

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
*Campus Rio Claro*

**ANÁLISE DE RESOLUÇÕES DE  
PROBLEMAS DE CÁLCULO  
DIFERENCIAL EM UM AMBIENTE DE  
INTERAÇÃO ESCRITA**

LEONARDO BARICHELLO

Orientadora: Profa. Dra. Rosana Giaretta Sguerra Miskulin

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós Graduação em Educação Matemática - Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem de Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos, para obtenção de título de Mestre em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)

2008

510.07 Barichello, Leonardo  
B252a Análise de resoluções de problemas de cálculo diferencial  
em um ambiente de interação escrita / Leonardo Barichello. -  
Rio Claro : [s.n.], 2008  
127 f. : il., figs., tabs.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista,  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Orientador: Rosana Giaretta Sguerra Miskulin

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Educação matemática  
3. Análise de erros. 4. Resolução de problemas. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP  
Campus de Rio Claro/SP

## **Comissão Examinadora**

---

Profa. Dra. Rosana Giaretta Sguerra Miskulin – Orientadora (UNESP - Rio Claro/SP)

---

Profa. Dra. Patrícia Rosana Linardi (ULBRA – Canoas/RS)

---

Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic (UNESP - Rio Claro/SP)

---

Leonardo Barichello – Aluno

Rio Claro, 05 de setembro de 2008

Resultado: Aprovado

## **Agradecimentos**

à Fapesp pelo apoio financeiro e à Unesp pelo suporte institucional.

à Profa. Dra. Rosana Giaretta Sguerra Miskulin pela orientação.

aos Membros da Banca: Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic e Profa. Dra. Patrícia Linardi. À professora Helena Noronha Cury pelas contribuições diretas e indiretas ao meu trabalho.

aos alunos do curso de Ciência da Computação que foram sujeitos desta pesquisa.

à família: mãe Sandra, pai Durval e irmã Sabrina, pelo apoio e suporte incondicional desde que me entendo por gente. Por tudo.

ao Marcelo e ao Daniel pela formação que me proporcionaram ao longo de toda a minha vida acadêmica, pelo constante estado de provocação intelectual e pelo apoio oferecido.

ao Rômulo pelas conversas e pelo apoio oferecido. Aos demais professores que enriqueceram a minha passagem pela Unesp.

à Tamara pelo companheirismo e apoio. Aos amigos de maneira geral, mas principalmente àqueles que estiveram mais próximos durante meus dois anos em Rio Claro: Dudu, Bulê, Brãno, Spanta, Thiago, Thaísa, Kátia, etc...

aos colegas da Unesp, muitos dos quais se tornaram amigos de verdade: Carla, Carlos Eduardo, Roger, Fernando, Lu, Patrícia, Marco, etc...

E também agradeço a todos aqueles que sentem que colaboraram, de alguma forma, com a conclusão desse trabalho e encerramento dessa etapa da minha vida, desde os parentes mais próximos até os amigos não citados acima.

- Uma grande obra ou uma bela vida?

- ...

retirado de *Diálogos Imaginários entre Eu e  
Mais Alguém*

## Resumo

A partir de uma concepção interacionista de ensino e aprendizagem, fundamentada nas idéias de Vigotski, procuramos investigar as potencialidades didático-pedagógicas de uma dinâmica de interação entre professor e aluno, baseada na escrita e orientada pela resolução de problemas, a qual chamamos de Dinâmica RCR. Essa dinâmica pode ser sintetizada pela seqüência resolução-comentário-resolução, na qual a cada resolução entregue por um aluno, o professor faz alguns comentários e devolve para que o aluno continue resolvendo. Os dados da pesquisa constituem-se dos blocos de interações entre aluno e professor acerca dos problemas propostos e por uma Entrevista Coletiva realizada após a coleta dessas resoluções. Dentre esses dados, escolhemos, apresentamos, analisamos e discutimos cinco casos (compostos por uma ou mais resoluções e trechos da entrevista), cada qual evidenciando uma potencialidade específica da Dinâmica RCR. Finalizamos a Dissertação reforçando essas potencialidades e apontando essa dinâmica como um valioso recurso didático-pedagógico para o professor de Matemática em todos os níveis de ensino, além de suas limitações.

**Palavras-Chave:** Educação Matemática, Análise de Erros, Escrita, Cálculo, Resolução de Problemas

## **Abstract**

Assuming an interactionist conception of teaching and learning, grounded on the Vygotsky's ideas, we investigated the didactic and pedagogical potentialities of a specific dynamic of interaction between teacher and student, based on writing and problem solving, which we named RCR Dynamics. This dynamic can be summed by the sequence resolution-comment-resolution, in which for each resolution presented by the student, the teacher makes some comments and returns the problem to the student so he continue his own solving process. The data of this research are composed by blocks of interactions about proposed problems and by a Group Interview made after we collected the resolutions. From these data, we chose, presented, analyzed and discussed five cases (consisting of one or more blocks of interactions and pieces of the interview), each one evidencing a specific potentiality of the RCR Dynamic. Then, we finish reinforcing those potentialities and pointing the dynamic as a valuable didactic and pedagogical resource to mathematics teachers in any school level, besides its limitations.

**Keywords:** Mathematics Education, Error Analysis, Writing, Calculus, Problem Solving

## Sumário

Introdução.....	10
Um Breve Histórico.....	10
Sobre a Dissertação.....	12
Referenciais Teóricos.....	14
1.1. A Visão Vigotskiana de Aprendizagem.....	14
1.1.1. A Zona de Desenvolvimento Proximal - ZDP.....	16
1.1.2. A Interação entre Professor e Estudante.....	21
1.2. Análise de Erros.....	26
1.2.1. Algumas Pesquisas envolvendo Análise de Erros.....	32
1.2.2. A Nossa Visão sobre o Erro.....	36
1.3. A Escrita e o Ensino e Aprendizagem de Matemática.....	40
1.3.1. Benefícios para o Estudante como Escritor.....	44
1.3.2. Benefícios para o Professor como Leitor.....	46
1.3.3. Benefícios para a Interação entre Estudante e Professor.....	47
Metodologia.....	51
2.1. O Contexto da Coleta dos Dados.....	52
2.2. A Dinâmica RCR.....	54
2.2.1. Sobre a Escolha dos Problemas.....	56
2.2.2. Os Relatórios de Múltiplas Entradas.....	62
2.3. As Resoluções Coletadas.....	66
2.4. A Entrevista Coletiva.....	67
Discussão e Análise dos Dados.....	70
3.1. A Questão da Análise de Erros.....	72
3.1.1. Problema B resolvido pelo aluno AN.....	73
3.1.2. Discussão.....	79
3.2. Diferentes Aspectos do Processo de Resolução de Problemas.....	82
3.2.1. O problema A resolvido pelo aluno AN.....	82
3.2.2. Discussão.....	90



3.3. Qualidade do Diálogo.....	92
3.3.1. O Problema E resolvido pela aluna MA.....	92
3.3.2. Discussão.....	97
3.4. Individualidade.....	101
3.4.1. O Problema H.....	102
3.4.2. Discussão.....	106
Considerações Finais.....	110
A Dinâmica RCR como um recurso Didático-Pedagógico.....	111
Contribuições para Futuras Pesquisas.....	116
Referências Bibliográficas.....	117
Anexo A – Os Problemas Escolhidos.....	122

# Introdução

## Um Breve Histórico

Como toda pesquisa, esta passou por várias transformações durante a sua construção.

Inicialmente, nossa proposta era totalmente focada na **análise e classificação de erros** e pretendia discutir algumas possibilidades de classificação de erros baseadas, principalmente, nas idéias de Radatz (1979) e Movshovitz-Hadar (1984), a partir de uma dinâmica que se constituía essencialmente em: recolher a resolução de um problema, comentá-la de acordo com os erros cometidos e devolvê-la para que o sujeito resolvesse novamente com base no comentário deixado.

Duas mudanças ocorreram já no início do desenvolvimento da pesquisa.

A primeira refere-se ao foco do nosso olhar, que se expandiu para todo o **processo de resolução de problemas**, ao invés de limitar-se aos erros. Trabalhos como os de Schoenfeld (1985) e Onuchic (1999) foram especialmente importantes para essa mudança.

A segunda refere-se à ampliação da dinâmica metodológica que havíamos concebido inicialmente: ao invés de realizarmos os ciclos de resolução-comentário-resolução apenas uma vez, decidimos que, a cada novo comentário, o ciclo recomeçaria até que, por algum motivo, o pesquisador decidisse encerrá-lo. Essa dinâmica para a coleta dos dados é o que chamamos, ao longo de todo este texto, de **Dinâmica RCR** (vide Seção 2.2 para mais detalhes).

Finalmente, a última grande mudança pela qual esta pesquisa passou decorreu, principalmente, da leitura dos trabalhos de Arthur Powell, especialmente Powell e Ramnauth (1992). A partir dessas leituras, passamos a tomar como foco da pesquisa não mais a análise dos erros ou dos processos de resolução de problemas em si, mas a Dinâmica RCR concebida como um recurso didático-pedagógico em potencial para o professor de Matemática.

Com isso, estabelecemos o objetivo da pesquisa como sendo:

**Evidenciar as potencialidades da Dinâmica RCR como um recurso didático-pedagógico para o ensino e aprendizagem de Matemática.**

Como dito anteriormente, e explicitado no enunciado do objetivo da pesquisa, a Dinâmica RCR constituiu-se como um elemento central dentro deste trabalho. Ela não apenas ocupou uma posição central no objetivo, como também foi utilizada como recurso metodológico para a Coleta dos Dados e, mais do que isso, sintetizou as inquietações do pesquisador desde a concepção da pesquisa: investigar aspectos da resolução de problemas quando o resolvidor interage com um parceiro mais capaz.

A maneira pela qual essa interação se efetivou na prática foi mudando e se definindo ao longo da evolução da pesquisa, para dar conta dos novos anseios do pesquisador e da orientadora, e acabou se fixando dentro das seguintes características<sup>1</sup>:

- a) O processo de interação efetivou-se por meio do seguinte esquema: a) os sujeitos recebiam um problema e, após resolvê-lo, devolviam-no ao pesquisador na aula seguinte, b) o pesquisador fazia seus comentários com base na resolução apresentada e devolvia a correção aos sujeitos na aula seguinte, e c) a dinâmica recomeça até que pesquisador ou sujeito decidam por encerrá-la, abrindo espaço para a introdução de um novo problema;
- b) A disciplina utilizada como cenário foi Cálculo Diferencial e Integral 1, ministrado pela orientadora desta pesquisa, para alunos ingressantes do curso de Ciência da Computação da Unesp de Rio Claro;
- c) A interação entre os sujeitos e o pesquisador ocorreu por meio da Escrita, utilizando Relatórios de Múltiplas Entradas (POWELL e RAMNAUTH, 1992) e motivados por problemas escolhidos pelo pesquisador sobre os tópicos abordados na disciplina.

Também chamamos a atenção para o fato de que, originalmente, víamos a dinâmica para coleta de dados estritamente como um procedimento metodológico de uma pesquisa acadêmica, mas, no final, passamos a ver essa dinâmica como um recurso didático-pedagógico para o ensino e aprendizagem de Matemática.

Esse viés original, por mais que tenha sido progressivamente colocado em segundo plano, esteve sempre na mente do pesquisador e influenciou algumas de nossas decisões ao longo do trabalho.

Isso posto, podemos finalmente partir para a Dissertação em si.

---

<sup>1</sup> Essas características são discutidas com mais profundidade na Seção 2.2.

## **Sobre a Dissertação**

Esta Dissertação é composta por três capítulos.

No **Capítulo 1 – Referenciais Teóricos** – explicitamos as teorias que serviram de referência para a concepção e delineamento desta pesquisa, bem como para a análise e a discussão dos dados coletados. Primeiro, a **Teoria Vigotskiana**, para explicitar as concepções de ensino, aprendizagem e desenvolvimento utilizadas nesta pesquisa. Depois, abordamos a **Análise de Erros** e a **Escrita**, como referências que nos auxiliaram principalmente na análise, compreensão e discussão dos dados coletados.

No **Capítulo 2 – Metodologia** – apresentamos as opções metodológicas que adotamos para a Coleta dos Dados desta pesquisa, bem como seus fundamentos teóricos e uma breve descrição geral do que foi coletado. É nesse capítulo que apresentamos com um maior detalhamento a **Dinâmica RCR** e como ela se concretizou durante a Coleta dos Dados.

No **Capítulo 3 – Discussão e Análise dos Dados** – apresentamos a análise detalhada e a discussão, com base nos referenciais teóricos, de quatro casos: A Questão da Análise de Erros, Diferentes Aspectos da Resolução de Problemas, Qualidade do Diálogo e Individualidade. Todos escolhidos por serem, aos nossos olhos, significativos em termos dos objetivos da pesquisa.

Após esses três capítulos, delineamos algumas **Considerações Finais**, nas quais buscamos fazer uma síntese daquilo que foi apresentado e discutido ao longo de toda a Dissertação, tendo como foco o objetivo da pesquisa e as contribuições que esta pode trazer para a Educação Matemática.

E, por fim, trazemos a Bibliografia da pesquisa, seguida por três anexos: no primeiro (Anexo A), presente no corpo deste texto, apresentamos todos os problemas utilizados na Coleta dos Dados; no segundo (Anexo B), disponível em CD-ROM, disponibilizamos todos os dados coletados através da Dinâmica RCR; e, no terceiro (Anexo C), disponível em DVD, disponibilizamos a filmagem da entrevista coletiva, realizada com os sujeitos da pesquisa.

Finalizando esta Introdução, e para servir como provocação disparadora da leitura desta Dissertação, citamos o seguinte trecho retirado de Baldino (1995), que, apesar de se

referir especificamente ao ensino de Cálculo, pode ser estendido para o ensino de Matemática de maneira geral:

O ensino tradicional prefere evitar cuidadosamente as dificuldades e armar o curso sobre uns tantos malabarismos algébricos como o cálculo de derivadas, a integração de frações racionais, a regra de L'Hôpital, etc. Com essa tática, os alunos que passam são os que conseguiram aprender muito mais que isso, além dos sobreviventes do sistema, que não se vexam em decorar rotinas para conseguir o diploma. Os demais ficam intrigados com o sentido dessa farsa, antes de serem centrifugados como reprovados. O fracasso do ensino de Cálculo pode ser escondido mas não pode ser negado. (p. 3)

# CAPÍTULO 1

## Referenciais Teóricos

Neste capítulo, pretendo delinear as bases teóricas através das quais esta pesquisa foi concebida e seus dados foram analisados.

O primeiro deles, que se refere à Teoria Vigotskiana sobre aprendizagem e desenvolvimento, nos serviu como referencial teórico básico, enquanto os demais tiveram um papel muito mais analítico no momento em que nos deparamos com os dados coletados.

### 1.1. A Visão Vigotskiana de Aprendizagem

Lev Semenovich Vigotski nasceu na Bielarus, país que compôs a extinta União Soviética, em 1896, mesmo ano do nascimento de Jean Piaget, na Suíça.

Vigotski<sup>2</sup> iniciou seus estudos formais em Direito e demonstrou logo de início um grande interesse por Filosofia, História e Literatura. Anos mais tarde, passou a se interessar mais profundamente pelo desenvolvimento psicológico do ser humano, o que o fez realizar alguns estudos em Psicologia e até mesmo em Medicina.

Sua carreira acadêmica inicia-se após a Revolução de 1917, na Rússia, e seu interesse

---

2 O último nome desse autor aparece em língua portuguesa de diversas formas. A forma que adotaremos neste texto foi introduzida no livro “A Construção do Pensamento e da Linguagem” (Vigotski, 2001) que foi traduzido diretamente do russo, ao contrário dos demais publicados em língua portuguesa. Nas citações, manteremos a grafia utilizada pelo autor.

inicial como pesquisador foi em Pedologia - “ciência da criança”. De fato, “os aspectos da psicologia de Vygotsky que nós [...] lentamente aprendemos a apreciar [...] eram considerados, por Vygotsky, como o centro da Pedologia enquanto ciência mais geral do que a Psicologia” (VAN DER VEER e VALSINER, 1997, p. 28).

Foi a partir de 1924, quando Vigotski ingressou no Instituto de Psicologia de Moscou, que as idéias do autor passaram a ganhar corpo e que a parte mais significativa de sua obra foi produzida. Foi nesse período que o autor realizou as suas pesquisas empíricas e que começou a se constituir um grupo de pesquisadores, dentre os quais destacamos Luria e Leontiev, os quais, após a morte de Vigotski, deram continuidade às suas idéias, constituindo o que viria a ser chamado, posteriormente, de Corrente Sócio-Histórica dentro da Psicologia.

Vigotski morreu em 1934, prematuramente, vítima de tuberculose. Nesse mesmo ano, o livro “Pensamento e Linguagem”, considerado por muitos o cerne de suas idéias, foi publicado na Rússia.

Devido ao isolamento da Rússia durante o auge da União Soviética, as obras de Vigotski ficaram por muito tempo restritas ao país e, mesmo dentro dele, em decorrência da forte censura, ficaram muito tempo sem serem publicadas.

Apenas em 1962, o livro “Pensamento e Linguagem” foi publicado nos Estados Unidos. Piaget, em uma nota publicada como apêndice dessa edição norte-americana, lamentou não ter ocorrido um diálogo direto entre eles, dado que tratavam de assuntos tão próximos e, além disso, Vigotski, ao elaborar seus livros, chegou até a discutir amplamente trechos das obras de Piaget.

A partir da década de 70, em diversos países, as idéias de Vigotski começaram a ganhar espaço tanto na área de Psicologia como na de Educação, e, na década de 80, essas obras se consagram, principalmente em decorrência de trabalhos de novos autores, como Rogoff, Werstch e Valsiner.

No Brasil, as obras de Vigotski surgiram a partir de 1984 e, por muito tempo, apenas como traduções feitas a partir de traduções do original para o inglês. Somente em 2001, foi produzida uma tradução direta do russo para o português: “A Construção do Pensamento e da Linguagem”.

É importante salientar que, principalmente em função de sua morte prematura,

sua produção escrita não chega a se constituir como um sistema explicativo completo, articulado, do qual pudéssemos extrair uma 'teoria vygotkskyana' bem estruturada [...]. Parecem ser, justamente, textos 'jovens', escritos com

entusiasmo e pressa, repletos de idéias fecundas que precisariam ser canalizadas num programa de trabalho a longo prazo para que pudessem ser exploradas em toda a sua riqueza (OLIVEIRA, 2006, p. 21)

Nesse sentido, o trabalho de seus contemporâneos russos e dos pesquisadores ocidentais que tiveram contato com a sua obra a partir da década de 70 tornaram-se fundamentais para caracterizar uma corrente dentro da Psicologia e da Educação, baseada nas idéias originais de Vigotski e nas elaborações decorrentes dela, chamada de corrente sócio-histórica.

Estaria além dos nossos objetivos discutir aqui a corrente sócio-histórica como um todo ou até mesmo o amplo espectro de idéias introduzidas por Vigotski através de sua obra. Portanto, focaremos nossa atenção nas idéias que constituem o nosso referencial teórico fundamental: o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal e seus desdobramentos educacionais.

### **1.1.1. A Zona de Desenvolvimento Proximal - ZDP**

Do nosso ponto de vista, o aspecto inovador que Vigotski introduziu na Psicologia Educacional – pensada como a parte da Psicologia que oferece contribuições para a compreensão dos processos de ensino e aprendizagem - diz respeito à relação que esse autor estabeleceu entre aprendizagem e desenvolvimento e, conseqüentemente, aos construtos teóricos que derivam dessa relação.

Em oposição às idéias de diversos pesquisadores contemporâneos a ele, como Piaget e Thorndike, Vigotski (2007)<sup>3</sup> propôs que a aprendizagem caminha à frente do desenvolvimento, impulsionando-o. Nas palavras do próprio autor:

o aspecto mais central da nossa hipótese é a noção de que os processos de desenvolvimento não coincidem com os processos de aprendizado. Ou melhor, o processo de desenvolvimento progride de forma mais lenta e atrás do processo de aprendizado (p. 103)

O conceito fundamental para explicitar a posição assumida por Vigotski é o de Zona

---

3 As idéias de Vigotski começaram a ser delineadas em seus primeiros trabalhos, datados da década de 1920. As datas citadas neste texto se referem ao ano da publicação da edição lida pelo autor desta pesquisa, e não o ano de publicação do trabalho original.



de Desenvolvimento Proximal<sup>4</sup> e, para compreender a sua importância, é necessário fazer a distinção entre dois níveis de desenvolvimento estabelecidos pelo autor.

O primeiro deles é o **nível de desenvolvimento real**, que é “o nível de desenvolvimento das funções mentais da criança que já se estabeleceram como resultado de certos ciclos de desenvolvimento já completados” (VIGOTSKI, 2007, p. 95), e que pode ser determinado por meio da solução independente de problemas.

Para esse tipo de determinação, qualquer resolução de um problema não realizada de maneira totalmente independente pela criança, ou seja, com ajuda de algum adulto ou com a colaboração de outra criança, é desconsiderada. Esse é o nível de desenvolvimento almejado por testes de inteligência convencionais, como o tradicional Teste de QI.

Por muito tempo, o nível de desenvolvimento real figurou como o único parâmetro relevante para a análise do desenvolvimento cognitivo de um indivíduo. Porém, Vigotski (2007) apontou, através de uma série de pesquisas empíricas, que crianças com um mesmo nível de desenvolvimento real podem apresentar diferenças significativas na capacidade de resolver problemas quando recebem assistência de um adulto ou em colaboração com outra criança. A respeito disso, o autor disse que

mesmo os pesquisadores mais sagazes [...] nunca consideraram a noção de que o que a criança consegue fazer com ajuda dos outros poderia ser, de alguma maneira, muito mais indicativo de seu desenvolvimento mental do que o que se consegue fazer sozinha (VIGOTSKI, 2007, p. 96)

Van der Veer e Valsiner (1997) reforçaram que Vigotski se deparou com essa constatação diversas vezes ao longo de sua carreira científica, e que a explicação para o fato de os demais pesquisadores da área terem insistido em desprezar a resolução assistida de problemas pode estar em uma concepção errônea de imitação:

O mal entendido comum, segundo Vygotsky, era a crença de que as crianças eram capazes de imitar qualquer coisa, como se a imitação não fosse nada mais do que um processo mecânico e automático que não revelava nada da mente do imitador (VAN DER VEER e VALSINER, 1997, p. 372)

Sobre isso, Oliveira (1997) afirma que “imitação, para ele [Vigotski], não é mera cópia

---

4 Salientamos que estamos cientes de que nas novas traduções feitas a partir dos originais russos (Vigotski, 2001, por exemplo) de algumas obras de Vigotski, essa denominação é substituída por Zona de Desenvolvimento Imediato. Porém, como o livro em que mais nos baseamos para escrever essa Seção (Vigotski, 2007) é uma tradução feita a partir de uma tradução para o inglês, e utiliza a denominação Zona de Desenvolvimento Proximal. Optamos por utilizar esse termo para não entrar em conflito com trechos citados.

de um modelo, mas reconstrução individual daquilo que é observado nos outros” (p. 63). Ou seja, para Vigotski, aquilo que é realizado por um indivíduo quando interage com outro não deve ser visto apenas como uma mera cópia, mas sim como uma atividade intelectual legítima e dotada de significado para a compreensão do desenvolvimento desse indivíduo.

E foi, a partir desse interesse por aquelas tarefas que só podem ser executadas em um ambiente de interação entre indivíduos, que Vigotski (2007) definiu o **nível de desenvolvimento potencial** como sendo o nível de desenvolvimento das funções mentais capazes de atuar somente quando a criança resolve problemas com o auxílio de um adulto, professor, parceiro mais capaz, ou, ainda, com a colaboração de outra criança.

Claramente, o nível de desenvolvimento potencial engloba as habilidades presentes no nível de desenvolvimento real e vai além. Porém, ao contrário do que poderia ser imaginado, o nível de desenvolvimento potencial não se estende indefinidamente, pois, existem tarefas que estão além do alcance de um indivíduo mesmo com a ajuda de alguém que domine essa tarefa, como, por exemplo, a escrita para uma criança de um ano de idade.

Estabelecida essa distinção entre nível de desenvolvimento real e potencial, Vigotski (2007) definiu a Zona de Desenvolvimento Proximal como sendo:

a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problema, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com parceiros mais capazes. (p. 97)

Foi com base nesse conceito que o autor estabeleceu a seguinte relação entre aprendizagem e desenvolvimento:

o aprendizado desperta vários processos internos de desenvolvimento, que são capazes de operar somente quando a criança interage com pessoas em seu ambiente e quando em cooperação com seus companheiros. Uma vez internalizados, esses processos tornam-se parte das aquisições do desenvolvimento independente da criança (VIGOTSKI, 2007, p. 103)

Incorporando o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal nessa definição, podemos descrever a relação estabelecida por Vigotski (2007) entre aprendizagem e desenvolvimento da seguinte maneira: o aprendizado opera criando Zonas de Desenvolvimento Proximal, dentro das quais os indivíduos são capazes de realizar operações que estariam fora de seu alcance independente, e gradativamente essas operações se incorporam ao aparato cognitivo do indivíduo, resultando em desenvolvimento.

Van der Veer e Valsiner (1997) ressaltaram que, em um primeiro momento, o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal foi empregado por Vigotski no contexto específico dos testes de inteligência, buscando incorporar o “componente potencial” aos testes tradicionais, para apenas depois ilustrar o problema geral da relação entre educação e desenvolvimento cognitivo (p. 356).

Deve-se notar que o movimento proposto por Vigotski para a aquisição de novas habilidades<sup>5</sup> se dá de fora para dentro, ou seja, uma nova função psicológica surge no plano interpessoal, isto é, na interação entre pessoas quando se criam Zonas de Desenvolvimento Proximal, e gradativamente é incorporada ao plano intrapessoal, isto é, ao aparato cognitivo do indivíduo. Nas palavras de Oliveira (1997):

É como se o processo de desenvolvimento progredisse mais lentamente que o processo de aprendizado; o aprendizado desperta processos de desenvolvimento que, aos poucos, vão tornar-se parte das funções psicológicas consolidadas do indivíduo (p. 60)

Esse movimento proposto por Vigotski para explicar a relação entre aprendizagem e desenvolvimento é recorrente em sua obra. Ao analisar, por exemplo, o desenvolvimento da fala em crianças, o autor propôs um movimento semelhante, indo do plano interpessoal para o plano intrapessoal. Oliveira sintetiza esse movimento da seguinte maneira:

A criança primeiramente utiliza a fala socializada, com função de comunicar, de manter um contato social. Com o desenvolvimento é que ela passa a ser capaz de utilizar a linguagem como instrumento de pensamento, com a função de adaptação social. Isto é, a internalização do discurso é um processo gradual, que se completará em fases mais avançadas da aquisição da linguagem (p. 52)

Para Vigotski (2007), “a aquisição da linguagem pode ser um paradigma para o problema da relação entre aprendizado e desenvolvimento” (p. 102) e, mais do que isso, “esses exemplos individuais ilustram uma lei geral do desenvolvimento das funções mentais superiores” (p. 103).

Essa lei geral é, do nosso ponto de vista, a grande inovação introduzida pelas idéias de Vigotski, e dá origem a toda uma corrente de pensamento dentro da Psicologia cuja unidade de análise deixa de ser o indivíduo isolado, e passa a ser o indivíduo imerso em seu contexto

---

5 Foge do nosso escopo discutir o uso do termo habilidade para aquilo a que estamos nos referindo nesse texto. Vigotski utiliza os termos “habilidades mentais” ou, mais comumente, “funções mentais superiores”, por isso os estamos adotando sem maiores restrições.

social, interagindo com outros indivíduos.

E quais são as conseqüências dessas novas concepções para a escola?

Para responder a essa pergunta, vamos tomar o exemplo da montagem de um quebra-cabeça.

No primeiro extremo, temos uma criança com, digamos, um ano de idade, para a qual uma tarefa como essa esteja além das suas habilidades, mesmo com a assistência de um adulto, ou seja, esteja além da sua Zona de Desenvolvimento Proximal. Portanto, de nada lhe adiantará assistir ou ser assistida por um adulto durante essa tarefa.

No meio temos uma criança com, digamos, cinco anos de idade e que ainda não saiba montar um quebra-cabeça sozinha, mas que seja capaz de montá-lo com a assistência de um adulto. Nesse caso, essa habilidade pertence a sua Zona de Desenvolvimento Proximal e a intervenção do adulto é fundamental para que a habilidade se desenvolva primeiro no plano interpessoal, interagindo, para ser gradativamente incorporada ao seu nível de desenvolvimento real, individual.

No outro extremo, está uma criança de, digamos, dez anos de idade e que já saiba montar quebra-cabeças. Para ela, assistir ou ser assistida por um adulto durante a montagem não lhe servirá de nada, pois essa habilidade está aquém de sua Zona de Desenvolvimento Proximal, já tendo sido incorporada ao seu arsenal de habilidades independentes.

Analisando esses três casos, fica claro que a situação educacionalmente interessante é a segunda, pois é a única em que a intervenção resulta em desenvolvimento. Seguindo esse raciocínio, a aprendizagem é eficaz quando atua exatamente nas habilidades presentes na Zona de Desenvolvimento Proximal do aprendiz, nem além e nem aquém desta.

Portanto, se estamos assumindo que a aprendizagem está à frente do desenvolvimento e que a relação entre eles é essa proposta por Vigotski, a escola, como espaço privilegiado no qual o desenvolvimento do indivíduo é o objetivo maior, tem como função principal oferecer oportunidades para que a interação, tanto entre aluno e professor como entre os próprios alunos, se eleve a um grau que transcenda a imitação mecânica, permitindo, assim, que o aluno caminhe dentro de sua Zona de Desenvolvimento Proximal e incorpore, gradativamente, ao seu aparato cognitivo independente, a habilidade para realizar aquelas coisas que só consegue fazer em colaboração com outras pessoas.

Nas palavras de Oliveira (1997), “o professor tem o papel explícito de interferir na

zona de desenvolvimento proximal dos alunos, provocando avanços que não ocorreriam espontaneamente” (p. 62). Assumir essa postura implica fazer da interação, seja entre professor e aluno, seja entre alunos, a pedra fundamental do processo de ensino e aprendizagem. Essa é uma das premissas desta pesquisa.

### 1.1.2. A Interação entre Professor e Estudante

Goos (2004) propõe uma distinção entre três aspectos diferentes do conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal, cada um deles relacionado a um tipo diferente de interação presente no processo educacional.

O primeiro deles refere-se à **interação entre professor e estudante**, e a autora utiliza o termo “Suporte”<sup>6</sup> para caracterizá-lo. Segundo ela, “o termo Suporte está associado a interações nas quais o professor estrutura questões que permitam ao estudante participar de atividades conjuntas que, caso contrário, estariam além do seu alcance” (GOOS, 2004, p. 262 – tradução nossa).

