movimentos dos planetas haviam sido descobertas e as bases da Mecânica Celeste estavam lançadas. Entretanto, o que Kepler fez foi descrever estes movimentos sem se preocupar com suas causas. Daí, vem o grande passo do trabalho de Newton. Analisando o movimento da Lua em torno da Terra, e baseando-se em suas leis do movimento e nos estudos de Kepler, Newton percebeu que deveria existir uma força de atração da Terra sobre a Lua, do mesmo modo que o Sol atrai os planetas. Com isto, Newton conseguiu determinar a expressão matemática da força de atração entre o Sol e um planeta, justificando as leis de Kepler. A partir desse momento tornou-se possível o cálculo exato das órbitas e movimento da Lua e dos demais planetas, dos seus satélites e dos cometas.

### 10.3 Forças e Leis de Newton

Aproximadamente há três séculos, Newton formulou três princípios que são fundamentais para responder as questões relacionadas ao movimento dos corpos. Por

exemplo, o movimento dos planetas e a de um corpo em queda livre. Esses princípios foram chamados de leis do movimento e são considerados como axiomas da Mecânica;

1. **Lei da Inércia:** Uma partícula  $P$  permanece em estado de repouso ou em movimento retilíneo uniforme, a menos que seja compelida a mudar este estado por força a ela aplicada, em outras palavras, se a força resultante aplicada sobre a partícula é nula, então é possível encontrar referenciais nos quais esta partícula não tenha aceleração.
2. **Lei da força igual a massa vezes a aceleração:** Se  $\vec{F}$  é a força aplicada em uma partícula de massa  $m$ , a qual como consequência se move com velocidade dada por  $\frac{d}{dt}(\vec{r}) = \dot{\vec{r}}$ , então

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}) \text{ ou } \vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{p}),$$

onde  $\vec{r}$  é posição da partícula em relação à origem e  $\vec{p}$  é o momento linear sobre a partícula. Logo, pode-se dizer que a força resultante  $\vec{F}$  sobre uma partícula de massa  $m$  está relacionada com sua aceleração  $\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}) = \ddot{\vec{r}}$ .

3. **Lei da Ação e Reação:** Se uma partícula  $A$  exerce uma força  $\vec{F}_{AB}$  sobre uma partícula  $B$ , então  $B$  deve exercer uma força  $\vec{F}_{BA}$  sobre o corpo  $A$ , sendo que as forças  $\vec{F}_{AB}$  e  $\vec{F}_{BA}$  tem magnitudes iguais, direções iguais e sentidos contrários. Em outras palavras, a cada ação corresponde uma reação igual em mesma direção e de sentido oposto.

O estudo sobre a trajetória de um corpo celeste que será apresentado neste capítulo, baseia-se na análise do sistema de interação entre duas partículas isoladas e nas equações do movimento oriundas da 2ª Lei de Newton. Sendo assim, na próxima seção, será discutido o sistema de duas partículas e o comportamento do centro de massa deste sistema.

## 10.4 Sistema de duas partículas

Considere um sistema de duas partículas isoladas, de massas  $m_1$  e  $m_2$ , tendo apenas a interação mútua entre elas, ou seja, não há forças externas aplicadas. A segunda lei de Newton aplicada a cada uma delas em relação a um referencial fixo em  $O$ , é dada por

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12} \text{ e } m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21}, \quad (10.1)$$

onde  $\vec{F}_{12}$  é a força exercida pela partícula 2 sobre a partícula 1 e  $\vec{F}_{21}$  é a força exercida pela partícula 1 sobre a partícula 2. Somando-se estas duas equações, membro a membro, e considerando  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$  pela 3ª lei de Newton, resulta em :

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}(m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2) = 0$$

Portanto,  $m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2$  é constante, ou seja,

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{constante} \quad (10.2)$$

Em outras palavras, a equação (10.2) mostra que a soma da quantidade de movimento de duas partículas é conservada durante o movimento de ambas quando existe apenas a interação mútua entre elas. Observa-se que a quantidade de movimento de uma partícula pode ser imaginada como a medida da dificuldade de levar esta partícula até o repouso, ou seja, quanto maior a quantidade de movimento mais difícil será fazê-la parar.

Como as Leis de Newton são definidas apenas para partículas, deve-se considerar o movimento de um corpo ou de um sistema como se fosse o movimento do seu centro de massa, ou seja, de um ponto que se move como se toda a massa do corpo ou sistema estivesse concentrada nele.

Considere a posição  $\vec{R}$  do centro de massa  $CM$  e a posição relativa  $\vec{r}$  definidas respectivamente por

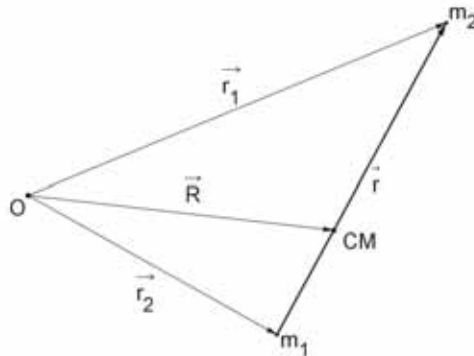


Figura 10.1: Posição do centro de massa.

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (10.3)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (10.4)$$

Derivando (10.3) em relação ao tempo, obtém-se,

$$(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}} = m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

Definindo a quantidade de movimento do centro de massa  $CM$  como  $\vec{P} = (m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}$ , esta equação é escrita como

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad (10.5)$$

Logo, pela equação (10.2),  $\vec{P} = \text{constante}$ , ou seja, a quantidade de movimento do centro de massa para duas partículas é conservada. Isto significa que o centro de massa ou está executando um movimento retilíneo uniforme ou está em repouso em relação a um referencial externo fixo em  $O$ .

Voltando a equação (10.1): subtraindo a segunda equação multiplicada por  $m_1$  da primeira multiplicada por  $m_2$ , obtém-se:

$$m_1 m_2 (\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2) = m_2 \vec{F}_{12} - m_1 \vec{F}_{21} \quad (10.6)$$

Lembrando que  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ , a equação (10.6) será dada por

$$m_1 m_2 (\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2) = (m_1 + m_2) \vec{F}_{12}. \quad (10.7)$$

Definindo  $\vec{F} = \vec{F}_{12}$ , a massa reduzida por

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

e utilizando (10.4) e a equação (10.7) obtém-se

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad (10.8)$$

Esta equação descreve o movimento relativo das duas partículas sob interação mútua e pode ser interpretada como o movimento de uma partícula única de massa  $\mu$  sujeita a uma força  $\vec{F}$  cujo centro está em uma das partículas.

**Observação 10.1.** As equações do movimento do sistema de duas partículas isoladas (sem atuação de outras forças além da interação mútua) foram decompostas em duas:

1. Na equação (10.5) o movimento do centro de massa se comporta como se fosse o de uma única partícula concentrado nele, de massa  $m_1 + m_2$ , executando um movimento uniforme ou em repouso em relação a  $O$ .
2. Na equação (10.8) que descreve o movimento de uma das partículas em relação a outra como se fosse uma única partícula de massa  $\mu$  sujeita à força de interação mútua  $\vec{F}$ .

A força de interação mútua  $\vec{F}$  é dirigida ao longo da reta que une as duas partículas. Em muitos casos, a intensidade dessa força depende apenas da distância entre as duas partículas e sempre tem a direção do raio vetor  $\vec{r}$ . Por isso, é chamada de força central que pode ser expressa por  $\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$  e que será melhor definida no próximo item.

Para as forças deste tipo, a equação (10.8) torna-se,

$$\mu \ddot{\vec{r}} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}, \quad r = |\vec{r}|$$

Em alguns casos a massa de uma das partículas é muito maior do que a da outra. Quando isto acontece, o centro de massa está praticamente sobre a partícula de maior massa, por exemplo, o sistema Sol e planeta. Se supor que  $m_2$  é muito maior que  $m_1$ , a massa reduzida é  $\mu \approx m_1$ .

Neste capítulo será considerado que uma das partículas tem massa muito maior que a outra. Assim, a massa reduzida coincidirá com a massa menor e o centro de força estará na partícula de maior massa em repouso na origem do referencial.

### 10.4.1 Definição de força central

Considere um sistema de interação entre duas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$  tal que o centro de força  $\vec{F}$  esteja em  $m_1$ . Considere ainda um sistema de referência cuja origem  $O$  esteja fixada no centro de massa de  $m_1$ . Seja  $\vec{F}$  a força que atua sobre a partícula de massa  $m_2$ , como representado na figura 10.2.

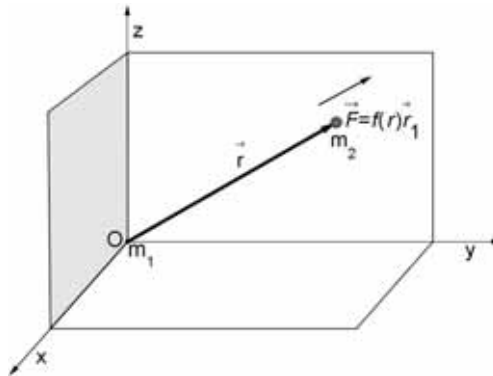


Figura 10.2: Representação da força central atuando sobre a partícula de massa  $m_2$ .

Observa-se que:

- $\vec{F}$  é sempre dirigida de  $m_2$  para a origem  $O$  do sistema ou em sentido contrário.
- O módulo de  $\vec{F}$  depende somente da distância  $r$  de  $m_2$  a  $O$ .

Uma força com estas características é chamada de **força central** ou **campo de força**. Logo,  $\vec{F}$  é uma força central se, e somente se,  $\vec{F} = f(r)\vec{r}_1 = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$  onde  $r = |\vec{r}|$  e  $\vec{r}_1 = \frac{\vec{r}}{r}$  é o vetor unitário na direção  $\vec{r}$ .

Além disso,

- Se  $f(r) > 0$  a força é de repulsão, isto é, no sentido de  $O$  para  $m$ .
- Se  $f(r) < 0$  a força é de atração, isto é, no sentido de  $m$  para  $O$ .

**Exemplo 10.1.** Uma das forças centrais mais importantes é aquela cuja intensidade é inversamente proporcional ao quadrado da distância, isto é,  $\vec{F} = \frac{K}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$ . Trata-se da

força gravitacional onde  $K = -GMm$ , com  $G$  a constante universal de gravitação,  $M$  e  $m$  as massas das duas partículas interagentes. Frequentemente uma dessas massas é muito maior que a outra, como no caso do Sol interagindo gravitacionalmente com os planetas do seu sistema. Nesse caso, a partícula que tem a maior massa que a outra pode ser considerada fixa na origem do referencial e será o centro dessa força.

### 10.4.2 Movimento de uma partícula em um campo de força central

Algumas grandezas relacionadas a uma partícula movendo-se sob a ação de uma força central são conservadas. A conservação destas grandezas será demonstrada e suas consequências sobre o movimento dessa partícula serão exploradas.

