

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

Programa de pós-graduação em Educação Matemática

**UM ESTUDO SOBRE O USO DE RÉGUA, COMPASSO E UM
SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA NO ENSINO DA
GEOMETRIA HIPERBÓLICA**

Marcela Aparecida Penteado Rossini

Orientador: Prof. Dr. Claudemir Murari

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosóficos – Científicos, para obtenção do título de mestre em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)

2010

Comissão Examinadora

Ruy Madsen Barbosa

Geraldo Perez

Claudemir Murari (orientador)

Marcela Aparecida Penteado Rossini

Rio Claro, 12 de abril de 2010.

Resultado:

“Pois dele, por ele e para ele são todas as coisas. A ele seja a glória para sempre! Amém”.

Romanos 11:36

*Dedico aos meus pais, ao meu esposo e aos meus
irmãos, dádivas de Deus em minha vida.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, meu auxílio, presente em todos os momentos de minha vida, por ter me dado forças para prosseguir, quando os fatos da vida me colocavam obstáculos.

Ao meu orientador professor Claudemir Murari pela orientação, incentivo e por tudo quanto me ensinou durante a realização deste trabalho.

Aos meus pais José e Sebastiana pela educação que me deram, pelo amor, pelo carinho e pelos cuidados que dedicaram a mim.

Ao meu esposo Rogério, pelo apoio e dedicação.

Aos meus irmãos Clóvis, Cláudio e Fábio, pelo carinho e confiança.

Aos Professores Geraldo Perez e Ruy Madsen Barbosa, por todas as sugestões no exame de qualificação.

Ao amigo Sidnei Mariano, que tanto me incentivou e me fez acreditar que conseguiria.

SUMÁRIO

	Página
RESUMO	8
ABSTRACT	9
INTRODUÇÃO	10
1. Trajetória pessoal	10
CAPÍTULO 1: PROBLEMÁTICA	13
1.1. Alguns aspectos sobre o estudo da geometria.....	13
1.2. A resolução de Problemas.....	16
1.3. O uso de softwares no ensino e na aprendizagem da geometria	20
1.3.1. Alguns softwares que possibilitam construções hiperbólicas	21
1.3.1.1. Cinderella	21
1.3.1.2. Geometer'sSketchpad.....	22
1.3.1.3 Cabri-Géomètre II	23
1.4. A régua e o compasso	29
CAPÍTULO 2: DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DAS GEOMETRIAS.....	31
2.1. Do início da geometria a Euclides	31
2.2. A geometria de Euclides	32
2.3. O V Postulado	34
2.4. Fundamentos da geometria de Hilbert	40
2.5. Geometria absoluta	40
2.6. O surgimento de outras geometrias	41
2.7. A geometria Hiperbólica e a geometria Elíptica	45
2.8. A criação de modelos.....	47
CAPÍTULO 3: REFERENCIAL TEÓRICO.....	50
3.1. O modelo do disco de Poincaré	50
3.1.1 Plano, ponto e reta	50
3.1.2. Ângulos	51

3.2. Geometria Absoluta	52
3.2.1. Axiomática de Hilbert	52
3.3. Teoremas demonstrados sem o postulado das paralelas	55
3.4. Axiomas, definições e teoremas da geometria hiperbólica	56
3.4.1. Axiomas da geometria hiperbólica	56
3.4.2. Definições da geometria hiperbólica	57
3.4.3. Teoremas da geometria hiperbólica	63
3.5. Potência de ponto, eixo radical, equipotência e inversão.....	76
3.5.1. Potência de ponto com relação a um círculo	76
3.5.2. O eixo radical de dois círculos.....	76
3.5.3. Equipotência	78
3.5.4. Inversão com respeito a uma circunferência.	81
CAPÍTULO 4: METODOLOGIA DA PESQUISA.....	83
4.1. O modelo de Romberg	85
4.1.1. Identificando o fenômeno de interesse	86
4.1.2. Modelo Preliminar	86
4.1.3. Relacionando com idéias dos outros.....	87
4.1.4. Estabelecendo conjecturas	88
4.1.5. Selecionando Estratégia Geral de Pesquisa	89
4.1.6. Selecionar Procedimentos específicos de Pesquisa	89
4.1.7. Coletando Informações	90
4.1.8. Interpretando as informações	90
CAPÍTULO 5: DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES	92
5.1. As atividades.....	92
CONSIDERAÇÕES FINAIS	132
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	136
ANEXOS.....	139

RESUMO

O principal objetivo deste trabalho foi contribuir para o ensino e aprendizagem da geometria hiperbólica, apresentando uma proposta que visa à introdução do estudo dessa geometria, utilizando o *software Cabri - Géomètre II (menu hiperbólico)* e, também, *a régua e o compasso* na abordagem dos conceitos fundamentais. Procedemos desta maneira por entendermos que estes recursos integrados podem cooperar para uma melhor compreensão e assimilação das noções apresentadas. Esta pesquisa tem abordagem do tipo qualitativa e foi desenvolvida seguindo a proposta metodológica de Romberg, e a coleta de dados se deu por meio de observações, anotações e fotos. A metodologia de resolução de problemas foi utilizada na elaboração das atividades, as quais foram aplicadas a alunos de um curso de graduação em engenharia elétrica. Os dados coletados foram analisados qualitativamente, buscando compreender como tais instrumentos educacionais associados podem auxiliar no processo ensino-aprendizagem desta geometria não-euclidiana. Ressaltamos que na evolução desta proposta foi possível reforçar o entendimento de conceitos da geometria euclidiana que são usados nas construções hiperbólicas.

Palavras Chave: Geometria Hiperbólica, régua, compasso e software Cabri Géomètre II.

ABSTRACT

The ultimate goal of this essay is to contribute to the teaching and learning process of the hyperbolic geometry, introducing a proposal that aims for the presentation of the study of this geometry, making use of the software entitled Geomere Cabri II (hyperbolic menu) and , also , the ruler and the compasses in the approach of essential concepts. We followed this way of working as we understand that such resources when integrated, may cooperate in a better understanding and assimilation of those presented notions. This research has a qualitative kind of approach and was developed following the methodological proposal of Romberg, and we collect data by watching , writing down notes and taking pictures. The methodology of problem solutions was deployed in the activities elaboration which were applied to students in an Electric Engineering degree course. The collected data were analyzed taking into account the quality, trying to understand how such educational tools together may help in the teaching- learning process of these non - Euclidian geometry concepts which are used in the hyperbolic constructions.

Key Works: hyperbolic geometry, ruler, compasses, software Geomere Cabri II.

INTRODUÇÃO:

1. Trajetória pessoal

O gosto pela matemática tem permeado minha vida educacional, e foi o motivo para ingressar na licenciatura em matemática, na faculdade de filosofia e letras de Jacarezinho. Os meus sonhos em relação à carreira docente, para atuação em estabelecimentos de ensino superior, começaram a surgir pela admiração aos professores que ministravam cursos naquela universidade. Porém, devido às minhas condições sócio-econômicas, sonhar com um mestrado no primeiro ou segundo ano da faculdade parecia ser algo muito distante.

Entretanto, em 2003, ano em que cursava o sexto período na faculdade, apareceu uma oportunidade para ser monitora de cálculo numa instituição de ensino superior, que estava iniciando o curso de engenharia elétrica. Esse fato veio a reforçar aquela vocação à docência, florescida no início da graduação.

As atividades de monitoria duraram dois anos, muito contribuíram e se constituíram nas preliminares para a construção de nossa prática. Esse período foi fundamental para aperfeiçoamento de conhecimentos específicos e, apesar de ainda nas condições de aluna, recebemos muito incentivo da parte dos alunos que monitorávamos. Da mesma forma, os professores ofereceram todo o suporte necessário para o desenvolvimento de nosso trabalho.

Assim, fomos vivenciando todo esse contexto, inteirando-nos com colegas que eram doutores, mestres, doutorandos, mestrandos, os quais nos estimulavam a buscar realizar nossos objetivos profissionais, mas, principalmente, procurar caminhos científicos que fundamentassem nossa profissionalização, incluindo a compreensão dos processos de ensino-aprendizagem da Matemática. Pessoas especiais estiveram presentes nessa trajetória aconselhando, incentivando, apresentando caminhos, bem como despertando-nos para novos horizontes. Tais exortações levaram-nos a procurar um curso de pós-graduação e, após uma pesquisa desses cursos, identificamo-nos com o curso de pós-graduação em educação matemática da UNESP de Rio Claro, do qual já conhecíamos algumas pessoas, e onde fizemos a inscrição como aluna especial para o ano de 2005.

Foi nesse mesmo ano, o seguinte à obtenção do diploma de graduação, que devido à aprovação de nosso trabalho de monitoria naquele estabelecimento de nível superior, recebemos um convite para ali ministrar algumas aulas. Portanto, 2005, pela sucessão contínua dos fatos, foi o ano em que se instituíram novos caminhos em nossa vida: fazer um curso de pós-graduação e ser professora em uma faculdade. Concretizavam-se, assim, algumas de nossas aspirações.

A nossa presença junto ao programa de pós-graduação foi muito importante, pois assim pudemos conhecer as linhas de pesquisa, os pesquisadores, bem como a produção intelectual docente e discente. Foram dois anos como aluna especial, em cujo período conheci o professor Claudemir, com o qual discorríamos sobre o problema da omissão do ensino de Geometria, incluindo as Geometrias não Euclidianas e, em especial, a Geometria Hiperbólica. Dentre as causas apontadas para essa omissão, o despreparo do professor com relação ao desenvolvimento de conteúdos e a forma como essa disciplina é abordada em sala de aula trouxe-nos certa inquietação e levou-nos a algumas reflexões que culminaram em um desejo de desenvolver um trabalho dentro dessa temática.

Uma vez definido o campo de investigação, a Geometria, o professor Claudemir sugeriu que estudássemos a Geometria Hiperbólica, um assunto que, apesar de sua importância, não é muito abordado, mesmo em cursos de graduação. Por sua grande aplicabilidade na área de engenharia elétrica, esse estudo poderia ser muito útil para enriquecer nossa competência profissional, articulando a teoria à prática, além de esse saber poder ser disseminado ao alunado sob nossa responsabilidade naquele momento (e ainda hoje), pois os conhecimentos sobre a Geometria Hiperbólica são muito importantes na transmissão de sinais das telecomunicações, campo de atuação dos engenheiros elétricos.

A proposta de estudo pareceu-nos bastante interessante e em 2007, após ter cursado o conjunto das disciplinas obrigatórias, matriculamo-nos como aluna regular no programa de pós-graduação apresentando o projeto de estudo sobre a Geometria Hiperbólica, em cuja abordagem instrumentos como a régua, o compasso e o software Cabri – Gèomètre II seriam utilizados.

Levando em consideração a linha de pesquisa na qual estamos inseridos, e a prática que nos motiva a buscar situações de aprendizagem que possam proporcionar aos alunos um aprender com significado, procuramos preparar um plano pedagógico, no qual nosso papel como professor possa adquirir as dimensões de facilitador, mediador e organizador da aprendizagem. Oferecemos um curso de Geometria Hiperbólica aos alunos da escola em que

trabalhamos. Nesse curso foram tratados os conceitos básicos dessa geometria. Os assuntos foram abordados no laboratório de ensino e no laboratório de informática, em cujos ambientes foi desenvolvida uma seqüência de atividades. Dessa maneira, desenvolvemos nosso projeto especificado como um estudo sobre geometria hiperbólica fazendo uso de régua, compasso e do software Cabri – Géomètre II. Organizamos este trabalho em seis capítulos:

No capítulo 1, apresentamos a problemática, justificando a importância deste trabalho.

No capítulo 2, recorremos à história da matemática a fim de mostrar o desenvolvimento das geometrias Não – Euclidianas.

No capítulo 3, apresentamos os aportes teóricos matemáticos que dão o rigor matemático para esta pesquisa.

No capítulo 4, mostramos os argumentos que sustentam nossa opção metodológica, na qual se fundamenta esta investigação.

No capítulo 5, reunimos os dados coletados, as descrições e a discussão dos mesmos a fim de buscar possíveis respostas para esta investigação.

No capítulo 6, apresentamos nossas considerações finais do trabalho realizado e por fim a bibliografia e os anexos utilizados em sua realização.

CAPÍTULO 1: PROBLEMÁTICA

1.1. Alguns aspectos sobre o estudo da geometria

A geometria pode ser considerada uma disciplina fundamental para a compreensão do mundo em que estamos inseridos. Assim, o valor do saber geométrico na boa formação do indivíduo é incalculável. (FAINQUELERNT, 1995) expressa de modo conveniente essa importância:

A geometria também oferece um vasto campo de ideias e métodos de muito valor quando se trata do desenvolvimento intelectual do aluno, do seu raciocínio lógico e da passagem da intuição e de dados concretos e experimentais para os processos de abstração e generalização. A geometria também ativa as estruturas mentais possibilitando a passagem, do espaço das operações concretas para o das operações abstratas. É, portanto tema integrador entre as diversas áreas da matemática, bem como fértil para o exercício de aprender a fazer, aprender a pensar. (FAINQUELERNT,1995:46, apud MURARI, 2004).

Segundo Goulard (1989), podem-se destacar os seguintes objetivos para o ensino de geometria, e sobre como ensiná-la:

- a) Adquirir conhecimentos que possibilitem uma compreensão do mundo físico aparente.
- b) Adquirir habilidade em construções geométricas e processos de medida.
- c) Desenvolver a intuição geométrica.

Esta deve ser ensinada, possibilitando o acesso da pessoa ao mundo da geometria, que é também o mundo da matemática, respeitando suas emoções, aceitando sua representação e conduzindo-a a experimentar nos aspectos visuais e táteis seus sentimentos.

Como podemos observar a geometria é considerada importante em aspectos ligados ao cotidiano, ela nos ajuda a nos situar no espaço em que vivemos. É um saber que tem aplicação fora da sala de aula, cujos aspectos geométricos se evidenciam nas diversas situações do dia-dia.

Atualmente temos conhecimento de diversas geometrias, as quais se distinguem como Geometria Euclidiana e as não Euclidianas. Pode-se observar, que os seus campos de atuação

são diferentes, o que não confere primazia de uma sobre a outra, mas que uma dada geometria pode ser aplicada somente a tipos específicos de problemas.

Apesar da consolidação das Geometrias Não Euclidianas, e a importância das mesmas já serem observadas até mesmo em outras áreas do conhecimento, o seu ensino tem sido negligenciado até mesmo nos cursos de Graduação em Matemática. Como consequência, por desconhecimento do conteúdo, os docentes também não abordam o assunto nos níveis fundamental e médio, apesar desse tema já fazer parte da grade curricular de alguns estados, tendo como exemplo, o Estado do Paraná.

Cabariti (2004) elaborou um levantamento consultando, via Internet, as ementas dos cursos ou disciplinas de geometria, em onze universidades ou faculdades nacionais. Verificou que somente quatro propunham o estudo de geometrias não-euclidianas (sendo que em duas, a disciplina era proposta como optativa). Pataki (2000) aponta que a falta de conhecimento sobre o tema por parte do professor, pode ser um dos motivos que contribuem para o resultado dessa estatística.

Relativamente sobre o ensino e a aprendizagem de Geometria, várias pesquisas sugerem que a utilização de materiais manipuláveis pode contribuir para o desenvolvimento da visualização. No dicionário Aurélio, o significado atribuído à visualização é o de “transformação de conceitos abstratos em imagens reais ou mentalmente visíveis”.

Nacarato (2005) ressalta que o desenvolvimento da habilidade de representar mentalmente um objeto, que não está ante os olhos do sujeito no momento de sua ação sobre este objeto, “depende da exploração de modelos ou materiais que possibilitem ao aluno a construção de imagens mentais”. O aluno tem a oportunidade de usar sua memória, sua imaginação, tornando concreto aquilo que foi apreendido pela visão.

Pais (1996) indica a existência de quatro elementos fundamentais que interferem fortemente no processo de ensino e aprendizagem da geometria euclidiana plana e espacial. Trata-se do objeto, do conceito, do desenho e da imagem mental.

Nesse trabalho o termo *objeto* está associado ao modelo utilizado para representar o espaço hiperbólico. Devido às suas especificidades não foi possível elaborar um objeto hiperbólico. Assim, apresentamos aos alunos uma *sela* (como a figura abaixo), que é um objeto representando uma superfície com curvatura negativa. Também mostramos a figura denominada *pseudo-esfera*, obtida através da curva denominada “*tractriz*”.

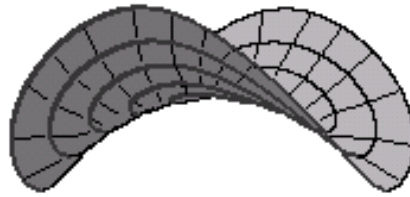


Figura: 1

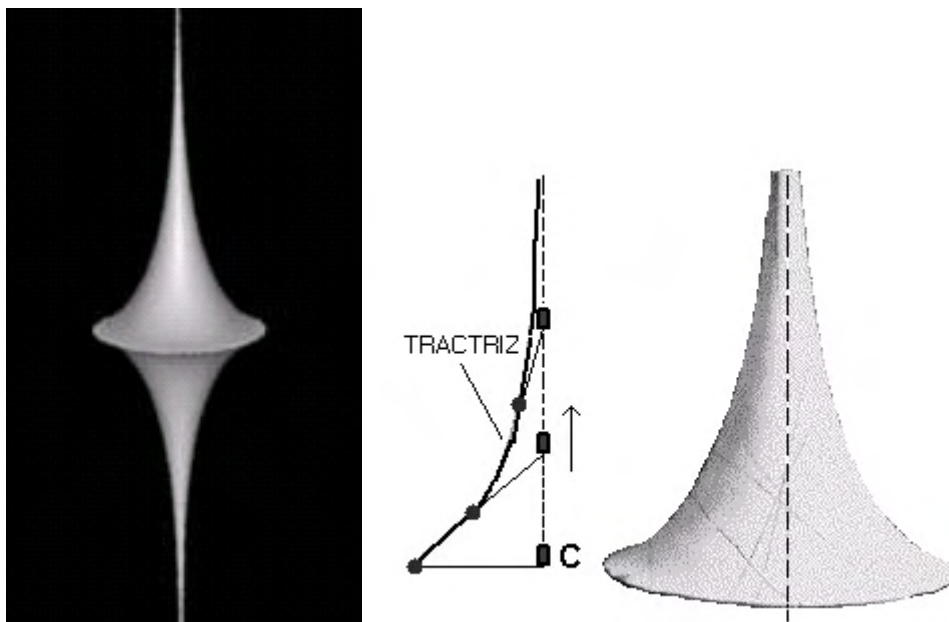


Figura: 2

A representação de conceitos geométricos por desenhos é um dos recursos mais utilizados no ensino e aprendizagem da geometria. Pode-se dizer que de maneira geral, as ilustrações estão sempre presentes no estudo de conceitos geométricos. No nosso caso, considerando que as formas hiperbólicas não são comumente encontradas em nosso meio, as representações conceituais através do desenho, adquirem especial importância no processo de ensino e aprendizagem da geometria hiperbólica. O desenho pode ajudar na concretização dos conhecimentos teóricos da geometria, confirmando propriedades geométricas experimental ou graficamente, fornecendo a base indispensável para compreender o processo e não apenas decorar passos.