O segundo aspecto apontado por Goos (2004) se refere à **interação entre estudantes** e o terceiro refere-se à **interação entre conceito cotidiano e conhecimento científico**. Apesar de ambos estarem presentes nas formulações de Vigotski sobre a Zona de Desenvolvimento Proximal e o desenvolvimento de funções mentais superiores, focaremos nossa atenção ao primeiro deles - a interação entre aluno e professor – e, mais especificamente, à metáfora utilizada pela referida autora para caracterizar esse aspecto específico: o Suporte.

Essa metáfora surgiu em 1976 no artigo intitulado “*The role of tutoring in problem solving*”, de autoria de Wood, Bruner e Ross, como um recurso analítico para compreensão da interação entre pais e filhos em atividades conjuntas de resolução de problemas. Os autores usaram o termo “Suporte” para designar a assistência do adulto que “possibilita à criança ou novato resolver um problema, desempenhar uma tarefa ou atingir um objetivo que estaria além dos seus esforços sem assistência” (p. 90 – tradução nossa).

Outro ponto salientado pelos autores é que, ao contrário do que se possa imaginar

---

6 *Scaffolding*, no original em inglês. Usaremos a palavra “Suporte” com a primeira letra maiúscula quando estivermos nos referindo a esse termo. Uma outra possível tradução o termo seria “Andaime”, porém, abrimos mão deste uma vez que a conotação que queremos utilizar neste trabalho é melhor representada por Suporte.

quando se pensa em um suporte para construções civis, por exemplo, no qual a estrutura recebe cada vez mais acréscimos para que se possa alcançar cada vez mais alto, no caso da metáfora proposta, o processo é inverso, isto é, o Suporte oferecido pelo adulto deve gradativamente ser retirado à medida que a criança se mostrar capaz de realizar a tarefa independentemente (STONE, 1998).

É interessante notar que, apesar da semelhança entre a formulação dessa metáfora e a relação entre desenvolvimento e aprendizagem estabelecida por Vigotski, não há nenhuma referência explícita no artigo de Wood et al. (1976) aos trabalhos desse autor. Porém, Bruner foi o responsável pela introdução da edição em inglês do livro “Pensamento e Linguagem”, de 1962, e, com certeza, carregou influências desse trabalho para as idéias presentes no artigo citado.

Stone (1998) reforçou que a proposta de Wood et al. (1976) para a metáfora do Suporte era pragmática e atórica, preocupada muito mais em caracterizar aspectos práticos da interação entre adultos e crianças do que em elucidar processos mais gerais de ensino, aprendizagem e desenvolvimento.

A ligação da metáfora com a teoria vigotskiana surgiu alguns anos depois e se consolidou a partir do início da década de 80, principalmente como reflexo da aceitação da teoria vigotskiana por psicólogos e educadores desse período. E a metáfora do Suporte surgiu como um recurso para operacionalizar o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal, oferecendo uma ferramenta metodológica para os estudos fundamentados nessa teoria. Um bom exemplo de uso da metáfora como um recurso analítico pode ser encontrado no trabalho de Bliss et al. (1996).

Como salientou Stone (1998), a partir das colocações iniciais de Wood et al. (1976) e do desenvolvimento da metáfora ao longo da década de 80, quatro características principais se destacam na caracterização da relação de Suporte, tanto entre pais e filhos como entre estudantes e professor. São elas:

- a) Envolvimento Mútuo: uma interação de Suporte deve se basear em um envolvimento mútuo em torno de uma tarefa significativa que esteja além do alcance independente da criança;
- b) Ajuste Contínuo: o Suporte deve ser constantemente ajustado<sup>7</sup> através de um processo

---

7 No original em inglês a palavra usada é *titration*, cuja tradução mais comum se refere ao processo químico de Titulação, e carrega uma conotação quantitativa.

contínuo de diagnóstico pelo adulto ou professor do nível de compreensão que a criança ou estudante tem da atividade em questão;

- c) Ampla Variedade: o adulto ou professor deve ser capaz de oferecer uma gama variada de Suportes à criança ou aluno;
- d) Retirada Gradativa: o oferecimento de Suporte por parte do adulto ou professor deve diminuir à medida que a criança ou estudante se mostrar capaz de desempenhar a atividade em questão de modo independente;

É importante notar que todas essas características já estavam presentes, talvez de maneira não tão explícita e detalhada, nas formulações originais da metáfora por Wood et al. (1976), e que a maior contribuição que as pesquisas desse período trouxeram para a metáfora foi a conexão com a teoria vigotskiana, resultando em um enriquecimento teórico para a metáfora e metodológico para a teoria. Com isso, segundo Stone (1998), “a metáfora do Suporte passou a ser vista como uma metáfora para a aprendizagem tanto em sentido estrito quanto mais amplo” (página única<sup>8</sup> – tradução nossa).

À medida que a metáfora ganhou corpo e expandiu suas fronteiras, surgiram também as primeiras críticas a ela, principalmente no que diz respeito a sua utilização como uma metáfora geral para a aprendizagem e o desenvolvimento. Goos (2004) tocou nesse ponto ao salientar que algumas pesquisas inspiradas pela metáfora do Suporte “apresentam uma tendência transmissiva que implica em um ensino e aprendizagem como um simples processo de transferência de informações e habilidades do professor para o estudante em algum tipo de seqüência pré-determinada” (p. 262 – tradução nossa).

Em uma vasta revisão sobre esse tema, Stone (1998) e Verenikina (2003) apontaram autores que criticam algumas características específicas da metáfora do Suporte. A partir da análise dessas críticas, nota-se que o foco delas se concentra essencialmente em dois pontos: 1) a metáfora valoriza demasiadamente o adulto como agente da aprendizagem, e 2) a metáfora encoraja uma concepção quantitativa de Suporte.

Em função dessas críticas, alguns teóricos chegaram a apontar alternativas à metáfora do Suporte, como a “Performance Assistida<sup>9</sup>”, de Tharp e Gallimore (1988, apud Stone, 1998), e a “Relação de Aprendiziz<sup>10</sup>”, de Rogoff (1990, apud Stone, 1998). Porém, do nosso

8 Esse artigo foi obtido a partir de uma base de artigos científicos on-line e em um formato isento de paginação. Por isso, decidimos apontar as referências dessa forma.

9 *assisted performance*, no original em inglês

10 *Apprenticeship*, no original em inglês

ponto de vista, essas críticas não se referem à metáfora em si, mas sim aos usos equivocados que podem derivar dela.

Em relação à primeira crítica, Stone (1998) respondeu confirmando que diversos estudos realmente superestimam a função do adulto, e apontou como solução para essa concepção limitada a noção de que uma relação de Suporte será sempre desigual entre as partes, mas deve ser conjunta e significativa para ambas. Nas palavras do autor: “um engajamento inicial conjunto é essencial, mesmo quando a atividade tem significados diferentes para os participantes” (página única – tradução nossa).

Em relação à segunda crítica, a resposta pode ser encontrada no próprio artigo de Wood et al. (1976), quando os autores apontaram os diferentes tipos de Suporte encontrados na análise das interações entre as crianças e os adultos, que são: a) recrutamento, b) redução dos graus de liberdade, c) manutenção da direção, d) apontamento de características críticas, e) controle de frustração, e f) demonstração.

Deve-se notar que esses tipos de Suporte identificados pelos autores são qualitativamente diferentes: redução dos graus de liberdade e apontamento de características críticas, se referem a aspectos mais cognitivos; demonstração, se refere a aspectos mais processuais; recrutamento e manutenção de direção, se referem a aspectos meta-cognitivos; e controle de frustração, se refere a aspectos emocionais. Com isso, fica claro que os autores não tinham uma concepção meramente quantitativa de Suporte.

Concluindo, entendemos que as críticas feitas à metáfora do Suporte não se direcionavam exatamente a ela, mas sim a eventuais más interpretações ou usos inadequados que podem decorrer dela.

Finalizando, reforçamos a nossa posição de utilizar a metáfora do Suporte como uma ferramenta analítica para as interações que iremos analisar entre o pesquisador e os sujeitos dessa pesquisa. Por isso, em concordância com autores como Bliss et al. (1996), Stone (1998), Verenikina (2003) e Goos (2004), optamos por manter a metáfora do Suporte como nossa ferramenta analítica básica para as interações entre pesquisador e sujeitos coletadas durante a pesquisa.

Citando Stone (1998) ao justificar a manutenção dessa metáfora, fechamos este capítulo com a seguinte citação:

Nós certamente fomos além de qualquer interpretação literal de um Suporte de construção civil, com suas conotações (para alguns) de um ajuntamento passivo e incremental de camadas e subcomponentes. Nós abandonamos a



visão simplista de adultos oferecendo os passos lógicos seguintes em um acréscimo seqüencial de habilidades. Nós também abandonamos a visão do adulto como um modelador de crianças passivas. Ao invés disso, nós temos uma imagem de Suporte como um processo social complexo de comunicação e reorganização conceitual através do qual indivíduos inteligentes adquirem novos conhecimentos e habilidades. (página única – tradução nossa)

Na presente pesquisa, através da metodologia que explicitaremos nos capítulos adiante, utilizaremos o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal e a metáfora do Suporte para compreendermos a relação aluno-professor (sujeito-pesquisador) no contexto de Resolução de Problemas em Cálculo Diferencial.

## 1.2. Análise de Erros

O objetivo deste capítulo é discorrer um pouco sobre a Análise de Erros dentro da Educação Matemática, suas correntes e influências, principalmente para podermos situar esta pesquisa dentro desse universo.

Autores como Radatz (1980), Borasi (1994), Cury (2007) e Rico (1995) fazem uma análise retrospectiva de pesquisas em Educação Matemática envolvendo a Análise de Erros. Esses levantamentos datam as primeiras pesquisas sobre essa temática no início do século XX, praticamente ao mesmo tempo em que a Educação Matemática começava a surgir como área de Investigação Científica. Alguns exemplos de trabalhos desse período e que utilizam essa abordagem são: o livro “Psicologia da Aritmética” de 1917, de autoria de Thorndike (PINTO, 2000), e o artigo intitulado “A Study of Errors in Tests of Adding Ability”, de 1913, de autoria de Phelps (LANNIN et al., 2007).

Cury (2007) nos oferece o seguinte quadro de classificação de pesquisas internacionais envolvendo Análise de Erros:

<b>Autor(es)</b>	<b>País de Origem</b>	<b>Ano de Divulgação</b>	<b>Ano de Escolaridade ou Faixa Etária dos Participantes</b>	<b>Conteúdo Abordado</b>
Smith	Estados Unidos	1940	10° ano	Demonstrações de Geometria
Hutcherson	Estados Unidos	1975	6° ano	Problemas de Aritmética
Kent	Inglaterra	1978	11 a 19 anos	Variado
Radatz	Alemanha	1979	-	Classificações de Erros
Clements	Austrália	1980	6° ano	Problemas de Aritmética
Bessot	França	1980	6 a 7 anos	Noção de Número Natural
Movshovitz-Hadar; Inbar e Zaslavsky	Israel	1986	11° ano	Demonstrações de Geometria

Galletti	Itália	1989	11 a 14 anos	Geometria Plana e e Propriedade Distributiva
Borasi	Estados Unidos	1989	Curso de Formação de Professores	Definição de Circunferência
Sanchez	Espanha	1990	-	Concepções Errôneas
Guillermo	México	1990	14 a 20 anos	Álgebra
Aguilar	México	1992	11 a 13 anos	Razão e Proporção
Gómez	Espanha	1994	Curso de Formação de Professores	Cálculo Mental
Esteley; Villarreal	Argentina	1995	Ensino Universitário	Funções, Limites, Continuidade
Bin Ali e Tall	Malásia	1996	Não específico	Derivadas e Integrais
Mancera	México	1998	Não específico	
Engler <i>et al.</i>	Argentina	2004	Não específico	Classificações de Erros
Pochulu	Argentina	2004	Pré-Universitário	Variado
Del Puerto; Minnard e Seminara	Argentina	2006	Pré-Universitário e início de curso superior	Álgebra e Funções
Schechter	Estados Unidos	2006	Ensino Universitário	Variado

*Tabela 1: Classificação de trabalhos de autores estrangeiros (CURY, 2007, p. 43)*

É de se notar que as pesquisas envolvendo Análise de Erros, até mesmo como um reflexo do que vem acontecendo com a Educação Matemática como um todo, vêm se consolidando ao longo do tempo e, como tentaremos evidenciar mais adiante, sob influência de diferentes enfoques e referenciais teóricos.

Em relação a pesquisas brasileiras, Cury (2007) nos oferece o seguinte quadro.

<b>Autor(es)</b>	<b>Ano de Divulgação</b>	<b>Estado em que realizou a pesquisa</b>	<b>Série e Nível de Ensino</b>	<b>Conteúdo</b>
Lopes	1987	SP	EF	Ambientes de “verdades provisórias”
Crepaldi; Wodewotzki	1988	SP	EM	Variado
Cury	1988	SP	ES	Demonstrações em Geometria

Guimarães Jr.	1989	RJ	Séries iniciais do EF	Programa para diagnóstico automático de Erros em subtração
Moren; David e Machado	1992	RJ e MG	3ª a 6ª séries do EF	Sistema de Numeração e Subtração
Batista	1995	SP	2ª a 4ª séries do EF	Operações Aritméticas
Pinto	1998	SP	4ª série do EF	Problemas de Aritmética
Baldino e Cabral	1999	SP	ES	Técnicas de Integração
Bathelt	1999	RS	5ª série do EF	Idéia de Números e Operações com Frações
Gusmão	2000	BA	ES	Emoções diante do Erro
Utsumi	2000	SP	6ª a 8ª série do EF	Resolução de Problemas Algébricos
Ribeiro	2001	SP	8ª série do EF	Álgebra
Notari	2002	SP	8ª série do EF e 1ª do EM	Frações aritméticas e Algébricas
Freitas	2002	SP	1ª série do EM	Equações do 1º grau
Milani	2002	SP	ES	Conceitos de Cálculo
Souza	2003	PR	6ª série do EF	Variado
Valentino; Grando	2004	SP	ES	Álgebra Elementar
Allevato	2005	SP	ES	Funções
Silva	2005	PR	4ª série do EF	Variado
Perego	2006	PR	8ª série do EF	Variado

*Tabela 2: Classificação de trabalhos de autores brasileiros (CURY, 2007, p. 47)*

No Brasil, pesquisas envolvendo Análise de Erros aparecem apenas no final da década de 80. Pinto (2000) corroborou esse fato a partir de uma análise feita sobre o material levantado por Dario Fiorentini, segundo o qual, apenas nove trabalhos brasileiros anteriores a 1990 “mostraram alguma preocupação relacionada aos erros, problemas e dificuldades presentes no processo ensino-aprendizagem de matemática” (FIORENTINI, 1994, p. 131 *apud* PINTO, 2000, p. 32). Porém, esses trabalhos também têm conquistado espaço no cenário da Educação Matemática brasileira.

Um exemplo disso é o amplo trabalho desenvolvido pela Profa. Dra. Regina L. C. Buriasco na Universidade de Londrina, intitulado “Análise da Produção Escrita de Alunos e

Professores nas Provas de Questões Abertas de Matemática”. O objetivo desse projeto é analisar respostas dadas por alunos de Ensino Fundamental a questões abertas que compõem a Prova de Questões Abertas de Matemática da Avaliação Estadual do Rendimento Escolar do Paraná.

Nesse âmbito, tem se desenvolvido uma série de trabalhos de Mestrado, Doutorado e Iniciação Científica, cada qual com um foco específico, mas diversos tocando na questão da Análise de Erros, um dos quais, desenvolvido por João Viola dos Santos (VIOLA DOS SANTOS, 2007), é referência fundamental para este trabalho, e será abordado com mais cuidado mais adiante.

Olhando novamente para os quadros acima, notamos que, além da distribuição temporal, a autora enfatizou o conteúdo específico que fora abordado na pesquisa. Porém, essa é apenas uma maneira de classificarmos as pesquisas envolvendo Análise de Erros.

Borasi (1994) esboçou outra classificação para pesquisas dentro dessa tendência. Essa classificação nos parece extremamente pertinente, tanto para que se compreenda a produção envolvendo a Análise de Erros, como para localizarmos esta pesquisa. A autora apontou a existência de três grandes correntes dentro das pesquisas sobre Análise de Erros, as quais podem ser ilustradas por três palavras que, segundo acreditamos, sintetizam bem a ênfase dada por cada uma delas: **ensino, aprendizagem e atividade**.

A primeira delas (**ensino**) engloba os primeiros trabalhos nessa área e alguns poucos remanescentes, e tem influência das escolas Behavioristas e de Processamento de Informações. As pesquisas nessa área buscavam essencialmente identificar, catalogar e classificar erros, com o intuito de determinar estratégias de ensino que permitissem remediá-los. Brueckner (1935, *apud* RICO, 1995, p. 30) apontou como objetivos para trabalhos envolvendo a Análise de Erros os seguintes itens: a) listar as técnicas errôneas, b) determinar a distribuição de frequências dessas técnicas, c) analisar dificuldades específicas, e d) classificar e agrupar erros.

Essa descrição evidencia bem a ênfase dada por trabalhos dentro dessa corrente em Análise de Erros. Além dos trabalhos de Brueckner, outros exemplos clássicos dentro dessa linha são os trabalhos de Thorndike nas décadas de 1910 e 1920, os quais, normalmente ligados à aprendizagem de aritmética elementar, buscavam identificar e classificar os erros mais comuns para propor seqüências pedagógicas que levassem a remediá-los.

Dentro dessa corrente, os erros eram vistos de maneira unicamente negativa, como

defeitos do processo educativo que deveriam ser eliminados através de estratégias de ensino mais eficientes.

Apesar de soarem simplistas, essas correntes de pensamento foram as responsáveis pelos primeiros estreitamentos entre Psicologia e Educação, e serviram como base para elaborações teóricas fundamentais como, por exemplo, os trabalhos de Vigotski.

A segunda corrente (**aprendizagem**), temporalmente posterior à anterior e muito presente a partir da década de 80, é a que utiliza a Análise dos Erros para compreender o pensamento matemático do aluno e, conseqüentemente, a maneira como este aprende. Segundo Borasi (1994), nessas pesquisas

os erros são vistos não somente como parte inevitável e integral da aprendizagem mas também como fonte valiosa de informação sobre esse processo, uma dica que professores e pesquisadores devem considerar para compreender o que os estudantes realmente sabem e como eles constroem seu conhecimento (p. 170)

Dentro dessa corrente é possível identificar várias influências teóricas, que vão desde Hadamard e os processos de invenção em Matemática até Brousseau e os obstáculos epistemológicos, passando por Krutetskii e a teoria das habilidades matemáticas (CURY, 2007).

Apesar de cada uma dessas influências ter características muito particulares, o ponto comum entre elas está no fato de focarem a análise e compreensão do erro como meio para se compreender a atividade matemática do aluno, ou algum aspecto específico dela. Pesquisas nessa área costumam possuir objetivos de caráter cognitivo e se aproximam mais de áreas como Psicologia e Epistemologia.

A ênfase das pesquisas dessa corrente é dada à aprendizagem ao invés de ao ensino. O foco normalmente recai sobre o pensamento matemático do aluno, e a análise passa progressivamente do produto desse pensamento para o processo como um todo.

Trabalhos cognitivistas clássicos, como o desenvolvido por Schoenfeld (1985), mesmo que não assumam a Análise de Erros como estratégia de investigação, costumam focar suas análises em casos que desviam da solução esperada de um problema. Vide, por exemplo, a análise que fundamenta a elaboração do quarto aspecto apontado por Schoenfeld (1985, p. 34-44) como componente do pensamento matemático durante a resolução de um problema: Sistemas de Crença<sup>11</sup>. O autor definiu esse aspecto a partir da análise do comportamento de

---

11 *Belief Systems*, no original em inglês

dois alunos ao resolverem um problema de construção geométrica.

Durante a resolução do problema, os alunos demonstram possuir o conhecimento necessário, dominar as estratégias relevantes e serem capazes de decidir quais e até que ponto utilizá-las. Porém, os estudantes adotaram uma postura empírica na busca por uma solução, ou seja, ao invés de analisar as propriedades dos objetos envolvidos no problema, realizam construções que parecem (visualmente, inclusive) resolver a questão, e depois avaliam se o resultado obtido se encaixa no que foi solicitado no problema. O autor conclui, a partir da análise de todo o processo de resolução desse problema, que “os estudantes parecem não compreender a natureza geral da argumentação matemática” (SCHOENFELD, 1985, p. 42), e atribui isso a uma concepção “empirista ingênua” (p. 43) de Matemática por parte desses estudantes.

Apesar de não ser possível apontar erros pontuais, o caso analisado é claramente desviante, à medida que difere daquela estratégia de resolução esperada para a questão. Esse tipo de análise é comum em Ciência de maneira geral: parte-se dos casos desviantes para se compreender o todo.

A terceira corrente (**atividade**) pode ser ilustrada pelos trabalhos de Raffaella Borasi. Essa corrente surge a partir da constatação de que, “embora professores e pesquisadores já tenham reconhecido a importância de análise de erros para diagnose e remediação, os estudantes nunca foram encorajados a tirar vantagens desses erros como oportunidades de aprendizagem de matemática” (BORASI, 1994, p. 166 – tradução nossa).

Nessa corrente, os erros são utilizados como disparadores de atividades investigativas, de maneira muito similar à ilustrada por Imre Lakatos em seu célebre livro “Provas e Refutações”, de 1976. Os alunos são convidados a tirar proveito de seus erros e, a partir deles, questionar e construir seu conhecimento matemático.

A ruptura representada por essa corrente ocorre no sentido de que a Análise de Erros passa a ser vista muito menos como uma metodologia de pesquisa do que como uma estratégia didática para o professor de Matemática. Cury (2007), apesar de desenvolver trabalhos que se encaixam muito mais na segunda corrente, ressalta que:

a análise de erros é uma abordagem de pesquisa – com fundamentações teóricas variadas, objetivos distintos e participação de todos os níveis de ensino nas amostras -, mas também é uma metodologia de ensino, podendo ser empregada quando se detecta dificuldades na aprendizagem dos alunos e se quer explorá-las em sala de aula. (CURY, 2007, p. 91)

O ponto alto dessa terceira corrente é que o foco não está mais na compreensão do processo de aprendizagem do aluno, mas sim na proposição de atividades que transformem os erros em oportunidades de aprendizagem, ao invés de simplesmente eliminá-los.

Essa corrente teve tamanha repercussão dentro da Educação Matemática que o periódico *Focus on Learning Problems in Mathematics* dedicou uma de suas edições (vol. 7 números 3 e 4) exclusivamente a trabalhos dessa natureza, encabeçados pela Raffaella Borasi. Nessa edição, os autores mostram uma série de situações nas quais os erros cometidos por alunos (como  $\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$ , pois basta simplificar o "6" do numerador com o "6" do denominador) podem ser utilizados no desenvolvimento de atividades através de questões simples, apesar de não usuais, como: o que faz um procedimento incorreto resultar em algo correto? Para quais outros casos isso vale? Existe algum padrão para esses casos?

Outros trabalhos, como o de Pinto (2000), buscam exatamente reforçar essa corrente e trazer a Análise de Erros do contexto das pesquisas acadêmicas para o contexto da sala de aula como um recurso pedagógico para o professor de Matemática.

Apesar de haver uma seqüência temporal no surgimento dessas três correntes delineadas acima, entendemos que elas não aparecem uma em substituição da outra, como sugerido por Cury (2004), mas sim como fruto de influências pelas quais a Educação Matemática como um todo passou durante o século XX e nos últimos anos.

O objetivo da Seção seguinte, longe de ser o de um levantamento retrospectivo e abrangente sobre pesquisas envolvendo Análise de Erros<sup>12</sup>, é evidenciar, com maior detalhamento, de que forma essa abordagem vem sendo empregada dentro da Educação Matemática e salientar a diversidade de abordagens e referenciais teóricos, de forma que nos seja possível posicionar esta pesquisa, bem como suas especificidades teóricas e metodológicas, dentro desse movimento.

### **1.2.1. Algumas Pesquisas envolvendo Análise de Erros**

Uma ênfase muito comum em pesquisas envolvendo Análise de Erros é a proposição de sistemas de classificação para os erros cometidos por estudantes, em diversos níveis, de

---

<sup>12</sup> Para levantamentos desse tipo, vide Radatz (1980), Rico (1995) e Cury (2007).



Matemática. Pesquisas dessa natureza existem desde o início do século XX e persistem até hoje, mas sob diferentes influências e enfoques.

O ponto forte dessas pesquisas é que, além de proporem maneiras de se classificar erros cometidos por alunos, elas acabam suscitando discussões interessantes sobre a natureza desses erros, de acordo com o foco que utilizam para classificá-los.

São os casos, por exemplo, de pesquisas que enfatizam o conteúdo no qual o erro emerge, como as relatadas por Helena N. Cury (Cury, 2007). Embora essas pesquisas tenham seus resultados normalmente restritos ao contexto da pesquisa, elas sempre lançam luzes para aspectos mais gerais, tanto dos erros documentados como do pensamento matemático do aluno como um todo.

Graeber e Johnson (1990) nos deram um bom exemplo desse tipo de análise, ao traçarem um diálogo entre um sistema de classificação pautado pela causa do erro e classificações mais específicas de conteúdo. Esses autores partiram de uma classificação em quatro categorias: “generalização indevida”, “particularização indevida”, “dificuldade de linguagem”<sup>13</sup> e “concepções limitadas” e, a partir disso, analisaram erros específicos de conteúdo, buscando traçar paralelos entre a análise mais focada no conteúdo e uma análise focada nas causas.

Radatz (1979; 1980), com base em uma vasta revisão bibliográfica em pesquisas sobre Análise de Erros, propôs um sistema de classificação baseado nas possíveis causas do erro, composto por cinco categorias: a) dificuldades de linguagem; b) deficiência de pré-requisitos; c) associações incorretas e rigidez de raciocínio; d) aplicação de estratégias irrelevantes; e e) dificuldades em obter informação a partir de representações gráficas.

O levantamento dessas categorias não se baseia em nenhuma análise empírica, mas apenas na revisão bibliográfica realizada. Além disso, o autor reconhece que

é muito difícil fazer uma separação definitiva entre as possíveis causas de um mesmo erro, o mesmo problema pode suscitar erros de diferentes fontes e o mesmo erro pode surgir de diferentes processos de resolução de problemas (RADATZ, 1979, p. 170-171 – tradução nossa).

Essa consideração é muito importante para esclarecer que, apesar da sensação determinística deixada por propostas similares a essa, elas não têm, de maneira geral, a intenção de apenas reduzir o erro a um rótulo, mas sim a de buscar possíveis compreensões

---

13 *Mistranslation*, no original

que possam contribuir para o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Outro trabalho de natureza semelhante, mas que lança mão de um critério distinto, foi desenvolvido por Movshovitz-Hadar et al. (1987). Nesse trabalho, os autores propuseram uma classificação dos erros em termos de sua manifestação operacional, ou seja, pela maneira através da qual o erro se manifesta objetivamente na resolução apresentada do aluno.

Para tanto, os autores analisaram questões dissertativas resolvidas por alunos em uma prova de ingresso no ensino superior em Israel. Essa análise serviu inicialmente para fazer emergir as categorias e, posteriormente, para refiná-las e validá-las. As categorias propostas pelos autores são: a) utilização incorreta dos dados; b) interpretação incorreta da linguagem; c) inferência lógica inválida; d) uso equivocado de teorema ou definição; e) solução que não responde à questão proposta; e f) erros de caráter técnico.

Essas categorias foram validadas pelos pesquisadores, obtendo um altíssimo grau de concordância entre diferentes classificadores para uma mesma questão.

É interessante notar que, apesar da diferença essencial entre as propostas de Radatz (1979) e Movshovitz-Hadar et al. (1987) - no sentido de que a primeira busca uma classificação pautada pela causa em si do erro e a segunda vai em busca de um critério mais objetivo, a manifestação operacional do erro - uma simples leitura do nome das categorias propostas nos permite uma identificação rápida, mesmo que superficial, entre elas e as propostas por Radatz (1979).

Do nosso ponto de vista, essa identificação não é uma coincidência, mas sim um reflexo do fato de que a maneira como o erro se manifesta na resolução apresentada por um aluno é significativa em termos das possíveis causas desse erro.

Steinle e Stacey (2004) também tocaram na questão da classificação de erros, lançando mão, no entanto, de uma análise quantitativa para os dados coletados. Resumidamente, o contexto maior no qual a pesquisa foi desenvolvida coletou respostas de cerca de 3000 alunos, de 9 a 16 anos, os quais responderam a um conjunto padronizado de questões ao longo de 5 anos, de forma que o mesmo aluno tenha respondido a essas questões pelo menos duas vezes em momentos diferentes ao longo desse período. De acordo com os pesquisadores, “esses dados nos permitiram rastrear de que forma o pensamento dos alunos sobre notação decimal evoluiu ao longo do tempo” (STEINLE e STACEY, 2004, p. 225 – tradução nossa).

Em um primeiro momento, os pesquisadores analisaram os padrões de erros cometidos

pelos alunos e desenvolveram um sistema para a classificação desses padrões, com base em referências relacionadas à aprendizagem de números decimais. Nessa etapa a pesquisa teve uma ênfase mais qualitativa, lançando mão, inclusive, de entrevistas com alguns alunos escolhidos.

Em um segundo momento, os pesquisadores passaram a olhar de que forma os alunos se “movimentavam” dentro dessas categorias ao longo do tempo, verificando, por exemplo, se a incidência em certa categoria tendia a diminuir ou a aumentar ao longo do tempo, em relação aos alunos que haviam cometido esse erro inicialmente.

Lannin et al. (2007) também procurou classificar erros cometidos por estudantes de Matemática, porém, sob o ponto de vista dos próprios estudantes: “Como os estudantes vêem a natureza geral de seus erros?” (p. 43). Os pesquisadores, através da metodologia de Experimento de Ensino, analisaram como dois alunos, trabalhando juntos em problemas envolvendo raciocínio proporcional, percebem a generalidade dos erros que cometem.

Os autores entendem “generalidade do erro” como a percepção que o aluno tem do escopo do erro que cometeu, propondo para essa percepção quatro estágios distintos: “not an error”, “instance-level”, “problem-level” e “cross-problem level”<sup>14</sup>.

Após definirem e ilustrarem cada um desses estágios, Lannin et al. (2007) mostraram de que forma os alunos transitam através desses diferentes estágios de compreensão de seus próprios erros à medida que resolvem problemas.

Pinto (2000), em um trabalho de natureza declaradamente piagetiana, chama a atenção para algo similar: a necessidade de fazer do erro um “observável” ao aluno, para que, assim, o aluno não apenas tome consciência dele, mas também seja capaz de repensar seu próprio conhecimento matemático. O que Lannin et al. (2007) nos trouxeram com o seu trabalho é que alunos podem perceber seus erros com diferentes níveis de profundidade e que essa percepção interfere na forma como eles se relacionam com esses erros e resolvem problemas.

É de se notar que, apesar das diferenças, todas as pesquisas apresentadas anteriormente possuíam um posicionamento claramente cognitivista, ou seja, alinhavam-se à segunda tendência, que chamamos de “aprendizagem” na Seção anterior.