Considere uma partícula  $P$  de massa  $m$  e momento linear  $\vec{p}$  (ou quantidade de movimento linear), em uma posição  $\vec{r}$ , relativa à origem em um dado referencial inercial. O momento angular  $\vec{L}$  da partícula  $P$ , em relação a origem é definido pelo produto vetorial entre  $\vec{r}$  e  $\vec{p}$ , ou seja  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})$ . Calculando a derivada de  $\vec{L}$  tem-se que

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \dot{\vec{r}} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\dot{\vec{v}}. \quad (10.9)$$

Como  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$  então a equação (10.9) pode ser reescrita da forma

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{r}} + \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}}.$$

Desde-se que  $\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = 0$  e pela 2ª lei de Newton tem-se que  $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ , então

$$\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times f(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

e assim

$$\dot{\vec{L}} = 0$$

Do resultado  $\dot{\vec{L}} = 0$ , conclui-se que  $\vec{L} = \text{constante}$ .

Portanto, no movimento de uma partícula sob a ação de uma força central qualquer, a quantidade de movimento angular é conservada. A constância de  $\vec{L}$  tem uma consequência imediata muito importante:

**Teorema 10.1.** *Se o momento angular  $\vec{L}$  de uma partícula é constante então a trajetória desta partícula fica inteiramente contida em um plano perpendicular a  $\vec{L}$ .*

De fato, pela definição de momento angular,  $\vec{r}$  é perpendicular a  $\vec{L}$ . Como  $\vec{L}$  é constante, os pontos percorridos por  $\vec{r}$  estarão sempre contidos no plano perpendicular a  $\vec{L}$  e que passa pela origem conforme ilustra a figura 10.3.

Uma vez que a intensidade da força central depende apenas da distância entre seu centro e a partícula e sua trajetória está inteiramente contida num plano, o movimento pode ser descrito por meio do uso de coordenadas polares definidas neste plano como será demonstrado a seguir.

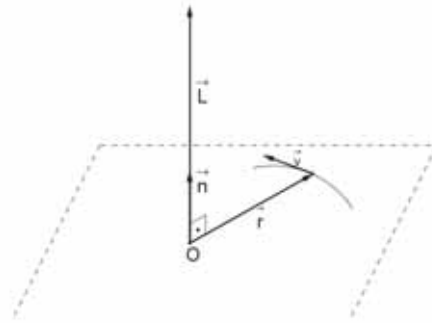


Figura 10.3: Trajetória de uma partícula e o momento angular  $\vec{L}$ .

## 10.5 Equações do movimento de uma partícula em um campo de força central

A posição de uma partícula  $P$  no espaço pode ser definida por um vetor posição  $\vec{r}$  com a origem no centro  $O$  e de coordenadas cartesianas com  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  vetores ortogonais unitários nas direções dos eixos  $Ox, Oy$  e  $Oz$ , respectivamente, como mostra a figura 10.4.

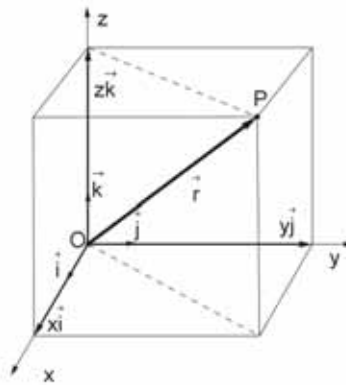


Figura 10.4: Posição de uma partícula  $P$  no espaço.

Uma partícula  $P$  qualquer pode descrever uma trajetória no espaço e esta trajetória pode ser determinada se for conhecido o campo de forças que atua sobre ela.

Observa-se que o movimento da partícula  $P$  de massa  $m$  em um campo de força central ocorre em um plano, conforme foi demonstrado na seção anterior. Para facilitar os cálculos, e sem perda de generalidade, será escolhido o plano  $Oxy$ .

Seja  $\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{r}(r(t), \theta(t))$  o vetor posição da partícula em um instante qualquer  $t$ , como mostra a figura 10.5.

Observa-se que para qualquer posição  $\vec{r}$  escolhida, mantendo  $\theta$  constante e variando  $r$ , a extremidade do vetor descreverá uma reta que passa pela origem e faz um ângulo  $\theta$  com eixo  $Ox$ . Então, pela definição de derivada parcial,  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}$  é um vetor tangente à curva  $\theta = \text{constante}$ , ou seja, a reta descrita pela extremidade do vetor  $\vec{r}$  aponta na

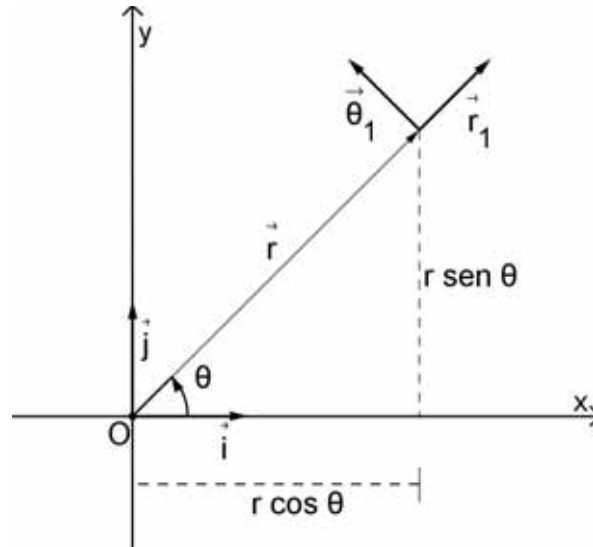


Figura 10.5: Vetores unitários em coordenadas cartesianas e polares.

direção  $\vec{r}$  e sentido crescente de  $r$ . Mantendo  $r$  fixo e variando  $\theta$ , a extremidade do vetor descreverá agora uma circunferência de centro na origem e raio  $r$ . Sendo assim, pela definição de derivada parcial,  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$  é o vetor tangente à circunferência  $r = \text{constante}$  que aponta no sentido crescente de  $\theta$ .

Sejam  $\vec{r}_1$  e  $\vec{\theta}_1$  os vetores unitários de  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}$  e  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$  respectivamente, então

$$\vec{r}_1 = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right|} \text{ e } \vec{\theta}_1 = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right|}.$$

Assim, sendo  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$  tem-se que,

$$\vec{r} = r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j}. \quad (10.10)$$

Desta maneira,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \quad \text{e} \quad \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = 1$$

$$\text{Logo, } \vec{r}_1 = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right|} = \frac{\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}}{1} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \text{ ou}$$

$$\vec{r}_1 = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}. \quad (10.11)$$

De (10.10) tem-se que  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -r \sin \theta \vec{i} + r \cos \theta \vec{j}$  e  $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| = r$ . Então,

$$\vec{\theta}_1 = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \quad (10.12)$$

Portanto, (10.11) e (10.12) são os vetores unitários polares em função dos vetores unitários cartesianos  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$ .



### 10.5.1 Vetor velocidade e vetor aceleração em coordenadas polares

Os vetores velocidade e aceleração em coordenadas polares podem ser obtidos pelos seguintes procedimentos:

a) Cálculo da derivada de  $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(r(t), \theta(t))$  e  $\vec{\theta}_1 = \vec{\theta}_1(r(t), \theta(t))$

Sendo  $\vec{r}_1 = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ , tem-se que

$$\dot{\vec{r}}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt}$$

No entanto,  $\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial r} = 0$ ,  $\frac{dr}{dt} = \dot{r}$  e  $\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} = \vec{\theta}_1$ . Pela equação (10.12) e denotando  $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$  obtém-se

$$\dot{\vec{r}}_1 = 0 \cdot \dot{r} + \vec{\theta}_1 \dot{\theta} \text{ ou } \dot{\vec{r}}_1 = \vec{\theta}_1 \dot{\theta}$$

Por outro lado,  $\vec{\theta}_1 = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$ , e então,

$$\dot{\vec{\theta}}_1 = \frac{d\vec{\theta}_1}{dt} = \frac{\partial \vec{\theta}_1}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial \vec{\theta}_1}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt}$$

Como  $\frac{\partial \vec{\theta}_1}{\partial r} = 0$ ,  $\frac{dr}{dt} = \dot{r}$  e  $\frac{\partial \vec{\theta}_1}{\partial \theta} = -(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j})$  então, pela equação (10.11) e denotando  $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$  tem-se que

$$\dot{\vec{\theta}}_1 = 0 \cdot \dot{r} + (-\vec{r}_1) \dot{\theta} \text{ ou } \dot{\vec{\theta}}_1 = -\dot{\theta} \vec{r}_1$$

b) Velocidade

Sabe-se da expressão do vetor unitário que  $\vec{r}_1 = \frac{\vec{r}}{r}$ , ou seja,  $\vec{r} = r \cdot \vec{r}_1$ . Considerando que a velocidade vetorial é dada por  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  segue que:

$$\vec{v} = \frac{d(r \cdot \vec{r}_1)}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{r}_1 + r \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \dot{r} \vec{r}_1 + r \dot{\vec{r}}_1$$

e pelo valor de  $\dot{\vec{r}}_1$  no item a) obtém-se

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{r}_1 + r \dot{\theta} \vec{\theta}_1 \quad (10.13)$$

c) Aceleração

A expressão da aceleração vetorial é dada por  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ . Substituindo a expressão de  $\vec{v}$  determinada no ítem b) tem-se que

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{r}_1 + r\dot{\theta}\vec{\theta}_1) = \ddot{r}\vec{r}_1 + \dot{r}\dot{\vec{r}}_1 + \dot{r}\dot{\theta}\vec{\theta}_1 + r(\ddot{\theta}\vec{\theta}_1 + \dot{\theta}\dot{\vec{\theta}}_1).$$

Substituindo  $\dot{\vec{r}}_1$  e  $\dot{\vec{\theta}}_1$  pelos valores calculados em a) obtém-se,

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{r}_1 + \dot{r}\dot{\theta}\vec{\theta}_1 + \dot{r}\dot{\theta}\vec{\theta}_1 + r\ddot{\theta}\vec{\theta}_1 + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\vec{r}_1).$$

Simplificando, tem-se

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{r}_1 + 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{\theta}_1 + r\ddot{\theta}\vec{\theta}_1 - r\dot{\theta}^2\vec{r}_1.$$

Portanto, a aceleração vetorial é dada por

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{r}_1 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{\theta}_1 = a_r\vec{r}_1 + a_n\vec{\theta}_1$$

onde  $a_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$  é aceleração radial e  $a_n = (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$  é aceleração normal.

### 10.5.2 Momento angular em coordenadas polares

Conseqüentemente, com a obtenção do vetor velocidade em coordenadas polares determina-se a expressão do momento angular por meio destas coordenadas. Considere a origem do sistema de referência no centro de força. Desde que o momento angular  $\vec{L}$  é dado por  $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ , substituindo  $\vec{v}$  pela expressão (10.13) obtém-se

$$\vec{L} = \vec{r} \times m(\dot{r}\vec{r}_1 + r\dot{\theta}\vec{\theta}_1) = r.\vec{r}_1 \times m(\dot{r}\vec{r}_1 + r\dot{\theta}\vec{\theta}_1).$$

Resolvendo o produto vetorial tem-se

$$\vec{L} = mr^2\dot{\theta}(\vec{r}_1 \times \vec{\theta}_1) \quad \text{ou} \quad \vec{L} = mr^2\dot{\theta}\vec{n}$$

sendo  $\vec{n} = \vec{r}_1 \times \vec{\theta}_1$  um vetor unitário paralelo a  $\vec{L}$  e normal ao plano definido pelos vetores unitários  $\vec{r}_1$  e  $\vec{\theta}_1$ . Deste modo, a magnitude de  $\vec{L}$  é dada por

$$L = mr^2\dot{\theta} \tag{10.14}$$

A expressão do momento angular em coordenadas polares tem aplicação na determinação da órbita de uma partícula que será dada na seção 10.7.

