

UNESP

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Antonio Sylvio Vieira de Oliveira

O Ensino do Cálculo Diferencial e Integral
na Escola Politécnica de São Paulo,
no ano de 1904:
uma análise documental

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

Rio Claro

2004

Antonio Sylvio Vieira de Oliveira

O Ensino do Cálculo Diferencial e Integral
na Escola Politécnica de São Paulo, no ano de 1904:
uma análise documental

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao curso de Pós-Graduação em Educação Matemática, Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem de Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, da Universidade Estadual Paulista, para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira

Rio Claro

2004

510.09 Oliveira, Antonio Sylvio Vieira de
O48e O ensino de cálculo diferencial e integral na Escola
Politécnica de São Paulo, no ano de 1904 : uma análise
documental / Antonio Sylvio Vieira de Oliveira. – Rio Claro :
[s.n.], 2003
135 f. : il., tabs.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Marcos Vieira Teixeira

1. Matemática - História. 2. Análise de conteúdo. 3.
Rodolpho de San Thiago. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI – Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

Antonio Sylvio Vieira de Oliveira

O Ensino do Cálculo Diferencial e Integral
na Escola Politécnica de São Paulo, no ano de 1904:
uma análise documental

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao curso de Pós-Graduação em Educação Matemática, Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem de Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, da Universidade Estadual Paulista, para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Rio Claro, ____/____/____

Banca Examinadora

Prof. Doutor _____ - UNESP – Orientador

Prof. Doutor _____ - UNESP – Examinador

Prof. Doutor _____ - USP - Examinador

Rio Claro

2004

AGRADEÇO

Ao Professor Doutor Antonio Carlos Carrera de Souza, que me indicou o caminho das pedras.

Ao Professor Doutor Roberto Ribeiro Baldino, pelo reforço teórico.

Ao Professor Doutor Marcos Vieira Teixeira, pela orientação segura e paciência em debater minhas incontáveis dúvidas.

Aos amigos que me incentivaram e, em particular, a Ana Maria, pelo carinho e presteza que atendeu os meus inconvenientes pedidos de auxílio.

À Universidade Guarulhos, pelo apoio financeiro e pela confiança em meu trabalho de pesquisa.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é analisar o Curso de Cálculo Diferencial e Integral ministrado no curso básico da Escola Politécnica de São Paulo, no ano de 1904. A proposta foi desenvolvida por meio de uma pesquisa histórico-documental realizada nas bibliotecas da Instituição e em outros Centros da Universidade de São Paulo. Inclui uma análise de conteúdo de um texto didático organizado por um aluno da disciplina nesse período, além de outras informações pertinentes sobre o Curso e a Escola. A intenção é investigar a produção de conhecimento e delinear o fazer matemático na Politécnica na época.

Palavras-chave: Cálculo, análise de conteúdo, Rodolpho de San Thiago, Escola Politécnica, História da Matemática.

ABSTRACT

The purpose of this project is to analyse the undergraduate course on Differential and Integral Calculus as it was taught in the basic Engineering Course at “Escola Politécnica de São Paulo” in 1904. The study was developed by means of a historical and documentary research in different libraries and departments of University of São Paulo. The work unfolds the contents of an instructive text compiled by a student regularly enrolled in the mentioned course at the time. Moreover, it also brings about some relevant information and distinctive aspects of the course in question. In brief the project aims at investigating the knowledge production, as well as the learning and teaching procedures at “Escola Politécnica” in the first decade of the XXth Century.

Key words: Calculus, analysis of contents, Rodolpho de San Thiago, “Escola Politécnica”, History of Mathematics.

SUMÁRIO

Introdução	07
Capítulo 1 – Uma história social formalizada	11
Capítulo 2 – Os cursos básicos da Escola Politécnica em seus primeiros anos.....	16
Capítulo 3 – O Cálculo Diferencial e Integral e a Análise da Escola Politécnica ..	22
Capítulo 4 – Conclusões	51
Referências	56
Apêndice A – Exame de texto: Premiers Éléments du Calcul Infinitesimal	59
Apêndice B – Exame de texto: Lezioni di Analisi	69
Anexos	96
Anexo A – Decreto de criação da Escola Politécnica de São Paulo	97
Anexo B – Pessoal administrativo e docente da Escola Politécnica (1895,1900) ...	98
Anexo C – Horário de aulas do Curso Fundamental da Escola Politécnica	104
Anexo D – Programas de Cálculo Diferencial e Integral (1899, 1903, 1930)	105
Anexo E – Homenagens a Rodolpho Baptista de San Thiago	116
Anexo F – Curso de Cálculo de Rodolpho Baptista de San Thiago	121

INTRODUÇÃO

O objetivo desta pesquisa é analisar o desenvolvimento do ensino do Cálculo Diferencial e Integral na Escola Politécnica de São Paulo, no final do século XIX até o início do século XX.

Até o início da década de trinta, a Matemática Superior, em nosso País, era ministrada nas Escolas de Engenharia. Em São Paulo, o Cálculo Diferencial e Integral era disciplina dos primeiros anos dos cursos da Escola Politécnica, fundada em 1893.

Na constituição de seu ciclo básico, de suporte para as disciplinas técnicas de formação do engenheiro, apareceram preliminarmente a Matemática Elementar, a Geometria, a Trigonometria e o Desenho, que atuavam como pontes do Ensino Médio para o Superior. Logo após, surgiu a Geometria Analítica no papel de gênese de fundamentação, com a metáfora básica: os pontos são números. Esta foi a Primeira Cadeira do Curso Fundamental.

O Cálculo Infinitesimal, Segunda Cadeira do Curso Fundamental, estava localizado no segundo ano de curso. Era, como é, o modelo matemático de movimento¹ para fenômenos previsíveis, tratando de taxas de variação de grandezas próprias para a Engenharia.

Assumimos a análise dessa disciplina, por um caderno de aluno do Curso de Cálculo ministrado no ano de 1904 da Escola Politécnica, como uma busca do conhecimento de como era feita a Matemática na época. Esse manual foi escrito por um aluno, Adriano Goulin, que assistiu às aulas de Rodolfo Baptista de San Thiago, professor responsável pelo Cálculo Infinitesimal na Instituição.

Nossa linha de pesquisa pertence a um tema voltado à interligação entre o conteúdo e sua aplicação educacional, pertencendo a uma frente denominada *história de disciplina*, nos termos de Baroni e Nobre (1999).

¹ Segundo Zuin (2001, p. 13), “[...] na Matemática, através do Cálculo estuda-se a variação e o movimento”.

Optamos por uma perspectiva histórica da análise com dois focos de interesse, aos quais dedicamos a nossa atenção nesse estudo.

O primeiro é o ambiente-época em que o ensino é desenvolvido. Um objetivo é o de explicitar as preferências existentes na Escola Politécnica, relacionadas com a Matemática e, em particular, com o Cálculo. Outro é o de analisar a disciplina em termos de conteúdos e necessidades.

O segundo foco é uma reflexão sobre a historiografia e a integração da História da Matemática com a Pedagogia, pelo exame do discurso dos livros didáticos usados e dos documentos escolares vigentes.

Essa reflexão está relacionada com o papel dos livros-texto de Cálculo, na forma das práticas educacionais, e com as influências exercidas por esses textos sobre alunos e professores. Acreditamos, seguindo Seiji Hariki (1992), que é relevante para a Educação a análise do discurso dos livros didáticos de Matemática: como os autores negociam significados, perspectivas e valores com os leitores.

Ainda de acordo com Hariki, as leis da lógica formal governam as transmissões de informações, as regras da heurística controlam a construção do conhecimento matemático e a retórica domina a negociação de significados.

Estão presentes, no texto matemático didático, as situações de conflito entre a lógica formal e a heurística, entre a lógica formal e a retórica ou, também, entre a lógica formal e a intuição. Cabem aos autores a habilidade e a criatividade suficientes no tratamento desses problemas, em proveito da exposição clara.

A nossa análise do discurso matemático desses autores deve conter esses pressupostos como ponto de partida. Deve, também, incluir outros quesitos mais refinados de estilo matemático, de domínio do discurso, de época e de clareza de exposição.

Pretendemos, especificamente, uma análise de conteúdo aliada à informação documental.

Tomando por referência Laurence Bardin (1977, p. 45)

[...] a análise de conteúdo tem por finalidade a descrição do conteúdo e de sua expressão, para ressaltar indicadores que levem à confirmação e infirmação de hipóteses e também conduzam a descobertas. [...] A análise documental é um conjunto de operações, visando representar o conteúdo de um documento de uma forma diferente da original, a fim de, num estágio ulterior, facilitar sua consulta e referência.

As duas análises objetivam evidenciar a axiologia subjacente aos manuais escolares de Cálculo.

Dessa forma, indicarão o rastro histórico determinado que, apoiado na descrição epistemológica, levará à concepção de como se faz Matemática. Esse fazer é relevante, porque conduzirá a novas questões epistemológicas e, também, a questões metafísicas que terão ressonância no aprendizado da disciplina.

A metodologia adotada foi a pesquisa histórica documental e oral. A investigação documental ocorreu nas bibliotecas da Escola Politécnica e no Centro de Apoio à Pesquisa em História Sergio Buarque de Holanda da Universidade de São Paulo. A oral foi realizada por meio de entrevistas com pessoas que, preferencialmente, estejam ou estiveram trabalhando em Cálculo.

Optamos por uma divisão da dissertação em quatro capítulos. O primeiro trata do ambiente-época no qual a Escola Politécnica surgiu e dos fatores ligados à sua fundação.

O segundo capítulo contém uma descrição da primeira organização didática da Escola e das alterações de sua estrutura curricular que influenciaram os cursos de Cálculo e Análise na Instituição.

No terceiro capítulo aparecem as diretrizes por nós pretendidas com a análise do texto de Cálculo Diferencial e Integral de 1904, ministrado por Rodolpho Baptista de San Thiago, na Politécnica.

Essa leitura é baseada em critérios atuais de análise de textos didáticos, mas não tem a finalidade de comparar os conteúdos dos livros de época com as direções assumidas pelo ensino do Cálculo Diferencial e Integral contemporâneo.

Nossa preocupação é a de uma interpretação obtida à luz da Educação Matemática, preservando coordenadas espaço-temporais do texto, e mostrando um recorte do desenvolvimento da Matemática no Brasil e de seu Ensino.

O quarto capítulo é reservado às conclusões.

Ao final, encontram-se no apêndice as análises de duas obras ligadas ao curso de San Thiago: o livro por ele adotado, *Premiers Éléments du Calcul Infinitesimal*, de Hyppolite Sonnet², e o texto *Lezioni di Analisi*, de Francesco Severi³,

² Hippolyte Sonnet (1803-1879).

³ Francesco Severi (1879-1961) – matemático italiano, professor das Universidades de Parma e de Roma, com contribuições em diversas áreas da Matemática, particularmente em Geometria.

utilizado no período imediatamente após a fase de San Thiago na Escola, quando foi criada a Universidade de São Paulo.

CAPÍTULO 1

UMA HISTÓRIA SOCIAL FORMALIZADA

Com o título acima desejamos evocar as relações entre o sentido do passado e a história. O passado como uma função social, e a história analisando a sua natureza e localizando as suas mudanças e transformações nas sociedades.

Segundo Hobsbawm (1997, p. 23), “o passado é e deve ser claramente uma seleção particular daquilo que é lembrado, ou capaz de ser lembrado”.

Hobsbawm define o passado como dependente das circunstâncias de escolha nas sociedades. É construído pela relação de eventos que os homens consideram importantes e, portanto, incorporam para as gerações seguintes.

Em geral, o passado social e formalizado fixa o padrão para o presente, tendo valor de registro, de costume, de lei como tradição, e de sabedoria. Isso não exclui a flexibilidade que permite transformações. A crença de que o passado modela o presente não é verdadeira. Mesmo as sociedades tradicionais não são estáticas ou imutáveis; inovações ocorrem, e o quadro de tradições torna-se flexível, embora a mudança histórica possa apresentar um ritmo lento. Grandes inovações sociais surgem quando as sociedades são lançadas em um contexto de mudança social drástica, em que sua estrutura normativa do passado é tensionada até a ruptura.

A inovação constante é mais prontamente aceita em setores ligados à ciência e à tecnologia, em que o controle humano é exercido sobre a natureza e de forma vantajosa, até para os tradicionalistas.

Nossa história social formalizada pertence a esse setor científico e tecnológico. Inicia-se com a criação da Escola de Engenharia em São Paulo, pelo Governo Estadual, no contexto das transformações da sociedade paulista e da brasileira ocorridas em fins do século XIX e início do século XX. Prossegue com a história da disciplina denominada Cálculo Infinitesimal, ministrada no início do século XX, nessa Escola, com uma fundamentação, que foi conservada por trinta anos.

A Escola Politécnica de São Paulo foi criada em 1893, sendo destinada à habilitação de engenheiros para atendimento da construção civil e do parque industrial em formação. Sua sede localizava-se no solar do Marquês de Três Rios, que ocupava o número 1 da Avenida Tiradentes, na cidade de São Paulo, e foi adquirido, no mesmo ano de sua criação, pelo Governo do Estado, para abrigar a Escola.

O Brasil encontrava-se em processo de transformação de sua sociedade, de base econômica agro-exportadora para uma base urbano-industrial. Os engenheiros tinham grande importância para o desenvolvimento de empreendimentos relativos aos transportes, à mineração e aos desafios da urbanização que se processava, particularmente, no sudeste do país.

Segundo Schneider (1996), a gênese industrial brasileira é encontrada no período entre 1886 e 1894. As indústrias têxteis, os moinhos, as cervejarias e os empregados metalúrgicos de indústrias leves cresceram durante os anos oitenta e aceleraram o seu crescimento na década de noventa, com o excesso de capital oriundo da exportação. Para exportar o café, o Estado de São Paulo, os fazendeiros e o capital externo fizeram investimentos prioritários nos transportes ferroviários.

A malha ferroviária dobrou para 6 900 milhas em 1894 e excedeu 9 950 milhas na virada do século. A cidade de São Paulo, que possuía 20 000 habitantes nos meados do século XIX, chegou ao século XX com 240 000 habitantes. As plantações de café alcançaram desenvolvimento extraordinário trazendo a riqueza para a cidade. Sua topografia, no entanto, dificultava a sua expansão. Separando as freguesias da cidade, havia colinas, espigões, rios e várzeas alagadas, tornando necessárias várias obras de engenharia e saneamento.

Os processos de industrialização e urbanização no país provocaram o crescimento acelerado da demanda social por escola e uma conseqüente mobilização das elites intelectuais em torno da reforma e da expansão do sistema educacional brasileiro.

Dessa forma, na Educação, “as questões escolares eram examinadas em correlação com a definição histórica, sendo as oportunidades escolares tratadas de maneira articulada com as questões econômico-sociais e culturais”. (NORONHA; RIBEIRO; XAVIER, 1994, p. 122)

A Escola Politécnica de São Paulo veio, assim, integrar, nos primeiros anos da República, o núcleo das Escolas de Engenharia, com a Escola Politécnica do Rio de

Janeiro, fundada em 1874 a partir da Escola Central, antiga Academia Real Militar, e com a Escola de Minas de Ouro Preto, de 1875. Esse conjunto foi acrescido, em 1896, da Escola de Engenharia Mackenzie, também sediada em São Paulo, e da Escola de Engenharia de Porto Alegre.

O ato da fundação da Escola Politécnica deu-se, oficialmente, pelo projeto de criação de autoria do engenheiro Antonio Francisco de Paula Souza (1843-1917), quando era deputado estadual.

Paula Souza era natural de Itu, cidade do interior paulista. Iniciou seus estudos na Escola Politécnica de Zurique e terminou-os na Karlsruhe, na Alemanha. Após um estágio de dois anos na construção de estradas de ferro nos Estados Unidos, voltou ao Brasil, onde continuou, por um período, na engenharia ferroviária. Tornou-se professor, escritor de livros sobre ciências e tecnologia, e organizador de políticas para essa área.

Foi o primeiro diretor da Superintendência de Obras Públicas de São Paulo e ministro das Relações Econômicas, da Agricultura e da Aviação do governo Floriano Peixoto e dirigiu a Politécnica até a sua morte.

Foi, também, professor na Escola das cadeiras de Resistência dos Materiais e Estabilidade das Construções, introduzindo o ensino do concreto armado nessas disciplinas, no Brasil. Criou, em 1899, o gabinete de Resistência dos Materiais da Escola Politécnica de São Paulo dedicado à pesquisa tecnológica e cujas atividades tiveram início em 1903.

A partir do Gabinete de Resistência dos Materiais constituía-se um instituto de pesquisas em tecnologia, que se tornaria um respeitável centro de projetos e de ensaios voltado às necessidades da indústria.

O Gabinete foi projetado pelo professor suíço Ludwig von Tetmayer, sendo seu primeiro diretor o alemão Wilhelm Fisher, auxiliado pelo politécnico Hippolyto Gustavo Pujol. Supervisionava ensaios realizados pelos alunos sobre a resistência de materiais em uso corrente na construção civil, sendo, no início, um departamento essencialmente didático, que atendia a formação dos futuros engenheiros. Transformado em Laboratório de Ensaio de Materiais (1926), passou a atender as necessidades da pesquisa tecnológica, servindo às indústrias, sobretudo à de construção civil. O nome atual: Instituto de Pesquisas Tecnológicas, IPT, surgiu em 1934.

Alvim e Goulart (1994, p.48) afirmam que:

o apoio tecnológico oferecido pela Escola Politécnica, pelo IPT e por outros institutos brasileiros abriu caminho para o País ingressar no setor de construção pesada, anos depois, com indústrias de base, hidroelétricas e grandes estradas, além de fornecer subsídios para a cidade de São Paulo, que ao longo da década de trinta obteve taxas de crescimento explosivas.

Deve-se levar em conta que, nessa época, um novo ideário urbano era objeto de debates na capital federal brasileira de então, o Rio de Janeiro, e na emergente São Paulo. Os processos de infra-estrutura e urbanização em São Paulo adquiriam urgência e importância estratégica, já que se tratava da inserção do mesmo, e do Brasil, na economia mundial da chamada Segunda Revolução Industrial. Os fundamentos das propostas abrangiam a formação de um mercado de trabalho, a institucionalização de um mercado de terras, a ampliação de um mercado de consumo, enfim, assuntos relativos à industrialização e à urbanização das cidades.

Nesse cenário de transformações é que entra a importância das Escolas de Engenharia e dos laboratórios de pesquisa, pois a indústria da construção enfrenta desafios econômicos e técnicos, ou seja, as obras necessárias às construções de uma infra-estrutura urbana, energética e de transporte ligam-se às origens da Engenharia e da Arquitetura no Brasil.

Segundo Gitahy (apud COSTA, 2003, p. 69), “os processos que levaram à constituição do assim chamado ‘complexo cafeeiro’ no Brasil da segunda metade do século XIX são contemporâneos à difusão mundial do uso do concreto”.

A riqueza do café marcou o enriquecimento de São Paulo nos fins do século XIX e no início do século XX. Nessa época, o engenheiro baiano Samuel Neves (1863 – 1937) tinha um escritório técnico especializado em cálculos de grandes estruturas em São Paulo. Seus calculistas, no entanto, eram alemães, por falta de brasileiros no ramo. Não se formara uma competência nacional, quer para o cálculo, quer para a pesquisa.

Esse saber surgiu em São Paulo com o Gabinete de Resistência dos Materiais. O estudo experimental e os ensaios de material utilizados no primeiro edifício de concreto armado em São Paulo, o Guinle, de oito andares, na rua Direita, foram uma contribuição pioneira à cidade. Esse estudo esteve sob a responsabilidade de Hippolyto Pujol e Carlos Barbosa de Oliveira, engenheiros formados na Escola.

Segundo Costa (2003, p. 69),

[...] todo processo de urbanização está calcado no desenvolvimento de conhecimento que, de uma forma ou de outra, busca se legitimar e se institucionalizar. Nesse sentido a fundação da Escola Politécnica de São Paulo surge no bojo do crescente processo de urbanização do Estado, retroalimentando-o. A fundação da Escola está articulada a um conjunto de medidas vinculadas ao projeto nacional que a burguesia cafeeira paulista de então impulsionava.

No caso da Escola Politécnica, o desenvolvimento do conhecimento não é limitado apenas ao saber técnico científico, transcende para o sistema educacional como um todo e desemboca na pesquisa, como alavanca de reforma na cultura e na sociedade.

Se nos limitarmos à ciência e à técnica, a Escola cristalizou a consciência sobre a realidade urbana em São Paulo, como um conjunto de obras a se realizar para o atendimento de sua expansão.

Essa consciência não significou uma alteração real e imediata no quadro das realizações urbanas, por falta de recursos financeiros do poder público para assumir empreendimentos de grande vulto. Somente a iniciativa privada arriscava capitais em realizações, oferecendo propostas articuladas segundo o seu interesse.

Quanto à Nação, o governo da República não possuía uma política para a ciência e para a tecnologia, “assunto que revelava ter uma compreensão simplória e algo deformada, fruto de uma cultura positivista e imediatista, de uma racionalidade rasteira”. (Revista Pesquisa FAPESP, 2000, p. 24)

A atenção nacional pela ciência e tecnologia, pelos movimentos educacionais, pelos eventos culturais e outras questões da esfera cultural e sócio-política, surgiu lentamente durante as primeiras três décadas do século passado.

Essa atenção não foi e não é ainda suficiente para determinar um sentido de futuro. É uma questão complexa, que envolve vontade política, estabilidade financeira, capacidade de implantação, imediatismo, dependência e outros problemas, que não é para ser discutida neste trabalho.

CAPÍTULO 2

OS CURSOS BÁSICOS DA ESCOLA POLITÉCNICA EM SEUS PRIMEIROS ANOS

A criação da Escola Politécnica inicia-se com a eleição de Antônio Francisco de Paula Souza para deputado estadual, em 1892.

Em suas funções legislativas, o engenheiro dedicou-se à organização do ensino superior de ciências e tecnologia em São Paulo, apresentando o Projeto de Lei nº 9 à Câmara de Deputados de São Paulo, autorizando o Estado a criar o “Instituto Polytechnico de São Paulo” – o qual combinaria um aprendizado técnico ao de ciências aplicadas às artes e às indústrias.

Vargas (1994, p. 16) descreve a constituição da nova Escola Politécnica na forma seguinte:

Este instituto seria composto de um curso preliminar, capaz de preparar técnicos para a indústria, topógrafos e projetistas; e cursos especiais, a serem criados posteriormente de engenharia civil, mecânica, arquitetura, química industrial, agricultura e, também, de ciências matemáticas e naturais.

O projeto sofreu críticas na imprensa, em artigos assinados por Euclides da Cunha, e, na própria Câmara, forte oposição do deputado Gabriel Passos. Alfredo Pujol encarregou-se de sua defesa na Casa, apresentando substitutivo que autorizava a criação de uma Escola de Engenharia e uma outra de Agricultura.

Ao final, o projeto foi aprovado, e a Politécnica foi inaugurada sob a direção de Paula Souza, sendo vice-diretor Luiz Anhaia Mello. Além destes, são fundadores os

lentes Francisco de Paula Ramos de Azevedo¹ e Carlos Gomes de Souza Shalders², que se tornaram, posteriormente, diretores da Escola.

A Escola Politécnica de São Paulo foi criada pela lei nº 191, de 24 de agosto de 1893, assinada pelo presidente do Estado de São Paulo, Bernardino de Campos. Esse dispositivo legal aprovava o Regulamento da Escola, que, de acordo com o “Diário Oficial” do Estado de São Paulo, de 7 de setembro de 1893³, estipulava em seus dois primeiros artigos:

Artigo 1^o. Fica creada na cidade de São Paulo uma escola superior de mathematicas e sciencias applicadas às artes e industrias, que se denominará “Escola Polytechnica de S. Paulo”.

Artigo 2^o. A Escola Polytechnica compor-se-á dos cursos especiaes que forem creados por lei, opportunamente, alem dos seguintes:

- 1^o Curso de engenharia civil
- 2^o Curso de engenharia industrial
- 3^o Curso de engenharia agricola
- 4^o Curso anexo de artes mechanicas.

O artigo 3^o do decreto lei estipulava a distribuição das cadeiras e aulas nos cinco anos de estudo de cada um dos cursos.

O primeiro regulamento da nova Politécnica foi a Lei Estadual de 24/08/1893, na qual a Escola foi definida como uma instituição superior de Matemática e de Ciências aplicadas às artes e indústrias, caracterizada pelo desenvolvimento do ensino experimental e da instrução prática. Determinava condições de matrícula, a aceitação de alunos ouvintes, o regime de frequência livre e a existência de bagagem. Essa era uma forma de expressão referente ao aproveitamento de cursos anteriores realizados pelos alunos.

Segundo Loschiavo dos Santos (1985, p. 273), um ano após a sua criação, o programa de ensino da Politécnica foi transformado pelo seu segundo regulamento, o decreto estadual nº 270-A, de 20/11/1894, que estipulava uma divisão desses programas em Curso Fundamental, transmitindo matérias básicas, e Cursos Especiais, para formar Engenheiros Civis, Engenheiros Arquitetos, Engenheiros Industriais, Mecânicos e Maquinistas.

¹ Francisco de Paula Ramos de Azevedo (1851-1928) – vice-diretor, no período 1900-1917, e diretor, no período 1917-1928, na Escola Politécnica.

² Carlos Gomes de Souza Shalders (1863-1963) – diretor da Escola Politécnica, no período 1931-1933; professor de *Matemática Elementar, Trigonometria Retilínea e Esférica* e *Álgebra Superior*, na mesma Escola.

³ Anexo A, p. 97.

O Curso Fundamental era composto de duas partes: Curso Preliminar, com um ano de duração, e Curso Geral, com dois anos de duração. A primeira distribuição das disciplinas nesses cursos, em 1894, foi a seguinte:

Curso Preliminar

*Cadeiras : Matemática Elementar (revisão e complementos),
Trigonometria Retilínea e Esférica, Álgebra Superior.
Rudimentos de Geometria Analítica e Geometria Descritiva.*

*Aulas : Escrituração Mercantil.
Desenho à mão livre e Geometria Elementar.*

O Curso Preliminar tinha a função de curso de nivelamento para os iniciantes, com a revisão do Ensino Médio acrescida de uma complementação, que auxiliaria o acompanhamento das disciplinas futuras.

Curso Geral. Primeiro Ano

*Cadeiras : Geometria Analítica a duas e três dimensões. Geometria Superior.
Cálculo Infinitesimal.
Geometria Descritiva.
Física Geral e Meteorologia.*

Aula: Desenho Geométrico e Ornamentos.

Curso Geral. Segundo Ano

*Cadeiras : Mecânica Racional.
Topografia, Elementos de Geodésica e Astronomia.
Aplicação de Geometria Descritiva.
Química Geral e Noções de Ciências Naturais.*

Aula : Desenho Topográfico e de Arquitetura.

Era no Curso Geral que se iniciavam as disciplinas pertinentes de um ciclo básico do Curso, em particular o Cálculo e a Física, com a Mecânica Racional como uma disciplina específica, dada em separado da Física Geral. A Descritiva, a Topografia e o Desenho de Arquitetura surgiam como disciplinas aplicadas.

O mesmo decreto, que organizava a parte básica, estipulava que a habilitação nas matérias do Curso Fundamental dava direito aos títulos de contador, agrimensor e engenheiro geógrafo.

O título de contador era conferido ao aluno devidamente habilitado nas disciplinas do Curso Preliminar (um ano), o que constituía novidade didática e profissional.

Segundo ainda Loschiavo dos Santos (1985, p. 280):

[...] este é um aspecto extremamente importante da organização didática da Escola Politécnica de 1894 pois, além dos cursos básicos constituírem a base comum de vários cursos de Engenharia, foi através deles que se instituiu o primeiro diploma de contador do País, evidenciando assim a contribuição da Politécnica para o desenvolvimento do ensino da Economia e Contabilidade, desde o final do século passado. As primeiras escolas de Comércio no Brasil só vieram a ser instaladas em 1902: a Academia de Comércio de São Paulo e a Escola Prática de Comércio de São Paulo.

O título de Agrimensor era conferido ao aluno habilitado nas matérias do Curso Preliminar, nas cadeiras do Curso Geral de *Física Geral e Meteorologia* e de *Topografia, Elementos de Geodésica e Astronomia*, e na aula de *Desenho Topográfico e Elementos de Arquitetura*.

O título de Engenheiro Geógrafo era conferido ao aluno habilitado em todas as cadeiras do Curso Preliminar e Geral.

Essas qualificações eram um atrativo para o aluno adquirir um trabalho sem se afastar da profissão que escolhera.

Mais tarde, em 1897, um decreto estadual agrupava o curso profissionalizante da Escola em duas secções, da seguinte forma: o decreto estadual nº 485, de 30/9/1897, agrupou os Cursos Especiais de formação do Engenheiro em duas divisões. A primeira integrada pelos cursos de Engenheiros Civis, Arquitetos, Industriais e Agrônomos. A segunda divisão agrupava os cursos de Mecânicos, Condutores de Trabalhos, Agrimensores, Maquinistas e Contadores.

A partir dessas regulamentações iniciais, o programa de ensino das disciplinas da Escola Politécnica sofreu modificações, nos anos referidos neste trabalho, por leis federais e estaduais e por decisões de seu corpo administrativo e docente. As alterações principais das disciplinas básicas dizem respeito à Geometria Analítica, que era dada no Curso Preliminar, de uma forma introdutória e no Curso Geral, na forma vetorial, oficialmente após 1925. A Geometria Analítica era uma disciplina

independente, com a sigla de Primeira Cadeira do Curso Geral, e esteve ligada ao Cálculo Infinitesimal por um período de dezesseis ou dezessete anos.

Em 1901, foram reunidas em uma só cadeira as disciplinas de Geometria Analítica e Cálculo Infinitesimal. Essa junção durou até 1918, quando, em nova reforma, foram separadas. Durante essa união, as disciplinas ficaram sob a responsabilidade de um só professor.

No ano de 1911, os Complementos de Matemática Elementar passaram a constituir duas cadeiras do Curso Preliminar, uma das quais abrangia a Trigonometria Esférica, que era dada em Astronomia e Geodésica.

Em 1918, em uma mudança mais abrangente, os Complementos de Matemática Elementar e a Álgebra Superior concentraram-se em uma só cadeira, e a Física Experimental passou a ser dada em três anos.

O título de Contador foi extinto, pois a aula de Contabilidade foi deslocada do Curso Fundamental para o último ano dos cursos especiais.

Outra mudança ocorreu em 1925: uma Introdução de Elementos de Geometria Analítica passou a ser uma disciplina do Curso Preliminar. Introdução de Vetores e Nomografia começou a ser ministrada na Primeira Cadeira do Curso Geral. Essa foi uma transformação importante, porque o Curso Preliminar voltou a ter um curso introdutório de Geometria Analítica, e a Primeira Cadeira cuidava da Geometria Analítica Vetorial.

Em 1932, o Cálculo Vetorial desligou-se da Geometria Analítica e Projetiva, figurando como parte introdutória da cadeira de Mecânica Racional. A Primeira Cadeira passou a reunir Complementos de Matemática Elementar, Álgebra Superior, Elementos de Geometria Plana e no Espaço.

A Geometria Analítica e a Nomografia, que pertenciam à Primeira Cadeira, foram reunidas ao Cálculo Diferencial e Integral.

Em 1934, foi criada a Universidade de São Paulo, sendo a Escola Politécnica a ela incorporada. O ensino de matérias básicas passou a ser ministrado no Colégio Universitário, agora com dois anos de duração e destinado à preparação dos candidatos aos cursos das Faculdades ou Escolas integrantes da USP. O órgão era dividido em cinco seções; a terceira seção era destinada à preparação para a Escola Politécnica e para as Ciências: Matemática, Física e Química, da nova Faculdade de Filosofia Ciências e Letras.

Os anos 30 marcaram mudanças na estrutura da Escola Politécnica. As revoluções de 30 e 32 derrotaram “a política do café paulista e do leite mineiro e marcaram o fim de um primeiro período da Escola”. (VARGAS, 1994, p. 20)

Vargas cita a criação da Universidade de São Paulo, em 1934, como o evento que transformou a formação dos engenheiros de São Paulo, representando o início de um novo período da Politécnica.