O que podemos dizer da presente pesquisa em relação às descritas anteriormente é que não temos como objetivo classificar ou propor critérios para classificação dos erros e

---

<sup>14</sup> Não traduzimos essas expressões por não termos encontrado traduções que expressem de maneira tão sintética o significado destes.

resoluções que analisaremos, mas sim lançar mão de todas essas possibilidades de análise, para proporcionar uma melhor compreensão do pensamento matemático dos sujeitos pesquisados. Nesse sentido, esta pesquisa se alinha à tendência **aprendizagem**.

Por outro lado, se olharmos para o papel que a Análise de Erros desempenha na Metodologia junto aos sujeitos pesquisados, e, além disso, encararmos a atividade de Coleta dos Dados como um ambiente de ensino e aprendizagem entre pesquisador e sujeitos, temos uma abordagem que se alinha muito mais aos trabalhos da tendência que chamamos de **atividade** na Seção anterior. Afinal, foi a partir da análise dos erros cometidos pelos alunos e dos processos de resolução de problemas subjacentes a eles que o pesquisador direcionou as suas ações e definiu o rumo das atividades realizadas pelos sujeitos.

Além dessa dupla função que a Análise de Erros assume dentro desta pesquisa, entendemos que a nossa proposta acrescenta um elemento inédito dentro desse quadro de pesquisas envolvendo Análise de Erros: a possibilidade de interação entre aluno e professor (sujeito e professor) ao longo do processo de resolução dos problemas, através da Dinâmica RCR.

Nota-se que, em todas as pesquisas relatadas anteriormente, a análise e classificação dos erros, seja através de métodos qualitativos ou quantitativos, ou focados na percepção do professor ou do próprio estudante, sempre é feita *a posteriori*, ou seja, após a ocorrência dos erros analisados com base nos registros deixados. Ao pesquisador não é permitido atuar ou interferir no contexto em que esses erros emergem.

No entanto, o procedimento metodológico que propusemos para a Coleta dos Dados – a Dinâmica RCR – acrescentou a possibilidade de o pesquisador interagir com os sujeitos ao longo do próprio processo de resolução dos problemas. Esperamos, com isso, não apenas responder ao objetivo desta pesquisa - evidenciar as potencialidades da Dinâmica RCR como um recurso didático-pedagógico para o ensino e aprendizagem de Matemática - mas também oferecer contribuições para a área de Análise de Erros dentro da Educação Matemática.

### **1.2.2. A Nossa Visão sobre o Erro**

Até esse ponto, falamos sobre Análise de Erros sem uma preocupação maior com a definição mais precisa do que entendemos por “**erro**”. Porém, trabalhos recentes, como

alguns desenvolvidos no âmbito do projeto “Análise da Produção Escrita de Alunos e Professores nas Provas de Questões Abertas de Matemática”, da professora Regina Buriasco (UEL<sup>15</sup>), vêm colocando essa questão em destaque, principalmente em função da conotação negativa carregada pela palavra “erro”.

Por exemplo, Viola dos Santos (2007) opta por substituir a expressão “erro” por “**maneiras de lidar**”, e justifica essa mudança dizendo que:

Algumas vezes, quando se fala em 'erro', mesmo tomando-o como constituinte da aprendizagem, resultado das concepções prévias, entre outros fatores positivos, está se referindo ao que não fez em relação ao que ele deveria ter feito. Caracterizam-se os alunos pelo que lhes falta e não pelo que eles já têm. É nesse ponto nossa discordância e, por conta dela, buscamos uma outra maneira de caracterizar o 'erro'. (VIOLA DOS SANTOS, 2007, p. 23)

É importante notar que não se trata apenas de uma simples troca de expressões, pois Viola dos Santos (2007) afirma se tratar de uma mudança também na forma de “caracterizar o erro”. Para explicar esse posicionamento, o autor lança mão de duas noções complementares: leitura pela falta e leitura positiva, desenvolvidas em Lins (1999), dentro do Modelo dos Campos Semânticos<sup>16</sup>, e apropriadas por Garnica (2006) para o campo específico da Análise de Erros.

Lins (1999) chama de “leitura pela falta” aquela que caracteriza o sujeito, ou algo que esse sujeito produz (no caso dessa pesquisa, focaremos nossa atenção na produção escrita), através daquilo que lhe falta em relação a um referencial tomado *a priori*. Nas palavras de Garnica (2006):

A 'leitura pela falta', mais usual nas salas de aula, é aquela feita pelo professor a partir de uma enunciação (escrita ou falada) de seu aluno. A partir dessa enunciação o professor detectará o que falta ao aluno: *falta* aprender conteúdos anteriores, *falta* a ele exercitar-se mais, *faltam* a ele certos conceitos, *falta* aprender a operacionalizar certos conceitos ou encaminhar melhor certas operacionalizações, *falta* a ele ler mais cuidadosamente o problema, *falta* um lar estruturado, etc. (p. 4)

Por outro lado, a leitura positiva é aquela que procura caracterizar o sujeito em termos daquilo que ele de fato produz, aceitando essa produção como legítima e constituinte daquele

15 Universidade Estadual de Londrina

16 Esse Modelo inclui uma série de elaborações teóricas que não tomaremos em detalhe neste trabalho, por entendermos que não sejam fundamentais para a compreensão dos conceitos de que estamos nos apropriando aqui. Uma leitura mais profunda sobre o Modelo dos Campos Semânticos pode ser obtida em Lins (1999).

indivíduo em especial. Nas palavras de Garnica (2006):

A leitura positiva, ao contrário, parte do pressuposto que ao fazer uma certa enunciação (ao falar sobre algo ou ao resolver um problema, por exemplo) o aluno elabora e expressa as compreensões que tem. Quando ele fala ele diz algo, quando ele faz ele faz algo e é desse algo que ele diz ou faz que devemos partir [...]. Trata-se de analisar o que ele falou ou fez, não o que ele deixou de falar ou fazer. (p. 4)

É imbuído por essa busca de uma leitura positiva que Viola dos Santos (2007) adota a expressão “maneiras de lidar” no lugar de “erros”, e, ao definir o que entende por essa nova expressão, o autor diz julgá-la mais adequada para denominar os “processos de resolução de uma questão” e a “maneira pela qual o aluno interpretou o enunciado, elaborou uma estratégia e utilizou um procedimento para resolver uma questão” (p. 23).

A partir dessa descrição dada pelo referido autor, entendemos que ele não está mais se referindo ao que chamaremos nesta pesquisa de “erro”, mas sim ao que chamaremos de “**processo de resolução de um problema**”. Nesse ponto, faz-se necessária uma distinção exata entre esses dois termos.

Entendemos por “erro” uma parte do **produto final** que não esteja de acordo com a Matemática que se espera que o aluno apresente, ou seja, o erro é sim caracterizado pela falta em relação à Matemática que se deseja ensinar.

Para o professor o erro se constitui como a parte observável, disparadora de intervenções, pois, afinal, é ele que pauta a correção de uma prova, de uma lista de exercícios ou mesmo as intervenções que o professor faz ao acompanhar a resolução de questões durante uma aula.

Para o aluno, o erro, em geral, permanece oculto até que alguém, normalmente o professor, aponte-o na resolução. Pinto (2000) reforça essa nossa posição ao destacar a necessidade de tornar o erro um “observável” ao aluno, para que esse possa interagir e, eventualmente, superá-lo.

Por outro lado, chamaremos de “**processo de resolução de um problema**” tudo aquilo que possibilitou e levou o aluno a resolver a questão da maneira que o fez, sem necessariamente estarmos nos limitando a componentes de caráter estritamente cognitivo.

Diferentemente do erro, o processo de resolução de um problema é algo que pertence exclusivamente ao universo do aluno, pois é fruto do seu pensamento matemático e de alguma forma que faz sentido para ele. Ao resolver um problema, mesmo obtendo resposta diferente

daquela esperada, o aluno aplica estratégias que, por algum motivo, lhe parecem relevantes em termos do problema proposto. Ele não age arbitrariamente, mas sim de acordo com um conjunto de conhecimentos estabelecido em seu aparato cognitivo. É esse conjunto de conhecimentos que Steffe e Thompson (2000) chamam de “students' mathematics”, em oposição a “mathematics of the students”, que seria o modelo que nós, pesquisadores ou professores, criamos para compreender o pensamento matemático do aluno.

Reforçando essa distinção: “students' mathematics” é o conjunto de conhecimentos matemáticos estabelecidos no aparato cognitivo de um estudante e é dentro desse conjunto que um determinado processo de resolução do problema adquire sentido, enquanto que “mathematics of the students” é o modelo que nós criamos para compreender os conhecimentos matemáticos de um estudante a partir daquilo que ele tem acesso.

De acordo com esse raciocínio, por ser parte constituinte do pensamento matemático do aluno, não faz sentido pensar em uma caracterização do processo de resolução de um problema que não seja através de uma leitura positiva, ou seja, a leitura pela falta perde seu sentido por estarmos nos referindo a um processo e não a um produto, processo esse que é resultante de componentes que fogem ao nosso conhecimento e só fazem sentido dentro do pensamento matemático daquele aluno especificamente.

Para finalizar essa discussão e esclarecer a nossa concepção sobre erros e processos de resolução de problemas, lançaremos mão da metáfora do iceberg como ilustração da relação entre erro e processos de resolução de problemas que assumimos nesta pesquisa.

Como sabemos, a ponta do iceberg representa uma pequena fração do todo, mas é ela que é avistada pela tripulação, ou seja, ela é a parte observável. Por outro lado, é a parte submersa que preocupa o capitão, pois é ela que pode causar algum dano à embarcação.

Nesta pesquisa, o erro exerce exatamente o papel da ponta do iceberg, servindo como disparador ou atrator da nossa atenção para algum aspecto específico do todo. Mas são os processos de resolução do problema, que estão por trás e dão sentido ao erro, da mesma forma que a parte submersa sustenta a ponta do iceberg, o que realmente interessa. E, mais ainda, como salientamos ao evidenciar as semelhanças entre classificação pautadas pela causa e pela manifestação operacional do erro, acreditamos que o erro por si só também seja uma fonte de informações importante para a compreensão do processo de resolução de um problema.

### 1.3. A Escrita e o Ensino e Aprendizagem de Matemática

O objetivo deste capítulo é explorar a questão da incorporação da Escrita ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática, enfocando os benefícios que ela pode trazer para: a) os alunos ao escreverem, b) para o professor ao ler, e c) para a interação entre alunos e professor.

Machado (2003) faz uma análise fenomenológica de depoimentos feitos por sete professores acerca da pergunta: “O que é isto, a escrita da Matemática?”. Da análise dos depoimentos emergiram três grandes categorias acerca do papel da escrita na Matemática.

A primeira delas, “Realização da Linguagem Matemática”, compreende as falas que se referem à escrita como a realizadora da linguagem matemática, ou seja, como meio através do qual a linguagem Matemática se consagra, manifesta. Segundo o autor, nessas falas a escrita atua “revelando a própria entidade Matemática, por meio de abordagens, operações, exposição do abstrato, sedimentação dos conceitos, e dando suporte gráfico aos significados” (MACHADO, 2003, p. 191). Nessa categoria, as falas sugerem uma ligação intrínseca entre a Matemática e a Escrita, uma vez que a primeira depende da segunda para se manifestar.

A segunda categoria, “Letramento Matemático”, compreende as falas nas quais os depoentes se referem ao domínio da escrita matemática “compreendido como o desenvolvimento de um conjunto multidimensional de condições, indo das primeiras manifestações gráficas a quaisquer aspectos ligados a manifestações gráficas em matemática” (MACHADO, 2003, p. 197), como uma parte integrante da aprendizagem em Matemática. Nessa categoria a questão do ensino e aprendizagem já aparece na própria formulação, e os depoentes sugerem a escrita matemática como uma habilidade a ser desenvolvida pelos estudantes dessa disciplina.

A respeito da terceira categoria, “O Aparecimento da Matemática ao Aluno”, Machado (2003) diz que as falas agrupadas nela “apontam para um efeito prático da escrita, que é o de fazer aparecer em si o que seria reservado apenas à intuição do sujeito” (MACHADO, 2003, p. 195). Os depoimentos dessa categoria já apontam para um dos benefícios, que serão explorados mais adiante, advindos da incorporação da escrita às práticas educacionais em Matemática: o potencial que esse instrumento tem de trazer à tona aspectos cognitivos que, caso contrário, seriam inacessíveis ao professor.



Essa análise feita por Machado (2003) já aponta alguns dos tópicos que serão discutidos adiante, porém, o autor estava interessado em aspectos de caráter mais epistemológicos e lingüísticos da relação entre escrita e Matemática, ao passo que nós pretendemos abordar essa questão a partir de um ponto de vista mais pragmático, relacionado com a prática docente e entendendo a escrita como um recurso em potencial para o professor. Foi a partir do final da década de 80 que esse interesse surgiu no cenário da Educação Matemática.

No final da década de 80, nos Estados Unidos, iniciou-se um movimento de estímulo à incorporação da escrita nas práticas educacionais dentro de todas as áreas do currículo chamado *Writing Across the Curriculum* (OLIMPIO JUNIOR, 2006), que atinge também a Matemática. Drake e Amspaugh (1994) apontaram que um dos grandes responsáveis por esse movimento dentro da Matemática foi a publicação, por parte do *Nacional Council of Teachers of Mathematics*, do *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, em 1989, no qual consta a recomendação de que “o estudo da matemática deverá incluir oportunidades para comunicação de forma que os estudantes possam perceber que representar, discutir, ler, escrever e ouvir matemática são partes vitais da aprendizagem e uso da matemática” (NCTM, 1989 *apud* DRAKE e AMSPAUGH, 1994, p. 43).

A partir de então ocorre um aumento significativo pelo interesse no tema “Escrita e Ensino e Aprendizagem de Matemática”, especialmente nos Estados Unidos, mas com reflexos em toda a comunidade envolvida com a Educação Matemática. Um sinal desse movimento é a dedicação de um volume do periódico MAA Notes (nº 16), de grande circulação e impacto entre os professores de Matemática nos Estados Unidos, ao tema “*Using Writing To Teach Mathematics*”, em 1990.

Nos anos posteriores, em publicações subseqüentes do NCTM, o tema “escrita” é incorporado definitivamente sob o foco maior para o ensino de Matemática intitulado “Comunicação”. É sob esse mesmo foco que o tema “escrita” aparece nos PCNs brasileiros como um objetivo geral para o Ensino Fundamental (FREITAS, 2006).

Retomando o periódico citado anteriormente, dedicado exclusivamente à temática da Escrita na Aula de Matemática, encontramos um grande número de artigos tanto de caráter teórico como metodológico. Um exemplo de artigo que utilizaremos nesta pesquisa para fundamentar a nossa prática na Coleta dos Dados é o proposto por Sipka (1990).

Nesse artigo, o autor propõe uma distinção entre uma série de possíveis instrumentos a

serem utilizados para explorar a escrita dentro do ensino e aprendizagem de Matemática e suas diferentes potencialidades. Porém, nosso interesse não está nos instrumentos em si, mas em uma diferenciação proposta pelo autor entre **escrita informal** e **escrita formal**.

De acordo com o autor, a escrita informal é aquela em que o importante é o conteúdo e não a forma. Nesta modalidade são admitidos erros de grafia ou expressões de linguagem informais, contanto, por exemplo, que o escritor transmita aquilo que deseja. Exemplos de instrumentos que ilustram essa modalidade de escrita, de acordo com Sipka (1990), são: escrita em sala de aula, seja ela focada em conteúdos ou livre; diários, normalmente com conteúdo de caráter pessoal e que abordam desde aspectos cognitivos a aspectos afetivos; e cartas, que podem ser dirigidas a outros colegas, ao professor ou a indivíduos externos ao ambiente escolar.

Por outro lado, a escrita formal é aquela que também se preocupa com a forma com que um conteúdo é transmitido por quem escreve. Os exemplos que melhor ilustram essa modalidade de escrita, de acordo com Sipka (1990), são: demonstrações e artigos de pesquisa, ambos muito próximos da realidade de profissionais da área de Matemática; e os resumos de artigos publicados, apontados como uma alternativa mais acessível a estudantes de Matemática. Apesar da aparente rigidez dessas possibilidades, o autor salienta que a escrita formal tem suas vantagens, pois facilita a avaliação e pode reforçar características pedagogicamente interessantes da escrita na Matemática.

A segunda distinção que faremos não é proposta explicitamente por Sipka (1990), mas é fruto de nossas reflexões sobre esse trabalho e de outros de natureza semelhante. Ela diz respeito ao conteúdo daquilo que se escreve. Para ela, apontamos duas modalidades: a **escrita livre** e a **escrita direcionada**.

Na primeira, escrita livre, como reforçado por Powell e Bairral (2006), o foco está no processo e não no produto, e, além disso, nessa modalidade “nunca se pára para olhar para trás, para riscar alguma coisa, para querer saber como se soletra uma palavra, para querer saber que palavra ou pensamento se deve usar, ou para pensar sobre o que se está fazendo” (p. 70).

Na segunda, escrita direcionada, compreendem-se todas as atividades de escrita em que, ao contrário da anterior, onde o que vale é o fluxo contínuo de pensamento, o conteúdo está direcionado para algum objetivo ou diretriz. Esse objetivo ou diretriz pode ser um problema a ser resolvido, um tópico sobre o qual o aluno deve dissertar ou mesmo uma

recomendação, como, por exemplo, “escreva sobre a maneira que você estuda Matemática”. Outro exemplo de escrita direcionada, pouco convencional e explorada por alguns pesquisadores brasileiros, como Urel (2007) e Freitas (2006), é a narrativa.

Nessa modalidade de escrita, o aluno é convidado a produzir uma narrativa em torno de um determinado enredo e envolvendo elementos matemáticos. É o caso de notar que, apesar de o produto desta modalidade de escrita ser muito diferente, por exemplo, do de uma proposta envolvendo a resolução de um problema indicado pelo professor, ambas se encaixam na modalidade de escrita direcionada e podem variar de formal a informal de acordo com as exigências que o professor fizer em relação à forma dessa produção escrita. Desse modo, o primeiro caso tende a uma formalidade maior, por se tratar de uma narração, e, o segundo, à informalidade, por seu foco recair mais no conteúdo matemático e não na escrita discursiva.

Também reforçamos que esse direcionamento presente na modalidade de escrita direcionada pode partir tanto do próprio estudante como do professor. Powell e Ramnauth (1994) exploraram a primeira possibilidade ao investigarem a produção escrita de um estudante a partir de tópicos propostos inicialmente por ele mesmo, ao passo que, Olimpio Junior (2006), por sua vez, explorou as respostas dadas por estudantes a questões propostas pelo pesquisador.

Relacionando as duas distinções que apresentamos entre escrita **formal e informal** e entre escrita **livre e direcionada**, podemos traçar um quadro de possibilidades para instrumentos que visem empregar a escrita ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Obviamente, a escrita formal é incompatível com a escrita livre, mas todas as outras combinações nos parecem razoáveis: escrita informal e livre, escrita informal e direcionada e escrita formal e direcionada.

No caso da pesquisa que desenvolvemos, estaremos trabalhando nas atividades de Coleta de Dados com a modalidade de escrita informal e direcionada. Direcionada porque as atividades convidavam os alunos a resolverem problemas relacionados ao Cálculo Diferencial sugeridos pelo professor. E informal porque não cobramos rigor no texto em prosa e esperamos que as partes mais relacionadas à resolução dos problemas em si refletissem o conhecimento matemático do aluno e a sua maneira de fazer e pensar Matemática, e não algum tipo de rigor exigido pelo professor.

Retornando ao artigo de Sipka (1990), após ter apresentado um vasto leque de possíveis instrumentos para a incorporação da escrita ao processo de ensino e aprendizagem

de Matemática, a autora fez uma breve exposição dos benefícios advindos dessa incorporação. Porém, a autora apontou apenas benefícios para os estudantes.

No entanto, nesse mesmo periódico onde o artigo de Sipka (1990) foi publicado, Rose (1990) fez uma discussão muito mais aprofundada dos benefícios da escrita, apontando-os em pelo menos três esferas diferentes: benefícios para o **estudante** como escritor, para o **professor** como leitor e para a **interação** entre estudante e professor.

Essa distinção, apesar de admitir inúmeras intersecções, nos parece bastante pertinente e, por isso, vamos fazer uma discussão mais detalhada sobre cada um desses benefícios separadamente nas seções a seguir.

### 1.3.1. Benefícios para o Estudante como Escritor

O que nos deveria levar a crer que a escrita tem algo distinto a oferecer para o processo de ensino e aprendizagem em relação à oralidade (naturalmente presente, mesmo que seja apenas pela fala unidirecional do professor para os alunos, em qualquer sala de aula)?

Vigotski (2001) reforçou a importância da linguagem como mediadora da relação entre o indivíduo e o ambiente e, por “linguagem”, o autor não se referiu apenas à oralidade, mas também à escrita, e estabeleceu a seguinte relação entre elas: “a escrita é a forma de linguagem mais prolixa, exata e desenvolvida. Nela temos de transmitir por palavras o que na linguagem falada se transmite por entonação e pela percepção imediata da situação” (p. 456).

Portanto, a expressão “escrita”, por estar despida de outras formas de expressão que normalmente se aliam e complementam a expressão oral, demanda uma elaboração maior por parte de quem a produz e, até mesmo, do interlocutor a quem ela se dirige. Para completar a comparação entre essas duas formas de expressão, o autor traçou um paralelo entre o “esboço” (ligado à oralidade) e o “ato de passar a limpo” (ligado à escrita), dizendo que “o caminho entre o esboço e o ato de passar a limpo é uma via de atividade complexa, mas até mesmo quando não há cópia factual, o momento de reflexão no discurso escrito é muito forte” (VIGOTSKI, 2001, p. 457 – grifo nosso).

Apesar de assumir um referencial claramente piagetiano, Arthur Powell também fundamentou as suas propostas para a incorporação da escrita no ensino e na aprendizagem de Matemática nessa capacidade da escrita de provocar a reflexão em quem escreve, ao afirmar que “a escrita é uma ferramenta potencial para forçar a reflexão conceitual” (POWELL e

BAIRRAL, 2006, p. 83).

Além dessa propriedade, que está essencialmente ligada ao processo de escrever, Hoffman e Powell (1989) apontaram outra característica pedagogicamente positiva, mas ligada ao produto: “a escrita é uma externalização do pensamento, menos transiente que a memória e menos efêmera do que a fala” e, portanto, “é um veículo visível para os estudantes examinarem suas conceitualizações e revisá-las à luz de evidências adicionais ou contraditórias” (p. 55 – tradução nossa).

Com isso, temos que, além do processo de escrever ser um recurso pedagógico importante devido a reflexão que a escrita demanda durante a sua realização, o produto final desse processo, por ser algo permanente, pode provocar mais reflexão por parte do aluno sobre aquilo que ele já produziu. Powell (2001) sintetizou esses dois benefícios da escrita para o estudante com a seguinte frase: “nós vemos que escrever força os alunos a refletir sobre suas experiências matemáticas e examinar as reflexões escritas pode levar alunos a refletir criticamente em suas idéias” (p. 77).

Gostaríamos de ressaltar que, até agora, nenhum dos argumentos apresentados sobre o uso da escrita se referiu especificamente à Matemática, ou seja, os mesmos argumentos nos conduziram à utilização da escrita como recurso pedagógico em qualquer conteúdo escolar. Porém, do nosso ponto de vista, a escrita carrega outra característica intrínseca que favorece de forma especial o ensino e aprendizagem de Matemática: a ordem.

O papel impõe, mesmo que se lance mão de diagramas e outros recursos visuais diversos, uma ordem na apresentação de qualquer conteúdo, fato que vai ao encontro da natureza dedutiva e do encadeamento lógico de argumentos próprios da Matemática.

Relacionado a isso, os estudantes investigados por Rose (1990) apontaram explicitamente os seguintes benefícios: “a escrita facilita a justificação e a resolução de problemas” (p. 65 – tradução nossa) e “a escrita é um revelador do entendimento” (p. 66 – tradução nossa). Segundo a própria autora:

quando estudantes escrevem [...], eles são beneficiados porque escrever os força a elaborar e ser seqüencial. Isto é, os estudantes são forçados a diminuir o ritmo de seu raciocínio e assim eles não perdem seus pensamentos. Eles escrevem as partes do problema passo-a-passo e nomeiam cada passo. Como resultado, a imagem do processo inteiro revela conexões entre cada um dos passos separadamente (ROSE, 1990, p. 65-66 – tradução nossa)

Ao resolver por escrito algum problema, o aluno é induzido a explicitar cada passo de sua resolução para que o leitor o compreenda e, dessa forma, torna mais visível tanto o processo que o levou a essa resolução como o que possa eventualmente ter lhe faltado. Por outro lado, quando o aluno o faz verbal ou mentalmente, muitos desses detalhes podem se perder ou permanecer inacessíveis a quem observa.

### **1.3.2. Benefícios para o Professor como Leitor**

Como professores de Matemática ou pesquisadores em Educação Matemática, um dos nossos maiores anseios é ter acesso, de alguma forma, ao pensamento matemático de nossos alunos ou sujeitos da pesquisa. Porém, esse pensamento matemático é fruto da cognição de cada indivíduo e, por isso mesmo, é inacessível em plenitude a qualquer elemento externo. Mais uma vez, lançaremos mão da distinção proposta por Steffe e Thompson (2000) entre “students' mathematics” e “mathematics of the students”: o primeiro se refere ao pensamento matemático do aluno, e o segundo se refere ao modelo que nós criamos para compreender esse pensamento matemático a partir daquilo que nos é acessível. Devido à própria natureza do primeiro, esse modelo, por mais que se aproxime, jamais será uma descrição fiel daquele.

Em termos de pesquisas, diversas estratégias já foram utilizadas com o intuito de inferir sobre o pensamento matemático de um estudante. Um exemplo, utilizado principalmente em pesquisas de caráter cognitivista, é o “pensar em voz alta”<sup>17</sup>. Porém, essa técnica demanda preparação por parte de quem está sendo investigado e pode provocar efeitos de caráter intimidatório.

Em contraponto a essa técnica, Powell (2001) propôs que “escrever é uma tecnologia isenta e não intrusiva que permite aos alunos e professores capturar, examinar e reagir ao pensamento matemático” (p. 81) e segue afirmando que:

Qualquer que seja a atividade escrita, desde que ela obrigue os alunos a sondar suas idéias e compreensão sobre alguma matemática em que estejam envolvidos, pode capturar evidência importante de seu pensamento matemático (POWELL, 2001, p. 78)

Drake e Amspaugh (1994) reforçaram os benefícios trazidos pela escrita ao professor, como o sujeito que lê as produções de seus alunos, em um sentido muito semelhante ao

---

<sup>17</sup> *Think Aloud*, em inglês.

proposto por Powell (2001), ao dizerem que

Eles [professores de Matemática] podem se tornar mais efetivos ao usarem a escrita de seus estudantes para obter informação que seria difícil (ou impossível) de obter de outras maneiras. A escrita permite ao professor ver um tipo de pensamento e compreensão que não é acessível se olharmos apenas para cálculos. (DRAKE e AMSPAUGH, 1994, p. 43 – tradução nossa)

Entre as informações que Drake e Amspaugh (1994) apontaram como acessíveis quando lidamos com a produção escrita de estudantes de Matemática, ressaltamos as seguintes: diagnóstico de padrões de erros, *insights* sobre onde o ensino deve começar, evidências sobre onde e porque um estudante falhou em relacionar tópicos do currículo e *insights* sobre crenças e atitudes dos alunos em relação à Matemática.

Os aspectos salientados por esses autores referem-se, essencialmente, à compreensão que o professor pode ter do pensamento matemático de seus alunos, porém, o professor também pode se beneficiar da escrita de seus alunos no que tange ao planejamento e execução de suas aulas, tanto a curto como a longo prazo, como salientou Rose (1990).

A curto prazo, o professor se beneficia ao identificar tópicos problemáticos, pontos que parecem não ter sido devidamente compreendidos ou deficiências de conhecimento que sejam recorrentes entre os seus alunos. A partir disso, então, pode-se se reconsiderar o espaço desses conteúdos em suas aulas. Nesse sentido, a escrita pode ser vista como um instrumento de avaliação formativa a curto prazo para o professor, à medida em que fornece um *feedback* direto dos alunos para o professor, sem precisar esperar por momentos mais clássicos de avaliação, como provas ou listas de exercícios.

A longo prazo, o professor pode tirar proveito dessas mudanças a curto prazo para repensar a sua prática com um olhar mais global. Nesse sentido, a característica da escrita de gerar um produto menos efêmero do que a fala e mais fidedigno do que as lembranças também beneficia o professor, pois permite a ele retomar no futuro os escritos de seus alunos e identificar elementos que passaram despercebidos no momento em que ocorreram, ou reavaliar as suas práticas à luz de novas experiências.

### **1.3.3. Benefícios para a Interação entre Estudante e Professor**

Como ficou claro a partir do referencial vigotskiano que delimitamos na Seção 1.1, a

interação entre aluno e professor é fundamental para a nossa concepção de ensino e aprendizagem e, conseqüentemente, para esta pesquisa como um todo.

Consideramos essa nova esfera, a interação professor-estudante, não como a justaposição de professor (pensado como aquele que é responsável pelo ensino) com estudante (pensado como aquele em quem o ensino busca despertar processos de aprendizagem e, conseqüentemente, de desenvolvimento), mas sim como uma nova unidade de análise que deve ser abordada como um todo, e não decomposta em elementos que, isoladamente, não o representam adequadamente.

O que pretendemos nesta Seção é apontar alguns dos benefícios que podem emergir do uso da escrita no processo de ensino e aprendizagem de Matemática para a interação entre aluno e professor.

O primeiro que apontaremos refere-se à criação de um canal de comunicação privilegiado entre estudante e professor. Olimpio Junior (2006) destacou muito bem esse benefício dentro do contexto específico do ensino de Cálculo no cenário universitário brasileiro, ao dizer que:

Além dos reconhecidos problemas de formação pré-universitária do(a) estudante, uma outra característica, tradicional, freqüente, e que está presente em quase todos os cenários universitários brasileiros, é o grande número de aluno(a)s das turmas de Cálculo oferecidas no primeiro ano dos diversos cursos afins à área. Dificilmente se poderia contra-argumentar que este fator dificulta sensivelmente a interação aluno-professor, que se supõe importante e necessária nesta delicada fase de transição do aluno para a Matemática do Ensino Superior. Como conseqüência, a interação individual baseada na oralidade é quase inviabilizada. Assim, na prática, não ocorre uma interação, mas apenas comunicação [...] e, pior, apenas num sentido: do professor para o aluno. (OLIMPIO JUNIOR, 2006, p. 5)

Powell e Ramnauth (1992) identificaram problema semelhante ao analisarem a dinâmica que se estabelece nos horários de atendimento e sessões de tutoria, e concluíram que o professor ou tutor, por ser o responsável pela maior parte das falas e das ações, acaba sendo aquele que mais se beneficia daquele momento de aprendizagem.