As imagens mentais são abstratas e relacionadas aos conceitos geométricos (em relação aos objetos do presente estudo). Para Pais (1996), "... pode-se dizer que o indivíduo

tem uma dessas imagens quando ele é capaz de enunciar de uma forma descritiva, propriedades de um objeto ou de um desenho na ausência desses elementos”.

A representação das noções geométricas por objetos ou por desenhos influenciam na formação das imagens mentais, que estimulam o desenvolvimento do raciocínio para resolver problemas, conforme (PAIS, 1996). O conteúdo concreto que é apreendido pelos sentidos é fator determinante para a produção de novas aprendizagens ou mesmo para influenciar o aprendiz para trazer à memória outros conhecimentos, que possam subsidiar a compreensão daquilo que está sendo exposto.

A formalização dos conceitos ocorre de maneira gradativa e diferente para cada indivíduo. Por ser um processo abstrato, preliminarmente, há sempre uma correlação entre o conceito e sua representação, e “é no processo de conceitualização que o aluno lança mão de recursos que lhe são mais próximos e disponíveis, entrando em cena as representações por objetos e desenhos, e, posteriormente, pelas imagens mentais” (PAIS, 1996).

Durante as aulas, os alunos devem ser colocados diante de situações que possam estimular a representação mental dos objetos de estudo, as propriedades geométricas devem ser reconhecidas e testadas, com o objetivo de que as informações adquiridas pelo estudo possam ser transformadas em saber com significado e compreensão.

Historicamente o ensino da geometria tem sido marcado pelo método tradicional, cujos conceitos e propriedades são apresentados, como idéias prontas e acabadas. Porém, as pesquisas em educação apontam várias tendências didático-pedagógicas para o ensino de Matemática, que abordam o ensino de Geometria de forma mais exploratória e investigativa. Sem desconsiderar a importância das demais tendências, dentre as existentes destacamos a Resolução de Problemas que forneceu subsídios para a realização de nossa pesquisa.

1.2. A resolução de problemas

A atual sociedade tem sido pontuada por constantes mudanças, as quais requerem cada vez mais que os indivíduos estejam preparados para viverem essas transformações. Esta

preparação vai além dos conhecimentos teóricos sobre determinados assuntos; envolve habilidades a serem desenvolvidas nas pessoas, sendo que a escola tem um papel fundamental no desenvolvimento dessas habilidades. Saber resolver problemas é algo que precisa ser estimulado e desenvolvido nos alunos.

A matemática tem desempenhado um papel importante no desenvolvimento da sociedade. Há um reconhecimento da importância e da necessidade da matemática para entender o mundo em que se vive, porém quanto ao seu ensino sempre houve muita dificuldade. Nesse sentido, as pesquisas em Educação Matemática apontam tendências para o seu ensino (que incluem a Resolução de Problemas), que podem contribuir para amenizar essas dificuldades e promover um aprendizado mais significativo para os alunos.

O professor é co-responsável no processo de ensino e aprendizagem, e é preciso se conscientizar de que:

Começar o ensino de um tópico específico da matemática pelo produto de sua gênese, isto é, pelas definições acabadas, dissociadas do verdadeiro processo de formação do pensamento como geralmente ocorre nas tendências formalista e tecnicista, significa sonegar ao aluno acesso efetivo a esse conhecimento, isto é, a essa forma especial de pensamento e linguagem e, portanto, a essa forma especial de leitura do mundo (FIORENTINE, 1995).

A nossa responsabilidade nesse processo, expressa da maneira acima, nos remete a adequar nosso trabalho escolar às novas tendências e ajudar a resolver problemas deve ser um dos objetivos principais de nossa atividade profissional. Mas o que é um problema?

“Um problema é qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la” (DANTE apud RODRIGUES, 1992).

E o que é resolver um problema? Para Polya:

Resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado. Se o fim por si só não sugere de imediato os meios, se por isso temos de procurá-los refletindo conscientemente sobre como alcançar o fim, temos de resolver um problema. Resolver um problema é encontrar um caminho onde nenhum outro é conhecido de antemão, encontrar um caminho a partir de uma dificuldade, encontrar um caminho que contorne um obstáculo, para alcançar um fim desejado, mas não alcançável imediatamente, por meios adequados. (POLYA apud MURARI, 1999).

Concebemos problema como uma situação que precisa ser resolvida e onde não se conhece uma regra ou um caminho específico para resolvê-la, porém a solução é necessária e o interesse em encontrar a solução existe.

Acreditamos que a busca pela resposta a um problema nos leva a pensar em possibilidades, nas quais se pode fazer uso de conhecimentos adquiridos ou até mesmo ser produzido conhecimento. Assim, acreditamos que o processo de busca da solução pode contribuir significativamente em vários aspectos como, por exemplo: iniciativa, criatividade, invenção, mesmo que não se chegue a uma resposta correta.

Dentre os principais objetivos da resolução de problemas, conforme Dante (1999), destacamos:

- “Fazer o aluno pensar produtivamente”;
- Desenvolver o raciocínio do aluno;
- Ensinar o aluno a enfrentar novas situações;
- Dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações matemáticas;
- Tornar as aulas de matemática mais interessantes e desafiadoras;

A aprendizagem matemática pode acontecer de forma mais eficaz, a partir de situações desafiadoras inseridas em problemas interessantes. Para solucionar tais problemas o aprendiz buscará diferentes soluções, e para tal pensará matematicamente, buscando conteúdos matemáticos para resolvê-los ou aprenderá um novo conteúdo a partir dos problemas propostos.

Pensando nas diferentes formas de se conceber a Resolução de Problemas, Gazire (1989) distingue três perspectivas:

- a) Resolução de problemas: Um novo conteúdo: Baseia-se, na convicção de que “levar o aluno ao conhecimento de várias técnicas e estratégias de Resolução de Problemas, contribui para desenvolver nele sua habilidade em resolver problemas”.
- b) Resolução de Problemas: Aplicação de conteúdos: Fundamenta-se, na idéia de que “aprende-se melhor um conteúdo quando ele é aplicado”.

- c) Resolução de Problemas: Um meio de ensinar matemática: Apoia-se, na concepção de que “se todo conteúdo a ser aprendido for iniciado numa situação de aprendizagem, através de um problema – o desafio ocorrerá uma construção interiorizada do conhecimento a ser adquirido.

Neste trabalho adotamos a terceira perspectiva, na qual dentro do possível será conduzida, por entendermos que a aprendizagem ocorre de maneira mais significativa.

Para Andrade (1998), pensando a resolução de problemas como uma metodologia de ensino para se ensinar matemática, o problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento, os problemas são propostos ou formulados de modo a contribuir para a formação dos conceitos antes mesmo de sua formalização.

Segundo Onuchic, (1999) “ao se ensinar matemática através da resolução de problemas, os problemas são importantes não somente com o propósito de aprender matemática, mas também como um primeiro passo, para resolvê-los.”

Com a resolução de problemas, o processo de ensino-aprendizagem inicia-se com um problema que coloque o aluno diante de situações em que precise desenvolver alguma estratégia para solucioná-lo. Então, o aluno terá a oportunidade de explorar esse problema, buscando soluções, analisando o problema sob diferentes perspectivas, recorrendo a diferentes áreas da matemática, ou a outras áreas para resolvê-lo. E o professor tem o papel de conduzir o aluno na exploração do problema e não simplesmente apresentar a solução.

Polya (1978), sugere quatro fases para a resolução de um problema:

- Compreensão do problema: o indivíduo precisa estar motivado a resolvê-lo. Esta é a fase em que precisa entender o enunciado e identificar as partes do problema.
- Estabelecimento de um Plano: Após ter visto o problema sob diferentes aspectos, relacioná-los a situações semelhantes e dividi-los em partes, o indivíduo irá conceber uma estratégia para solucioná-lo. Esta idéia pode surgir repentinamente, ou após um longo período de busca.
- Execução de um plano: é a execução do plano para solucionar o problema.

- Retrospecto: esta é a fase em que o indivíduo deverá testar a solução encontrada. Caso esta não seja válida deve recomeçar todo o processo de resolução do problema.

Há que se acrescentar, ainda, que o ensino via resolução de problemas pode contribuir para estimular a criatividade no aluno. É o que afirma Murari (1999):

Na resolução de problemas temos a oportunidade de promover o desenvolvimento da criatividade do aluno. Ao se deparar com uma situação desafiadora os alunos são estimulados a buscar um caminho para a resolução do problema proposto e quando inteirados de que devem procurar caminhos alternativos para solucioná-lo, obrigam-se, necessariamente, a recorrer à criatividade.

1.3. O uso de softwares no ensino e aprendizagem de geometria

Com a evolução dos recursos tecnológicos têm-se grande variedade de meios, e recursos que frequentemente, auxiliam os docentes em seu trabalho didático. Porém, para que o processo de ensino e aprendizagem se realize de forma satisfatória, usando-se as tecnologias de informação, é necessário que o software utilizado seja educativo, e que o professor tenha capacitação suficiente para utilizar o computador como meio educacional.

Os programas de geometria dinâmica (como por exemplo, Cabri-Géomètre II, Geométr's Sketchpad, Cinderella, Geogebra, etc.), surgiram gerando a expectativa de causar uma revolução no ensino de geometria, pois a ideia inicialmente relacionada a estes softwares, é que eles tornariam mais fácil a atividade de aprender e ensinar geometria, devido ao dinamismo característico de tais softwares (GRAVINA e SANTAROSA, 1998).

O uso desses softwares proporciona a interatividade, além de permitirem a criação e manipulação de figuras geométricas a partir de suas propriedades. Com o uso do software é possível uma rigorosa construção geométrica, com maior rapidez e precisão.

Zulatto, (2002) afirma que:

No ambiente de Geometria Dinâmica, o aluno pode formular e testar suas próprias conjecturas, visualizar conceitos, estabelecer relações, compreender e descobrir propriedades geométricas. Isso é possível, pois o aluno pode construir e simular diversos casos de uma figura.

Para Gravina e Santarosa (1998), o uso de softwares de geometria dinâmica como o Cabri-Géomètre II auxilia no desenvolvimento dos conceitos geométricos e diminui os problemas que emergem no processo ensino/aprendizagem de geometria.

Por outro lado, a inserção dos computadores não é tarefa fácil. Tem que haver uma mudança de hábitos, que exige do professor novos conhecimentos e ações para aproveitar devidamente todas as possibilidades do uso de softwares no ensino/aprendizagem da geometria. Como profissionais da educação, devemos tomar cuidado para não usá-los indevidamente, explorando toda sua potencialidade, e não apenas como ferramentas que fazem uma repetição mecânica dos procedimentos. Nesse sentido autores como (RIBEIRO e PONTE, 2000), declaram que os novos recursos, por si só, não promovem mudança alguma, e que em certos casos, podem até ser prejudiciais, se vierem a promover o uso de práticas não recomendadas em nosso meio, como por exemplo, a mecanização das atividades sem a reflexão, ou o entendimento necessário dos processos matemáticos que permeiam tais práticas.

1.3.1. Alguns softwares que possibilitam construções hiperbólicas

A tecnologia da informação nos oferece vários ambientes computacionais que oportunizam novas e diferentes formas de aprendizagem. Comentaremos, a seguir, alguns ambientes que permitem construções hiperbólicas, descrevendo mais detalhadamente o Cabri-Géomètre II por ter sido o software utilizado no desenvolvimento da nossa pesquisa.

1.3.1.1. Cinderella

O Cinderella foi desenvolvido na Alemanha por Jürgen Richter-Gebert e Ulrick Kortenkamp (Gerbet & Kortenkamp; 1996-2003). É um programa de geometria dinâmica, escrito na linguagem JAVA (Sun Microsystems – 1992). Foi distribuído nas escolas de Portugal e é utilizado na Europa. O software permite explorar a mesma construção em diferentes geometrias (euclidiana, hiperbólica e esférica). O modelo hiperbólico (disco de

Poincaré) faz parte do software (suporte nativo), não sendo necessária a sua construção. Permite a elaboração de exercícios interativos com sugestões e posterior verificação automática da solução.

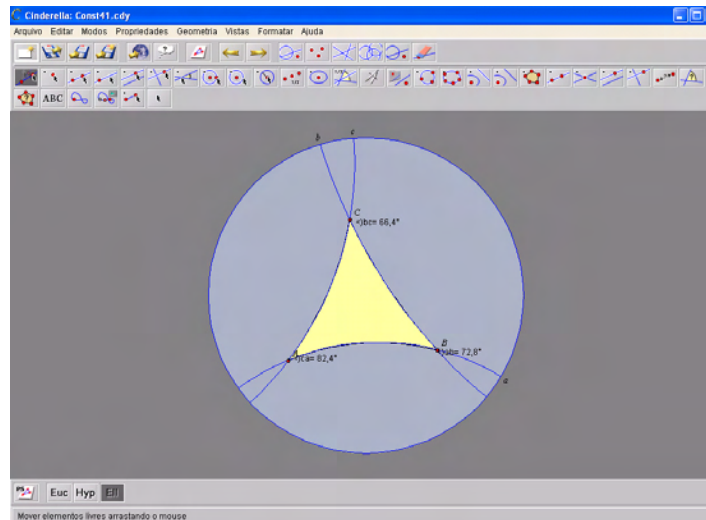


Figura 3

1.3.1.2. Geometer's Sketchpad

O software Geometer's Sketchpad (Jackiw, 1990), ou GSP é um programa de geometria dinâmica semelhante ao Cabri, que foi desenvolvido nos EUA por Nicolas Jackiw, sendo comercializado pela Key Curriculum Press. Este software possibilita o estudo da geometria hiperbólica. Permite converter as construções para HTML, utilizando o JavaSketchpad como ferramenta de exportação para a Web.

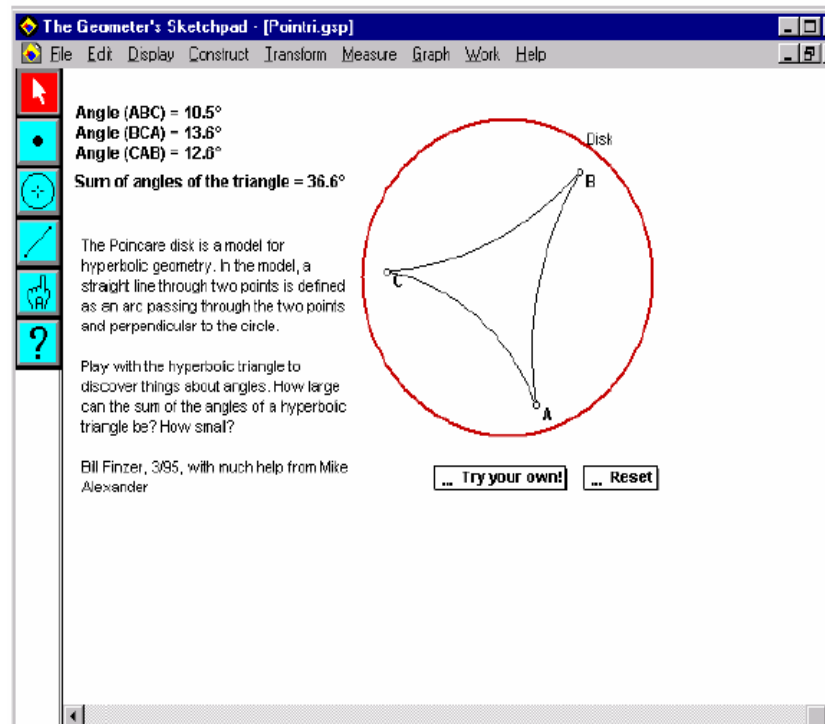


Figura 4

1.3.1.3. Cabri - géomètre II

O Cabri (Cahier de Brouillon Informatique) é um programa de geometria dinâmica de autoria de Jean-Marie Laborde, Franch Bellemain e Yves Baulac. Foi desenvolvido na Universidade de Joseph Fourier, em Grenoble (França), pelo laboratório de Estruturas Discretas e de Didática do IMAG (Instituto de Informática e de matemática aplicada).

Esse software possibilita efetuar construções e exploração em Geometria elementar de maneira semelhante ao que se faz com régua e compasso. No Cabri- Géomètre II, as figuras podem ser construídas e deformadas conservando suas propriedades.

O Cabri – géomètre II permite trabalhar com a Geometria Hiperbólica, em particular o modelo do disco de Poincaré, por meio da possibilidade de definir ferramentas hiperbólicas que substituam o menu euclidiano original.

Menus e Ferramentas.

A figura abaixo mostra a janela do Cabri-Géomètre II, encontrada no manual Texas Instruments Incorporated (1997 – 1999), mostra os elementos essenciais desse software.

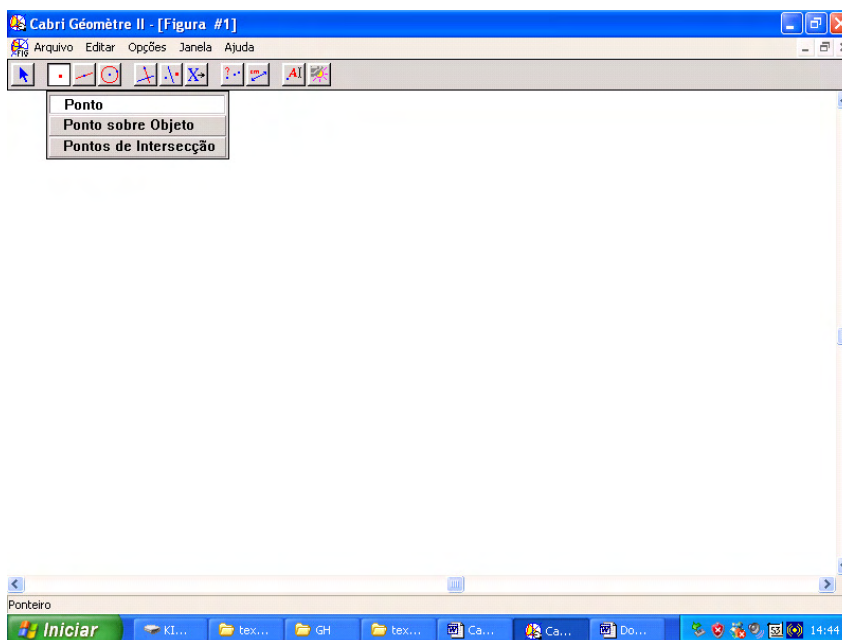


Figura 5

No manual os elementos são descritos como segue:

- **Janela de desenho:** É onde se fazem as construções geométricas.
- **Barra de Menu:** Esta barra contém menus de interface gráfica comuns para o usuário, para o gerenciamento e edição de arquivos, em conjunto com as opções do Cabri-Géomètre II. Os menus são: ícones de atributos, barra de menu, barra de ferramentas, janela de ajuda, janela de desenho, ponteiro de seleção, paleta de atributos, mensagens de ponteiro.
- **Barra de ferramentas:** Contém as ferramentas de construção. São residentes na barra de ferramentas, onze caixas de ferramentas.
- **Ícones de atributos:** Os ícones de atributos são exibidos somente se selecionado o comando Mostrar Atributos, no menu opções da barra de menu. Estes permitem modificar a aparência de objetos. Pode-se criar uma paleta de atributo (menu de divisão), arrastando um ícone dos ícones de atributos, para a janela de desenho.