Seria o professor Teodoro Augusto Ramos (1895-1936) – catedrático de Mecânica Racional e Cálculo Vetorial – “o mentor desse novo aspecto, em que a engenharia vai buscar a solução de seus problemas não só nas ciências aplicadas mas, também, nas próprias ciências então ditas puras”.⁴

Essa visão é dirigida à atuação de Teodoro Ramos, como um dos organizadores da Universidade, que trouxe para os cursos básicos os professores europeus especializados em Matemática e Física. Tais cursos eram ministrados em conjunto com a Seção de Ciências da Faculdade de Filosofia Ciências e Letras da Universidade.

Apresentamos, no Anexo B⁵, os quadros do pessoal docente e administrativo responsável pelos cursos da Escola Politécnica, e, no Anexo D⁶, os programas de disciplina desse curso que são do nosso interesse. Tais programas da cadeira de Cálculo Infinitesimal são referentes aos anos de 1899 e 1900, do início da Escola.

⁴ VARGAS, op. cit., p. 20

⁵ p. 98-103.

⁶ p. 105-115

CAPÍTULO 3

O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL E A ANÁLISE DA ESCOLA POLITÉCNICA

A estrutura curricular da Escola Politécnica, em seu primeiro período de funcionamento, incluía as disciplinas do Curso Fundamental como básicas para os cursos específicos das Engenharias que se constituíam como parte principal.

Loschiavo dos Santos (1985) ressalta o papel propedêutico da Matemática e das demais disciplinas do Curso Fundamental, bem como a importância do ensino da Matemática, da Física, da Química e das Ciências Naturais para a formação do Engenheiro.

A Matemática, em particular o Cálculo Infinitesimal, exerceu o seu papel de disciplina de serviço na educação dos estudantes de engenharia. Tinha a finalidade de atender às necessidades dos estudantes em seu Curso, capacitando-os para o exercício de suas futuras funções.

A Matemática é considerada, por muitas vezes, a serviço de atividades técnicas ou de outras ciências. Aparece como indispensável – no caso da Engenharia e áreas científicas afins – ou como muito útil, de uma importância complementar no caso de profissionais em geral.

É uma necessidade cultural que une dois aspectos: modos matemáticos de pensar e um domínio de conhecimento essencial. Assume um estatuto que transcende a Matemática Pura, que exige a competência do saber, conjugando-a com a habilidade do saber fazer da Matemática Aplicada.

Após essa ressalva, relativa ao papel do Cálculo Infinitesimal na Escola de Engenharia Politécnica, retomamos o seu início para focalizar a organização dos programas da disciplina nessa época.

O desenvolvimento dos programas de Cálculo, desde os primeiros anos da Escola até a década de 30, estava a cargo dos lentes catedráticos: Urbano Vasconcellos¹ e Rodolpho Baptista de San Thiago².

Vasconcellos foi o primeiro professor a assumir a disciplina na Escola, em 1895, permanecendo no cargo até a sua morte prematura, em 1901. San Thiago, seu substituto, era professor da disciplina de Geometria Analítica e Secretário da Escola Politécnica. Acumulou as funções administrativas e assumiu o Cálculo Infinitesimal, que se fundiu com a Geometria Analítica compondo uma única disciplina. Essa reunião das duas disciplinas foi estabelecida pelo decreto nº 924, de 29/07/1901 e durou até 1918.

Os dois professores apresentaram, cada um em seu tempo, programas idênticos para o Cálculo, que constam dos anuários de 1901 e 1906 da Escola. Uma cópia desses programas encontra-se transcrita neste trabalho.³

A disciplina iniciava com a noção de função, considerada como básica e seguida de três métodos para a fundamentação do Cálculo: o Método dos Limites, apresentando o que chamavam de “*concepção de Newton*”; o Método Infinitesimal, apresentando “*a concepção de Leibniz*”; e o Método das Derivadas, com a “*concepção de Lagrange*”.

Esses métodos eram as idéias preliminares que fundamentavam o Curso de Cálculo desses professores. Conduziam o assunto diretamente ao Cálculo Diferencial, estabelecendo a noção de derivada, seguida de suas aplicações analíticas: desenvolvimento de funções em séries de potências e as fórmulas de Taylor para funções de uma e de duas variáveis. Também apareciam as aplicações geométricas das derivadas: a determinação da reta tangente a uma curva em um ponto, as diferenciais, as análises de curvas planas e de superfícies.

Em seguida, constituía-se o Cálculo Integral, com a definição de integral, os processos de primitivação e o cálculo aproximado de integrais. Tudo com as devidas aplicações geométricas. No final, apareciam métodos de resolução de equações diferenciais de primeira ordem e de ordem superior, incluindo equações diferenciais lineares. Os programas não mencionam equações diferenciais a derivadas parciais.

¹ Urbano de Vasconcellos (1864-1901) – Engenheiro civil, formado pela Escola Politécnica do Rio de Janeiro, em 1886. Dentre suas atividades, destacamos, além do magistério, as funções de Secretário Geral na Escola Politécnica de São Paulo (1894 a 1896).

² Rodolpho Baptista de San Thiago (1870-1933).

³ Anexo D, p. 105-110.

A introdução original, com os três métodos de fundamentação para o Cálculo, persistiu até 1932, sob a orientação de San Thiago, como pode ser comprovada pelos programas elaborados para a disciplina até esse ano. O estatuto de discursos fundadores, no sentido de Orlandi (2001), que esses métodos possuíam, manteve-se por mais de trinta anos na disciplina.

Vasconcellos foi o iniciador dessa metodologia de trabalho, seguida por San Thiago após sua morte. Nomeado para o cargo de lente catedrático do Cálculo Infinitesimal, San Thiago ocupou-o até 1933, amparado pelo regime vigente de cátedra vitalícia. Por essa razão é uma personalidade central de nosso trabalho.

Natural de Vassouras, Estado do Rio, San Thiago diplomou-se engenheiro civil pela Escola Politécnica do Rio de Janeiro em 1893. Nesse mesmo ano, alistou-se no Batalhão Acadêmico, lutou ao lado de Floriano Peixoto e, em seguida, trabalhou como engenheiro ferroviário no Ceará e como engenheiro de saneamento no interior e na capital de São Paulo. Entrou para o corpo docente da Escola Politécnica em 15 de outubro de 1898, primeiramente como professor substituto, chegando a catedrático. Em 1902, foi nomeado Secretário da Escola, cargo que ocupou por 26 anos, até 1928, quando se tornou Diretor, com a morte de Ramos de Azevedo. Faleceu em 29 de setembro de 1933.

O anúncio de sua morte e uma homenagem ao professor San Thiago, proferida pelo professor Vitor da Silva Freire, que o sucedeu como diretor da Escola, mereceram publicações na revista *O Politécnico*. Encontram-se no Anexo E⁴.

O livro adotado no início do Curso de Cálculo foi o *Premiers Éléments du Calcul Infinitesimal*, de H. Sonnet. Sua 6ª edição, de 1902, era dirigida à carreira de engenheiro e fundamentava o Cálculo com a noção de infinitésimo, mantendo distinções em relação ao discurso de San Thiago.

Esse discurso aparece em suas *Notas de Aulas do Curso de Cálculo*, de 1904, organizadas por Adriano Goulin, aluno da Politécnica na época. Sua análise constitui o principal objetivo deste trabalho. A fundamentação da disciplina, que serve de base para a construção do Curso de San Thiago, é apresentada por Goulin e foi incluída no Anexo F.⁵

⁴ p. 116-120.

⁵ p. 121-135.

Encontram-se, nos apêndices, as análises do livro de H. Sonnet, mencionado acima, e a obra de Francesco Severi: *Lezioni di Analisi*, que foi usada no curso da Politécnica, logo após o falecimento de San Thiago.

Com a criação da Faculdade de Filosofia Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, em 1934, da Escola de Ciências da Universidade do Distrito Federal, em 1935, e da Faculdade de Filosofia da Universidade do Brasil, em 1939, apareceram os professores formados em Matemática e os centros principais de pesquisa dessa ciência no Brasil, transformando o cenário do ensino da Matemática em nosso Estado e no País.

Na ocasião, o governo paulista designou o professor Theodoro Ramos⁶, da Escola Politécnica, para a tarefa de escolher os professores estrangeiros que deveriam lecionar no Curso de Matemática da Faculdade de Filosofia e em outras disciplinas científicas da Universidade de São Paulo.

Theodoro Ramos cumpriu a incumbência eficientemente. Convidou o matemático italiano Luigi Fantappié⁷ para a cadeira de análise matemática, trazendo para a nova faculdade o seu prestígio e a sua determinação de trabalho.

Fantappié era um matemático jovem, que já apresentava um currículo respeitável, com trabalhos relativos à Teoria dos Funcionais Analíticos.

Segundo Oliveira Castro (1992, p. 63), em referência à sua passagem pela USP:

Fantappié estimulou e promoveu a pesquisa na Universidade de São Paulo, criou a primeira biblioteca especializada em Matemática no país, organizou cursos e seminários, conseguindo bolsas para estudantes brasileiros no exterior; enfim, desenvolveu atividade intensa em favor da habilitação do matemático.

Além da menção de Oliveira Castro, também Ubiratan D'Ambrosio (2000, p. 251) retrata esse período de desenvolvimento da Matemática no Brasil:

⁶ Theodoro Ramos (1895-1935). Engenheiro civil, formado pela Escola Politécnica do Rio de Janeiro, em 1917.

⁷ Luigi Fantappié (1901-1956).

Com a inauguração da Universidade de São Paulo em 1934, novas possibilidades foram abertas para a matemática no Brasil. Podemos afirmar que o acontecimento representou o início da pesquisa sistemática em matemática no país. Luigi Fantappiè e Giacomo Albanese⁸, renomados matemáticos italianos contratados pela Universidade de São Paulo, respectivamente nos campos de análise funcional e geometria algébrica foram os responsáveis pelo início de uma importante escola de pesquisa em São Paulo.

A atividade de Fantappiè no Brasil não esteve limitada ao Curso de Matemática. Inicialmente foi contratado para dar aulas na Escola Politécnica, tendo sob sua responsabilidade o curso de Cálculo Infinitesimal. O texto utilizado em complemento às suas aulas foi o livro de análise de Francesco Severi.

Vargas (1994, p.20) relata com entusiasmo o desenvolvimento dos cursos básicos da Politécnica dessa época:

O sucesso desses dois cursos básicos: o de Matemática, dado pelos italianos Luigi Fantappiè e Giacomo Albanese, e o de Física, pelo ítalo-russo Gleb Wataghin⁹, é explicado pela superior capacidade didática desses excelentes professores e pelo fato que eles estavam conscientes de estar lecionando também para futuros engenheiros. Foi notável a influência dessa nova maneira de encarar a formação dos politécnicos. Eles ocorreram exatamente no momento em que a evolução da tecnologia começou a exigir o emprego da alta matemática e física avançada na solução de problemas tecnológicos. Até hoje, notam-se, no ensino da engenharia da Politécnica paulista, os ecos daquela grande revolução promovida por Fantappiè, Albanese e Wataghin.

Acreditamos que a relevância dos cursos básicos mencionados reside, do ponto de vista formativo, no fato novo do perfil pretendido para o engenheiro nessa época. Pensar na sua formação não apenas delineada por ciências aplicadas ou pela tecnologia, mas pensá-la também, assegurada pelo conhecimento matemático e físico.

Um outro dado relevante, este de interesse para o nosso trabalho, é a mudança ocorrida na fundamentação do curso de Cálculo a partir dessa época. Os fundamentos do Curso de Fantappiè, dados com a adoção do livro de Severi, produziam um envolvimento matemático diferente da fundamentação de San Thiago. Daí a importância de uma análise epistemológica e comparativa dos dois cursos. É o que pretendemos fazer, após a leitura dos textos correspondentes.

⁸ Giacomo Albanese (1890-1947).

⁹ Gleb Wataghin (1899-1986).

O ensino do Cálculo Diferencial e Integral e da Física pelos professores Fantappié e Wataghin, na Politécnica, durou pouco. Ainda na década de trinta foram estabelecidas as cátedras dessas disciplinas, sob a regência dos professores José Octavio Monteiro de Camargo e Luís Cintra do Prado.

As diretrizes da análise dos textos

Nosso objetivo é estabelecer modelos de percepção nas análises de conteúdo dos livros adotados e seguidos no curso de Cálculo Diferencial e Integral da Escola Politécnica, no período que se inicia com a sua criação, em 1893, e vai até a fundação da Universidade de São Paulo, em 1934.

As obras em questão são: o *Curso de Cálculo*, manuscrito das aulas de San Thiago, organizado e litografado por Adriano Goulin, e os livros: *Premiers Éléments du Calcul Infinitésimal*, de Sonnet e *Lezioni di Analisi*, de Severi. Esses últimos foram analisados para comparação com o manuscrito de Goulin e encontram-se no apêndice.

A ação é limitada ao período determinado e não pretende comparações com a matemática contemporânea existente na organização dos livros didáticos atuais, ou aceita e aprovada pela comunidade matemática de nossos dias.

As comparações existentes referem-se unicamente a essas obras e ao tempo em que as mesmas foram abordadas nas aulas da Politécnica.

Nesse trabalho seguimos Bardin (1977, p.9), para quem a análise de conteúdo é “um conjunto de instrumentos metodológicos cada vez mais sutis, que se aplicam a ‘discursos’ (conteúdos e continentes) extremamente diversificados. É uma hermenêutica controlada, baseada na dedução: a inferência.”

É um conjunto de técnicas de análise das comunicações, com diferentes possibilidades de categorização, entre as quais, a investigação dos temas: a análise temática, e a investigação dos processos de produção e organização dos discursos. Usaremos primordialmente, a análise do discurso.

A análise do discurso procura reconhecer suas características: seus traços ou marcas lingüísticas, propriedades responsáveis pelo funcionamento do discurso. Isso tem que ver com as condições de produção, seu funcionamento, suas formas

discursivas, suas formações ideológicas, “conceitos mediadores do discurso entre o lingüístico e o ideológico”.¹⁰

Assim, de acordo ainda com Orlandi (1996, p.15), “os conceitos fundamentais dessa análise de discurso (há outras) são: processo e produto, contexto histórico-social, interação, trabalho, formação discursiva, formação ideológica”.

O nosso interesse está no discurso matemático, o discurso que molda o conhecimento matemático.

Trataremos do discurso dos autores dos livros didáticos de Matemática, que combina o discurso científico com o pedagógico.

O processo de produção do livro texto de Matemática é encaminhado por três propósitos: a transmissão de informações, a construção do conhecimento e a negociação de significados.

Dessa forma, suas formações discursivas refletem os conflitos entre as tendências filosóficas: a lógica, que trata da matemática formal, organizando os axiomas, as definições e os teoremas e contribui para a argumentação matemática das demonstrações; a heurística, que organiza a construção do conhecimento matemático dos leitores pelas atividades matemáticas: exercícios e problemas; e a retórica, que organiza a negociação dos significados: motivação, aceitação, exemplos, figuras, aplicações, notas históricas.

Hariki (1992), analisando o discurso matemático, considera esse processo dialético, afirmando que os livros didáticos de matemática são campos de batalha, em que lutam lógica, heurística e retórica, e lugares de negociação, também de lógica heurística e retórica, tornando a apresentação rigorosa, compreensível e aceitável.

Ao final de seu trabalho, Hariki afirma que as técnicas de análise de discurso podem auxiliar os educadores e professores de matemática a entenderem o ato de ensinar e aprender matemática como um processo de negociação entre professores e alunos ou entre autores e leitores.

Neste trabalho associamos a análise de discurso, entendida como acima, com a análise temática das obras para observar a existência de abordagens distintas e de situações relevantes.

¹⁰ ORLANDI, 1996, passim

Um olhar observador torna-se necessário para orientar o exame e, nessa linha, o tratamento metodológico do Cálculo, nos livros didáticos, caracteriza-se por duas apresentações: uma primeira, cujo processo de produção “fornece uma revelação do Cálculo”, aparece “sistematizado, formal e logicamente organizado”; uma segunda, na qual a disciplina “apresenta uma seqüência temática que não obedece necessariamente à estrutura lógica, mas muito mais ao desenvolvimento do Cálculo ou à sua contemporaneidade. O Cálculo em construção”. (BARUFI, 1999, p. 53, 57)

Além do que dissemos, a verificação da existência de notas históricas foi acrescida ao esquema, em proveito de uma análise epistemológica sobre a construção do conhecimento científico.

Dessa forma, o olhar dirigido promoverá uma interpretação do plano da obra, do estilo do autor na organização do discurso, de suas pretensões visíveis e de suas contribuições para o conhecimento matemático.

Essas diretrizes nortearão o exame do texto das aulas de San Thiago, organizado, em 1904, pelo politécnico Goulin.

Curso de Cálculo

Rodolpho Baptista de San Thiago
Notas de aulas por Adriano Goulin

Organização de conteúdos

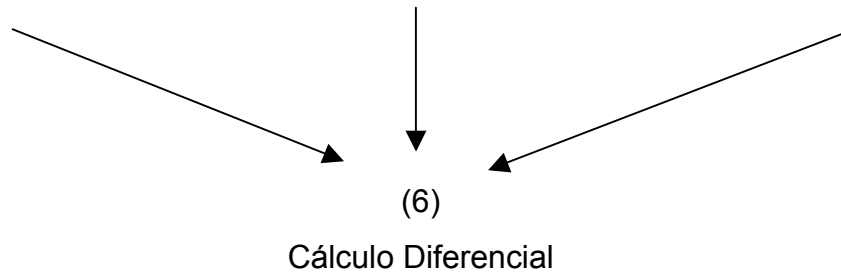
(1) Funções

(2) Método de exaustão

(3) Método de Leibniz

(4) Método de Newton

(5) Método de Lagrange



(7) Aplicações analíticas e geométricas do Cálculo Diferencial

(8) Cálculo Integral

(9) Métodos de integração

(10) Integrais definidas

(11) Aplicações geométricas do Cálculo Integral

Análise das notas de Aula

Trata-se de uma interpretação das aulas expositivas, do ano de 1904, do professor San Thiago, responsável pela disciplina Geometria Analítica e Cálculo Infinitesimal da Escola Politécnica de São Paulo, no início da Escola Politécnica, permanecendo à frente do Cálculo Diferencial e Integral até a década de 1930.

Essa interpretação foi organizada por um seu aluno Goulin, na forma de um caderno, que foi litografado e encontra-se na Biblioteca Central da Escola.

Dessa forma, quando comentamos o discurso de San Thiago nesse texto, devemos entendê-lo como uma reorganização de sua fala, que Goulin realizou e nela introduziu suas percepções e ideologias.

O caderno contém o Curso de Cálculo, em um total de 182 páginas, das quais as 16 primeiras tratam da fundamentação do curso. As restantes dividem-se entre o Cálculo Diferencial, com 120 páginas, e o Cálculo Integral, com 46 páginas.

Apresenta uma longa e interessante introdução com as noções de função e continuidade, acrescidas de explicações e orientações sobre os denominados métodos especiais da análise infinitesimal: o método de exaustão; empregado por Arquimedes, o método de Leibniz, dos infinitésimos; o de Newton, das primeiras e últimas razões, e o método de Lagrange, chamado das derivadas.

A forma de expressão e as explicações detalhadas do texto revelam o discurso de San Thiago, assimilado na Escola Politécnica do Rio de Janeiro.

Existem diferenças de forma de expressão entre o discurso do livro adotado no Curso de Cálculo, *Premiers Éléments du Calcul Infinitesimal* de Hyppolite Sonnet, e o discurso das aulas de San Thiago, compiladas por Goulin. Uma delas manifesta-se nas idéias fundamentais que serviram de base para a introdução do Cálculo, ao longo de sua história.

Sonnet introduz o Cálculo usando infinitésimos e a noção de limite, tratados intuitivamente na obra. A introdução de San Thiago é ligada a processos que privilegiam as idéias de infinitésimo, de limite e de séries de potências. Uma comparação dos três métodos leva o autor a afirmar que qualquer deles conduz ao mesmo resultado: a noção de derivada. Conclui, então, pela sua identidade, induzindo o aluno a usá-los de acordo com a sua preferência, nas diversas circunstâncias.

Seu discurso mistura a formalidade matemática com a retórica da linguagem corrente. Alguns conceitos têm caráter definitivo, outros refletem a preocupação de convencer o aluno, discutindo dificuldades possíveis e mostrando caminhos. A organização do texto envolve, então, uma apresentação pronta e definitiva do Cálculo, com outra que apresenta a disciplina em construção.

Não é um texto estruturado na forma da lógica, mas as generalizações e as formalizações aparecem naturalmente, quando necessárias.

Existem poucas figuras no texto, que surgem na determinação da reta tangente a uma curva e na definição de integral. O leitor pode visualizar nelas os argumentos propostos.

Não aparecem exemplos ou problemas motivadores para chegar à construção de conceitos, mas a sua introdução é enriquecida por dados históricos.

O curso é centrado inteiramente no professor, que é o detentor do conhecimento.

Inicia o Curso de Cálculo com uma definição de função:

“Função de uma ou mais quantidades é uma expressão analítica em que entram estas quantidades, combinadas ou não com outras que têm valores certos e determinados, ao passo que as primeiras podem ter valores quaisquer. Essas quantidades que têm valores certos e determinados denominam – se constantes e, as outras, variáveis”. (GOULIN, 1904, p. 3)

O texto não oferece explicações sobre o significado do termo “expressões analíticas” utilizado na definição, mas dá exemplos dessas funções.

Nossa opinião é retirada desses exemplos, em que as funções incluem as fórmulas contendo adições, subtrações, multiplicações, divisões e raízes, bem como expressões que envolvem funções exponenciais, logaritmos, funções trigonométricas. Posteriormente, são apresentadas funções definidas por séries de potências.

Assinalamos, também que a função, vista como uma expressão analítica apenas, é uma fase da evolução desse conceito, atualmente mais amplo e abrangente.

A organização de Goulin do discurso de San Thiago fornece, então, exemplos de funções definidas por expressões analíticas, seguidos de comentários sobre a existência de uma série de classificações de funções: implícitas, na forma $f(x,y,z) = 0$, e explícitas, como $z = f(x,y)$; racionais e irracionais, em concretas e

abstratas; simples, quando uma só operação dá o valor da função, e compostas, quando é necessária mais de uma operação; e em algébricas e transcendententes.

Assim aparecem:

$y = a + x$	<i>função soma</i>
$y = a - x$	<i>função subtração</i>
$y = ax$	<i>função produto</i>
$y = \frac{a}{x}$	<i>função quociente</i>
$y = x^a$	<i>função potência</i>
$y = \sqrt{x}$	<i>função raiz</i>
$y = \log x$	<i>função logarítmica</i>
$y = \text{sen} x$	<i>função circular direta</i>
$y = \text{arcsen} x$	<i>função circular inversa</i>
$y = a^x$	<i>função exponencial</i>

O texto distingue as funções algébricas, em que figuram apenas as operações da Álgebra das demais, que chama de transcendententes.

Declara, ainda, que o Cálculo Diferencial se resume em dar regras para diferenciar essas funções.

São apresentadas, em seguida, as noções de continuidade e de limite de variável. O primeiro conceito é introduzido na forma: “uma quantidade se diz continua, quando não pode passar de um valor a outro, sem passar por todos os valores intermediários”. (GOULIN, 1904, p. 4)

A definição de continuidade é generalizada para as funções f , representadas no texto por seus gráficos, em um sistema de eixos coordenados.

Goulin escreve que, quando x varia de modo contínuo entre dois valores a e b e, a função também, varia de modo contínuo nesse intervalo, ela é contínua.

Desse modo, a continuidade é vista de uma forma descritiva no texto, mas possui uma semântica visual geométrica essencialmente simples.

A idéia de limite é colocada a seguir como: “limite de uma quantidade é a quantidade fixa da qual uma quantidade (variável) se aproxima, sem jamais atingi-la”. (GOULIN, 1904, p. 6)

O texto fala em limite de quantidade variável, não propriamente de limite de função. Dá a característica da sua noção de limite: para a quantidade fixa ser o

limite, é preciso que a diferença entre ela e a variável possa tornar-se menor que qualquer quantidade dada.

Essa é uma definição retórica de limite, que pertence a um dos estágios da evolução do conceito.

O texto recorre ao exemplo visual geométrico do polígono inscrito na circunferência, cujo número de lados é sempre duplicado. O perímetro do polígono tenderá para o perímetro da circunferência, e este é o limite daquele.

Goulin disserta, em seguida, sobre os métodos da análise infinitesimal, também denominada, por ele, de transcendente.

O primeiro método exposto é o Método de Exaustão, usado por Arquimedes para calcular áreas. Esse processo estende para os círculos a propriedade na qual as áreas dos polígonos inscritos são proporcionais aos quadrados dos diâmetros das circunferências circunscritas. Essa extensão é alcançada com o uso da continuidade. Goulin define a circunferência como um polígono de número indefinido de lados infinitamente pequenos. À medida que o polígono tem seu número de lados aumentado, ele “vai se exaurindo”, daí a denominação de método de exaustão.

Segundo Goulin (1904, p. 7), San Thiago afirmava que “os antigos, embora o previssem, não podiam confirmar esse facto e, por isso elles, empregavam o methodo do absurdo”.

Conta, ainda, que San Thiago comentava que o método de exaustão era um processo de análise infinitesimal, usado sem a utilização de uma notação adequada.

Nossa opinião é que os exemplos do campo semântico¹¹ geométrico reforçam o entendimento das definições essencialmente retóricas (não operacionais) que aparecem. Esses exemplos realçam o modo de produção de significado da primeira estipulação local presente no texto: a noção de limite.

Goulin continua o assunto com uma informação sobre Cavalieri e Descartes. Explica que os dois matemáticos usaram o processo com denominações diferentes. Cavalieri chamava-o de método dos indivisíveis e Descartes, que para ele era o precursor da Análise, falava em método dos indeterminados.

¹¹Campo semântico, segundo Lins (1994), é um modo de produção de significado. Em seus trabalhos, Lins criou um modelo epistemológico que permite uma maior proximidade do processo de produção de significados: o *Modelo Teórico dos Campos Semânticos* (MTCS). Sad (1998, p. 128-129) utilizou o MTCS em seus estudos de produção de significados no Cálculo Diferencial e Integral. Para Sad, as estipulações locais do Cálculo vão constituir os núcleos dos modos de produção de significados. A pesquisadora destaca os núcleos básicos usados em seu trabalho: estipulações locais a respeito de limites, a respeito de infinitésimos, visuais geométricas e do tipo algoritmo.

Método de Leibniz

O texto afirma que Leibniz introduziu os infinitamente pequenos ou diferenciais das quantidades:

Leibnitz, para resolver as questões, introduziu os taes infinitamente pequenos ou diferenciais das quantidades. Elle suppunha as quantidades compostas de elementos infinitesimales, estabelecia relações entre estas e, partindo dessas relações, chegava a determinar as relações entre as quantidades das questões". (GOULIN, 1904, p. 7)

Mostra dois exemplos desse método, sendo o primeiro referente à determinação da área sob uma curva, que, em nossos termos, assume a forma: *a área sob uma curva é dividida ou composta por uma série de retângulos de alturas infinitesimais. A área total é dada por $A = y\alpha + y'\alpha^2 + y''\alpha^3 + \dots$, na qual a altura α é infinitamente pequena e as bases y, y', y'', \dots são ordenadas e obtidas a partir de pontos do eixo x .*

O segundo exemplo refere-se à *decomposição de um movimento variado de um móvel de tal forma que, em subintervalos infinitamente pequenos, o movimento seja considerado uniforme.*

A seguir, trata do produto de uma quantidade finita por um infinitésimo e do conceito de ordem infinitesimal.

Trabalha a reta tangente a uma curva $y = f(x)$ em um ponto $M(x,y)$, supondo um ponto $M'(x + dx, y + dy)$ infinitamente próximo a M , e escrevendo:

$$Y - y = \frac{y + dy - y}{x + dx - x} (X - x) \quad \text{com } dy \text{ infinitesimal}$$

$$Y - y = \frac{dy}{dx} (X - x)$$

Finalizando, fala sobre o Cálculo de Leibniz:

Leibniz dividiu o seu Calculo em duas partes: uma, que chamou de Calculo Diferencial, que tem por fim determinar as relações entre as quantidades infinitamente pequenas, e outra, inversa desta, e que tem por fim eliminar essas quantidades, por elle denominada Calculo Integral. (GOULIN, 1904, p. 11)

Com essa frase, é completada a exposição sobre o método de Leibniz no texto.

Nossa opinião é que o método de Leibniz trata de convenções locais infinitesimais, distintas da aproximação local por limites. Enquanto os infinitésimos realçam as mônadas, com a noção de infinitamente próximo, o limite destaca as diferenças entre a quantidade variável e a fixa, isto é, a tendência de movimento da variável, na direção da quantidade fixa.

Método de Newton

O texto afirma que Newton apresentou seu método sob duas formas : método dos limites ou das primeiras e últimas razões e método das fluxões. San Thiago-Goulin procuram explicar o que são as primeiras e últimas razões:

Para compreender em que consiste o primeiro vamos mostrar como entender a sua denominação. Supponhamos ter as quantidades A, B, C, D,... que suporemos fixas e determinadas e que x, y, z, t, sejam outras quantidades que tendam ou se aproximem de modos diferentes das fixas e ao mesmo tempo.

As quantidades A, B, C, D,... supostas fixas e das quaes x, y, z, t, ... se aproximam simultaneamente chamam-se, como sabemos, limites dessa quantidades ou seus últimos valores."

As relações entre x e y, y e z,... tendem, portanto, para as relações entre A e B, B e C,

As relações entre as fixas chamam-se por isso últimas razões das relações entre as variáveis. Supponhamos, agora, o inverso, isto é, que, em vez de x, y, z, ...se aproximarem de A, B, C,... se afastem.

Podemos, então, dizer que A, B, C, ... são, por assim dizer, os primeiros valores das quantidades x, y, z, As relações entre esses primeiros valores serão as primeiras razões das quantidades x, y, z, ...

Dahi a denominação de método das primeiras e ultimas razões. (GOULIN, 1904, p. 12)

O método de Newton das primeiras e últimas razões é, portanto, um processo dinâmico de aproximações, em que quantidades variáveis, chamadas primeiras razões, se aproximam de quantidades fixas, suas últimas razões, ou os seus limites.

O texto menciona, a seguir, a razão entre os "acréscimos" de Newton indicando-a por $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ e o seu limite por $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Com eles determina, à maneira de Newton, a equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ em $M(x,y)$, Considera-a como o limite de todas as secantes da forma MM' , onde $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Assim $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg } \beta$, é o coeficiente angular da reta secante, onde β é a inclinação da secante MM' . O $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg } \alpha$, em que α é a inclinação da tangente em M , é o coeficiente angular da reta tangente.

Conta, também, que a velocidade de um ponto em movimento sobre uma linha foi denominada fluxão, e o arco de curva, fluente. Newton dividiu o Cálculo em duas partes: na primeira introduziu os limites e as fluxões, com o mesmo fim do Cálculo Diferencial e, na segunda, o Cálculo dos fluentes tem a finalidade do Cálculo Integral.

A abordagem de Goulin das aulas de SanThiago na descrição dos processos de Newton, privilegia a intuição, reforçando o significado proposto para os limites, como aproximação da variável, tendendo à quantidade fixa. Isso ocorre na explicação das primeiras últimas razões, uma apresentação aritmética, e na tendência das secantes na direção da reta tangente, com a perspectiva visual-geométrica.

Método de Lagrange

Goulin inicia este item contando que Lagrange instituiu o método das derivadas em substituição aos limites de Newton e aos infinitésimos de Leibniz, considerados por ele como processos que introduziram elementos estranhos à análise: os infinitésimos e os limites.

Lagrange partiu da fórmula de Taylor, que aplicou a $f(x + h)$, em que h é o “acrécimo” dado a x :

$$f(x + h) = f(x) + p.h + q\frac{h^2}{2} + r\frac{h^3}{3} + \dots$$

Estudou os coeficientes e verificou que os mesmos se formavam como as derivadas de f em x . Assim, indicando: $p = f'$, $q = f''$, ..., construiu um processo analítico para o Cálculo.