Nesse sentido, o emprego da escrita coloca o aluno no centro do processo educativo ao torná-lo responsável pelas ações cognitivas envolvidas na produção de um texto de qualquer espécie. Ao contrário do que se nota em salas de aula tradicionais, nas quais impera uma postura que Alro e Skovsmose (2007) chamaram de “Absolutismo Burocrático”, na qual o professor é o responsável pela maior parte das falas e explicações e ao aluno cabe apenas



fazer algumas perguntas ocasionais ou dar pequenas respostas padronizadas, com o uso da escrita cria-se um canal de comunicação efetiva no qual o professor ocupa a posição de direcionador e o aluno tem um papel ativo no processo.

Completando esse raciocínio, Hoffman e Powell (1989) reforçaram a importância desse canal de comunicação gerado pela escrita, concluindo que “[a escrita] permite aos instrutores ouvirem cada estudante e permite aos estudantes saberem que suas preocupações e idéias serão ouvidas” (p. 55 – tradução nossa). Essa conclusão vai ao encontro da mutualidade apontada por Goos (2004) como fundamental para que a interação entre professor e estudante possa ir além da mera transmissão unidirecional de conhecimento.

Outro ponto levantado por Powell e Ramnauth (1992) refere-se não mais à qualidade do diálogo nos horários de atendimento e sessões de tutoria, mas sim ao conteúdo que predomina nessas ocasiões. Segundo os autores, “questões de procedimentos e técnicas limitam o diálogo matemático” (p. 12). Olimpio Junior (2006) constatou o mesmo quando analisou as salas de aula de Cálculo e nos diz que

em geral, a mera manipulação algébrica e algorítmica dos exercícios clássicos da disciplina, além de ocupar a maior parte do tempo de trabalho em sala de aula, parece contribuir sistematicamente para deslocar a apreensão - e a apreciação - de seus significados conceituais para uma posição subalterna, ou mesmo, em casos extremos, para fora do escopo dos objetivos educacionais que deveriam ser perseguidos. (OLIMPIO JUNIOR, 2006, p. 21)

Assim, além de criar um canal de comunicação privilegiado entre professor e estudantes, o uso de recursos metodológicos baseados na escrita permite aos professores, através dos comentários deixados em resposta à produção escrita de cada um de seus alunos, direcionar o diálogo matemático para onde este julgue mais proveitoso e de acordo com as características individuais de seus estudantes. Isso possibilita que o ritmo do ensino, que, em aulas convencionais, é ditado por algum tipo de “média” percebida pelo professor, possa se adequar à velocidade da aprendizagem de cada um.

Outro benefício apontado por Borasi e Rose (1989) relacionado com aspectos motivacionais foi chamado pelas autoras de “criação de uma atmosfera mais cooperativa em sala de aula”. Segundo as autoras, “ao passo que os professores perdem parcialmente sua função avaliativa para uma de caráter mais de apoio, os estudantes se sentem encorajados a

aprender” (p. 362 – tradução nossa).

Complementando esse raciocínio, chamamos a atenção para o fato de que as interações escritas entre professor e estudante em uma sala de aula convencional, geralmente, se limitam às provas ou correção de listas de exercícios, que são atividades normalmente vinculadas a processos avaliativos de aprovação ou reprovação. Ao se isentarem, mesmo que apenas na parte explícita do processo, de intenções avaliativas, o professor cria um ambiente no qual o estudante se sente mais livre para expressar seu pensamento matemático, uma vez que não será “punido” por eventuais erros, podendo inclusive tirar proveito destes para a sua aprendizagem (como salientado na Seção 1.2).

Para concluir a análise que fizemos dos potenciais benefícios advindos da incorporação de recursos pedagógicos baseados na escrita em sala de aula de Matemática, lançamos mão do mesmo fechamento que Rose (1991) fez no artigo em que sugeriu essa distinção entre benefícios para o estudante como escritor, para o professor como leitor e para a interação professor-estudante:

À medida que estudantes escrevem, eles podem ser encorajados a expressar e refletir sobre seus sentimentos, conteúdos, processos e suas concepções de Matemática [...]. À medida que os professores lêem, eles têm contato com as necessidades individuais, dificuldades comuns e recebem *feedback* sobre o curso [...]. À medida que estudantes e professores se engajam em um diálogo, a interação pode produzir um ambiente educacional mais personalizado, cooperativo e ativo para ambas as partes. (p. 71 – tradução nossa)

Nossa intenção com esta pesquisa, no que diz respeito à incorporação da escrita ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática, é evidenciar e discutir essa vasta gama de benefícios, e eventuais dificuldades e limitações, através da análise das resoluções coletadas e dos depoimentos dados pelos sujeitos na entrevista, tendo, como uma possível contribuição, a proposição de um instrumento eficaz para essa incorporação nas salas de aula de Matemática.

## CAPÍTULO 2

### Metodologia

Esta pesquisa é de caráter qualitativo e se alinha ao paradigma interpretativo de investigação proposto por Ernest (2003), uma vez que procuramos “explorar toda a riqueza de um caso particular que possa servir como paradigma ou modelo ilustrativo de algo mais geral” (p. 33 - tradução nossa). É com esse espírito que pretendemos investigar o objetivo da pesquisa: evidenciar as potencialidades da Dinâmica RCR como um recurso didático-pedagógico para o ensino e aprendizagem de Matemática.

Em relação aos Procedimentos para Coleta dos Dados de que lançamos mão para atacar o nosso objetivo, podemos dizer que a essência desta pesquisa está no procedimento para coleta das resoluções de problemas realizadas pelos alunos (sujeitos): a **Dinâmica RCR**, que será devidamente abordada logo adiante, na sessão 2.2. Essas resoluções compõem a parte mais significativa e volumosa dos dados coletados e a coleta ocupou todo o primeiro semestre de 2007.

Além desse procedimento, também realizamos uma entrevista coletiva com todos os sujeitos da pesquisa, com o intuito de ampliar a nossa compreensão sobre alguns dos aspectos que surgiram durante a etapa de coleta das resoluções dos problemas.

Nas seções a seguir entramos em mais detalhes relativos ao contexto onde os dados foram coletados e aos procedimentos de Coleta de Dados propriamente ditos.

## 2.1. O Contexto da Coleta dos Dados

A Coleta de Dados foi realizada com alunos do curso de Ciência da Computação da Unesp de Rio Claro que cursaram a disciplina Cálculo Diferencial I, ministrada pela orientadora deste projeto, durante o primeiro semestre de 2007 e manifestaram, voluntariamente, interesse em participar da presente pesquisa.

A cada aluno que manifestou interesse foi entregue uma carta de participação no projeto, na qual os alunos se comprometiam a: a) ceder os dados coletados através da dinâmica proposta, b) realizar uma entrevista ao final da disciplina, e c) realizar regularmente as atividades propostas até o término da disciplina.

Além disso, o pesquisador realizou seu Estágio Docente<sup>18</sup> na mesma disciplina e acompanhou todas as aulas, adotando em alguns momentos uma postura ativa e não somente de observador. Isso fez com que os alunos, e, em particular, os sujeitos da pesquisa, se familiarizassem com o pesquisador e este tivesse mais contato com a realidade da disciplina em todas as suas dimensões.

Inicialmente um total de dezesseis alunos demonstraram interesse em participar das atividades relativas à coleta de dados, porém, apenas dez participaram efetivamente durante as primeiras semanas, sendo que um destes apresentou uma assiduidade muito baixa.

Todos os sujeitos eram ingressantes no curso de Ciência da Computação Integral da Unesp de Rio Claro, e apenas um deles tinha experiência anterior em curso superior: esse aluno havia cursado Matemática na mesma Universidade durante o ano de 2006, tendo, inclusive, cursado a disciplina Cálculo Diferencial I, na qual fora reprovado.

A proporção de homens e mulheres participantes da pesquisa foi muito próxima da distribuição entre os matriculados na disciplina. E a assiduidade de todos eles na disciplina foi muito próxima da ocorrida nas atividades da Coleta de Dados, sendo superior a 70%.

Para completar esse quadro, vamos tratar um pouco sobre a forma com que o Cálculo se integra ao currículo do curso ao qual pertencem os sujeitos dessa pesquisa.

Decidimos abordar esse aspecto, pois Catapani (2001) nos chamou a atenção para a

---

<sup>18</sup> Estágio Docente é uma atividade que pode ser exercida por alunos de pós-graduação em disciplinas regulares de graduação, dentro da qual o estagiário dedica parte de seu tempo a executar atividades de ensino sob a orientação do professor responsável pela disciplina.

relação que alunos e professores estabelecem com as disciplinas matemáticas “em serviço”. A autora definiu esse tipo de disciplina “como sendo disciplinas de Matemática ministradas por professores de departamentos de Matemática em cursos para não-matemáticos” (p. 3).

No caso do curso de Ciência da Computação em período Integral, ao qual pertencem todos os sujeitos dessa pesquisa, o tema “Cálculo” aparece em quatro disciplinas da grade curricular, abrangendo desde noções básicas de Funções até Integrais de Funções de Múltiplas Variáveis, passando por Equações Diferenciais Ordinárias. Além destas, outras disciplinas matemáticas “em serviço” aparecem no currículo, como Geometria Analítica, Álgebra Linear e Estatística.

A disciplina que tomamos como cenário para essa investigação se encaixa nesse quadro e é ministrada no primeiro semestre da grade curricular, ao lado de Geometria Analítica, como as únicas disciplinas não específicas da área de Computação.

É dentro desse contexto, formado pela disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, pelas suas características particulares e pelos alunos que se dispuseram a ser sujeitos da presente pesquisa, que realizamos a nossa investigação.

## 2.2. A Dinâmica RCR

Como já dissemos algumas vezes ao longo deste texto, toda a idéia desta pesquisa nasceu a partir de uma proposta metodológica a ser utilizada junto a alunos de alguma disciplina matemática. A partir de reflexões sobre a idéia original e diálogo com a literatura em Educação Matemática, especialmente com os trabalhos de Arthur Powell, chegamos ao que chamamos aqui de **Dinâmica RCR**.

A sigla **RCR** refere-se ao esquema geral resolução-comentário-resolução, muito utilizado em pesquisas na área de Avaliação Dinâmica<sup>19</sup>, por exemplo, e que nos serviu de inspiração inicial. Porém, nesta pesquisa, expandimos esse esquema para um número maior de interações, de forma que cada comentário pudesse gerar uma nova resolução e essa nova resolução um novo comentário, reabastecendo a dinâmica até que uma das partes (pesquisador ou sujeitos) julgasse adequado encerrá-la.

Além de ser comum no contexto de trabalhos acadêmicos, essa dinâmica também se manifesta naturalmente em ambientes como uma sala de aula de Matemática quando, por exemplo, um professor corrige uma prova, trabalho ou lista de exercícios e deixa comentários para os alunos, mesmo que ele não tenha consciência disso.

Leme (1997), por exemplo, em sua Dissertação de Mestrado, que buscava investigar o ensino e aprendizagem de Matemática Financeira através da metodologia da pesquisa-ação, lançou mão de uma dinâmica semelhante, mas de uma maneira muito mais informal: através da troca de bilhetes entre alunos e professor. Por parte dos alunos, os bilhetes eram utilizados principalmente para registrar dúvidas específicas em relação à atividade ou a algum conteúdo ou procedimento, enquanto que, para o professor, eram usados tanto para sanar essas dúvidas como para fazer sugestões de encaminhamento na atividade que os alunos estavam desenvolvendo. A autora disse que:

Os bilhetes fizeram com que o nosso trabalho sofresse avanços nos níveis matemático, didático e pedagógico. Matemático porque ofereceram uma correção diária das atividades, tornando possível a solução das dúvidas que eram detectadas; didático porque auxiliaram o desempenho da professora junto aos alunos [...]; e pedagógico porque os bilhetes faziam com que os alunos avançassem nas atividades gradativamente após a correção que era

---

<sup>19</sup> Trata-se de uma área de pesquisa em Educação e Psicologia focada em processos de Avaliação e que busca, de alguma forma, incorporar as idéias de Vigotski sobre o nível de desenvolvimento potencial daquele que é avaliado.

efetuada na aula. (LEME, 1997, p. 149)

Outro contexto no qual essa dinâmica se estabelece de forma bastante clara é em Fóruns de Discussão *on-line*. Esse tipo de recurso é muito comum em ambientes que oferecem suporte a cursos à distância ou complementação para cursos presenciais, como o TelEduc<sup>20</sup> ou Moodle<sup>21</sup>. Nesses ambientes, um usuário cria um tópico e os demais usuários do ambiente podem respondê-lo, existindo, inclusive, a possibilidade de responder a uma resposta, de forma que essa dinâmica de interação pode ser facilmente estabelecida.

Azambuja et al. (2004) exploraram a potencialidade desse recurso no contexto de cursos de Cálculo ao discutirem o uso de tecnologia de informação e comunicação síncronas e assíncronas como complemento de cursos presenciais. Os autores apontaram esse recurso como o mais promissor dentre os usualmente disponíveis em ambientes dessa natureza, e constataram que:

O professor, na sua mediação, tem possibilidade de avaliar a aprendizagem dos alunos, de modo individual e, através de suas intervenções, pode orientar-lhes o pensamento, fazendo com que construam os conceitos. (AZAMBUJA et al. 2004, p. 242)

Ponte (1997) também explorou a potencialidade dessa dinâmica, mas colocando-a como um instrumento para avaliação da aprendizagem através do que o autor chamou de “Teste em Duas Etapas”. Nele, o professor aplica um teste, corrige, faz comentários, sugestões, correções, propõe novas questões e entrega para que o aluno o resolva novamente. Essa proposta se aproxima bastante da Avaliação Dinâmica, cujo objetivo principal é avaliar não apenas um produto, mas um processo decorrente de uma intervenção externa (o comentário do pesquisador, no nosso caso).

No caso desta pesquisa, essa dinâmica se estabeleceu junto aos sujeitos da seguinte maneira:

1. O pesquisador entregava aos alunos uma folha A4 com um problema;
2. O aluno levava essa folha para casa e resolvia o problema, devolvendo-a ao pesquisador na aula seguinte;
3. O pesquisador recolhia as resoluções na aula seguinte, levava para casa, corrigia uma a

---

20 <http://teleduc.nied.unicamp.br/>

21 <http://moodle.org>

- uma e fazia comentários de acordo com o que o aluno apresentava na resolução;
4. O pesquisador entregava a folha com os comentários ao aluno, e a dinâmica recomeçava.

As interações em torno de um mesmo problema se estendiam até que pesquisador ou aluno julgassem que era adequado encerrá-las e, nesse caso, o pesquisador arquivava o bloco de relatórios relativos a essa interação e entregava ao aluno uma folha com um novo problema. A periodicidade do ciclo descrito acima era semanal e seguia as aulas da disciplina, ou seja, o pesquisador recolhia as resoluções ou entregava as folhas comentadas ao final das aulas regulares, que ocorriam duas vezes por semana.

Contudo, o que definimos como **Dinâmica RCR** nesta pesquisa não se refere apenas a esse esquema de resolução-comentário-resolução expandido, mas também a outras dimensões que, do nosso ponto de vista, determinaram a forma com que professor e alunos (pesquisador e sujeitos) interagiram durante a Coleta de Dados. Nas seções seguintes vamos explorar mais detalhadamente duas dessas dimensões: a natureza dos problemas utilizados e o meio material empregado para coletar as resoluções.

### 2.2.1. Sobre a Escolha dos Problemas

Apesar de escritos que mostram que a relação entre a resolução de problemas<sup>22</sup> e a Matemática remonta há milênios, como o Papiro de Rhind, esse tema começou a ganhar espaço explícito no ensino de Matemática a partir da publicação, em 1945, do livro “*How to solve it*”, de George Polya. Porém, é apenas depois da decadência da Matemática Moderna, na década de 70, que a Resolução de Problemas se estabelece tanto como uma estratégia para o ensino de Matemática quanto como uma área de interesse para pesquisas em Educação Matemática.

O marco desse estabelecimento foi a publicação do documento “*An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980's* pelo *Nacional Council of Teachers of Mathematics*”, nos Estados Unidos, em 1980, que, já na sua primeira página, trazia a seguinte recomendação: “resolver problemas deve ser o foco da matemática escolar

---

<sup>22</sup> Usaremos a expressão “resolução de problemas” para nos referir ao ato de resolver problemas e “Resolução de Problemas” (com as iniciais maiúsculas) para nos referir ao corpo teórico dentro da Educação Matemática que explicitaremos nessa sessão.



para os anos 80” (ONUChIC, 1999, p. 204).

Contudo, o que se viu durante toda a década de 80 foram dois quadros distintos para a Resolução de Problemas: um pintado no contexto das pesquisas acadêmicas e outro nas salas de aula de Matemática.

Conforme ressaltou Schoenfeld (2007), a pesquisa acadêmica sobre Resolução de Problemas foi bastante prolífica nesse período, desenvolvendo métodos próprios e estabelecendo as bases teóricas, principalmente sobre os aspectos que influenciam o desempenho de estudantes na resolução de problemas matemáticas<sup>23</sup>, que fundamentam até hoje os trabalhos dessa tendência.

Por outro lado, nas salas de aula, Onuchic (1999) observou que

Durante a década de 1980, muitos recursos em resolução de problemas foram desenvolvidos, visando ao trabalho em sala de aula, na forma de coleção de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividades e orientações para avaliar o desempenho em resolução de problemas. (ONUChIC, 1999, p. 206)

Entretanto, o resultado que se notava nas salas de aula estavam muito aquém dos esforços para a implementação da proposta. Onuchic (1999) observou que

Havia pouca concordância sobre a forma pela qual este objetivo [a resolução de problemas] era encarado. Essa falta de concordância ocorreu, possivelmente, pelas grandes diferenças existentes entre as concepções que as pessoas e grupos tinham sobre o significado de 'resolução de problemas ser o foco da matemática escolar'. (ONUChIC, 1999, p. 206)

Schoenfeld (2007) apontou como outra possível causa desse insucesso a não incorporação das pesquisas envolvendo esse tema pelas propostas que visavam a sala de aula. Esse descompasso era natural, uma vez que essas pesquisas também ascenderam durante essa mesma década de 80.

Trabalhos como o de Schroeder e Lester (1989) se encaixam justamente nesse contexto: aproximar as pesquisas acadêmicas da implementação em sala de aula e elucidar um pouco mais o significado da recomendação “resolver problemas deve ser o foco da matemática escolar”. Schroeder e Lester (1989) propuseram uma distinção, que é amplamente empregada entre pesquisadores e professores que trabalham com essa tendência, entre: a) ensino sobre resolução de problemas, b) para a resolução de problemas, e c) através da

---

23 Schoenfeld (1985) é um exemplo de trabalho dessa natureza e bastante importante para essa pesquisa.

resolução de problemas.

No primeiro, o foco do professor recai sobre modelos de resolução de problemas, como as etapas apontadas por George Polya e propostas similares. No segundo o ensino de Matemática se volta todo à resolução de problemas e prevalece a noção de que a aprendizagem dos conceitos está estritamente relacionada com a capacidade e habilidade para resolver problemas. Já na terceira, a Resolução de Problemas é vista como um meio, uma ferramenta através da qual a Matemática é ensinada, e não somente como um objetivo. Segundo Onuchic (1999), para essa terceira concepção, “os problemas são importantes não apenas como um propósito de se aprender matemática, mas também como um primeiro passo para se fazer isso” (p. 207).

Essas novas preocupações e recomendações para a sala de aula culminaram na publicação de um novo documento pelo *Nacional Council of Teachers of Mathematics*, nos Estados Unidos, em 1989, chamado “*Curriculum and Evaluation Standards for Schools Mathematics*”. Nele, a Resolução de Problemas deixa de ser um foco explícito e passa a estar integrada de forma bastante natural à proposta como um todo. Além disso, como reforçou Schoenfeld (2007), esse documento teve forte influência da comunidade acadêmica, incorporando muitos resultados e recomendações advindos de pesquisas.

A partir de então, a Resolução de Problemas passa a ser cada vez menos o foco explícito de documentos dessa natureza e passa a se diluir naturalmente nas propostas vindouras, sem jamais perder o espaço conquistado. E esse movimento de integração da Resolução de Problemas às mais diversas propostas dentro da Educação Matemática, entendida como campo de pesquisa e como prática em sala de aula, perpetua-se até o presente.

No caso desta pesquisa, estamos utilizando a Resolução de Problemas como uma Metodologia de Pesquisa, uma vez que ela e seus processos são uma das dimensões que serão analisadas, mas também a estamos utilizando como uma Metodologia de Ensino junto aos sujeitos pesquisados. E, neste caso, entendemos que o uso que fizemos dela se alinha à noção de “ensino através da Resolução de Problemas”, apresentada anteriormente.

Por outro lado, ainda sentimos a necessidade de definir mais claramente o que entendemos, nesta pesquisa, por “**problema**”.

Marco (2004) analisou as concepções apresentadas por diversos autores para o termo “problema”, ficando evidente, a partir da leitura dessa análise, que dois componentes estão

sempre presentes nessas concepções: o interesse em resolver e o fato de não haver uma resolução disponível naquele momento. Para Onuchic e Allevato (2005), problema é “tudo aquilo que não sabemos fazer mas que estamos interessados em fazer” (p. 221). Note que essa definição é bastante abrangente e sequer faz referência à Matemática ou mesmo a algum contexto educacional. Borasi (1986) afirma que “a palavra problema não é sempre utilizada da mesma maneira em contextos e autores diferentes, e o conceito em si necessita de clarificação” (p. 125 – tradução nossa).

Concordamos com a constatação de Borasi (1986) e o que faremos agora é discriminar quais as características dos problemas que utilizamos na Coleta de Dados desta pesquisa, utilizando alguns critérios propostos por essa autora:

- a) **formulação**: refere-se à definição explícita que se dá da questão do problema;
- b) **contexto**: refere-se ao contexto no qual o problema está imerso;
- c) **métodos de abordagem**: refere-se aos métodos que podem ser utilizados para se chegar a uma solução válida.
- d) **solução**: refere-se ao conjunto de soluções aceitáveis para o questão formulada;

Sobre a **formulação**, a autora aponta duas possibilidades: as formulações abertas, que deixam a cargo do aluno a elaboração e a definição da questão a ser respondida, e as formulações fechadas, que explicitam no próprio texto a questão que deve ser respondida. No nosso caso e, de acordo com a concepção dessa autora, optamos sempre por problemas com formulação fechada, por exemplo:

$$\text{Seja } p(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}.$$

- a) Calcule as raízes de  $p(x)$ .
- b) Quais são as assíntotas horizontais e verticais dessa função?
- c) Usando essas informações, esboce à mão o gráfico de  $p(x)$ .

Sobre o **contexto** no qual o problema está imerso, apesar de Borasi (1983) apresentar algumas possibilidades, tomaremos emprestada a noção de “referência de um problema” utilizada por Alro e Skovsmose (2006) para descrever quais são os diferentes contextos de um problema. Esses autores apontaram as seguintes referências: à Matemática Pura, à semi-

realidade ou ao mundo real.

No primeiro caso, o problema se refere exclusivamente a objetos matemáticos abstratos, e as hipóteses válidas são teoremas e propriedades matemáticas já demonstrados ou tidos como aceitos. Exemplos desses tipos de contexto são os problemas do tipo “demonstre” ou investigações acerca de propriedades numéricas, por exemplo.

No segundo caso, semi-realidade, os problemas fazem referência a entidades existentes no mundo real. Porém, as propriedades relevantes dessas entidades são totalmente dadas no enunciado do problema. Nessa categoria se encaixam a maioria dos problemas encontrados em livros didáticos, como, por exemplo: “O preço do pote de 200 gramas de maionese é R\$ 5,00 e o preço do pote de 1 quilograma é R\$ 9,50. Qual é mais vantajoso?”

Note que o problema faz referência a objetos e situações que ocorrem no mundo real, porém, as propriedades desses objetos que devem ser consideradas na resolução estão totalmente descritas no enunciado. Perguntar se esses preços são coerentes, ou se 1 quilograma de maionese não poderia estragar, dado o consumo de uma família normal, é considerado inútil ou um desvio do problema proposto. É nesse ponto que esse tipo de referência se distingue do terceiro caso, a referência ao mundo real.

Nesse caso, o que vale são os fatos do mundo real, e questionamentos como os anteriores são totalmente relevantes para a resolução do problema. Nesse caso, o enunciado poderia ser reduzido a “É mais vantajoso comprar um pote de 1 quilograma de maionese ou um de 200 gramas?”. E os dados a serem utilizados na resolução devem ser colhidos no mundo real, bem como todos os demais aspectos que possam influenciar na resposta ao problema.

Nesta pesquisa, optamos por problemas cujos contextos fazem referência à Matemática Pura ou a semi-realidades, e dois exemplos que ilustram essas possibilidades são, respectivamente:

Você acha que existe uma função do conjunto  $\{1, 2, 3\}$  para o conjunto  $\{2, 4, 5, 8\}$ ? Em caso positivo, dê um exemplo.

Uma estrela variável é aquela cujo brilho alternadamente cresce e decresce. Para a estrela variável mais visível, Delta Cephei, o período de tempo entre os brilhos máximos é de 5,4 dias, o brilho médio (ou magnitude da estrela) é de 4,0, e seu brilho varia de 0,35 em magnitude. Elabore uma função que modele o brilho de Delta Cephei

como uma função do tempo.

Voltando aos critérios propostos por Borasi (1986), o próximo deles se refere aos **métodos de abordagem** para resolução do problema. A autora apontou as seguintes possibilidades: a) combinação de algoritmos conhecidos, b) elaboração de um novo algoritmo, c) *insight* e reformulação (característicos de problemas de demonstração ou quebra-cabeças), d) exploração do contexto (característico de problemas relacionados à realidade), e) criação de um modelo, e, finalmente, f) determinação do problema (característico de problemas abertos, onde uma situação é proposta e a questão não está bem definida).

A nossa opção foi por problemas que se encaixam no primeiro, segundo e terceiro tipos, novamente por serem os mais comuns dentro dessa disciplina.

Apesar de estarmos conscientes de que as características do problema determinam fundamentalmente os métodos que o aluno pode utilizar para abordá-lo, reconhecemos que é muito difícil prever como o aluno irá de fato resolvê-lo. O que fizemos no momento da escolha dos problemas foi uma projeção, com base na experiência do pesquisador e da orientadora com a disciplina, para selecionar problemas que se encaixassem dentro do espectro gerado pela combinação desses três métodos de abordagem: combinação de algoritmos conhecidos, elaboração de um novo algoritmo e *insight* e reformulação (característicos de problemas de demonstração ou quebra-cabeças).

Em relação ao critério **solução**, entendemos que, apesar dos problemas escolhidos muitas vezes admitirem uma única resposta, o fato de estarmos interessados no processo de resolução como um todo e de incentivarmos os alunos a levarem a cabo as suas idéias para resolver o problema fez com que a resposta esperada inicialmente pouco influenciasse o processo como um todo. Por esse motivo, entendemos que esse critério não é relevante para a caracterização da natureza dos problemas escolhidos.

Finalizando, optamos por problemas com: a) formulação fechada, b) dentro de um contexto da matemática pura ou de semi-realidades, e c) cuja resolução envolvesse a combinação de algoritmos conhecidos, elaboração de novos algoritmos ou reformulações e *insights*.

Ressaltamos também que essas opções foram feitas tendo em vista o objetivo da pesquisa e são isentas de qualquer julgamento de qualidade, de forma que reconhecemos a

importância de problemas com outras características para outros contextos de pesquisa ou de ensino.

Além dessa caracterização, para cada problema escolhido foram pensados *a priori* alguns desdobramentos que transcendiam a questão colocada inicialmente, no sentido de alguma generalização ou aprofundamento de conteúdo. Esses desdobramentos foram fundamentais para que o pesquisador pudesse dar continuidade às discussões que julgava interessante, mesmo quando o problema inicial já havia sido respondido.

Por exemplo, o problema D tinha o seguinte enunciado:

Seja  $g$  uma função par,  $f$  uma função qualquer e  $h = f \circ g$ . A função  $h$  é sempre uma função par?

Os desdobramentos planejados para essa questão se relacionavam com a investigação da composição  $h = g \circ f$  e eventuais generalizações sobre composição de funções envolvendo função modular.

Em termos de conteúdo, a intenção do pesquisador era que as atividades desenvolvidas para a Coleta dos Dados seguissem o conteúdo regular da disciplina. Dessa forma, os problemas escolhidos abrangeram desde o conteúdo inicial de pré-Cálculo até aplicações do conceito de Derivada.

Todos os doze problemas utilizados ao longo da pesquisa, incluindo os que foram utilizados acima para ilustrar as características gerais dos problemas escolhidos, estão disponíveis no Anexo A, contendo uma pequena explicação sobre a motivação para a escolha de cada um dos problemas e os possíveis desdobramentos pensados *a priori*.

### 2.2.2. Os Relatórios de Múltiplas Entradas

Para efetuar a coleta das resoluções apresentadas pelos alunos e viabilizar esse ambiente de interações sucessivas acerca de um mesmo problema através da escrita, lançamos mão, como meio material, de folhas A4 deitadas e divididas em três partes, das quais as duas primeiras deveriam ser utilizadas pelo aluno para resolver o problema e escrever sobre a resolução, enquanto a terceira seria utilizada pelo pesquisador para deixar seus comentários.

A cada nova interação uma nova folha seria entregue ao aluno e anexada às anteriores,

para manter o registro cronológico das interações relativas a um mesmo problema.

Aluno: _____	Data: ___/___/___	Id. do Problema: _____	Nº do Formulário: _____
<b>Problema:</b>			Comentários

Figura 1: Relatório de Múltipla Entrada em branco

Esse meio material foi concebido de maneira despretensiosa, apenas com o intuito de satisfazer as demandas da pesquisa em si. Porém, pouco antes do início da coleta dos dados, tivemos contatos com os trabalhos de Arthur Powell, especialmente com o artigo “*Beyond Answers and Questions: Prompting Reflections and Deepening Understandings of Mathematics Using Multiple-Entry Logs*” (POWELL e RAMNAUTH, 1992).

Nesse artigo, os autores propuseram um “instrumento pedagógico”, descrito como sendo uma folha deitada e dividida ao meio, na qual o estudante deveria colocar um problema de seu interesse e resolvê-lo na primeira coluna, para, então, refletir sobre a resolução ou mesmo sobre o conteúdo do problema na segunda. Isso feito, caberia ao professor fazer alguns comentários e direcionamentos, com base naquilo que fora apresentado pelo estudante, para que este desse continuidade à discussão em uma nova folha. Os autores chamaram esse instrumento de “Relatório de Múltiplas Entradas”<sup>24</sup>.