- **Ponteiro de seleção:** O ponteiro de seleção é a ferramenta primária para selecionar menus e para construir figuras geométricas. A forma de ponteiro se modificará de acordo com a operação e a localização do momento.
- **Caixa fechar:** Essa caixa fecha a janela e cria a caixa de diálogo que permite salvar o trabalho.
- **Caixa de Zoom:** A caixa de zoom alterna o tamanho da janela entre o atual e o tamanho da tela cheia.
- **Barras de rolagem:** Ao clicar nas barras de rolagem nas setas de rolagem, move-se, verticalmente ou horizontalmente o conteúdo da janela de desenho.
- **Opção do menu ajuda:** Clicar na opção de menu ajuda, e selecionar ajuda ou pressionar a tecla F1 para alternar a janela de ajuda entre ATIVADA e DESATIVADA.

Menus:

- **Arquivo:** comandos para abrir, fechar, salvar ou imprimir construções.
- **Editar:** comando para selecionar ou copiar objetos, atualizar a janela de desenho, ou exibir novamente as construções, desfazer, recortar, colar.
- **Janela:** opções padrão para exibição no Windows.
- **Ajuda:** opções de ajuda acerca do Cabri – Gèomètre II.

Caixa de ferramentas

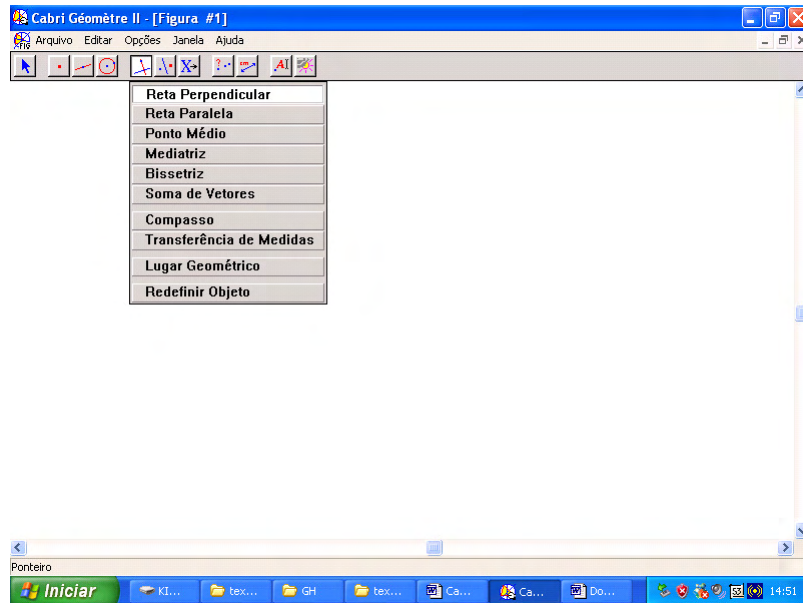


Figura 6

- **Ponteiro:** seleção ou transformação a mão livre.
- **Pontos:** construindo pontos, pontos sobre objetos, pontos de intersecção.
- **Retas:** construindo objetos retilíneos.
- **Curvas:** construindo circunferências, arcos ou cônicas.
- **Construir:** construções da geometria euclidiana como: retas perpendiculares, paralelas, ponto médio, etc.
- **Transformar:** geometria de transformação, como simetria axial, rotação, translação.
- **Macro:** montando macros. Novas macros passam a fazer parte desta caixa de ferramentas.
- **Verificar propriedade:** verificação de propriedades das construções, baseando-se na geometria Euclidiana.
- **Medir:** Medidas ou cálculos de distâncias, área, declive, medida de ângulo.
- **Exibir:** Marcar suas construções ou animar objetos.
- **Desenhar:** modificar a aparência de objetos ou mostrar o sistema de coordenadas.

Menu hiperbólico

São acrescentados ao menu euclidiano quatro comandos que são categorizados da seguinte maneira:

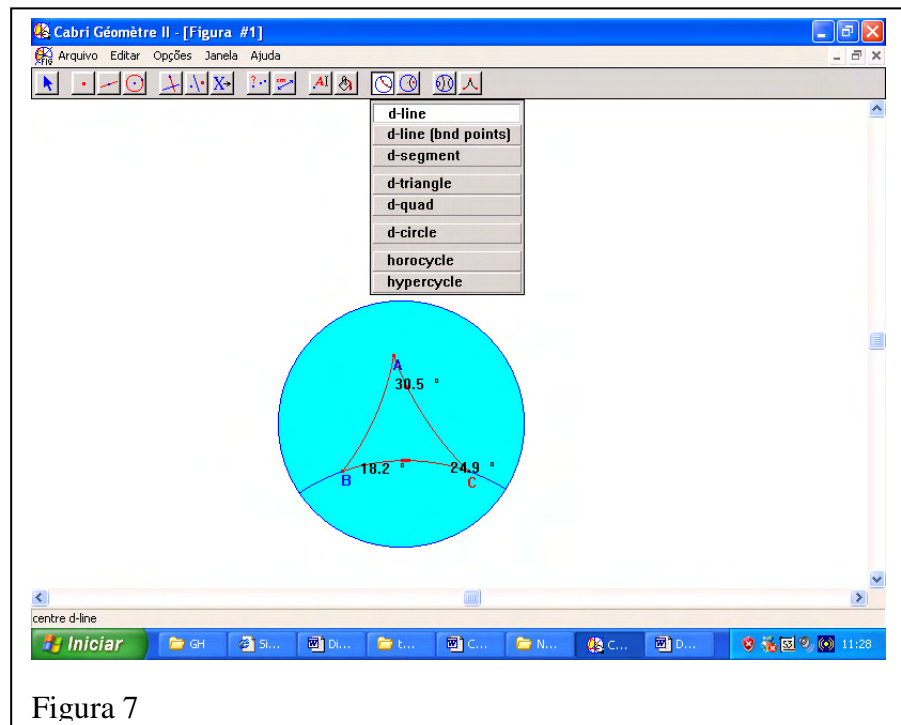


Figura 7

Figuras:

d-line

d- line (bnd points)

d- segment

d- triangle

d- quad

d- circle

horocycle

hypercycle

Construção de linhas e pontos:

centre d-line

mirror d-line

mirror d-line (bnd points)

perpendicular at point

perpendicular from point

perpendicular to 2 d-lines

2 paralelas to a d-line

midpoint

equal arcs

Reflexão: Permitem refletir retas, arcos, triângulos, círculos.

reflect line

reflect arc

reflect triangle

edge reflect

reflect circle

Medidas: Mede distâncias e ângulos.

unit disc

non E distance to centre

non E distance

angle

angle bisector

triangle sum

non E regular triangle

non E regular quad

Dentre os softwares listados, optamos pelo Cabri-Gèomètre II.

1.4. A Régua e o Compasso

A partir do século V a.C os geômetras gregos utilizaram régua e compasso nas construções geométricas. Os três primeiros postulados dos *Elementos* de Euclides são base das construções com **régua não graduada e compasso**. Nesta obra de Euclides, encontram-se vários problemas de construções geométricas, cujas soluções são obtidas através de métodos geométricos simples, com o uso exclusivo desses instrumentos.

A régua e compasso são instrumentos também fundamentais para o processo ensino/aprendizagem da geometria. Em nossa proposta uma mesma atividade pode ser desenvolvida tanto pelo computador (laboratório de informática) quanto através de régua e compasso (laboratório de ensino). Do ponto de vista pedagógico existem recursos que são mais adequados em um ambiente que em outro. Por exemplo, para Murari (2004),

O laboratório de ensino é utilizado como um espaço de discussão e desenvolvimento das atividades, utilizando-se uma abordagem teórica-intuitiva dos conceitos tratados, constituindo-se num lugar onde o aluno participa das construções desses conceitos, manuseando e operando com as figuras geométricas e outros objetos educacionais.

Nos estudos sobre a geometria hiperbólica não temos encontrado algumas justificativas sobre os passos da construção dessas figuras geométricas, pois ao serem efetuados somente através de software, alguns procedimentos não são demonstrados,

dificultando a formalização das provas. Ao abordarmos esse assunto através de régua e compasso, estamos resgatando o uso desses instrumentos tão importantes na construção gráfica de figuras geométricas. Como educadores e envolvidos em questões relativas ao ensino, devemos fomentar o exercício de metodologias alternativas de ensino. No presente estudo, o trabalho inicial realizado com régua e compasso foi fator determinante para a compreensão das ações realizadas pelo Cabri-Géomètre II na construção dos objetos hiperbólicos.

Tais recursos, integrados, podem enriquecer o processo de aquisição de conhecimento, possibilitando uma aprendizagem participante, motivadora e significativa.

CAPÍTULO 2: DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DAS GEOMETRIAS.

2.1. Do início da geometria a Euclides

A geometria, assim como outras áreas da matemática, surgiu das necessidades práticas do homem. As situações do dia-a-dia e o senso geométrico inerente ao homem foram fatores determinantes na percepção da urgência de uma organização lógica para a geometria. Hygino Domingues, na tradução da obra de Fetissoff (1994), elaborou uma introdução histórica sobre as etapas de evolução da geometria, classificando-as da seguinte maneira:

Geometria_subconsciente: o senso geométrico é inato ao homem; contudo, a partir de observações e experiências algumas noções geométricas passaram a se desenvolver.

Geometria_científica: geometria praticada pelos egípcios e babilônios, os quais perceberam que os objetos geométricos apresentavam propriedades, o que exigia certo grau de abstração. Notaram, por exemplo, que a razão entre a circunferência e o seu diâmetro era constante.

Geometria_demonstrativa: Ainda que rudimentares, as primeiras iniciativas para a organização de uma geometria dedutiva são atribuídas a Tales de Mileto, segundo a obra de Eudemo de Rodas (séc. III a.C.). Posteriormente, a escola pitagórica apresentou algumas seqüências de teoremas, demonstrados a partir dos anteriores, através de um raciocínio lógico.

A origem do termo geometria (do grego: *geo*, terra e *metrein*, medida) reflete a característica de que ela retratava situações práticas do cotidiano. As civilizações egípcias e babilônicas (3000 a.C.) possuíam conhecimentos geométricos práticos. Os egípcios calculavam a quantidade de grãos necessária para a produção de uma dada quantidade de pão ou cerveja, calculavam áreas e volumes, e para os babilônicos a geometria era intimamente relacionada à mensuração.

Com o desenvolvimento do raciocínio lógico, que é atribuído a Tales (c. 625 a.C. – c. 547 a.C), e posteriormente aprimorado pelos pitagóricos, surge uma literatura que descrevia as deduções propostas pelos matemáticos gregos. Em vista disso, a partir de poucas afirmações, aceitas por todos, seria possível deduzir uma série de proposições.

A idéia de demonstração de uma proposição aparece primeiramente com Tales. Foi na Grécia que a matemática perde seu caráter prático e assume o status de ciência pura, fundamentada no método dedutivo. O espírito grego buscava respostas a questões referentes ao “porque” das coisas. Após os trabalhos de Tales, a escola pitagórica teve uma grande influência no desenvolvimento matemático grego.

A partir do século V a.C., autores como Hipócrates de Quios (470 a.C. – 410 a.C.), Leon e Teudio de Magnésia, cujos períodos de vida desconhecemos, e Euclides (c. 330 a.C – c. 260 a. C) tentaram compilar o conhecimento matemático da época, através de sistemas axiomáticos.

2.2. A Geometria de Euclides:

Não se sabe muito sobre a vida e a personalidade de Euclides. Em sua obra *Os Elementos*, escrita por volta de 300 a.C., a geometria é apresentada de forma organizada e dedutiva. *Os Elementos* foi, provavelmente, o trabalho que mais exerceu influência no pensamento científico. Começa admitindo certos axiomas e postulados.



Figura 8

Um dos grandes feitos dos matemáticos gregos antigos foi à criação da forma postulacional de raciocínio. A maioria dos matemáticos gregos antigos fazia distinção entre “postulado” e “axioma”. De acordo com razoáveis evidências, porém sem se saber ao certo, Euclides entendia os axiomas e postulados da seguinte forma:

Um axioma é uma suposição comum a todas as ciências ao passo que um postulado é uma suposição peculiar a uma ciência particular em estudo. (EVES, 1997).

Os *Elementos* representaram um marco na história da matemática, considerada a época em que foi escrito, apesar de muitos de seus conceitos, embora intuitivos, não terem sido adequadamente esclarecidos. Era dada muita importância aos desenhos que, sendo esclarecedores, faziam parte das demonstrações.

Os axiomas e os postulados de Euclides podem ser enunciados como seguem:

- *1º postulado*: “Dois pontos determinam uma reta”.
- *2º postulado*: “a partir de qualquer ponto de uma reta dada é possível marcar um segmento de comprimento arbitrário”.
- *3º postulado*: “é possível escrever um círculo com centro arbitrário e raio arbitrário”.
- *4º postulado*: “todos os ângulos retos são iguais”. O Ângulo reto é definido do seguinte modo: “se duas retas que se cortam formam quatro ângulos iguais, o ângulo comum assim determinado é chamado de reto”.
- *5º postulado*: “se uma reta r corta duas outras retas r_1 e r_2 (no mesmo plano), de modo que a soma dos ângulos interiores de um lado de r é menor que dois retos, então r_1 e r_2 , quando prolongadas suficientemente, se cortam daquele lado de r ”.
- *Axioma 1*: “duas coisas iguais a uma terceira são iguais entre si”.
- *Axioma 2*: “somando-se a mesma quantidade a valores iguais obtêm-se resultados iguais”.
- *Axioma 3*: “subtraindo-se a mesma quantidade de valores iguais obtêm-se resultados iguais”.
- *Axioma 4*: “coisas que coincidem uma com a outra são iguais”.
- *Axioma 5*: “o todo é maior que a parte”.

2.3. O V Postulado

Segundo Coutinho (2001), por cerca de dois mil anos a geometria de Euclides foi considerada a única possível. A obra *Os Elementos* era inquestionável, sendo o trabalho de maior número de edições, depois da Bíblia. Matemáticos debatiam a ideia de que se existisse a possibilidade apenas de uma única geometria, certos postulados seriam teoremas e dentro desse raciocínio, renomados matemáticos tentaram provar o quinto postulado, pois não viam simplicidade em seu enunciado.

Uma das técnicas matemáticas que foi utilizada no início do século XIX é a prova por contradição, que consiste em supor o contrário do que se quer provar, e procurar um absurdo que indicaria que o que tomamos por hipótese é falso.

Grande parte das informações sobre a história da Geometria grega é originada da obra de Próclus, filósofo, matemático e historiador (411-485). Em sua obra, Proclus relata que mesmo na época de Euclides foram feitas tentativas de provar o quinto postulado, pois não viam simplicidade em seu enunciado, e pensavam até mesmo na possibilidade de adotar outra definição para retas paralelas. Ao longo dos séculos, vários matemáticos continuaram na tentativa de provar o quinto postulado. Podemos citar como precursores das geometrias não Euclidianas: Ptolomeu (85 -165), Proclus (411-485), Nasiredim (1201-1274), Wallis (1616-1703), Sacheri (1667-1733), Lambert(1728-1777). (BARBOSA, 1995).

Ptolomeu (85 d.C. – 165 d.C.)

Ptolomeu foi também um dos precursores das descobertas das geometrias não – Euclidianas, tentando provar o quinto postulado a partir dos quatro anteriores.

Ptolomeu nasceu em 85 d. C no Egito e morreu em 165 d.C em Alexandria. Em sua tentativa de demonstração Ptolomeu errou em assumir que paralelismo acarreta na congruência de duas figuras, pois isto só ocorre na geometria Euclidiana.

Em (BARBOSA 2002), encontramos o seguinte raciocínio de Ptolomeu para a demonstração do V postulado.

Sejam r/s , temos que $a + b = c + d$ (1) conforme figura a seguir:

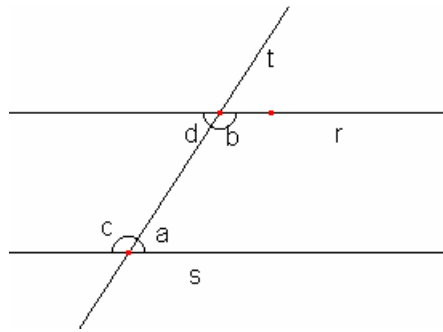


Figura: 9

Logo, se $a + b > 180^\circ$, então $c + d > 180^\circ$. Contradição, pois

$$a + b + c + d = 360^\circ$$

Se $a + b < 180^\circ$, então $c + d < 180^\circ$. Contradição, pois

$$a + b + c + d = 360^\circ.$$

Mas

$$r \parallel s \rightarrow a + b = 180 \Leftrightarrow \left(a + b \neq 180 \rightarrow r \text{ não é paralela a } s \right) \text{ que prova P5}^1.$$

Proclus (411 d.C. – 485 d.C.)

Proclus tentou provar o quinto postulado, usando a ideia de que se uma transversal corta uma de duas paralelas, então corta também a segunda e mais uma vez esta afirmação recai em um substituto para o quinto postulado.

Proclus foi um estudioso das obras clássicas gregas e muito do que se sabe da história e da filosofia da Grécia antiga sobreviveram em seus escritos.

O raciocínio de Proclus na tentativa de prova de P5 foi o seguinte:

Em 1º lugar demonstra-se a seguinte proposição “sem usar o P5”.

“Se uma reta corta uma de duas paralelas, então corta a outra”. (proposição equivalente ao P5).

¹ P5 – quinto postulado de Euclides.

De fato: sejam $r \parallel s$ e t concorrente com r em P .