Lagrange denominou o método de cálculo das funções derivadas. O processo de eliminar essas quantidades era o cálculo das funções primitivas.

O texto de Goulin informa sobre o trabalho de Lagrange de forma breve, em apenas uma página, sem contar como pode ser obtida a expansão de f em séries de

potências. Leva em conta que se está dirigindo a um público iniciante no Cálculo, e que haverá um estudo posterior da série de Taylor nas aplicações de derivadas que cuidam das aproximações de funções.

Apesar de breve, a inclusão do método de Lagrange como fundamentação do Curso de Cálculo da Politécnica é, na nossa opinião, uma decisão importante do autor. O método de Lagrange não consta do livro do Sonnet, adotado para o seu curso, embora fizesse parte do programa anterior de Urbano de Vasconcellos. Sua manutenção foi um ato de vontade de San Thiago, que reconheceu a importância do método para o desenvolvimento do Cálculo como disciplina.

O trabalho de Lagrange apresentou uma concepção diferente de derivada, contribuindo para a transformação do Cálculo em uma teoria de funções e de suas derivadas.

Comparação dos métodos

Goulin afirma, em sua organização que o método que apresenta maiores facilidades é o de Lagrange, “porque não introduz elementos estranhos ao Calculo”, porém o mais usado é o de Leibniz, por ser mais simples no “jogo das quantidades”. (Goulin, 1904, p. 14)

Afirma, ainda, Goulin que a finalidade dos métodos é facilitar o estabelecimento das equações e pergunta se os métodos conduzem aos mesmos resultados. Explica que vai mostrar, com o auxílio da fórmula de Taylor, que a resposta à sua pergunta é afirmativa.

Inicia a sua justificação com o desenvolvimento de $f(x + dx) - f(x)$ em série de potências, na indeterminada dx .

$$f(x + dx) - f(x) = p dx + q \frac{dx^2}{2} + r \frac{dx^3}{3} + \dots = dy \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = p$$

No cálculo anterior, leva em conta que p é uma quantidade finita e as outras, à sua direita, são infinitamente pequenas, por serem infinitésimos de ordem superior. Não são consideradas, por esse motivo.

$$\text{Assim} \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \text{e} \quad dy = f'(x)dx$$

A última relação é explicada com a frase: “a diferencial de uma função é igual ao producto da derivada pela diferencial da variavel independente”. (GOULIN, 1904, p. 16)

A seguir, Goulin retorna ao desenvolvimento em série, na indeterminada Δx e usa o método dos limites de Newton, obtendo o mesmo resultado.

$$f(x + \Delta x) - f(x) = p\Delta x + q\frac{\Delta x^2}{2} + \dots = \Delta y \quad \text{e} \quad \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = p$$

Menciona, então, que a identidade dos três métodos é verificada com a igualdade

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Termina com a definição: “Derivada de uma função é o limite da relação do acréscimo da função para o da variável, quando este último tende a zero”.¹² (GOULIN, 1904, p. 16)

Comentários sobre a introdução

A comparação entre os métodos, realizada por Goulin, em sua organização das aulas de San Thiago, conclui que todos eles conduzem ao mesmo resultado.

Nossa opinião é que esses métodos conduzem, de fato, ao mesmo resultado, isto é, produzem a idéia de derivada. Seus modos de produção, porém, são diferentes, porque partem de semânticas diferentes. Assim não podem ser denominados equivalentes, frente a uma análise epistemológica.

Quanto aos outros aspectos do texto, a abordagem dos fundamentos do Cálculo favorece a compreensão do aluno. Aparecem três direções para o seu desenvolvimento, o que enriquece as possibilidades de tratamento dos assuntos e facilita as deduções e as manipulações das fórmulas.

Por outro lado, a falta de uma concepção de número real, de uma evolução do conceito de função, de uma idéia clara de convergência e da teoria dos conjuntos limita o desenvolvimento e obscurece os resultados.

¹² No texto aparece o termo *acrécimo*. Consideramos que o termo apropriado é *incremento*.

O discurso envolve o texto com explicações excessivas; o que, de início, produz surpresa no leitor atual.

Não existe um formalismo na linguagem, e sim comentários que procuram auxiliar o desenvolvimento harmonioso das noções e das conclusões. Durante os comentários de Goulin, aparecem perguntas de autoria de San Thiago dirigidas aos alunos, com o objetivo de elucidar alguns aspectos ou possíveis dúvidas não declaradas.

“O que se dará?”

A resposta também é dada pelo mestre:

“A secante irá tender a tangente, cuja posição ocupará no limite”.

Essa questão é levantada em outro trecho do discurso:

“Todos os métodos conduzirão aos mesmos resultados?”

O mestre responde em seguida:

“Sim; é o que indica o problema das tangentes”.

O discurso de San Thiago assume, então, as interrogações, em momentos diversos:

“Se o infinitamente pequeno de primeira ordem tende a zero, poderá haver uma quantidade infinitamente pequena em relação a elle?”

A resposta é apresentada na forma:

“Sim. Supponha um número α que tenda a zero. À medida que α tende a zero, α^2 decresce com maior rapidez”.

Apesar dos excessos, essas explicações ocorrem em instantes oportunos. O discurso flui rapidamente, não tendo um nível de saturação excessivamente denso e fechado em si mesmo, o que favorece o entendimento.

O texto privilegia a retórica em detrimento do formalismo e da heurística, esta é inexistente nessa apresentação de fundamentos.

Há, portanto, um desequilíbrio entre as tendências que são apresentadas pelo autor em seu discurso pedagógico na construção dialética do conhecimento matemático: o formalismo, a heurística e a retórica, conforme Hariki (1992).

Apresentamos, nos anexos finais, uma reprodução dessa introdução e passamos, no momento, à análise de uma segunda parte das notas de aula de San Thiago.

Cálculo Diferencial

Goulin inicia o Cálculo Diferencial na página 17, após os métodos. É dada a definição de derivada como o limite da razão dos acréscimos.

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ quando } \Delta x \rightarrow 0$$

e a diferencial é obtida fazendo: $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ e $dy = f'(x) dx$.

O texto denomina a construção passo a passo da taxa de variação de uma função explícita $y = f(x)$ de “*marcha*”.

Refere-se à construção da seguinte forma:

Dá-se a x um certo acréscimo Δx e, como a função y depende de x , ella experimentará um certo acréscimo Δy , que pode ser positivo ou negativo, assim como Δx , também, pode ser-o.

Resulta, pois, $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

Mas, qual será o acréscimo da função? É $(y + \Delta y) - y$ e, temos

$$y + \Delta y - y = \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Tomemos os limites, isto é, supponhamos que o acréscimo Δx se torne infinitamente pequeno. Antes disso, porém, dividamos ambos os membros por Δx . Vem

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

No limite, a relação do primeiro membro torna-se $\frac{dy}{dx}$ e, o segundo a derivada da função.

Logo $\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \therefore \quad dy = f'(x)dx$

É esse o modo de obter a diferencial de uma função: multiplica-se a derivada pela diferencial de variável independente. (GOULIN, 1904, p. 17)

Nesse trecho, percebemos a argumentação organizada por Goulin a partir das explicações e da escrita simultânea de San Thiago. Essa forma aparece ao longo de todo o texto, compondo o assunto com perguntas que, a nosso ver, foram lançadas por San Thiago, à medida que escrevia na lousa ou ditava a matéria.

A definição é ilustrada com o cálculo da derivada de $f(x) = ax$. O autor detalha os passos do cálculo da forma seguinte, citando novamente a “*marcha*” e escrevendo:

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x) = ax + a\Delta x \qquad \Delta y = a\Delta x \qquad \text{e} \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = a$$

Passando ao limite, temos : $\frac{dy}{dx} = a$ e $dy = adx$

Após o exemplo, Goulin prossegue no assunto, não mencionando que toda função derivável é contínua. Essa seria uma informação importante para a análise das funções deriváveis. Sua preferência, porém, é a demonstração do teorema das funções inversas, propriedade comum a uma classe de funções deriváveis: as funções bijetoras. Esse teorema poderia vir em seguida às propriedades mais gerais, comuns às funções deriváveis, como soma, produto, quociente, quando o estudante já tivesse mais contato com as operações de derivadas.

Sua demonstração inicia com a função implícita $F(x,y) = 0$, que resolvida em y , transforma-se em $y = f(x)$ e, cuja resolução em x , é escrita na forma $x = \varphi(y)$.

É ressaltado o caráter essencial dessas funções f e φ : a um acréscimo Δx a x , resulta um acréscimo Δy a y . Inversamente, a um acréscimo Δy a y , resulta o acréscimo Δx a x .

Não são discutidas as condições para que f possua inversa e para que tais acréscimos Δx e Δy ocorram.

Trata, em seguida, da regra da cadeia, usada na composição de funções. A propriedade surge sem uma demonstração ou explicação preliminar a respeito de sua utilização.

A derivação de uma função composta é tratada, no texto, nas condições: “Supponhamos que se trate de uma função y que dependa, imediatamente, de uma outra quantidade u que, por sua vez, dependa de v , que suporemos função de x , isto é, sejam : $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$ e $v = \psi(x)$.” (GOULIN, 1904, p. 18)

Com essas premissas e uma argumentação sobre as diferenciais de cada uma das funções, consideradas como infinitésimos, obtém-se a regra:

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\varphi'(v)\psi'(x)$$

A regra da cadeia na notação de Leibniz $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx}$ não aparece

nesse momento, surgindo, no entanto, na página seguinte, quando San Thiago-Goulin generaliza a questão para a derivação de funções de duas ou três variáveis $y = f(u,v,z)$, sendo u , v e z funções deriváveis de x .

Nesse caso, San Thiago-Goulin estabelece os acréscimos parciais $\Delta_u y = f(u + \Delta u, v) - f(u, v)$ e $\Delta_v y = f(u, v + \Delta v) - f(u, v)$, para o caso de duas variáveis, e constrói a taxa de variação total $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Com a passagem ao limite, obtém a regra da cadeia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv} \frac{dv}{dx}$$

Nessa passagem ao limite, surge, como explicação, que o acréscimo Δx é suposto infinitesimal e, assim sendo, Δu , Δv , Δz transformam-se em dx , dv e dz .

Essa última operação expõe o Cálculo de limites, associado a argumentos relativos a infinitésimos.

Nesse item, portanto, Goulin define derivada de uma função de uma variável e estabelece regras para as derivadas das funções compostas e inversas. Não aparecem discussões sobre o porquê do conceito, suas interpretações geométricas ou físicas e seu desdobramento.

No parágrafo seguinte: *“Diferenciação e derivação das funções de funções”* é que surgem as regras de derivação das funções. São demonstradas as operações gerais de derivadas de soma, produto, quociente, potência e raiz de funções. Os exemplos dados são relacionados com as funções algébricas.

Destacamos, para verificação, o procedimento de cálculo da derivada do quociente de duas funções de x , $u(x)$ e $v(x)$, designadas no texto por $y = \frac{u}{v}$.

Aos acréscimos Δx , dado a x , resultam os acréscimos Δu , Δv e Δy , a u , v , e y , nesta ordem.

Subtraindo fica:
$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{v^2 + v\Delta v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v^2 + v\Delta v}$$

Tomando os limites, tem-se
$$dy = \frac{vdu - u dv}{v^2 + v dv} \quad \text{e, por ser } v dv$$

“abandonável” em presença de v^2 ,
$$dy = \frac{vdu - u dv}{v^2}.$$

Esse é o cálculo da derivada do quociente, exposto nos termos do texto organizado por Goulin. Também aparece aqui uma passagem ao limite,

acompanhada pelo abandono do produto $v dv$, considerado infinitesimal. Coexistem, portanto, dois métodos: o dos limites e o de Leibniz.

Há um parágrafo à parte para as funções transcendentais, em que são construídas, pela definição, as derivadas e diferenciais do logaritmo, das funções circulares e de suas inversas.

A diferencial do logaritmo é obtida de $y = \lg u$, com u função de x , partindo das condições: “Dando a x um acréscimo Δx , resulta um acréscimo Δu para a variável u e para y o acréscimo Δy .”

$$y + \Delta y = \lg(u + \Delta u) \quad \Delta y = \lg(u + \Delta u) - \lg u \quad (\text{GOULIN, 1904, p. 24})$$

O texto trabalha, a seguir, da forma como descrevemos:

Como a diferença de dois logaritmos é igual ao logaritmo do quociente, vem:

$$\Delta y = \lg \frac{u + \Delta u}{u} = \lg \left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)$$

Fazendo $\frac{\Delta u}{u} = \frac{1}{m}$ e substituindo, resulta, após dividir por Δu ambos os membros:

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{m \lg \left(1 + \frac{1}{m}\right)}{u} = \frac{\lg \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m}{u}$$

Sabemos que, quando m cresce, o numerador tende para $\lg e$. Tomando os limites teremos:

$$\frac{dy}{du} = \frac{\lg e}{u} \quad \text{ou} \quad dy = \frac{du}{u} \lg e$$

O texto conclui: “Logo, a diferencial de um logaritmo é igual a diferencial da quantidade, dividida pela mesma quantidade e multiplicada pelo logaritmo de e na base dada”. (GOULIN, 1904, p. 24)

Nas diferenciais e derivadas sucessivas analisam-se as derivadas de $y = \sin x$ que se reproduzem na mesma ordem, depois de quatro derivações. Para melhor compreender essa periodicidade, o texto propõe “levar a questão puramente de Cálculo para uma questão de trigonometria”. (GOULIN, 1904, p. 40)

Achamos, para a primeira derivada , $\frac{dy}{dx} = \cos x$.

Ora, sabemos que $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ porque x e $\frac{\pi}{2} - x$ são dois arcos complementares. Logo $\frac{dy}{dx} = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$.

Porem, como $\frac{\pi}{2} - x$ e $\frac{\pi}{2} + x$ são arcos suplementares, teremos $\frac{dy}{dx} = \sin(x + \frac{\pi}{2})$. (GOULIN, 1904, p.)

O texto procede da mesma forma para chegar até a quinta derivada, evidenciando a periodicidade:

$$\sin(x + \frac{5\pi}{2}) = \sin(2\pi + x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$$

Aparecem, então, as propriedades gerais das derivadas. A primeira propriedade é enunciada na forma: “Uma função cresce ou decresce, a partir de um certo valor da variavel independente, conforme sua derivada é positiva ou negativa, para esse valor.” (GOULIN, 1904, p. 40)

Acreditamos que o final, com a citação “para esse valor”, seja um erro do organizador, mas a citação, como um todo, não é correta.

É necessário que $f'(x)$ seja positiva em um intervalo para a função crescer nesse domínio. A função tangente, por exemplo, tem derivada, $\sec^2 x$, positiva, mas $\frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$ e $\text{tg} \frac{\pi}{4} = 1 > \text{tg} \frac{3\pi}{4} = -1$. Isto porque $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ não é um intervalo do domínio da tangente.

O defeito é devido à ausência de condições. O texto não se preocupa com uma formalização adequada sobre a continuidade das funções.

Sob o título de “*Propriedades Geraes das Derivadas*”, são apresentadas as proposições relativas à variação das funções contínuas em um intervalo fechado $[a, b]$, entre as quais, o teorema de Rolle e do Valor Médio, juntamente com os critérios de determinação de máximos e mínimos .

A continuidade não é mencionada de forma explícita nos enunciados das proposições. Os intervalos são citados, embora o texto não mencione se os mesmos são fechados ou abertos para as proposições serem válidas. Esse procedimento ocorre, inclusive, no Teorema do Valor Médio, que é enunciado para um “*certo*

intervallo". Sua demonstração é a mesma dos livros atuais, com a omissão da continuidade. Inicia-se com a função

$$f(x) - f(x_0) - (x - x_0) \frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0},$$

que se anula para $x = X$ e $x = x_0$ e aplica-se o teorema de Rolle.

O texto apresenta, também, a forma de Lagrange do Valor Médio e generaliza-o na forma de Cauchy.

Nesse parágrafo, estão ainda incluídos teoremas sobre as funções constantes, que têm derivadas nulas, e sobre as funções de derivadas iguais, que têm diferenças constantes.

Em outro parágrafo, são apresentadas as derivadas e diferenciais das funções de várias variáveis. Essa parte mostra notações e ensina fórmulas para as derivadas parciais e totais de diversas ordens. Não há a preocupação com conceitos ou contextualizações. O parágrafo termina com mudanças de coordenadas.

Retornam, a seguir, as funções de uma só variável, aparecem as aplicações analíticas e a série de Taylor, agora com o resto nas formas de Lagrange e de Cauchy. São desenvolvidas em série as funções: seno e cosseno, logarítmica e exponencial, arco - tangente e o binômio.

Há uma avaliação de formas indeterminadas e o cálculo de máximos e mínimos de funções, pelo sinal da derivada.

As aplicações geométricas cuidam das tangentes e normais às curvas planas, da análise dessas curvas, com o auxílio da série de Taylor, e de derivadas de diversas ordens, das noções de curvatura, de evolutas e envolventes. Há uma parte final em que aparecem as curvas reversas.

Os assuntos nas aplicações geométricas são tratados de uma forma geral, sempre considerando uma curva $y = f(x)$, qualquer. Não constam as aplicações para curvas específicas que possam auxiliar a visualização dos métodos.

No início, aparece a equação da reta tangente em um ponto $M(x,y)$ de uma curva $y = f(x)$:

$$Y - y = \frac{dy}{dx} (X - x) \quad \text{com} \quad \frac{dy}{dx} = \text{tg } \alpha$$

O cosseno diretor da reta tangente relativo ao eixo dos x :

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

O cosseno diretor relativo ao eixo y é :

$$\cos \alpha = \cos(90^\circ - \beta) = \operatorname{sen} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

É dada também a equação da normal em M : $(Y - y) \frac{dy}{dx} + X - x = 0$.

O capítulo continua calculando os “comprimentos” da tangente e subtangente, da normal e subnormal e termina com uma rápida interpretação de assíntotas seguida de uma aplicação desses conceitos à parábola $y^2 = 2px$.

Cálculo Integral

O Cálculo Integral é resumido em quarenta e seis páginas no texto elaborado por Goulin.

Inicia com o conceito de integral, introduzido pela sua interpretação geométrica de área sob o gráfico de uma função $y = f(x)$, entre os valores \underline{a} e \underline{b} da variável x.

É construído pela divisão do intervalo $[a,b]$ em n partes iguais e pelos retângulos inscritos e circunscritos à curva, com bases nos subintervalos da divisão. Os limites das áreas desses retângulos, quando comparados com a área sob a curva, determinam a integral.

A amplitude do intervalo $[a,b]$ é representada por nh , sendo h a amplitude de cada um dos subintervalos da divisão escolhidos todos iguais. As ordenadas correspondentes aos diversos pontos da divisão são indicadas por:

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$$

Dessa forma, a área U, limitada pelo gráfico de $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas ordenadas $y_0 = a$ e $y_n = b$, é maior que a soma das áreas dos retângulos de bases h

inscritos em $y = f(x)$ e é menor que as áreas dos retângulos correspondentes de mesma base circunscritos no gráfico de f .

$$y_0h + y_1h + y_2h + \dots + y_{n-1}h < U < y_1h + y_2h + \dots + y_nh$$

Neste ponto, Goulin apresenta uma explicação nos termos seguintes:

Em virtude do que acaba de ser feito, se infere que existem dois limites entre os quaes está compreendida a area procurada.

Ora, a differença entre esses dois limites, entre os quaes se acha compreendida a area que se quer determinar é $(y_n - y_0)h$.

Ora, y_n e y_0 são as ordenadas extremas e não mudam. Nessa differença, pois, a única quantidade variavel é h . Porem h pode ser tomado tão pequeno quanto se queira, e mesmo nullo.

Logo, os dois limites, para valores de h cada vez menores, tendem para a area e , no limite, a area poderá ser substituida por um qualquer dos dois limites. Todas as parcelas são o produto de uma ordenada por h . Sendo y uma ordenada qualquer, yh será um dos rectangulos (interno ou externo) e, como U , no limite, é a somma, escreveremos, de um modo geral e mnemonicamente, $U = \lim \Sigma yh$.

[...] Quando se escreve sómente Σ , quer se dizer que se trata de uma somma de quantidades que não variam de modo continuo. Portanto, Σ indica a somma de parcelas que variam de um modo descontínuo.

Ora, quando é que esse rectangulo de variação pode ser considerado constante? É quando h é infinitamente pequeno ou dx .

Teremos, então, $\lim \Sigma = \int$

Não se deve, pois, confundir o signal Σ com o signal de integral \int que é um signal que indica a somma de quantidades que variam de um modo continuo. Se $h = dx$ temos, por conseguinte,

$$U = \int y dx .$$

Porém $y = f(x)$. Logo $U = \int f(x) dx$.

Uma integral, portanto, não é mais do que a somma de elementos que variam de um modo contínuo. (GOULIN, 1904, p.3)

Apesar da linguagem informal, por vezes imprecisa e até prolixa, é possível obter conclusões importantes.

Em primeiro lugar, é visível a preocupação de Goulin, ou de San Thiago, ou de ambos, com as explicações de seus resultados. Essa preocupação, a nosso ver, favorece a vinda do leitor para o texto, impõe uma leitura atenta e ajuda a compreensão da exposição.

Por último, o discurso e os argumentos do texto, relacionados com a definição de integral, são próximos dos livros de cálculo de Lacroix¹³, de 1867, e de Duhamel¹⁴, de 1876.

¹³ Sylvestre-François Lacroix (1765-1843) – matemático francês; professor de Cálculo Infinitesimal na *École Polytechnique* e do *Collège Royal*. Autor de *Traité Élémentaire de Calcul Différentiel*.

¹⁴ Jean Marie Constant Duhamel (1797-1872) – matemático francês. Autor de *Éléments de calcul infinitesimal*.

As integrais indefinidas são aquelas em que não se determinam valores da variável independente, e as definidas, quando os valores de a e b das abscissas são determinados. Aparecem algumas propriedades operatórias das integrais, uma tabela sobre as integrais imediatas, que se resume às integrais de potências, das funções polinomiais, das funções logarítmica e exponencial, das funções trigonométricas e das suas inversas.

Com o título de “Teoremas fundamentais”, são enunciadas, na página 4, as propriedades: (1) Se a é uma quantidade constante, “ $\int a \dots = a \int \dots$ ”

$$(2) \int (du + dv + dz - dt) = u + v + z - t$$

Quanto à passagem do primeiro para o segundo membro, o texto argumenta da forma: “Ora, evidentemente, $u = \int du$, $v = \int dv$, $z = \int dz$, e $t = \int dt$.”

Para continuar, o leitor deverá concluir por conta própria que, quando, em geral, a $\int f(x)dx$ é igual a $F(x) + C$, com C constante, tem-se $F'(x) = f(x)$ e o integrando $f(x)dx$ é dF .

Esse fato é comentado somente na página 29, sendo citado apenas que a integração é a operação inversa da diferenciação. O Teorema Fundamental não é visto, sendo a fórmula

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

justificada como uma diferença de áreas.

Também não são desenvolvidos outros teoremas sobre as integrais, principalmente os relativos às condições de integrabilidade das funções.

Dessa forma, o Cálculo Integral das notas de aula de Goulin contém um mínimo de teoria, e o leitor exigente deve procurar conhecimento fora do texto. Sua prática na integração das funções e nas aplicações da integral é também limitada pela falta de exemplos e de exercícios.

Os métodos de integração iniciam a partir da página 8 e terminam na página 25. São dados o processo de substituição de variáveis, a integração por partes, a integração das diferenciais algébricas racionais e as diferenciais algébricas irracionais. A possibilidade de integração de funções por séries é apenas comentada.

Todos os processos são revelados, não havendo exercícios para o aluno construir seu conhecimento. É visto apenas um exemplo de cada caso. O processo

de integração por partes, para explicitar, é explicado unicamente com o cálculo da $\int x^2 e^x dx$.

O problema da simplificação dos conteúdos é evidenciado, também, nas *Aplicações geométricas do Cálculo Integral*. A retificação de curvas planas surge por meio da integração do elemento de arco: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Esta fórmula é revelada ao leitor, e o texto apenas comenta que “com a integração da expressão virá

$$S = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \text{ “. (GOULIN, 1904, p.35)}$$

A *quadratura das superfícies e a cubatura de volumes*, denominações dadas no texto ao cálculo de áreas e de volumes por integração, são tratadas da mesma maneira. Sempre “aparece” a fórmula que o aluno deve usar em cada caso, com a afirmação que o processo é o mesmo: “*tomar elementos e compará-los com as áreas e os volumes*”. Não há exemplos ou exercícios para o leitor.

O texto chega ao final, deixando a sensação da pressa que acompanhou o tratamento do Cálculo Integral. O principal motivo deve ter sido o final do ano letivo.

Aspectos gerais do texto

Tendo em vista os critérios escolhidos para a análise, o texto apresenta as idéias fundamentais que propiciaram o desenvolvimento do Cálculo, acompanhadas de dados históricos. Existe motivação para a introdução de alguns conceitos e o uso de linguagem corrente como retórica, além da linguagem matemática.

A presença de algumas falhas deve-se à evolução do conceito de função, não presente no texto, à falta da teoria dos conjuntos e à ausência de uma definição precisa de número real.

CAPÍTULO 4

CONCLUSÕES

O texto do Curso de Cálculo de San Thiago, de 1904, apresenta uma dificuldade para a análise. Tendo sido organizado pelo politécnico Adriano Goulin, encontra-se impregnado de suas concepções e linguagem, tornando impossível, principalmente, uma análise confiável das definições e de enunciado de teoremas.

Quanto às bases e pontos de partida para a sua organização, o programa da cadeira nº 2: Geometria Analítica e Cálculo Infinitesimal indica como San Thiago planejava o seu curso. A seqüência do texto de Goulin segue esse programa.

Partindo de uma concepção de função e da descrição do método de exaustão usado pelos gregos da Antigüidade, fundamenta a sua história nos três métodos que sustentam o seu curso de Cálculo: o método dos limites, o método dos infinitésimos e o método das derivadas. No primeiro, apresenta as primeiras e últimas razões, os fluxões e os fluentes, como Newton; no segundo, o Cálculo por infinitésimos, como Leibniz; e, no terceiro, as derivadas retiradas dos desenvolvimentos em séries de potências das funções, à maneira de Lagrange.

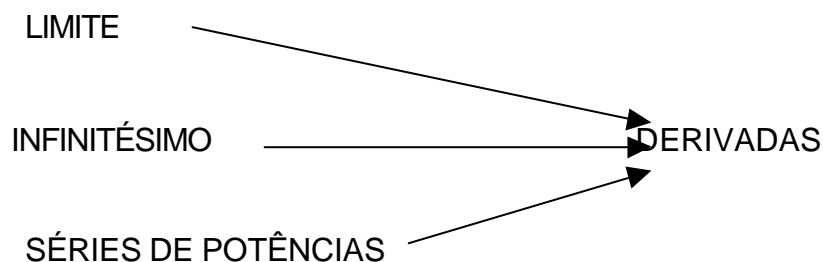
Ao longo de todo o texto de Goulin, não são considerados princípios ou axiomatizações. A organização segue de forma descritiva e informativa, num “estilo quase formal”. (HARIKI, 1992, p. 153)

Aparecem, apenas, as definições necessárias e o raciocínio dedutivo essencial para o andamento do curso. A informação matemática é acompanhada das negociações entre autor e leitor, negociação da verdade, das intuições, das perspectivas e dos valores. O texto de Goulin possui “mais retórica do que lógica”.(HARIKI, 1992, p. 41)

O sentido de seu texto transcende os limites matemáticos e deve ser encontrado em um referencial lingüístico. Seu estilo tem um enfoque fundador; um gerador semântico que dá identidade ao curso. Um discurso fundador, no sentido de

Orlandi (2001, p.12), “que ‘funda’ ou ‘re-funda’ diversas falas, é capaz em si de muitos sentidos”. Um deles é o que liga a formação do Cálculo a uma ordem que o identifica.

Seu Cálculo Diferencial é desenvolvido com as idéias resumidas no esquema:



A derivada de uma função é definida como: “o limite da relação do acréscimo da função para o da variável, quando este último tende a zero”. A diferencial da função é um infinitésimo associado a ela. (GOULIN, 1904, p. 16).

O processo de diferenciação é executado por um cálculo híbrido, que envolve limites e infinitésimos simultaneamente, a critério do autor.

Seu Cálculo Integral é introduzido pelo limite da soma de retângulos infinitesimais, inscritos e circunscritos no gráfico da função em questão.

O discurso completa-se, novamente com o referencial lingüístico, com a intertextualidade, conceito que mobiliza a relação entre textos diferentes. “A enunciação de um texto se relaciona com a enunciação de outros textos efetivamente realizados, alterando-os, repetindo-os, omitindo-os”.¹ Esse relacionamento se dá porque “a língua funciona, ao ser afetada pelo interdiscurso”,² trazendo historicidade³ ao processo discursivo.

San Thiago foi persistente em fundamentar seu curso dessa forma. O programa de 1930 de Cálculo Diferencial e Integral, retirado do Anuário de 1932 da Escola Politécnica, mostra uma introdução sobre séries, citando a convergência e as expansões das funções logarítmica, exponencial e circulares em séries de potências. É uma abertura para o método de Lagrange, que aparece no segundo tópico introdutório. Estão também presentes, nesse programa, os métodos de Newton e Leibniz, após os trinta anos do professor à frente da disciplina.

¹ GUIMARÃES, 2001, p. 28

² GUIMARÃES, 2001, p. 28

³ Segundo Ferreira (1999, p. 1056), “atuação do homem como agente no processo histórico-literário”.

O livro adotado no curso de San Thiago, conforme programa do Anuário de 1903, foi: *Premiers Éléments du Calcul Infinitesimal*, de Hyppolite Sonnet. Sua 6ª edição foi objeto de análise, para distinguir semelhanças e diferenças do Curso organizado por Goulin.

Sonnet tem o texto prático e organizado para o engenheiro civil, ferroviário ou agrícola do século XIX. Inicia sua exposição com a noção de função e seu discurso fundador diz respeito a infinitésimos. Esses aparecem ao longo do livro, principalmente no item II, “Principes de Differentiation”, no desenvolvimento da derivada e da diferencial.

A derivada é definida como o limite da razão incremental de uma função f , com uma ressalva do autor, dizendo que, nas aplicações, as funções usadas serão sempre contínuas. O termo limite surge sem uma definição adequada no texto, apresentando problema para o leitor iniciante, que deverá perguntar de onde saiu a palavra e o que ela significa.

Os infinitésimos aparecem na noção de diferencial e são as quantidades que tendem a zero, consideradas em “um estado muito próximo ao seu limite”. Sonnet, 1902.

A frase estabelece uma ligação de dependência dos infinitésimos em relação à operação de limite. Sonnet passa a usar as duas idéias para compor o Cálculo Diferencial, operando a derivada com construções próprias do cálculo infinitesimal sob o discurso de limites.

Com a morte de San Thiago e a reorganização da Escola Politécnica, nos anos de 1933 e 1934, foi encarregado o matemático italiano Fantappiè para dar as aulas de Cálculo. O livro adotado foi o do Severi: *Lezioni di Analisi*, causando uma reforma radical no Curso da Instituição.

Severi tem o texto formal que adota a idéia de limite como fundamento para o Cálculo. Define limite pelo método ε - δ , de concepção Weierstrassiana instituída nos cursos da disciplina pela cultura.

A concepção de Weierstrass retira o paradigma geométrico existente na fundamentação do Cálculo e da Análise, concebendo uma definição de limite de função em termos aritméticos.

Um resumo do paradigma geométrico, segundo Lakoff e Núñez (2000), inclui as idéias referentes:

- ao plano euclidiano, com a metáfora que uma função matemática é uma curva no plano cartesiano;
- a caracterização geométrica de Newton para o cálculo, em termos de uma seqüência de secantes que têm uma tangente por limite;
- a compreensão de uma curva em termos de movimento e continuidade.

Ainda, seguindo Lakoff e Núñez, a caracterização de Weierstrass de limites de funções substitui o conceito de limite e de continuidade de funções ligado ao paradigma geométrico, recolocando em seu lugar uma nova definição, em que não aparecem o movimento, o tempo e a noção de “tender a”.