Dentre os benefícios proporcionados pelo uso desse instrumento, os autores apontam:

<sup>24</sup> *Multiple Entries Log*, no original em inglês

- a) Inversão de Papéis: em aulas comuns de Matemática ou mesmo em horários de atendimento extra-classe, “o tutor ou professor é responsável pela maior parte das falas e explicações [...] e, portanto, é quem mais aprende” (POWELL e RAMNAUTH, 1992, p. 12). Através dos Relatórios de Múltiplas Entradas, é possível dar voz ao aluno, uma vez que é ele quem resolve e sugere problemas, e fazer com que o professor assuma o papel de orientador das ações que ali ocorrem;
- b) Mudança do Foco do Diálogo: no contexto de aulas convencionais de Matemática, “questões técnicas limitam o diálogo matemático” (POWELL e RAMNAUTH, 1992, p. 12 – tradução nossa) e acabam resumindo as interações entre estudante e professor a dúvidas sobre procedimentos pontuais ou resolução específica e direta de problemas. Através dos Relatórios de Múltiplas Entradas, o professor pode direcionar o foco do diálogo para a direção que considerar mais interessante, seja ela conceitual ou procedimental.
- c) Registro Cronológico: cada novo Relatório preenchido pelo estudante é anexado aos anteriores que trataram do mesmo assunto, ou seja, forma-se um histórico da discussão, o qual pode ser consultado em etapas posteriores da interação potencializando a possibilidade de o estudante se engajar em um processo de reflexão;

Em relação à dinâmica que havíamos concebido inicialmente para a Coleta dos Dados, a única diferença significativa, do nosso ponto de vista, está no fato de que Powell e Ramnauth (1992) partiam de problemas sugeridos pelos alunos, ao passo que, na nossa proposta, quem determinou o problema disparador das interações foi o pesquisador.

Por entendermos que essa diferença é decorrente apenas dos diferentes contextos em que os instrumentos foram criados - horários de atendimento (no qual a liberdade de conteúdo e tempo são maiores do que em aula convencionais), no caso de Powell e Ramnauth (1992), e uma pesquisa acadêmica com intuito de investigar inclusive aspectos ligados ao conteúdo específico, no nosso caso - decidimos adotar a nomenclatura proposta por esses autores e incorporar os seus resultados e pressupostos a esta pesquisa.

É importante frisar que essa adoção não se deve apenas à similitude material entre os instrumentos, mas à semelhança entre as propostas: interação direta entre professor e estudante através da escrita e com foco na resolução de problemas.



Além disso, os trabalhos de Arthur Powell, de maneira geral, foram cruciais para a evolução desta pesquisa, pois, além de nos servirem como fundamentação teórica e metodológica, foi a partir deles que passamos a conceber a Dinâmica RCR não apenas como um procedimento específico para a nossa Coleta de Dados, mas também como um instrumento pedagógico para a sala de aula de Matemática. Dessa forma, essa pesquisa deixou de ter um caráter mais cognitivo para se enveredar pelos caminhos da Prática Pedagógica.

### 2.3. As Resoluções Coletadas

Esclarecidas as dimensões que consideramos mais importantes da Dinâmica RCR, vamos agora aos dados que foram de fato coletados com a implementação dessa dinâmica.

Como dito, os comentários eram individualizados, portanto, cada aluno desenvolveu as atividades propostas nessa etapa da Coleta de Dados de uma maneira diferente. Além disso, fatores como faltas, esquecimento, atrasos e comprometimento também influenciaram nos números da tabela abaixo.

Aluno / Problema	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L	M
<b>HE</b>	1	2	2	6	1	3	1	4	7	-	-	-
<b>AN</b>	7	4	-	-	1	6	1	6	-	2	-	-
<b>MA</b>	1	2	-	8	5	2	-	4	6	-	-	1
<b>IB</b>	1	5	-	8	3	-	-	4	-	2	-	-
<b>JM</b>	1	2	2	3	1	-	-	1	3	-	1	1
<b>DK</b>	1	2	1	6	4	-	-	-	3	1	-	-
<b>ED</b>	1	2	-	6	1	3	1	6	2	4	1	-
<b>TU</b>	1	2	-	7	4	-	-	4	-	-	-	-
<b>FE</b>	1	3	-	3	2	1	-	1	-	-	-	-

*Tabela 3: Problemas e número de interações por aluno*

Note, por exemplo, que o sujeito HE resolveu todos os problemas até o problema I, enquanto o aluno IB não resolveu todos, mas chegou até o J. Em relação ao problema A, por exemplo, o aluno AN foi o único que estendeu as interações (inclusive, esse será um dos problemas analisados no capítulo sobre a Análise dos Dados). Esses fatos ilustram que o desenvolvimento das atividades seguiu um ritmo individualizado.

Totalizando, foram coletados sessenta e sete blocos com extensões que variam de um a oito Relatórios de Múltiplas Entradas. Destes blocos, selecionamos seis, que serão discutidos em profundidade no capítulo de Análise dos Dados.

Todos os blocos de Relatórios de Múltiplas Entradas coletados foram digitalizados e estão disponíveis no Anexo B dessa Dissertação, em CDROM.

## 2.4. A Entrevista Coletiva

No início das atividades, foram entregues um Termo de Participação na Pesquisa e um Questionário de Identificação Básica, contendo perguntas relativas à idade, experiências prévias com o conteúdo da disciplina, relação pessoal com Matemática e experiências diferenciadas nessa área. Além desse Questionário, realizamos, no início do segundo semestre letivo (agosto), uma Entrevista Coletiva semi-estruturada com a participação dos 10 sujeitos participantes da pesquisa.

A entrevista é um procedimento comum em pesquisas de caráter qualitativo na área das Ciências Sociais, e configura-se essencialmente como “uma técnica, ou método, para estabelecer ou descobrir que existem perspectivas e pontos de vista sobre os fatos, além daqueles da pessoa que inicia a entrevista” (FARR, 1982 apud GASKELL, 2000, p. 65) e, mais do que isso, a entrevista representa o reconhecimento do valor desses outros pontos de vista para a compreensão do fenômeno estudado.

Optamos por uma entrevista semi-estruturada, pois

Embora o conteúdo mais amplo seja estruturado pelas questões da pesquisa, na medida que estas constituem o tópico guia, a idéia não é de fazer um conjunto de perguntas padronizadas ou esperar que o entrevistado traduza seus pensamentos em categorias específicas de resposta. As perguntas são quase que um convite para o entrevistado falar longamente, com suas próprias palavras e com tempo para refletir. Além do mais, o pesquisador pode obter esclarecimentos e acréscimos em pontos importantes com sondagens apropriadas e questionamentos específicos (GASKELL, 2000, p. 73)

Os tópicos guia que orientarão a nossa entrevista podem ser divididos em três grandes Eixos Temáticos relacionados aos objetivos e interesses desta pesquisa. São eles:

- A) a opinião dos alunos sobre os problemas, incluindo aspectos específicos de algum problema, resolução ou comentário;
- B) a relação dos alunos com os comentários feitos pelo pesquisador;
- C) a relação dos alunos com os Relatórios de Múltiplas Entradas e a Dinâmica RCR.

Dentro do **Eixo Temático A**, foram feitas as seguintes perguntas:

1. O que vocês acharam dos problemas de maneira geral em termos de dificuldade? Por quê?
2. O que vocês diriam dos problemas propostos em relação aos problemas normais estudados na disciplina, listas de exercícios e livros? Por quê?
3. Há algum problema que vocês acharam que destoou dos demais? Por quê?
4. Vocês querem dizer algo sobre algum problema específico?

Dentro do **Eixo Temático B**, foram feitas as seguintes perguntas:

1. Em relação aos comentários, eles eram úteis para a resolução do problema? Por quê?
2. Houve alguma situação em que os comentários não foram úteis? Por quê?
3. Qual o tipo de comentário que vocês consideram ideal para ajudá-los na resolução de algum problema? Por quê?
4. Quais as vantagens e desvantagens que vocês perceberam entre esses comentários escritos e comentários feitos presencialmente pelo professor? Por quê?

Dentro do **Eixo Temático C**, foram feitas as seguintes perguntas:

1. Vocês costumavam consultar os relatórios anteriores antes de preencher um novo relatório?
2. Em alguns casos, vocês demonstraram certo aborrecimento quando o pesquisador insistia muito em algum problema, ao passo que, em outros problemas, isso não ocorreu mesmo quando passavam de 5 relatórios. Por que isso acontecia?
3. Em relação ao tempo entre cada interação (ciclos de uma semana), vocês acham que poderia ter sido melhor? Como?
4. De que forma vocês acham que essa dinâmica poderia ser incorporada como atividade regular de uma disciplina? Por quê?

Optamos por uma entrevista coletiva (ou grupo focal), pois:

O objetivo do grupo focal é estimular os participantes a falar e a reagir àquilo que as outras pessoas do grupo dizem. É uma interação social mais autêntica do que a entrevista em profundidade [...], os sentidos ou representações que emergem são mais influenciados pela natureza social da

interação do grupo em vez de se fundamentarem na perspectiva individual, como no caso da entrevista em profundidade (GASKELL, 2000, p.75)

Além disso, a opção por uma entrevista coletiva nos pareceu mais adequada a partir da constatação, em decorrência do envolvimento do pesquisador com os sujeitos, de que alguns deles eram muito tímidos e, provavelmente, teriam dificuldade para se expressar no caso de uma entrevista individual, ainda mais com a presença da câmera.

No momento da entrevista, além de seguirmos as recomendações de Gaskell (2000) acerca da preparação e planejamento de entrevistas qualitativas, entregamos aos alunos os relatórios de múltiplas entradas que eles preencheram ao longo de todo o ano.

A Entrevista Coletiva foi realizada no dia 30 de agosto de 2007, com o reinício das aulas do semestre seguinte ao que foi utilizado para a coleta dos Relatórios de Múltiplas Entradas. Ela foi realizada em uma das salas do Departamento de Matemática e teve duração um pouco inferior a uma hora.

Outro detalhe importante da Entrevista Coletiva diz respeito aos participantes. Como os alunos foram apenas convidados a participar dessa entrevista, apenas seis dos dez sujeitos da pesquisa compareceram. Vale salientar que esses seis estão entre os sete que demonstraram maior assiduidade nas atividades desenvolvidas com os Relatórios de Múltiplas Entradas.

Apesar de não contarmos com a presença de todos os alunos, a entrevista foi rica em termos de conteúdo, e foi possível explorar com qualidade todos os tópicos que havíamos previsto na elaboração do roteiro.

A entrevista foi filmada e está disponível em formato digital (DVD) como anexo da Dissertação (Anexo C). Além da transcrição dos trechos considerados de interesse para a Análise dos Dados, dividimos o vídeo da Entrevista em capítulos, de forma que os trechos que forem citados possam ser acessados facilmente em um aparelho de DVD ou software para reprodução desse formato, a partir de sua numeração.

## CAPÍTULO 3

### Discussão e Análise dos Dados

Com o intuito de caminhar na direção do objetivo desta pesquisa - Evidenciar as potencialidades da Dinâmica RCR como um recurso didático-pedagógico para o ensino e aprendizagem de Matemática - apresentaremos neste capítulo a análise e a discussão dos dados coletados. Antes disso, contudo, convém uma consideração sobre a maneira como conduzimos essa análise.

Durante a Coleta dos Dados, à medida que cada resolução era lida e relida para a elaboração dos comentários, notamos que estávamos o tempo todo interpretando o conteúdo dos Relatórios preenchidos pelos sujeitos da pesquisa em busca de interpretações e inferências sobre as condições em que aquilo havia sido produzido pelo aluno. Como salienta Cury (2007):

Ao analisar erros dos alunos [...], notei que, independentemente das teorias que fundamentavam as pesquisas e da forma como as respostas eram apresentadas, eu estava analisando o *conteúdo* da produção, ou seja, empregando uma metodologia de análise de dados conhecida como *análise de conteúdo*. (p. 61)

Essa metodologia, apesar de ser naturalmente empregada sempre que alguém busca compreender não apenas o conteúdo de uma mensagem, mas também as condições nas quais esta fora produzida por uma pessoa, grupo ou civilização, é conhecida como “Análise de

Conteúdo”, e tem como marco na sua elaboração teórica os trabalhos de Laurence Bardin.

Bardin (1979) definiu a Análise de Conteúdo da seguinte maneira:

Designa-se sob o termo análise de conteúdo: um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção [...] dessas mensagens. (p. 42)

Isso posto, notamos que, além de termos utilizado a Análise de Conteúdo durante a própria Coleta dos Dados, enquanto analisávamos as respostas dos sujeitos para elaborar os comentários, também a empregamos no momento da Análise dos Dados. Dizemos isso, pois identificamos no nosso trabalho essencialmente as mesmas etapas salientadas por Bardin (1979) para a Análise de Conteúdo: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados.

Na primeira etapa – pré-análise - nosso objetivo era nos impregnarmos dos dados coletados de forma a identificar características gerais, estabelecer os objetivos e hipóteses da análise e definir quais seriam as resoluções que seriam discutidas com mais profundidade e quais seriam utilizadas para ilustrar os fenômenos que pretendíamos destacar.

Na segunda etapa - exploração do material - após eleger os fenômenos de interesse e os casos que utilizaríamos para discutí-los, buscamos explorar com mais profundidade cada um destes, não somente analisando-os isoladamente, mas também buscando paralelos com outros dados coletados na entrevista e presentes em outras resoluções.

Para então, na terceira etapa - tratamento dos resultados - interpretarmos os dados selecionados e tecermos algumas conclusões que emergiram a partir deles, referentes aos objetivos da pesquisa.

Nas seções a seguir faremos a análise e a discussão dos dados coletados, enfocando em cada uma delas um fenômeno de interesse em termos dos objetivos desta pesquisa. Durante essa discussão, lançaremos mão de algumas resoluções, de alguns dos sujeitos, as quais consideramos mais significativas em termos do fenômeno em questão, bem como das falas dos sujeitos registradas na entrevista.

### 3.1. A Questão da Análise de Erros

Compreender os motivos que levam um aluno a cometer um determinado erro – e estamos pensando em erro da forma como definimos na Seção 1.2.2, ou seja, como tudo aquilo que não é compatível com a Matemática que se deseja ensinar – é, sem sombra de dúvidas, um objetivo patente em Educação Matemática, tanto na esfera da prática docente como em pesquisas acadêmicas.

Radatz (1979), por exemplo, atacou o problema frontalmente e propôs uma classificação que se pauta pela causa do erro. Movshovitz-Hadar et al. (1987) usaram uma abordagem diferente ao classificar os erros de acordo com sua manifestação operacional, mas deixaram claro em alguns momentos que seu objetivo último era compreender as causas destes. Graeber e Johnson (1989) trouxeram uma vasta revisão de pesquisas envolvendo análise de erros e propuseram uma separação de acordo com causas de caráter cognitivo. E Cury (2007), por sua vez, focou suas análises nos tópicos específicos de conteúdo que tenham levado o aluno a cometer um determinado erro.

Como explicitado na Introdução, um dos objetivos originais desta pesquisa era partir da classificação proposta por Movshovitz-Hadar et al. (1987) em direção a elementos que estivessem relacionados com a causa dos erros. Porém, com a evolução da pesquisa nosso foco se ampliou para o processo de resolução de problemas como um todo e, posteriormente, se concentrou nas potencialidades da Dinâmica RCR como um recurso didático-pedagógico para o professor de Matemática.

Em particular, entendemos que os dados coletados nesta pesquisa nos mostram que essa dinâmica metodológica pode ser especialmente interessante para a área de Análise de Erros, tanto na esfera da prática docente como em pesquisas acadêmicas, por ser capaz de fornecer informações valiosas para a compreensão da causa dos erros cometidos por alguns dos nossos sujeitos.

Para ilustrar essa nossa idéia, faremos a apresentação, análise e discussão da resolução proposta pelo aluno AN acerca do problema B.



### 3.1.1. Problema B resolvido pelo aluno AN

Os relatórios relativos a esse bloco de interações podem ser lidos no arquivo B.pdf dentro da pasta AN, disponível no CD-ROM, anexo a esta dissertação. Todas as figuras inseridas ao longo da análise foram extraídas desse mesmo arquivo.

Retomando o enunciado do problema B:

Seja  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  e  $g(x) = |x|$  .  
 a) Calcule  $f \circ g(x)$  e faça seu gráfico.  
 b) Compare o gráfico de  $f \circ g(x)$  o gráfico de  $f(x)$  .

Vale lembrar que o objetivo desse problema era o de investigar a composição de funções envolvendo uma função modular, e o impacto que essas composições têm no gráfico da função. O desdobramento que havíamos planejado para esse problema consistia em pedir que o aluno analisasse também a composição inversa entre as duas funções dadas para, depois, comparar os gráficos obtidos, tendo em mente o gráfico da  $f(x)$  original.

Esse problema foi proposto ao aluno AN logo no início da Coleta dos Dados, quando a disciplina ainda estava retomando conceitos do chamado Pré-Cálculo, e a professora já havia ministrado uma aula sobre Composição de Funções.

#### Primeiro Relatório

O que se nota no primeiro relatório é que o aluno expressou corretamente a forma algébrica da composição de funções, mas, no momento de esboçar o gráfico, o fez de maneira incorreta, como indicado na figura abaixo<sup>25</sup>.

---

<sup>25</sup> Optamos por não corrigir os erros de português cometidos pelos sujeitos ao longo da Coleta dos Dados para evitar que as discussões perdessem o foco matemático, e mantivemos os erros cometidos nos trechos que apresentaremos ao longo da Dissertação.

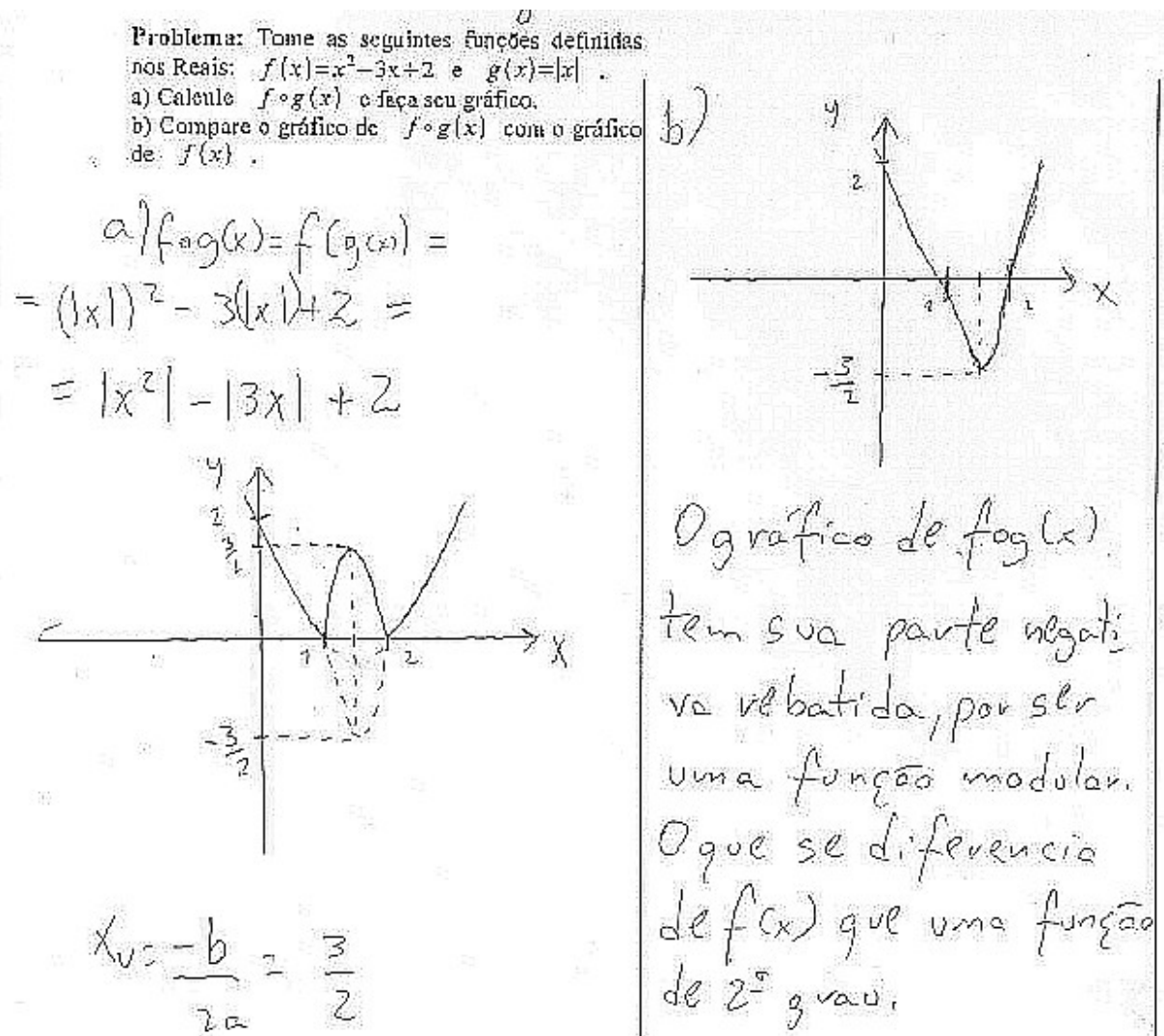


Figura 2: Resolução apresentada pelo aluno AN no primeiro relatório

Note que o aluno não aparenta ter calculado vários pontos da função, mas apenas as duas raízes e o vértice da parábola. A partir desses três pontos o aluno esboçou o gráfico da função de segundo grau envolvida e depois “tornou positiva” a parte que estava abaixo do eixo  $x$ , como ele próprio explica no comentário registrado na figura acima.

A resposta dada nos fez inferir que o aluno, apesar de dominar a manipulação algébrica envolvida no problema, fizera alguma associação incorreta entre a idéia de que “o módulo é sempre positivo” e a função dada, devido a alguma rigidez de raciocínio (RADATZ, 1979).

Com isso em mente, o pesquisador fez um comentário com o intuito de tornar o erro um “observável” (PINTO, 2000) para o aluno, ou seja, tentou fazer com que o aluno tomasse consciência do erro que cometera. Eis o comentário:

Em relação ao item a), se tomarmos  $x=3/2$ , temos que  $f \circ g (3/2) = -1/4$ . O que parece entrar em contradição com o gráfico que você fez para  $f \circ g (x)$ . Você concorda? Onde pode estar o problema? (arquivo /AN/B.pdf – p. 1)

Note também que o aluno escreveu, no final da primeira coluna, uma equação para o cálculo de  $X_v$ . Esse cálculo pode ser identificado como uma fórmula muito comum no Ensino Médio para cálculo da coordenada  $X$  do vértice de uma parábola. Porém, os valores estão incorretos. Apesar de não ter sido feita nenhuma intervenção direta do pesquisador em relação a esse erro específico, o aluno o corrigiu no terceiro relatório.

### Segundo Relatório

No segundo relatório, o aluno parece ter percebido a contradição, mas afirmou não ser capaz de superá-la:

Eu concordo, o problema pode estar no cálculo de  $f \circ g (x)$  ou na construção do gráfico. Mas eu não tenho condições em termos de bibliografia e de capacidade matemática, de obter a correta resolução (arquivo /AN/B.pdf – página 2)

Uma vez que o aluno se conscientizou da presença de um erro, mas não foi capaz de identificá-lo, como fica claro em sua fala anterior, o comentário seguinte do pesquisador foi mais específico, apontando onde ocorreu o erro e sugerindo uma forma de superá-lo que estivesse ao alcance do aluno:

A expressão que você obteve para  $f \circ g (x)$  está correta, porém, parece que na hora de traçar o gráfico você o fez a partir de alguma regra decorada ou algo do gênero. Eu sugeriria que você calculasse os valores de  $f \circ g (x)$  para alguns valores específicos de  $x$  e tentasse novamente traçar o gráfico (arquivo /AN/B.pdf – p. 2)

### Terceiro Relatório

Nesse relatório, o aluno seguiu a sugestão feita pelo pesquisador, o que pode ser constatado pelos pontos adicionais que ele marcou para desenhar o gráfico da função. Porém, ele insistiu no erro e fez o mesmo gráfico do primeiro relatório.

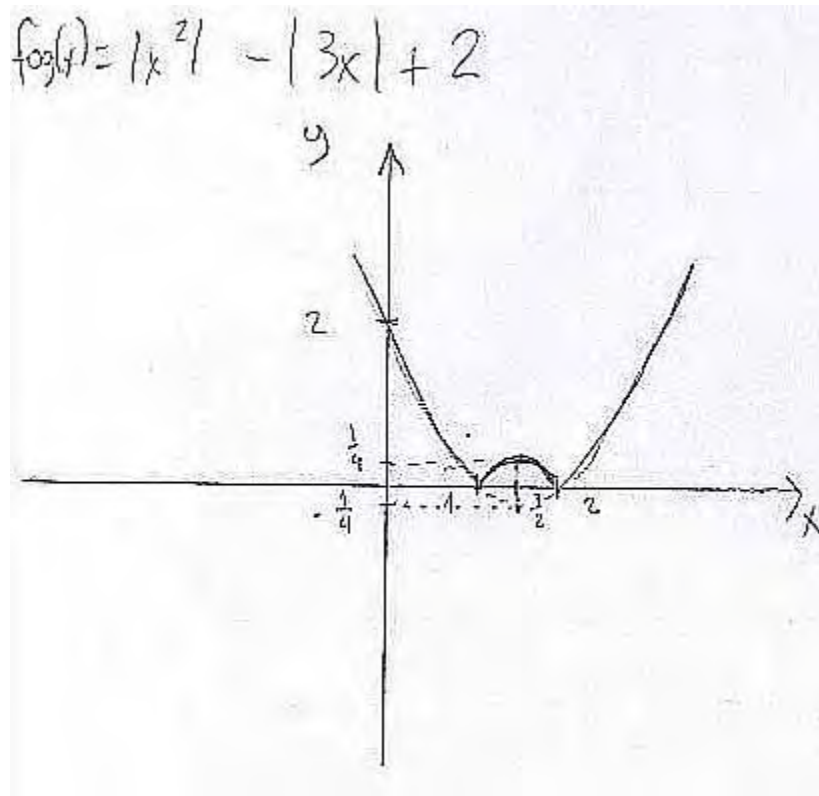


Figura 3: Gráfico esboçado pelo aluno no terceiro relatório

Em face à reincidência no erro relacionado ao esboço do gráfico, no comentário seguinte o pesquisador fez o gráfico de  $f \circ g(x)$ , explicitando o máximo possível o raciocínio utilizado e sugeriu ao aluno que fizesse o gráfico da mesma composição, porém, utilizando outra função de segundo grau ( $f(x) = x^2 - 4x + 4$ ).

#### Quarto Relatório

O aluno abriu o relatório admitindo “uma certa deficiência com funções modulares” (arquivo /AN/B.pdf – página 4), e conseguiu esboçar o gráfico pedido, apesar de cometer um erro claramente executivo no cálculo das raízes da função (2 e -2 ao invés de 4 e -4).

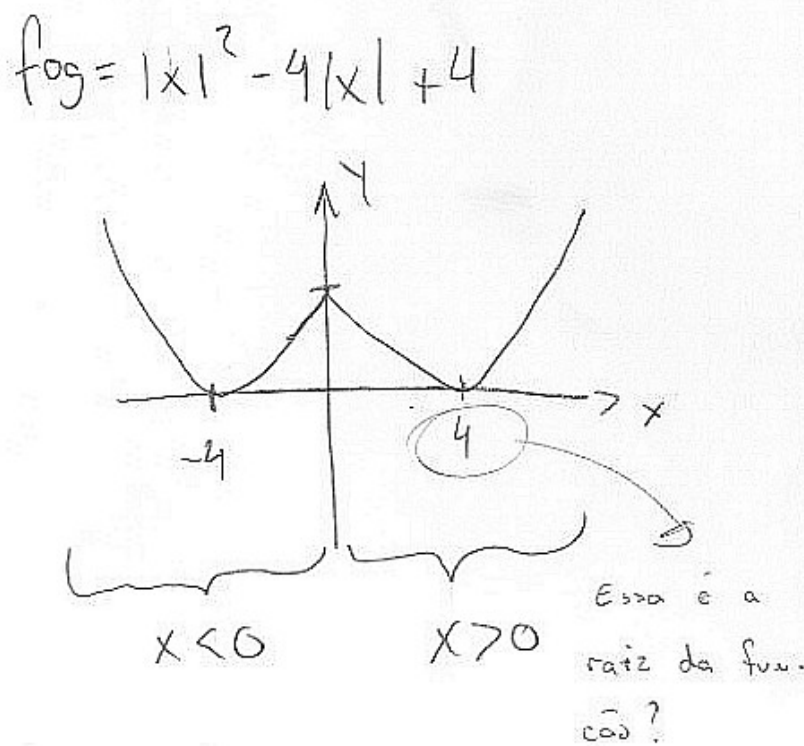


Figura 4: Gráfico esboçado pelo aluno com base no comentário anterior do pesquisador

A resposta dada pelo aluno está correta, e nota-se que ele apresentou a resposta de maneira muito próxima à que foi sugerida pelo pesquisador no comentário anterior.

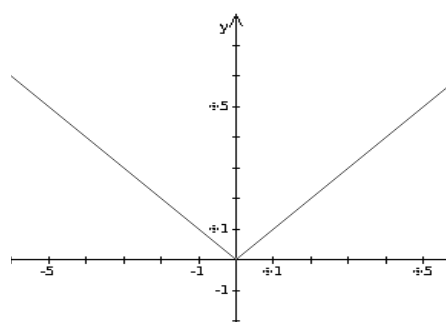
Contudo, o que mais chama atenção nesse relatório é o comentário deixado pelo sujeito logo após a resolução: “você pode me mostrar um exemplo em que há rebatimento do gráfico em relação ao eixo y?” (arquivo /AN/B.pdf – p. 4).

Esse comentário deixado pelo sujeito foi fundamental para a nossa compreensão da causa do erro. A hipótese de a causa estar relacionada a aspectos algébricos havia sido descartada em função dos sucessivos acertos na expressão algébrica dada pelo aluno nos relatórios 1, 3 e 4. A reincidência no erro no relatório 3, mesmo após ter calculado outros pontos do gráfico antes de esboçá-lo, nos fez levantar a hipótese de que o aluno poderia estar preso a uma particularização incorreta da noção de que “módulo é sempre positivo”, o que nos levaria a uma causa de caráter conceitual. Porém, esse último pedido feito pelo aluno nos mostrou que, na verdade, o aluno estava preso a uma imagem prototípica do gráfico de uma função modular.

Graeber e Johnson (1990) investigaram esse erro no contexto da Geometria associado a “Imagens de Referência” que acabam servindo de protótipos que limitam a concepção que o

aluno possui de um determinado conceito. Segundo os autores, “alunos freqüentemente se baseiam nessas imagens originais ou prototípicas para identificar e descrever outras imagens semelhantes” (GRAEBER e JOHNSON,1990, p. 4-3i).

Apesar de se tratar de uma descrição baseada em erros em Geometria, entendemos que o mesmo estava ocorrendo com esse aluno em relação à imagem prototípica de uma função modular, e esse fato o levou a insistir no gráfico que fez no primeiro relatório. É de se notar que o aluno parecia desprezar a expressão algébrica, utilizando-a apenas para calcular pontos estratégicos que permitam a ele esboçar o gráfico, de forma que ele se baseava em alguma imagem prototípica quando esboça o gráfico.