### 10.5.3 Equações do movimento

Pela segunda lei de Newton tem-se que: Força resultante = (massa).(aceleração), ou seja,

$$f(r)\vec{r}_1 = m[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{r}_1 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{\theta}_1].$$

Desta igualdade segue que

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r) \quad (10.15)$$

e

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0. \quad (10.16)$$

Portanto, as equações (10.15) e (10.16) são as equações do movimento de uma partícula  $P$  de massa  $m$  em um campo de força central. Destas equações será obtida a equação diferencial da trajetória na seção 10.7.

## 10.6 Energia Cinética e Energia Potencial em um campo de força central

### 10.6.1 Campo Vetorial

Um campo vetorial no espaço tridimensional é uma função  $\vec{F}$  que associa a cada ponto  $X$  do espaço tridimensional um único vetor  $\vec{F}(X)$  deste espaço, ou seja

$$\begin{aligned} \vec{F}: R^3 &\longrightarrow R^3 \\ X &\longmapsto \vec{F}(X) \end{aligned}$$

Como  $\vec{F}$  é um campo vetorial,  $\vec{F}(X)$  é interpretado como um vetor aplicado em  $X$ .

### 10.6.2 Derivadas parciais num campo vetorial

Seja  $\vec{F} : \Omega \subset R^3 \rightarrow R^3$ , dada por  $\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$  e seja  $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ . Os limites

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(x_0 + h, y_0, z_0) - \vec{F}(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(x_0, y_0 + h, z_0) - \vec{F}(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(x_0, y_0, z_0 + h) - \vec{F}(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

quando existem, denominam-se derivadas parciais de  $\vec{F}$  no ponto  $(x_0, y_0, z_0)$ , em relação a  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente.

### 10.6.3 Trabalho de uma força

Seja  $\vec{F}$  um campo vetorial cujas derivadas parciais existem e são contínuas (campo vetorial de classe  $C^1$ ). Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , um conjunto aberto. Seja  $C$  uma curva em  $\Omega$  parametrizada por  $\gamma$ , isto é,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  derivável. A integral de linha de  $\vec{F}$  ao longo de  $C$  é definida como

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_b^a \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

$\vec{F}$  é interpretado fisicamente como um campo de forças. Considere  $P$  uma partícula sob a ação deste campo deslocando ao longo de um caminho  $C$  conforme mostra a figura 10.6. No instante inicial  $a$  a partícula está no ponto  $A$  e em outro instante  $b$  a partícula está no ponto  $B$  sendo  $a < b$ .

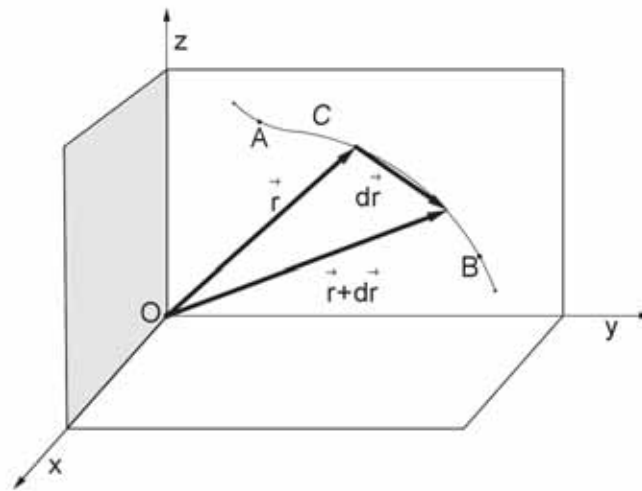


Figura 10.6: Trajetória descrita por uma partícula  $P$  em um campo de força.

O trabalho  $W$  realizado para deslocar a partícula de  $A$  para  $B$  sob a ação do campo de força  $\vec{F}$  é definido por

$$W = \int_C \vec{F} d\vec{r}.$$

### 10.6.4 Energia Cinética

Seja  $P$  uma partícula de massa  $m$  constante que se move no espaço sob influência de um campo de força  $\vec{F}$  deslocando-se da posição  $\vec{r}_1$  até  $\vec{r}_2$  nos tempos  $t_1$  e  $t_2$  respectivamente. As velocidades em  $t_1$  e  $t_2$  serão, respectivamente,  $\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt}$  e  $\vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt}$ . O trabalho total realizado no movimento de  $P$  neste intervalo de tempo é definido como:

$$W = \int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

Pela segunda lei de Newton,

$$W = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt, \text{ sendo } \vec{v} = \vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$$

Logo,

$$W = m \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{dv_x(t)}{dt} v_x(t) + \frac{dv_y(t)}{dt} v_y(t) + \frac{dv_z(t)}{dt} v_z(t) \right) dt$$

Desde que  $\int g(x) \frac{dg(x)}{dx} \cdot dx = \frac{g^2(x)}{2} + c$ , então

$$\begin{aligned} W &= m \left[ \frac{v_x^2(t)}{2} + \frac{v_y^2(t)}{2} + \frac{v_z^2(t)}{2} \right]_{t_1}^{t_2} \\ &= m \left[ \left( \frac{v_x^2(t_2)}{2} + \frac{v_y^2(t_2)}{2} + \frac{v_z^2(t_2)}{2} \right) - \left( \frac{v_x^2(t_1)}{2} + \frac{v_y^2(t_1)}{2} + \frac{v_z^2(t_1)}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Como  $\|\vec{v}(t)\|^2 = v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)$ , a expressão anterior pode ser reescrita da forma,

$$W = \frac{m \|\vec{v}(t_2)\|^2}{2} - \frac{m \|\vec{v}(t_1)\|^2}{2} \quad (10.17)$$

A expressão  $T = \frac{m \|\vec{v}(t)\|^2}{2}$  é denominada energia cinética de uma partícula. Logo, pela equação (10.17) conclui-se que o trabalho total realizado pela força  $\vec{F}$  sobre a partícula para deslocá-la de  $\vec{r}_1$  a  $\vec{r}_2$  é igual a variação de sua energia cinética.

### 10.6.5 Energia Potencial

Seja  $\vec{F} : \Omega \subset R^3 \rightarrow R^3$  um campo vetorial.  $\vec{F}$  é um campo potencial se existir uma função  $V : \Omega \subset R^3 \rightarrow R$ , de classe  $C^1$ , tal que

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V \quad (10.18)$$

sendo  $\vec{\nabla}V = \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right)$  o gradiente da função  $V$ . A função  $V$  é denominada potencial de  $\vec{F}$  ou energia potencial.

### 10.6.6 Teorema da conservação da Energia Mecânica

**Teorema 10.2.** *Seja a energia mecânica  $E$  de uma partícula de massa  $m$  igual a soma da energia cinética  $T$  e energia potencial  $V$  desta partícula. Se a partícula se move em uma trajetória  $C$  num campo  $\vec{F}$  que possui potencial  $V$ , então, a energia mecânica  $E$  será constante.*

*Demonstração.* De fato, considere o vetor posição  $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ . Pela segunda lei de Newton e pela equação 10.18:

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} V \quad (10.19)$$

Considerando o produto escalar de  $\frac{d\vec{x}}{dt}$  em ambos os membros de (10.19) obtém-se:

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = -\vec{\nabla} V \cdot \frac{d\vec{x}}{dt}$$

Segue que,

$$m \left( \frac{dx_1(t)}{dt} \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + \frac{dx_2(t)}{dt} \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + \frac{dx_3(t)}{dt} \frac{d^2 x_3(t)}{dt^2} \right) = \\ - \left( \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dx_2(t)}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dx_3(t)}{dt} \right)$$

Integrando para um intervalo de tempo de  $t_1$  a  $t_2$ , tem-se:

$$m \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{dx_1(t)}{dt} \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + \frac{dx_2(t)}{dt} \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + \frac{dx_3(t)}{dt} \frac{d^2 x_3(t)}{dt^2} \right) dt = \\ - \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dx_3}{dt} \right) dt$$

Como  $\int \frac{df(x)}{dx} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} dx = \frac{\left( \frac{df(x)}{dx} \right)^2}{2} + c$  segue que,

$$\frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left[ \left[ \frac{dx_1}{dt} \right]^2 + \left[ \frac{dx_2}{dt} \right]^2 + \left[ \frac{dx_3}{dt} \right]^2 \right] dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} V(\vec{x}(t)) dt$$

Considerando que  $\|\vec{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  e calculando a integral obtém-se,

$$\frac{m}{2} (\|\vec{v}(t_2)\|^2 - \|\vec{v}(t_1)\|^2) = - [V(\vec{x}(t_2)) - V(\vec{x}(t_1))]. \quad (10.20)$$

Logo,

$$\frac{m}{2} (\|\vec{v}(t_2)\|^2) + V(\vec{x}(t_2)) = \frac{m}{2} (\|\vec{v}(t_1)\|^2) + V(\vec{x}(t_1))$$

ou

$$E(t_2) = E(t_1)$$

□

O significado da equação (10.18) pode ser dado através do cálculo de  $V$  em função da mudança da posição da partícula. Considerando a equação (10.17) tem-se que  $W = \Delta T$ , sendo  $W$  o trabalho realizado pela força resultante  $\vec{F}$  das forças que agem

sobre a partícula quando esta se move de uma posição  $\vec{r}_1$  da trajetória a um ponto  $\vec{r}_2$ . Pela equação 10.20 conclui-se que  $W = \Delta T = -\Delta V$  e pode ser escrito na forma:

$$\Delta V = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r}$$

em que  $\Delta V$  é a variação da energia potencial do sistema quando a partícula se move da posição  $\vec{r}_1$  a  $\vec{r}_2$  e  $F(\vec{r}) = F(x, y, z)$ .

## 10.7 Determinação da órbita a partir da força central

Pretende-se nesta seção determinar a expressão da trajetória de uma partícula que se movimenta sob a ação de uma força central. Em particular será feita a análise para o caso no qual esta força for a gravitacional. A trajetória será dada por  $r = f(\theta)$  e em seguida será provado que esta função representa uma seção cônica.