Existem apenas números reais. “a” e “L” são números ; “x” , “δ” e “ε” são variáveis percorrendo um conjunto de números reais. Existe também a proposição lógica da forma:

“Para todo u, existe um v, tal que, se F(v) então G(u)”.

Assumindo essa proposição e efetuando as substituições:

$$u = \varepsilon, v = \delta, F(v) = 0 < |x - a| < \delta \text{ e } G(u) = |f(x) - L| < \varepsilon ,$$

tem –se como resultado a “discretização” do conceito de limite.

Essas mudanças são parte de um programa denominado Aritmetização da Análise, desenvolvido por matemáticos do século XIX na Matemática, entre outros: Weierstrass e Dedekind.

O pilar da concepção é o conceito de número real, dado no texto de Severi, usado na Escola Politécnica, que alterou os significados de base do Cálculo, assumindo idéias vigentes na comunidade matemática do século XX.

Os números reais, em Severi, são definidos pelos cortes de Dedekind e por pares de sucessões convergentes de racionais, na forma de Cantor.

A teoria do *continuum* é a estabelecida na Aritmetização da Análise, sendo considerada um completamento da reta racional.

O discurso é fundador e competente, ou seja “é um discurso instituído no qual o conteúdo e a forma já foram autorizados segundo os cânones da esfera de sua própria competência”. (CHAUI, 1997)

As produções de significados, do conhecimento e de objetos nascem do envolvimento do discurso com a teoria matemática.

O livro de Severi contextualiza a derivada, com as suas interpretações geométrica e física, dando uma abertura ao formalismo da definição de limite de Weierstrass.

Outros aspectos importantes que podem ser vistos no texto de Severi é o espaço dado à matemática discreta, com a Álgebra compondo metade do texto ao lado do Cálculo e os dados históricos sempre presentes em todos os assuntos tratados. A História colabora no livro, em seu papel de produtora de conhecimentos.

Considerando as três obras mencionadas, encontramos discursos fundadores diferentes. O discurso do livro de Severi é de limites. Possui a fala contemporânea que evita as mônadas infinitesimais do continuum, substituindo-as pela completeza da reta real. O livro de Sonnet e o Curso de Cálculo, organizado por Goulin, privilegiam a linguagem de infinitésimo, mas também se distinguem no discurso. Enquanto Sonnet tem como fundamento a idéia de infinitésimo, o discurso fundador do Curso de Cálculo é constituído pelos métodos dos infinitésimos, dos limites e das derivadas.

O Curso de Cálculo do texto de Goulin, organizado a partir das aulas de San Thiago, é um modelo fundamentado nos métodos instituídos na história e resgatados, como unidade significativa, para organizar as outras falas de constituição de seu curso. Esse modelo não é o de um Cálculo revelado, elaborado como um sistema formal e apresentado pronto e organizado. É um discurso explicativo que procura, nos métodos enunciados na história, os significados de seus conceitos centrais: a derivada e a integral. Este é um discurso fundador do texto de Goulin, porque instala as condições de formação de outros discursos relacionados e contempla a instância da produção de sentidos.

A semântica produzida não é formal⁴, tendo uma relação com as enunciações sobre limites, infinitésimos, ou séries de potências. Essa relação remete às situações específicas configuradas pelo próprio processo enunciativo, pelas relações interdiscursivas envolvidas. Por meio do interdiscurso, o processo leva o leitor a aceitar o que está sendo comunicado e a atuar no texto, participando do seu desenvolvimento.

⁴ Segundo Guimarães (2001), “nas semânticas formais, o sentido é uma relação com o mundo, os objetos, em que o sujeito não conta”.

REFERÊNCIAS

- ALVIM, Z. e GOULART, S. *Escola Politécnica: Cem Anos de Tecnologia Brasileira*. São Paulo: Grifo, 1994.
- Anuários e Relatórios da Escola Politécnica (1901-1934)*. São Paulo: Biblioteca Central, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 1901-1934.
- BARDIN, L. *Análise de Conteúdo*. Tradução de Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Portugal: Edições 70, 1977.
- BARONI, R. e NOBRE S. A pesquisa em História da Matemática e suas relações com a Educação Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (org.). *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas*. São Paulo:UNESP, p. 129-136, 1999.
- BARUFI, M. C. *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral*. 1999. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.
- CASTRO, F. M. O. *A Matemática no Brasil*. 2 ed. Campinas: UNICAMP, 1999.
- CHAUÍ, M. S. *Cultura e Democracia: o discurso competente e outras falas*. São Paulo: Cortez, 1997.
- COSTA, L. A. M. *O ideário urbano paulista na virada do século – o engenheiro Theodoro Sampaio e as questões territoriais e urbanas modernas. (1886-1930)*. São Carlos: RiMa, FAPESP, 2003.
- D'AMBRÓSIO, U. Mathematics in South and Central America. In: KATZ, Victor (ed.) *Using History to Teach Mathematics*. New York: MAA Notes, v. 51, p. 245-255, 2000.
- FERREIRA, A. B. H. *Novo Aurélio Século XXI: o dicionário da língua portuguesa*. 3 ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1999.
- GOULIN, A. *Curso de Cálculo de Rodolpho Baptista San Thiago*. São Paulo: Escola Politécnica, 1904.

GUIMARÃES, E. Independência ou Morte. In: ORLANDI, Eni Pulcinelli (org.). *Discurso Fundador*. São Paulo: Pontes, 2001.

HARIKI, S. *Analysis of Mathematical Discourse: Multiple Perspectives*. 1992. Tese (Doutorado em Philosophy) – Faculty of Mathematical Studies, University of Southampton, Great Britain, 1992.

HOBBSAWM, E. *Sobre História*. São Paulo: Companhia das Letras, 1997.

LAKOFF, G.; NÚÑEZ, R. *When Mathematics Comes From*. New York: Basics Book, 2000.

LINS, R. C. O Modelo Teórico dos Campos Semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. In: *Revista Dynamis*, v.1, n.7. Blumenau: FURB, 1994.

LOSCHIAVO DOS SANTOS, M. C. *A Escola Politécnica (1894-1994)*. São Paulo: EDUSP, 1985.

NORONHA, O. M; RIBEIRO, M. L; XAVIER, M. E. *História da Educação: A Escola no Brasil*. São Paulo: FTD, 1994.

OLIVEIRA CASTRO, F. *A Matemática no Brasil*. São Paulo: UNICAMP, 1992.

ORLANDI, E. P. *Discurso e Leitura*. São Paulo: Cortez./ UNICAMP, 1996.

_____ *Discurso Fundador*. Campinas: Pontes Editores, 2001.

REVISTA PESQUISA FAPESP. Período Republicano: Uma luta sem trégua para criar ciência e tecnologia. *500 Anos de Pesquisa e Tecnologia no Brasil*. São Paulo, n. 52, p. 18-36, abril 2000. Edição Especial

SAD, L. A. *Cálculo Diferencial e Integral: uma abordagem epistemológica de alguns aspectos*. 1998. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1998.

SCHNEIDER, R. *Brazil, Culture and Politics in a New Industrial Powerhouse*. USA: HarperCollins Publishers, 1996.

SEVERI, F. *Lezioni di analisi*. Volume primo. Bologna: Nicola Zanichelli, 1933.

SONNET, H. *Premiers Éléments du Calcul Infinitésimal*. 6 ed. Paris: Hachette, 1902.

VARGAS, M. Os Cem Anos da Politécnica de São Paulo. In: *Contribuições para a História da Engenharia no Brasil*. São Paulo: EPUSP, 1994, p. 11-30.

Obras consultadas

ECO, U. *Como se faz uma tese*. Tradução de Gilson C. C. de Souza. 14.ed. São Paulo: Perspectiva, 1998.

MAY, K. O. *Bibliography and Research Manual of the History of Mathematics*. Toronto: University of Toronto Press, 1973.

**APÊNDICE A – Exame de texto: análise do livro Premiers
Éléments du Calcul Infinitésimal de H. Sonnet, sexta edição, Paris:
Librairie Hachette, 1902.**

Organização de conteúdos

Primeira parte

- (1) Noções preliminares
- (2) Princípios de diferenciação
- (3) Desenvolvimento de funções em séries
- (4) Aplicações analíticas
- (5) Aplicações geométricas

Segunda parte

- (1) Noções preliminares
- (2) Integração de diferenciais
- (3) Integrais definidas.
- (4) Métodos de resolução de equações diferenciais

Apêndice

- (1) Noções sobre convergência de séries
- (2) Alguns princípios da Álgebra.

O livro de Cálculo Infinitesimal de H. Sonnet, professor de Análise e de Mecânica Geral da Escola Central de Artes e Manufaturas na França, é dirigido aos estudantes das Escolas de Engenharia.

A edição de 1869 inicia com o autor destacando o objetivo prático do livro, que procura apresentar um Cálculo Diferencial e Integral elementar e prático, a fim de ser útil aos futuros engenheiros. Seu interesse encontra-se nas regras de derivação e na integração de funções, na solução de equações diferenciais e nas aplicações, apresentando, conforme Sonnet, o necessário para o estudo da Mecânica industrial e da Estabilidade das construções.

Tem o mesmo estilo dos outros livros do autor conhecidos no Brasil: sua Arithmética e sua Géométrie Analytique, obras sem pretensões teóricas.

Não contém um tópico de bibliografia, mas cita como livros consultados os de Cálculo e de Análise de Lacroix, de Duhamel, de Cournot e de Serret, todos ainda lidos e aceitos em sua época.

Após breve prefácio, a obra inicia sua primeira parte, intitulada Cálculo Diferencial, com o item I: Noções preliminares.

Surge a definição do autor para o Cálculo Diferencial:

“O cálculo diferencial é a parte da matemática que trata das variações infinitamente pequenas das funções.”¹

Esse item apresenta as idéias fundamentais que propiciaram o desenvolvimento do Cálculo, as funções e os infinitésimos, como conceitos formalizados, sem ênfase na sua construção e na sua motivação, por meio de exemplos.

Sua definição de função permite que a cada valor da variável independente x , a variável y , função de x , possa assumir diversos valores, acompanhando o divulgado pelos livros-texto da época.

“Diz-se que uma variável y é denominada função de uma variável x , se y varia com x , e assume um ou mais valores determinados quando se atribui um valor determinado a x .”²

¹ “Le calcul différentiel est la partie des mathématiques qui traite des variations infiniment petites de fonctions”. (SONNET, 1902, p. 1)

² “On sait qu’une variable y est dite fonction d’une variable x , si y varie avec x , et si prend une ou plusieurs valeurs déterminées quand on attribue une valeur déterminée à x ”. (SONNET, 1902, p.1)

As funções passam a ser indicadas por relações $y = f(x)$ ou $f(x,y) = 0$, conforme sejam dadas nas formas explícita ou implícita. O autor não classifica as funções em algébricas ou transcendentas e não utiliza figuras ou argumentos geométricos para fazer os cálculos algébricos.

Os infinitésimos são introduzidos como quantidades que tendem a zero, sendo considerados “em um estado muito próximo de seu limite”.³

A palavra limite aparece, pela primeira vez, no texto sem uma definição adequada. O leitor deve familiarizar-se com a noção pela sua utilização, ou ter adquirido o conceito anteriormente. O autor estabelece um caráter definitivo para o conhecimento. A argumentação é omissa e não internalista, podendo o leitor usar a sua intuição.

Sonnet diz, ainda, que resulta da definição de infinitésimo que, se α é um infinitésimo adicionado a uma quantidade finita e determinada a , $a + \alpha = a$. Por quantidade finita e determinada quer dizer um número real.

Os infinitésimos interagem com as quantidades e entre si, podendo ser adicionados, subtraídos, multiplicados e divididos pelas quantidades e por outros infinitésimos.

A noção de ordem é alcançada com o quociente α/β de dois infinitésimos α e β , da seguinte maneira:

(1) em questões em que diversos infinitésimos são considerados, existe sempre um deles chamado infinitamente pequeno principal.

(2) Se α é o infinitésimo principal e β é um infinitésimo diferente de α , este pode ser comparado a α pela razão β/α . Se a razão tiver limite finito e diferente de zero, β será um infinitésimo de primeira ordem, representado por $k\alpha$. Se a razão tender a um infinitésimo de primeira ordem, β será um infinitésimo de segunda ordem, da forma $k\alpha^2$. Um infinitésimo de terceira ordem será representado por $k\alpha^3$.

(3) Prosseguindo na forma anterior, diz-se que um infinitésimo representado por $k\alpha^n$ é de ordem n .

Essa linguagem significa que todo infinitésimo de ordem n pode ser negligenciado, quando comparado a um de ordem inferior a n , como $k\alpha^2$ diante de $k\alpha$, k é quantidade (número real) e α é infinitésimo. É um critério comparativo usado ainda, ressalvado o novo conceito de infinitésimo, na Análise Infinitesimal atual.

³ “dans un état très voisin de sa limite”. (Ibid., p. 2)

A palavra mênada não aparece, e as afirmações são colocadas sem qualquer argumentação, assumindo um esquema revelador.

As funções, os infinitésimos e a noção intuitiva de limite permitem definir, no item II, “Princípios de diferenciação”⁴, a derivada de uma função f em um ponto x , como segue:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \text{ quando } \Delta x \text{ tende a zero, e a diferencial}$$

de f , a partir da relação: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + e$, quando se considera Δy e Δx infinitesimais.

Sonnet preocupa-se em explicar que, se Δx tende a zero, Δy tende também a zero, mas a razão $\Delta y/\Delta x$ não é indeterminada, tendendo para um limite que deriva de $f(x)$. Por essa razão, este limite tem o nome de derivada ou função derivada e é designado pela notação $f'(x)$.

A derivada é indicada também por $\frac{dy}{dx}$ e calculada usando limites; a diferencial correspondente, indicada por $dy = f'(x)dx$, é obtida por infinitésimos, por meio do procedimento:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon \quad \text{e} \quad dy = f'(x)dx$$

O autor esclarece que os incrementos Δx e Δy são trocados pelos infinitésimos dx , dy e ε , que podem ser negligenciados em comparação com a quantidade finita $f'(x)$.

Como os limites aqui são de variáveis que tendem a zero, a frase ligada aos infinitésimos: “em um estado muito próximo de seu limite”, passa a ter um significado de interligação entre os conceitos. Infinitésimos aparentam ser objetos dependentes da noção de limite, que é intuitiva na obra. Além disso, esse Cálculo “misto” não é um Cálculo “Leibniziano”.

A derivada é uma idéia não explorada, sendo a argumentação relativa ao assunto explicitada na forma de definição e regras. Não aparecem exemplos, problemas interessantes ou outras formas de contextualizações, motivações históricas e a visualização gráfica do conceito para a sua interpretação. A reta tangente a um ponto do gráfico de f é deixada para uma época posterior.

⁴ “Principes de différentiation” (Ibid., p. 5)

As regras de derivação são tratadas juntamente com as regras de diferenciação das funções habituais, algébricas e transcendentais. A regra da cadeia

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx},$$

da função composta $f(u(x))$ aparece quando se utiliza, sem quaisquer restrições, a identidade entre os incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x}$.

O autor cuida, em seguida, das derivadas de funções de duas variáveis $f(u,v)$, das parciais e da derivação das composições, usando as regras da cadeia para essas funções como um princípio de derivação das funções compostas, sem qualquer justificação. Usa, ainda, essas regras para as funções implícitas.

O livro assume, então, as aplicações, resolvendo exercícios de derivadas e diferenciais, inclusive derivadas de funções inversas e diferenciação sucessiva. Há um estudo das funções exponenciais e logarítmicas e das funções circulares juntamente com suas inversas. Elas são aceitas sem as restrições de domínio, do seno para o arco-seno, da tangente para o arco-tangente e das demais funções circulares para as suas inversas.

No desenvolvimento das funções em série de potências, Sonnet verifica a representação para $(x+h)^m$, afirmando que a série de Taylor de uma função f é válida toda vez que f e as suas derivadas forem finitas e assumirem valores precisos entre x e $x+h$, h será uma “quantidade pequena”.

Adota a demonstração da série de Taylor, que diz ser de Lagrange, e aplica essa série às funções e^x , e^{-x} , $\sin x$, $\cos x$, $\log(1+x)$, e outras, inclusive para funções de duas variáveis, usando o resto de Taylor.

Utiliza as séries para verificar valores de expressões que assumem formas $\frac{0}{0}$, ou $\frac{\infty}{\infty}$, ou $0 \cdot \infty$ (regras de l'Hospital) e para verificar a existência de extremos. Essa parte é denominada aplicações analíticas das derivadas.

Os princípios de diferenciação terminam com as aplicações geométricas das derivadas, uma parte extensa, que trata da determinação de retas tangentes e normais às curvas planas e dos planos tangentes e retas normais às superfícies. Tais aplicações constituem uma introdução à geometria diferencial, desenvolvendo, também, análises de curvas e superfícies, pontos singulares, curvaturas e famílias de superfícies. É uma parte importante do livro.

A segunda parte do livro, denominada “Primeiros Elementos de Cálculo Integral”⁵, inicia explicando que o cálculo integral é o inverso do cálculo diferencial e que as noções fundamentais serão apresentadas da forma mais simples possível.

A integral é contextualizada através da área sob o gráfico de uma função f , e o leitor tem a possibilidade de trabalhar com esse modelo.

Considera o autor a equação $y = f(x)$ de uma curva plana AB e propõe a avaliação da área sob essa curva. A área é limitada inferiormente pelo eixo dos x e, nas laterais, por AA' e BB' . A' e B' são as projeções ortogonais de A e B , nessa ordem, no eixo dos x .

Divide o intervalo $A'B'$ em n partes iguais, cada uma delas de amplitude h , e levanta as alturas $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ pelas extremidades dos subintervalos da partição.

Considera as somas:

$$y_0 h + y_1 h + y_2 h + \dots + y_{n-1} h < U \quad \text{e} \quad y_1 h + y_2 h + y_3 h + \dots + y_n h > U$$

e define a integral como $\lim \Sigma y h = U$, em que U é denominado o limite comum, e o símbolo Σ representa uma soma de quantidades análogas ao produto $y h$, escrito à sua direita.

Indica a integral indefinida por $\int y dx$ e a definida por $\int_a^b y dx$, sendo $|b - a|$ a amplitude de $A'B'$.

Impõe $U = F(x)$ e designa Δu um acréscimo na área considerada, correspondente a um acréscimo Δx de x , obtendo: $y \Delta x < \Delta u < (y + \Delta y)\Delta x$, em que Δy representa um acréscimo da ordenada y .

Sendo $\Delta x > 0$, com ordenada crescente, e, para $\Delta x \rightarrow 0$, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ tende a $F'(x)$.

Então $F'(x) = y$ ou $F'(x) = f(x)$.

O valor $U = \int F'(x) dx = F(x) + C$, nas palavras do autor, “resulta da generalidade desejada, para C designando uma constante arbitrária”.

Indica ainda $\int_a^x F'(x) dx = F(x) + C$ a integral que se anula para $x = a$.

Assim $C = -F(a)$ e surge: $\int_a^x F'(x) dx = F(x) - F(a)$ ou,

para $x = b$, $\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$.

⁵ “Premiers Éléments du Calcul Integral” (ibid., p. 189)

A definição de integral, dada por limite de soma, é construtiva e visualizada pela interpretação geométrica de área. É acrescida de uma fórmula para o cálculo da integral.

O livro não complementa a idéia com condições de sua existência, não discute as dificuldades inerentes ao conceito e não utiliza a linguagem corrente como retórica de convencimento.

Podemos dizer que o texto, nessa parte, apresenta o Cálculo em construção, partindo em seguida para um esquema revelador, com argumentos algébricos e analíticos, utilizando a linguagem matemática.

A integração de diferenciais apresenta algumas propriedades das integrais e as técnicas de integração, que compreendem a substituição de variáveis, a integração por partes, as integrais de funções racionais e irracionais e a integração de funções trigonométricas. O estilo é objetivo: cada método é descrito e acompanhado sempre de exemplos. A elaboração da manipulação é clara, possibilitando um acompanhamento proveitoso.

Ao final, há integrações por desenvolvimento em série e cálculo de integrais definidas por aproximação, aplicações da integral no comprimento de arcos de curvas, áreas e volumes, incluindo coordenadas polares. As integrais duplas e triplas aparecem em práticas geométricas.

O parágrafo VI do livro trata dos métodos de resolução das equações diferenciais, iniciando com uma definição de equação diferencial na qual a palavra função não está explícita, aparecendo no texto após, em outros parágrafos: “Chama-se equação diferencial a toda equação que contém, independentemente das variáveis, suas diferenciais ou suas derivadas de qualquer ordem”⁶.

Ressalta o autor, em seguida, as distinções entre equações diferenciais ordinárias, equações diferenciais totais, equações a derivadas parciais e sistemas de equações diferenciais simultâneas, bem como a equação integral de uma equação diferencial. Comenta que, da mesma forma que se pode demonstrar na álgebra que toda equação tem uma raiz, demonstra-se no cálculo integral que toda equação diferencial tem a sua equação integral.

⁶ “On appelle équation différentielle toute équation qui contient, indépendamment des variables, leurs différentielles ou leurs dérivées d'ordre quelconque”. (ibid., p. 199)

Exemplifica que $F_x'(x,y) + y F_y'(x,y) = 0$ tem a equação integral: $F(x,y) = C$ e afirma que uma demonstração pode ser encontrada no “Cours de calcul différentiel et integral” de Serret.

Aparecem a noção de ordem da equação diferencial e os métodos de resolução das equações.

Na integração das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, a separação de variáveis é tratada no exemplo:

$$\frac{dy}{y} = m dx$$

que é resolvido, com a integração dos dois membros. Sua solução, $\ln y = mx + C$, transforma-se, com a definição de logaritmo natural, em:

$$y = A e^{mx}, \text{ com } A = e^C.$$

Sonnet explica que as variáveis se separam imediatamente quando a equação diferencial é da forma :

$$y' = g(x)h(y)$$

Como exemplo, considera a equação $y' = x^2(1 + y^2)$, cuja solução é:

$$\text{arctg } y = \frac{1}{3} x^3 + C .$$

O próximo método é o da solução da equação diferencial homogênea, que é exposto em forma análoga, com uma equação geral:

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0 ,$$

em que se troca y por ux , dy por $udx + xdu$, possibilitando a integração e voltando-se às variáveis dadas.

As equações diferenciais vão aparecendo no texto por um estilo direto: a equação é apresentada, o método é exposto e é dado um ou dois exemplos de sua solução.

Assim são vistas as equações diferenciais lineares de primeira e segunda ordens, as equações diferenciais simultâneas, as diferenciais totais e as parciais.

Surgem, ao final, as aplicações geométricas, por meio de determinação de curvas com uma propriedade dada e de trajetórias ortogonais. O texto não mostra aplicações no sentido do emprego das equações em questões provenientes de outras áreas.

Sonnet apresenta noções sobre a convergência de séries no apêndice. Iniciando com a definição: “Chama-se série a uma seqüência indefinida de números

inteiros ou fracionários, positivos ou negativos, que se sucedem segundo uma lei determinada.”⁷

Segundo o autor, a série é uma seqüência. Assim as progressões aritméticas e geométricas são séries, e uma série é convergente quando a soma de seus termos tende a um limite finito e determinado.

Em seus primeiros exemplos, menciona as séries:

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Esses exemplos confirmam a confusão entre as seqüências da definição dada de séries e as somas indicadas nos exemplos. O problema está em consonância com Duhamel, em “*Éléments de Calcul Infinitésimal*”, de 1874.

Em suas notas sobre séries, Duhamel enuncia: “Chama-se série uma seqüência de termos positivos ou negativos, cujo número é infinito.”⁸

A definição de Sonnet também menciona números inteiros e fracionários, deixando de lado os irracionais.

Existem dois objetivos nesse apêndice:

(1) Apresentar o número e como o $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, para n infinitamente grande.

Isso é realizado no assunto séries.

(2) Informar que, para polinômios ordenados em relação às potências crescentes de uma variável h , suficientemente pequena, na forma

$$A + Bh + Ch^2 + \dots + Nh^n,$$

o primeiro termo dá o sinal de todo o desenvolvimento.

O livro de Sonnet tem uma exposição clara e objetiva, oferecendo um acompanhamento fácil para o leitor. O tratamento simples, despretensioso, dado à obra por Sonnet, unido à sua organização, favorecem a leitura e a intuição.

O leitor segue o desenvolvimento do Cálculo Diferencial com facilidade, principalmente porque os conceitos centrais, de derivada e de diferencial, sempre retornam ao longo do texto. Não existe a preocupação com o novo e a leitura é limitada ao acompanhamento dos métodos.

⁷ “On nomme série une suite indéfinie de nombres entiers ou fractionnaires, positives ou négatifs, qui se succèdent d’après un loi déterminée.” (ibid., p. 206)

⁸ “On appelle série une suite de terms positifs ou négatifs don’t le nombre est infini.” (DUHAMEL, 1874)

Quanto às idéias fundamentais que servem de base ao Cálculo, a noção de função é retórica, e os limites surgem sem qualquer explicação conceitual. O leitor exigente deve procurar fora do texto um conceito para os limites de funções. A falta de uma definição, mesmo que retórica, de limite é uma falha grave do autor. Derivadas e integrais estão apresentadas no texto, juntamente com as suas propriedades, por limites de funções, e o leitor fica sem controle das definições e dos porquês das regras de derivadas e dos métodos de integração.

Os objetivos de Sonnet, manifestados em seu prefácio, não são teóricos, o que reduz sua obra aos exercícios mecânicos e às aplicações imediatas. Não há espaço para a criatividade.

Nossa opinião é, portanto, que o livro de Sonnet tem qualidades de organização de assuntos e de exposição, mas não é bem fundamentado teoricamente e prestigia o leitor que procura apenas os métodos usuais de um curso inicial de Cálculo.

**APÊNDICE B – Exame de texto: análise do livro Lezioni di
Analisi de Francesco Severi, primeiro volume, Bologna: Nicola
Zanichelli Editore, 433 páginas, 1933.**

Organização de conteúdos

Introdução

Capítulo I. Cálculo combinatório.

Capítulo II. Determinantes. Formas lineares.

Capítulo III. Números reais.

Capítulo IV. Números complexos.

Capítulo V. Funções e limites.

Capítulo VI. Derivadas e diferenciais das funções de uma variável.

Capítulo VII. Séries numéricas e séries de Taylor.

Capítulo VIII. Noções preliminares relativas às integrais.

Capítulo IX. Generalidades sobre funções algébricas.

Esta obra atende a duas finalidades, sendo dirigida aos estudantes de engenharia e de matemática.

Na parte principal de cada capítulo, é desenvolvida a teoria formal, com algumas concessões que privilegiam a intuição e as explicações de suas finalidades. Aqui, o autor transmite aos engenheiros e aos matemáticos simultaneamente.

Nos complementos e exercícios, parágrafo final dos capítulos, a abordagem transcende um curso de Cálculo, ou mesmo de Análise para iniciantes. Aparecem assuntos próprios de um curso avançado, que são unidos aos méritos do autor – correção de linguagem e boa escolha de assuntos – para tornar a obra um livro de referência no setor.

A escolha dos exercícios obedece a critérios de importância na construção da teoria. Existem os inferenciais, que demandam provas de proposições, e outros que são resolvidos por cálculos.

A distribuição dos assuntos nos capítulos é variada. Metade de suas páginas é dedicada ao Cálculo Combinatório e à Álgebra, que incluem equações lineares e generalidades sobre polinômios, anéis e corpos, teoria dos números reais e complexos. A outra metade é dedicada ao Cálculo, especificamente funções, limites, continuidade, derivadas, integrais, séries numéricas e de funções.

O texto apresenta um número grande de citações históricas, principalmente de autores, que sempre são acompanhados das datas de publicações de seus trabalhos. Essa iniciativa de Severi é muito importante, favorecendo o conhecimento do desenvolvimento matemático.

Capítulo I. Cálculo Combinatório e aplicações

O Capítulo apresenta o cálculo combinatório em sua parte principal. Nos complementos e exercícios aparecem grupos de substituição e probabilidades.

O cálculo combinatório trata das disposições (arranjos), das permutações e das combinações simples e com repetição de n elementos, até o desenvolvimento do binômio. Aqui o autor procura, em uma linguagem simples e direta, diferenciar as diversas maneiras de resolver problemas de cálculo, pelo princípio da contagem. Transmite informações apenas, guardando as aplicações para a parte final, os complementos e os exercícios.

Define a substituição como a operação que passa de uma permutação de n objetos para outra permutação dos mesmos objetos. Entre as substituições são examinadas as cíclicas, que trocam cada elemento pelo seu sucessor e o último pelo primeiro. É vista, ainda, a estrutura de grupo não comutativo do produto de substituições, privilegiando as substituições cíclicas com suas propriedades expressas, na forma do autor.

Seu estilo revela uma preocupação de ordem na transmissão das informações matemáticas. Suas definições, neste capítulo, são descritivas e seus resultados obtidos pelos teoremas mostram a realização de um planejamento prévio.

A novidade aparece nos complementos, em que o autor acrescenta informações sobre a teoria dos grupos de substituições e citações históricas de resultados, com os nomes dos matemáticos autores. Nesses últimos, as datas que Severi inclui após os nomes, referem-se às publicações de suas descobertas.

Surgem resultados sobre a ordem de um grupo devidos a Lagrange (1770), a Cauchy (1844), a Sylow (1872) e a Galois (1830).

O autor comenta que a teoria dos grupos de substituições tem conseqüências na teoria das equações algébricas, citando Ruffini, 1798, e Galois, 1830.

O problema é que, apesar da organização original para um livro didático, todos esses dados da teoria dos grupos são apresentados em uma página apenas, não havendo espaço para o seu desenvolvimento em uma forma que permita uma compreensão satisfatória do assunto.

Nos exercícios aparecem contribuições numéricas e dedutivas do cálculo combinatório, algumas com a finalidade de “preenchimento de buracos” da teoria, deixados ao leitor. É a única parte do capítulo que o autor negocia a construção do conhecimento com o leitor.

Os complementos e exercícios apresentam também, em treze itens, a definição de probabilidade e a sua aplicação em determinados exercícios de cálculo.

Capítulo II. Determinantes e aplicações

O capítulo II apresenta determinantes, sistemas de equações lineares e formas lineares. Inicia com a origem da teoria dos determinantes, partindo dos sistemas de equações lineares estudados na Álgebra elementar, onde são

verificadas as dificuldades que aparecem na aplicação do método de substituição, nos casos de impossibilidades e de indeterminações.

A solução de um sistema de equações lineares, na Álgebra elementar exposta, não vai além de sistemas de três equações lineares com três incógnitas, justamente pelas complicações nas substituições de incógnitas que aparecem, ao crescer o número de equações e de incógnitas. Severi ressalta a importância da busca de um novo algoritmo que permita um cálculo numérico cômodo de obtenção de resultados.

Prosseguindo, relata que a teoria dos determinantes teve sua origem com Leibniz (1678), na Europa, e com Sehi Kowa (1683), no Japão, na solução do problema exposto. A denominação de determinante é de Gauss (1801) e de Cauchy (1815); a teoria geral e a notação correspondente é de Jacobi (1841).

Com tudo isso, inicia os primeiros exemplos de cálculo com os determinantes de segunda ordem e a generalização do procedimento. Mostra as propriedades dos determinantes, a noção de complemento algébrico de um determinante e o seu desenvolvimento segundo os elementos de uma linha. O produto de determinantes, o determinante recíproco de um dado e o determinante de potências, chamado também de determinante de Vandermonde (1771), ou de Cauchy (1841).

Os complementos e exercícios, do parágrafo 2, constam das aplicações da teoria dada e das combinações entre matrizes e determinantes que surgem nos desenvolvimentos teóricos.

O parágrafo 3 cuida das equações e formas lineares. Apresenta a regra de Cramer para a solução de um sistema de n equações com n incógnitas e a sua aplicação para a demonstração de uma propriedade de determinantes recíprocos.

Nas formas algébricas lineares de n variáveis (polinômios homogêneos de primeiro grau de n variáveis), aparece a característica de uma matriz, através do conceito de Frobenius (1879), como a ordem máxima p dos menores não nulos extraídos da matriz.