Seja $Q \in t$ na região entre r e s conforme figura abaixo:

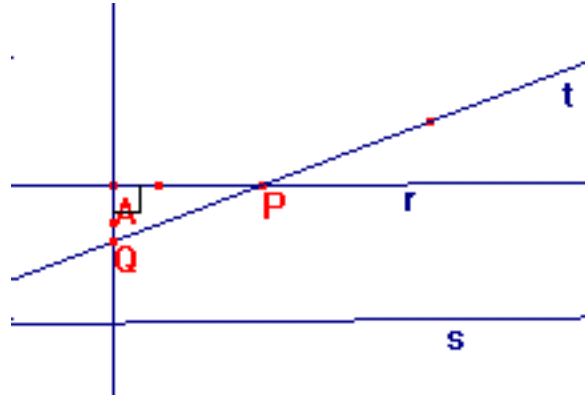


Figura: 10

Temos que à medida que $Q \in t$ “se afasta de P ”, a distância de Q a A aumenta, tornando-se maior que qualquer valor pré fixado (essa proposição não depende de P5 e foi simplesmente admitida por Proclus), inclusive, tornando-se maior que a distância entre r e s (retas paralelas serem equidistantes equivale ao P5), ou seja, $t \cap s \neq \emptyset$ e portanto, t corta s . Isso prova a proposição acima.

Agora, sejam r e s cortadas por t de tal modo que os ângulos colaterais internos de um lado sejam menores que dois retos (figura: 11)

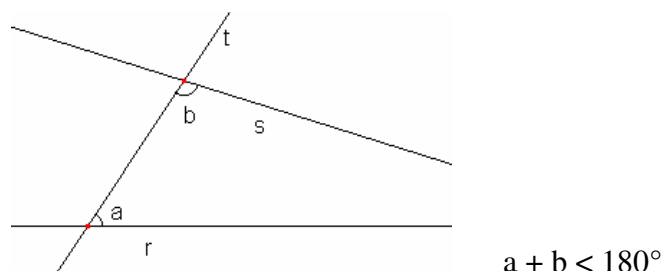


Figura : 11

Seja m uma reta que possui o ponto P formando ângulo c com s de tal modo que $a + b + c = 180^\circ$.

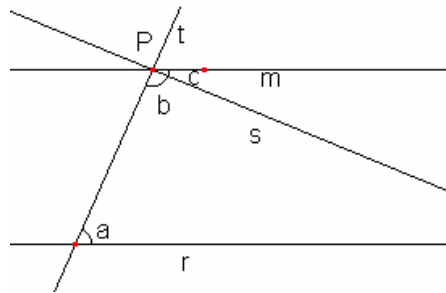


Figura: 12

Considere a proposição: “Se uma reta corta duas outras formando ângulos colaterais internos de medidas a e b tais que $a + b$ é igual à medida de dois ângulos retos, então as duas retas são paralelas”.

Pela proposição acima enunciada temos $m \parallel r$. Como s corta m em P , pela proposição acima provada, temos $s \cap r \neq \emptyset$, ou seja, vale P5.

Nasiredin (1201 – 1274)

Nasiredin (Nasir – Edin), astrônomo e matemático persa foi também um dos que tentaram provar o quinto postulado. Em sua tentativa utilizou uma proposição axioma, porém a proposição assumida era um equivalente ao quinto postulado de Euclides.

Wallis (1616 – 1703)



Figura: 13

Foi um matemático Inglês. Na sua tentativa de provar o quinto postulado fez uso da existência de triângulos semelhantes e não congruentes, recaindo também em uma proposição equivalente ao quinto postulado.

Girolamo Saccheri

Foi um padre jesuíta, professor da Universidade de Pávia. Em 1773 publicou um livro que foi descoberto somente em 1889. O livro era intitulado *Euclides ab omni naevo vindicatus*. Nele, foi encontrada uma tentativa de prova do quinto postulado; ele usou a prova por redução ao absurdo.

Em seu estudo Saccheri considerou um quadrilátero $ABCD$, em que os lados AD e BC são congruentes e perpendiculares ao lado AB . Provou que os ângulos em C e D são congruentes usando os quatro primeiros postulados. Assumir que esses ângulos são retos é equivalente ao quinto postulado. Indicou então, três hipóteses para estes ângulos. São elas: 1- retos, 2- obtusos, 3- agudos.

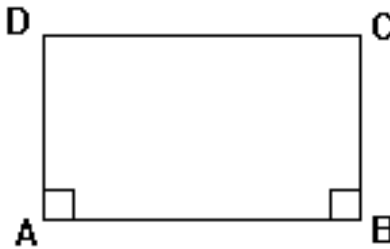


Figura: 14

Saccheri, negou a hipótese 1 e estudou as conseqüências das outras, na busca por contradições. Assumindo (como Euclides) que a reta é ilimitada, descartou a hipótese 2, e ao procurar uma contradição no caso da hipótese 3, provou uma série de resultados, alguns dos quais viriam a ser teoremas da Geometria não Euclidiana. A conclusão de Saccheri é que aquela hipótese acarretava a existência de duas retas assintóticas possuidoras de uma perpendicular comum em um ponto ideal no infinito. As Geometrias Não - Euclidianas poderiam ter sido descobertas quase um século antes, se Saccheri tivesse suspeitado que não tinha chegado a uma contradição, uma vez que não havia uma contradição para ser encontrada. Saccheri é considerado o precursor de Legendre, Lobachewsky, e Riemann. (BARBOSA, 1995).

Lambert - (1728 – 1777),



Figura :15

Escreveu e publicou um trabalho em 1766, sendo sua obra semelhante a de Saccheri, porém foi mais longe que Saccheri na dedução de novas proposições. Utilizou um quadrilátero que possui três ângulos retos, conhecidos hoje como quadrilátero de Lambert. Em sua tentativa de prova deduziu que a soma dos ângulos internos de um triângulo é inversamente proporcional à sua área, em uma geometria onde não vale o quinto postulado. Lambert é conhecido no mundo matemático pela prova rigorosa da irracionalidade do número π .

Legendre (1752 – 1833)



Figura:16

O estilo direto e simples das demonstrações de Legendre ajudou a renovar o interesse sobre as bases da geometria. Este apresentou várias tentativas de prova do quinto postulado.

Em uma de suas demonstrações admitiu que a partir de um ponto no interior de um ângulo não degenerado, cuja medida não é superior a 60° , é possível traçar uma reta que intersecta os dois lados desse ângulo. Essa proposição é também equivalente ao quinto postulado.

2.4. Fundamentos da geometria de Hilbert.

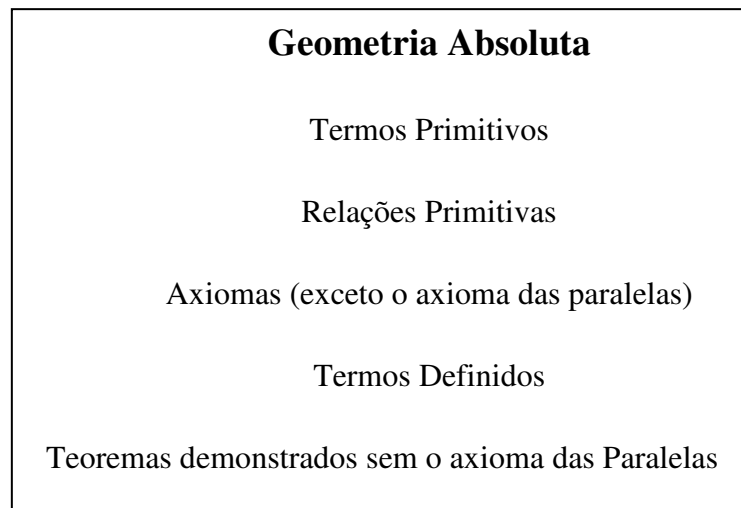
Em 1889 David Hilbert (1862- 1943), publicou a obra Fundamentos da Geometria, onde reformulou a geometria de Euclides. Nesta obra reorganizou e elaborou uma rigorosa apresentação lógica – dedutiva da geometria de Euclides.

Hilbert considerou como termos primitivos os conceitos (objetos) de ponto, reta, e plano, e supôs três relações entre tais conceitos (objetos): “estar situação” (incidir); “entre” e “congruente”. Classificou seus axiomas nos grupos: incidência, ordem, congruência, continuidade e paralelismo.

2.5. Geometria Absoluta.

Tentativas frustradas de demonstração levaram os cientistas a concluírem que, talvez, o V postulado não fosse demonstrável. Muitos matemáticos iniciam estudos considerando a possibilidade de o V postulado ser substituído por outro (não equivalente a ele), elaborando-se outras geometrias.

Admitindo todos os axiomas de Hilbert, exceto o de paralelismo, os termos primitivos, os definidos, e os teoremas demonstrados sem o V postulado, surge a idéia de uma geometria neutra ou absoluta, ou seja, uma geometria comum a todos os sistemas axiomáticos. Podemos, então, esquematizar da seguinte forma, considerando a axiomatização de Hilbert:



2.6. O surgimento de outras geometrias

Partindo da geometria neutra e negando o V postulado, os matemáticos tentavam localizar algum absurdo lógico, para confirmar posteriormente a sua validade (do V postulado). Porém, avançavam em suas proposições e não identificavam nenhuma contradição.

“A pretensão de provar o quinto postulado não foi alcançada porquanto ele não é conseqüência lógica dos quatro anteriores. Substituindo-o criam-se novas geometrias tão boas e consistentes quanto a Euclidiana”. (COUTINHO, 2001).

Dentre as tentativas de se provar o V postulado e que resultaram na descoberta de outras geometrias, a de Sacheri é considerada a mais importante de todas as outras anteriores, por ter sido a primeira a contemplar a possibilidade de outras geometrias diferentes da de Euclides.

Matemáticos como Bolyai, Lobashevsky, Gauss e Riemann lançaram as bases das geometrias não Euclidianas.

Gauss (1777 – 1855).



Figura 17

Em anos que precederam a descoberta das novas geometrias, Gauss apresentava-se como uma figura dominante no mundo matemático, poucos de seus resultados sobre os problemas associados ao V postulado foram tornados públicos.

Ao fim da primeira década do século XIX, Gauss estava tentando provar o quinto postulado pelo método da redução a um absurdo. É possível que Gauss tenha lido os trabalhos de Sacheri, Lambert e Legendre sobre o “Problema das Paralelas” e por meio de correspondências que Gauss mantinha com diversos matemáticos da época acredita-se que ele desenvolveu uma série de resultados da geometria hiperbólica. Há evidências como cartas e críticas de tratados sobre o postulado das paralelas, de que foi Gauss o primeiro a entender a possibilidade de uma geometria diferente da de Euclides.

O termo “não Euclidiano” é de Gauss. Em 1824, em carta F. A Taurinus, declara que se supusermos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180° , é possível desenvolver uma longa série de resultados não contraditórios que constituem uma Geometria “não euclidiana”

Bolyai (1802 -1860)



Figura:18

Uma carta escrita por Gauss a Bolyai em 1799 mostra que ambos ainda estavam ao mesmo tempo, tentando provar o quinto postulado. Em 1804, Bolyai, convencido de ter resolvido o problema, apresentou suas idéias em um pequeno tratado o qual enviou a Gauss, juntamente com uma carta. Mas, sua prova estava errada e Gauss ao responder indicou o erro.

Lobachewsky (1792- 1856)



Figura 19

Este tentou demonstrar o V postulado a partir dos quatro anteriores, porém como seus antecessores se convenceu da impossibilidade.

Lobachewsky sugeriu uma Geometria na qual mais de uma reta paralela à reta dada podiam ser traçadas e então passou a desenvolver resultados da geometria Hiperbólica. Em 1829 publicou um trabalho, em russo, sobre suas descobertas, a este não foi dada atenção, nem em seu país e nem no restante do mundo.

Lobachewsky na busca de reconhecimento de seu trabalho publicou um texto em 1840, sob o título “Pesquisas Geométricas sobre a teoria das paralelas”.

Acredita-se que em 1841, o trabalho de Lobachewsky chegou ao conhecimento de Gauss. Este em 1846 escreveu a Schumacher, reconhecendo o mérito de Lobachewsky, afirmando que os resultados obtidos eram de seu conhecimento, porém que eram demonstrados totalmente diferentes dos seus.

Rieman (1826- 1866)



Figura: 20

Rieman generalizou as geometrias não euclidianas por meio de conceito de curvatura e fundamentou a geometria elíptica.

Em seu trabalho além de generalizar as três geometrias, introduziu as chamadas geometrias Riemannianas.

Com a substituição que se faz do postulado das paralelas surgem dois tipos de geometrias Não – Euclidianas: a Geometria Elíptica e a Geometria Hiperbólica.

2.7. A geometria Hiperbólica e a Geometria Elíptica

O quinto postulado de Euclides é equivalente à afirmação de que, por um ponto fora de uma reta, pode-se traçar apenas uma reta paralela à reta dada. A Geometria Hiperbólica é a Geometria que se obtém substituindo o quinto postulado de Euclides pelo seguinte postulado característico da Geometria Hiperbólica:

“Por um ponto fora de uma reta, podem ser traçadas pelo menos duas retas que não encontram a reta dada”.

A geometria hiperbólica foi desenvolvida independentemente e quase simultaneamente por dois matemáticos contemporâneos: o russo Lobachevsky e o húngaro Janos Bolyai. Porém, Lobachevsky foi o primeiro a expor suas idéias. Assim, a nova geometria é conhecida como geometria de Lobachevsky.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866), em 1854, descartou que a reta seja infinita, admitindo somente que a reta seja ilimitada. Assim, desenvolveu a Geometria Elíptica, que é obtida substituindo o quinto postulado de Euclides pelo seguinte postulado, característico da Geometria Elíptica:

“Por um ponto não pertencente a uma reta não é possível traçar nenhuma reta paralela à reta dada”.

Podemos então esquematizar as geometrias da seguinte maneira:

Geometria Neutra

Termos Primitivos

Relações Primitivas

Axiomas (exceto o das paralelas)

Termos definidos

Teoremas demonstrados sem o axioma das paralelas

+

+

+

<p>Axioma das paralelas:</p> <p>Por um ponto não pertencente a uma reta é possível traçar uma reta paralela à reta dada.</p>	<p>Axioma: Por um ponto não pertencente a uma reta passam mais de uma reta paralela à reta dada.</p>	<p>Axioma: Por um ponto não pertencente a uma reta não é possível traçar nenhuma reta paralela à reta dada.</p>
---	---	--

=

=

=

<p>Geometria Euclidiana</p>	<p>Geometria Hiperbólica</p>	<p>Geometria Elíptica</p>
------------------------------------	-------------------------------------	----------------------------------

2.8. A criação de Modelos:

A visualização do que se passa quando trocamos o quinto postulado de Euclides pelas versões não Euclidianas, é feita por meio da construção de modelos.

É difícil de imaginar as situações descritas por essas geometrias. Para aceitar essas possibilidades, devem-se usar superfícies nas quais os axiomas sejam propriedades verdadeiras. Assim, três matemáticos desenvolveram alguns modelos consistentes do plano hiperbólico. O primeiro modelo foi desenvolvido por Eugenio Beltrami (1835-1900) a pseudo-esfera. Outro modelo foi criado pelo matemático Felix Klein (1849-1925). Henry-Poincaré (1854-1912), também matemático, produziu mais dois modelos.

Beltrami – (1835- 1900)

Beltrami foi o primeiro a introduzir um modelo para a geometria hiperbólica. Em 1868 em um artigo intitulado “Essay on na Interpretation of não – euclidean geometry “. Este modelo usa a pseudoesfera, superfície de revolução da curva denominada tratctriz em torno de sua assintota.

Klein-Félix (1849 – 1925)



Figura: 21

Klein foi um geômetra. Ele publicou em 1871 dois artigos sobre geometrias não euclidianas, onde introduziu um modelo completo para a geometria hiperbólica e dois modelos para a geometria elíptica, visto que o modelo de Beltrami, não era considerado totalmente adequado, pois representava apenas uma parte do plano hiperbólico, pois nesse modelo as retas hiperbólicas não poderiam ser estendidas ao infinito.

Os termos geometria Hiperbólica e geometria elíptica para as duas geometrias não euclidianas foram introduzidas por Klein.

Jules Henri Poincaré (1854 – 1912)



Figura: 22

É considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos, este detinha conhecimento profundo de todas as áreas da matemática.

Poincaré introduziu dois modelos para a geometria hiperbólica. Os modelos de Poincaré são os mais utilizados no estudo e no ensino da geometria hiperbólica, são conhecidos como modelo do semiplano superior e modelo do disco de Poincaré.

A geometria hiperbólica, por sua vez, deve ser representada por uma superfície com curvatura negativa.

A superfície usada é a da pseudo-esfera (modelo de Eugenio Beltrami), pois ela exibe as propriedades requeridas pela geometria hiperbólica, de curvatura negativa. Isto significa

que em qualquer ponto da pseudo-esfera, curvas se cruzam com curvaturas em sentidos opostos. É possível ver isso nas figuras abaixo, que mostra um modelo da pseudo-esfera.

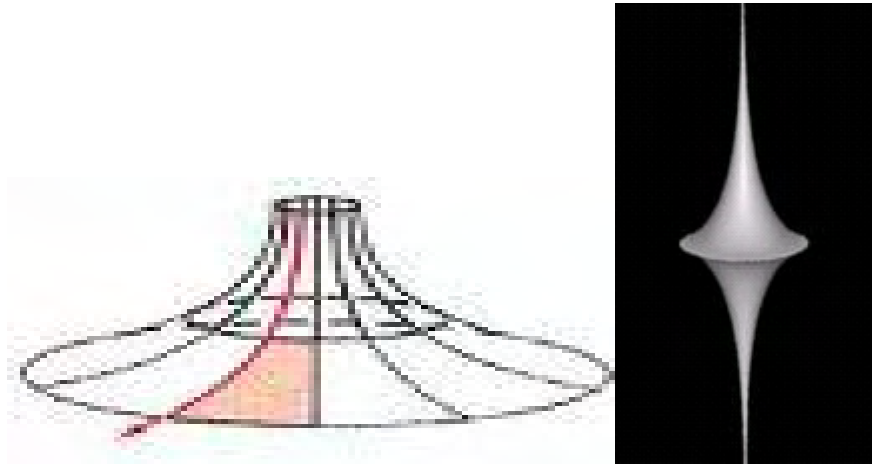


Figura: 23

A sela também atende aos requisitos da geometria hiperbólica.

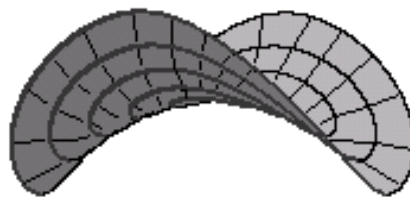


Figura: 24

Um modelo para o plano hiperbólico é o disco de Poincaré, o qual será descrito no capítulo 3.

CAPÍTULO 3: REFERENCIAL TEÓRICO

3.1 O modelo do disco de Poincaré

3.1.1. Plano, ponto e reta.

Henri Poincaré, ao estudar o plano hiperbólico conseguiu representá-lo sobre uma folha plana de papel, dentro de um círculo e na forma de um mapa, chamado disco de Poincaré. Faremos algumas considerações a respeito desse modelo. Considerados conhecidos os elementos básicos de geometria euclidiana, inicialmente, constrói-se uma circunferência C no plano.