### 10.7.1 Equação diferencial da órbita ou trajetória

Conforme visto na seção 10.5.3 o movimento de uma partícula  $P$  em um campo de força central é dado pelas equações (10.15) e (10.16). Da equação(10.16) tem-se que

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0.$$

Multiplicando ambos os membros por  $r$

$$r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

como  $\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = r^2\ddot{\theta} + \frac{dr^2}{dt}\dot{\theta} = r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}$ , tem-se

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

então,  $r^2\dot{\theta}$  é constante. Pela equação(10.14), o valor desta constante é dado por  $\frac{L}{m}$ . Logo,

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}. \tag{10.21}$$

Considere a mudança de variável  $r(t) = \frac{1}{u}$ . Derivando  $r$  em relação a  $t$ , tem-se

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt},$$

como  $u = u(\theta)$  então

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}.$$

Assim, por (10.21) tem-se

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2} \left( \frac{du}{d\theta} \right) \frac{L}{m} u^2$$

e simplificando

$$\dot{r} = -\frac{L}{m} \left( \frac{du}{d\theta} \right).$$

Derivando novamente,

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( -\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta} \right) = -\frac{L}{m} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{du}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dt} = -\frac{L}{m} \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{L}{m} \dot{\theta} \left( \frac{d^2u}{d\theta^2} \right).$$

Pela equação (10.21) e denotando  $r = \frac{1}{u}$  tem-se que

$$\ddot{r} = -\frac{L}{m} \frac{L}{mr^2} \left( \frac{d^2u}{d\theta^2} \right) = -\frac{L^2u^2}{m^2} \left( \frac{d^2u}{d\theta^2} \right) \quad (10.22)$$

Substituindo (10.21) e (10.22) na equação (10.15) e fazendo  $r = \frac{1}{u}$  obtém-se

$$m \left( -\frac{L^2u^2}{m^2} \frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{1}{u} \left( \frac{Lu^2}{m} \right)^2 \right) = f \left( \frac{1}{u} \right),$$

Simplificando

$$-\frac{L^2u^2}{m} \frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{L^2u^3}{m} = f \left( \frac{1}{u} \right).$$

Fatorando tem-se

$$-\frac{L^2u^2}{m} \left( \frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right) = f \left( \frac{1}{u} \right) \quad (10.23)$$

que é chamada de **equação diferencial da órbita ou trajetória de uma partícula sob ação de uma força central qualquer**.

A aplicação desta equação será mostrada, na seção 10.7.3, para uma força central atrativa cuja magnitude varia inversamente proporcional ao quadrado da distância ao centro de força.

### 10.7.2 Equação da órbita sob ação da força inversamente proporcional ao quadrado da distância

Considere uma partícula  $P$  movendo-se em um campo de força central dado por  $\vec{F} = -K \frac{1}{r^2} \vec{r}_1$ , com  $K > 0$ . Constata-se que esta força possui função potencial dada por  $V = \frac{K}{\|r\|}$ , portanto pode-se aplicar o teorema 10.2. Este tipo de força aparece na natureza com muita frequência, como no caso da atração gravitacional ( $K = GMm$ ) mencionada anteriormente no exemplo 10.1 ou no caso da interação eletrostática atrativa. Assim, a equação da trajetória de uma partícula sob a ação deste tipo de força central é determinada da seguinte forma: para  $r = \frac{1}{u}$  tem-se que a força  $f \left( \frac{1}{u} \right) = -Ku^2$ . Substituindo na equação da trajetória (10.23) obtém-se

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2u^2} (-Ku^2) = \frac{mK}{L^2}$$



ou

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{mK}{L^2} \tag{10.24}$$

que é a equação diferencial da órbita de uma partícula sob ação de uma força central atrativa cuja intensidade varia de forma inversamente proporcional ao quadrado da distância ao centro de força .

### 10.7.3 Solução da equação diferencial da órbita e as cônicas

Ao resolver a equação (10.24) determina-se a expressão da órbita (ou trajetória) de uma partícula  $P$  no campo de ação de uma força central. Com esta expressão na forma de  $r = r(\theta)$  pode-se caracterizar a curva descrita por esta partícula  $P$ .

**Resolução:**

A equação (10.24) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem não homogênea. Assim, tem solução geral dada por:

$$u(\theta) = u_H(\theta) + u_P(\theta)$$

onde  $u_H(\theta)$  é a solução da equação diferencial homogênea e  $u_P(\theta)$  é a solução particular.

- **Obtenção da solução  $u_H(\theta)$**

Considere  $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 0$ . A equação característica associada a esta equação é dada por  $\lambda^2 + 1 = 0$ . Como  $\lambda = \pm i$  então a solução  $u_H(\theta)$  é dada por

$$u_H(\theta) = A \cos \theta + B \sin \theta \tag{10.25}$$

Seja  $\cos \delta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$  e  $\sin \delta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$  conforme mostra a figura 10.7.

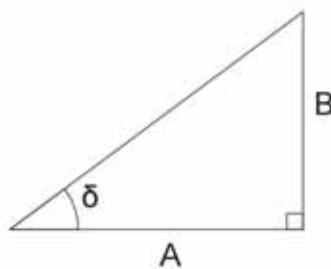


Figura 10.7: Definindo  $\sin \delta$  e  $\cos \delta$  em função de  $A$  e  $B$

Substituindo em (10.25) tem-se

$$u_H(\theta) = \sqrt{A^2 + B^2}(\cos \delta \cdot \cos \theta + \sin \delta \cdot \sin \theta)$$

simplificando,

$$u_H(\theta) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\theta - \delta)$$

- **Solução particular:** A solução particular para a equação não-homogênea é dada por

$$u_P(\theta) = \frac{mK}{L^2}$$

Uma vez calculado os valores de  $u_H(\theta)$  e  $u_P(\theta)$  tem-se que

$$u(\theta) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\theta - \delta) + \frac{mK}{L^2}$$

Definindo  $C = \sqrt{A^2 + B^2}$

$$u(\theta) = C \cos(\theta - \delta) + \frac{mK}{L^2}$$

Uma condição inicial para essa equação é considerar  $\delta = 0$ , pois é sempre possível escolher os eixos com essa condição. Então

$$u(\theta) = \frac{mK}{L^2} + C \cos \theta \quad (10.26)$$

Como  $r = \frac{1}{u}$  tem-se

$$r = \frac{1}{\frac{mK}{L^2} + C \cos \theta}$$

Dividindo por  $\frac{mK}{L^2}$  tem-se

$$r = \frac{\frac{1}{\frac{mK}{L^2}}}{1 + \frac{C}{\frac{mK}{L^2}} \cos \theta}$$

ou

$$r = \frac{\frac{L^2}{mK}}{1 + \frac{CL^2}{mK} \cos \theta} \quad (10.27)$$

que é a solução da equação diferencial (10.24) na forma  $r = r(\theta)$ .

Definindo  $p = \frac{1}{C}$  e  $e = \frac{CL^2}{mK}$  a equação (10.27) pode ser reescrita como

$$r = \frac{ep}{1 + e \cos \theta}$$

que é a equação geral das cônicas em coordenadas polares conforme foi demonstrado na seção 8.4.3 do capítulo anterior.

### 10.7.4 Equação da órbita em termos da Energia Mecânica e determinação das Cônicas

Na seção anterior demonstrou-se que uma partícula em movimento sob a ação de uma força central descreve uma trajetória na forma de uma cônica. Além deste resultado é possível determinar, pela análise do valor de  $C$  na equação (10.27), que tipo de cônica (parábola, elipse ou hipérbole) é representada por essa trajetória. Para isso,  $C$  será expressado em termos da energia mecânica  $E$  (ou energia total) da partícula e conseqüentemente será obtida uma outra equação equivalente a (10.27).

Primeiramente será calculado o valor de  $v^2$  partindo da equação (10.13), ou seja,  $\vec{v} = \dot{r}\vec{r}_1 + r\dot{\theta}\vec{\theta}_1$ . Assim,

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = (\dot{r}\vec{r}_1 + r\dot{\theta}\vec{\theta}_1) \cdot (\dot{r}\vec{r}_1 + r\dot{\theta}\vec{\theta}_1).$$

Resolvendo o produto

$$v^2 = \dot{r}^2 \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1 + 2r\dot{r}\dot{\theta} \vec{r}_1 \cdot \vec{\theta}_1 + r^2 \dot{\theta}^2 \vec{\theta}_1 \cdot \vec{\theta}_1.$$

Como  $\vec{r}_1$  e  $\vec{\theta}_1$  são ortonormais, conclui-se que

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2.$$

Sendo

$$r = \frac{1}{u}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2} \quad e \quad \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta}$$

segue que

$$v^2 = \left(-\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{u}\right)^2 \left(\frac{L}{m} u^2\right)^2 \quad \text{ou} \quad v^2 = \frac{L^2}{m^2} \left[ \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 \right] \quad (10.28)$$

Pelo teorema 10.2 da conservação da Energia Mecânica  $E$  (ou energia total), tem-se que,

$$\frac{1}{2}mv^2 + V = E, \quad (10.29)$$

onde  $V$  é a energia potencial. Assim, de (10.28) e (10.29) tem-se:

$$\frac{1}{2}m \left\{ \frac{L^2}{m^2} \left[ \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 \right] \right\} = E - V.$$

Assim,

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = 2 \left(\frac{E - V}{L^2}\right) m$$

ou

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2Em}{L^2} - \frac{2Vm}{L^2} \quad (10.30)$$

A energia potencial é dada por  $V = - \int f(r)dr$  e como  $f(r) = -\frac{K}{r^2}$  obtém-se

$$V = \int \frac{K}{r^2} dr = -\frac{K}{r} + c.$$

Mas  $\lim_{r \rightarrow \infty} V = 0$ , e assim  $c = 0$ . Logo,  $r = \frac{1}{u}$ ,

$$V = -Ku \tag{10.31}$$

Pela equação (10.26), tem-se  $\frac{du}{d\theta} = -C \operatorname{sen} \theta$ . Substituindo (10.26) em (10.30) e fazendo  $\frac{du}{d\theta} = -C \operatorname{sen} \theta$ , obtém-se:

$$(-C \operatorname{sen} \theta)^2 + \left( \frac{mK}{L^2} + C \cos \theta \right)^2 = \frac{2Em}{L^2} - \frac{2Vm}{L^2}.$$

Desenvolvendo os quadrados e simplificando,

$$C^2 + \frac{K^2 m^2}{L^4} + \frac{2Km}{L^2} C \cos \theta = \frac{2Em}{L^2} - \frac{2Vm}{L^2}$$

Substituindo  $V$  pela equação (10.31) e em seguida o valor de  $u$  pela equação (10.26), obtém-se

$$C^2 + \frac{K^2 m^2}{L^4} + \frac{2Km}{L^2} C \cos \theta = \frac{2Em}{L^2} + \frac{2Km}{L^2} \left( \frac{mK}{L^2} + C \cos \theta \right).$$

Simplificando, obtém-se

$$C^2 = \frac{2mE}{L^2} + \frac{K^2 m^2}{L^4} \text{ ou } C = \sqrt{\left( \frac{Km}{L^2} \right)^2 + \frac{2mE}{L^2}}$$

uma vez que  $C > 0$ . Colocando em evidência o termo  $\left( \frac{Km}{L^2} \right)^2$  e fatorando tem-se

$$C = \sqrt{\left( \frac{mK}{L^2} \right)^2 \cdot \left( 1 + \frac{\frac{2Em}{L^2}}{\left( \frac{mK}{L^2} \right)^2} \right)}.$$

Simplificando

$$C = \frac{mK}{L^2} \sqrt{1 + \left( \frac{2EL^2}{mK^2} \right)}.$$

Assim, a equação da trajetória (10.27) pode ser reescrita como

$$r = \frac{\frac{L^2}{mK}}{1 + \left( \frac{mK}{L^2} \sqrt{1 + \left( \frac{2EL^2}{mK^2} \right)} \right) \frac{L^2}{mK} \cos \theta}$$

ou

$$r = \frac{\frac{L^2}{mK}}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2EL^2}{mK^2}\right) \cos \theta}} \quad (10.32)$$

Definindo  $p = \frac{1}{\frac{mK}{L^2} \sqrt{1 + \left(\frac{2EL^2}{mK^2}\right)}}$  e  $e = \sqrt{1 + \left(\frac{2EL^2}{mK^2}\right)}$  pode-se escrever a equação (10.32) da forma

$$r = \frac{ep}{1 + e \cos \theta}.$$

Conclui-se que a trajetória de uma partícula em um campo de força central pode ser dada em função de sua energia mecânica  $E$  pela expressão 10.32. Observa-se que esta expressão representa uma cônica em coordenadas polares com excentricidade  $e = \sqrt{1 + \left(\frac{2EL^2}{mK^2}\right)}$ . Com isto, pode-se dizer que dependendo da energia mecânica  $E$  com a qual uma partícula entra em um campo de força central atrativa, sua trajetória poderá ser elíptica, hiperbólica ou parabólica como mostra a análise a seguir.