A noção é usada no teorema de Rouché (1875) – Capelli (1892), na análise de um sistema de m equações com n incógnitas.

Os complementos e exercícios, do parágrafo 4, são constituídos pelas aplicações da teoria dada acrescidas de assuntos novos que completam o capítulo.

Esses complementos referem à teoria das substituições, em particular às lineares, às involutórias e ao grupo das ortogonais. Elas são relacionadas na

Geometria Analítica com as homografias, que deixam invariantes um par de pontos de uma reta, ou de uma cônica do plano, ou de uma quádrlica do espaço. Severi une os fundamentos algébricos da teoria das substituições, tratados no capítulo I, com a Geometria Analítica, trazendo a gênese entre o discreto e o contínuo para a obra.

Capítulo III. Números reais

O capítulo III inicia-se com as extensões sucessivas do conceito de número, partindo dos inteiros e terminando nos reais. A exposição fixa-se nos racionais e irracionais, e o autor comenta o princípio de permanência das propriedades formais, de Hankel (1867), segundo o qual as extensões devem ser feitas de modo que se conservem as propriedades formais, que caracterizam as operações elementares diretas. Assim os racionais se constituem em um campo de racionalidade.

Os reais são obtidos pelos cortes na reta racional, de acordo com as condições de Dedekind (1872) e pela construção de Cantor (1872), por pares de sucessões convergentes de números racionais.

Na primeira construção, o autor parte de razões de grandezas, que são indicadas por $A : B$, símbolos que representam medidas de segmentos, ou ângulos, ou arcos de curvas, ou superfícies, ou outros objetos homogêneos.

Severi alega que essa é a forma natural de apresentação do problema, por estar em conformidade com a gênese histórica.

Afirma sobre a evolução do conceito de número irracional que essa noção amadureceu na Matemática com lentidão secular, a partir da escola pitagórica, com a consideração das grandezas incomensuráveis.

Continua reforçando que é sempre oportuno seguir o desenvolvimento histórico, para uma melhor e mais fácil compreensão da origem das idéias. Comenta, ainda, que essa maneira de tratar os números irracionais está em outro de seus livros, cuja edição italiana é denominada *Elementi di geometria*.

Nessa ordem de idéias, o número real é obtido por aproximações por falta e por excesso da razão $A : B$, denominadas classe inferior e classe superior, ou primeira e segunda classe, respectivamente.

Severi (1933, p. 71) destaca, então, as propriedades, que atribui a Dedekind (1872):

- a) Todo número da primeira classe é menor que todos os números da segunda.
 b) A primeira classe não tem máximo, nem a segunda tem mínimo.
 c) As duas classes compreendem exclusivamente todos os números racionais, ou todos exceto um deles, compreendido entre elas.
 Toda subdivisão do campo racional em duas classes que satisfaça as propriedades (a), (b), (c), denomina-se corte (ou secção) do campo racional.¹

Também, em nota ao pé da página, o autor explica que os números racionais considerados são positivos.

Severi define os números reais como um símbolo com o qual se representam as duas classes determinadas por um corte do campo racional. Sua definição retira do texto os eixos intuitivos e elementares relativos aos números reais.

A palavra símbolo, para Severi, possui, nesse caso, um sentido de representação conceitual abstrato, não uma significação representativa gráfica. Isso não constitui um impedimento para que esses números sejam representados por símbolos literais nas operações.

O autor completa a questão da definição de número real como corte do campo racional, com o postulado da continuidade, na forma de Dedekind: “O conjunto dos números reais é contínuo”.²

No último parágrafo: complementos e exercícios, Severi aborda a construção dos números reais atribuída no texto a Cantor (1872), Méray, Heine, definindo sucessões convergentes de números racionais:

Duas sucessões de números racionais

$$a_1, a_2, a_3, \dots \quad b_1, b_2, b_3, \dots$$

constituem um par de sucessões convergentes, quando os números da primeira são menores que os da segunda; os números da primeira vão crescendo, enquanto os da segunda vão decrescendo; enfim, dado arbitrariamente o número racional $\varepsilon > 0$, se pode determinar um inteiro s tal que, para $n > s, m > s$, sempre $b_n - a_m < \varepsilon$.

O ente abstrato de um tal par de sucessões pode definir-se como um número real.³

¹ a) Ogni numero della prima classe è minore di tutti i numeri della seconda.

b) La prima classe non ha massimo e la seconda non ha minimo.

c) Le due classe comprendono complessivamente tutti i numeri razionali o tutti meno uno.

Ogni suddivisione del campo razionale in due classi soddisfacenti alle proprietà a), b), c), si chiama una sezione (o taglio) del campo razionale.

² [...] l'insieme dei numeri reali è continuo. (SEVERI, 1933, p. 84)

³ Due successioni di numeri razionali: $a_1, a_2, a_3, \dots; b_1, b_2, b_3, \dots$ costituiscono una coppia di successione convergenti, quando i numeri della prima son minore dei numeri della seconda; i numeri della prima vanno crescendo [...] mentre i numeri della seconda vanno decrescendo [...]; infine, dato ad arbitrio il numero razionale $\varepsilon > 0$, si può determinare un intero s tale che per $n \hat{=} s, m \hat{=} s$ sia sempre $b_n - a_m \hat{=} \varepsilon$. L'astratto di una siffatta coppia di successioni può definirsi come un numero reale. (ibid., p. 90)

Em seguida, há um pedido para que o leitor estude as relações dessa definição de número real com a anterior, por cortes de racionais.

A continuidade da reta é também postulada, na forma de Cantor.

Sejam sobre uma reta duas classes de pontos H, H' , tais que todo ponto de H está à esquerda de todos os pontos de H' e que, dado um segmento σ arbitrário, seja possível encontrar um segmento menor que σ , que tenha o extremo inferior em H e o extremo superior. Existe, então, um ponto M de separação entre as duas classes, isto é, um ponto que não tenha à direita nenhum ponto de H nem à esquerda nenhum ponto de H' .⁴

Severi afirma que existe uma profunda diferença entre as duas formas do postulado da continuidade. Argumenta em favor da afirmação que, do postulado de Dedekind, segue como conseqüência o postulado de Arquimedes; enquanto este último é independente do postulado de Cantor.

Dessa forma, o autor comenta que é possível construir uma geometria não arquimediana, na qual são válidos todos os postulados da geometria elementar, juntamente com o postulado da continuidade de Cantor. Essa possibilidade é atribuída a Veronese (1890) e a Hilbert (1899). Severi.

Severi continua a apresentar os seus complementos à teoria, passando a demonstrar que o conjunto dos racionais é enumerável.

Surge, na obra, a noção de Cantor sobre conjuntos equivalentes ou de igual potência, quando existe uma correspondência biunívoca entre os seus elementos.

A potência do contínuo dos números reais é comparada com a potência do enumerável dos números naturais. Severi analisa a propriedade de um conjunto infinito conter uma parte equipotente e conclui que: “A potência do contínuo é maior que a potência do enumerável”.⁵

Citando Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, explica que é sempre possível extrair um conjunto enumerável de um conjunto infinito, de tal forma que a parte restante seja também um conjunto infinito. Conclui, a seguir, que: “A potência do enumerável resulta, portanto, a menor de todas as potências”.⁶

⁴ Sieno sopra una retta due classi di punti H, H' , tali che ogni punto di H sia a sinistra di tutti i punti di H' e che, dato comunque l'estremo inferiore in H e l'estremo superiore in H' . Esiste allora un punto di M di separazione fra le due classi; cioè un punto che non ha a destra nessun punto di H nè a sinistra nessun punto di H' . (SEVERI, 1933, p. 91)

⁵ [...] la potenza del continuo è maggiore della potenza del numerabile. (SEVERI, 1933, p. 94)

⁶ La potenza del numerabili risulta pertanto la più piccola di tutte le potenze. (SEVERI, 1933, p. 94)

O capítulo trata também das operações com números reais, inclusive a potenciação e a logaritmação.

O autor assume um estilo descritivo em sua transmissão de informações, com a lógica superando a heurística. A importância do capítulo é o conteúdo, que desenvolve o conceito de número real, base para o curso de análise que virá em seguida.

Capítulo IV. Números complexos

O capítulo IV complementa a ampliação do campo numérico tradicional, iniciando com a característica das raízes de uma equação algébrica não pertencerem ao corpo de seus coeficientes, e sim à extensão quadrática desse corpo.

A resolução da equação do segundo grau $x^2 + px + q = 0$, onde $q \neq 0$ e $p \neq 0$ são números reais, e com raízes na extensão do corpo R , é o caminho natural para apresentar o significado da ampliação do conjunto R para o corpo C dos números complexos.

Com isso, o autor introduz o símbolo i para a unidade imaginária e os números da forma $a + bi$ e $a - bi$, com a e b reais, para representarem os valores complexos das raízes da equação considerada.

Severi define os números complexos por meio de pares ordenados de reais que satisfazem:

1. Dois números complexos (a,b) e (c,d) são iguais, e se escreve

$$(a,b) = (c,d),$$

quando e somente quando $a = c$, $b = d$. Da definição se deduz imediatamente que a igualdade é reflexiva, simétrica e transitiva.

Dois números complexos (a,b) , (c,d) não iguais se dizem desiguais ou diversos e se escreve $(a,b) \neq (c,d)$.

2. Dados os números complexos (a,b) , (c,d) , se chama soma dos dados ao número complexo:

$$(a + c, b + d) = (a, b) + (c, d)$$

A soma é evidentemente comutativa.

Da definição de soma de dois números complexos se passa a definição de soma de três ou de quantos se queiram números complexos e se verifica que a soma é associativa.

3. Produto dos números complexos (a,b) , (c,d) é o número complexo

$$(ac - bd, ad + bc), \text{ ou seja, } (ac - bd, ad + bc) = (a, b) \times (c, d).$$

O produto dos números complexos é comutativo; também da definição do produto de dois fatores complexos se passa a do produto de um número qualquer de complexos e se verifica que o produto é associativo.

Um produto de n fatores iguais a (a, b) se chama potência n -ésima de (a, b) e se indica com $(a, b)^n$.

4. O número complexo $(a, 0)$ é idêntico ao número real a , assim:

$$(a, 0) = a,$$

e um número complexo se reduz a um número real somente quando é nulo o segundo número real do par.

Estas condições determinam um conjunto de pares ordenados de números reais, chamado campo dos números complexos ou campo complexo.

Severi segue mostrando que o isomorfismo que se estabelece entre os reais da forma a e os complexos da forma $(a, 0)$, com $(1,0) = 1$, $(0,0) = 0$ e $(0,1) = i$, conduz a $i^2 = -1$ e a $(a,b) = a + bi$.

O anel dos complexos, embora o autor não declare explicitamente, encontra-se quase estruturado, faltando apenas a propriedade distributiva do produto na soma. Com a existência e a unicidade do inverso, para todo complexo $(a, b) \neq (0,0)$, também quase se configura o corpo dos complexos.

Severi fica devendo a construção do anel de integridade no conjunto dos complexos, embora, no item 48, reforce que todas as operações racionais do campo real se aplicam no campo complexo. Aproveita para advertir, no mesmo item, que no campo complexo não tem sentido as relações “maior que” ou “menor que”, afirmando que o corpo complexo não é ordenado.

Há um espaço para os dados históricos onde entram Bombelli (1572), Euler (1777), Gauss (1832) e Hamilton (1853), com as suas intervenções no campo. Bombelli é o pioneiro, com a introdução dos complexos. Euler é o responsável pelo símbolo i . Gauss, pela denominação de número complexo e Hamilton, pela organização na forma de teoria analítica rigorosa.

Severi prossegue com a representação geométrica, a forma trigonométrica e o teorema de Moivre (1737). Completa a parte operacional com as raízes n -ésimas de um número complexo e com as raízes da unidade.

Nos complementos e exercícios, aborda a construção das afinidades circulares de Möbius, o problema do número das raízes n -ésimas primitivas da unidade pelo indicador de Gauss (1801) e as construções com régua e compasso, associadas ao campo complexo por Gauss, em 1801, com a solução do heptadecágono regular e a fórmula $n = 2^{\mu} + 1$, com μ inteiro e n primo, que permite a possibilidade de construção de polígonos regulares de n lados.

O capítulo termina com a menção da extensão dos números complexos na determinação dos quaternions de Hamilton (1853).

Os números complexos têm dois papéis no livro de Severi. O primeiro de ponte do ensino médio para o superior, com as operações fundamentais desenvolvidas com clareza pelo autor e, o segundo, como suporte para o aluno estudioso, talvez futuro matemático, com as informações contidas nos complementos sobre raízes das unidades, construções de polígonos com régua e compasso e os quaternions, aliados sempre à profundidade e ao poder de síntese do autor.

Capítulo V. Funções e limites

No início do capítulo, a obra trata dos extremos superior e inferior de um conjunto de números reais. Define ponto de acumulação de um conjunto, demonstra o teorema de Bolzano (1817), define conjunto derivado, limite máximo e limite mínimo de um conjunto dado. Essa parte é acompanhada de exemplos de conjuntos com pontos de acumulação de forma a tornar o conceito familiar para o estudante.

Quanto aos extremos, o autor considera que, se um conjunto não é limitado à direita, isto é, no conjunto existem números maiores que todo número real prefixado, então o conjunto tem por extremo superior $+\infty$. Analogamente, se o conjunto não é limitado à esquerda, o seu extremo inferior é $-\infty$.

Com essas definições enuncia: “Um conjunto tem sempre um extremo superior (finito ou infinito) e um extremo inferior (finito ou infinito)”.⁷

Severi informa que as noções de extremos de um conjunto foram consideradas pela primeira vez, na forma explícita, por Bolzano (1817) e utilizadas na teoria das funções desde Weierstrass.

Em seguida, inicia a parte central do capítulo que abrange funções e limites. O conceito de função é atribuído a Dirichlet. Severi separa as funções em unívocas e plurívocas, definindo os dois casos.

A definição de limite de uma função é precedida da idéia intuitiva, seguida de notas históricas e de uma primeira formalização por uma linguagem de vizinhanças. A vizinhança é uma palavra descritiva, que carrega significados intuitivos e auxilia a compreensão da forma ε, δ , que é elusiva ao iniciante.

Justifica que a vaga noção explicitada pela frase “se aproxima infinitamente” significa que é sempre possível escolher um entorno do ponto a , de tal forma que os valores de y correspondentes aos valores tomados por x neste entorno, sejam “proximíssimos” a b , isto é, diferentes de b em valor absoluto, a menos de uma quantidade positiva ε , prefixada e arbitrariamente pequena.

A seguir dá a definição formal de limites, usando ε e δ .

Diz-se que o número b é o limite da função y de x , quando a variável x tende a um ponto a do intervalo I no qual y está definida, e se escreve:

$$\lim_{x \rightarrow a} y = b$$

se, escolhido de modo arbitrário o número $\varepsilon > 0$, se pode determinar um entorno α de a , tal que, a todo ponto de α , distinto de a , corresponda um valor de y , cuja diferença de b , em valor absoluto, é menor que ε .

Em outros termos:

Escolhido $\varepsilon > 0$, é possível determinar um número $\delta > 0$, tal que, a todo x de I , diferente de a , que satisfaz a condição $|x - a| < \delta$, corresponda um y que verifica a desigualdade $|y - b| < \varepsilon$.⁸

⁷ *Un insieme ha sempre un estremo superiore (finito o infinito) ed un estremo inferiore (finito o infinito).* (SEVERI, 1933, p. 124)

⁸ *Si dice che il numero b è il **limite** della funzione y di x , allorquando la variabile x tende ad un punto a dell'intervallo I , in cui y è data, e si scrive $\lim_{x \rightarrow a} y = b$ se, suolto a piacere il numero $\varepsilon > 0$, si può determinare un intorno α di a , tale che ad **ogni punto di a , distinto da a** , corrisponda un valore di y differente da b , in valore assoluto, meno di ε .*
In termini più concisi:
Suelto $\varepsilon > 0$, si può determinare un numero $\delta > 0$, tale che, ad ogni x di I , diverso da a , soddisfacente alla condizione $|x - a| < \delta$, corresponda un y verificante la disuguaglianza $|y - b| < \varepsilon$. (ibid., p. 132)

Severi deixa claro que a idéia de limite remonta ao método de exaustão de Eudócio, século IV AC, método que alcançou um grau de importância notável com Arquimedes, século II AC. O método de exaustão, para o autor, tem um significado que transcende o papel de precursor da Análise Infinitesimal.

Prosseguindo em suas notas históricas, cita que o processo levou ao método dos indivisíveis, devido a Bonaventura Cavalieri (1635), discípulo de Galileo e um dos fundadores do Cálculo dos infinitésimos.

A noção entrou no domínio da Análise com Wallis (1656), assumindo uma forma mais completa e rigorosa com Bolzano (1817) e Cauchy (1823) e com todos os grandes matemáticos do século XIX.

Com essas concessões à intuição e dados históricos, o autor prossegue com limites laterais, limites de sucessões, propriedades e operações sobre limites, formas indeterminadas e o teorema de Weierstrass, sobre extremos de uma função em um domínio dado.

Constrói os limites fundamentais das funções transcendentais, define limite máximo e limite mínimo e a oscilação de uma função em um ponto, citando Cauchy (1821), Dini (1878), Du Bois – Reymond (1882) e Pringshelm (1898), como responsáveis por aspectos diversos do assunto. O objetivo é obter um critério geral de convergência.

A apresentação é abrangente, o que resulta em trabalho para o leitor.

São estudadas, a seguir, as funções contínuas de uma só variável, a continuidade uniforme dessas funções e a extensão da noção de limite às funções de várias variáveis.

Os complementos e exercícios contêm cálculo de limites e as extensões dos teoremas de Bolzano e de Weierstrass para várias variáveis. A topologia ocupa um bom espaço que o autor aproveita para as definições e teoremas sobre homeomorfismos de espaços topológicos e para a introdução de notas históricas. Estas se referem aos autores de proposições e de resultados e às datas em que esses assuntos foram alcançados e aparecem em todos os parágrafos.

Severi deseja, aqui, como anteriormente, interessar o estudante de matemática na Análise Superior. Com esse propósito, a sua transmissão de informações supera a heurística e a intuição neste capítulo.

Capítulo VI. Derivadas e diferenciais de funções de uma variável

O capítulo está dividido em oito parágrafos, nos quais Severi expõe as noções de derivada e diferenciais de funções reais acompanhadas de suas aplicações e da noção de infinitésimo.

A derivada é trabalhada no parágrafo 1, primeiramente por meio de dois conceitos: um da Mecânica e outro da Geometria, os quais, segundo o autor, germinam historicamente a noção.

A referência da Mecânica, velocidade em um instante dado, é introduzida considerando-se um ponto móvel ao longo do eixo x . Esse ponto de abscissa $x = f(t)$ é uma função determinada da variável tempo t . O espaço percorrido pelo ponto, no intervalo de tempo Δt_0 , de t_0 a t_1 ($t_0 < t_1$) é dado por $\Delta x_0 = x_1 - x_0$, sendo

$$x_1 = f(t_1) \quad \text{e} \quad x_0 = f(t_0).$$

No movimento uniforme, isto é, quando a velocidade v do ponto é constante em todo tempo, o espaço $\Delta x_0 = x_1 - x_0$, é indicado por $v\Delta t_0$, resultando, portanto,

$$v = \frac{\Delta x_0}{\Delta t_0}$$

No movimento variado, o valor da razão do incremento Δx_0 experimentado pela função $f(t)$, quando a variável independente t varia de $\Delta t_0 = t_1 - t_0$, representa a velocidade média do ponto nesse intervalo de tempo.

Para obter a velocidade no instante t_0 , basta considerar o limite para $t_1 \rightarrow t_0$ ($\Delta t_0 \rightarrow 0$) do quociente incremental $\frac{\Delta x_0}{\Delta t_0}$. A velocidade resulta, assim, uma função do instante t considerado (no caso $t = t_0$).

Essa função é denominada derivada da função $x = f(t)$ em relação à variável independente t . Ela pode ser indicada por meio de diversas notações: \dot{x} ou $f'(t)$ de Lagrange (1813); $Df(t)$ ou $D_1 f(t)$ de Arbogast (1800) e de Cauchy (1839); \dot{x} ou \dot{f} de Newton (1666); $\frac{dx}{dt}$ ou $\frac{df}{dt}$ de Leibniz (1675). As notações usadas com mais freqüência são as de Lagrange e de Leibniz. O símbolo de Leibniz, aparentemente menos manejável que os outros, é de grande utilidade. A gênese desse símbolo teve uma influência decisiva no desenvolvimento rápido da Análise infinitesimal, a partir do século XVII.

A organização do texto mostra a derivada construída pela contextualização da idéia importante de velocidade instantânea. É um problema motivador que auxilia a compreensão da derivada como taxa de variação. As informações históricas delimitam o tempo de introdução do conceito e privilegiam os seus autores e colaboradores próximos, citando, além de Newton e de Leibniz, as obras de período imediatamente anterior de Cavalieri (1639) e de Torricelli (1644), discípulos de Galileo, que contribuíram para preparar o terreno da invenção.

Ainda nesse parágrafo, Severi expõe o conceito geométrico da reta tangente a uma curva em um ponto e sua relação com a derivada.

A derivada agora é interpretada como o coeficiente angular da reta tangente à curva $y = f(x)$, em $P(x_0, y_0)$, e o autor abre espaço para a determinação de equações de retas tangentes.

Com as duas interpretações, a Mecânica e a Geométrica, Severi define a função derivada da função f , em um ponto x do domínio de f .

Ressalta a importância da derivada para toda a matemática e para as aplicações.

As duas contextualizações da derivada contribuem para o leitor aceitar a idéia e reforçam a conscientização de sua importância para além das palavras de Severi.

O texto, também, estimula o entendimento intuitivo sem descuidar do rigor matemático apropriado.

Em seguida, o autor trabalha os casos da função $f(x)$ derivável em um intervalo: das derivadas unilaterais, à direita e à esquerda de intervalos, e das funções deriváveis em extremos. Enuncia e demonstra, também, o teorema que liga a derivabilidade à continuidade das funções: "Toda função $f(x)$, derivável em um ponto x , é contínua neste ponto".⁹

O argumento utilizado na demonstração é o produto $\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x$, no qual o primeiro fator tem limite finito $f'(x)$ e o segundo fator, limite nulo. Assim, Δy tem limite nulo e $f(x)$ é contínua em x .

Severi revela que existem funções contínuas que não são deriváveis, ao comentar que o primeiro exemplo revelador dessa característica foi dado por Weierstrass, em 1861. O exemplo não aparece no texto.

⁹ *Ogni funzione $f(x)$ derivabile nel punto x , è ivi continua.* (SEVERI, 1933, p. 192)

A propriedade *a derivada de uma constante é nula* é explicada com a frase: *se y é constante, Dy é zero para todo D x.*

Também, a propriedade *a derivada da variável independente é 1* é explicada com o argumento: *quando y = x, tem-se Dy = Dx.*

Severi analisa, ainda, a derivação sucessiva, usando os diversos símbolos das notações de Lagrange, Cauchy e Leibniz.

Passa, a seguir, às regras de derivação, dando condições para as funções tratadas. Estas devem ser definidas em um campo comum e devem possuir derivadas nos pontos dos campos referidos. Ressalta que funções e as derivadas não são nulas nos domínios considerados, sempre que figurarem nos denominadores das fórmulas.

Demonstra fórmulas para as derivadas da soma, do produto e do quociente de duas funções f e g, do produto da constante \underline{a} pela função f; e da potência n-ésima de uma função u. Trata a regra da cadeia e a derivada da função inversa.

Com o título “derivadas das funções elementares”, usa as regras já obtidas para derivar um polinômio e deduzir as derivadas de $\ln x$, $\log x$ e a^x

Por último trata as derivadas das funções trigonométricas e de suas inversas.

O parágrafo 2 contém infinitésimos, infinitos e diferenciais. A noção de função infinitésima é tratada como dependente do conceito de limite: “Uma função $y = f(x)$ é infinitésima para $x \rightarrow a$, ou com $x - a$, quando $\lim_{x \rightarrow a} y = 0$.”¹⁰

A definição permite determinar a ordem infinitesimal de y em relação a $x - a$, pelo confronto de velocidades de y tendendo a zero e de x tendendo a \underline{a} . A função y de x, para x tendendo a \underline{a} , é infinitésima de ordem superior, ou igual, ou menor, com relação ao infinitésimo $x - a$, segundo a razão $\frac{y}{x - a}$ tenda, respectivamente, ao limite zero, ou a uma quantidade finita e não nula, ou ao infinito. O limite da razão é calculado para x tendendo a \underline{a} .

Com isso, Severi procura um entendimento intuitivo para a sua noção de ordem infinitesimal, falando em velocidade de anulamento, conforme y tenda a zero de forma mais rápida, igual ou menor que $x - a$.

¹⁰ Si dice che una funzione $y = f(x)$ è infinitesima per $x \text{ ® } a$ o con $x - a$, quando $\lim_{x \rightarrow a} y = 0$. (SEVERI, 1933, p. 204)

A preferência do autor em atrelar a noção de infinitésimo à operação de limite de funções é uma tendência dos livros textos de Cálculo, iniciada em São Paulo, com essa obra.

Como consequência, uma concepção análoga é apresentada para as quantidades infinitas, e a idéia de diferencial de uma função é obtida pela diferença $\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x) = \varepsilon$, sendo ε um infinitésimo com Δx .

Dessa forma, podemos escrever $\Delta f = f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x$, onde a parcela $\varepsilon\Delta x$ é um infinitésimo de ordem superior com relação a Δx , e a parte principal $f'(x)\Delta x$ é a diferencial de f em relação a x . Com a operação de limite, a diferencial é um número real pequeno usado nas aproximações locais.

O comportamento das derivadas de uma função em extremos é vista no parágrafo 3. Essa parte inicia com o teorema sobre o anulamento da derivada, em um ponto de máximo ou de mínimo, interno a um intervalo do domínio da função. Demonstra o teorema de Rolle e o do Valor Médio; este a partir da propriedade dos incrementos finitos de duas funções f e φ .

O teorema de Rolle é seguido de uma nota histórica: “O teorema demonstrado é conhecido como de Rolle. Embora este autor o tenha dado no caso em que $f(x)$ é um polinômio (1691). A primeira demonstração rigorosa e completa foi dada por Dini (1878)”.¹¹

O teorema dos incrementos finitos é atribuído a Cauchy (1829) e apresentado como a extensão do Valor Médio, que é considerado pelo autor como a relação fundamental da análise infinitesimal.

A forma geométrica do teorema do Valor Médio, da reta tangente paralela à corda, é mostrada como enunciada por Cavalieri (1635). Sua forma analítica é considerada como um corolário da fórmula de Taylor, sendo atribuída a Lagrange (1801).

A menção à forma geométrica mostra um interesse do autor no conhecimento intuitivo da propriedade. Revela, ainda, a sua equivalência com o teorema de Rolle, podendo um deles transformar-se no outro, com uma simples mudança de coordenadas.

¹¹ Il teorema stabilito è detto di Rolle, per quanto questo Autore lo abbia dato soltanto (1691) nel caso in cui $f(x)$ è un polinomio. La prima dimostrazione completa e rigorosa è stata data dal Dini (1878). (SEVERI, 1933, p. 216)

O teorema dos incrementos finitos é usado para validar a regra de L'Hospital, de 1696, em suas várias formas. Essa parte é ilustrada com exemplos de limites de funções transcendentas.

Com o nome de teorema de Cauchy, o teorema acima é usado também no parágrafo de zeros e extremantes das funções de uma só variável, determinando o teorema de aplicação freqüente: "Se a primeira derivada da função $f(x)$ se anula em um ponto x_0 interno ao intervalo $[a,b[$ e $f'(x_0) \neq 0$, a função $f(x)$ possui, em x_0 , um máximo ou um mínimo, segundo $f'(x_0) < 0$ ou $f'(x_0) > 0$."¹²

O fato de a derivada não se anular no intervalo para a função f crescente ou decrescente é mencionado em uma observação, logo em seguida ao critério de reconhecimento de máximos ou mínimos.

As aplicações geométricas que aparecem com o contato de curvas planas e a definição de círculo osculador de uma curva plana em um ponto são dadas nos parágrafos 5 e 6.

O parágrafo 6 trabalha a fórmula de Taylor com o resto de Lagrange. O autor inicia contando a sua utilidade: a resolução do problema de aproximação de uma função $f(x)$ mediante um polinômio de grau determinado, juntamente com a obtenção do resto, assinala a ordem de magnitude do erro que se comete nessa aproximação.

Severi afirma que a fórmula demonstrada é a mais importante de toda a Análise, sendo dada em termos imprecisos por Taylor (1715). Conta, ainda, que uma fórmula equivalente foi apresentada por Jean Bernoulli, em 1694, sem a menção de sua importância. A passagem de uma a outra fórmula foi feita em 1742 por Maclaurin. Para completar as informações de conteúdo histórico, informa que Lagrange deu o significado de fórmula de aproximação em termos precisos, acompanhada pelo resto usado no texto.

As versões do autor sobre a História da Matemática, que acompanham todos os capítulos de sua obra, auxiliam muito o entendimento do caminho traçado, além de facilitar, pelo rastro histórico, a percepção de como a matemática era feita nos livros texto, em outras épocas, e as razões das mudanças ocorridas até os nossos dias.

¹² Se la derivata prima della funzione $f(x)$ si annulla in un punto x , interno ad $[a,b[$, ma è $f'(x_0) \neq 0$, la $f(x)$ presenterà in x_0 un massimo o un minimo, secondo che $f'(x_0) < 0$ ovvero $f'(x_0) > 0$. (SEVERI, 1933, p. 229-230)

O capítulo termina com os parágrafos 7, *Indicações sobre a extensão ao campo complexo*, e 8, *Complementos e exercícios*. O parágrafo 7 é um relato da derivada de uma função de variável complexa contido em uma página e meia, precisamente as de números 236 e 237, e transporta para o campo complexo muitas das noções desenvolvidas no capítulo. O conceito de derivada de uma função $f(z)$ de variável complexa z é igual, sendo o limite da sua taxa da variação independente do modo como o incremento complexo h tende a zero. As regras de derivação permanecem imutáveis no campo complexo. No momento, diz o autor, as regras de derivação das funções logarítmicas, exponenciais e trigonométricas não têm sentido, porque essas funções ainda não foram definidas no campo complexo.

Os conceitos dados de infinitésimos, de infinitos e de diferenciais podem ser transportados, também, para o campo complexo. Perdem o significado quase todas as proposições referentes às funções contínuas e deriváveis em intervalos: o teorema de Rolle, dos Incrementos Finitos e do Valor Médio. Exigem mudanças as fórmulas de Taylor e a regra de L'Hospital; o autor promete tratá-las na parte II do Curso.

O relato é apenas a descrição do que ocorrerá na continuação da obra, não sendo suficiente para o entendimento das derivadas no campo complexo ou para a sua simples manipulação. É uma marca do autor, usada freqüentemente no texto, abrangendo generalizações e uma quantidade diversificada de assuntos.

No parágrafo 8, *Complementos e exercícios*, Severi trata de assuntos variados, iniciando com uma justificação analítica da construção da reta tangente, em um ponto de acumulação O , de um conjunto de pontos I . Seus argumentos envolvem linhas de Jordan, linhas topológicas, curvatura finita de uma linha ordinária, vizinhanças, cordas impróprias, a aplicação do teorema de Bolzano e o princípio de Zermelo para conjuntos fechados. Define, em seguida, a equação da reta normal em um ponto (x_0, y_0) de uma curva, sendo deixado, como exercício, a sua aplicação à parábola, à espiral de Arquimedes e à espiral logarítmica.

Ele mostra a derivada de um determinante de ordem n e a regra de Peano para funções contínuas em um intervalo fechado e deriváveis no seu interior. Essa regra é uma conseqüência do Teorema de Rolle, e os teoremas dos incrementos finitos e do valor médio podem ser deduzidos a partir dela.

São apresentadas, também, considerações sobre ordens infinitesimais de funções e suas determinações pela fórmula de Taylor, aproximações de diferenças,

problemas de máximos e mínimos e considerações sobre curvas e círculos osculadores.