A região convexa delimitada por essa circunferência é nomeada de *plano hiperbólico*. Os pontos ali localizados são denominados pontos do plano hiperbólico, e em nada diferem do plano euclidiano. Porém, não é o que acontece com uma reta. Assim, vamos definir *reta hiperbólica* (geodésica).

Por definição, temos que uma circunferência C é ortogonal a C' , se a intersecção de C e C' *contiver* dois pontos, e as tangentes, respectivamente, a C e a C' (nesses pontos de intersecção) forem perpendiculares.

As retas do plano hiperbólico serão, então, os arcos de circunferências C' , ortogonais a C , contidos no plano hiperbólico, juntamente com os segmentos de reta que contêm o centro e unem dois pontos de C , como pode ser visto na figura a seguir:

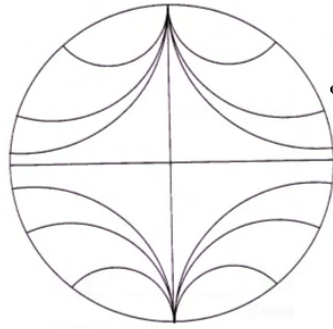


Figura: 25

Com esta definição, denota-se que o plano hiperbólico satisfaz os axiomas de Euclides, mas com a seguinte alteração na formulação do 5º axioma (das paralelas): “Dados uma reta do plano hiperbólico e um ponto fora da mesma, existe um número infinito de retas hiperbólicas que possui o dado ponto e não encontram a dada reta”.

3.1.2. Ângulos:

Se duas retas hiperbólicas interceptam-se num ponto A , a medida do ângulo formado entre elas é, por definição, a medida do menor ângulo formado pelas semi-retas euclidianas tangentes aos arcos (retas hiperbólicas) em A . Portanto, no modelo do disco de Poincaré, os ângulos entre as tangentes são medidos como no modelo euclidiano, utilizando-se as retas (euclidianas) tangentes aos arcos (retas-hiperbólicas) (GREENBERG, (1998) apud CABARITI 2004).

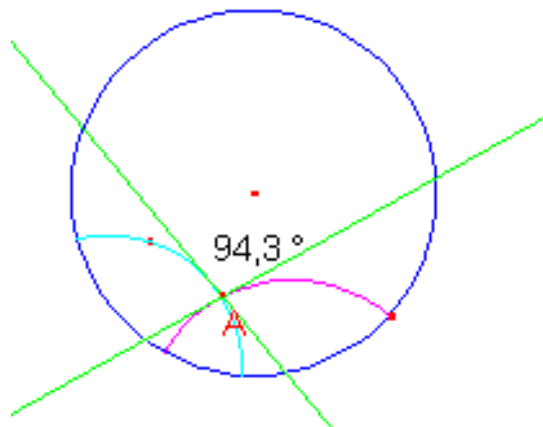


Figura: 26

3.2. Geometria Absoluta:

3.2.1. Axiomática de Hilbert:

Termos Primitivos:

Tp 1- Ponto

Tp 2 – Reta

Tp 3 – Plano

Relações Primitivas:

Rp 1- Estar em

Rp 2 – Entre

Rp 3 – Congruência

Axiomas de incidência:

AI 1- Para cada dois pontos P e Q , existe uma única reta que contém cada um dos dois pontos P e Q .

AI 2 - Sobre uma reta, existem pelo menos dois pontos.

AI 3 – Existem pelo menos três pontos não colineares.

Axiomas de ordem:

Ao 1- Se um ponto Q está entre um ponto P e um ponto R , então P, Q, R são três pontos distintos de uma reta, e Q está, também, entre R e P . Em símbolos: $P * Q * R$ ou $R * Q * P$.

Ao 2- Dados dois pontos P e R há sempre, pelo menos, um ponto Q sobre a reta PR tal que R está entre P e Q . Em símbolos: $P * R * Q$.

Ao 3 - Dados três pontos quaisquer de uma reta, apenas um deles está entre os outros dois.

Ao 4 - (Axioma de Pasch) Sejam P , Q e R três pontos não colineares e seja r uma reta no plano PQR , que não passa por nenhum dos pontos P , Q , R . Se a reta corta o segmento PQ , então cortará também os segmentos PR ou QR .

Axiomas de congruência:

Ac 1- Se P e Q são dois pontos de uma reta r e P' é um ponto de uma reta r' , então é sempre possível encontrar sobre a reta r' um ponto Q' , tal que o segmento PQ seja congruente ou igual ao segmento $P'Q'$. Em símbolos: $PQ \equiv P'Q'$.

Ac 2 - (transitividade) Se os segmentos $P'Q'$ e $P''Q''$ são congruentes com o mesmo segmento PQ , também o segmento $P'Q'$ é congruente com o segmento $P''Q''$.

Ac 3 - Sejam PQ e QR dois segmentos da reta r que tenham somente Q como ponto comum, e por outro lado $P'Q'$ e $Q'R'$ dois segmentos de uma outra reta s que tenham somente Q' como ponto comum: se $PQ \equiv P'Q'$ e $QR \equiv Q'R'$ então $PR \equiv P'R'$.

Ac 4 - Sejam dados um ângulo $\angle(h, k)$, uma reta a' e um dos lados determinados por a' , e representemos por h' uma semi-reta de a' que parte de O' : existe, então, uma e uma só semi-reta k' tal que o ângulo $\angle(h', k')$ seja congruente ou igual ao ângulo $\angle(h, k)$; utilizando símbolos: $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$ e tal que por sua vez todos os pontos interiores do ângulo $\angle(h', k')$ estão situados no lado dado em relação a'. Todo ângulo é congruente consigo mesmo.

Ac 5 – Dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, se as congruências $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$, se verificam, então, tem-se sempre, também, que $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$.

Axiomas de continuidade:

Ct 1- (Axioma de Arquimedes): Se PQ e RS são segmentos quaisquer, então existe um número natural n tal que n segmentos congruentes a RS construídos continuamente a partir de P sobre a semi-reta PQ , conterá o ponto Q .

Ct 2 - (Axioma da Continuidade Circular): Se uma circunferência C tem um ponto no interior e um ponto no exterior de outra circunferência C' , então as duas circunferências se cortam em dois pontos.

Ct 3- (Axioma da Continuidade Elementar): Se uma extremidade de um segmento de reta está no interior de uma circunferência e a outra extremidade no exterior, então o segmento corta a circunferência em um ponto.

Termos Definidos :

D 1- Os pontos que estão situados entre P e Q chamam-se os pontos do **segmento** PQ ou QP .

D 2- Toda a reta é dividida por qualquer dos seus pontos em duas **semi-retas**.

D 3- A duas semi-retas h e k que partem de um ponto P e que não formam uma reta, damos o nome de **ângulo** e o designamos por $\sphericalangle(h, k)$ ou $\sphericalangle(k, h)$.

D 4- Dadas duas semi-retas h e k , os pontos do plano que em relação a h estão no mesmo lado que k , e ao mesmo tempo estão no mesmo lado que h em relação a k denominam-se pontos interiores do ângulo $\sphericalangle(h, k)$ e formam o **espaço angular** [interior] deste ângulo.

D 5 - Um sistema de segmentos AB, BC, CD, \dots, KL chama-se uma **poligonal**, que une os pontos A e L ; esta poligonal também se designará abreviadamente por $ABCD \dots KL$. Os pontos do interior dos segmentos AB, BC, CD, \dots, KL , assim como os pontos A, B, C, D, \dots, K, L chamam-se, todos eles, os **pontos da poligonal**. Em particular, se os pontos A, B, C, D, \dots, K, L estão todos num plano e se, além disso, o ponto L coincide com o ponto A , então a poligonal chamar-se-á um **polígono** e designar-se-á por polígono $ABCD \dots K$. Os segmentos AB, BC, CD, \dots, KL chamam-se, também, os **lados do polígono**. Os pontos A, B, C, D, \dots, K são denominados de **vértices do polígono**. Polígonos com 3, 4, ..., n vértices chamam-se **triângulos, quadriláteros, ..., polígonos com n vértices (ou n -ângonos)**.

D 6 - Dois ângulos que têm o vértice e um lado comum, e cujos lados não comuns constituem uma reta, chamam-se **ângulos adjacentes suplementares**. Dois ângulos com o vértice comum em que cada lado de um deles constituindo com um dos lados do outro uma reta, chamam-se **ângulos verticalmente opostos**. Um ângulo que é congruente com um seu ângulo adjacente suplementar chama-se um **ângulo reto**.

D 7- Um **triângulo** ABC diz-se **congruente** com um triângulo $A'B'C'$, se são verificadas todas as congruências:

$$AB \equiv A'B', AC \equiv A'C', BC \equiv B'C', \sphericalangle A \equiv \sphericalangle A', \sphericalangle B \equiv \sphericalangle B' \text{ e } \sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'.$$

D 8 – É chamado de **ângulo obtuso** o ângulo que é maior que o seu ângulo adjacente suplementar, ou maior do que um ângulo reto; um ângulo que é menor do que o seu ângulo adjacente suplementar, ou do que um ângulo reto chama-se **ângulo agudo**.

D 9 - Os ângulos $\angle ABC$, $\angle BCA$ e $\angle CAB$ que pertencem a um triângulo ABC chamam-se os **ângulos** deste **triângulo**; os ângulos adjacentes suplementares chamam-se os seus **ângulos externos**.

D10- Duas retas dizem-se **paralelas** se estão num mesmo plano e não se interceptam.

D 11- Se M é um ponto qualquer de um plano a , então ao conjunto de todos aqueles pontos A , em a , para os quais os segmentos MA são congruentes entre si, chama-se **circunferência**; M chama-se **centro da circunferência** e MA é o **raio**.

3.3. Teoremas demonstrados sem o postulado das paralelas

T 1- (LAL) Dados os triângulos ABC e $A'B'C'$ se $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ e $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$, então os triângulos são congruentes.

T 2 - Por um ponto qualquer de uma reta existe uma única reta perpendicular à ela.

T 3- A soma das medidas de ângulos suplementares é igual a 180° .

T 4- Se uma reta é levantada sobre outra reta, formará com ela ou dois ângulos retos, ou ângulos cuja soma é igual a dois retos.

T 5- Se por um ponto C de uma reta \overline{AB} , traçarmos outras duas retas \overline{DC} e \overline{EC} , tais que D e E estejam em semi-planos opostos em relação à \overline{AB} e, ainda, se \overline{DC} e \overline{EC} formarem com \overline{AB} ângulos adjacentes suplementares, então \overline{DC} e \overline{EC} será uma única reta.

T 6- Se uma reta intercepta outras duas formando com ela ângulos alternos internos iguais entre si, as duas retas são paralelas.

T 7- Se uma reta s intercepta outras duas r , t , formando um ângulo externo congruente ao interno oposto da mesma parte, ou também os dois internos da mesma parte iguais a dois retos, então s e r são paralelas.

T 8- Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes.

T 9 - Se a soma das medidas de dois ângulos adjacentes é 180° , então os lados são alinhados.

T 10 (LLL) Dados os triângulos ABC e $A'B'C'$ se $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ e $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, então os triângulos são congruentes.

T 11- (ALA) Dados os triângulos ABC e $A'B'C'$ se $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, $AB \cong A'B'$ e $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$, então os triângulos são congruentes.

T 12- Dado um triângulo ABC , traça-se a reta que passa pelos pontos médios de dois de seus lados \overline{DE} . Traçando ainda por B e C perpendiculares à reta \overline{DE} , que a interceptem, respectivamente, nos pontos F e G . Nestas condições temos que:

1- \overline{DE} é paralelo ao lado \overline{BC} do triângulo.

2- $\overline{BF} = \overline{CG}$.

3- $m(\hat{E}BF) + m(\hat{DC}G) = m(\hat{B}AC)$.

T 13- A soma de dois quaisquer ângulos de um triângulo é menor que 180°

T 14- Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.

T 15- (LAAo) Dados os triângulos ABC e $A'B'C'$ se $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ e $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$, então os triângulos são congruentes.

T 16 - Para cada dois pontos P e R existe sempre pelo menos um ponto S sobre a reta PR , que está entre P e R .

3.4. Axiomas, definições e teoremas da geometria hiperbólica:

3.4.1. Axiomas hiperbólicos

Axioma Hiperbólico 1 – Seja r uma reta qualquer e P um ponto fora desta reta. Sempre existem duas semi-retas s_1 e s_2 que partem de P e não constituem uma só reta e que não cortam r , mas toda semi-reta que parte de P e situada no espaço angular formado por s_1 e s_2 corta a reta r .

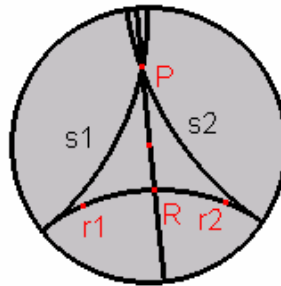


Figura: 27

3.4.2. Definições da geometria Hiperbólica.

DH 1- Suponhamos uma reta r dividida por qualquer dos seus pontos R em duas semi-retas r_1 e r_2 , e estando as semi-retas s_1 e r_1 de um lado da reta \overline{PR} e s_2, r_2 do outro lado da mesma reta, dizemos que a semi-reta s_1 é paralela à semi-reta r_1 , e, analogamente, a semi-reta s_2 é paralela a r_2 . As duas semi-retas s_1 e s_2 são paralelas à reta r .

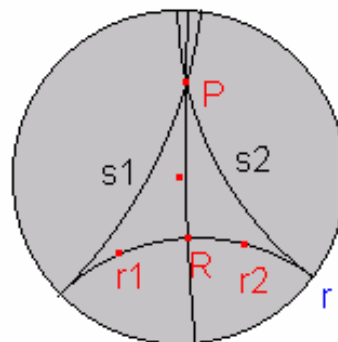


Figura: 28

DH 2- Toda semi-reta determina um sentido e todas as semi-retas paralelas entre si determinam um mesmo sentido. Uma semi-reta que parte de A com o sentido α será

designada em geral por (A, α) . Uma reta tem sempre dois sentidos. Em geral uma reta cujos sentidos são α e β é designada por (α, β) .

Sentido de paralelismo: a semi-reta s_2 é paralela a r_2 à direita, assim como a reta s_1 é paralela à semi-reta r_1 à esquerda. Ainda, por P, passam as paralelas à reta r (s_1, s_2) sendo s_1 paralela à esquerda e s_2 paralela à direita.

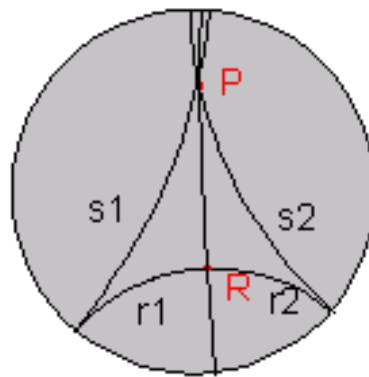


Figura: 29

Há dois tipos de paralelas:

- As duas paralelas à reta r, pelo ponto P. (s e t).
- as infinitas paralelas (m) que passam por P e por um ponto (O) no interior do ângulo $\angle XPZ$.

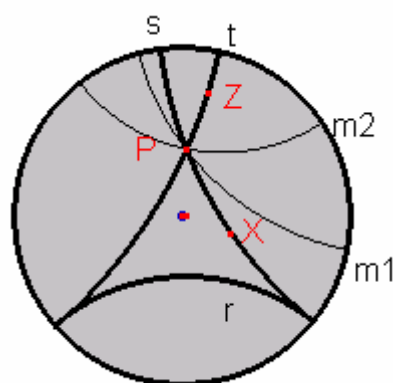


Figura: 30

DH 3 - As retas s e t , paralelas à reta r pelo ponto P , são chamadas assintóticas. As retas determinadas por P e por um ponto situado no interior de $\angle XPZ$ são chamadas paralelas divergentes por P em relação à reta r . As retas determinadas por P e por um ponto situado no interior de $\angle YPY$ são secantes à reta r .

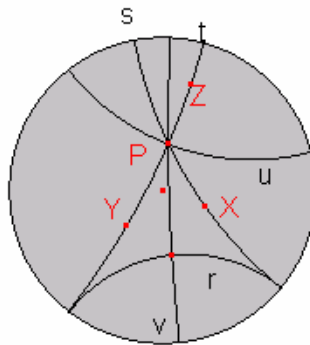


Figura:31

DH 4- As retas s e t são paralelas assintóticas à reta r por P . O ângulo formado pela perpendicular à reta r por P forma com as retas s e t ângulos denominados **Ângulos de Paralelismo**.

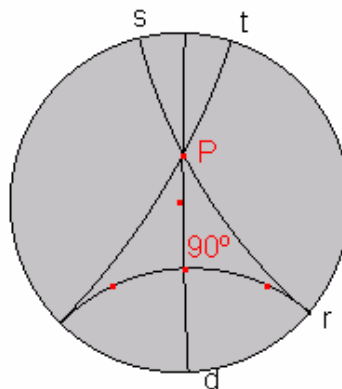


Figura: 32

DH 5: Se dos extremos de um segmento de reta \overline{PQ} forem traçadas duas retas paralelas assintóticas num determinado sentido, e tomando-se um ponto qualquer de cada reta posicionados no lado do paralelismo (S e R), a figura $SPQR$ é chamada de **biângulo** e o segmento dado é a sua base.

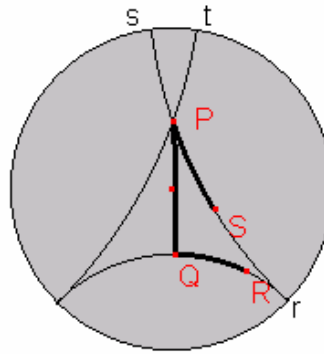


Figura: 33

DH 6: Um **quadrilátero de Saccheri** é um quadrilátero no qual dois de seus lados opostos são congruentes e perpendiculares a um outro seu lado, chamado de base. O lado oposto à base é chamado topo.

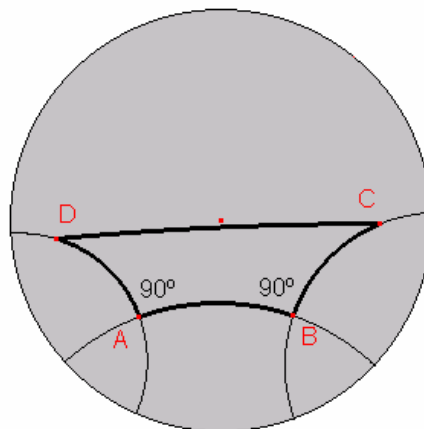


Figura: 34

\overline{AB} : base (perpendicular comum à \overline{AD} e \overline{BC})

\overline{CD} : topo

$\overline{AD} \cong \overline{BC}$: lados opostos congruentes

Ângulos da base: $\hat{A} \cong \hat{B}$ (retos)

Ângulos do topo: \hat{C} e \hat{D} .

DH 7: Um **quadrilátero de Lambert** é um quadrilátero com três ângulos internos retos.