Fazendo a seguinte análise da excentricidade  $e = \sqrt{1 + \left(\frac{2EL^2}{mK^2}\right)}$  tem-se que:

1. Para que a cônica (10.32) seja uma elipse é necessário ter  $0 < e < 1$ , ou seja,

$$0 < 1 + \frac{2EL^2}{mK^2} < 1 \Leftrightarrow E < 0 \text{ e } 1 + \frac{2EL^2}{mK^2} > 0$$

ou

$$\frac{2EL^2}{mK^2} > -1 \text{ ou } E > -\frac{mK^2}{2L^2}.$$

Logo,

$$-\frac{mk^2}{2L^2} < E < 0$$

2. Para que (10.32) seja uma parábola,  $e = 1$ . Logo:

$$1 + \frac{2EL^2}{mK^2} = 1 \Leftrightarrow E = 0$$

3. Para que (10.32) seja uma hipérbole,  $e > 1$ . Logo:

$$1 + \frac{2EL^2}{mK^2} > 1 \Leftrightarrow E > 0.$$

Em resumo tem-se:

<b>Energia Mecânica(<math>E</math>)</b>	<b>Tipo de trajetória de uma partícula num campo de força central atrativa</b>
$-\frac{mk^2}{2L^2} < E < 0$	Trajetoária elíptica
$E = 0$	Trajetoária parabólica
$E > 0$	Trajetoária hiperbólica

# 11 Considerações Finais

Através da análise dos diversos livros didáticos referenciados neste trabalho, observou-se que estes priorizam o estudo analítico das cônicas e que as propriedades geométricas destas curvas quando aparecem são de forma dissimulada no decorrer da abordagem analítica. Observou-se também que na maioria destes livros, o esboço das cônicas é obtido considerando-as como gráfico de função o que dificulta a percepção destas curvas enquanto lugar geométrico. A definição geral usando a propriedade foco-diretriz dificilmente é encontrada nos atuais livros de Geometria Analítica, no livro [8] por exemplo, ela aparece como exercício. Conseqüentemente não é apresentada a definição para as cônicas em coordenadas polares. Quanto as aplicações destas curvas também em sua grande maioria aparecem como exercícios ou através de breves comentários. Assim, tanto o levantamento histórico sobre as cônicas quanto a análise dos livros didáticos, tiveram como principal objetivo evidenciar o que já se conhecia sobre o assunto e de que forma o tratavam afim de avaliar as possíveis contribuições desta dissertação para um estudo motivador deste tema.

Diante destes aspectos citados anteriormente esta dissertação apresentou, de modo geral, as seguintes contribuições: exposição sobre as origens históricas do assunto, tratamento das cônicas do ponto de vista geométrico, análise do conceito de excentricidade através da definição foco-diretriz e sua relação com as formas destas curvas, definição das cônicas em coordenadas polares, abordagem computacional dos principais resultados da teoria das cônicas e as importantes aplicações do tema. Com relação ao tratamento computacional, a escolha do software gratuito possibilita sua utilização em qualquer instituição de ensino. Além disso, o software GeoGebra possui interface simples e ferramentas diversificadas que permite a elaboração de sofisticadas construções. Através deste foi possível visualizar e analisar os principais resultados sobre a teoria apresentada sobre as cônicas. É importante ressaltar que a compreensão dos conceitos e das demonstrações foram imprescindíveis para a elaboração das construções através do software, por isso, tais construções geralmente aparecem no texto após as respectivas demonstrações ou definições. Acredita-se que o leitor munido primeiramente das ferramentas matemáticas apresentadas pelo texto poderá fazer uma investigação computacional mais consistente, ou seja, modificar as construções e através da teoria prever os possíveis resultados. É importante ressaltar também que ao iniciar este trabalho não

se tinha claro como seria organizado seus capítulos e que praticamente só final deste estudo foi que a dissertação obteve a organização que está sendo apresentada.

Conclui-se que embora as cônicas sejam conhecidas desde o século *IV*, muitos são os tópicos sobre o assunto que ainda podem ser explorados e reunidos num trabalho como este, por exemplo, definição das cônicas através da forma quadrática, cônicas determinadas por cinco pontos, cônicas sob o ponto de vista da geometria projetiva, estudo das cônicas no espaço tridimensional, cônicas como envolvente de curvas e outras aplicações.



# Referências

- [1] IEZZI, G. *Geometria Analítica*. 4. ed. São Paulo: Atual, 1993.
- [2] BOYER, C. B. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1996.
- [3] VASCONCELLOS, F. A. *História das matemáticas na antiguidade*. Lisboa: Livrarias Aillaud e Bertrand, s/d.
- [4] KATZ, V. J. *A History Of Mathematics*. New York: HaperCollins College Publishers, 1993.
- [5] HEATH, S. T. *A History Of Greek Mathematics*. United States of America: Dover Publications, Inc., 1981.
- [6] LINTZ, R. C. *História da Matemática*. Blumenal: Ed. da FURB, 1999.
- [7] SATO, J. *As Cônicas e suas Aplicações*. [S.l.], 2004.
- [8] BOULOS, P.; CAMARGOS, I. *Geometria Analítica*. 3. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.
- [9] KINDLE, J. H. *Geometria Analítica Plana e no Espaço*. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1959.
- [10] DOMINGUES, H. H. *Álgebra Moderna*. 2. ed. São Paulo: Atual, 1983.
- [11] SANTOS, R. J. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2007.
- [12] VENTURI, J. J. *Cônicas e Quádricas*. 5. ed. Curitiba: Unificado, 1949.
- [13] DANTAS, M. J. H.; OLIVEIRA, N. J. *Uma Introdução À Mecânica Clássica: Força Central e Movimento Planetário*. [S.l.], 2005.
- [14] GONÇALVES, Z. M. *Curso de Geometria Analítica Com Tratamento Vetorial*. Rio de Janeiro: Científica, 1969.
- [15] LIMA, E. L. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

- 
- [16] MURDOCH, D. C. *Geometria Analítica*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora LTDA, 1969.
- [17] LEHMANN, C. H. *Geometria Analítica*. México: Editorial Limusa, S.A., 1989.
- [18] EFIMOV, N. *Curso Breve de Geometria Analítica*. Moscou: Mir, 1978.
- [19] VELLO, V. *Desenho Geométrico*. São Paulo: Editora Scipione, 1995.
- [20] SPIEGEL, M. R. *Mecânica Racional*. E. U. A.: Editora McGraw-Hill do Brasil, LTDA, 1973.
- [21] WATARI, K. *Mecânica Clássica*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2003.
- [22] HALLIDAY, D.; RESNICK, R. *Fundamentos da Física*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1994.
- [23] SYMON, K. R. *Mecânica*. Rio de Janeiro: Campus Ltda, 2003.
- [24] ALVARENGA, B.; MÁXIMO, A. *Curso de Física*. 3. ed. São Paulo: Harbra Ltda, 1992.
- [25] SCHECK, F. *Mechanics*. 5. ed. New York: Springer Berlin Heidelberg, 2005.
- [26] GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo - Vol.2 e 3*. 5. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2002.
- [27] STEWART, J. *Cálculo - Vol.2*. 5. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2007.
- [28] HOWARD, A. et al. *Cálculo - Vol.2*. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.
- [29] SIMMONS, G. F. *Cálculo Com Geometria Analítica-Vol.2*. São Paulo: McGraw-Hill, Ltda, 1988.
- [30] ÁVILA, G. *Cálculo Vol.2 e 3*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1995.

# A Cônicas no GEOGEBRA

Neste apêndice encontra-se uma breve apresentação do software GEOGEBRA bem como a descrição das construções que foram exibidas nesta dissertação com a utilização deste software.

## A.1 GEOGEBRA

GEOGEBRA é um software de matemática que reúne geometria, álgebra e cálculo. Foi criado, em 2002, pelo professor Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburgo na Áustria com objetivo de ser utilizado em ambiente de sala de aula. Como é um software livre o seu download pode ser feito através do site

[http://www.geogebra.org/cms/pt\\_BR](http://www.geogebra.org/cms/pt_BR), versão 3.2.

A figura A.1 a seguir, mostra a tela principal do GEOGEBRA.

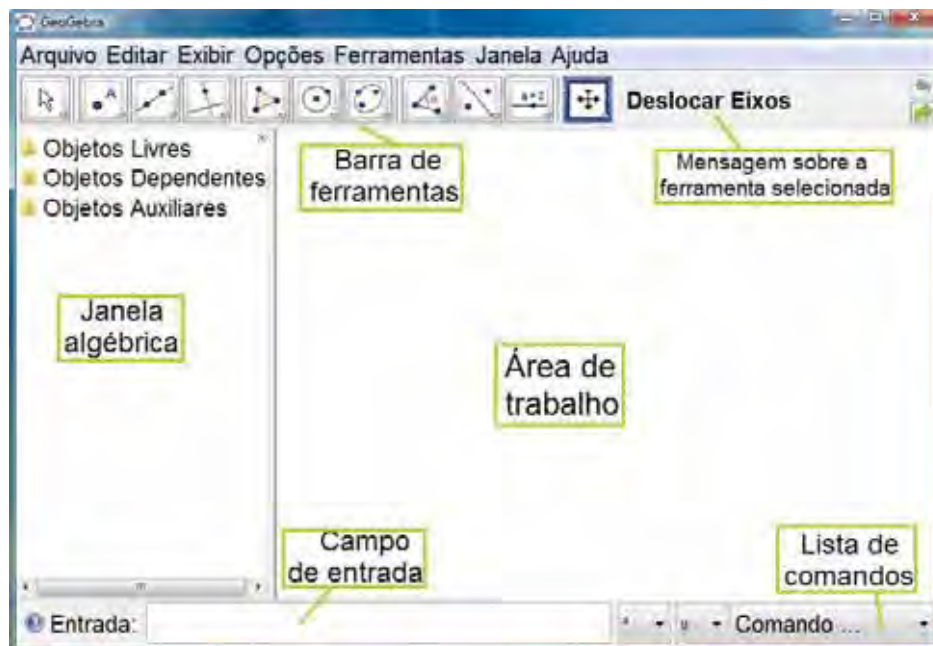



















Figura A.1: Tela principal do software GEOGEBRA.