Capítulo VII. Séries numéricas e série de Taylor

A abordagem das séries numéricas é iniciada com a procura de um sentido para a soma dos termos de uma sucessão infinita, que leva à idéia de convergência. O desenvolvimento é bom porque mostra que uma operação infinita tem um resultado final, apresentando, em forma não explícita, uma metáfora do infinito.

Nos exemplos e nos critérios de convergência, o autor trabalha as séries de termos positivos, as séries alternadas e as complexas. Apresenta demonstrações para todos os teoremas citados, sendo as séries de termos positivos tratadas com detalhes.

O autor inicia a convergência das séries de termos positivos com a observação:

“Uma série de termos positivos é convergente ou divergente. Não pode ser indeterminada. Em todo caso, sua soma (finita ou infinita) coincide com o extremo superior do conjunto de suas somas parciais (e do conjunto, mais restrito, de suas reduzidas).”¹³

Nessa citação, além da exclusão do caso de indeterminação, o autor diz que toda série de termos positivos crescente (ou decrescente) e limitada superiormente (ou inferiormente) converge para o supremo (ou ínfimo).

Seguem os critérios de convergência: da comparação, da raiz, ligado a Cauchy (1821), da razão, de Kummer (1835) e de Raabe (1832). Severi deixa claro que os dois últimos critérios são mais potentes que os anteriores e podem decidir o caráter da série, quando os anteriores falham.

Na série alternada, apresenta a condição suficiente para a sua convergência: “Uma série $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$, cujos termos reais de sinal alternado constituam uma sucessão monótona infinitésima, é convergente”.¹⁴

¹³ *Una serie a termine positivi è convergente o divergente. Non può esser indeterminata. In ogni caso la sua somma (finita o infinita) coincide coll'estremo superiore dell'insieme delle sue somme parziali (e dell'insieme, più ristretto, delle sue ridotte).* (SEVERI, 1933, p. 254)

¹⁴ *Una serie $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$ i cui termini reali di segno alterno costituiscano una successione monotona infinitesima, è convergente.* (ibid., p. 260)

Severi demonstra o teorema com as hipóteses $\lim a_n = 0$ e $a_r \geq a_{r+1}$, e as reduzidas da série s_{2n} e s_{2n+2} .

A convergência absoluta é introduzida com o teorema citado como de Riemann (1867) ou de Dini (1868), que teria completado a demonstração de Riemann um ano após.

Dada uma série de termos reais de sinais quaisquer, $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$, sejam $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$, $-b_1 - b_2 - b_3 - \dots$, a série dos termos positivos e a dos termos negativos, tomados respectivamente na ordem que se sucedem na série dada. Se estas duas séries são convergentes, a série

dada é absolutamente convergente e tem como soma: $\sum_1^{\infty} a_n - \sum_1^{\infty} b_n$.¹⁵

Severi prossegue mencionando o caso em que uma das séries parciais é divergente, o que resulta na divergência absoluta da série dada. Chama a atenção para o caso em que as duas séries são divergentes e seus termos tendem a zero, quando existem séries equivalentes às dadas que são convergentes, divergentes ou indeterminadas.

O teorema de Dirichlet é qualificado como importantíssimo para reconhecer a convergência absoluta de uma série:

“A condição necessária e suficiente para que uma série, de termos reais ou complexos, seja absolutamente convergente, é que seja convergente a série formada com os módulos de seus termos. Se a série é absolutamente convergente, sua soma é independente da ordem dos termos”.¹⁶

Após sua demonstração, Severi conta que o teorema foi enunciado por Lejeune Dirichlet (1837) e demonstrado pela primeira vez por Scheibner (1860).

Uma sua consequência é a propriedade comutativa para as séries convergentes, que vale somente quando a série dos módulos de seus termos é convergente.

¹⁵ Dada una serie a termini reali di segno qualunque $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ sieno $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ $- b_1 - b_2 - b_3 - \dots$ la serie dei termini positivi e quella dei termini negativi, presi rispettivamente nell'ordine in cui si succedono nella serie data. Se queste due serie parziali son convergente, la serie

data è assolutamente convergente ed ha per somma $\sum_1^{\infty} a_n - \sum_1^{\infty} b_n$. (SEVERI, 1933, p. 263)

¹⁶ Condizione necessaria e sufficiente perchè una serie, a termini reali o complessi, sia assolutamente convergente, è che sia convergente la serie formata coi moduli dei suoi termini. Se la serie è assolutamente convergente, la sua somma è indipendente dall'ordine dei termini. (ibid., p. 265)

O parágrafo continua tratando de séries de termos reais ou complexos e termina com a soma e o produto de duas séries. São destacados os papéis de Cauchy (1821) e de Mertens (1875) nessas operações.

Na série de Taylor, que aparece novamente, são desenvolvidas as funções e^x , $\text{sen}x$, $\text{cos}x$, em séries de potências, em um entorno de $x_0 = 0$, e discutido o resto de Lagrange da fórmula de Taylor.

O capítulo é encerrado com o parágrafo 5, *Complementos e exercícios*, rico em informações sobre séries ainda não citadas e em dados históricos pertinentes ao assunto.

Surgem os nomes de Hadamard, ligado a um teorema sobre convergência; de Euler, com a constante que leva o seu nome; de Legendre, de Stieltjes e de Poincaré, que estão ligados às séries assintóticas.

Há um item 14, que menciona o emprego de séries por matemáticos eminentes, como os irmãos Bernoulli (1689, 1705), Leibniz (1713) e Euler (1734), sem a preocupação de sua convergência, obtendo resultados, por vezes, equivocados. Severi lembra os protestos de Nicolau e Daniel Bernoulli (1743, 1771) e de D'Alembert (1761) e informa que o conceito relativo à soma de séries convergentes teve início com Cesáro (1890), seguido por Poincaré e Stieljes, e permitiu explicar os resultados justos ou equivocados obtidos em épocas anteriores.

Severi descreve o esforço realizado por Cesáro, por Abel (1826), por Borel (1901) e por Sannia, relacionados às somas e aos produtos de séries, a partir dos resultados de Cauchy. Conta, ainda, que a teoria das séries duplas, iniciada por Cauchy (1821), foi organizada rigorosamente por Stolz (1884), Biermann (1887, 1897) e por Pringsheim (1897).

Severi prossegue apresentando resultados até o final do parágrafo, que contém quinze páginas, iniciando na página 272 e terminando na 287. Sua apresentação final é sobre o uso das séries para o cálculo de frações contínuas, do logaritmo decimal de 2 e do número π .

A importância histórica revelada por Severi, sua preocupação com rigor nos dados e seu poder de síntese e clareza dos trabalhos mostram uma aplicação na obra que supera de muito a maioria dos livros didáticos de primeiros anos de um curso de graduação em Matemática.

Ao citar algoritmos infinitos, no item 18, na página 281, abre nota de rodapé para informar que o tratamento do tema está inspirado em trabalhos de sua autoria:

La teoria elementare delle serie doppie (1923) e *Risultati, vedute e problemi nella teoria delle funzioni analitiche di due variabili complesse* (1931 e 1932).

Capítulo VIII. Noções preliminares relativas às integrais

O capítulo trata a integração como operação inversa da derivação e contém uma nota inicial informando que as noções sobre a integração são adiantadas para atender aos alunos que irão seguir o curso de Mecânica racional. Um desenvolvimento mais amplo do Cálculo integral aparecerá, na palavra do autor, na parte II do curso de Análise.

As noções são apresentadas em um único parágrafo, que contém a noção de função primitiva ou de integral indefinida, a integral definida e o simbolismo usado para representar estas idéias, as primitivas imediatas, a integração por soma, a integração por partes e por substituição, e a relação entre os conceitos de integração e área.

Nas integrais imediatas, há a advertência do autor quanto às funções consideradas, que excluem os valores de x que as tornam infinitas ou não reais. A maioria da apresentação é sobre as funções transcendentais, que são usadas em outros itens do capítulo.

A integral do $\sin^2 x$, $\int \sin^2 x dx$, é resolvida de dois modos: por partes e por substituição. O autor aproveita o resultado para calcular a área do círculo de raio a .

A integração de funções racionais e de irracionais aparecem no parágrafo 2, quando o autor avisa novamente que as noções complementares serão vistas na parte II do Curso.

Embora a exposição seja breve, contendo dez páginas, o leitor fica com uma visão boa da integração, no que se refere a métodos. A relação da integral com a área sob a curva é tratada através do confronto com retângulos de bases h , inscritos e circunscritos na curva. O teorema do valor médio é usado para a obtenção da integral como operação inversa da derivada.

Capítulo IX. Generalidades sobre funções algébricas

O capítulo trata os princípios que norteiam o trabalho sobre as funções algébricas e sobre as equações algébricas, valorizando sua obra com esse ramo importante da Análise Matemática.

No parágrafo 1, o autor define as funções algébricas como funções cujos valores se constroem a partir das variáveis e das quantidades dadas, mediante operações algébricas racionais. Deixa ao leitor a verificação de que toda função racional de uma ou de diversas variáveis pode ser expressa por um quociente de dois polinômios e cita, de início, o teorema fundamental da álgebra para a resolução da equação algébrica de uma variável.

Enuncia o princípio de identidade de polinômios para uma variável na forma: o polinômio de grau n de uma variável x que se anula para $n + 1$ valores distintos da variável tem todos os seus coeficientes nulos.

Como corolário segue que, se dois polinômios de uma variável são iguais para todo valor da variável, então, têm o mesmo grau, e os coeficientes dos termos semelhantes são iguais.

Comenta, ainda, que o princípio de identidade se estende para os polinômios de diversas variáveis, e demonstra sua afirmação, usando indução completa.

Em seguida, passa a cuidar da divisão de polinômios, definindo a operação para dois polinômios

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n & (a_0 \neq 0) \\ \varphi(x) &= b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m & (b_0 \neq 0) \quad m = n, \end{aligned}$$

que tem por resultado os polinômios $q(x)$, de grau $n - m$, e $r(x)$, de grau máximo $m - 1$, obedecendo à relação:

$$f(x) = \varphi(x) q(x) + r(x).$$

Severi informa que o quociente q e o resto r podem ser obtidos pelo método dos coeficientes a determinar, sem efetuar a divisão, por meio de um sistema de $n + 1$ equações lineares, com $n + 1$ incógnitas, que pode ser resolvido pela regra de Cramer.

Esse processo é simples, explica Severi, quando o divisor é o polinômio do primeiro grau $x - a$, de onde resultará:

$$f(x) = (x - a) (c_0 x^{n-1} + c_1 x^{n-2} + \dots + c_{n-1}) + r,$$

e o teorema de Descartes (1637): “A condição necessária e suficiente para que um polinômio $f(x)$ seja divisível por $x - a$, é que se anule para $x = a$.”¹⁷

No parágrafo 2, Severi constrói uma teoria da divisibilidade de polinômios de uma variável. Aparecem os conceitos de máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum de polinômios acompanhados de seus processos de cálculo. O autor justifica de forma rigorosa, ou seja, usando linguagem matemática, os cálculos obtidos no curso secundário, relativos ao assunto e dados, geralmente, na forma intuitiva.

No parágrafo 3, aparece a extensão da divisibilidade para polinômios de várias variáveis. É usada a noção de corpo, chamada de importante e fecunda e atribuída a Dedekind (1871) e a Kronecker (1882). Surge o corpo mínimo de racionalidade e sua extensão quadrática dos números da forma $a + b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{Q}$, acompanhadas das condições de redutibilidade; estas, para os corpos reais e complexos.

O autor trata, ainda, da unicidade da decomposição de polinômios em fatores primos, do máximo divisor comum e do mínimo múltiplo comum de dois ou mais polinômios, e de um procedimento geral de eliminação de incógnitas para um sistema de várias equações algébricas em r variáveis. Esse procedimento está presente nos trabalhos de Bézout (1779) e de Kronecker (1882).

O parágrafo 4 leva o título de *propriedades gerais das funções algébricas*. Severi aborda a continuidade das funções algébricas, seus zeros e infinitos e as funções racionais de pontos de hypersuperfícies do \mathbb{R}^n .

O teorema fundamental da Álgebra, “toda equação algébrica $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$, de grau $n \geq 1$, na incógnita x , possui pelo menos uma raiz (real ou complexa)”, aparece no parágrafo 5. Severi apresenta dados históricos afirmando que o teorema foi enunciado por Girard (1692) e por Ozanam (1702). Uma primeira tentativa de prova foi feita por D’Alembert (1746), mas a primeira demonstração rigorosa é de Gauss (1799). A apresentada na obra é devida a Cauchy (1821). Severi ressalta que inúmeras demonstrações têm sido dadas posteriormente e lembra que, ao decompor o polinômio de uma variável em fatores primos, foi deduzido do teorema fundamental que toda equação algébrica de grau n admite sempre n raízes entre reais e complexas.

¹⁷ *Condizione necessaria e sufficiente perché un polinomio $f(x)$ sia divisibile per $x - a$, è che si annulli per $x = a$.* (SEVERI, 1933, p. 308)

O resto do parágrafo é dedicado às funções simétricas simples e múltiplas, com resultados de Girard (1629), Newton (1707) e Gauss (1815).

O parágrafo 6 aplica as funções simétricas para o cálculo da resultante de dois polinômios pelos métodos de Euler (1748) e de Sylvester (1878).

O parágrafo 7 é sobre o teorema de Bézout que mostra a propriedade de duas curvas algébricas de ordens m e n , que não tenham infinitos pontos comuns, possuírem, em geral, mxn intersecções. O teorema foi enunciado por Maclaurin (1720) e demonstrado por Bézout (1766). A demonstração depende das soluções comuns a duas equações em duas variáveis. As derivadas envolvidas são parciais de duas variáveis e, embora apareçam nas demonstrações, o seu estudo só foi desenvolvido na segunda parte do Curso.

O parágrafo 8 contém resoluções de equações de terceiro e de quarto graus. Considera uma equação geral do terceiro grau, que é resolvida pelo método devido a Scipione de Ferro (1515), da Universidade de Bolonha. Severi apresenta um histórico da solução dessa equação que passa por Tartaglia (1534), Cardano (1545), Hudde (1657), Viète (1591), Bombelli (1572), Mollame (1890) e Capelli (1890).

A seguir, considera a equação geral do quarto grau e resolve-a por uma extensão do método de Hudde-Tartaglia, de autoria de Euler (1732). Severi fala nos outros métodos de resolução da equação do quarto grau e deixa-a como exercício para o leitor. Volta à História, em seguida, para comentar que o pioneiro na solução da equação quártica foi Luigi Ludovico Ferrari, discípulo de Cardano. Este publicou o método de Ferrari em 1545.

O parágrafo termina com o teorema de Ruffini-Abel: as equações polinomiais de grau superior a quatro não apresentam forma resolutive algébrica.

Severi cita as tentativas para resolver essas equações por meio de fórmulas e menciona o matemático e médico de Módena, Paolo Ruffini, como pioneiro na demonstração do teorema acima, e o matemático norueguês, Niels Abel, como autor de demonstração rigorosa.

O quadro estabelecido pelo autor é histórico. A menção a Ruffini é acompanhada da informação sobre o mérito do estabelecimento dos primeiros passos da teoria dos grupos de substituições e de haver indicado suas relações com a teoria das equações algébricas. A teoria foi desenvolvida posteriormente por Cauchy e Galois.

Galois é, no texto, o responsável por uma análise completa e profunda do assunto. Há, ainda, a informação sobre a possibilidade de resolução de equações do quinto e do sexto graus com funções elíticas e hiperelíticas.

O fecho do parágrafo 8 reforça a intenção do autor em usar a história para esclarecer o desenvolvimento estrutural ocorrido na álgebra, como consequência da impossibilidade da resolução de equações algébricas por fórmulas resolutivas. Há, inclusive, nota de rodapé em que Severi cita, entre as obras italianas, a de L. Bianchi, sobre teoria dos grupos (1900), e a de M. Cipolla, sobre análise algébrica, (1921).

O parágrafo 9 é dedicado ao cálculo numérico, com métodos de aproximação de raízes de equações algébricas, particularmente os processos de Ruffini (1799) – Horner (1819) e de Newton (1665) – Fourier (1831). Há comentários sobre a determinação de raízes racionais e de raízes complexas das equações.

No parágrafo 10, Complementos e exercícios, o livro de Severi contém uma geometria algébrica, distribuída em 36 itens com temas variados, que ocupam 54 páginas. Aparecem, em uma forma dissertativa, as transformações homográficas em equações, fórmulas de interpolação para as funções algébricas, uma análise de variedades algébricas, critérios acerca da compatibilidade de sistemas de equações algébricas, resolução gráfica de equações algébricas, um histórico sobre a impossibilidade de resolução com régua e compasso dos problemas clássicos da Antigüidade e as estruturas algébricas de grupos, anéis e corpos, com o nome de Álgebra abstrata ou Álgebra moderna.

Diante da grande variedade de assuntos relativos ao desenvolvimento da matemática nos séculos 18, 19 e 20, torna-se difícil ao leitor dominar o parágrafo.

Não é uma leitura para iniciantes e, uma vez mais, revela a intenção de Severi de realizar uma obra que transcenda a análise matemática padrão, apresentada nos livros de Cálculo Diferencial e Integral de cursos de engenharia e de primeiros anos do curso de Matemática.

É uma leitura para um futuro profissional da Matemática e para estudiosos, segundo o autor, aprofundarem questões atraentes da matemática contemporânea.

Aspectos gerais do texto

A disposição, a escolha e o desenvolvimento dos assuntos contribuem, em nossa opinião, para afirmar a obra como referência entre os livros de Análise de seu

tempo. Para Severi, a construção do conhecimento é obtida pela boa organização de sua obra e pela leitura atenta do conteúdo, e das informações complementares.

A conjugação da Álgebra com os elementos do Cálculo Diferencial e Integral mostra uma estrutura de complementação que ressalta a antinomia entre o discreto e o contínuo. O desenvolvimento dos assuntos privilegia a transmissão de informações, a qual supera os exercícios e a retórica. Esta é utilizada de forma comedida por Severi, sempre em ocasiões escolhidas e para beneficiar o leitor. Severi tem o estilo quase formal do livro didático. Em momentos necessários, negocia significados favorecendo a intuição.

Os dados históricos, que têm presença constante no texto, fornecem um quadro do desenvolvimento da álgebra e do cálculo, a partir do século XVII e até o início do século XX, com destaque para o século XIX.

Lezioni di Analisi foi usada por um ano apenas (1934) na Escola Politécnica, no curso do professor Luigi Fantappiè.

ANEXOS

Anexo A – Decreto de criação da Escola Politécnica de São Paulo.
Escola Politécnica. Cem Anos (1994).

Anexo B – Pessoal administrativo e docente da Escola Politécnica (1895 e 1900).
Anuários da Escola Politécnica (1901).

Anexo C – Horário de aulas do Curso Fundamental da Escola Politécnica.
Anuário da Escola Politécnica (1901).

Anexo D – Programas de Cálculo Diferencial e Integral (1899, 1903, 1930).
Anuários da Escola Politécnica (1901, 1903, 1933).

Anexo E – Homenagens a Rodolpho Baptista de San Thiago.
O Polythecnico (1933).

Anexo F – Curso de Cálculo de Rodolpho Baptista de San Thiago.
Quinze primeiras páginas organizadas por Adriano Goulin (1904).

ESTADOS UNIDOS DO BRAZIL
DIARIO OFFICIAL
 DO ESTADO DE SAO PAULO

8.º ANNO—5.º DA REPUBLICA—N. 670

SAO PAULO

QUINTA-FEIRA, 7 DE SETEMBRO DE 1893

ACTOS DO PODER LEGISLATIVO

Lei n. 191

DE 21 DE AGOSTO DE 1893

Approva o regulamento que organiza a Escola Polytechnica de São Paulo

O doutor Bernardino de Campos, presidente do Estado de São Paulo.

Faz saber que o Congresso Legislativo do Estado decretou e eu promulgo a lei seguinte :

Artigo 1.º Fica approvado o regulamento que organiza a « Escola Polytechnica de São Paulo », na parte em que altera as leis n. 26, de 11 de Maio de 1892, e 61, de 17 de Agosto do mesmo anno.

Artigo 2.º Revogam-se as disposições em contrario.

O secretario de Estado dos Negocios do Interior assim a faça executar. Palacio do Governo do Estado de São Paulo, aos vinte e quatro de Agosto de mil oitocentos e noventa e tres.

BERNARDINO DE CAMPOS.
 DR. CESARIO MOTTA JUNIOR.

Publicada na Secretaria de Estado dos Negocios do Interior, aos 24 de Agosto de 1893.—O director geral, João de Souza Amaral Gurgel.

ESCOLA POLYTECHNICA DE S. PAULO**REGULAMENTO**

PARA EXECUÇÃO DAS LEIS N. 26, DE 11 DE MAIO DE 1892, E
 N. 61, DE 17 DE AGOSTO DE 1892

Capítulo I

DA ESCOLA

Artigo 1.º Fica creada na cidade de S. Paulo uma escola superior de mathematicas e sciencias applicadas ás artes e industrias, que se denominará « Escola Polytechnica de S. Paulo ».

Artigo 2.º A Escola Polytechnica compor-se-á dos cursos especiaes que forem creados por lei, opportunamente, alem dos seguintes :

- 1.º Curso de engenharia civil
- 2.º Curso de engenharia industrial
- 3.º Curso de engenharia agricola
- 4.º Curso annexo de artes mechanicas.

Artigo 3.º O curso de engenharia civil comprehenderá as seguintes cadeiras e aulas, distribuidas em cinco annos de estudos :

PRIMEIRO ANNO

1.ª Cadeira.—Algebra superior, trigonometria rectilinea e geometria analytica.

2.ª Cadeira.—Calculo differencial e integral (1.ª parte).

3.ª Cadeira.—Physica experimental e meteorologia.

4.ª Cadeira.—Geometria descriptiva e suas applicações á theoria das sombras.

Aula.—Desenho de mão livre. Trabalhos graphicos.

SEGUNDO ANNO

1.ª Cadeira.—Calculo differencial e integral (2.ª parte).

2.ª Cadeira.—Topographia e elementos de physica mathematica.

3.ª Cadeira.—Estereotomia e perspectiva.

4.ª Cadeira.—Mechanica analytica (1.ª parte) e applicada ás machinas simples.

Aula.—Trabalhos graphicos correspondentes.

TERCEIRO ANNO

1.ª Cadeira.—Trigonometria epherica e elementos de astronomia e geodesia

2.ª Cadeira.—Mechanica analytica (2.ª parte) e applicada ás machinas e effeito das machinas.

3.ª Cadeira.—Resistencia dos materiais.

4.ª Cadeira.—Technologia das profissões elementares e architectura.

Aula.—Desenho e projectos de architectura.

QUARTO ANNO

1.ª Cadeira.—Estabilidade das construcções.

2.ª Cadeira.—Estradas de rodagem, pontes e calçadas.

3.ª Cadeira.—Technologia do construtor, construcções architectonicas e hygiene das construcções.

4.ª Cadeira.—Machinas a vapor.

Aula.—Projectos e trabalhos graphicos.

QUINTO ANNO

1.ª Cadeira.—Navegação interior, portos de mar, pharos. Hydrographia.

2.ª Cadeira.—Hydraulica, abastecimento de agua, exgotta e saneamento das cidades.

3.ª Cadeira.—Estradas de ferro.

4.ª Cadeira.—Economia politica, direito administrativo e estatistica.

Aula.—Projectos e trabalhos graphicos.

Artigo 4.º O curso de engenharia industrial comprehenderá as seguintes cadeiras e aulas, distribuidas em cinco annos de estudos :

PRIMEIRO ANNO

1.ª Cadeira.—A mesma do 1.º anno de engenharia civil, isto é, algebra superior, trigonometria rectilinea e geometria analytica.

2.ª Cadeira.—A 2.ª do 1.º anno de engenharia civil, isto é calculo differencial e integral. (1.ª parte).

3.ª Cadeira.—A 3.ª do 1.º anno de engenharia civil, isto é, physica experimental e meteorologia.

4.ª Cadeira.—A 4.ª do 1.º anno de engenharia civil, isto é, geometria descriptiva e applicação á theoria das sombras.

Aula.—Desenho de mão livre. Trabalhos graphicos.

SEGUNDO ANNO

1.ª Cadeira.—A 2.ª do 2.º anno de engenharia civil, isto é, topographia e Elementos de physica mathematica.

2.ª Cadeira.—A 3.ª do 2.º anno de engenharia civil, isto é, stereotomia e perspectiva.

3.ª Cadeira.—A 4.ª do 2.º anno de engenharia civil, isto é, mechanica analytica (1.ª parte) e applicada ás machinas simples.

4.ª Cadeira.—Chimica geral (1.ª parte). Trabalhos de laboratorio.

Aula.—Trabalhos graphicos.

TERCEIRO ANNO

1.ª Cadeira.—Chimica geral (2.ª parte). Trabalhos de laboratorio.

2.ª Cadeira.—A 2.ª do 3.º anno de engenharia civil, isto é, mechanica analytica (2.ª parte) e applicada ás machinas e effeito das machinas.

3.ª Cadeira.—A 3.ª do 3.º anno de engenharia civil, isto é, resistencia dos materiais.

ESCOLA POLYTECHNICA DE S. PAULO

Pessoal docente e auxiliar existente em 31 de Dezembro de 1895

Cursos	NOMES	CATEGORIA	CARGOS
CURSO PRELIMINAR	Dr. Carlos Gomes de Souza Shalders.. . . .	Lente cathedratico	Cadeira
	Horacio Berlinck.	Professor	1.ª aula
	Domiciano Rossi.	"	2.ª "
CURSO GERAL	1.º Anno		
	Dr. Antonio Francisco de Paula Souza.	Lente cathedratico	1.ª cadeira
	" Urbano de Vasconcellos.	" "	2.ª "
	" Carlos Gomes de Souza Shalders	" "	3.ª "
	" Francisco Ferreira Ramos.	" "	4.ª "
	Domiciano Rossi.	Professor	Aula
	Dr. João Frederico Washington de Aguiar.	Preparador	Physica
	2.º Anno		
	Dr. Luiz de Anhaia Mello.	Lente cathedratico	1.ª cadeira
	" João Pereira Ferraz.	" "	2.ª "
" Francisco de Paula Ramos Azevedo.	" "	3.ª "	
" Manoel Ferreira Garcia Redondo.	" "	4.ª "	
Victor Dubugras.	Professor	Aula	
Dr. João Frederico W. de Aguiar.	Preparador	Chimica	
SECÇÕES	1.ª SECÇÃO		
	Dr. Alvaro de Menezes.	Lente substituto	Mathematicas
	2.ª SECÇÃO		
Dr. José Antonio da Fonseca Rodrigues	" "	Physica e chimica	
CURSO DE MECANICAS	Dr. Augusto Ferreira Ramos.	Lente cathedratico	1.ª cadeira
	" João Pereira Ferraz	" "	2.ª "
	" Francisco Ferreira Ramos.	" "	3.ª "
	Ernesto Heinke.	Mestre	Officinas
	Dr. Jorge Krichbaum.	Professor.	Aula

Secretaria da Escola Polytechnica de S. Paulo, 31. de Dezembro de 1895.

O secretario,

URBANO DE VASCONCELLOS.



ESCOLA POLYTECHNICA DE S. PAULO

Pessoal administrativo existente a 31 de Dezembro
de 1893

NOMES	CATEGORIA
DIRECTORIA	
Dr. Antonio Francisco de Paula Souza.	Director.
Dr. Luiz de Anhaia Mello.	Vice Director.
SECRETARIA	
Dr. Urbano de Vasconcellos.	Secretario.
Francisco Eulalio Pinto da Fonseca.	Amanuense.
Frederico Fomm.	"
Guilherme Carlos Oppel.	Porteiro.
José Carlos de Alvarenga.	Continuo.
BIBLIOTHECA	
Dr. Alfredo Porchat	Biblothecario.
Carloe Alberto Vianna.	Amanuense.
Gabriel Archanjo de França.	Continuo.
GABINETES E AULAS	
Antonio Theodoro de Oliveira e Souza.	Conservador.
Antonio Carlos Vianna.	Bedel.

Secretaria da Escola Plytechnica de S. Paulo 31 de Dezembro de 1895.

O Secretario,
URBANO DE VASCONCELLOS.

ESCOLA POLYTECHNICA DE S. PAULO

ANNEXO N. 8

Movimento do pessoal administrativo durante o anno de 1895

N O M E S	C A T H E G O R I A	D A T A D A N O M E A Ç Ã O	D A T A D O E X E R C I C I O	O B S E R V A Ç Õ E S
Dr. Antonio Francisco de Paula Souza	Director . . .	14 de Novembro de 1898.	14 de Novembro de 1898.	
Dr. Luiz de Anhata Mello.	Vice-director .	15 de Junho de 1895. . .	4 de Julho de 1895.	
Dr. Urbano de Vasconcellos	Secretario . .	26 de Março de 1894. . .	8 de Abril de 1894.	
Francisco Eulalio Pinto da Fonseca	Amanuense. .	4 de Dezembro de 1893 .	6 de Dezembro de 1893.	
Frederico Pomm	"	26 de Março de 1894. . .	31 de Março de 1894.	
Capitão José Gustavo de Arruda Leite	"	9 de Agosto de 1894 . . .	15 de Agosto de 1894. .	Exonerado a pedido em 21 de Setembro de 1895.
Dr. Eugenio Alberto Franco	Bibliothecario.	4 de Janeiro de 1895 . . .	7 de Janeiro de 1895 . . .	" " " 22 de Agosto de 1895.
Antonio Theodoro de Oliveira e Souza	Conversador .	16 de Outubro de 1894. .	19 de Outubro de 1894.	
Carlos Alberto Vianna	Amanuense. .	21 de Setembro de 1895 . .	1.º de Outubro de 1895.	
Dr. Alfredo Porchat.	Bibliothecario.	24 de Outubro de 1895. .	31 de Outubro de 1895.	
Guilherme Carlos Oppel	Porteiro . . .	Contractado	9 de Janeiro de 1894.	
José Carlos de Alivarenga.	Continuo . . .	4 de Dezembro de 1893 . .	6 de Dezembro de 1893.	
Antonio Carlos Vianna	Bedel.	21 de Fevereiro de 1894 . .	23 de Fevereiro de 1894.	
Gabriel Archanjo França	Continuo . . .	18 de Janeiro de 1895 . . .	19 de Janeiro de 1895.	

Secretaria da Escola Polytechnica de S. Paulo, 31 Dezembro de 1895.

O Secretario,
URBANO DE VASCONCELLOS.

ESCOLA POLYTECHNICA DE S. PAULO

Movimento do pessoal docente e auxiliar durante o anno de 1895

ANNEXO N. 6

Nome	Categoria	Data da nomeação	Data do exercício	Observações
Dr. Francisco de Paula Ramos de Azevedo	Lente Cathedratico	21 de Novembro de 1893	23 de Novembro de 1893	
Dr. Luiz de Anhaia Mello	"	21 " " 1893	23 " " 1893	
Dr. Manoel Ferreira Garcia Redondo	"	21 " " 1893	23 " " 1893	
Dr. João Pereira Ferraz	"	21 " " 1893	23 " " 1893	
Dr. Francisco Ferreira Ramos	Lente Substituto	8 Janeiro " 1894	13 Janeiro " 1894	Nomeado Cathedratico em 9 de Janeiro de 1895
Dr. João Frederico W. de Aguiar	Preparador	9 Março " 1894	14 Março " 1894	
Dr. Carlos Gomes de Souza Shalders	Lente Cathedratico	15 Maio " 1894	22 Maio " 1894	
Dr. Urbano de Vasconcellos	Lente Substituto	15 " " 1894	22 " " 1894	Nomeado Cathedratico em 9 de Janeiro de 1895
Dr. Antonio Francisco de Paula Souza	Lente Cathedratico	6 Novembro " 1894	8 Novembro " 1894	
Dr. Francisco Pereira Ramos	"	9 Janeiro " 1895	15 Janeiro " 1895	
Dr. Urbano de Vasconcellos	"	9 " " 1895	15 " " 1895	
Dr. Augusto Ferreira Ramos	Lente Substituto (1ª secção)	20 Fevereiro " 1895	2 Março " 1895	Nomeado Cathedratico em 26 de Outubro de 1895
Dr. Alvaro de Menezes	" (1ª ")	20 " " 1895	2 " " 1895	
Dr. José Antonio da Fonseca Rodrigues	" (3ª ")	20 " " 1895	2 " " 1895	
Dr. Augusto Ferreira Ramos	Lente Cathedratico	25 Outubro " 1895	4 Novembro " 1895	
Victor Dubugras	Professor	Contractado	18 Janeiro " 1895	
Domiciano Rossi	"	"	18 " " 1895	
Horacio Berlinck	"	"	17 " " 1895	
Ernesto Heinke	Mestre de officinas	"	4 Novembro " 1895	
Dr. Jorge Krichbaum	Professor	Contractado 9 de Dezembro de 1895	Ainda não entrou em exercício	

Secretaria da Escola Polytechnica de São Paulo, 31 de Dezembro de 1895.