*Figura 5: Função Modular Prototípica*

Não diremos que se trata de um erro estritamente conceitual, pois a limitação do aluno está associada a uma imagem prototípica que de alguma forma está relacionada com o conceito em questão. Como reforçando Graeber e Johnson (1990), muitas vezes o aluno demonstrava um domínio satisfatório dos conceitos envolvidos em algum outro contexto, mas falhava quando este surge atrelado a uma imagem.

Em resposta ao pedido do aluno, o pesquisador, ao invés de mostrar um exemplo, sugeriu a ele que analisasse o que ocorria com o gráfico de  $g \circ f(x)$ .

### Quinto relatório

Na resposta ao comentário do pesquisador, o aluno acertou tanto a expressão algébrica como a forma gráfica da função  $g \circ f(x)$ , porém, vale lembrar que a questão foi colocada depois de a resposta ter sido indiretamente dada pelo próprio pedido do aluno.

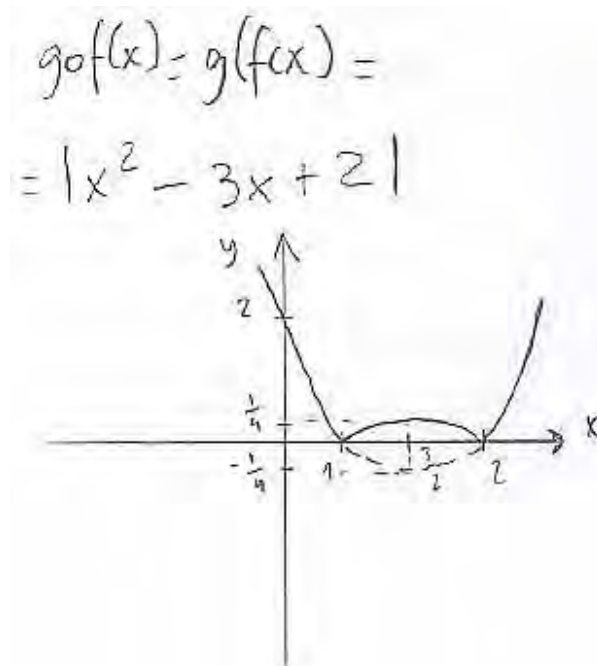


Figura 6: Resposta dada pelo aluno no quinto relatório

Para concluir as interações acerca desse problema, o pesquisador lançou uma última questão pedindo ao aluno para comparar os gráficos das composições  $fog(x)$  e  $gof(x)$ . Eis a resposta do aluno:

A função  $fog(x)$  se diferencia de  $gof(x)$ , pois em  $fog$  apenas a variável  $x$  está em módulo, ou seja, o módulo influencia na reflexão de todo o gráfico. Já  $gof$  está com toda a expressão algébrica em módulo, que resulta na reflexão de parte do gráfico (arquivo /AN/B.pdf – página 5)

Pela resposta, podemos notar que o aluno compreendeu o efeito algébrico de uma composição com função modular, mas não foi capaz de associá-lo corretamente com o gráfico da função. É o caso de notar que o aluno fez uma associação ao mesmo tempo vazia e incorreta entre a maneira como o módulo se mostra na expressão algébrica e o que isso causa na representação gráfica.

### 3.1.2. Discussão

Em termos da compreensão dos erros cometidos, com base na análise apresentada, acreditamos que o erro principal advém de uma imagem prototípica (GRAEBER e JOHNSON, 1990) do gráfico de uma função modular. Segundo os autores, “alunos

freqüentemente se baseiam nessas imagens originais ou prototípicas para identificar e descrever outras imagens semelhantes” (p. 4-3i). Essas imagens prototípicas acabam por limitar a concepção que o aluno tem do conceito em si, gerando o que Radatz (1979) chamou de “Rigidez de Raciocínio”.

Porém, concordamos com este autor ao afirmar que:

é muito difícil fazer uma separação definitiva entre as possíveis causas de um mesmo erro, o mesmo problema pode suscitar erros de diferentes fontes e o mesmo erro pode surgir de diferentes processos de resolução de problemas (RADATZ, 1979, p. 170-171 – tradução nossa)

E, ao mesmo tempo, entendemos que a possibilidade de interação proporcionada pela dinâmica que empregamos para coletar os nossos dados permitiu uma aproximação mais efetiva das causas e fontes dos erros que nos propusemos analisar, pois, ao interagirmos com o aluno, acessamos de maneira mais direta o processo de resolução do problema como um todo, e não apenas os resultados finais.

Por exemplo, a compreensão de que o erro deve advir de alguma imagem prototípica do gráfico de função modular foi construída com base na análise do conjunto de interações, especialmente quando o aluno insistiu no gráfico, mesmo quando algumas de suas características foram colocadas em xeque (relatórios 1, 2 e 3), de modo que qualquer análise pontual padeceria das informações oferecidas pelo todo.

Além disso, ao longo das interações surgiram alguns outros erros, como no cálculo da coordenada X do vértice da parábola, no primeiro relatório, e no cálculo das raízes, no quarto relatório, que acabam se mostrando de menor importância quando o aluno os corrige sem ser necessária alguma intervenção direta por parte do pesquisador. Porém, como um professor poderia perceber que se tratam de erros de menor importância sem lançar mão das outras interações?

Questões como essas reforçam os méritos da Dinâmica RCR como um recurso didático-pedagógico para o professor, uma vez que possibilita uma melhor compreensão do pensamento matemático de seus estudantes.

Nas análises que apresentaremos a seguir, discutiremos com mais atenção os fatores que acreditamos estarem proporcionando essa melhor compreensão do erro cometido: a possibilidade de analisar e interferir no processo de resolução de problema como um todo (análise apresentada em 3.2), a qualidade do diálogo que se estabelece entre professor e aluno



(análise apresentada em 3.3) e a individualidade proporcionada pela dinâmica (análise apresentada em 3.4).

Além disso, a constatação de que a Dinâmica RCR pode proporcionar uma melhor compreensão dos erros cometidos pelo sujeito da pesquisa aponta para essa dinâmica como um recurso metodológico em potencial para pesquisas envolvendo Análise de Erros em Educação Matemática.

Como já foi dito anteriormente, ao lançarmos mão desse procedimento para a coleta das resoluções, estamos inserindo um elemento até então inédito dentro das pesquisas que estão de alguma forma envolvidas com Análise de Erros: a interação entre sujeito e pesquisador.

Tradicionalmente, essa interação, quando ocorre, costuma se restringir a alguma entrevista realizada posteriormente à coleta das resoluções, ao passo que, no nosso caso, temos uma interação ocorrendo, de maneira discreta<sup>26</sup>, é claro, mas ao longo do próprio processo de construção da resolução do problema. E essa possibilidade permite ao pesquisador interagir com o próprio erro, e todas as suas nuances, durante a própria ocorrência deste, abrindo portas para uma compreensão mais completa das eventuais causas.

---

<sup>26</sup> Estamos usando o termo “discreta” como oposto do termo “contínua”.

### **3.2. Diferentes Aspectos do Processo de Resolução de Problemas**

Como dito na Introdução, ao longo da evolução desta pesquisa, nosso foco foi gradativamente se expandindo dos erros aos processos de resolução de problemas de uma maneira mais geral e, mesmo que tenhamos focado nossos objetivos na Dinâmica RCR, nosso olhar agora não está mais restrito aos erros, mas sim aos diferentes aspectos que compõem o processo de resolução de um problema matemático.

Um exemplo de trabalho de fundamental importância sobre os processos de resolução de problema foi desenvolvido por Schoenfeld (1985). Após um acompanhamento cuidadoso de duplas de “resolvedores” de problemas, tanto novatos quanto experientes, o pesquisador chegou a um conjunto de quatro aspectos que compõem o pensamento matemático durante a resolução de um problema: recursos, heurísticas, controle e concepção de Matemática<sup>27</sup>.

Como dissemos na Seção 1.2.1, é interessante observar que, apesar de o autor não assumir o seu trabalho como Análise de Erros, as suas principais conclusões se baseiam na análise de “casos desviantes”, ou seja, de casos nos quais os sujeitos se comportam de maneira diferente daquela esperada e esses casos, em sua maioria, envolvem erros ou seqüências de erros – no sentido que definimos na Seção 1.2.2.

Do nosso ponto de vista, isso reforça a relação entre trabalhos focados na análise dos erros e trabalhos que abordam os processos de resolução de problemas de maneira mais geral. E o que pretendemos mostrar através da análise a seguir é que o recurso metodológico empregado nesta pesquisa, a Dinâmica RCR, nos permite enxergar além dos erros e suas causas, permitindo-nos entrar em contato com outros aspectos que compõem o processo de resolução de um problema, de maneira muito próxima da proposta de Schoenfeld (1985).

Para ilustrar esse nosso ponto de vista, vamos apresentar a resolução do problema A apresentada pelo sujeito AN.

#### **3.2.1. O problema A resolvido pelo aluno AN**

Os relatórios relativos a esse bloco de interações podem ser lidos integralmente no arquivo A.pdf, dentro da pasta /AN/, disponível no CD-ROM, anexo a esta Dissertação.

---

27 Não faz parte dos objetivos desse texto explorar esses quatro aspectos detalhadamente.

Todas as figuras inseridas ao longo da análise foram extraídas desse arquivo.

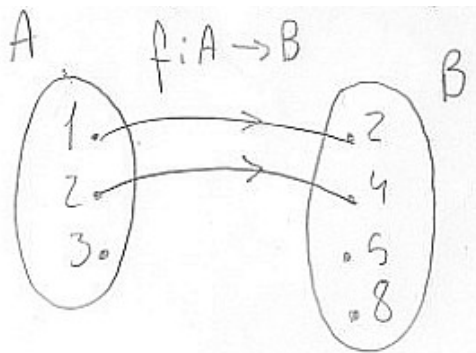
Retomando o enunciado problema A:

Você acha que existe uma função do conjunto  $\{1, 2, 3\}$  para o conjunto  $\{2, 4, 5, 8\}$ ? Em caso positivo, dê um exemplo.

O nosso intuito ao escolher esse problema era gerar discussões acerca da definição de função e de conceitos correlatos, como domínio, imagem, bijetividade, expressão algébrica etc... Outro detalhe importante sobre o problema foi que tivemos o cuidado de escolher dois conjuntos que não admitissem o estabelecimento de uma relação algébrica imediata.

### Primeiro e Segundo Relatórios

Posto o problema, o aluno fez o seguinte diagrama:



*Figura 7: Diagrama dos conjuntos A e B*

E seguiu dizendo que “não é possível estabelecer uma relação em que cada elemento de A tenha pelo menos um correspondente em B” (arquivo /AN/A.pdf - página 1).

A partir dessa resposta, não ficou claro o motivo que levou o aluno a não associar o elemento 3 do conjunto A com algum elemento do conjunto B. Porém, inferimos que o aluno tenha procurado pela relação de “dobro” e, ao não encontrar a imagem do elemento 3, descartou a existência de uma função entre esses dois conjuntos.

Como resposta, o pesquisador fez o seguinte comentário:

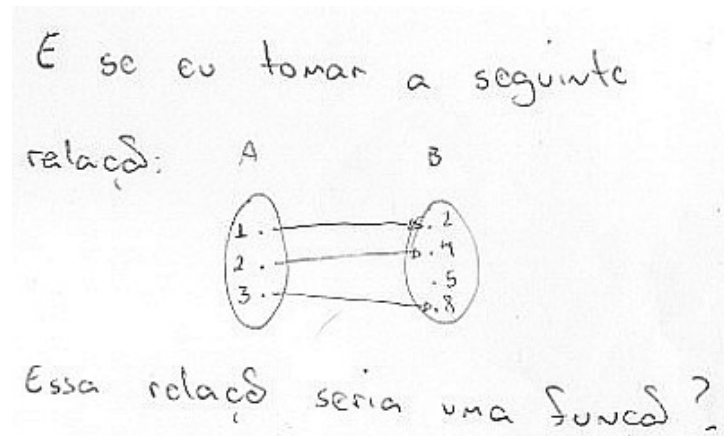


Figura 8: Primeiro comentário deixado pelo pesquisador

No relatório seguinte, o aluno disse que:

No conceito teórico, essa relação seria uma função, pois cada elemento de A, tem um único correspondente em B. Mas não existe uma função que relacione esses valores. (arquivo /AN/A.pdf - página 1)

Nessa resposta o aluno faz o uso do termo função duas vezes e, aparentemente, com significados diferentes. Porém, ao invés de considerarmos isso como uma inconsistência a ser corrigida, entendemo-la inicialmente como o reflexo de alguma compreensão conceitual incorreta.

A frase “Mas não existe uma função que relacione esses valores” (arquivo /AN/A.pdf - página 1) nos levou a crer que o aluno estivesse à espera de uma expressão algébrica que relacionasse explicitamente os termos envolvidos e, como o aluno não reconheceu nenhuma, negou a relação proposta como sendo uma função, o comentário seguinte do pesquisador foi exatamente no sentido de tornar explícita essa expressão algébrica:

É se eu sugerisse a função  
 $f(x) = 2^x$ , ela seria válida para  
 esses conjuntos?

Além disso, você acha que neces-  
 sariamente uma função precisa de  
 uma expressão algébrica?

O que você diria da seguinte função?

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x = 1 \\ 4 & \text{se } x = 2 \\ 5 & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

Figura 9: Segundo comentário deixado pelo pesquisador

O objetivo desse comentário foi identificar explicitamente qual a concepção que o aluno possuía de função, por isso foram dados um exemplo com uma expressão algébrica convencional e outro com uma não convencional definida por partes.

### Terceiro Relatório

A partir desse relatório, nota-se claramente que a comunicação entre aluno e pesquisador mudou de tom e assumiu um caráter mais discursivo, no qual ambos negociaram significados sobre o que se entende por função.

A resposta dada pelo aluno ao comentário acima pode ser dividida em três partes, cada qual respondendo a uma das perguntas colocadas pelo pesquisador:

A função  $f(x) = 2^x$  é válida para esses conjuntos, pois relaciona todos elementos de A em B.

Figura 10: Primeira parte da resposta do terceiro relatório

Sim, é necessária uma expressão algébrica. Apesar de algumas vezes não se pode notá-la, mas é imprescindível. Não faria sentido estabelecer algo em função de outro, sem referencial algum.

Figura 11: Segunda parte da resposta do terceiro relatório

A função descrita, ao meu ver, é falsa. Não possui sentido matemático, ou seja, foi determinada sem uma prova aparente.

Figura 12: Terceira parte da resposta do terceiro relatório

A partir dessas respostas, especialmente da terceira, apesar de o aluno ter dito ser necessária uma expressão algébrica, inferimos que o grande problema não é esse, mas sim

essa busca por algum “sentido” no momento que se estabelece uma função.

No comentário seguinte, o pesquisador pede que o aluno discuta a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in Q \\ 0, & \text{se } x \notin Q \end{cases}$$

A função foi escolhida por ser extremamente importante para a Matemática e, ao mesmo tempo, não ter uma expressão convencional.

#### Quarto Relatório

A resposta do aluno a esse comentário foi a seguinte:

no seu exemplo mostrado, existe uma condição ao menos para que um elemento esteja em função do outro. Não se pode simplesmente determiná-lo sem um gráfico, expressão algébrica, condição de existência, ou seja, sem limitar um universo para que esta exista (arquivo /AN/A.pdf - página 4)

Nesse momento, fica claro para nós que a limitação da concepção do aluno não está exatamente na necessidade de uma expressão algébrica, mas na presença de algum “sentido matemático” explícito que justifique o estabelecimento da função da forma que ela é. Essa limitação, no nosso ponto de vista, vai além de uma limitação conceitual em direção a algo relacionado com a concepção de Matemática desse sujeito, e essa concepção o impede de aceitar objetos de caráter mais abstrato como válidos. Essa nossa percepção irá se cristalizar com os próximos relatórios.

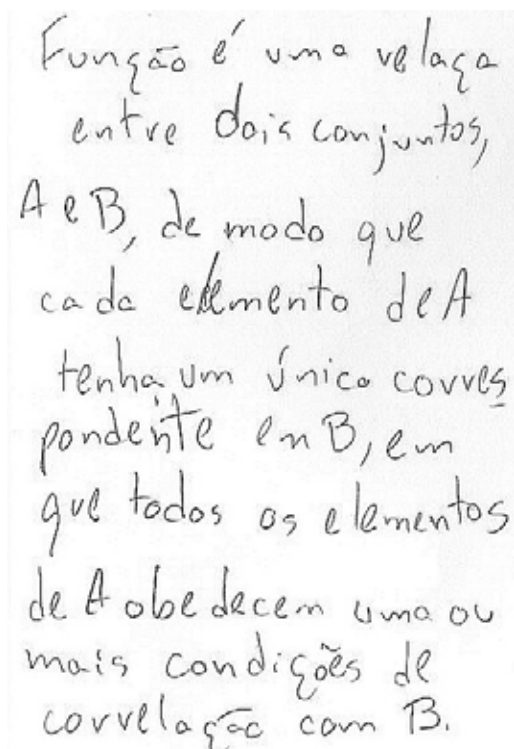
#### Próximos Relatórios

A discussão entre aluno e pesquisador se estendeu por mais 3 relatórios, nos quais o pesquisador pediu que o aluno desse a sua definição de função e, confrontando-a com a definição formal, buscasse compreender o que seria esse “sentido matemático” e qual a necessidade de estabelecê-lo.

Porém, a discussão começou a perder força em meio a uma dispersão semântica em torno dos termos empregados pelo aluno, e, a partir do quinto relatório, as informações

obtidas não acrescentaram muito mais à compreensão do problema. Por isso, optamos por não discutir cada relatório isoladamente.

Em um dos últimos, o aluno colocou a seguinte definição de função como sendo a dele:



Função é uma relação entre dois conjuntos,  $A$  e  $B$ , de modo que cada elemento de  $A$  tenha um único correspondente em  $B$ , e em que todos os elementos de  $A$  obedecem uma ou mais condições de correlação com  $B$ .

Figura 13: Definição de função dada pelo aluno

Analisando essa definição, notamos que o aluno tinha conhecimento da definição formal de função, porém, acrescentava uma condição (“todos os elementos de  $A$  obedecem uma ou mais condições de correlação com  $B$ ”) extra que parece estar relacionada com a busca por um “sentido” quando se estabelece uma função.

A partir de então, não nos parece coerente atribuir ao erro presente na figura 13 uma causa de natureza conceitual, mas sim a algum aspecto de natureza axiológica da concepção de Matemática mantida pelo aluno ou, de acordo com o que propôs Schoenfeld (1985), ao seu Sistema de Crenças<sup>28</sup>.

Para compreender o que o autor definiu como sendo Sistema de Crenças, vamos analisar o caso que ele usa para ilustrar esse aspecto:

O problema a ser resolvido pelos sujeitos é: “São dadas duas retas concorrentes e um

<sup>28</sup> O termo usado originalmente em inglês é *Belief Systems*.



ponto P em uma delas. Traçar, usando régua e compasso, uma circunferência tangente às duas retas passando por P” (p. 15).

Ao analisar o comportamento de uma dupla que trabalhou com esse problema, o autor percebeu que eles se restringiam a estratégias de resolução que se assemelhavam a tentativa e erro: os estudantes faziam construções que dominam, na esperança de que alguma resultasse em algo que parecesse (visualmente) satisfazer as condições do problema. Além disso, os alunos não justificavam suas construções através de raciocínios dedutivos, mas sim por meio de impressões visuais sobre as propriedades das construções realizadas.

Esse comportamento poderia ser atribuído a alguma limitação em um dos três aspectos já apresentados pelo autor: a) recursos: porém, os alunos foram capazes de traçar perpendiculares, bissetrizes e mediatrizes com relativa facilidade, b) heurísticas: porém, os estudantes haviam resolvido anteriormente problemas semelhantes a esse sem dificuldades com as heurísticas envolvidas, ou c) controle: porém, os estudantes demonstravam controle das suas ações, objetivos e decisões tomadas durante a resolução.

Na insuficiência desses aspectos e munido da análise de uma série de outros casos similares, o autor atribuiu o comportamento da dupla a uma concepção “empirista ingênua”<sup>29</sup> de Matemática, ou seja, por terem essa concepção de Matemática os alunos restringiram as possibilidades de abordagem do problema a tentativas empíricas.

De acordo com o autor, “a visão que alguém possui da matemática modela a maneira como esse alguém faz matemática” (p. 44), e essa “visão de Matemática”, é o que o autor define como sendo o “Sistema de Crenças”.

Retomando a nossa análise, entendemos que essa busca constante por “sentido” no estabelecimento de uma função é resultado de uma concepção que não aceita definições de caráter puramente abstrato para lidar com objetos matemáticos. Nota-se que a única relação que o aluno negou como função ao longo de todas as interações é a sugerida pelo pesquisador no primeiro relatório:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x=1 \\ 4, & \text{se } x=2 \\ 5, & \text{se } x=3 \end{cases}$$

O aluno justificou a sua não aceitação dizendo que “não faria sentido estabelecer algo

---

<sup>29</sup> O termo usado originalmente em inglês é *Naive Empiricism* e se caracteriza como o comportamento que se fundamenta em tentativas e erros sem nenhuma preocupação com raciocínios de caráter dedutivo.

em função de outro, sem referencial algum. A função descrita, a meu ver, é falsa. Não possui sentido matemático” (arquivo /AN/A.pdf, p. 3). Nota-se que, para o aluno, não importa o fato de a função cumprir as condições da definição, mas sim ter algum “sentido matemático”, por isso ele aceita todas as demais, afinal, ou elas possuem uma expressão algébrica explícita ou estão devidamente justificadas (como é o caso da função de separação entre racionais e irracionais). Quando o aluno apresentou a sua definição de função (figura 13), notamos que ele conhecia as condições da definição, mas acrescentava esse “sentido matemático” ao incluir a condição de que “todos os elementos de A obedecem uma ou mais condições de correlação com B”.

Essas colocações vão deixando claro que o aluno conhecia as condições da definição, mas buscava algo mais. Apesar das dificuldades relacionadas ao uso da linguagem matemática formal, entendemos que esse algo mais advém justamente de uma concepção ingênua de Matemática, que não se atém estritamente às definições formais dessa linguagem, buscando significados e sentidos que estão além desta para reconhecer como válidos os objetos em questão.

### 3.2.2. Discussão

Nosso objetivo com a análise desse caso não é comprovar ou refutar as nossas hipóteses sobre os elementos envolvidos – concepções de Matemática e a influência destas na resolução de problemas - mas sim mostrar que a metodologia empregada junto aos sujeitos nesta pesquisa, a Dinâmica RCR, é adequada para discutir aspectos mais gerais do processo de resolução de um problema matemático, do que os erros em si.

Se tomarmos como referência a proposta metodológica de Schoenfeld (1985), o *think aloud*<sup>30</sup>, temos um fator que deve ser considerado: o custo em termos de preparação dos sujeitos. De acordo com o autor, todos os sujeitos foram submetidos a um período de treinamento para se acostumarem a expressar aquilo que estavam pensando sobre o problema durante as sessões de coleta de dados.

É claro que esse método oferece a vantagem de acompanhar o processo de resolução do problema de maneira contínua, enquanto que a nossa proposta permite apenas comentários pontuais baseados nos registros deixados pelo sujeito. Porém, o *think aloud* é: a) um método

---

30 Técnica na qual os sujeitos são treinados e instruídos a falar em voz alta aquilo em que estiverem pensando acerca do problema durante a sua resolução.

intrusivo, pois cada intervenção do pesquisador interrompe e interfere diretamente no ato de resolução do problema, b) custoso, em função do treinamento necessário, e c) intimidador, por submeter o sujeito a filmagem e supervisão constante durante as sessões.

Por outro lado, a dinâmica RCR, se mostra como uma alternativa menos custosa e intrusiva, e muito mais natural ao ambiente escolar do que o *think aloud*, viabilizando a sua aplicação em ambiente escolar convencional. Concordamos com Powell (2001) quando ele disse que “escrever é uma tecnologia isenta e não intrusiva que permite aos alunos e professores capturar, examinar e reagir ao pensamento matemático” (p. 81).

Obviamente, os dados coletados com uma ou outra metodologia diferem qualitativamente, e o nosso objetivo aqui não é fazer nenhum juízo de valor entre essas duas possibilidades (até mesmo porque não são as únicas). Contudo, o que queremos mostrar é que a Dinâmica RCR é um recurso metodológico viável para compreender aspectos mais gerais envolvidos no processo de resolução de problemas em Matemática, tanto para pesquisas acadêmicas como para professores.

Em relação à resolução do problema propriamente dita, não fica evidente nenhum tipo de avanço por parte do aluno na direção da compreensão do conceito de função. Do nosso ponto de vista, isso decorre do fato de as nossas intenções com a utilização desse problema serem de caráter mais conceitual, diferentemente do que ocorreu com os demais.

A interação entre aluno e professor, portanto, teve uma ênfase maior na negociação do significado de função do que na resolução do problema de fato, o que não representa nenhum demérito, pelo contrário, apenas mostra que a Dinâmica RCR também possibilita esse tipo de diálogo, apesar de questões dessa natureza não terem sido intensamente exploradas neste trabalho.

### 3.3. Qualidade do Diálogo

Powell e Ramnauth (1992), ao analisarem a qualidade do diálogo em horários de atendimento extra-classe, concluíram que “questões de procedimentos e técnicas limitam o diálogo matemático” (p. 12) e, com isso, outras habilidades importantes para a aprendizagem de Matemática acabam ficando renegadas a segundo plano.

Olimpio Junior (2006), ao discutir a qualidade do diálogo no contexto de cursos convencionais de Cálculo nas Universidades Públicas brasileiras, nos disse que “na prática, não ocorre uma interação, mas apenas comunicação [...] e, pior, apenas num sentido: do professor para o aluno.” (p. 5) e, mais do que isso, quando essa comunicação se estabelece, o autor constata que:

a mera manipulação algébrica e algorítmica dos exercícios clássicos da disciplina [...] parece contribuir sistematicamente para deslocar a apreensão - e a apreciação - de seus significados conceituais para uma posição subalterna. (p. 21)

É com base nessas constatações que escolhemos analisar a resolução proposta pelo sujeito HE acerca do problema E com foco na qualidade do diálogo que se estabeleceu entre professor e aluno ao longo dos relatórios de múltiplas entradas.

#### 3.3.1. O Problema E resolvido pela aluna MA<sup>31</sup>

Os relatórios relativos a esse bloco de interações podem ser lidos integralmente no arquivo E.pdf, dentro da pasta /HE/, disponível no CD-ROM, anexo a esta Dissertação. Todas as figuras inseridas ao longo da análise foram extraídas desse arquivo.

O enunciado do problema é o seguinte:

---

31 O bloco de relatórios referentes a esse problema está disponível no anexo B dessa dissertação, no arquivo /MA/B.pdf

Uma estrela variável é aquela cujo brilho alternadamente cresce e decresce. Para a estrela variável mais visível, Delta Cephei, o período de tempo entre os brilhos máximos é de 5,4 dias, o brilho médio (ou magnitude da estrela) é de 4,0, e seu brilho varia de 0,35 em magnitude. Elabore uma função que modele o brilho de Delta Cephei como uma função do tempo.

Trata-se de um problema de modelagem de uma situação real, cuja solução convencional envolve uma função periódica do tipo seno ou cosseno. O problema foi proposto exatamente após os alunos da disciplina terem feito algumas atividades envolvendo transformações básicas em gráficos de funções conhecidas, como translações e deformações verticais e horizontais.

Como veremos a seguir, a aluna propôs uma solução diferente da convencional, lançando mão de uma função “serrote” definida por partes e, apesar da solução proposta envolver um número maior de detalhes técnicos e de manipulação algébrica, o diálogo entre pesquisador e aluno se manteve focado na construção e compreensão da resolução como um todo.

#### Primeiro Formulário

Já no primeiro relatório, a aluna delineou a estrutura geral da estratégia de resolução que se manteve até o último relatório, porém, cometeu alguns erros que parecem ter advindo de uma má interpretação do enunciado do problema, o que fica explícito a partir da leitura da explicação dada pela própria aluna logo em seguida.

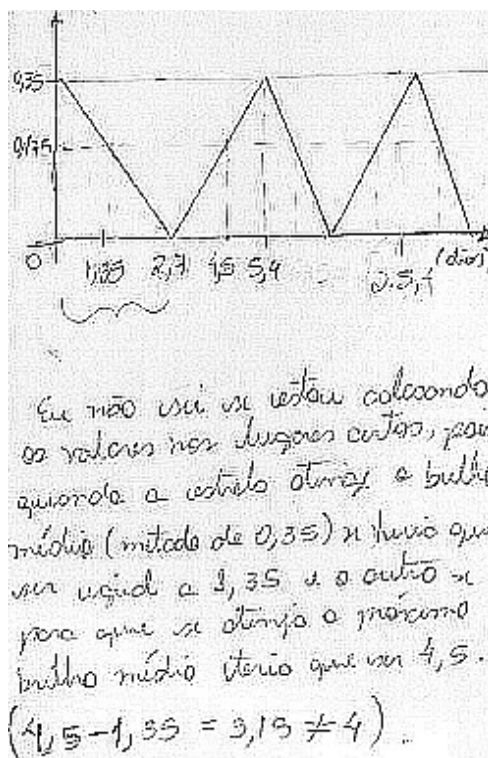


Figura 14: Resposta dada pela aluna no primeiro relatório

Em face dessas dificuldades expressadas pela própria aluna, o comentário deixado pelo pesquisador foi na direção de esclarecer as informações colocadas no enunciado e de incentivar a solução proposta, usando a função “serrote”, pedindo que a aluna pensasse não apenas na representação gráfica, mas também na expressão algébrica:

Veja que 0,35 é a magnitude do brilho, ou seja, a diferença entre os brilhos máximo e mínimo, e 4 é o valor médio do brilho. Além disso, tente pensar também na expressão algébrica da função, não apenas no gráfico (arquivo / MA/E.pdf – página 1)

### Segundo Relatório

Nesse relatório, a aluna já conseguiu ajustar o gráfico da função de acordo com os valores dados no enunciado, como podemos ver na imagem abaixo:

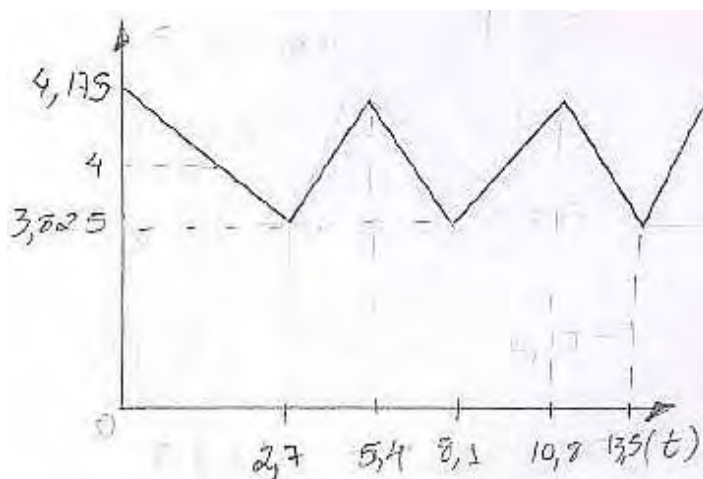


Figura 15: Gráfico apresentado no segundo relatório

Além disso, a aluna fez alguns cálculos esparsos de equações de retas envolvendo alguns dos valores representados no gráfico acima e afirmou “eu não consigo montar uma função para esta função periódica” (arquivo /MA/E.pdf – página 2). Pelos gráficos, tem-se a sensação de que a aluna não sabia exatamente quais valores utilizar para equacionar as retas presentes no gráfico.