O GEOGEBRA possui todas as ferramentas tradicionais de um programa de geometria dinâmica: pontos, segmentos, retas e seções cônicas além da possibilidade de se

trabalhar com equações e coordenadas, que podem ser inseridas diretamente através do campo de entrada. Qualquer objeto exibido na área de trabalho é representado algebricamente através da janela algébrica. Isto facilita, didaticamente, a exploração de duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: a representação geométrica (ou gráfica) e a representação algébrica.

Algumas ferramentas do GEOGEBRA que foram utilizadas nas construções apresentadas nesta dissertação e suas respectivas funções são descritas abaixo:

	<b>Move os objetos na área de trabalho.</b> Clique sobre o objeto selecionado e arraste-o.
	<b>Inserir um novo ponto.</b> Clique na área de trabalho, em uma reta ou em uma curva.
	<b>Determina a interseção de dois objetos.</b> Clique sobre os objetos ou diretamente na interseção.
	<b>Traça a reta definida por dois pontos.</b> Clique sobre dois pontos selecionados.
	<b>Traça o segmento definido por dois pontos.</b> Clique sobre dois pontos selecionados.
	<b>Traça uma semi-reta definida por dois pontos.</b> Selecione primeiro a origem e, depois, um outro ponto.
	<b>Determina o vetor definido por dois pontos.</b> Selecione primeiro a origem e, depois, a outra extremidade.
	<b>Traça a reta perpendicular que passa por um ponto.</b> Selecione primeiro o ponto e, depois, uma reta ou uma semi-reta ou um segmento ou um vetor.
	<b>Traça a reta paralela que passa por um ponto.</b> Selecione primeiro o ponto e, depois, uma reta ou uma semi-reta ou um segmento ou um vetor.
	<b>Traça a mediatriz de um segmento.</b> Selecione dois pontos ou um segmento.
	<b>Determina um polígono pelos seus vértices.</b> Selecione os vértices formando um ciclo.
	<b>Traça uma circunferência definida pelo centro e um de seus pontos.</b> Selecione o centro e, depois, um ponto da circunferência.

	<p><b>Determina o ângulo formado por três pontos ou entre duas retas.</b> Selecione três pontos ou duas retas. O ângulo determinado pelos três pontos será o maior ou menor ângulo conforme a ordem da escolha for no sentido horário ou anti-horário.</p>
	<p><b>Insere um seletor (ou parâmetro).</b> Clique na área de trabalho para especificar o local onde aparecerá o parâmetro selecionado. Este parâmetro pode variar numericamente (se for escolhido a opção <b>Número</b> na janela do seletor) ou variar em graus (se for escolhido a opção <b>Ângulo</b>). Ambos podem variar quando o ponto do seletor for arrastado ou automaticamente através da opção <b>Animação ativada</b>. Para marcar esta opção clique com mouse direito sobre o seletor.</p>
	<p><b>Insere texto na área de trabalho.</b> Clique na área de trabalho ou em um ponto onde se pretende inserir o texto. Caso seja interessante, pode-se estabelecer uma condição para que o texto seja exibido na área de trabalho. Por exemplo, exibir a palavra <b>Hipérbole</b> quando <math>e &gt; 1</math>. Para isto, clique com mouse direito sobre o texto, acesse a opção <b>Propriedades, Avançado</b> e digite <math>e &gt; 1</math> no campo <b>Condição para mostrar objeto</b>. Este recurso pode ser aplicado em qualquer outro objeto na área de trabalho.</p>
	<p><b>Desloca os eixos.</b> Arraste a área de trabalho.</p>
	<p>Este botão <b>play/pause</b> aparece no canto esquerdo inferior da área de trabalho quando for marcada a opção <b>Animação ativada</b>. Através dele pode-se acionar ou parar a animação.</p>

Além das descrições na próxima seção, os passos das construções feita no GEOGEBRA podem ser visualizados através do próprio software. Este importante recurso possibilita assistir a sequência de tais passos através da ferramenta **Barra de navegação para passos da construção**. Para acessar esta barra clique no menu **Exibir** conforme ilustra a figura A.2 abaixo:

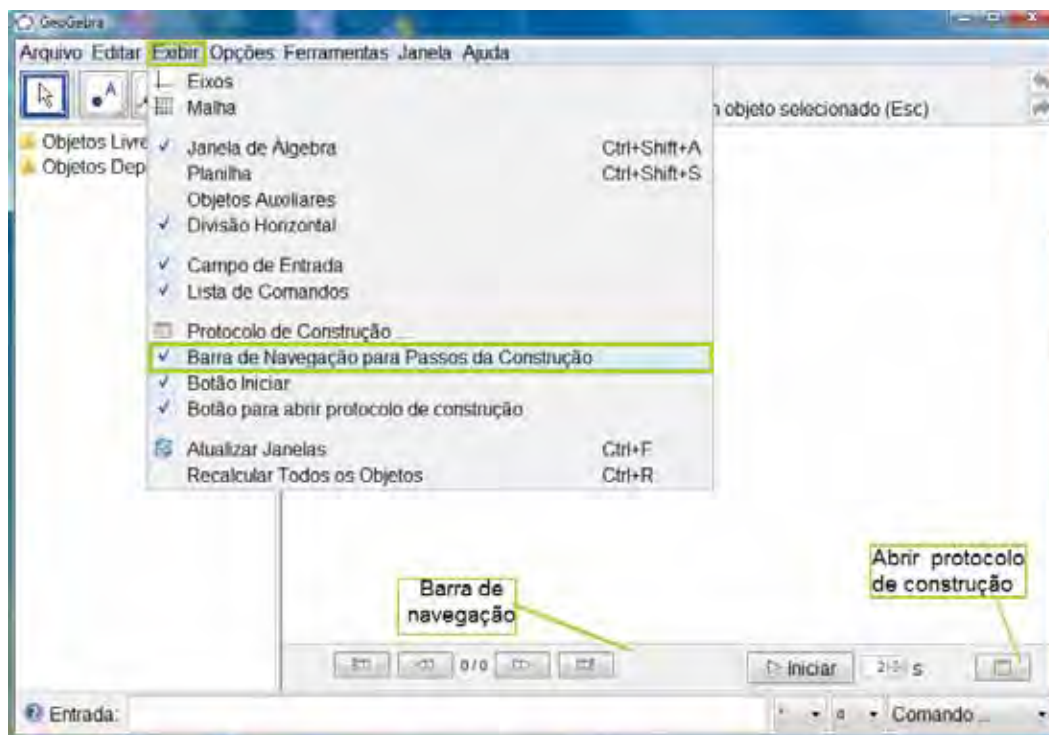


Figura A.2: Barra de navegação para passos da construção

O protocolo de construção é uma lista que exibe os objetos usados nas construções feitas na área de trabalho. Esta lista é organizada na ordem em que os objetos foram usados e no final dela aparece uma barra de navegação que permite exibir manualmente cada passo de uma construção.

## A.2 Construções feitas através do GEOGEBRA

As construções aqui apresentadas foram organizadas seguindo a ordem dos capítulos anteriores.

### A.2.1 Elipse

#### A.2.1.1 Construção do lugar geométrico dos pontos de uma elipse

1. Marque dois pontos  $F_1$  e  $F_2$  distintos na área de trabalho;
2. Trace uma semi-reta de origem em  $F_1$  e que passe por  $F_2$ ;
3. Marque um ponto  $A$  na semi-reta  $F_1F_2$  não pertencente ao segmento  $F_1F_2$ ;
4. Trace uma circunferência de centro  $F_1$  e raio  $F_1A$ ;
5. Escolha um ponto  $D$  qualquer sobre a circunferência e trace uma reta  $s$  passando pelos pontos  $F_1$  e  $D$ ;

6. Trace o segmento  $F_2D$ ;
7. Trace a mediatriz  $t$  do segmento  $F_2D$  ;
8. Determine o ponto  $P$  de interseção da mediatriz  $t$  com a reta  $s$ .
9. Habilite rastro do ponto  $P$ . Clique com mouse direito sobre o ponto e marque a opção **Habilitar Rastro**.
10. Com auxílio do mouse esquerdo, arraste o ponto  $D$  sobre a circunferência para obter o esboço da elipse.

**Observação A.1.** Para que o ponto  $D$  movimente automaticamente sobre a circunferência na construção anterior, proceda da seguinte forma:

- a) Após executar os passos da construção anterior até o item 4, escolha um ponto  $D$  qualquer sobre a circunferência;
- b) Clique na ferramenta seletor e em seguida clique na tela. Aparecerá a janela de configuração do seletor onde deve ser marcada a opção ângulo;
- c) Suponhamos que o ângulo escolhido para o seletor seja  $\alpha$  e que a circunferência considerada tenha centro  $O$ , então digite no campo de entrada o comando **girar[D, $\alpha$ ,O]**. Em seguida, dê **<Enter>** e aparecerá sobre a circunferência o ponto  $D'$ .
- d) Clique com mouse direito sobre o ponto  $D$  e escolha a opção esconder objeto.
- e) Clique com mouse direito sobre o seletor e marque a opção **Animação ativada** e verá que o ponto  $D'$  movimentará automaticamente sobre a circunferência;
- f) Use o botão **play/pause** e pare o ponto  $D'$ ;
- g) Execute o restante da construção A.2.1.1 a partir do item 5 até o item 9 utilizando o ponto  $D'$  ao invés de  $D$ ;
- h) Para visualizar o esboço da elipse basta usar o botão **play/pause**.

### A.2.1.2 Construção da demonstração que o ponto $P$ está sobre a elipse

O objetivo desta construção é mostrar que curva obtida pela construção A.2.1.1 satisfaz a definição 5.1 para elipse. Em outras palavras, pretende-se mostrar que para qualquer posição do ponto  $P$  sobre a curva obtida pela construção A.2.1.1, tem-se que a soma dos segmentos que liga  $P$  aos focos  $F_1$  e  $F_2$  é constante. Procedimento:

1. Considere a construção A.2.1.1;
2. Trace os segmentos  $PF_1$  e  $PF_2$ ;

3. Clique com mouse direito sobre cada um dos segmentos e, depois, em **Propriedades**. Na janela que se abriu, vá até opção **Exibir Rótulo** e escolha a opção **Nome & valor**.
4. Para exibir o valor da soma dos segmentos na tela basta digitar no campo de entrada o comando **texto[distância[ $F_1$ , A]]**. Após dar <Enter> o valor da soma aparecerá em algum local da tela e pode ser arrastado para outra posição se for preciso.