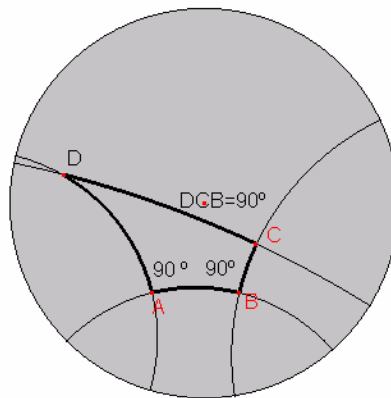


Figura: 35

DH 8 – Na geometria hiperbólica, duas retas paralelas não têm um ponto comum, porém se diz que se encontram num ponto ideal.

Ponto ideal – ponto de encontro de duas retas paralelas.

DH 9 - Triângulos ômega: A geometria hiperbólica permite a existência de triângulos com um ou mais vértices em pontos ideais. Estes são chamados de **triângulos ômega**.

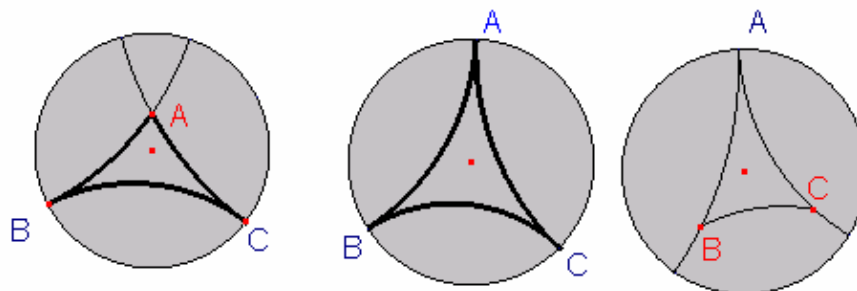


Figura: 36

DH 10 - Circunferência é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de um ponto fixo denominado centro e que está inteiramente contido no plano hiperbólico.

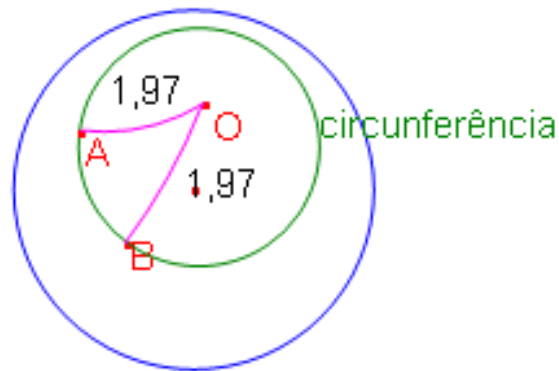


Figura: 37

DH 11 – Feixes de retas

Na geometria hiperbólica existem dois tipos de feixes: o feixe de retas paralelas e o feixe de retas não secantes.

Tipo I: feixe constituído de todas as retas do plano perpendiculares a uma mesma reta.

Hipercírculo ou **curva equidistante**, é a trajetória ortogonal de um feixe de retas com uma perpendicular comum, é o lugar geométrico dos pontos equidistantes a linha base do feixe, que estão do mesmo lado em relação a ela. Na figura o arco $P'R'S'$ é um hipercírculo, tendo como linha base a reta a . As retas p, q, r, s pertencem ao feixe.

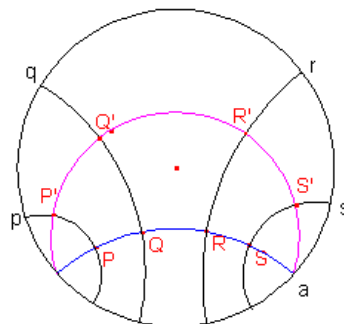


Figura: 38

Tipo II - feixe constituído de todas as retas do plano paralelas entre si no mesmo sentido.

Horocírculo ou curva limitante é a trajetória ortogonal de um feixe de retas com vértice num ponto ideal, é o lugar geométrico dos pontos equidistantes do ponto ideal (P).

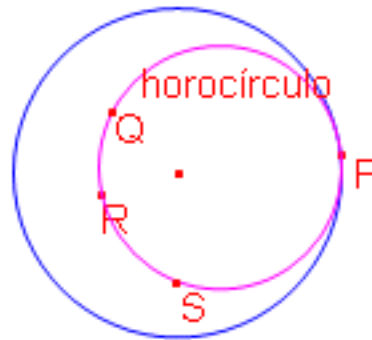


Figura: 39

DH 12: A **deficiência** (defeito ou diferença) de um triângulo qualquer $\triangle ABC$ é a diferença entre 180° e a soma das medidas dos seus ângulos internos.

$$d = 180^\circ - [m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C})].$$

3.4.3. Teoremas da Geometria Hiperbólica.

TH 1: Dados uma reta qualquer r e um ponto P fora desta reta. Passam pelo ponto P as retas s e t , paralelas à reta r . Toda reta q que passa por P , e por um ponto qualquer O , situado no espaço angular formado por XPZ , é paralela à reta r .

Demonstração:

a) As retas s e t são paralelas à reta r pelo ponto P , e q passa por P e pelo ponto O situado no interior de $\angle XPZ$. (hipótese)

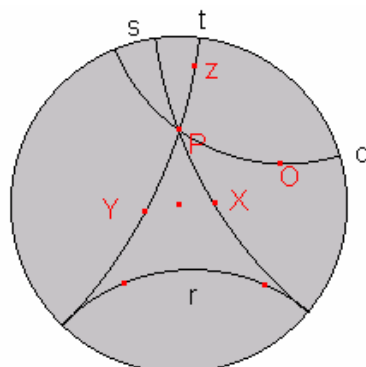


Figura: 40

b) Suponhamos que a reta q não seja paralela à reta r . (negação da tese)

c) A reta r é interceptada por q no ponto qualquer Q .

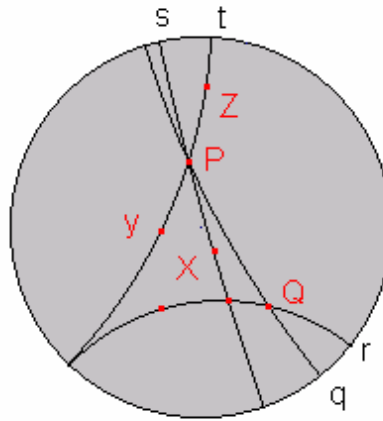


Figura: 41

d) Baixemos a perpendicular à reta r por P e designemos de R o ponto de intersecção entre a reta r e a perpendicular traçada.

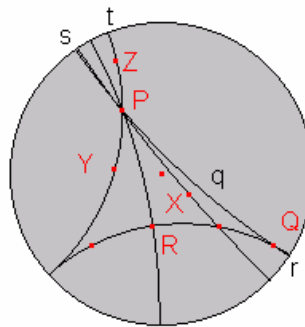


Figura: 42

e) X é interno ao $\triangle PQR$, temos que \overline{PX} intersecta a reta r .

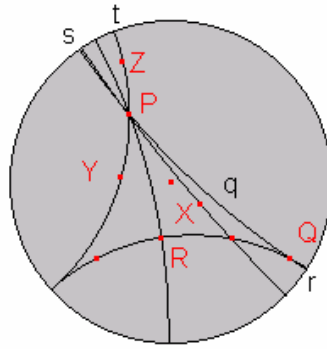


Figura: 43

f) Porém, \overline{PX} (reta s) não intersecta a reta r (hipótese). Portanto $q \parallel r$.

TH 2- Dada uma reta r e um ponto P não situado em r, para cada sentido existe uma única reta assintótica em relação à reta r pelo ponto P.

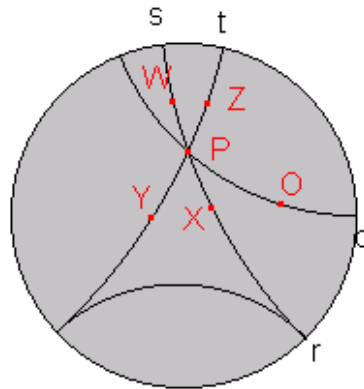


Figura: 44

Demonstração:

- Dados a reta r, o ponto P não situado em r, e as paralelas assintóticas, s e t, respectivamente à direita e à esquerda da reta r por P.
- Suponhamos existir, além de s, outra paralela q assintótica à reta r por P, à direita.
- Baixemos uma perpendicular à reta r por P, e denominemos sua intersecção com r de Q.
- Observamos uma das seguintes situações:

1- q está no interior do ângulo sPQ

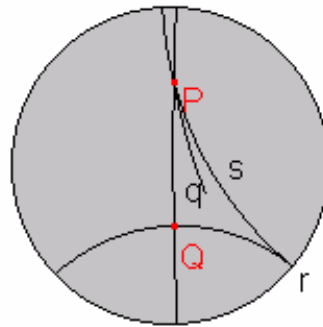


Figura: 45

2- s está no interior do ângulo qPQ .

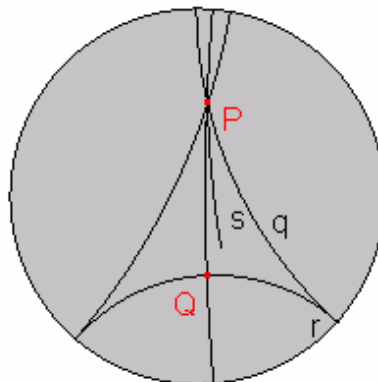


Figura: 46

e) No caso 1, a reta q encontraria r , pois q seria uma reta secante à reta r .

f) No caso 2, a reta s encontraria r , pois s seria uma reta secante à reta r . Contradição. Logo a reta s é única.

- O mesmo pode ser provado para o outro sentido (à esquerda).

Teorema hiperbólico 3: As paralelas assintóticas s e t em relação à reta r por P formam ângulos congruentes com a perpendicular baixada de P à reta r . Os ângulos de paralelismo são congruentes e agudos.

Demonstração:

a) Sejam s e t as paralelas assintóticas à reta r por P , $\hat{X}PQ$ e $\hat{Y}PQ$ os ângulos de paralelismo, com $\overline{PQ} \perp r$.

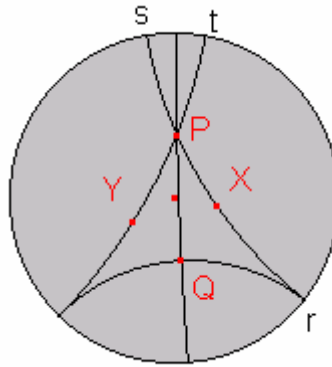


Figura: 47

b) Demonstraremos que $\hat{X}PQ = \hat{Y}PQ$:

1- Suponhamos $\hat{Y}PQ > \hat{X}PQ$. (negação da tese).

2 - Tracemos \overline{PR} tal que: $\hat{Q}PR = \hat{X}PQ$.

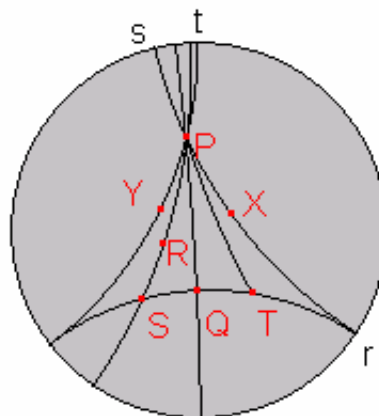


Figura: 48

3 - $\hat{Y}PQ > \hat{Q}PR$.

4- \overline{PR} está no interior de $\hat{Y}PQ$.

5 - \overline{PR} não é paralela a reta r por P (t é paralela assintótica e \overline{PR} está 'abaixo' dela, o que significa que \overline{PR} é secante à reta r).

6 - Prolonguemos \overline{PR} até intersectar a reta r no ponto S.

7- Tomemos T em r tal que $\overline{QS} \equiv \overline{QT}$ e tracemos \overline{PT} .

8- $\triangle PSQ \equiv \triangle PTQ$, pois $\overline{QS} \equiv \overline{QT}$ (por construção), $\widehat{PQS} \equiv \widehat{PQT}$ (retos) e \overline{PQ} (comum).

9- $\widehat{QPR} \equiv \widehat{QPT}$.

10 - $\widehat{XPQ} \equiv \widehat{QPT}$.

11- Mas, $\widehat{XPQ} > \widehat{QPT}$.

12 - Contradição. Logo \widehat{YPQ} não é maior \widehat{XPQ} .

c) - Da mesma forma podemos supor $\widehat{YPQ} < \widehat{XPQ}$ e provarmos que \widehat{XPQ} não é maior que \widehat{YPQ} , sendo, portanto, congruentes ($\widehat{XPQ} \equiv \widehat{YPQ}$).

d) Demonstremos que \widehat{XPQ} e \widehat{YPQ} são agudos.

1- Se supormos \widehat{XPQ} e \widehat{YPQ} retos, as retas s e t formariam uma única reta.

3- Porém, s e t são retas distintas, logo \widehat{XPQ} e \widehat{YPQ} não são retos.

4- Suponhamos que \widehat{XPQ} e \widehat{YPQ} sejam obtusos.

5- Traça-se a reta \overline{PF} tal que \widehat{FPQ} seja reto.

6- $\widehat{XPQ} > \widehat{FPQ}$.

7- \overline{PP} passará pelo interior do ângulo $\hat{X}PQ$.

9- Logo \overline{PP} intersecta a reta r.

10- Mas \overline{PP} é paralela à reta r por P.

11- Contradição. Logo, $\hat{X}PQ$ e $\hat{Y}PQ$ não são obtusos.

e) Portanto, os ângulos $\hat{X}PQ$ e $\hat{Y}PQ$ são agudos, uma vez que não são nem retos nem obtusos.

Teorema hiperbólico 4- Uma reta s paralela assintótica a uma reta r por um ponto P, em um determinado sentido, também o será em cada um de seus pontos, no mesmo sentido do paralelismo.

Teorema hiperbólico 5- Se uma reta r é paralela assintótica a uma reta s, então, a reta s é paralela assintótica à reta r.

Teorema hiperbólico 6- Se uma reta s é paralela divergente a uma reta r, então, a reta r é paralela divergente à reta s.

Teorema hiperbólico 7- Se duas retas t e s são paralelas assintóticas à uma reta r, na mesma direção, então, são paralelas entre si.

Teorema Hiperbólico 8- Uma reta paralela assintótica s, em relação a uma reta r, se aproxima de r, no sentido do paralelismo.

Teorema Hiperbólico 9 – Duas retas que não se interceptam apresentam uma única perpendicular comum.

Teorema hiperbólico 10- Uma reta s paralela divergente a uma reta r por um ponto P, também o será por qualquer outro seu ponto.

TH 11: Em um biângulo, o ângulo externo é maior que o ângulo oposto.

TH 12: Se duas retas interceptadas por uma transversal formar ângulos, nos quais se pode

verificar uma das oito relações abaixo, então, as retas são paralelas divergentes.

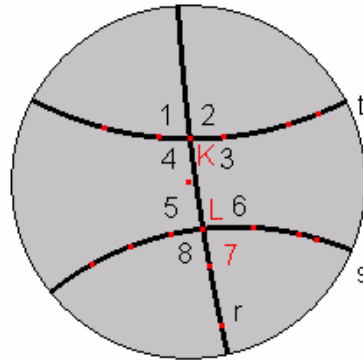


Figura: 49

Relações: $\hat{1} \cong \hat{7}$; $\hat{2} \cong \hat{8}$; $\hat{3} \cong \hat{5}$; $\hat{4} \cong \hat{6}$; $\hat{1} \cong \hat{5}$; $\hat{2} \cong \hat{6}$; $\hat{3} \cong \hat{7}$ e $\hat{4} \cong \hat{8}$.

Obs: $m(\hat{1}) + (\hat{8}) = m(\hat{2}) + (\hat{7}) = m(\hat{3}) + (\hat{6}) = m(\hat{4}) + (\hat{5}) = 180^\circ$.

TH 13: Se dois biângulos apresentam um ângulo interno e a base congruentes, então, eles são congruentes.

TH 14: (A-A) Se dois biângulos apresentam os ângulos correspondentes congruentes, então, eles são congruentes.

TH 15: A reta que une os pontos médios do topo e da base de um quadrilátero de Sacheri é perpendicular a ambos; os ângulos do topo são congruentes.

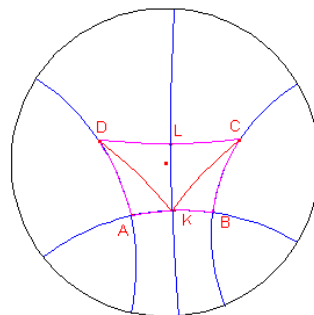


Figura: 50

$\hat{D} \cong \hat{C}$; K e L são pontos médios respectivamente de \overline{AB} e \overline{CD} ; $\overline{KL} \perp \overline{AB}$; $\overline{KL} \perp \overline{DC}$

Demonstração:

a) Seja $\square ABCD$ um quadrilátero de Saccheri, sendo \overline{AB} a base e sejam K e L os pontos médios respectivamente de \overline{AD} e \overline{BC} (hipótese).

b) Demonstraremos que os ângulos do topo são congruentes ($\hat{D} \cong \hat{C}$ ou $\hat{ADC} \cong \hat{BCD}$)

1- Tracemos \overline{KL} , \overline{CK} e \overline{DK} .

2- $\triangle ADK \cong \triangle BCK$, pois $\overline{AK} \cong \overline{BK}$ (hipótese); $\hat{A} \cong \hat{B}$ e $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.

3- $\overline{CK} \cong \overline{DK}$ e $\hat{ADK} \cong \hat{BCK}$.

4 - $\triangle CKL \cong \triangle DKL$, pois $\overline{CK} \cong \overline{DK}$; $\overline{CL} \cong \overline{DL}$ (hipótese) e \overline{KL} (comum).

5 - $\hat{KDL} \cong \hat{KCL}$.

6- $m(\hat{ADK}) + m(\hat{KDL}) = m(\hat{BCK}) + m(\hat{KCL})$.

7- $\hat{ADC} \cong \hat{BCD}$

c) Demonstraremos que \overline{KL} é perpendicular à base \overline{AB} .

1- $\hat{DKL} \cong \hat{CKL}$, $\hat{AKD} \cong \hat{BKC}$.

2- $m(\hat{AKD}) + m(\hat{DKL}) = m(\hat{CKL}) + m(\hat{BKC})$.

3- $m(\hat{AKL}) = m(\hat{BKL})$.

4- \hat{AKL} e \hat{BKL} são congruentes e suplementares.

5- Logo \hat{AKL} e \hat{BKL} são retos.

6- $\overline{KL} \perp \overline{AB}$.

d) Para demonstrar que \overline{KL} é perpendicular ao topo \overline{CD} , usa-se o mesmo raciocínio anterior.

Como $\triangle ACKL \cong \triangle ADKL$, prova-se que os ângulos $\overset{\circ}{\angle} CLK$ e $\overset{\circ}{\angle} DLK$ são congruentes e retos.