Como resposta, o pesquisador sugeriu que a aluna começasse calculando a equação do primeiro trecho crescente e do primeiro trecho decrescente, para depois partir para uma equação geral definida por partes.

### Terceiro Relatório

Nesse relatório, após alguns cálculos, a aluna apresentou a seguinte expressão algébrica para o primeiro ciclo do gráfico proposto:

$$f(x) = \begin{cases} \bullet \frac{-0,35x + 4,175}{2,7} \\ \bullet \frac{0,35x + 3,475}{2,7} \end{cases}$$

1º ciclo

$$x \quad 0 \leq x \leq 2,7$$

$$x \quad 2,7 \leq x \leq 5,4$$

Figura 16: Expressão algébrica dada pela aluna no terceiro relatório

Logo após, a aluna colocou a seguinte questão: “Teria como fazer uma função por partes que poderia corresponder a todos os ciclos da função?”. Nota-se que esse seria naturalmente o próximo passo da resolução e, ao colocar o questionamento por conta própria, a aluna mostrou que estava conseguindo caminhar dentro do processo de resolução do problema a partir dos comentários deixados pelo pesquisador.

A partir dessa pergunta e da resposta dada pela aluna, o pesquisador deixa o seguinte comentário:

Talvez uma saída seja um recurso similar ao ' $2k\pi$ ' que se usa para descrever as soluções de identidades trigonométricas. Tente começar elaborando uma equação geral para os trechos crescentes (os decrescentes serão similares) usando uma variável  $k \in \mathbb{N}$  para diferenciar cada trecho (arquivo /MA/E.pdf – página 3)

É o caso de observar que o pesquisador buscou explicitar a sua sugestão através de um recurso tipicamente ensinado durante o Ensino Médio e que, portanto, deveria fazer parte do arsenal de conhecimentos da estudante.

#### Quarto e Quinto Relatórios

Nos dois últimos relatórios, a estudante realizou os últimos cálculos e correções necessários para a obtenção da expressão geral para a função desejada, que foi sintetizada por ela da seguinte forma:



$$f(x) \begin{cases} y_d = \frac{-0,35x + 4,175 + 0,7T}{2,7} \\ 2,7K \leq x < 2,7(K+1) \\ T = \left( \frac{2,7K + 1}{5,4} \right) \end{cases}$$
  

$$y_c = \frac{0,35x + 3,475 - 0,7T}{2,7}$$

$$2,7(K-1) \leq x < 2,7K; K \neq 0$$

$$T = \left( \frac{2,7K}{5,4} \right)$$
  

$$T = \text{Todos}$$
  

$$K \in \mathbb{N} \text{ (pares) e consideron}$$

$$\text{de } 0 \text{ um } n^\circ \text{ por.}$$

Figura 17: Expressão Geral proposta pela aluna no último relatório

Ressaltamos que há algumas imprecisões formais, como na definição da variável  $T$ , e algumas redundâncias, como a existência das variáveis  $T$  e  $k$ , que poderiam ser resumidas a apenas uma. Porém, mesmo apontando esses detalhes em seu último comentário, o pesquisador decidiu encerrar as interações em torno desse problema, uma vez que considerou que a aluna já havia compreendido a estratégia para a resolução do mesmo. Do ponto de vista do pesquisador, qualquer interação futura ficaria presa a detalhes formais e se afastaria dos aspectos mais importantes do processo de resolução do problema.

### 3.3.2. Discussão

Se analisarmos a primeira resposta dada pela aluna, da mesma maneira que seria feita

em uma correção convencional de prova ou lista de exercícios, considerar-se-ia a resposta como incorreta e, no máximo, poderia se levar em conta algum detalhe como o período da função que foi apontado corretamente no gráfico.

Se avançarmos e considerarmos a segunda resposta, apesar do gráfico estar correto, os cálculos esparsos deixados pela aluna não permitiriam ao professor concluir muita coisa sobre a expressão algébrica, o que significaria que a resolução não estaria completa. Porém, se olharmos para a resposta no último relatório, a menos de detalhes técnicos, teríamos uma solução correta, apesar de não convencional, para o problema enunciado. Mais ainda, se olharmos para toda a seqüência de interações, notamos claramente a evolução da aluna na elaboração da solução apresentada. Assim, as etapas da resolução evoluíram da percepção gráfica do comportamento da função, passando pelo estabelecimento de expressões algébricas de alguns trechos específicos e chegando até a generalização da função definida por partes, cada uma delas através dos comentários deixados pelo pesquisador, que, por sua vez, foram motivados pelas respostas e pelas próprias perguntas sugeridas pela aluna.

Quando olhamos para o comentário feito pela aluna no segundo relatório: “eu não consigo montar uma função para essa função periódica” (arquivo /MA/E.pdf – página 2), e depois para a função geral descrita no último relatório, evidencia-se a criação de Zonas de Desenvolvimento Proximal que permitiram à aluna, por meio da interação com o pesquisador, ir além dos conhecimentos já adquiridos na direção da aquisição de novas habilidades.

Retomando as idéias de Vigotski (2007):

o aprendizado desperta vários processos internos de desenvolvimento, que são capazes de operar somente quando a criança interage com pessoas em seu ambiente e quando em cooperação com seus companheiros. Uma vez internalizados, esses processos tornam-se parte das aquisições do desenvolvimento independente da criança. (VIGOTSKI, 2007, p. 103)

E com base nisso, Oliveira (1997), analisando o papel do ambiente escolar no desenvolvimento do indivíduo, concluiu que “o professor tem o papel explícito de interferir na zona de desenvolvimento proximal dos alunos, provocando avanços que não ocorreriam espontaneamente” (p. 62).

O que se evidencia com a análise desse caso é que a Dinâmica RCR possibilitou exatamente essa interferência, resultando na ampliação das possibilidades cognitivas da aluna e, conseqüentemente, na incorporação de novas habilidades ao seu aparato cognitivo.

Além disso, se tomarmos as idéias referentes à metáfora do Suporte como ferramentas

analíticas para a interação descrita anteriormente, poderemos detectar as quatro características levantadas por Stone (1998):

1. Envolvimento Mútuo: o *feedback* dado constantemente pelo pesquisador e as perguntas colocadas pela própria aluna evidenciam o envolvimento de ambas as partes no processo de resolução do problema proposto;
2. Ajuste Contínuo: os comentários deixados pelo pesquisador ao longo das interações iam se ajustando às respostas e às perguntas deixadas pela aluna;
3. Ampla Variedade: o Suporte oferecido pelo pesquisador variou desde intervenções mais diretas relacionadas a erros localizados (como no primeiro e quarto relatórios) até orientações mais gerais relacionadas ao direcionamento da atividade da aluna (como no terceiro relatório);
4. Retirada Gradativa: à medida que a aluna se mostrava capaz de realizar certas partes da resolução, o foco do Suporte se deslocava para a etapa seguinte, buscando sempre ser mais geral e menos específico em relação ao conteúdo do problema;

Essa identificação nos permite caracterizar a relação que se estabeleceu entre pesquisador e aluna como uma relação de Suporte, como proposta originalmente por Wood et al. (1976), pois, ao interagir com a aluna, como fica evidenciado neste comentário: “Talvez uma saída seja um recurso similar ao ' $2k\pi$ ' que se usa para descrever as soluções de identidades trigonométricas. Tente começar elaborando uma equação geral para os trechos crescentes (os decrescentes serão similares) usando uma variável  $k \in \mathbb{N}$  para diferenciar cada trecho” (arquivo /MA/E.pdf – página 3), o pesquisador estava não apenas valorizando a solução proposta por ela, mas também dando suporte para que a aluna pudesse desenvolver essa solução superando as limitações que surgiam ao longo do processo.

Além dessa caracterização, nos interessa particularmente nesse caso discutir a qualidade do diálogo que se estabeleceu entre as partes envolvidas, tomando como referências as constatações de Olimpio Junior (2006) e Powell e Ramnauth (1992) apresentadas na introdução desta Seção. Esses autores reforçaram que a unidirecionalidade, o foco em questões técnicas e o Absolutismo Burocrático (ALRO e SKOVSMOSE, 2006) imperam na comunicação entre alunos e professores em ambientes convencionais de sala de aula. Em contrapartida, o que podemos notar no caso descrito anteriormente é que, apesar de o caminho

escolhido pela aluna ser repleto de detalhes de caráter técnico, a discussão em momento algum se prendeu a esses detalhes, dando vazão à estratégia que a aluna propôs inicialmente e que elaborou ao longo dos relatórios de múltiplas entradas.

Atribuímos essa melhoria na qualidade da comunicação estabelecida, a qual, do nosso ponto de vista, pode ser caracterizada como um Diálogo no sentido que Alro e Skovsmose (2006) estabelecem, às características da Dinâmica RCR: permitir que professor e aluno interajam através da escrita e acerca de um problema rico em termos de possibilidades matemáticas.

Retomando o objetivo desta pesquisa - evidenciar as potencialidades da Dinâmica RCR como um recurso didático-pedagógico para o ensino e aprendizagem de Matemática - a análise apresentada, mais uma vez, fortalece a potencialidade dessa dinâmica como um recurso para o professor de Matemática.

### 3.4. Individualidade

O trabalho de Bliss et al. (1996) se encaixa no conjunto de trabalhos que buscava consolidar a metáfora do Suporte, discutida na Seção 1.1.2, como uma ferramenta analítica para pesquisas fundamentadas na teoria vigotskiana. Mais precisamente, esse trabalho buscou investigar de que maneira essa metáfora, até então praticamente restrita ao universo das interações entre adultos e crianças fora do ambiente escolar, poderia ser utilizada para compreender a atuação do professor em sala de aula.

O objetivo inicial desta pesquisa era identificar e explorar estratégias de Suporte no contexto da escola primária, especialmente no ensino de Matemática, Ciências e Tecnologia. Para atingir tal objetivo, os autores supracitados acompanharam cinco professores através de: a) filmagem das aulas, b) discussão com os professores dessas filmagens em reuniões extra-classe, e c) entrevistas individuais com professores e estudantes antes e depois de algumas aulas.

Após algumas etapas de coleta dos dados, Bliss et al. (1996) se depararam com a constatação de que “há uma relativa ausência de Suporte na maioria das aulas” (p. 44 – tradução nossa). Mais do que isso, “nas discussões sobre planejamento das aulas os professores revelavam ser capazes de planejar aulas com Suporte, mas a implementação provou-se mais difícil” (p. 44 – tradução nossa).

Em face disso, os pesquisadores ajustaram o foco da investigação para a compreensão dos motivos que estavam levando a essa relativa falta de estratégias de Suporte nas aulas que estavam sendo acompanhadas, e então surge uma nova constatação: “estratégias de Suporte normalmente ocorrem em momentos de interação um-a-um” (p. 45 – tradução nossa).

No caso da presente pesquisa, a própria maneira como a dinâmica para a Coleta dos Dados foi estabelecida fez com que as interações fossem exclusivamente um-a-um, entre o pesquisador e cada um dos sujeitos investigados.

A análise que apresentaremos a seguir, baseada em três resoluções diferentes para o problema H, pretende ilustrar de que forma a Dinâmica RCR viabiliza esse tratamento individualizado e de que forma isso pode resultar em benefícios para o processo de ensino e aprendizagem.

### 3.4.1. O Problema H

Nessa Seção vamos fazer uma análise paralela de três resoluções para o problema H, realizadas pelos sujeitos HE, ED e AN. Eis o enunciado do problema:

A função  $f(x)$  é definida por três funções diferentes, cada qual em um intervalo diferente, como mostrado abaixo:

$$\text{Se } x \leq -1 \text{ então } y = -x^2 - 2x + 1$$

$$\text{Se } -1 < x < 1 \text{ então } y = g(x)$$

$$\text{Se } x \geq 1 \text{ então } y = x^2 - 2x + 4$$

Encontre uma função  $g(x)$  que faça  $f(x)$  contínua em todo o seu domínio.

Apesar de a questão inicial se referir apenas à continuidade da função  $f(x)$ , nossa intenção era conduzir os alunos até uma discussão sobre a suavidade da curva e como escolher uma função  $g(x)$  para obter uma função  $f(x)$  diferenciável. Com isso, pretendíamos tocar em tópicos do conteúdo que ainda não haviam sido abordados nas aulas regulares da disciplina, o que não aconteceu com os outros problemas utilizados.

Diferentemente do que fizemos nas análises anteriores, não vamos discutir com detalhes cada uma das resoluções, mas sim dar uma visão geral sobre como cada uma delas se desenrolou ao longo das interações, salientados os pontos principais, para que possamos, ao final, traçar um paralelo entre elas.

#### A resolução do aluno AN<sup>32</sup>

Já no primeiro relatório, o aluno demonstrou uma dificuldade que não se referia exatamente ao problema, mas sim ao entendimento da função composta apresentada no enunciado:

<sup>32</sup> Os relatórios relativos a esse bloco de interações podem ser lidos no arquivo H.pdf dentro da pasta AN, disponível no CD-ROM, anexo a essa dissertação. Todas as figuras inseridas ao longo dessa Seção foram extraídas desse mesmo arquivo.

Ao meu ver não possível definir  $f(x)$  por estas três funções diferentes, pois se  $x \leq -1$ ,  $y = -x^2 - 2x + 1$  possui raízes maiores que  $-1$ . E quando  $x \geq 1$ ,  $y = x^2 - 2x + 4$  não possui raízes reais.

Figura 18: Comentário deixado pelo aluno no primeiro relatório

No relatório seguinte, o aluno declarou “não consigo fazer o gráfico das partes de  $f(x)$ ” (arquivo /AN/H.pdf – página 1), o que fez com que o professor deslocasse o foco das interações primeiramente para a construção dos gráficos da primeira e terceira parte da função, para depois atacar o problema em si.

Essa dificuldade no traçado dos gráficos se estendeu ainda por alguns relatórios, até que, no sexto, o aluno conseguiu traçá-los e, então, o problema seria retomado. Porém, devido à proximidade do final das aulas regulares, as interações terminaram sem que fosse possível atacar o problema de fato.

### A resolução da aluna HE<sup>33</sup>

Já no primeiro relatório, a aluna obteve uma função afim que satisfaz as condições do problema, e o comentário do professor teve como objetivo estender o problema na direção de explorar a questão da diferenciabilidade:

<sup>33</sup> Os relatórios relativos a esse bloco de interações podem ser lidos no arquivo H.pdf dentro da pasta HE, disponível no CD-ROM, anexo a esta dissertação. Todas as figuras inseridas ao longo desta Seção foram extraídas desse mesmo arquivo.

“se você traçar o gráfico [...] notará que a função apresenta 'bicos' nos pontos de encontro entre as partes. O que poderia ser feito para tornar a função 'suave' nesses pontos?” (arquivo /HE/H.pdf – página 1)

No relatório seguinte, a aluna apresentou a seguinte resposta:

$$\frac{d}{dx}(-x^2 - 2x + 1) = -2x - 2 \quad \text{e}$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 - 2x + 1) = 2x - 2$$

No ponto  $x = -1$ , a derivada vale 0. E no ponto  $x = 1$  a derivada vale 0.

Para que o gráfico não tenha bicos, devemos encontrar uma função que

$$\begin{aligned}
 f(-1) &= 2 \\
 f(1) &= 3 \\
 f'(-1) &= 0 \\
 f'(1) &= 0
 \end{aligned}$$

Obs: Não sei como encontrar esta função.

Figura 19: Resposta dada pela aluna no segundo relatório

Note que, conceitualmente, a aluna já havia encontrado como resolver a questão, não sabendo apenas como efetivá-la na forma de uma função e, em seu comentário, o professor sugeriu que a aluna utilizasse uma função polinomial de 3º grau.

Nos dois relatórios seguintes, a aluna obteve a função em questão sem maiores dificuldades.

#### A resolução do aluno ED<sup>34</sup>

34 Os relatórios relativos a esse bloco de interações podem ser lidos no arquivo H.pdf dentro da pasta ED, disponível no CD-ROM, anexo a essa dissertação. Todas as figuras inseridas ao longo dessa Seção foram extraídas desse mesmo arquivo.



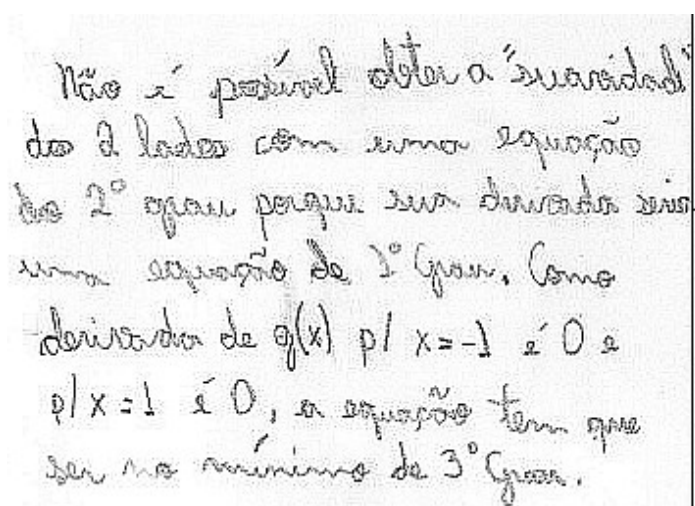
Como no caso anterior, o aluno respondeu corretamente à questão proposta já no primeiro relatório e, no comentário, o professor conduziu as interações no sentido de explorar a idéia de diferenciabilidade com a seguinte pergunta: “O que você proporia para a expressão de  $g(x)$  que resultasse em uma  $f(x)$  mais 'suave'?” (arquivo /ED/H.pdf – página 1).

No próximo relatório, o aluno apresentou uma resolução envolvendo uma função quadrática que satisfazia a mesma condição de continuidade enunciada no problema, obtendo uma função que fazia  $f(x)$  contínua, mas não diferenciável. Eis o comentário deixado pelo professor nesse relatório:

Essa suavidade pode ser obtida se a derivada das funções no ponto onde elas se encostam for igual. Por exemplo, a derivada da primeira função no ponto  $x=-1$  vale 0. Tente encontrar uma função do segundo grau que satisfaça, além da condição de continuidade, essa nova condição (esqueça por enquanto o segundo ponto de encontro de funções) (arquivo /ED/H.pdf – página 2)

Em resposta a esse comentário, o aluno encontrou uma função quadrática que satisfazia a diferenciabilidade no primeiro ponto de encontro entre as partes da função original e, em seu comentário, o professor sugeriu que o aluno encontrasse uma função que satisfizesse também a diferenciabilidade no segundo ponto de encontro.

No relatório seguinte, o aluno disse o seguinte:



Não é possível obter a "suavidade" do 2 lados com uma equação de 2º grau porque sua derivada seria uma equação de 1º grau. Como derivada de  $g(x)$  p/  $x=-1$  é 0 e p/  $x=1$  é 0, a equação tem que ser no mínimo de 3º grau.

Figura 20: Comentário feito pelo aluno no quarto relatório

Porém, devido a um descuido em relação à forma genérica de um polinômio de terceiro grau, o aluno foi induzido a utilizar um de quarto grau que respondia satisfatoriamente ao problema atual. Depois que o professor apontou esse cuidado na

resolução, as interações subsequentes foram apenas no sentido de obter a função polinomial de 3º grau corretamente.

### 3.4.2. Discussão

O que chama a atenção quando comparamos as três resoluções apresentadas anteriormente, propostas pelos sujeitos HE, AN e ED, é exatamente a diferença no modo em que cada uma se desenvolveu ao longo das interações.

No primeiro caso, as interações se concentraram em aspectos que poderiam ser considerados pré-requisitos para o problema em si. Caso esse problema fosse discutido apenas em uma lista de exercícios ou prova, o aluno também não resolveria, porém, não teria sido possível identificar qual a origem da dificuldade e, com isso, oferecer Suporte para que o aluno pudesse superá-la.

No segundo caso, a aluna demonstrou um domínio conceitual maior do que o esperado, uma vez que o conceito de diferenciabilidade ainda não havia sido discutido nas aulas regulares. Com isso, as intervenções do professor foram apenas no sentido de apontar os caminhos a serem seguidos para a resolução do problema.

No terceiro caso, devido a algumas dificuldades referentes principalmente à forma geral de funções polinomiais, o aluno acabou necessitando de um pouco mais de intervenções do professor, mas também conseguiu chegar a uma resposta ao problema proposto, envolvendo a diferenciabilidade da função.

Nota-se que cada caso, apesar de se referir ao mesmo problema, se desdobrou de maneira diferente, de acordo com as necessidades de cada aluno, ou seja, a dinâmica empregada permitiu que houvesse um acompanhamento individualizado, o que normalmente é inviabilizado em turmas reais.

Na entrevista coletiva, quando questionados sobre as vantagens e desvantagens de um acompanhamento individualizado, os sujeitos emitiram as seguintes opiniões:

“AN: Eu acho melhor individual, porque cada um tem seu tempo, seu horário, sua velocidade de raciocínio. Eu acho que eu estragaria o grupo inteiro.

HE: É bem isso que ele falou, porque às vezes você pega um problema e aí... esse eu já resolvi...

AN: O [problema] A mesmo deu 6 e ele resolveu em 1, tá ligado?!

HE: Então, é exatamente isso. Aí se a pessoa já resolveu, ele vem, olha e tá... ele resolveu, mas ele nem sabe direito como é que faz... então, se ele fez sozinho pelo menos ele entendeu o que ele fez.

IB: O máximo que poderia ser extraído de um trabalho assim em grupo é se houvesse comunicação mesmo, e não somente sentar todo mundo e cada um resolver o seu e pronto.<sup>35</sup>

O ponto que surge desse diálogo, e que fica mais claro com as falas de AN, é que a grande vantagem do acompanhamento individualizado está no respeito às especificidades de cada estudante.

De fato, se analisarmos a tabela abaixo, com o número de interações acerca de cada problema, nota-se uma grande variação no número de interações em torno de um mesmo problema para alunos diferentes.

Aluno / Problema	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L	M
<b>HE</b>	1	2	2	6	1	3	1	4	7	-	-	-
<b>AN</b>	7	4	-	-	1	6	1	6	-	2	-	-
<b>MA</b>	1	2	-	8	5	2	-	4	6	-	-	1
<b>IB</b>	1	5	-	8	3	-	-	4	-	2	-	-
<b>JM</b>	1	2	2	3	1	-	-	1	3	-	1	1
<b>DK</b>	1	2	1	6	4	-	-	-	3	1	-	-
<b>ED</b>	1	2	-	6	1	3	1	6	2	4	1	-
<b>TU</b>	1	2	-	7	4	-	-	4	-	-	-	-
<b>FE</b>	1	3	-	3	2	1	-	1	-	-	-	-

*Tabela 4: Problemas e número de interações por aluno*

Não se trata exclusivamente de uma diferença quantitativa, mas qualitativa entre as discussões ocorridas.

Por exemplo, enquanto o problema A foi resolvido em um única interação por 8 dos sujeitos, ele consumiu sete interações com o aluno AN. Esses oito alunos responderam ao problema A de maneira correta e bastante objetiva, não deixando espaço para o prolongamento das discussões, enquanto que o aluno AN, como apresentado na Seção 4.1, disparou uma discussão prolongada e bastante interessante sobre a definição de função. Ao mesmo tempo que essa discussão foi muito produtiva para o aluno AN, visto que o mesmo

<sup>35</sup> vide Anexo C por volta do tempo 22:00 minutos

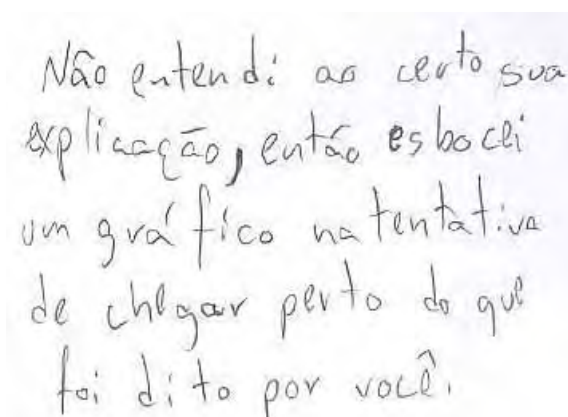
decidiu continuá-la espontaneamente no quarto relatório, poderia ser enfadonha para os demais alunos que demonstraram domínio sobre o conceito de função.

Outro exemplo é o problema E, que se estendeu para em torno de quatro interações para cerca da metade dos sujeitos, e não passou de duas para os demais. No caso específico da aluna MA, que será analisado na Seção 4.4, as interações se estenderam por cinco relatórios, porque a aluna lançou mão de uma resolução pouco convencional. Ao passo que para ela essa resolução resultou em um trabalho matemático bastante rico, para os demais poderia ser desinteressante, uma vez que se tratava de uma solução mais trabalhosa e sem muitos benefícios diretos em termos da resposta ao problema.

Essas diferenças apenas reforçam a necessidade de recursos didático-pedagógicos que possibilitem um acompanhamento individualizado dos estudantes, para que suas especificidades sejam respeitadas e levadas em conta pelo professor ao lidar diretamente com cada um deles.

Esse tratamento individualizado também toca outro aspecto, levantado por Hoffman e Powell (1989) ao se referirem ao uso da escrita como um canal de comunicação entre um professor e seus estudantes: “[A escrita] permite aos instrutores ouvirem cada estudante e permite aos estudantes saberem que suas preocupações e idéias serão ouvidas” (p. 55 – tradução nossa), ou seja, a escrita é capaz de reforçar a sensação de engajamento mútuo no processo de ensino e aprendizagem.

Essa mutualidade é reforçada por trechos como o transcrito abaixo, deixado pelo aluno AN no quarto relatório referente ao problema H:



Não entendi ao certo sua explicação, então esbocei um gráfico na tentativa de chegar perto do que foi dito por você.

*Figura 21: Comentário deixado por AN*

O que chama a atenção é a franqueza de diálogo que foi denotada entre aluno e

professor, indo além da comunicação que normalmente se estabelece em salas de aula convencionais.

Goos (2004) salientou a importância dessa mutualidade para que a interação crie um espaço interpessoal de aprendizagem que possa resultar em desenvolvimento para os envolvidos (p. 262), e Stone (1998) reforçou que isso deve ser levado em conta para que não se faça um uso ingênuo da metáfora do Suporte (página única).

Retomando o objetivo da pesquisa - evidenciar as potencialidades da Dinâmica RCR como um recurso didático-pedagógico para o ensino e aprendizagem de Matemática – entendemos que os elementos levantados nessa análise reforçam a potencialidade da Dinâmica RCR como um recurso para o professor de Matemática ao proporcionar um contexto em que a interação entre professor e estudante ocorre de maneira individualizada, respeitando as especificidades de cada estudante e fazendo com que a comunicação transcenda o Absolutismo Burocrático e se configure como um diálogo genuíno entre as partes envolvidas (ALRO e SKOVSMOSE, 2006).

## Considerações Finais

Neste capítulo, vamos tecer uma síntese de tudo aquilo que foi apresentado, discutido e analisado ao longo desta Dissertação, tendo em vista o objetivo da pesquisa colocado na Introdução: **evidenciar as potencialidades da Dinâmica RCR como um recurso didático-pedagógico para o ensino e aprendizagem de Matemática.**

Retomando o caráter interpretativo (ERNEST, 2000) adotado neste trabalho, reforçamos que não temos a intenção de generalizar resultados, padronizar procedimentos ou estabelecer formas de interpretação, mas sim lançar uma possibilidade para concepção, coleta, leitura e interpretação que acreditamos ter sido muito frutífera em termos dos objetivos que estabelecemos para a pesquisa, e tecer algumas **Considerações Finais** nesse sentido.

Por fim, na última Seção – **Contribuições para Futuras Pesquisas** – abordaremos algumas contribuições que esta pesquisa poderá trazer para futuras pesquisas em Educação Matemática.

## **A Dinâmica RCR como um recurso Didático-Pedagógico**

O objetivo desta pesquisa coloca o desafio de investigar as potencialidades da Dinâmica RCR, da maneira como nós a delineamos ao longo desta Dissertação, como um recurso didático-pedagógico para o ensino e aprendizagem de Matemática, ou seja, como um instrumento metodológico que pode ser utilizado por um professor de Matemática junto aos seus estudantes em uma sala de aula.

É claro que o contexto no qual coletamos os dados desta pesquisa é muito mais específico do que “uma sala de aula real”. Contudo, os indícios que colhemos ao longo da análise e discussão dos dados (**Capítulo 3**) nos permitem fazer inferências sobre os méritos da Dinâmica RCR como um recurso didático-pedagógico em um contexto de ensino e aprendizagem de Matemática.

Na Seção 3.1, buscamos, através da análise e discussão da resolução proposta pelo sujeito AN para o problema B (vide arquivo /AN/B.pdf disponível no Anexo B), evidenciar a potencialidade da Dinâmica RCR na compreensão dos erros cometidos pelo aluno ao longo de todas as interações entre este e o pesquisador.

O que se evidenciou com essa análise foi que a Dinâmica RCR, por proporcionar um contexto no qual professor e aluno (pesquisador e sujeito) podem interagir de maneira bastante objetiva através da escrita, ampliou as possibilidades de compreensão da natureza dos erros cometidos pelos alunos, quando comparada com os contextos convencionais de interação, como a correção de exercícios em sala de aula, de provas ou de listas de exercícios. Isso fica evidente quando observamos que a análise do conjunto dos relatórios de múltiplas entradas gerados ao longo de todas as interações forneceu mais informações e nos permitiu uma análise mais densa sobre as possíveis causas do erro cometido pelo aluno, do que se tivéssemos olhado apenas para algum dos relatórios isoladamente.

Concordamos com Radatz (1979) quando o autor colocou as dificuldades e limitações para a identificação das causas de um erro, porém, acreditamos que a Dinâmica RCR ampliou os horizontes para possíveis interpretações acerca dessas causas.

Na Seção 3.2, buscamos, através da análise e discussão da resolução proposta pelo sujeito AN para o problema A (vide arquivo /AN/A.pdf disponível no Anexo B), evidenciar a potencialidade da Dinâmica RCR na compreensão não apenas dos erros cometidos pelo aluno,

mas também de outras dimensões envolvidas no processo de resolução do problema.