### A.2.1.3 Construção da propriedade da reta tangente à elipse

1. Considere a construção A.2.1.1;
2. Trace os segmentos  $PF_1$  e  $PF_2$ ;
3. Simplifique a figura exibindo apenas o ponto  $P$ , a reta  $t$  e os segmentos que liga  $P$  aos focos, isto é,  $PF_1$  e  $PF_2$ . Para esconder os demais objetos da construção basta clicar com mouse direito sobre cada um deles e desmarcar a opção **Exibir objeto**;
4. Marque dois pontos, por exemplo  $C$  e  $E$ , sobre a reta  $t$  tal que  $C$  esteja à esquerda do ponto  $P$  e  $E$  à direita de  $P$ .
5. Determine o ângulo entre cada segmento e a reta  $t$ . Para isto clique na ferramenta **Ângulo** e no sentido horário clique sobre pontos  $C$ ,  $P$  e  $F_1$ , em seguida sobre os pontos  $F_2$ ,  $P$  e  $E$ .
6. Exiba o valor da medidas dos ângulos clicando com mouse direito sobre os mesmos acessando as opções **Propriedades**, **Exibir** e **Nome & valor**;
7. Clique no botão **play/pause** e observe a medida dos ângulos quando o ponto  $P$  se move na área de trabalho.

## A.2.2 Hipérbole

### A.2.2.1 Construção do lugar geométrico dos pontos de uma hipérbole

1. Marque dois pontos  $F_1$  e  $F_2$  distintos na área de trabalho;
2. Trace uma semi-reta de origem em  $F_1$  e que passe por  $F_2$ ;
3. Marque um ponto  $A$  na semi-reta  $F_1F_2$  pertencente ao segmento  $F_1F_2$ ;
4. Trace uma circunferência de centro  $F_1$  e raio  $F_1A$ ;
5. Escolha um ponto  $D$  qualquer sobre a circunferência e trace uma reta  $s$  passando pelos pontos  $F_1$  e  $D$ ;



6. Trace o segmento  $F_2D$ ;
7. Trace a mediatriz  $t$  do segmento  $F_2D$  ;
8. Determine o ponto  $P$  de interseção da mediatriz  $t$  com a reta  $s$ .
9. Habilite rastro do ponto  $P$ .
10. Arraste o ponto  $D$  sobre a circunferência para obter o esboço da elipse.

Para configurar a construção de forma que ponto  $D$  movimente automaticamente usando o botão **play/pause**, veja a observação A.1.

#### A.2.2.2 Construção da demonstração que o ponto $P$ está sobre a hipérbole

1. Considere a construção A.2.2.1 da hipérbole;
2. Trace os segmentos  $PF_1$  e  $PF_2$ ;
3. Clique com mouse direito sobre cada um dos segmentos e, depois, em **Propriedades**. Na janela aberta vá até opção **Exibir Rótulo** e escolha a opção **Nome & valor**.
4. Para exibir o valor do módulo da diferença dos segmentos na tela basta digitar no campo de entrada o comando **texto[distância[ $F_1$ ,  $A$ ]]**. Após dar <Enter> o valor da diferença em módulo aparecerá em algum local da tela e pode ser arrastado para outra posição se for preciso.

#### A.2.2.3 Construção da hipérbole a partir da construção da elipse

O objetivo desta construção é mostrar que o lugar geométrico da hipérbole pode ser obtido a partir construção feita para determinar os pontos da elipse. Em outras palavras, estas duas curvas tem propriedades parecidas. Desta forma considerando a construção A.2.1.1 do capítulo elipse, basta arrastar com mouse o ponto  $A$  colocando-o entre os focos  $F_1$  e  $F_2$ . Assim quando  $D$  percorrer a circunferência o rastro do ponto  $P$  determinará os ramos da hipérbole.

#### A.2.2.4 Construção da propriedades da reta tangente à hipérbole

1. Considere a construção A.2.2.1 da hipérbole;
2. Trace os segmentos  $PF_1$  e  $PF_2$ ;
3. Simplifique a figura exibindo apenas o ponto  $P$ , a reta  $t$  e os segmentos que ligam  $P$  aos focos, escondendo os demais objetos da construção pela opção **Exibir objeto**.

4. Trace o menor ângulo formado pelo segmento  $PF_1$  e a reta  $t$ . Para isto marque um ponto distinto de  $P$  sobre a reta  $t$ , por exemplo o ponto  $E$ , e usando a ferramenta **Ângulo** clique sobre os pontos  $F_1$ ,  $P$  e  $E$  no sentido horário.
5. Repita o processo do item anterior para o segmento  $PF_2$ .
6. Exiba o valor das medidas dos ângulos;
7. Clique no botão **play/pause** e observe a medida dos ângulos quando o ponto  $P$  se move na área de trabalho.

### A.2.3 Parábola

#### A.2.3.1 Construção do lugar geométrico dos pontos de uma parábola

1. Trace uma reta  $r$  e marque um ponto  $F$  não pertencente a  $r$ ;
2. Trace uma reta  $s$  perpendicular à reta  $r$  passando por um ponto  $D$  qualquer de  $r$ ;
3. Trace o segmento  $FD$ ;
4. Trace a mediatriz  $t$  do segmento  $FD$ ;
5. Encontre o ponto de interseção das retas  $t$  e  $s$  e chame-o de  $P$ ;
6. Clique com mouse direito sobre o ponto  $P$  e marque a opção **Habilitar Rastro**.
7. Arraste o ponto  $D$  sobre a reta  $r$  para obter o esboço da parábola.

**Observação A.2.** Para que o ponto  $D$  movimente automaticamente sobre a reta  $r$ , na construção anterior, proceda da seguinte forma:

1. Após executar o primeiro passo da construção A.2.3.1 marque um ponto  $D$  sobre a reta  $r$ ;
2. Marque sobre a reta  $r$  um outro ponto  $E$  qualquer que esteja relativamente próximo de  $D$ .
3. Usando a ferramenta **Vetor definido por dois pontos** trace o vetor com origem em  $D$  e extremidade em  $E$ ;
4. Clique na ferramenta **Seletor** em seguida clique na área de trabalho. Aparecerá a janela de configuração do seletor onde pode-se estabelecer o intervalo de variação para o parâmetro escolhido;

5. Suponhamos que o parâmetro escolhido no item anterior seja  $\mathbf{a}$  e que o vetor  $DE$  esteja nomeado por  $u$ , então digite no campo de entrada o comando **transladar**[ $D,u*\mathbf{a}$ ]. Em seguida, dê **<Enter>** e aparecerá sobre a reta  $r$  o ponto  $D'$ .
6. Clique com mouse direito sobre o ponto  $D$  e escolha a opção **Exibir objeto**. O ponto  $D$  desaparecerá.
7. Clique com mouse direito sobre o seletor e marque a opção animação ativada e verá que o ponto  $D'$  movimentará automaticamente sobre a reta. A distância percorrida por  $D'$  dependerá do intervalo estabelecido no seletor;
8. Use o botão **play/pause** e pare o ponto  $D'$ ;
9. Execute o restante da construção A.2.3.1 a partir do item 2 até o item 6 utilizando o ponto  $D'$  ao invés de  $D$ ;
10. Para visualizar o esboço da parábola basta usar o botão **play/pause**.

#### A.2.3.2 Construção da demonstração de que o ponto $P$ está sobre uma parábola

1. Considere a construção A.2.3.1 da parábola;
2. Trace os segmentos  $PF$  e  $PD$ ;
3. Clique com mouse direito sobre cada um dos segmentos e, depois, em **Propriedades**. Na opção **Exibir Rótulo** escolha a opção **Nome & valor**.
4. Observe as medidas dos segmentos  $PF$  e  $PD$  quando o ponto  $D$  percorre a reta.

#### A.2.3.3 Construção da propriedade da reta tangente à parábola.

1. Considere a construção `refconstrucao8` da parábola;
2. Trace o segmento  $PF$ ;
3. Trace o menor ângulo entre a reta  $t$  e o segmento  $PF$ .
4. Trace o menor ângulo entre a reta  $t$  e a reta  $s$  e que não seja adjacente ao ângulo do item anterior;
5. Exiba o valor das medidas dos ângulos determinados.

## A.2.4 Unificação

### A.2.4.1 Construção das cônicas a partir da definição unificada das cônicas

Como esta construção foi obtida da construção A.2.4.7 sua descrição será apresentada na observação A.3.

### A.2.4.2 Construção da equação geral das cônicas pela definição foco-diretriz

1. Insira na área de trabalho os parâmetros **e** e **p** através da ferramenta **Seletor**;
2. Configure o intervalo do parâmetro **e** colocando valor mínimo de 0,1. Para isso clique com mouse direito sobre o parâmetro e acesse a opção **Propriedades**;
3. Insira no campo de entrada a expressão:

$$(1-e^2)x^2-4*p*x+y^2+4*p=0$$

4. Clique com mouse direito sobre o parâmetro **e** e marque a opção animação ativada;

### A.2.4.3 Construção da família de Cônicas

1. Insira na área de trabalho os parâmetros **e** e **p** através da ferramenta **Seletor**;
2. Configure o intervalo do parâmetro **e** colocando valor mínimo de 0,1. Para isso clique com mouse direito sobre o parâmetro e acesse a opção **Propriedades**;
3. Insira no campo de entrada a expressão:

$$(1-e^2)x^2-4*p*x+y^2+4*p=0$$

4. Clique com mouse direito sobre a nova curva que aparece na área de trabalho e marque opção **Habilitar rastro**.
5. Clique novamente com mouse direito sobre a curva e em seguida clique em **Propriedades**. Mude a cor da curva para verde e na janela **Avançado** digite no campo **Condição para mostrar objeto** a expressão  $e < 1$ .
6. Repita o processo do item 3, 4 e 5 escolhendo a cor azul para curva e a condição para mostrar objeto,  $e > 1$ ;
7. Repita o processo do item 3, 4 e 5 escolhendo a cor vermelha para curva e a condição para mostrar objeto,  $e = 1$ . Não digite o sinal =, clique no canto direito da janela **Condição para mostrar objeto** e selecione o sinal  $\hat{=}$ .
8. Para visualizar a família de cônica, clique com mouse direito sobre o seletor **e** e marque a opção **Animação ativada**.