TH 16: A base e o topo de um quadrilátero de Saccheri fazem parte das retas que não se interceptam, ou seja, são paralelas divergentes, e também o são os outros dois lados.

TH 17: Os ângulos do topo de um quadrilátero de Saccheri são agudos.

Demonstração:

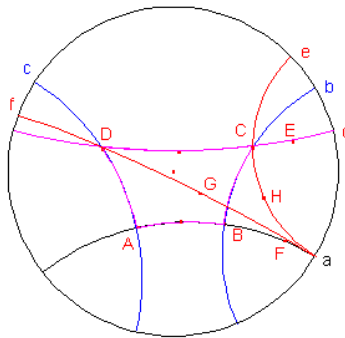


Figura: 51

1- Consideremos o $\square ABCD$ um quadrilátero de Saccheri, de base \overline{AB} e topo \overline{DC} .

2- Prolonguemos \overline{DC} e \overline{AB} e tomemos E e F dois pontos quaisquer do prolongamento de, respectivamente, \overline{DC} e \overline{AB} . Tracemos as retas \overline{DG} e \overline{CH} paralelas assintóticas à reta \overline{AB} , no sentido de F (no caso, à direita), respectivamente, por D e por C.

3- Analisaremos se \overline{DG} e \overline{CH} estão sob a reta DCE.

3.1- DCE é paralela divergente à ABF por D.

3.2 - \overline{DG} é paralela assintótica à ABF por D.

3.3 - \overline{DG} está no espaço angular EDA.

3.4 - Analogamente \overline{CH} está no espaço angular ECB.

4 - \overline{CH} e \overline{DG} são paralelas assintóticas entre elas, no mesmo sentido em que são paralelas assintóticas em relação à \overline{AB} (no caso, à direita).

5 - Logo $\square HCDG$ é um biângulo de base \overline{CD} .

$$6 - \hat{CDG} < \hat{ECH}.$$

7 - $\square GDAF$ e $\square HCBF$ são biângulos.

$$8 - \hat{DAF} \equiv \hat{CBF} \text{ (retos) e } \overline{DA} \equiv \overline{CB}.$$

$$9 - \hat{GDA} \equiv \hat{HCB}.$$

10 - Como $\hat{CDG} < \hat{ECH}$, somando \hat{GDA} em ambos os membros, temos que $m(\hat{CDG}) + m(\hat{GDA}) < m(\hat{ECH}) + m(\hat{GDA})$, ou ainda podemos substituir \hat{GDA} por \hat{HCB} , obtendo $m(\hat{CDG}) + m(\hat{GDA}) < m(\hat{ECH}) + m(\hat{HCB})$. Ou seja, $m(\hat{CDG}) < m(\hat{ECB})$.

$$11 - \text{Mas, } \hat{CDA} \equiv \hat{DCB}.$$

$$12 - \text{Então, } \hat{DCB} < \hat{ECB}.$$

$$13 - m(\hat{DCB}) + m(\hat{ECB}) = 180^\circ.$$

$$14 - m(\hat{DCB}) < 90^\circ.$$

$$15 - m(\hat{CDA}) < 90^\circ.$$

Logo temos que $m(\hat{DCB}) < 90^\circ$.

TH 18: O ângulo não reto de um quadrilátero de Lambert é agudo.

TH 19: Seja um quadrilátero $\square ABCD$, com \hat{A} e \hat{B} retos e $\overline{AD} < \overline{BC}$. Então, temos que $\hat{D} > \hat{C}$.

TH 20: Seja um quadrilátero $\square ABCD$, com \hat{A} e \hat{B} retos e $\overline{AD} > \overline{BC}$. Então, temos que $\hat{D} < \hat{C}$.

TH 21: Seja um quadrilátero $\square ABCD$, com \hat{A} e \hat{B} retos e $\hat{C} < \hat{D}$. Então, temos que $\overline{BC} > \overline{AD}$.

TH 22: Seja $\square ABCD$ um quadrilátero de Lambert, com ângulos em \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} retos, temos que os lados adjacentes à D (ângulo agudo) são maiores do que seus respectivos lados opostos.

TH 23: Seja $\square ABCD$ um quadrilátero de Saccheri, de base \overline{AB} , temos que $\overline{DC} > \overline{AB}$, ou seja, o topo é maior que a base.

- **TH 24:** A soma dos ângulos internos de um triângulo $\triangle ABC$ é menor que 180° , ou seja, $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) < 180^\circ$.

Demonstração:

1 - Consideremos o $\triangle ABC$. (hipótese)

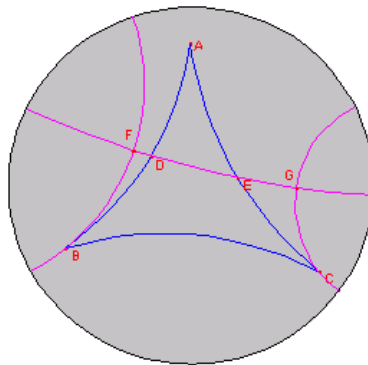


Figura: 52

2 - Sejam D e E os pontos médios respectivamente de \overline{AB} e \overline{AC} . Tracemos \overline{DE} .

3 - Tracemos por B a perpendicular à reta \overline{DE} , que a encontra no ponto F. Do mesmo modo, tracemos por C a perpendicular à reta \overline{DE} , que a encontra em G.

4 - O quadrilátero $\square GFBC$ é um quadrilátero de Saccheri, sendo de base \overline{FG} .

5 - $m(\hat{FBC}) + m(\hat{GCB})$ é igual à soma dos ângulos internos de $\triangle ABC$.

6- $m(\hat{FBC}) < 90^\circ$ e $m(\hat{GCB}) < 90^\circ$.

7 - $m(\hat{FBC}) + m(\hat{GCB}) < 180^\circ$.

8 – Portanto, a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180° .

TH 25: A soma dos ângulos internos de um quadrilátero $\square ABCD$ é menor que quatro ângulos retos, ou seja, $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + m(\hat{D}) < 360^\circ$.

TH 26: (AAA) Se dois triângulos apresentam respectivamente iguais os três ângulos internos, então, os triângulos são congruentes.

TH 27: A medida de um ângulo externo de um triângulo é maior que a soma das medidas dos ângulos alternos não adjacentes a ele.

TH 28: A medida de um ângulo inscrito em um círculo é menor do que a metade da medida do ângulo central correspondente. Temos que considerar três casos:

1º caso: O é interno ao ângulo.

2º caso: O está num lado do ângulo.

3º caso: O é externo ao ângulo.

TH 29: As três retas perpendiculares nos pontos médios aos lados de um triângulo ou passam por um mesmo ponto, ou são paralelas divergentes ou paralelas assintóticas num mesmo sentido.

TH 30: Tomando-se um ponto D do segmento \overline{AB} , de um triângulo $\triangle ABC$, a deficiência de $\triangle ABC$ é igual à soma das deficiências dos triângulos $\triangle ACD$ e $\triangle BCD$.

3.5. Tópicos de Geometria Euclidiana: Potência de Ponto, eixo radical, equipotência, inversão.

3.5.1. Potência de Ponto em relação a um círculo.

Potência do ponto P em função do raio m e da distância $d = PC$ ao centro da circunferência:

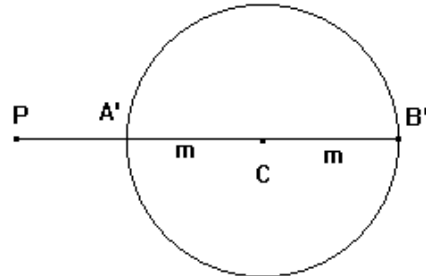


Figura: 53

$$Pot(PC) = PA' \cdot PB' = |d - m| \cdot (d + m) = |d^2 - m^2|$$

3.5.2. O eixo radical de dois círculos

Sejam dados dois pontos fixos B e C , e um comprimento d constante. Construir um triângulo retângulo de catetos d e y e hipotenusa x , como indicado na figura 54.

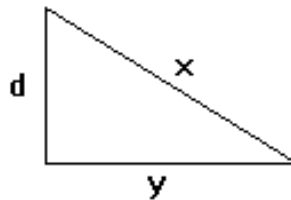


Figura: 54

Os arcos (B, x) e (B, y) (figura 55) determinam pontos A e A' , tal que as distâncias de A (A') ao ponto B é hipotenusa (x) e a distância de A (A') ao ponto C é cateto y do triângulo retângulo.

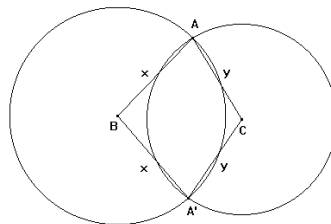


Figura: 55

As distâncias de (A, A') aos pontos B e C têm diferenças dos quadrados constantes:
 $x^2 - y^2 = d^2 = \text{constante}$.

Unindo B a C , e baixando a perpendicular por A a BC obtemos uma reta l , tal que todo ponto $A \in l$ tem a propriedade enunciada acima, conforme figura 56.

Prova: Seja A, B, C tal que $x^2 - y^2 = d^2$ e $A, A' \in l$,

figura 56.

$$\text{No } \triangle ABH \{x^2 = m^2 + (AH)^2 \quad (I)\}$$

$$\text{No } \triangle ACH \{y^2 = n^2 + (AH)^2 \quad (II)\}$$

$$\text{Subtraindo } (I) - (II), \text{ temos } x^2 - y^2 = m^2 - n^2$$

$$\text{Mas, por hipótese, } x^2 - y^2 = d^2$$

$$\text{Então, } m^2 - n^2 = d^2$$

$$\text{Temos, também: } \triangle A'BH \{ (x')^2 = m^2 + (A'H)^2 \quad]$$

$$\triangle A'CH \{ (y')^2 = n^2 + (A'H)^2$$

$$\text{E } (x')^2 - (y')^2 = m^2 - n^2 = d^2$$

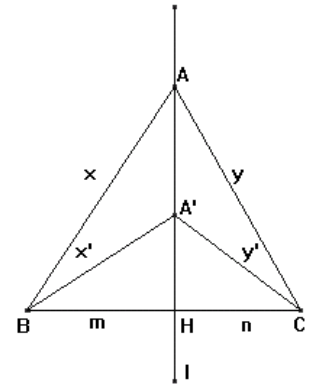


Figura: 56

Disso segue: O lugar geométrico (lg) dos pontos A , cujas distâncias a dois pontos fixos B e C variam, mas conservam, respectivamente, a diferença dos quadrados constantes, é uma reta perpendicular à reta BC (eixo radical).

3.5.3. Equipotência

Def.: Um ponto é dito *equipotente* em relação a duas circunferências quando sua potência (potência do ponto) é a mesma, tanto com relação a uma como com relação à outra.

O lugar geométrico (*lg*) dos pontos equipotentes com relação a duas circunferências é uma reta perpendicular à reta dos centros, e é denominado *eixo radical* (*e.r.*) dessas circunferências.

Prova: Seja P um ponto equipotente com relação às circunferências (B,b) e (C,c) . Sejam x e y as distâncias PB e PC , respectivamente (figura 57).

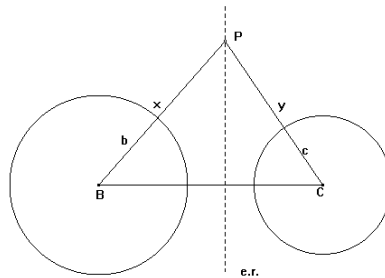


Figura: 57

$$\text{Então, } Pot(P, B) = |x^2 - b^2|$$

$$Pot(P, C) = |y^2 - c^2|$$

Como P é equipotente, devemos ter: $|x^2 - b^2| = |y^2 - c^2|$

Se $b > c$ obtemos:

$$x^2 - y^2 = b^2 - c^2$$

Tomando: $b^2 - c^2 = d^2$, temos:

$$x^2 - y^2 = d^2$$

Construção do (*e.r.*), dadas as circunferências (B,b) e (C,c) Construir um triângulo retângulo de hipotenusa b e cateto c , conforme figura 58. O outro cateto será d , pois:

$$b^2 - c^2 = d^2$$

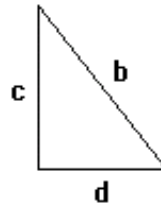


Figura: 58

Tendo os centros das circunferências B e C , e o comprimento d , construir a reta l (*e.r.*), como visto anteriormente.

Se P é o ponto da circunferência, sua potência é igual a zero.

De fato, se temos a circunferência (B, b) e $P \in (B, b)$, temos $PB = b = x$ e $Pot(P, B) = |b^2 - b^2| = 0$, figura 59.

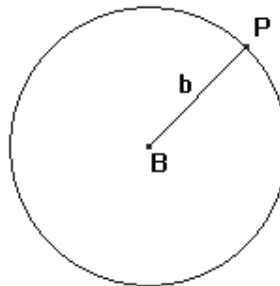


Figura: 59

Método Prático:

1º caso: As circunferências são secantes:

O eixo radical é a secante comum, pois os pontos secantes P e P' são equipotentes (potência nula), e dois pontos determinam uma reta (figura 60).

$$Pot(P, B) = Pot(P, C) = 0$$

$$Pot(P', B) = Pot(P', C) = 0$$

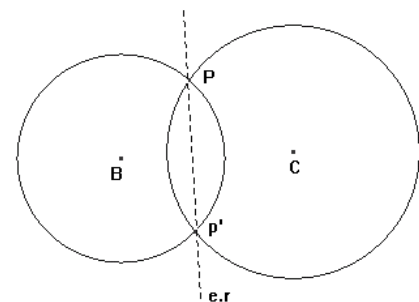


Figura: 60

2º caso: As duas circunferências são tangentes externas ou internamente (figura 61): O eixo radical é a tangente comum, pois o ponto de tangência é equipotente em relação às circunferências ($e.r. \perp BC$).

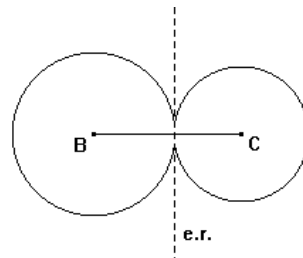


Figura: 61

3º caso: As duas circunferências não se encontram, podendo ser externas ou internas. Neste caso, recorremos a uma circunferência auxiliar de centro X que corta as duas outras. Os eixos radicais das circunferências de centros B e X , e das circunferências de centros de C e X se encontram num ponto P equipotente com relação às três circunferências. Logo, P pertence ao eixo radical das circunferências de centros B e C , que é perpendicular a BC (figura 62).

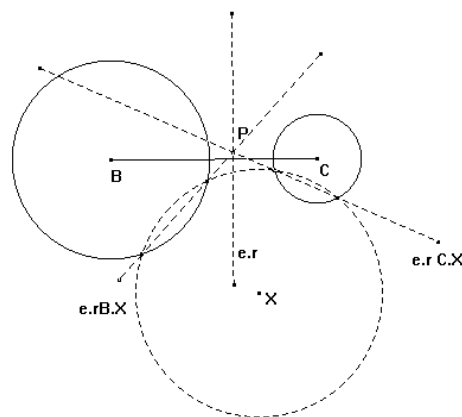


Figura: 62

Def.: Duas circunferências são ditas ortogonais quando se cortam, e os dois raios que incidem no mesmo ponto são perpendiculares entre si.

Caso Particular: O lg dos centros de circunferências ortogonais, simultaneamente a duas circunferências fixas, é o $e.r.$ delas.

Justificativa: Se a circunferência (A,a) é ortogonal às circunferências (B,b) e (C,c) , os raios a de A são tangentes às circunferências (B,b) e (C,c) . Como potência é tangente ao quadrado, o ponto A é equipotente.

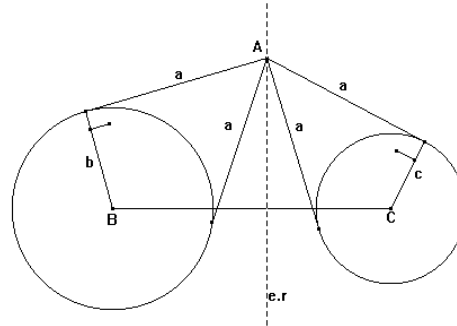


Figura: 63

$$Pot(A,B) = Pot(A,C) = a^2$$

Então, todo centro de circunferência ortogonal a (B,b) e (C,c) é equipotente com relação a (B,b) e (C,c) ; logo, pertence ao $e.r.$ de BC .

3.5.4. Inversão com respeito a uma circunferência

Def.: Dada uma circunferência (O,r) , definimos o inverso de qualquer ponto P (distinto de O) como sendo o ponto P' sobre a reta que passa por OP , cuja distância de O satisfaz a equação $OP.OP' = r^2$, conforme COXETER (1961).

Dizemos que os pontos P e P' são inversos em relação ao círculo (O,r) .

Se um dos pontos P ou P' está fora da circunferência, então, o outro está dentro, e vice-versa.

Construção: Para se construir o inverso de um dado ponto P , dentro do círculo de inversão, seja T o final da corda através de P , perpendicular a OP . Então, a tangente em T encontra OP (estendido) no ponto P' . Desde que os triângulos retângulos OPT e OTP' são

semelhantes e $OT = r$, temos: $\frac{OP}{r} = \frac{r}{OP'}$ ou $r^2 = OP.OP'$

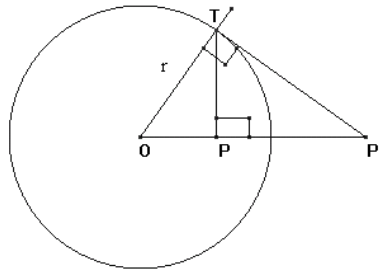


Figura: 64

Para a construção do inverso de um dado ponto P' , fora do círculo de inversão: seja T um dos pontos de intersecção deste círculo com o círculo de diâmetro OP' . Então, o procurado ponto P é o pé da perpendicular de T a OP' .

Teorema: Se uma circunferência (O', r') passa através de dois pontos distintos P e P' , inversos em relação a uma circunferência (O, r) , então as circunferências (O', r') e (O, r) são ortogonais.

Justificativa: Seja O e O' os centros das circunferências e A um de seus pontos de intersecção, figura 65. Desde que $AO = r$, e PP' são inversos, temos $OP \cdot OP' = (OA)^2 = r^2$, e, conforme a potência de ponto (já vista anteriormente), AO é tangente a (O', r') . Portanto, os raios OA e $O'A$ são perpendiculares; logo, essas circunferências são ortogonais.

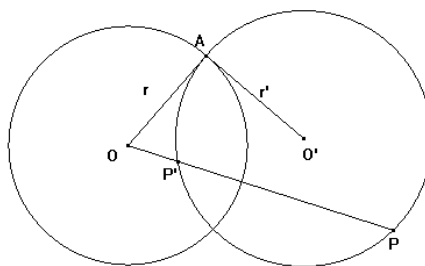


Figura: 65

CAPÍTULO 4: METODOLOGIA DA PESQUISA

Numa pesquisa sempre existe uma interrogação, ou seja, uma pergunta que motivou a investigação do assunto. Essa investigação deve ser feita de modo que propicie um avanço da área de conhecimento à qual se aplica.