O que vai se evidenciando ao longo das interações entre aluno e professor (pesquisador e sujeito) é que, apesar de o primeiro demonstrar conhecer a definição de função, ele reluta em aceitar relações definidas sem expressões algébricas ou alguma outra justificativa declarada para a associação entre os elementos dos conjuntos. Identificamos esse tipo de comportamento com aquilo que Schoenfeld (1985) chamou de “concepção empirista ingênua de Matemática”, na qual, o indivíduo não compreendeu a natureza dedutiva e abstrata dos objetos e do fazer matemático.

Ao contrário do caso anterior, neste não fica claro o avanço do aluno na resolução do problema proposto, contudo, o ambiente proporcionado pela Dinâmica RCR proporcionou um ambiente de diálogo autêntico, no sentido definido por Alro e Skovsmose (2007), para que aluno e professor (pesquisador e sujeito) negociassem significados acerca do conceito em questão.

Na Seção 3.3, buscamos, através da análise e discussão da resolução proposta pelo sujeito MA para o problema E (vide arquivo /MA/E.pdf disponível no Anexo B), mostrar que a Dinâmica RCR proporciona um ambiente no qual a qualidade do diálogo supera as limitações apontadas por Olimpio Junior (2006) e Powell e Ramnauth (1994).

Nesse caso, a aluna enveredou por um caminho não convencional para a resolução do problema que, apesar de algumas vantagens, apresenta uma quantidade maior de detalhes algébricos e aritméticos, o que nos levaria a pensar que os aspectos técnicos da resolução acabariam por restringir o diálogo entre aluno e professor (pesquisador e sujeito).

O que se vê, por outro lado, é que o professor consegue manter o foco do diálogo nas estratégias gerais para a resolução do problema, mesmo com a ocorrência de alguns erros pontuais. Atribuímos essa possibilidade ao fato de a Dinâmica RCR proporcionar um contexto no qual a interação, apesar de discreta<sup>36</sup>, é constante ao longo de todo o processo de resolução do problema, e não apenas baseada na resposta final dada pelo aluno e, com isso, possibilita que o professor ofereça Suporte, no sentido proposto por Wood et al. (1976), Stone (1998) e Goos (2004), ao pensamento matemático deste.

Na Seção 3.4, buscamos, através da análise e discussão das resoluções propostas pelos sujeitos HE, AN e ED para o problema H (vide arquivos /HE/H.pdf, /AN/H.pdf e /ED/H.pdf disponíveis no Anexo B), evidenciar as diferenças entre as resoluções propostas e,

---

36 Estamos usando o termo “discreta” em oposição ao termo “contínua”.



conseqüentemente, do tipo de Suporte oferecido pelo professor para cada um dos alunos.

Dessa forma, buscamos mostrar que a Dinâmica RCR possibilita ao professor um acompanhamento mais individualizado do trabalho de seus alunos, algo que é impossibilitado na maior parte do tempo no contexto de aulas convencionais e que, segundo Bliss (1996), é condição fundamental para que ocorram situações de Suporte em sala de aula.

A variabilidade dos dados coletados na pesquisa, seja quando olhamos transversalmente para um mesmo problema ao longo de diferentes alunos, seja quando olhamos para um mesmo aluno ao longo dos diferentes problemas que este resolveu, mais as declarações feitas pelos sujeitos na Entrevista Coletiva, reforçam essa característica da Dinâmica RCR.

Do nosso ponto de vista, esses quatro aspectos discutidos no capítulo de **Análise e Discussão dos Dados** nos permitem apontar a Dinâmica RCR como um recurso metodológico com potencialidades didático-pedagógicas muito ricas para o professor de Matemática.

Porém, esse recurso também tem suas limitações.

A primeira delas, e que imaginamos que viria à cabeça de qualquer professor de Matemática ao ler esta Dissertação, diz respeito à viabilidade de se implementar essa metodologia em uma sala de aula real. De fato, reconhecemos essa crítica como válida, uma vez que esta pesquisa foi realizada com apenas dez sujeitos dentro de uma sala com cerca de trinta alunos e, mais ainda, por alguém que não era o professor regular da disciplina<sup>37</sup>.

Contudo, retomemos alguns fatos:

1. Durante a Coleta dos Dados, que se estendeu por quase todo o período de aulas da disciplina, cada sujeito era mantido, em média, com três problemas em mãos, o que já nos leva a trinta problemas semanais, que já está muito mais próximo das dimensões de uma sala de aula real;
2. O conjunto de problemas não era grande<sup>38</sup>, o que fez com que alguns alunos estivessem resolvendo o mesmo problema ao mesmo tempo, o que acaba por agilizar o processo de correção por parte do professor, sem limitar a aprendizagem dos alunos;
3. O período de interação era semanal, ou seja, o espaço de tempo entre o recolhimento

---

<sup>37</sup> as atividades da Coleta de Dados foram realizadas pelos pesquisador, que era estagiário da disciplina, enquanto que as aulas regulares foram ministradas pela orientadora desta pesquisa.

<sup>38</sup> Todos os 12 problemas utilizados na pesquisa estão disponíveis no Anexo A.

das resoluções era de uma semana - duas aulas no caso específico da disciplina que serviu de cenário para a Coleta dos Dados. Apesar de, na maior parte dos casos, as aulas de Matemática serem mais frequentes do que no nosso caso, os sujeitos da pesquisa relataram na Entrevista Coletiva que a periodicidade semanal era ideal e, segundo alguns, até muito curta, uma vez que os problemas e a qualidade do diálogo que se estabelecia na maior parte das vezes exigiam uma dedicação maior por parte deles.

4. As atividades relativas à coleta dos dados da pesquisa não foram consideradas como parte das atividades regulares da disciplina e, como os alunos resolviam os problemas em casa, não interferiam no andamento normal da aula;

Um detalhe importante a ser considerado é que as correções tomavam mais tempo à medida que aumentavam o número de interações acerca do mesmo problema. Isso poderia nos levar a cogitar a possibilidade de limitar o número de interações como solução para aumentar a viabilidade da Dinâmica RCR em uma sala de aula real. Porém, foram exatamente as resoluções mais extensas que resultaram em material mais interessante para análise.

Frente a isso, sugerimos que essa saída, ou qualquer variante que limite a interação entre professor e aluno, não seja adotada. Porém, acreditamos que a Dinâmica RCR, se realizada com apenas um problema por aluno, sem uma variação muito grande entre os problemas e com periodicidade semanal, é viável para um professor de Matemática típico, ou seja, com turmas girando em torno de quarenta alunos.

Uma possibilidade, que visa reduzir a quantidade de trabalho para o professor ao implementar essa proposta, é realizar as atividades em grupo ao invés de individualmente<sup>39</sup>.

Apesar de a realização das atividades em grupo aparentemente contradizer algumas das potencialidades destacadas anteriormente, entendemos que isso não é necessariamente verdadeiro, mas sim que essa variação pode abrir outras potencialidades não exploradas nesta pesquisa: se por um lado, ao trabalhar em grupo, muitas das discussões podem não ficar registradas no papel, por outro, cria-se a possibilidade de ocorrerem discussões mais diversificadas, englobando inclusive a interação entre estudantes (GOOS, 2004), as quais, se

---

<sup>39</sup> Ao longo da realização desta pesquisa essa possibilidade não foi considerada, pois, como dissemos na **Introdução**, o pesquisador inicialmente concebia a dinâmica utilizada na coleta dos dados apenas como um procedimento metodológico de pesquisa, e não como um recurso didático-pedagógico. Contudo, entendemos que a experiência vivenciada nos permita fazer algumas considerações acerca dela.

devidamente exploradas, podem ser submetidas ao mesmo processo de análise e discussão que aplicamos nos dados desta pesquisa.

Outra alternativa, que aproximaria a implementação da Dinâmica RCR em uma sala de aula do que foi realizado nesta pesquisa, é a atribuição dessa atividade a algum estagiário, auxiliar ou monitor, como, por exemplo, alunos concluintes de cursos de licenciatura.

Apesar das divergências que podem advir das diferenças entre os dois profissionais, acreditamos que isso possa ser minimizado a ponto de viabilizar um ambiente colaborativo e proveitoso para ambos: acreditamos que o ponto crucial para isso é a escolha dos problemas e, exatamente por isso, detalhamos a forma como fizemos essa escolha (Seção 2.2.1).

Além disso, o fato de a Dinâmica RCR não interferir necessariamente no andamento das aulas regulares acaba por facilitar a realização dessas atividades por uma pessoa externa e, a partir disso, o professor pode negociar com essa pessoa a maneira como a atividade, ou as informações advindas dela, será incorporada as suas atividades regulares.

É claro que a incorporação efetiva da Dinâmica RCR em aulas de Matemática toca uma série de questões culturais e institucionais que podem, sozinhas, resultar em uma nova Dissertação. Cury (2007) reforçou a dificuldade de se incorporar atividades envolvendo análise de erros na prática docente e levantou a necessidade de inclusão desse tópico em cursos de formação inicial.

O que esperamos com esta pesquisa é oferecer um material rico para discussões envolvendo a Dinâmica RCR e os aspectos que a compõe, para que professores e pesquisadores possam vislumbrar um novo recurso didático-pedagógico para o ensino e aprendizagem de Matemática e decidir, de acordo com as suas realidades, como utilizar o que apresentamos neste texto.

## **Contribuições para Futuras Pesquisas**

Indo além do que foi explicitamente estabelecido no objetivo desta pesquisa - **evidenciar as potencialidades da Dinâmica RCR como um recurso didático-pedagógico para o ensino e aprendizagem de Matemática** – enxergamos, a partir da análise e discussão dos dados, uma possível contribuição deste trabalho para futuras pesquisas em Educação Matemática, especialmente para as relacionadas à Análise de Erros.

Como salientamos na análise apresentada na Seção 3.1, as características da Dinâmica RCR ampliaram os horizontes para a compreensão das causas do erro cometido, ao possibilitar a interação entre o sujeito e o pesquisador durante o processo de resolução do problema.

Ao contrário da maioria das pesquisas envolvendo Análise de Erros - nas quais o pesquisador tem contato com o erro apenas depois da resolução já finalizada e, no máximo, lança mão de uma entrevista posterior - desfrutamos nesta pesquisa da possibilidade de interagir com o erro enquanto este ainda estava se manifestando e, dessa forma, conduzir a atividade matemática do sujeito para alguma direção que pareça mais proveitosa em termos da compreensão das causas do erro em questão.

Mais do que isso, se olharmos para a compreensão possibilitada no caso relatado na Seção 3.2, vemos que essa potencialidade se estende para além das pesquisas envolvendo Análise de Erros, podendo ser útil para pesquisas preocupadas com outros aspectos do processo de resolução de problemas, como a proposta por Schoenfeld (1984).

Esse novo elemento – a interação - que estamos inserindo de maneira bastante natural no processo de coleta dos dados, nos parece muito promissor para pesquisas com essas características e cria uma ponte bastante natural para abordagens teóricas relacionadas aos trabalhos de Vigotski.

## Referências Bibliográficas

ALRO, H. SKOVSMOSE, O. (2006) *Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática*. Editora Autêntica, Belo Horizonte.

AZAMBUJA, C. R. J.; SILVEIRA, F. A. R.; GONÇALVES, N. S. (2004) *Tecnologias síncronas e assíncronas no ensino de cálculo diferencial e integral*. In: *Disciplinas Matemáticas em Cursos Superiores*. EDIPUCRS, Porto Alegre.

BALDINO, R. (1995) *Assimilação Solidária onze anos depois*. Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática. UNESP, Rio Claro.

BARDIN, L. (1979) *Análise de Conteúdo*. Edições 70, Lisboa.

BLISS, J.; ASKEW, M.; MACRAE, S. (1996) *Effective Teaching and Learning: scaffolding revisited*. In: *Oxford Review of Education*, vol. 22, n. 1.

BORASI, R. (1986). *On the Nature of Problems*. In: *Educational Studies in Mathematics*, vol. 17.

BORASI, R. (1994). *Capitalizing errors as Springboards for inquiry: a teaching experiment*. In: *Journal for Research in Mathematics Education*, 25.

BORASI, R.; ROSE, B. (1989). *Journal Writing and Mathematics Instruction*. In: *Educational Studies in Mathematics*, vol. 20.

CATAPANI, E. C. (2001). *Alunos e Professores em um Curso de Cálculo em Serviço: o que querem?*. Dissertação de Mestrado. UNESP, Rio Claro.

CHICK, H.; BAKER, M. K. (2005) *Investigating Teachers' Responses to students Misconceptions*. In: *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2.

CURY, H. N. (2004). *Análise de Erros em Educação Matemática*. In: *Veritati* v. 3, n. 4.

CURY, H. N. (2007). *Análise de Erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos*. Editora Autêntica, Belo Horizonte.

DRAKE, B. M.; AMSPAUGH, L. P. (1994) *What Writing Reveals in Mathematics*.. In: Focus on Learning Problems in Mathematics, vol. 13 n. 3

ERNEST, P. (2000). *Purposes and Methods of Research in Mathematics Education*. In: Notices of the AMS, vol. 47, n. 6.

FREITAS, M. T. (2006). *A Escrita no Processo de Formação Contínua de Professor de Matemática*. Tese de Doutorado. UNICAMP, Campinas.

GARNICA, A. V. M. (2006). *Erros e Leitura Positiva: propostas, exercícios e possibilidades*. In: I Jornada Nacional de Educação Matemática. Universidade de Passo Fundo.

GASKELL, G. (2000). *Entrevistas Individuais e Grupais*. In: Pesquisa Qualitativa com Texto, Imagem e Som: um Manual Prático. Editora Vozes, Rio de Janeiro.

GOOS, M. (2004). *Learning Mathematics in a Classroom Community of Inquiry*. In: Journal for Research in Mathematics Education, 35 (4).

GRAEBER, A. O.; JOHNSON, M. L. (1990). *Mathematical Misconceptions: A Sourcebook*. Parte Integrante do Projeto “*Methods and Materials for Preservice Teacher Education in Diagnostic and Prescriptive Teaching of Secondary Mathematics*” - NSF. (Draft)

HOFFMAN, L. D.; BRADLEY, G. L. (2002). *Cálculo: Um Curso Moderno e Suas Aplicações*. Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro (7ª Edição).

HOFFMAN, M. R.; POWELL, A. (1989) *Mathematical and commentary writing: Vehicles for student reflection and empowerment*. In: Mathematics Teaching.

LANNIN, J. K.; BARKER, D. D.; TOWNSEND, B. E. (2007) *How students view the general nature of their errors*. In: Educational Studies in Mathematics, v. 66, n. 1.

LEME, H. A. S. (1997). *Matemática Financeira Através de Atividades Orientadoras de Ensino (AOE) com Jornais e Dinâmica de Grupo – Volume da Academia*. Dissertação de Mestrado. UNESP, Rio Claro.

LINS, R. C. (1999). *Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a educação matemática?* In: Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas. Editora Cortez, São Paulo.

MACHADO, A. P. (2003). *Do Significado da Escrita da Matemática na de Ensinar e no Processo de Aprendizagem a Partir do Discurso de Professores*. Tese de Doutorado. UNESP, Rio Claro.

MARCO, F. F. (2004). *Estudo dos processos de resolução de problema mediante a construção de jogos computacionais de matemática no ensino fundamental*. Tese de Doutorado. UNICAMP, Campinas.

MOVSHOVITZ-HADAR, N.; ZASLAVSKY, O.; INBAR, S. (1987) *An empirical classification model for errors in high school mathematics*. In: Journal for Research in Mathematics Education, 18.

OLIMPIO JUNIOR, A. (2006) *Compreensões de Conceitos de Cálculo Diferencial no Primeiro Ano de Matemática- uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática*. Tese de Doutorado. UNESP, Rio Claro.

OLIVEIRA, M. K. (1997) *Vygotsky – Aprendizado e Desenvolvimento: um Processo Sócio-Histórico*. Editora Scipione, São Paulo.

ONUCHIC, L. R. (1999) *Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas*. In: Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas. Editora Cortez, São Paulo.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. (2005). *Novas Reflexões sobre o Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas*, in Educação Matemática: Pesquisa em Movimento. Editora Cortez, São Paulo.

PINTO, N. B. (2000). *O erro como estratégia didática: Estudo do erro no ensino da matemática elementar*. Papirus, Campinas

PINTO, R. A. (2002) *Quando professores de Matemática tornam-se produtores de textos escritos*. Tese de doutorado. UNICAMP, Campinas.

PONTE, J. P.; BOAVIDA, A. M.; GRAÇA, M.; ABRANTES, P. (1997). *Didáctica da*

*Matemática: Ensino Secundário*. Ministério da Educação, Lisboa.

POWELL, A. (2001). *Captando, Examinando e Reagindo ao Pensamento Matemático*. In: Boletim GEPEN, nº 39, p. 73-84.

POWELL, A.; BAIRRAL, M. (2006). *A Escrita e o Pensamento Matemático*. Editora Papirus, Campinas.

POWELL, A. B., RAMNAUTH, M. (1992) *Beyond Answers and Questions: Prompting Reflections and Deepening Understandings of Mathematics Using Multiple-Entry Logs*. In: For the Learning of Mathematics, nº 12, vol. 2, p. 12-18.

RADATZ, H. (1979). *Error analysis in mathematics education*. In: Journal for Research in Mathematics Education, vol. 10.

RADATZ, H. (1980). *Student's Errors in the mathematical learning process: a survey*. In: For the Learning of Problems, vol. 10, n. 1.

RICO, L. (2005) *Errores u dificultades en el aprendizaje de las matemáticas*. In: Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica, Colômbia.

ROSE, B. (1991) *Using Expressive Writing to Support Mathematics Instruction: Benefits for the Student, Teacher and Classroom*. In: Using Writing to Teach Mathematics. New York: Mathematical Association of America, MAA Notes.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. (1989). *Developing understanding in mathematics via problem solving*. In: New directions for elementary school mathematics. NCTM.

SCHOENFELD, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, Londres.

SCHOENFELD, A. (2007). *Problem solving in the United States, 1970–2008: research and theory, practice and politics*. In: ZDM Mathematics Education, 39.

SIPKA, T. (1990) *Writing in Mathematics: A Plethora of Possibilities*. In: Using Writing to Teach Mathematics. New York: Mathematical Association of America, MAA Notes.



STEFFE, L. P., THOMPSON, P. W. (2000) *Teaching Experiment Methodology: Underlying Principles and Essential Elements*. In Handbook of Research design in mathematics education. USA, Lawrence Erlbaum Associates.

STEINLE, V.; STACEY, K. (2004) *Persistence of Decimal Misconceptions and Readiness to Move to Expertise*. In: Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

STEWART, J. (2001). *Cálculo - Vol. 1*. Editora Pioneira Thomson Learning. (4ª edição)

STONE, C. A. (1998) *The Metaphor of Scaffolding: its Utility for the Field of Learning Disabilities*. In: Journal of Learning Disabilities, 31 n. 4.

UREL, M (2007) *Narrativas no Ensino de Funções por Meio de Investigações Matemáticas*. Dissertação. UNESP, Rio Claro.

VERENIKINA, I. (2003) *Understanding Scaffolding and the ZPD in Educational Research*. In: Conference Papers of AARE/NZARE, Auckland.

VIOLA DOS SANTOS, J. R. (2007) *O que alunos da escola básica mostram saber por meio de sua produção escrita em matemática*. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Londrina.

VIGOTSKI, L. S. (2001). *A Construção do Pensamento e da Linguagem*. Martins Fontes, São Paulo.

VIGOTSKI, L. S. (2007). *A Formação Social da Mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores*. Martins Fontes, São Paulo.

WOOD, D., BRUNER, J. S. e ROSS, G. (1976). *The role of tutoring in problem solving*. In: Journal of Child Psychology and Psychiatry, 17.

## Anexos

### Anexo A – Os Problemas Escolhidos

Nesse anexo faremos uma descrição dos problemas utilizados nessa pesquisa, não somente de seus enunciados, mas também dos desdobramentos pensados *a priori* para cada um deles e das nossas intenções ao escolhê-los.

**Problema A:** Você acha que existe uma função do conjunto  $\{1, 2, 3\}$  para o conjunto  $\{2, 4, 5, 8\}$ ? Em caso positivo, dê um exemplo.

Esse problema foi extraído da tese de doutorado intitulada “Compreensões de conceitos de cálculo diferencial no primeiro ano de matemática: uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática” e Antônio Olímpio Junior (Unesp – Rio Claro).

Neste trabalho, o problema gerou discussões interessantes sobre a definição formal de função e das nuances envolvidas nessa definição. O nosso intuito ao selecioná-lo era suscitar as mesmas discussões, mas que agora seriam tratadas dentro da dinâmica que propusemos.

**Problema B:** Seja  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  e  $g = |x|$ .

a) Calcule  $f \circ g(x)$  e faça seu gráfico.

b) Compare o gráfico de  $f \circ g(x)$  com o gráfico de  $f(x)$ .

O intuito desse problema era explorar a composição de funções envolvendo uma função modular e o efeito que essa composição causa no gráfico quando comparado ao da outra função.

A partir dos itens propostos no problema original, o pesquisador visava encaminhar a discussão para a análise do gráfico de  $g \circ f(x)$  e a comparação dos três gráficos pedidos.

### Problema C:

- a) Esboce os gráficos das funções  $f(x) = x^2 - 1$  e  $g = 2^x$
- b) Esboce o gráfico de  $h(x) = f \cdot g(x)$  no intervalo  $-5 \leq x \leq 5$ . Quais elementos de  $h(x)$  você pode prever a partir dos gráficos de  $f(x)$  e  $g(x)$ ?

Esse problema foi escolhido com o intuito de gerar discussões sobre o comportamento da função à medida que tomamos valores cada vez menores de  $x$ .

Note que  $f(x)$  tende a mais infinito e  $g(x)$  a zero quando tendemos  $x$  a menos infinito. Como  $h(x)$  é definida pela multiplicação dessas funções, os alunos seriam conduzidos a discutir o que acontece com a multiplicação desses limites.

Porém, talvez devido a um encaminhamento inadequado do problema por parte do pesquisador, ou de uma má escolha do momento para a exploração dele, as primeiras discussões acerca desse problema se mostraram infrutíferas e o pesquisador decidiu parar de propô-lo aos sujeitos durante a própria coleta.

**Problema D<sup>40</sup>:** Seja  $g$  uma função par,  $f$  uma função qualquer e  $h = f \circ g$ . A função  $h$  é sempre uma função par?

*Sugestão: teste a afirmação através exemplos utilizando funções que você conhece.*

Esse talvez seja o problema mais diferente dos demais, por se basear fundamentalmente em demonstrações, e esse era exatamente o objetivo ao selecioná-lo, analisar de que forma os alunos se comportavam na resolução de um problema dessa natureza.

O desdobramento planejado inicialmente para esse problema pode ser ilustrado pela seguinte questão: Seja  $g$  uma função ímpar,  $f$  uma função qualquer e  $h = f \circ g$ . A função  $h$  é sempre uma função par? E se  $f$  for ímpar? E se  $f$  for par?

---

40 Problema extraído de Stewart (2001) página 49, exercício 63

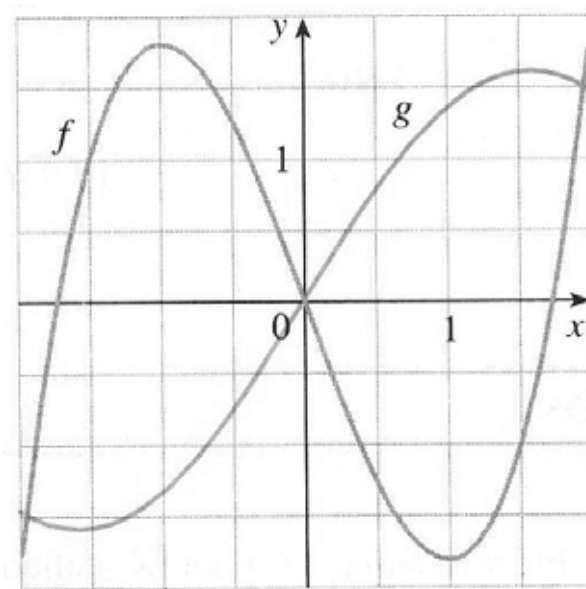
**Problema E<sup>41</sup>:** Uma estrela variável é aquela cujo brilho alternadamente cresce e decresce. Para a estrela variável mais visível, Delta Cephei, o período de tempo entre os brilhos máximos é de 5,4 dias, o brilho médio (ou magnitude da estrela) é de 4,0, e seu brilho varia de 0,35 em magnitude. Elabore uma função que modele o brilho de Delta Cephei como uma função do tempo.

Nosso objetivo era explorar uma aplicação dos conceitos de translação, reflexão e deformação de gráficos de funções conhecidas, que estavam sendo estudados pelos alunos.

**Problema F<sup>42</sup>:** Os gráficos das funções  $f$  e  $g$  estão representados na figura abaixo e  $h = f \circ g$ .

a) Estime o valor de  $h(0,5)$ .

b) Esboce o gráfico de  $h$ .

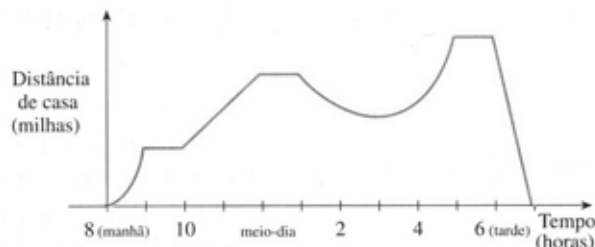


Esse problema foi escolhido para explorar, mais uma vez, a idéia de composição de funções, agora, porém, a partir de uma análise gráfica. Nosso intuito era que os alunos fizessem leituras do gráfico e, a partir disso, fossem capazes de calcular pontos específicos da função composta e até mesmo esboçar seu gráfico.

41 Problema extraído de Stewart (2001) página 47, exercício 26

42 Problema extraído de Stewart (2001) página 45, exercício 9

**Problema G<sup>43</sup>:** O gráfico abaixo mostra a distância de um caixeiro-viajante até sua casa em um certo dia como função do tempo. Descreva em palavras o que o gráfico indica sobre as andanças nesse dia.



Ao escolhermos esse problema, tínhamos a intenção de discutir questões relacionadas à velocidade, aceleração, inclinações e concavidades, mesmo que de uma maneira mais descritiva do que numérica ou algébrica.

Porém, as discussões se mostraram infrutíferas pelo fato de os alunos carregarem do Ensino Médio um vocabulário, característico da Física, sobre Cinemática, que deu conta de descrever o observado no gráfico sem abrir margem para maiores discussões. Esse foi outro problema que o pesquisador deixou de propor aos alunos à medida que percebeu que, com ele, seus objetivos não estavam sendo alcançados.

**Problema H:** A função  $f(x)$  é definida por três funções diferentes, cada qual em um intervalo diferente, como mostrado abaixo:

$$\text{Se } x < -1 \text{ então } y = -x^2 - 2x + 1$$

$$\text{Se } -1 \leq x \leq 1 \text{ então } y = g(x)$$

$$\text{Se } x > 1 \text{ então } y = x^2 - 2x + 4$$

Encontre uma função  $g(x)$  que faça  $f(x)$  contínua em todo o seu domínio.

Esse problema já lidava com conteúdos específicos de Cálculo, continuidade na proposta inicial e diferenciabilidade em seus desdobramentos.

Nosso intuito era, depois de que o aluno fosse capazes de resolver o problema inicial, introduzir a seguinte questão: como podemos escolher  $g(x)$  de forma que  $f(x)$  seja “suave” em todos os seus pontos?

Além de discussões sobre o que significava essa “suavidade”, os alunos lidavam

43 Problema extraído de Stewart (2001) página 22, exercício 13

explicitamente com o conceito de diferenciabilidade e cálculos de derivadas.

**Problema I:** Seja  $p(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$ .

- Calcule as raízes de  $p(x)$ .
- Quais são as assíntotas horizontais e verticais dessa função?
- Usando essas informações, esboce a mão o gráfico de  $p(x)$ .

Com esse problema, pretendíamos discutir habilidades e conceitos relacionados ao esboço de gráficos. Além dos itens propostos, que serviam como etapas para a construção dos gráficos, os alunos eram conduzidos a análises envolvendo máximos e mínimos da função.

**Problema J:** Imagine uma bolinha girando em sentido horário, presa a um fio de comprimento 1 amarrado à origem de um eixo cartesiano.

- Calcule a equação da reta tangente pela qual a bolinha deverá “escapar” caso o fio se arrebe quando a bolinha está na posição  $(0,6 ; 0,8)$ .
- O mesmo para o caso da bolinha estar na posição  $(0,6 ; -0,8)$ .

Além de estarmos interessados na interpretação geométrica da derivada e no seu cálculo em si, uma vez respondidas essas questões, pretendíamos encaminhar a discussão para a seguinte questão: o que ocorre se o fio estourar quando a bolinha está na posição  $(1;0)$ ?

Nesse caso, a reta tangente é vertical, ou seja, a sua inclinação é de noventa graus e o valor da derivada da função nesse ponto é indefinido. Nosso objetivo era exatamente contrapor essa constatação com a situação proposta.

**Problema L<sup>44</sup>:** Que número excede o seu quadrado pela quantidade máxima?

Esse problema já foi escolhido visando explorar o cálculo explícito de máximos e mínimos de uma função, porém, ao contrário de problemas de modelagem convencionais, a dificuldade deste está na tradução do enunciado para uma linguagem algébrica.

A partir dessa questão, pretendíamos introduzir a seguinte: “Que número excede a sua

---

44 Problema extraído de Hoffman e Bradley (2002), página 70, exercícios 17 e 18

raiz quadrada pela quantidade máxima?”. Essa, por sua vez, apresenta dificuldade maior pelo fato de a função em questão não admitir ponto de máximo fora das fronteiras, sendo essa uma situação incomum em problemas desse tipo.

**Problema M:** Uma das maneiras de se modelar o crescimento de algum ser vivo em ambiente livre de predadores é através do Modelo Logístico, que utiliza a seguinte equação

$$P(t) = \frac{L \cdot P_0}{P_0 + (L - P_0) \cdot e^{-kt}}$$

para descrever o tamanho da população ao longo do tempo.  $P_0$  representa a população inicial,  $k$  é uma constante relacionada ao crescimento vegetativo da espécie e  $L$  é a capacidade de suporte do ambiente. Vamos analisar uma espécie com  $P_0=2$  e  $k=1$ .

- Em quantos seres a população deverá se estabilizar?
- Qual o comportamento da função em termos de crescimento ou decrescimento?
- Em qual ponto a concavidade da função muda?

Nosso intuito com esse problema era explorar ferramentas básicas de cálculo, como limites, derivadas e interpretação gráfica destas, dentro de uma aplicação comum dessas ferramentas.

Um dos pontos diferenciais desse problema é que os alunos teriam que lidar com uma constante  $k$  e com um função atípica em relação às que eles lidavam em sala de aula.

Por fim, o pesquisador tinha a intenção de, a partir dos resultados obtidos nos itens a) e c), discutir uma interpretação para essa constante  $k$ .