#### A.2.4.4 Construção da forma e excentricidade da elipse

1. Clique com mouse direito sobre a área de trabalho e, em seguida, clique em **Eixos** para exibir os eixos coordenados;
2. Insira na área de trabalho os parâmetros **a** e **b** através da ferramenta **Seletor**;
3. Insira no campo de entrada a equação:

$$x^2/a^2 + y^2/b^2=1$$

Dê <**Enter**> e parecerá na área de trabalho uma elipse nomeada por *c*;

4. Insira no campo de entrada, um de cada vez, os comandos:
  - a) **foco[c]** para exibir os focos da elipse;
  - b) **vértice[c]** para exibir os vértices;
  - c) **centro[c]** para exibir o centro;
5. Trace um segmento que liga o centro da curva a um dos focos e outro que liga o centro ao vértice da curva. Para isto use a ferramenta **Segmento definido por dois pontos**;
6. Supondo que os dois segmentos traçados no item anterior seja respectivamente *e* e *f* digite no campo de entrada o comando **texto[e/f]** e será exibido na área de trabalho o valor da excentricidade da curva.
7. Outra opção para exibir a excentricidade da curva é digitar no campo de entrada o comando **texto[excentricidade[c]]**;
8. Altere o valor dos parâmetros **a** e **b** manualmente arrastando o ponto do seletor e observe a forma da curva. Faça  $a = b$  e observe que tipo de curva aparece;
9. Clique com mouse direito sobre os seletores e marque a opção **Animação ativada**;

#### A.2.4.5 Construção da forma e excentricidade da hipérbole

1. Clique com mouse direito sobre a área de trabalho e em seguida clique em **Eixos** para exibir os eixos coordenados;
2. Insira na área de trabalho os parâmetros **a** e **b** através da ferramenta **Seletor**;
3. Insira no campo de entrada a equação:

$$x^2/a^2 - y^2/b^2=1$$

- Dê <Enter> e aparecerá na área de trabalho uma hipérbole nomeada por  $c$ ;
4. Insira no campo de entrada, um de cada vez, os comandos:
    - a) **foco[c]** para exibir os focos da hipérbole;
    - b) **vértice[c]** para exibir os vértices;
    - c) **centro[c]** para exibir o centro ;
    - d)  $y = (b/a) * x$  e  $y = -(b/a) * x$  para exibir as assíntotas;
    - e) **texto[excentricidade[c]]** para exibir o valor da excentricidade.
  5. Chame o centro de  $O$ , os focos de  $F_1$  e  $F_2$  e os vértices de  $A_1$  e  $A_2$  ;
  6. Trace uma reta  $r$  perpendicular ao eixo da hipérbole e que passa pelo vértice  $A_2$ . Use a ferramenta **Reta perpendicular**;
  7. Marque o ponto de interseção da reta  $r$  com uma das assíntotas e chame de  $H$  esta interseção. Use a ferramenta **Interseção de dois objetos**;
  8. Trace os segmentos  $OF_2$ ,  $OA_2$ ,  $HA_2$  e  $OH$  e exiba suas medidas;
  9. Observe que  $OA_2 \cong OH$  e que  $OC^2 + OH^2 = OH^2$ ;
  10. Varie os valores dos parâmetros **a** e **b** e observe valor da excentricidade e forma da hipérbole;
  11. Clique com mouse direito sobre os seletores **a** e **b** e marque a opção **Animação ativada**.

#### A.2.4.6 Construção da forma e a excentricidade da parábola

1. Através da ferramenta **Seletor** insira o parâmetro  $p$ ;
2. Insira no campo de entrada a expressão:
 
$$y^2=4*p*x$$

Dê <Enter> e aparecerá uma parábola nomeada por  $c$ .
3. Insira no campo de entrada os comandos: **foco[c]**, **diretriz[c]**, **eixoprincipal[c]** e **vértice[c]**. Para cada comando inserido dê <Enter>;
4. Chame o vértice de  $V$  e o foco de  $F$ ;
5. Trace uma reta perpendicular ao eixo da parábola passando pelo ponto  $F$ ;
6. Encontre os pontos de interseção da parábola com a reta traçada no item anterior e nomeie estes pontos por  $A$  e  $B$ . Use a ferramenta **Interseção de dois objetos**;

7. Esconda a reta traçada no item 5;
8. Trace os segmentos  $VA$ ,  $VB$ ,  $VF$  e  $AB$ ;
9. Chame a medidas dos segmentos  $VF$  e  $AB$  de  $e$  e  $f$  respectivamente;
10. Use a ferramenta **Polígono** para traçar o triângulo fundamental  $AVB$  da parábola;
11. Exiba a medida da altura  $VF$  e da base  $AB$  do triângulo  $AVB$ ;
12. Insira no campo de entrada o comando **texto[f/e]** e aparecerá na área de trabalho o valor desta razão;
13. Trace o ângulo  $A\widehat{V}B$  e exiba seu valor;
14. Varie o valor do parâmetro  $p$  e observe o ângulo  $A\widehat{V}B$  e a razão  $\frac{AB}{VF} = \frac{f}{e}$ .

#### A.2.4.7 Construção da equação das cônicas em coordenadas polares com a diretriz perpendicular ao eixo polar

1. Através da ferramenta **Seletor** insira os parâmetros  $e$ ,  $q$  e  $\theta$ ;
2. Configure o intervalo do parâmetro  $e$  colocando valor mínimo de 0, 1;
3. Clicando com mouse direito na área de trabalho marque a opção **Eixos**;
4. Encontre o ponto de interseção dos eixos coordenados. Use a ferramenta **Interseção de dois objetos**;
5. Chame de  $F$  a interseção dos eixos;
6. Insira no campo de entrada a expressão  $r = e * q / (1 + e * \cos(\theta))$ ;
7. Digite no campo de entrada o ponto  $B = (r, 0)$ ;
8. Insira no campo de entrada o comando **girar** $[B, \theta]$ . Para digitar o parâmetro  $\theta$  clique na janela à direita do campo de entrada e selecione tal parâmetro;
9. Renomeie o ponto  $B'$  chamando-o de  $P$ ;
10. Trace o vetor de origem em  $F$  e extremidade em  $P$  e chame este vetor de  $r$ ;
11. Trace o ângulo  $B\widehat{F}P$  e esconda o ponto  $B$ ;
12. Insira no campo de entrada a expressão  $x = q$ . Com este procedimento aparecerá a reta diretriz da cônica que será gerada pelo movimento do vetor  $r$ ;
13. Habilite rastro do ponto  $P$  e varie o valor de  $\theta$  para visualizar a cônica.

14. Marque a opção **Animação ativada** no seletor  $\theta$  e observe a curva gerada para os casos  $e < 1$ ,  $e = 1$  e  $e > 1$ .

**Observação A.3.** Para fazer a construção 1 execute os passos da construção 7 até o item 8 e em seguida proceda da seguinte forma:

- a) Esconda os eixos coordenados e o ponto  $B$ ;
- b) Insira no campo de entrada a expressão  $x = q$ ;
- c) Faça  $q = -2$  movendo o ponto do seletor;
- d) Trace uma reta  $r$  perpendicular a reta diretriz  $x = q$  e que passe pelo ponto  $P$ ;
- e) Encontre a interseção entre a reta  $r$  e a reta  $x = q$  e chame esta interseção de  $D$ ;
- f) Esconda a reta  $r$ ;
- g) Trace os segmentos  $PF$  e  $PD$  exibindo suas medidas;
- h) Supondo que  $e$  seja a medida de  $PF$  e  $f$  a medida de  $PD$ , insira no campo de entrada o comando **texto[e/f]**;
- i) Habilite rastro do ponto  $P$  e varie o valor de  $\theta$  para visualizar a cônica.
- j) Relacione a cônica gerada na área de trabalho com a razão **texto[e/f]**.

#### A.2.4.8 Construção da equação das cônicas em coordenadas polares com a diretriz paralela ao eixo polar

1. Através da ferramenta **Seletor** insira os parâmetros  $e$ ,  $q$  e  $\theta$ ;
2. Configure o intervalo do parâmetro  $e$  colocando valor mínimo de 0,1;
3. Clicando com mouse direito na área de trabalho marque a opção **Eixos**;
4. Encontre o ponto de interseção dos eixos coordenados e chame-o de  $F$ ;
5. Insira no campo de entrada a expressão  $r = e * q / (1 + e * \sin(\theta))$ ;
6. Digite no campo de entrada o ponto  $B = (r, 0)$ ;
7. Insira no campo de entrada o comando **girar[B,  $\theta$ ]**;
8. Renomeie o ponto  $B'$  chamando-o de  $P$ ;
9. Trace o vetor de origem em  $F$  e extremidade em  $P$  e chame este vetor de  $r$ ;
10. Trace o ângulo  $B\hat{F}P$  e esconda o ponto  $B$ ;



11. Insira no campo de entrada a expressão  $y = q$ . Com este procedimento aparecerá a reta diretriz da cônica que será gerada pelo movimento do vetor  $r$ ;
12. Habilite rastro do ponto  $P$  e varie o valor de  $\theta$  para visualizar a cônica.
13. Marque a opção **Animação ativada** no seletor  $\theta$  e observe a curva gerada para os casos  $e < 1$ ,  $e = 1$  e  $e > 1$ .

## A.3 Licença do GEOGEBRA

GEOGEBRA - Dynamic Mathematics for Everyone  
Copyright 2001-2009 GeoGebra Inc.  
<http://www.geogebra.org/>

### LICENSE

- (1) GEOGEBRA Installer, Language and Documentation Files License: Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0
- (2) GEOGEBRA Application and Source Code License: GNU General Public License v2

- 
- (1) GEOGEBRA Installer, Language and Documentation Files License

All GEOGEBRA installers, language files and documentation files are subject to the following Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 License:

You are free to copy, distribute and transmit GEOGEBRA installers, language files and documentation files free of charge under the following conditions:

- Attribution. You must attribute the work (i.e. by linking to <http://www.geogebra.org/>)
- NonCommercial. You may not use this work for commercial purposes without permission of GEOGEBRA Inc. ([office@geogebra.org](mailto:office@geogebra.org)).
- No Derivative Works. You may not alter, transform, or build upon this work.

The Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 License can be found at: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>

GEOGEBRA file types that are subject to the above mentioned license:

- GEOGEBRA installers ... are installation packages that let you install the GEOGEBRA application and documentation files for your operating system (Microsoft Windows, Mac OS X, Linux, etc.).

- GEOGEBRA language files ... are the user interface language files (“properties files”) for all languages of the GEOGEBRA application and GEOGEBRA applet. They are packaged in the `geogebra_properties.jar` file and part of every official GEOGEBRA binary distribution.
- GEOGEBRA documentation files ... are all "GEOGEBRA HELP", "GEOGEBRA QUICKSTART" AND OTHER DOCUMENTATION FILES FOUND IN THE GEOGEBRA INSTALLERS OR ON THE GEOGEBRA WEBSERVER.

### Translations

Translations of GEOGEBRA installers, language files or documentation files are only allowed with permission of their respective authors. Resulting translations are subject to the same copyright as the original work (i.e. copyright of the original authors and Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivs License). The translators have the right to be attributed by name and contact address in their translated work. Furthermore, translated GEOGEBRA documentation files may not be used for commercial purposes without permission of the original authors and the respective translators.

### (2) GEOGEBRA Application and Source Code License

GEOGEBRA’s source code is subject to the GNU General Public License:

This program is free software; you can redistribute it and/or modify it under the terms of the GNU General Public License as published by the Free Software Foundation; either version 2 of the License, or (at your option) any later version.

This program is distributed in the hope that it will be useful, but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License for more details.

The GNU General Public License can be found at: <http://www.gnu.org/licenses/>

If you are interested in GEOGEBRA’s source code or want to help with programming, please write to Markus Hohenwarter ([markus@geogebra.org](mailto:markus@geogebra.org)).