O Secretario
Urbano de Vasconcellos.

NOMES E RESIDÊNCIAS

DO

PESSOAL DOCENTE, AUXILIAR E ADMINISTRATIVO

PESSOAL DOCENTE E AUXILIAR

1.ª Secção

— Dr. Carlos Gomes de Souza Shalders — lente cathedratico da 1.ª cadeira do Curso Preliminar — *Mathematica elementar (revisão e complementos)*; e da 3.ª cadeira do 1.º anno do Curso Geral — *Geometria descriptiva e geometria superior (parte essencial)*.

Residencia: rua de Santo Antonio, n.º 53.

— Dr. Urbano de Vasconcellos — lente cathedratico da 1.ª cadeira do 1.º anno do Curso Geral — *Algebra superior. Geometria analytica*; e da 2.ª cadeira do 1.º anno do Curso Geral — *Calculo infinitesimal*.

Residencia: rua Pirapitinguy, 13.

— Dr. Francisco Behring — lente cathedratico interino da 1.ª cadeira do 2.º anno do Curso Geral — *Mecanica racional*.

Residencia: rua de D. Veridiana, n.º 24.

— Dr. João Duarte Junior — lente cathedratico da 2.ª cadeira do 2.º anno do Curso Geral — *Topographia. Elementos de geodesia e de astronomia*.

Residencia: alameda Nothmann, n.º 54.

— Dr. Rodolpho Santiago — lente substituto — Repetidor da secção.

Residencia: travessa da Consolação, n.º 6.

Dr. Rogerio Fajardo — lente substituto.

Rua do Barão de Itapetininga, n.º 21.

NOMES E RESIDENCIAS

DO

PESSOAL DOCENTE, AUXILIAR E ADMINISTRATIVO

PESSOAL DOCENTE E AUXILIAR

1.ª Secção

Dr. Carlos Gomes de Souza Shalders—lente cathedratico da 1.ª cadeira do Curso Preliminar—*Mathematica elementar (revisão e complementos) Trigonometria rectilinia*; e da 2.ª do mesmo Curso—*Geometria descriptiva (1.ª parte) Planos cotados, Algebra superior*.

Residencia: Largo do Paysandú.

Dr. Rodolpho de S. Thiago—lente cathedratico da 1.ª cadeira do 1.º anno do Curso Geral—*Geometria analytica (abrangendo o calculo infinitesimal e suas applicações)*.

Residencia: Rua Ypiranga, 167.

Dr. João Duarte Junior—lente cathedratico da 3.ª cadeira do 1.º anno do Curso Geral—*Topographia, Redacção de projectos Terraplenagem*.

Residencia: Alameda Nothmann, 54.

Dr. Rogerio Farjado—lente cathedratico da 1.ª cadeira do 2.º anno do Curso Geral—*Mechanica geral*; e da 2.ª cadeira do 2.º anno do mesmo curso—*Trigonometria espherica, Elementos de Astronomia, Geodesia*.

Residencia: Rua Aurora, 115.

Dr. Antonio de Cerqueira Cesar—lente substituto da secção.

Residencia: Largo da Liberdade, 25.

Dr. Lucio Martins Rodrigues—lente substituto da secção.

Residencia: Largo de S. Paulo, 7.

CURSO PRELIMINAR

Periodos	<i>Segunda</i>	<i>Terça</i>	<i>Quarta</i>	<i>Quinta</i>	<i>Sexta</i>	<i>Sabbado</i>
Primeiro	Mathemati- ca	Mathemati- ca		Mathema- tica	Contabilida- de	Mathema- tica
Segundo	Contabilida- de	Exercicios e problemas de Mathe mat.	Laboratorio de Physica	Exercicios e problemas de Matemat.	Mathema- tica	Exercicios e problemas de Mathemat.
Terceiro		Desenho				Desenho
Quarto	Physica	Desenho	Physica		Physica	Desenho

CURSO GERAL

1º ANNO

Periodos	<i>Segunda</i>	<i>Terça</i>	<i>Quarta</i>	<i>Quinta</i>	<i>Sexta</i>	<i>Sabbado</i>
Primeiro	Descriptiva	Physica	Descriptiva	Physica	Descriptiva	Physica
Segundo	Analytica	Calculo	Analytica		Analytica	Calculo
Terceiro	Exercicios e problemas de Descriptiva	Laboratorio de Physica		Laboratorio de Physica		
Quarto	Desenho geo- metrico e de ornamento	Exercicios e problemas de Calculo		Exercicios e problemas de Analytica	Desenho geo- metrico e de ornamento	

CURSO GERAL

2º ANNO

Periodos	<i>Segunda</i>	<i>Terça</i>	<i>Quarta</i>	<i>Quinta</i>	<i>Sexta</i>	<i>Sabbado</i>
Primeiro	Estereotomia	Mecanica	Estereotomia	Mecanica	Estereotomia	Mecanica
Segundo	Topographia	Chimica	Topographia	Chimica	Topographia	Chimica
Terceiro	Laboratorio de Chimica	Exercicios e problemas de Mecanica	Laboratorio de Chimica	Exercicios e problemas de Estereotomia	Laboratorio de Chimica	
Quarto	Desenho topographico	Desenho e Architectura	Pratica de instrumentos de Topogr.		Desenho topographico	Desenho de Architectura

Primeiro periodo vai das 8 ás 10 horas da manhã
Segundo > > > 11 ás 12.30 horas da tarde
Terceiro > > > 12.30 ás 2 horas da tarde
Quarto > > > 2 ás 4 horas da tarde

2.ª Cadeira do 1.º anno do Curso Geral

1899—1900

CALCULO INFINITESIMAL

NOÇÕES PRELIMINARES

Funções e sua classificação. Noções sobre a continuidade.
 Methodo dos limites—Concepção de Newton.
 Methodo infinitesimal—Concepção de Leibnitz.
 Methodo das derivadas—Concepção de Lagrange.
 Considerações sobre a analyse ordinaria ou algebrica e a analyse transcendente ou infinitesimal. Distincção entre o methodo e o calculo.

CALCULO DIFFERENCIAL

FUNÇÕES EXPLICITAS DE UMA SÓ VARIÁVEL INDEPENDENTE

Definições e notações. Marcha uniforme podendo conduzir as differenciaes e derivadas das dez funções simples.

1 Theorema das funções inversas. Differenciação das funções de funções. Differenciação das funções compostas.

2 Differenciação de uma somma, de um producto, de um quociente, de uma potencia qualquer. Solução destas questões pelo principio de differenciação das funções compostas.

3 Differenciação das funções logarithmicas e exponenciaes.

4 Differenciação das funções circulares.

5 Proposições relativas ás derivadas das funções de uma só variavel.

6 Differenciações successivas. Das differenciaes e derivadas de diversas ordens.—Appliação ás funções producto, potencia, exponencial, logarithmica e circular.

FUNÇÕES EXPLICITAS DE DUAS OU MAIS VARIÁVEIS INDEPENDENTES

Definições e notações.

7 Differencial parcial, differencial total. Theorema das funções homogeneas.

8 Differenciaes e derivadas successivas. Differenciaes e derivadas parciais e totaes de diversas ordens. Theorema relativo á ordem das differenciações. Formula geral symbolica da differencial total.

9 Differenciaes totaes de diversas ordens de uma função composta de funções de algumas variaveis independentes.

FUNÇÕES IMPLICITAS DE UMA OU MAIS DE UMA VARIÁVEL INDEPENDENTE

10 Differenciação das funções implicitas isoladas. Differenciação das funções implicitas simultaneas. Eliminação das constantes ou parametros.

11 Differenciações successivas. Differenciaes de diversas ordens.

MUDANÇA DA VARIÁVEL INDEPENDENTE

12 Caso das funções de uma só variável: caso das funções de algumas variáveis.

APPLICAÇÕES ANALYTICAS DO CALCULO DIFFERENCIAL

DESENVOLVIMENTO DAS FUNÇÕES EM SÉRIE

13 Formula de Taylor para as funções de uma só variável. Diferentes fórmulas do resto. Condição de convergência da série. Introdução das diferenças. Formula de Maclaurin para as funções de uma só variável.

14 Extensão das formulas de Taylor e Maclaurin ás funções de algumas variáveis.

15 Applicaçãõ da formula de Maclaurin a alguns desenvolvimentos importantes, taes como formula do binomio para expoente qualquer, funções exponenciaes, $L(1+X)$, $\text{sen } x$, $\text{cos } x$, $\text{arc. tang } x$ etc.

AVALIAÇÃO DOS SYMBOLOS INDETERMINADOS

16 Expressões que se apresentam sob a forma $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Regra de l'Hospital. Outros symbols de indeterminação— $0 \times \infty$, $\infty - \infty$; 0^0 , ∞^0 , 1^∞ . Casos particulares: indeterminação real.

17 Funções implícitas: marcha a seguir quando a derivada $\frac{dy}{dx}$ se apresenta sob a fórmula $\frac{0}{0}$

THEORIA DOS MAXIMOS E MINIMOS

Noções preliminares.

18 Maximos e minimos das funções explicitas. Caso de uma variável: Caso de algumas variáveis.

19 Maximos e minimos das funções implícitas. Caso de uma variável: Casos de algumas variáveis.

CALCULO INTEGRAL

INTEGRAÇÃO DAS DIFFERENCIAES EXPLICITAS

Definições e theoremas fundamentaes. Integral, limite de uma integral. Integral indefnida. Integral defnida. Integração immediata.

20 Processo de integração—1.º por decomposição—2.º por substituição—3.º por partes—4.º por series. Combinação dos methodos.

DIFFERENCIAES ALGEBRICAS RACIONAES

Decomposição de uma fracção algebraica em fracções simples.

21 Integração das differenciaes algebraicas racionaes.

Caso das funções de fórmula inteira. Caso das funções de fórmula fraccionaria. Fórmulas differenciaes a cuja integração se reduz a das funções differenciaes algebraicas fraccionarias.

DIFFERENCIAES ALGEBRICAS IRRACIONAES

- 22 Integração das funcções que só contém irracionaes monomios. Funcções que contém um radical de 2.^o gráo. Casos que se reduzem aos anteriores.
- 23 Integração das differenciaes binomias. Casos de integrabilidade. Formulas de redução.

DIFFERENCIAES TRANSCENDENTES

- 24 Integração das funcções que se reduzem a integração de funcções algebraicas. Integral de $x^n P dx$. Integração de algumas funcções exponenciaes e circulares.
- 25 Integração das differenciaes da fórma $\text{sen}^m x \cos^n x dx$. Formulas de redução.

INTEGRAES DEFINIDAS

- 26 Principios geraes. Sua applicação ao calculo das integraes definidas. Integraes multiplas. Integraes duplas. Integraes triplices. Theorema relativo a ordem das integrações.
- 27 Calculo approximado das integraes definidas. Formulas dos trapezios, de Poncelet, de Parmentier e de Simpson.

APPLICAÇÕES GEOMETRICAS DO CALCULO DIFFERENCIAL

- 28 Tangentes e normaes ás curvas planas. Equações respectivas. Comprimento da sub-tangente, subnormal, etc. Gráo da equação da tangente. Problemas. Asymptotas.
- 29 Analyse das curvas planas—1.^o Do sentido da concavidade. 2.^o Dos pontos singulares.
- 30 Differencial do arco, da área e da inclinação de uma curva plana.
- 31 Curvatura das curvas planas. Raio de Curvatura. Centro de curvatura.
- 32 Theoria do contacto das curvas planas. Curvas osculatrizes. Circulo osculador.
- 33 Evolutas e evolventes em relação a curvas planas. Curvas involventes.
- 34 Curvas reversas. Raio e angulo de torção.
- 35 Superficies curvas. Plano tangente, normal.
- 36 Superficies involventes.
- 37 Curvatura das superficies.
- 38 Caracteres analyticos das principaes familias de superficies.

APPLICAÇÕES GEOMETRICAS DO CALCULO INTEGRAL

- 39 Rectificação das curvas planas e das curvas reversas.
- 40 Quadratura das curvas planas.
- 41 Quadratura das superficies curvas em geral. Caso da superficie de revolução.
- 42 Cubatura dos volumes em geral. Caso dos solidos de revolução.

EQUAÇÕES DIFFERENCIAES A DUAS VARIABEIS

Definições. Equações differenciaes de primeira ordem. Integração das equações differenciaes de primeira ordem e do primeiro gráo. Separação das variaveis. Funcções homogeneas. Equações lineares.

PARTE PRATICA

O ensino theorico será acompanhado de exercicios e applicações
Eschola Polytechnica de S. Paulo, 15 de Agosto de 1899.

URBANO DE VASCONCOLLOS.
Lente Cathédatico.

PARTE II

CALCULO INFINITESIMAL

27. Funções e sua classificação. Noções sobre a continuidade. Limite: definição e proposições. Analyse ordinaria ou algebraica e analyse transcendente ou infinitesimal.

Difficuldade da resolução de questões com auxilio da analyse ordinaria, recursos da analyse transcendente. Methodo de exhaustão ou dos antigos. Methodo infinitesimal ou de Leibnitz; divisão do calculo infinitesimal; proposições relativas aos infinitamente pequenos.

Methodo dos limites ou de Newton; formas diversas sob que Newton apresentou seu methodo. Methodo de Lagrange ou das derivadas; divisão do calculo segundo a concepção de La-

grange. Identidade dos resultados a que conduzem as 3 concepções; interpretação geometrica. Noticia sobre outros methodos.

CALCULO DIFFERENCIAL

Funções explicitas

28. Marcha a seguir para a differenciação e derivação de uma função explicita a uma só variavel independente. Theorema das funções inversas. Differenciação e derivação das funções de funções. Differenciação e derivação das funções compostas de funções de uma mesma variavel independente. Notações. Differenciação e derivação das funções algebraicas; differenciação e derivação das funções transcendentas.

29. Propriedades geraes das derivadas.

30. Differenciaes e derivadas successivas das funções de uma só variavel independente. Notações; interpretação geometrica.

Differenciaes e derivadas successivas de um producto, de uma potencia, da exponencial, de um logarithmo e do seno e do coseno.

31. Differenciaes e derivadas das funções explicitas de duas ou mais variaveis independentes. Differencial parcial e derivada parcial; differencial total; notações

Theorema das funções homogeneas. Differenciaes e derivadas parciais de diversas ordens; differenciaes totaes de diversas ordens; notações. Ordem das differenciações. Formula geral symbolica da differencial total.

32. Differenciaes totaes de diversas ordens de uma função composta de funções de algumas variaveis independentes.

Funções implicitas de uma ou mais de uma variavel independente

33. Differenciação das funções implicitas isoladas; differenciação das funções implicitas simultaneas. Eliminação das constantes.

Differenciaes de diversas ordens das funções implicitas isoladas e simultaneas.

MUDANÇA DA VARIABEL

34. Caso das funções de uma só variavel independente; caso das funções de mais de uma variavel independente.

APLICAÇÕES ANALYTICAS DO CALCULO DIFFERENCIAL

Desenvolvimento das funções em serie

35. Definições. Regras de convergencia. Formula de Taylor para as funções de uma só variavel. Differentes formas do resto. Introducção das differenciaes. Formula de Maclaurin para as

funções de uma só variavel. Extensão das formulas de Taylor e Maclaurin as funções de 2 variaveis. Applicação da formula de Maclaurin a alguns desenvolvimentos importantes, taes como, formula do binomio para expoente qualquer, funções exponenciaes, função $\lg(1+x)$, sex , cosx , $\text{arc}(tg-x)$.

AVALIAÇÃO DOS SYMBOLOS INDETERMINADOS

36. Expressões que se apresentam sob a fôrma $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. Outros symbolos de indeterminação: $0 \times \infty$, $\infty - \infty$; $0, \infty, 1, \infty$.
Marcha a seguir quando a derivada $\frac{dy}{dx}$ nas funções implicitas se apresenta sob a fôrma $\frac{0}{0}$.

MAXIMOS E MINIMOS

37. Maximos e minimos das funções explicitas. Maximos e minimos das funções implicitas.

APPLICAÇÕES GEOMETRICAS DO CALCULO DIFFERENCIAL

38. Tangentes e normaes ás curvas planas. Equações respectivas. Comprimento da tangente, da normal, da subtangente e da subnormal. Asymptotas.

39. Analyse das curvas planas: 1.º do sentido da concavidade; 2.º dos pontos singulares.

40. Differential do arco, da area e da inclinação de uma curva plana.

41. Curvatura das curvas planas. Centro de curvatura. Raio de curvatura.

42. Curvas planas referidas a coordenadas polares. Tangentes e normaes; subtangente e subnormal; asymptotas. Differential d'um arco de curva. Raio e centro de curvatura.

43. Contacto das curvas planas. Curvas osculatrizes. Circulo osculador.

44. Evolutas e evolventes em relação as curvas planas. Curvas involventes.

45. Curvas reversas. Tangente, plano normal. Differential do arco. Plano osculador. Esphera osculatriz. Circulo osculador. Raio e angulo de torsão.

46. Superficies curvas. Plano tangente, normal. Superficies involventes. Curvatura das superficies.

47. Caracteres analyticos das principaes familias de superficies.

CALCULO INTEGRAL

Differenciaes explicitas

48. Definições. Interpretação geometrica; integral indefinida; integral definida; notações. Theoremas fundamentaes. Inte-

gração immediata. Processos de integração: a) por decomposição; b) por partes; c) por substituição; d) por series. Combinação dos methodos. Integraes successivas e applicações.

Differenciaes algebraicas racionais

49. Decomposição de uma fracção algebraica racional em fracções simples. Integração das differenciaes algebraicas racionais: Caso das funcções de fórma inteira; caso das funcções de fórma fraccionaria.

Differenciaes algebraicas irracionais

50. Integração das funcções que só contém irracionais monomias. Integração das funcções que contém a raiz quadrada de um trinomio do 2.º gráu. Casos que se reduzem aos anteriores.

51. Integração das differenciaes binomias. Casos de integrabilidade. Formulas de redução.

Differenciaes transcendentis

52. Integração das funcções que se reduzem a funcções algebraicas. Integral de z^n Pde. Integração de algumas funcções exponenciaes e circulares. Integração das differenciaes de fórma $\text{sen.}^m x \cos. dx$. Formulas de redução.

INTEGRAES DEFINIDAS

53. Definições. Interpretação geometrica. Propriedades geraes. Limites infinitos. Integraes das funcções differenciaes que tornam-se infinitas para os limites ou entre os limites da integração. Integraes multiplas. Integraes duplas. Integraes triplices.

Ordem das integrações.

54. Calculo approximado das integraes definidas. Formulas dos trapesios, de Poncelet, Parmentier e de Simpson.

APPLICAÇÕES GEOMETRICAS DO CALCULO INTEGRAL

65. Rectificação das curvas planas e das curvas reversas. Quadratura das curvas planas.

56. Quadratura das superficies: superficies de revolução; superficies quaesquer.

57. Cubatura dos volumes: solidos de revolução; solidos quaesquer.

EQUAÇÕES DIFFERENCIAES

58. Definição e classificação. Equações differenciaes de primeira ordem e do primeiro gráu. Separação das variaveis. Funcções homogeneas.

Equações de primeira ordem que não são do 1.º gráu. Equações differenciaes de ordem superior á primeira. Equações lineares. Equações differenciaes simultaneas.

Exercícios e applicações.

Parte vaga: n.º 1, 2, 3, 4, 18, 27, 28 e 48.

—Aactores seguidos:

Geometria analytica: Sonnet e Frontera, Salmon.

Calculo: Sonnet e Comberousse.

R. DE S. THIAGO.

Cadeira N.º 3

Calculo Differential e Integral

(Curso de Engenheiros Civis, Architectos, Electricistas e Chemicos)

Introducção

a) Numeros réaes: racionaes, irracionaes e relativos. Numeros imaginarios, expressões imaginarias ou complexas; expressões imaginarias conjugadas; modulo e argumento. Representação graphica das quantidades imaginarias;

b) Funccões: definição e classificação. Limite, definição e proposições. Primeiras noções sobre o que se deve entender por quantidade infinitamente pequena. Continuidade das funccões; definição e proposições.

c) Recapitulação summaria sobre as series; definições; utilidade das series. Convergencia das series: proposições mais importantes. Series exponenciaes, logarithmicas e circulares.

Analyse trascendente ou infinitesimal

d) Analyse ordinaria: methodo e calculo; methodo empregado pelos antigos ou methodo de exhaustão. Methodo de Leibnitz ou infinitesimal; calculo infinitesimal e sua divisão; nótacoes respectivas; infinitamente pequenos de diversas ordens; proposições sobre os infinitamente pequenos.

e) Methodo de Newton; methodo dos limites e das fluxões; nótacoes. Methodo de Lagrange ou das derivadas; propriedades das derivadas.

f) Confronto entre os tres methodos; interpretação geometrica. Noticias sobre outros methodos.

II PARTE

Calculo differencial

1 — Marcha uniforme para a differenciação e derivação das funccões explicitas de uma variavel independente. Funccões inversas e theoremas relativos. Differenciação e derivação das funccões de funccões. Derivação e differenciação das funccões compostas de funccões de uma variavel independente. Nótacoes.

2 — Differenciação e derivação das funccões algebraicas e transcendentas.

3 — Differenciação e derivação successiva das funccões explicitas de uma variavel independente; caso da potencia inteira, da exponencial, da logarithmica, do seno e do coseno. Formula de Leibnitz.

4 — Derivadas e differenciaes de 1.^a ordem das funccões explicitas de mais de uma variavel independente; differenciaes e derivadas de diversas ordens; representação symbolica da differencial total de ordem n . Ordem de differenciação. Nótacoes.

5 — Theorema das funccões homogeneas. Differenciaes totaes de diversas ordens de uma funccão composta de funccões de mais de uma variavel independente.

6 — Differenciaes de 1.^a ordem e de ordem superior das funccões implicitas isoladas e simultaneas.

7 — Eliminação das constantes; primeiras noções sobre equações differenciaes implicitas. Derivadas dos determinantes. Determinantes funcionaes.

8 — Funccões de uma variavel imaginaria. Series de termos imaginarios. Derivadas das funccões de variavel imaginaria. Formulas de Euler.

9 — Funccões hyperbolicas; definições e propriedades; representação graphica. Differenciação das funccões hyperbolicas.

10 — Mudança de variaveis: caso das funccões de uma só variavel independente; caso das funccões de mais de uma variavel independente;

Annuario da Escola Polytechnica

Aplicações analyticas do calculo differencial

a) Desenvolvimento em series

11 — Formula de Taylor para as funcções de uma variavel independente; differentes formas do resto. Formula de Maclaurin para as funcções de uma só variavel independente.

12 — Extensão das formulas de Taylor e Maclaurin ás funcções de duas variaveis independentes.

13 — Applicaçãõ da formula de Maclaurin ao desenvolvimento do bimonio e ao desenvolvimento das funcções exponenciaes, logarithmicas e circulares.

b) Formas indeterminadas

14 — Exemplos de expressões de uma variavel que se apresentam sob qualquer das formas indeterminadas. O que se entende por verdadeiro valor dessas expressões; caso das formas: $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$; regra de l'Hospital.

Formas $-\infty \infty$ e $0 \times \infty$; reduçãõ ás fórmãs anteriores. Formas 0^0 , ∞^0 e 1^∞ ; reduçãõ á fórmula $0 \times \infty$; Verdadeiro valor de $\frac{dy}{dx}$ nas funcções implicitas quando se torna em $\frac{0}{0}$.

Exemplos da applicaçãõ das series á determinaçãõ do verdadeiro valor das expressões que se apresentam sob forma indeterminada. Verdadeiro valor das funcções de mais de uma variavel.

c) Maximos e minimos

15 — Maximos e minimos das funcções explicitas de uma e de mais de uma variavel independente.

Maximos e minimos das funcções implicitas de uma e mais variaveis independentes.

Aplicações geometricas do calculo differencial

a) Curvas planas

16 — Tangente, normal e asymptotas em coordenadas cartesianas e polares.

17 — Analyse das curvas planas; 1) do sentido da concavidade; 2) dos pontos singulares.

18 — Differential do arco, da área e da inclinaçãõ de uma curva plana.

19 — Curvatura das curvas planas; raio e centro de curvatura.

20 — Contactõ das curvas planas. Curvas osculatrizes; recta osculatriz, circulo osculador e parabolãs osculatrizes.

21 — Evolutas e evolventes das curvas planas. Curvas envolventes ou envoltorias.

Annuario da Escola Polytechnica

b) Curvas reversas

22 — Tangente e plano tangente. Plano normal. Differential do arco de uma curva reversa.

23 — Plano osculador; definições, equação e propriedades. Normal principal e binormal.

24 — Curvatura das curvas reversas; segunda curvatura ou curvatura de torrão.

25 — Contacto das curvas reversas; esfera oscultriz; circulo osculador.

c) Superficies curvas

26 — Plano tangente e normal. Applicação á esfera e ás superficies regradas.

27 — Contacto das superficies. Superficies envolventes.

28 — Curvatura das superficies: theorema de Euler e de Meunier.

II PARTE

Calculo integral

a) Funções differenciaes explicitas

29 — Integral indefinida e integral definida: definições; notações; interpretação geometrica. Propriedades das integraes.

Integraes indefinidas

30 — Integração immediata. Processos ou methodos de integração; 1) por decomposição; 2) por partes; 3) por substituição; 4) por series. Serie de J. Bernouilli. Integração das funções hyperbolicas.

31 — Decomposição de uma fracção algebraica racional; determinação das constantes das fracções simples.

32 — Integração das differenciaes algebraicas racionaes de forma inteira e de forma fraccionaria.

33 — Integração das differenciaes algebraicas irracionaes: 1) funções que sómente contém irracionaes monomias; 2) funções que contém a raiz quadrada de um trinomio do 2.º gráo; casos que se reduzem aos anteriores; 3) funções differenciaes binomias; casos de integrabilidade; formulas de redução.

34 — Integração das funções differenciaes transcendentas que se podem reduzir á funções algebraicas: typos dessas differenciaes. Integração da expressão $z^n P dx$.

35 — Integração das funções trigonometricas: $\sin^m x dx$, $\cos^m x dx$; $\operatorname{tg}^m x dx$, $\operatorname{cotg}^m x dx$; $\sin^m x \cdot \cos ux dx$. Formulas de redução.

Annuario da Escola Polytechnica

Integraes definidas

36 — Limites de integração infinitos. Integraes das funcções que se tornam infinitas para os limites ou entre os limites de integração. Diferenciação e integração sob o signal f .

Integraes duplas, triplices e multiplas; ordem da integração.

37 — Applicaçào ás integraes definidas dos desenvolvimentos em serie. Series de Fourier. Noções sobre a integração das funcções de variavel imaginaria.

38 — Calculo approximado das integraes definidas; formula dos trapezios, de Poncelet, Parmentier e de Simpson.

39 — Calculo numerico de uma área plana por processo mecanico; integradores em geral; planimetro de Amsler.

Noções sobre a integração graphica; curvas integraes; constante de integração; integraes de diversas ordens. Integraphos.

Applicações geometricas do calculo integral

40 — Rectificação das curvas planas: rectificação da ellipse: typo das integraes denominadas ellipticas; rectificação de outras curvas planas. Rectificação das curvas reversas.

41 — Quadratura das curvas planas; applicaçào ao circulo, ellipse, hyperbole e parabola.

42 — Quadratura das superficies; caso das superficies de revolução; caso de superficies quaesquer.

43 — Cubatura dos volumes; caso dos solidos de revolução; caso de solidos quaesquer.

b) Funcções differenciaes implicitas ou equações differenciaes propriamente ditas.

44 — Origem, definição e classificação das equações differenciaes. Soluçào geral, particular e singular de uma equaçào differencial de 1.^a ordem a duas variaveis.

45 — Integraçào das equações differenciaes isoladas de primeira ordem e do primeiro gráo pela separaçào das variaveis; casos em que se pode fazer essa separaçào.

46 — Condições para que uma equaçào differencial de duas variaveis seja uma equaçào differencial exacta. Formula conduzindo á integraçào das equações differenciaes exactas. Caso em que a equaçào differencial, além de exacta, é tambem homogenea.

Factores integrantes; definição. Casos especiaes de determinaçào dos factores integrantes.

47 — Equações differenciaes de 1.^a ordem, mas de gráo superior ao primeiro; casos principaes em que se pode determinar a soluçào geral; equações de Monge e de Clairaut.

Annuario da Escola Polytechnica

Soluções singulares das equações differentes de 1.^a ordem; processos para a determinação dessas soluções.

48 — Equações differenciaes de ordem superior a primeira; forma geral dessas equações. Equações lineares; definição e propriedades geraes.

49 — Estudo especial das equações lineares de primeira e de segunda ordem. Equações que se podem reduzir a equações lineares.

50 — Equações de ordem superior á primeira que são integradas por processos particulares ou especiaes. Applicação das series á integração dessas equações.

51 — Equações differenciaes simultaneas de 1.^a ordem e do primeiro gráo á uma variavel independente. Noções sobre as equações differenciaes simultaneas de ordem superior á primeira.

52 — Equações differenciaes a tres variaveis; equações differenciaes exactas; equações differenciaes exactas e homogeneas. Condições de integrabilidade.

53 — Equações differenciaes parciaes; caso das equações de 1.^a ordem; caso das equações de 2.^a ordem.

54 — Applicações geometricas da integração das equações differenciaes.

Observação I — São considerados vagos; toda a introdução do curso e os numeros, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 29, 30 e 44.

Observação II — Este programma que deverá ser dado em 83 lições, foi organizado tendo em vista as applicações immediatas e correntes do calculo em cadeiras que fazem parte dos cursos de Engenharia da Escola.

São Paulo, Novembro de 1930.

R. B. de S. Thiago

Professor Cathedrático

HOMENAGEM



Rodolpho Baptista de S. Thiago

RODOLPHO BAPTISTA DE S. THIAGO

Em todas as escolas, como acontece em nossa Polytechnica, existem homens que de tal maneira se ligam á instituição que, quando por qualquer motivo della se desligam como que a desarticulam, deixando na organização um vazio difficil de ser preenchido.

Tal se deu com Paula Souza, Ramos de Azevedo, Wanderley, Shalders, e agora se verifica com Rodolpho Baptista de S. Thiago que, obrigado pelas suas condições de saúde, solicitou aposentadoria a 23 de maio ultimo.

Com sincero pezar os estudantes da Escola Polytechnica veem retirar-se do convivio quotidiano um mestre amigo e um explicador habilissimo, cuja vida foi inteiramente dedicada aos interesses da Escola, que defendeu ardua e desinteressadamente, quer como Professor conscio do seu dever, quer como Secretario cioso da boa disciplina, quer ainda na suprema investidura de Director, cargo que soube desempenhar dignamente.

Nascido em Vassouras, Estado do Rio, em 1870, já em 1893 diplomava-se engenheiro civil pela Escola Polytechnica do Rio de Janeiro.

Não se formava sem difficuldades, pois em 1888, com a libertação da escravatura, era abandonada pelos escravos a velha fazenda de café de Vassouras, garantidora da sua mesada estudantina, occasionando serio abalo nas finanças da familia. Passou o estudante S. Thiago a leccionar para sustentar os seus estudos, facto a que deve, talvez, a sua grande qualidade de esplendido explicador.

1933

JULHO-AGOSTO

Em 1893 o nosso engenheiro alistou-se no Batalhão Acadêmico ao lado de Floriano, e ali combate pela victoria do Marechal de Ferro.

Trabalha na exploração e construção da Estrada de Ferro do Ceará e depois vem a São Paulo, onde serve na Commissão de Saneamento, no Interior e na Capital. Dirige, nessa occasião, a construção da caixa d'agua da Consolação.

Em 1898, a 15 de outubro, entra para o corpo docente da Escola Polytechnica como substituto interino, para dois annos mais tarde, prazo minimo regulamentar, ser effectivado nesse cargo por unanimidade de votos da Congregação.

A 14 de novembro de 1902 é nomeado Secretario da Escola. Nesse cargo trabalha com ardor e intelligencia, tornando a nossa Escola um modelo de ordem e disciplina e nelle se conserva pelo espaço de 26 annos, até 21 de julho de 1928, data em que o Governo do Estado, premiando os seus inestimaveis serviços, eleva-o á Directoria, vaga com o fallecimento do professor Ramos de Azevedo.

E' esse o homem que dedicou toda a sua mocidade e o melhor dos seus esforços formando essa tradição de disciplina, methodo e efficiencia de que tanto se orgulham os estudantes e engenheiros da Escola Polytechnica de São Paulo. E continuava a sua laboriosa quotidiana no ensino quando o physico fraco o obrigou a descansar, solicitando justa e merecida aposentadoria.

Os nossos votos, os votos mais calorosos de todos os que conhecem Rodolpho Baptista de S. Thiago, são que o velho mestre e excellente amigo promptamente se restabeleça da molestia que o incommoda e possa gozar, ao lado de sua exma. familia, muitos annos de descanso merecido.

RODOLPHO BAPTISTA DE S. THIAGO

Desappareceu Rodolpho Baptista de S. Thiago.

Embora não constituísse surpresa, a sua morte, para todos nós que ha mezes já vinhamos acompanhando a marcha impiedosa de sua molestia, não deixou ella de produzir rude golpe no circulo amplo de seus discipulos e admiradores.

Na Escola Polytechnica, a que dedicou Rodolpho Baptista de S. Thiago toda uma existencia, deixa o seu deapparecimento um vazio profundo e uma saudade immensa. Em nome da Escola o sr. professor Victor da Silva Freire, seu Director, proferiu as seguintes palavras á beira da sepultura, em 29 de setembro:

Perpassa-me o espirito, neste instante, interminavel serie de saudosas e longinquas reminiscencias. As minhas relações com Rodolpho Baptista S. Thiago contam-se effectivamente entre as mais antigas, das travadas com companheiros de profissão, ainda existentes. Entre as mais antigas e as de mais estreita affinidade. Recordai-as, pois, é evocar a lembrança do seu vulto.

Aportámos, ambos, ha quasi quarenta annos, a esta acolhedora terra Paulista, que nos abriu os braços, franca e fraternalmente, com a mesma chan simplicidade que aqui encontraram sempre, e sem a menor reserva, todos os outros brasileiros, fosse qual fosse a sua origem. Commungámos pois, desde esses primeiros dias, na affeição profunda, que em ambos se nos arraigou, pela carinhosa mãe adoptiva.

Partilhei igualmente, em intima collaboração, dos seus primeiros trabalhos e responsabilidades profissionaes, assumidas no solo dos Bandeirantes. Entrou S. Thiago neste Estado como engenheiro-residente do serviço de aguas de Itapetininga, cidade onde constituiu o santo lar que era o seu. E occupava eu, então, o posto de chefe, no districto em que tal Residencia se achava encravada.

Minha entrada para a Escola, como substituto de Paula Souza, determinou a nossa separação. Pouco durou esta, porem; o ingresso, por sua vez, de S. Thiago na Congregação, de novo nos iria collocar lado a lado, curto tempo depois.

E nessa situação não mais nos apartámos até que insidiosa doença o obrigou a aposentar-se, alguns mezes atrás. Nella tivemos a rara fortuna de conviver, quasi dia a dia, durante dilatado periodo em que o primeiro director e, a seguir, o successor deste — Ramos de Azevedo — iam creando, aos poucos, lenta, com tenacidade, o rico viveiro, a vivaz e abundante sementeira de homens uteis para a communitade, em que acabou por se transformar a nossa Polytechnica.

Ahi, nesse ambiente de desprevenida cordialidade, de confiança e respeito mutuo que logo se estabeleceu — e inalterado se manteve — tornou-se S. Thiago o mais precioso dos collaboradores dos dois notaveis e inolvidados Paulistas. A sua lucidissima intelligencia, ao seu invejavel bom senso, ás suas excepcionaes qualidades de administrador, deve a Escola os mais relevantes serviços.

Foi portanto acertadissima — mais, estava naturalmente indicada a escolha do seu nome, por parte do Governo, para succeder a Ramos, quando se deu o inesperado passamento deste.

Mais inesperada foi entretanto para elle, S. Thiago, a subita investidura que assim, de repente, lhe cahia sobre os hombros!... E' que entre Ramos e o seu Secretario, havia sido firmado tempo antes, secretamente, um pacto, nos termos do qual pediriam, juntos, a sua dupla aposentadoria, no mesmo dia, á mesma hora. Vim a saber-o de sua propria bocca, quando, na demorada telepho-nada em que me communicava a infáusta nova do passamento do querido e commum amigo, me incumbia de, no dia seguinte, proferir, por occasião do enterro, o ultimo adeus da Congregação. «Tinhamos até acertado, accrescentava S. Thiago, em perfeito accordo, no nome do seu successor para a directoria da Escola. Impedi-o, a morte prematura, de levar a indicação ao conhecimento do Governo. O que lhe não foi dado fazer, fal-o-hei porem eu».

Chegou-me o recado aos ouvidos, a altas horas da noite... No dia seguinte, pela manhã, repetia de facto S. Thiago as mesmas palavras ao Secretario do Interior de então, á presença do qual se fizera acompanhar por um dos collegas da Congregação. Não se conformou o Presidente com a designação que por esse modo lhe foi transmittida. Nomeou-o a elle proprio e viu-se desse modo S. Thiago compellido a aceitar o posto a que nunca se candidatára e para o qual, até, se havia interessado pela escolha de outro.

Sobreveio 1930... Em carta, de uma franqueza e dignidade pouco communs, expoz S. Thiago á primeira Interventoria os motivos que o levavam a insistir no pedido de demissão, que logo apresentara, e que lhe fôra recusada.

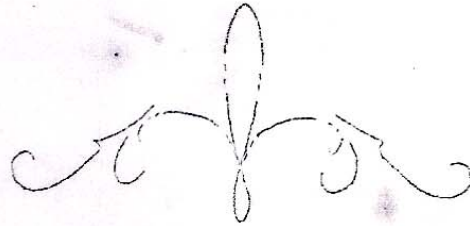
Espelha essa carta, melhor que quaesquer outros incidentes da sua carreira, que poderia ainda accrescentar ao que marcou a sua nomeação para director, o traço dominante de uma existencia tão digna, como foi a sua. Esse traço foi o da firmeza com que procedia de accordo com as suas convicções — firmeza calma, meditada e serena, mas de uma serenidade a que nunca faltou a coragem. Assim, quem quer que leia essa carta, poderá concordar com os pontos de vista nella desassombradamente sustentados, poderá nutrir certas reservas a respeito dos mesmos, ou delles dissentir por completo até... Poderá a sua leitura provocar-lhe qualquer dessas attitudes. Uma só lhe não será permittido assumir — a de não se inclinar, com respeito, em frente ao homem que a escreveu.

Neste momento doloroso e supremo, será essa a attitude de quantos o conheceram. Deante do corpo inanimado do que foi professor exemplar, profissional tão abalisado como probo e modesto, curvemo-nos, respeitosos, em homenagem ao vulto de Rodolpho Baptista de S. Thiago.

5145
Escola Polytechnica de
São Paulo

1904

Curso de
 CALCULO



Este curso foi organizado por Adriano Goulart segundo as
 notas tomadas nas aulas da 1.^a Cadeira do 1.^o Curso do
 Curso Geral, da qual é muito digno lente

Dr. R. de S. Thiago

e tambem foi lithographado por A. Goulart.

S. Paulo, 1904 — 1.^a edição

" Cálculo infinitesimal "

5145

Ponto nº 27 (vago)

Funções de uma ou mais quantidades é uma expressão analítica em que entram estas quantidades combinadas ou não com outras que têm valores certos e determinados ao passo que ellas podem receber valores quaesquers. Essas quantidades que têm valores certos e determinados denominam-se constantes e as outras, variáveis.

Entre as variáveis ha umas que podem receber valores quaesquers ao passo que outras não podem. Dahi o facto das variáveis se dividirem em dependentes e independentes.

Resolvendo, p. ex., $5x^3 + 4a^2y^2z - 7 = 0$, em relação a z , ficará $z = \frac{7 - 5x^3}{4a^2y^2}$. Nota-se que nessa expressão uma das quantidades z depende dos valores attribuidos a x e y . Por isso x e y são as variáveis independentes e a outra variável z é a dependente ou propriamente função. Distinguem-se as primeiras das segundas dando as denominações de implicitas e explicitas.

De um modo geral $f(x, y, z) = 0$ é uma função implicita, tambem denominada equação, e $z = F(x, y)$ é uma função explicita, porque para achar os valores da função, basta substituir x e y por seus valores.

Na maioria dos casos é impossível resolver algebricamente uma equação além do 4º grau e é por esse motivo que se emprega a resolução numerica em geral. Embora na pratica não, em teoria se supõe que se possa sempre resolver uma equação qualquer em relação a uma das variáveis. Assim tambem num systema de, p. ex., 5 equações a 6 incognitas nem sempre se pode eliminar uma dellas, mas em teoria admittê-se isso como possível. Assim, em 20 equações a 20 variáveis, duas dellas

ção independentes.

Existe uma serie de classificações, como sejam: funções racionais e irracionais, concretas e abstractas, etc.

Uma dellas, que é a mais seguida, é a que divide as funções em simples e compostas. Uma função se diz simples quando, para se determinar o valor da função, se tem de effectuar uma única operação ou, por outra, função simples é aquella em que a variavel dependente está ligada á independente por uma única operação. A função é composta quando ha mais de uma operação. As funções simples são dez e são dadas pelo seguinte Quadro das funções simples -

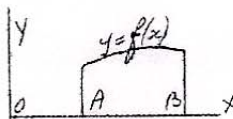
$y = a + b$	função	summa
$y = a - b$	"	subtração
$y = ab$	"	producto
$y = \frac{a}{b}$	"	quociente
$y = b^a$	"	potencia
$y = \sqrt[b]{a}$	"	raiz
$y = \lg b$	"	(logarithmica
$y = \operatorname{sen} b$	"	trigonométrica directa
$y = \operatorname{arc}(\operatorname{sen} b)$	"	" inversa
$y = a^x$	"	exponencial

Como nas seis primeiras funções simples só figuram as operações da Algebra ellas são denominadas algebraicas. As outras são as transcendentes.

O calculo differencial resume-se em seis regras para differenciar essas funções. Uma quantidade se diz contínua quando não pode passar de um valor a outro sem passar por todos os valores intermedios.

Exemplo. Tendo um sistema de eixos coordenados e sendo $y=f(x)$ a equação de uma certa curva, se, dando a x um valor OA e outro OB , fizermos variar x de um modo contínuo e se a função variar de um modo contínuo nesse

5145


 intermittente, dizemos que a função é contínua nesse inter-
 vallo. A continuidade é, pois, representada por uma curva.

(Fig. 1)
 A continuidade pode ser indefinida ou limitada num certo intervallo

Até agora que a dificuldade que se encontra na resolução dos problemas está em determinar as relações existentes entre as quantidades dadas e as desconhecidas a fim de obter os valores destas

Em vez de empregar os métodos exatos da análise ordinária estabelecem-se métodos especiais, mesmo indirectos, que constituem a análise transcendente ou infinitesimal.

Supponhamos resolver uma questão qualquer de areas. Se quizermos achar a area de um rectangulo, p. ex., resolveremos facilmente esse problema com os recursos da algebra fazendo figurar as equações os dados.

Quando não se pode resolver directamente a questão lança-se mão de meios indirectos os quaes não figuram os dados da mesma. É o caso da area de um circulo, que é obtida extendendo a formula da de um poligono. O primeiro methodo, em que se joga com os elementos da questão, é o methodo directo ou da análise ordinária e o seguinte é o da análise infinitesimal. Neste ultimo se joga com elementos entre os quaes seja mais facil resolver a questão do que com os proprios dados. Procura-se relações entre os elementos para se colligir quaes as relações entre as quantidades. Estas quantidades auxiliares introduzidas para facilitar a resolução da questão são para Leibnitz os infinitamente pequenos ou differencias, para Newton os limites das relações dos accrescimos dessas quantidades e para Lagrange as derivadas.

Vamos estudar esses methodos em separado e comparal-os, mostrando

que, embora diferentes na origem, conduziram sempre ao mesmo resultado.

A denominação de análise infinitesimal provem do facto de ser o methodo de Leibnitz o mais communmente usado. Antes de entrar no methodo de Leibnitz vamos dar uma noção do methodo antigo que foi o fundamento do Calculo differencial. Observa-se limite de uma quantidade uma quantidade fixa da qual uma variavel se aproxima sem jamais attingil-a. É preciso, para que a fixa seja limite, que a differença entre ella e a variavel se possa tornar menor do que qualquer quantidade dada. Se supuzermos uma circumferencia de circulo e um polygono nella inscripto e se duplicarmos sempre o numero de lados o polygono tenderá para a circumferencia e esta será limite d'aquelle.

Methodo de esbaustão

Este methodo é o methodo empregado pelos antigos para resolver as questões geometricas. É o methodo que empregam Archimedes. Quando os antigos estudaram as formas elles primeiro estudaram as limitadas por linhas rectas e depois por superficies planas. Ora, visto que não havia nenhuma difficuldade nesses methodos. Quando, porém, elles foram estudar as limitadas por curvas e superficies curvas encontraram eutancos no estabelacimento directo dessas curvas e superficies curvas. Como elles tinham estudado as formas planas tomaram-nas como auxiliares para o estudo das formas curvas. Elles constituiram, portanto, a base do Calculo differencial, por que introduziram os polygonos para estudar uma circumferencia de circulo. O mesmo se dá se tivermos duas circumferencias de circulo de raios differentes e inscrevermos nellas dois polygonos semelhantes.

Como que elles estão entre si como os quadrados dos seus homologos.

5145

logo, pode-se dizer que os quadrados dos diâmetros são proporcionais às áreas dos polígonos, isto é, que $\frac{A_p}{A_{p'}} = \frac{D^2}{D'^2}$

Ara, nós não sabemos de quantos lados constavam os polígonos, o que quer dizer que essa propriedade existe sempre, isto é, que, se duplicarmos o número de lados, essa relação é a mesma. Concluímos, portanto, em virtude da continuidade, que essa propriedade deve existir entre as circunferências de círculo e que $\frac{C}{C'} = \frac{D^2}{D'^2}$

Os antigos não podiam, embora o precisassem, confirmar esse facto. Para isso elles empregavam o methodo do absurdo. Depois de suspeitarem a verdade elles admitiam que não era verdade e demonstravam que d'isto resultava um absurdo. Era esse o methodo para avaliar a area de uma circunferencia

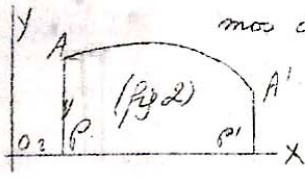
Dahi a definição seguinte de circunferencia de círculo: é um polígono de número indefinido de lados infinitamente pequenos. A medida que o polígono vai augmentando elle vai como se exaurindo: dahi a denominação de methodo de exaustão. Este methodo é quasi o verdadeiro methodo infinitesimal e, se elle tivesse uma notação especial, talvez seria o mais empregado.

Cavalieri quiz empregar essa notação: Charnoi o seu livro methodo dos indivisíveis. Descartes empregou o deusmicuando o dos indeterminados. Foi, pois, elle, pode-se dizer, o precursor da Analyse.

Methodo de Leibnitz

Leibnitz, para resolver as questões, introduziu os taos infinitamente pequenos ou differencias das quantidades. Elle suppunha as quantidades compostas de elementos infinitesimales, estabelecia relações entre estas e, partindo dessas relações, chegava a determinar as relações entre as quantidades da questões.

Supponhamos ter de determinar a área $APP'A'$. Só temos tres quantidades que podam ser definidas exactamente. Em Geometria elementar empregariamos o método de Boncelati ou outro qualques.



Leibnitz supõe um rectangulo infinitesimal e a área como que dividida ou composta de uma serie desses rectangulos. Nesse caso a área de um desses rectangulos será o producto do elemento y pela altura infinitamente pequena x . A área total será, por conseguinte,

$$A = yx + y'x + y''x + \dots$$

Outro exemplo temos em Mecanica, quando se estuda o movimento de um móvel que percorre com movimento variado uma certa distancia num certo tempo 20^{th} , digamos. No fim de algum tempo não se pode determinar exactamente a velocidade nesse instante. Se dividirmos esse tempo em metade a variação do movimento será mais facil de determinar do que anteriormente. Em 5^{th} seria ainda mais facil. Chegando a 1^{th} o erro é facilmente desprezivel. Num segundo poderemos considerar o movimento como uniforme o que fizemos, pois? Decompozemos em partes o movimento variado

Porém: em Mecanica o movimento uniforme está para o variado, assim como os calculos os elementos infinitesimales de um todo estão para o todo.

É grande erro supôr que um elemento infinitamente pequeno é quasi nullo porque elle é uma quantidade essencialmente variavel que tende para o limite zero. Ella pode se tornar menor do que qualquer quantidade, por menor que ella seja, assim como existem os infinitamente grandes maiores do que qualquer quantidade dada

Dahi a denominação de Qualque infinitesimal é que comprehende os infinitamente grandes e pequenos. Vimos alguns exemplos de resolução de

questões por meio dos infinitamente pequenos. Algumas vezes, porém, é mesmo difícil estabelecer as relações entre as tais quantidades infinitamente pequenas. Nesse caso ellas não substituídas por outras que são infinitamente pequenas em relação a ellas: são os infinitamente pequenos de diversas ordens. Poder-se-á perguntar: mas, se o infinitamente pequeno de 1ª ordem tende para zero, poderá haver uma quantidade infinitamente pequena em relação a ella? Pode. Supponhamos um numero ϵ que tenda para zero. A medida que ϵ decresce para zero, ϵ^2 decresce muito mais rapidamente. Assim também, uma fracção própria é tanto menor quanto maior é a sua potencia. Ha, pois, varios infinitamente pequenos, uns tendendo mais rapidamente do que os outros para o limite zero. Exemplo: $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n^3}$...

Supponhamos que α seja um infinitamente pequeno de 1ª ordem. Pois que ha varios infinitamente pequenos de diversas ordens deve haver evidentemente um que sirva de termo de comparação. Este e é designado principal: é o infinitamente pequeno que se adoptar.

Seja M uma quantidade finita, α o infinitamente pequeno principal. $M\alpha$ será um infinitamente pequeno? ϵ . Logo o producto de uma quantidade finita por um infinitamente pequeno é um infinitamente pequeno. Multiplicando M por α^2 temos um infinitamente pequeno de 2ª ordem, que poderá ser desnegado em relação ao de 1ª ordem.

Temos, portanto, uma serie de quantidades $M\alpha$, $M\alpha^2$, $M\alpha^3$... entre as quaes algumas tendem mais rapidamente para zero. Confrontemos cada uma dellas com o infinitamente pequeno principal; temos $\frac{M\alpha}{\alpha} = M$.

Portanto, quando a relação de um infinitamente pequeno para o principal é uma quantidade finita, se diz que ella é de 1.^o ordem. Tomemos a relação do seguinte para o principal. Seja $\frac{M\alpha^2}{\alpha} = M\alpha$

Logo, quando a relação de um infinitamente pequeno para o principal é um infinitamente pequeno de 1.^o ordem, se diz que ella é de 2.^o ordem.

De um modo geral, quando a relação entre um infinitamente pequeno e o principal é um infinitamente pequeno de ordem $m-1$, diz-se que ella é de ordem m : $\frac{M\alpha^m}{\alpha} = M\alpha^{m-1}$

Notações de Leibnitz. Supponhamos querer determinar o comprimento da circunferencia de circulo circumscripta a um poligono cujo numero de lados supponhamos augmentar indefinidamente. Leibnitz chamou d a differença entre o poligono e o circulo e, sendo s a variavel, elle escreveu ds que quer dizer differencial de s .

Vejamos uma applicação do methodo. Supponhamos que se trate da tangente num ponto M de coordenadas (x, y) . Leibnitz para determinar o coefficiente angular supponha um ponto infinitamente proximo de M e tirava as coord.

denadas desse ponto. Ora, se v é a abscissa de M , a de M' é $v + ds$ mais uma differença infinitesimal da abscissa. Ora, pois, $v + ds$. A ordenada sera' por sua vez $y + dy$

Ora, a equação da recta que une dois pontos é $Y - y = \frac{y - y'}{x - x'} (X - v)$

ou, no nosso caso, $Y - y = \frac{y + dy - y}{v + ds - v} (X - v)$

$\therefore Y - y = \frac{dy}{ds} (X - v)$ sendo X e Y as coordenadas correntes da tangente e x e y as do ponto de contacto.

O methodo de Leibnitz introduz os taes infinitamente pequenos para estabelecer as equações entre as quantidades auxiliares. Parece, portanto, que nos formulas deverán figurar essas quantidades auxiliares e as conhecidas. Pois bem! Leibnitz dividiu o seu Calculo em duas partes: uma que chamou Calculo differencial, que tem por fim determinar as relações entre as quantidades infinitamente pequenas, e outra inversa. desta e que tem por fim eliminar essas quantidades por

elle denominada Calculo integral.

Ha no entanto algumas questões em que não ha necessidade do Calculo integral, para eliminar as quantidades auxiliares.

Segue de exemplo o exemplo acima em que se determina $\frac{dy}{dx}$ directamente na equação da curva.

Os processos especiaes empregados no Calculo differencial constituem a differenciação, a integração sendo constituída pelos processos empregados no Calculo integral.

A integração é inversa da differenciação como em Arithmetica a multiplicação é da divisão. A notação de Calculo integral é \int : é, por assim dizer, uma somma.

Assim como temos \times e \div Teremos d e \int Constantemente na vida pratica, quando queremos estudar um phenomeno, qualquer que elle seja, estudamos os elementos componentes desse phenomeno e levamos o raciocínio ao complexo.

Exemplo = circunferencia de circulo, para obter o seu comprimento, dividimos-a em elementos pelo Calculo differencial e comparamos esses elementos pelo Calculo integral. Orreemos com uma area.

Methodo de Newton

Newton apresentou o seu methodo sob diversas formas, entre ellas:

1º Methodo dos limites ou das primeiras e ultimas razões e 2º dos fluxões

Para comprehender o que consiste o primeiro vamos mostrar como entender a sua decomposição. Supporíamos ter as quantidades A, B, C, D, \dots que supporíamos fixas e determinadas e que a, b, c, t, \dots sejam outras quantidades que tenham ou se approximem de modos differentes das fixas e ao mesmo tempo.

As quantidades A, B, C, D, \dots suppostas fixas e das quaes a, b, c, t, \dots se approximam simultaneamente chamam-se, como sabemos, limites dessas quantidades ou os seus ultimos valores.

... . As relações entre x e y , y e z ... Também, por tanto, para as relações entre A e B , B e C ...

As relações entre as fixas chamam-se por isso últimas razões das relações entre as variáveis. Supponhamos, agora, o inverso, isto é, que, em vez de x, y, z ... se aproximarem de A, B, C ..., se afastem.

Podemos, então, dizer que A, B, C ... são, por assim dizer, os primeiros valores das quantidades x, y, z ... As relações entre esses primeiros valores serão as primeiras razões das quantidades x, y, z ...

Dahi a denominação de métodos das primeiras e últimas razões.

Estamos, agora, em condições de ver como Newton resolveu os problemas com o seu method... Determinava as razões entre as quantidades x, y, z ... e, como as de cima eram as últimas razões, determinava a relação entre as de cima. Assim, p. ex., os limites das propriedades dos poligonos semelhantes são, como sabemos, as propriedades da circunferencia.

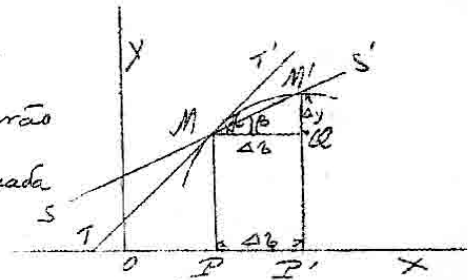
Newton, para estabelecer o seu methodo, empregou notações. Elle usou de acrescimos que elle representou por Δ . Supponhamos ter dado a x e y acrescimos successivos Δx e Δy . O que será Δx ? Será $x + \Delta x$ menos x . Assim procedendo, teremos a variação dos acrescimos successivos dados a x . O mesmo teriamos com relação a y .

A relação entre os acrescimos soffidos pelas quantidades introduzidas seria $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ e o limite $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Supponhamos ter dois eixos coordenados, uma curva $y = f(x)$ e um ponto M de coordenadas (x, y) . Pelo methodo de Leibnitz bastava considerar um ponto infinitamente proximo de M . O processus de Newton é o seguinte: Tomamos um outro ponto e tomamos as coordenadas tanto

do último como do primeiro. Dado a \underline{c} um
acrescimento finito Δb as coordenadas de M' serão
 $(b + \Delta b, y + \Delta y)$ sendo Δy o crescimento da ordenada.

Chamamos M a M' . Teremos uma secante
passando por esses dois pontos. Mas, o que é



uma tangente? É o limite de uma secante. Ora, o coeficiente angular
da recta que passa por dois pontos é $\frac{y'-y'}{b'-b'}$ ou $\frac{y+\Delta y-y}{b+\Delta b-b} = \frac{\Delta y}{\Delta b}$

$\frac{\Delta y}{\Delta b}$ é a tangente do ângulo $M'Mb$. Seja β o ângulo. Então, $\frac{\Delta y}{\Delta b} = \text{tg } \beta$
Suponhamos, agora, que a secante se mova em torno do ponto M .

O que se dará? A secante irá também para se confundir com a tangente
cuja posição ella occupará no limite. A medida que isso se dá Δy e
 Δb tendem para zero, mas a relação para o que tende? Para $\text{tg } \alpha$ sendo
 α o ângulo da tangente. Portanto, $\lim \frac{\Delta y}{\Delta b} = \text{tg } \alpha$

Esse era o seu primeiro methodo. No entanto, Newton empregava um
segundo, qual fosse o das fluções e das fluentes. Para isso elle con-
siderava que toda linha era gerada pelo movimento de um ponto, toda
superfície pelo de uma linha, todo volume pelo de uma superfície e todo
o ângulo pelo de um dos seus lados em torno do vertice.

O ponto movendo-se, p. ex., sobre uma linha, a velocidade desse ponto
ao descrever o arco Newton chamava a flução e o arco elle chamava o fluente.
Para resolver o problema elle decomponha o movimento em dois mo-
vimentos segundo dois eixos coordenados. Quer no primeiro caso, quer no
segundo elle dividia o seu Calculo em dois = n'um introduzindo o limite
e as fluções e n'outro eliminando tanto os limites como as fluções.

No primeiro caso seu Calculo tem o mesmo fim do Calculo differencial

e no segundo tem o mesmo fim do integral. Só differem nas denominações que elle deu: chamou o primeiro Calculo das fluxões e o segundo Calculo das fluantes.

Methodo de Lagrange

Todos os methodos que estudamos tiveram uma origem concreta: buscar elementos para resolver as questões geometricas, mechanicas, etc.

Lagrange, depois de conhecer os seus methodos anteriores, achou que um d'elles devia ser empregado para a Analyse. Dizia elle que os de Leibnitz se introduziram quantidades extranhas á Analyse porque não precisamos de infinitamente pequenos. No de Newton tambem introduzimos elementos extranhos que são os limites.

Elle instituiu, então, o methodo das derivadas.

Considerou a formula de Taylor que elle applicou a $f(v+h)$ sendo h o acrescimo que elle dava a v . Viu-se

$$f(v+h) = f(v) + p h + q \frac{h^2}{2} + r \frac{h^3}{6} + \dots$$

Elle estudou os coefficients e viu que cada um se formava do anterior: derivavam-se dos anteriores. Representou, então, por $f'(v)$, $f''(v)$ as derivadas de diversos ordens. Reparando bem, vemos que o seu methodo é puramente analytic. Essas quantidades são as funções derivadas.

Diz Lagrange: se é difficil obter entre $v(v)$ e $f(v)$ uma relação, procural-a-cemos entre $v'(v)$ e $f'(v)$ e, ainda não sendo possível, determinal-a-cemos entre as derivadas de outros ordens. A esse primeiro Calculo em que introduzia as derivadas denominou Lagrange Calculo das derivadas ou das funções derivadas.

Quando tratou de eliminar essas quantidades denominou as

noo Calculo Calculo das funções primitivas.

O Calculo das funções derivadas tem o mesmo fim que o Calculo diferencial e o Calculo das funções primitivas o mesmo fim que o integral.

Comparação dos métodos.

Apparentemente o método que mais facilidade apresenta é o de La grange porque não introduz quantidades estranhas ao calculo. No entanto o mais empregado e mais facil. no jogo das quantidades é o de Leibnitz e tanto assim é que o proprio La grange, escrevendo uma Mechanica, empregou-o documentando assim que o de Leibnitz é mais simples, mais facil e de mais applicações.

O fim dos tres métodos é facilitar o estabelecimento das equações, porém, todos elles conduzirão ao mesmo resultado? Conduzem e é o que nos indica o problema das tangentes. Vamos mostrar analyticamente e por meio da ultima formula que esses métodos são idénticos.

Sejam a e b , não um acrescimo h , mas, sim um acrescimo infinitamente pequeno dx . Vê-se $f(a+dx) = f(a) + p dx + q \frac{dx^2}{2} + \dots$

Subtraindo de ambos os membros $f(a)$ tem-se

$$f(a+dx) - f(a) = p dx + q \frac{dx^2}{2} + r \frac{dx^3}{3} + \dots$$

Nota-se que o primeiro membro é o acrescimo que experimenta a função quando se dá a a o acrescimo dx .

Logo, teremos $dy = p dx + q \frac{dx^2}{2} + \dots$

Dividindo ambos os membros por dx tem-se

$$\frac{dy}{dx} = p + q \frac{dx}{2} + r \frac{dx^2}{3} + \dots$$

p é uma quantidade finita e os outros são dicitos como infinitamente pequenos e podemos, portanto deixar de tomá-los em consideração.

Então $\frac{dy}{dx} = p$

Mas, quem é p ? É o que Lagrange denominava um polinômio derivado. Logo, a relação $\frac{dy}{dx}$ que Leibnitz chama coeficiente diferencial não é mais do que a derivada de Lagrange, que se representa por $f'(x)$.

Portanto, $\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \dots \quad dy = f'(x) dx$

isto é, a diferencial de uma função é igual ao produto da derivada pela diferencial da variável independente.

O mesmo se obtém para o método de Newton dando, não mais um acréscimo infinitamente pequeno, mas, sim um acréscimo finito Δx .

Viria, então, $f(x + \Delta x) = f(x) + p \Delta x + q \frac{\Delta x^2}{2} + \dots$

$\therefore f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y = p \Delta x + q \frac{\Delta x^2}{2} + \dots$

e $\frac{\Delta y}{\Delta x} = p + q \frac{\Delta x}{2} + r \frac{\Delta x^2}{3} + \dots$

No limite se teria $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = p$

Mas, como p era igual a $f'(x)$ de Lagrange, se concluiria

que $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (1)$

A identidade dos três métodos é pois completa e a relação que exprime a identidade é $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

A fórmula (1), em virtude da identidade a que conduzem os métodos de Newton e de Lagrange, nos dá a definição de derivada:

Derivada de uma função é o limite da relação do acréscimo da função para o da variável quando este último tende para zero.