A metodologia orienta os caminhos a serem seguidos e os instrumentos que serão utilizados, para se fazer a pesquisa.

Na pesquisa quantitativa, o pesquisador tem uma postura neutra diante dos dados, os quais são mensuráveis e tratados matematicamente. Os dados são obtidos de modo que possam ser transformados em números.

Por outro lado, na pesquisa qualitativa há interação entre o sujeito e o objeto. O contexto é considerado na significação da análise e o resultado da pesquisa se dá numa compreensão interpretativa dos dados.

Bogdan e Biklen (1994) apresentam cinco características que configuram esse tipo de estudo:

- 1) a fonte de dados é o ambiente natural e o investigador é o instrumento principal;
- 2) é descritivo;
- 3) os investigadores interessam-se mais pelo processo do que pelos resultados;
- 4) a análise dos dados tende a ser indutiva; e
- 5) o significado é de importância vital nessa abordagem.

O pesquisador busca compreender melhor o processo, mediante o qual as pessoas constroem os significados, para descrever em que consistem estes mesmos significados. Para tanto é necessário, que o pesquisador atue diretamente no ambiente de investigação, por meio do trabalho de campo.

O caráter descritivo da investigação qualitativa tem por objetivo a compreensão dos motivos, interesses e crenças, entre outros conhecimentos pessoais, por meio da interação entre o investigador e o grupo investigado. O pesquisador faz uso de uma grande quantidade

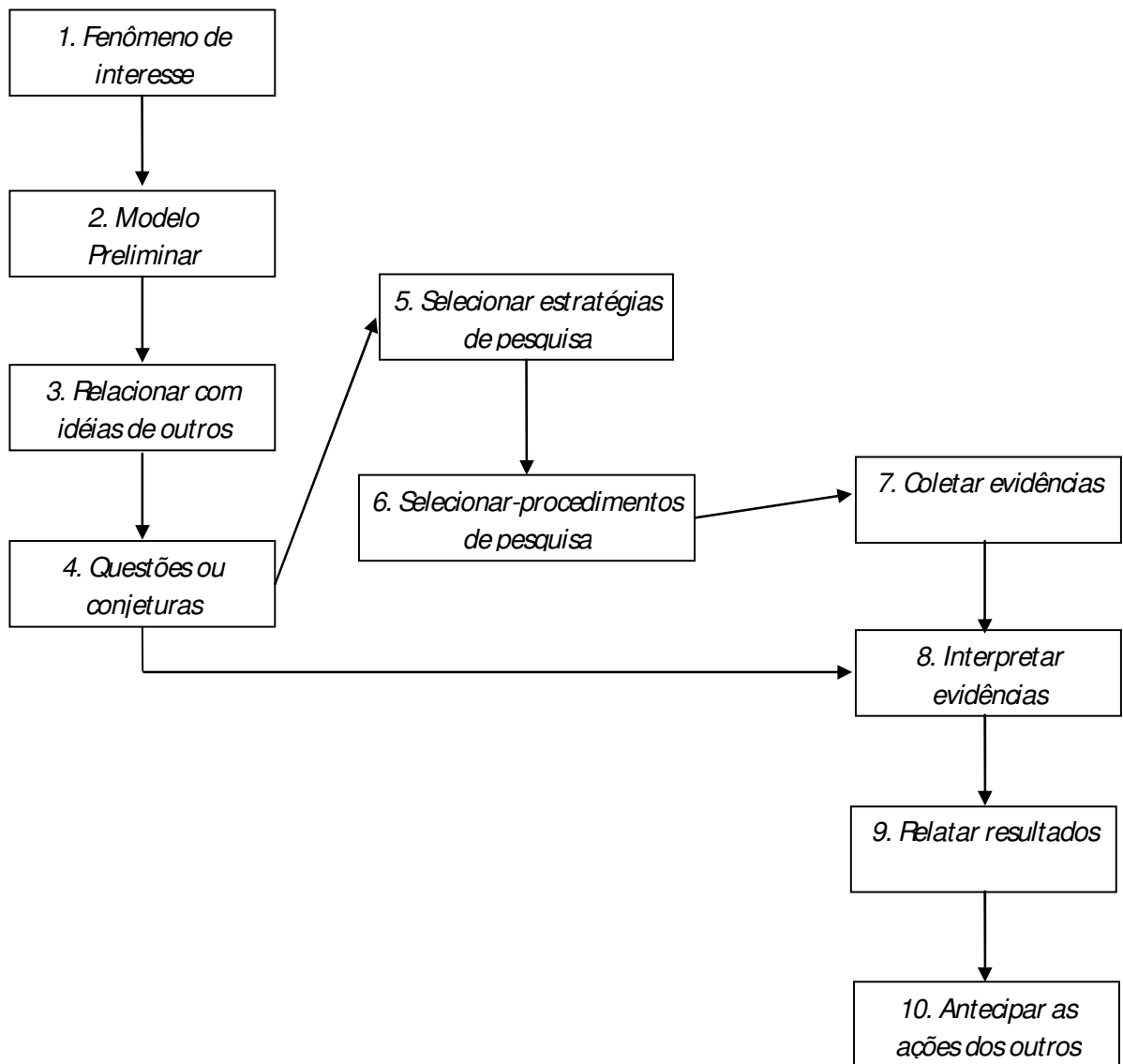
de dados descritivos, obtidos através de situações, pessoas, ambientes, depoimentos, dentre outros elementos, que são, posteriormente, por ele reconstruídos, observando que: “O objetivo principal do investigador é o de construir conhecimento e não o de dar opiniões sobre determinado contexto” (BOGDAN & BIKLEN, 1994).

O trabalho aqui desenvolvido engloba as características anteriormente relacionadas pelos pesquisadores BOGDAN & BIKLEN; portanto, ela pode ser considerada como uma investigação qualitativa.

Os dados obtidos na pesquisa de campo foram coletados das experiências dos participantes por meio de observações, anotações dos sujeitos, e do pesquisador e fotografias. Por existir uma preocupação com o contexto em que ocorriam, e para se ter uma boa compreensão, as ações foram observadas no seu ambiente habitual de ocorrência, em situações de contato direto.

Para melhor descrever a investigação, utilizamos as propostas metodológicas de (ROMBERG, 1992), o qual indica dez passos a serem seguidos numa pesquisa em Educação Matemática, conforme representação gráfica a seguir. Esse autor destaca dez procedimentos essenciais ao desenvolvimento de uma pesquisa, os quais não se realizam, necessariamente, nesta ordem e na prática, não se separam tão nitidamente.

4.1. O modelo de Romberg.



Fonte: (ROMBERG, 1992, p.51

O interesse e a relevância desse fenômeno foram justificados no início desse trabalho, o qual

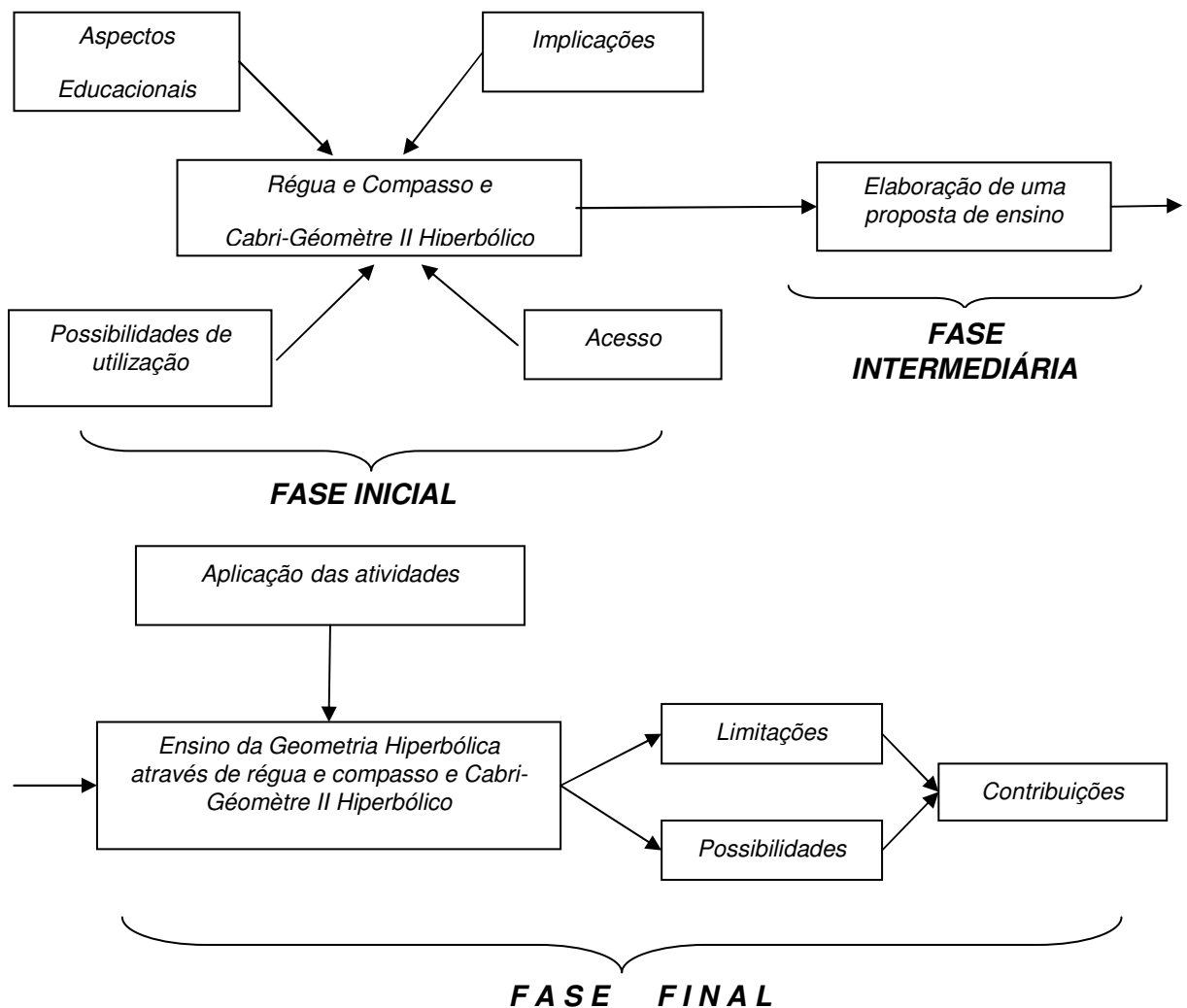
4.1.1. Identificando o fenômeno de interesse.

O fenômeno de interesse parte de uma curiosidade do pesquisador sobre uma questão que envolve a Educação Matemática.

Em nosso caso o interesse esta para O ensino da geometria Hiperbólica por meio de régua e compasso e do software Cabri- Géomètre II (menu- hiperbólico).

4.1.2. Modelo Preliminar

São as suposições sobre certos aspectos importantes, consiste em um esquema composto por variáveis do fenômeno e como estes estão relacionados. Abaixo apresentamos o modelo elaborado em relação à nossa pesquisa:



4.1.3. – Relacionando com idéias dos outros.

Segundo Romberg (1992), “Uma atividade importante é examinar o que outras pessoas pensam sobre um fenômeno, e determinar se suas idéias podem ser usadas para esclarecer, ampliar ou modificar o modelo proposto”. Dentre as pesquisas sobre Geometria Hiperbólica que tivemos acesso, encontramos investigações que contemplavam níveis bem elevados dessa geometria, e também, trabalhos que se voltavam para o desenvolvimento histórico dessa área de estudos, bem como abordavam essa área em ambientes informatizados, dentre os quais citaremos alguns:

BRITO, Arlete de Jesus. *Geometrias não-euclidianas: um estudo histórico-pedagógico*. 1995. 187f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Brito apresentou um estudo histórico-pedagógico onde fez a reconstituição histórica das geometrias não-euclidianas. Preocupou-se em apresentar o contexto filosófico e cultural, desde os gregos do séc. V a. C., até Kant no séc. XIX, apresentou alguns dos principais teoremas da geometria hiperbólica. O foco do trabalho é mostrar o contexto que possibilitou o surgimento de uma nova geometria.

CABARITI, Eliane. *Geometria Hiperbólica: uma proposta didática em ambiente informatizado*, 2004. 180f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

Esse trabalho visou contribuir para o processo de ensino e aprendizagem da Geometria Hiperbólica, com o uso do software Cabri-géomètre, para um curso de formação de professores de Matemática.

LINS, Geraldo Henrique Botelho. *Introdução à Geometria Hiperbólica: Semelhanças e Diferenças*. 2002. 200 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

O autor fez o estudo da geometria hiperbólica a partir dos Fundamentos de Geometria de Hilbert, apresentou os principais matemáticos envolvidos na descoberta da geometria hiperbólica. Estudou o plano hiperbólico, suas métricas e a trigonometria hiperbólica. Fez também uma comparação entre a geometria euclidiana e a hiperbólica.

PILLA, Eliane Cristina Geroli. *Construções de constelações de sinais geometricamente uniformes*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

O objetivo do trabalho foi construir constelações de sinais geometricamente uniformes no plano hiperbólico, usando pavimentações hiperbólicas.

Com a finalidade de poder contribuir para o desenvolvimento dessa área, e também, olhando as possibilidades de inserção desse assunto nos níveis fundamental e médio, optamos por realizar um estudo de conceitos iniciais de geometria hiperbólica como: ponto, reta, triângulos, quadriláteros e alguns teoremas dessa geometria, integrando o uso de régua, compasso e o software **Cabri-Géomètre II menu -hiperbólico**.

4.1.4. -Estabelecendo conjecturas.

As conjecturas são os questionamentos que dão encaminhamento à pesquisa.

A Geometria Hiperbólica é uma área que apesar de sua importância, não tem sido trabalhada mesmo em cursos de graduação. Por sua aplicabilidade na área de engenharia elétrica, consideramos o conjunto de conhecimentos sobre o assunto essencial para futuros engenheiros.

Com este estudo, buscamos colocar os aprendizes frente à outra geometria, diferente daquela que habitualmente trabalham, focando nosso interesse em transmitir para os mesmos, noções de plano, reta, quadriláteros, triângulos, subsidiando-os com conhecimentos que possam auxiliá-los na construção de pavimentações hiperbólicas para a transmissão de sinais, caso deem prosseguimento em suas carreiras na área de telecomunicações.

Nesse sentido, para o desenvolvimento de nosso trabalho, buscamos resposta para a seguinte questão:

“Como o uso de régua e compasso e do Software Cabri-Géomètre II podem contribuir no processo de ensino e aprendizagem da geometria hiperbólica?”

4.15. Selecionando estratégia geral de pesquisa.

Com o propósito de encontrar resposta à questão inicial, elaboramos atividades que contemplassem o ensino de alguns tópicos de Geometria Hiperbólica, conforme citamos acima, fazendo uso da régua, compasso e do software Cabri-Géomètre II hiperbólico, utilizando a metodologia da resolução de problemas.

Para o desenvolvimento e aplicação das atividades que se encontram detalhadas no capítulo 5, convidamos alunos do curso de engenharia elétrica da faculdade INTESP (Instituto Tecnológico do Sudoeste Paulista), situada na cidade de Ipaussu, interior do Estado de São Paulo.

Estes alunos foram convidados independentemente do período em que se encontravam na faculdade, visto que o curso de engenharia não era um pré-requisito. Optamos por alunos que não tinham nenhum conhecimento sobre esta geometria, e ainda, escolhemos alunos deste curso específico, pelo fato de que engenheiros podem atuar na área de telecomunicações, cujo campo podem fazer uso da Geometria Hiperbólica.

Nossa estratégia de pesquisa então foi aplicar as atividades a esse grupo de alunos, que se mostraram muito interessados em aprender esse tema, tendo compreensão de sua importância.

4.1.6. – Selecionar Procedimentos específicos de Pesquisa.

Primeiramente, consultamos a bibliografia sobre Geometria Hiperbólica, e com a intenção de poder contribuir para a expansão dessa área de estudos, observamos a necessidade de trabalhos que contemplassem esse campo de interesse. Preparamos as atividades, que foram elaboradas ou adaptadas às já existentes, com a finalidade de introduzir conceitos de geometria hiperbólica com o uso de régua, compasso e do software Cabri-Géomètre II hiperbólico, de forma a promover melhor compreensão e entendimento do assunto, visto que efetuando as construções gráficas por meio de dois modos diferentes, temos a possibilidade de reforço e assimilação dos temas abordados.

Na fase de aplicação das atividades, com o fim de recolher as informações, a pesquisadora atuava como professora e registrava os acontecimentos. Os registros se deram

por meio das anotações das atividades resolvidas pelos alunos, pelas anotações da pesquisadora e fotografias.

4.1.7. Coletando as informações.

A coleta das informações consistiu na observação dos sujeitos pela pesquisadora em cada reunião, que acontecia durante o segundo semestre de 2008.

Durante o desenvolvimento das atividades, fazíamos as observações e anotações das situações, que para nós eram significativas e que poderiam ajudar-nos a responder a questão inicial, apresentada na página 88.

4.1.8. – Interpretando as informações.

É o momento de organizar, categorizar e analisar as informações que foram coletadas.

A análise e a interpretação dos dados aconteciam também, de forma preliminar no momento de sua coleta, através de nossas observações, atentando aos acontecimentos de cada episódio, bem como, pela leitura das anotações dos sujeitos, assim a análise e a interpretação já tomavam forma, à medida que as anotações eram organizadas metodicamente. Nossa observação minuciosa era fundamental para captar falas, gestos, bem como as dificuldades que emergiam e situações que poderiam vir de encontro com o que foi escrito pelos sujeitos.

As informações coletadas foram descritas e analisadas no capítulo 5. As atividades que foram aplicadas traziam questionamentos preliminares às exposições dos conceitos de geometria hiperbólica mencionados no capítulo 3 a fim de verificarmos os argumentos utilizados para solucionar os problemas antes e após a apresentação de cada conteúdo. Posteriormente, nossa pergunta vinha de encontro ao tema exposto, com a finalidade de verificar como se procedia a assimilação dos conceitos.

Procuramos observar o que havia de comum nas respostas de cada aluno, e assim estabelecer padrões que pudessem nos direcionar no momento de responder a pergunta inicial. **“Como o uso de régua e compasso e do Software Cabri-Géomètre II podem contribuir no processo de ensino e aprendizagem da geometria hiperbólica?”**

No momento das construções efetuadas com o software Cabri-Géomètre II hiperbólico, focamos nossa atenção com o objetivo de verificar se as operações anteriormente realizadas com régua e compasso estavam contribuindo para a melhor apropriação dos conceitos. Além disso, era-nos importante saber, também, o grau de satisfação e interesse dos alunos, bem como apreciar a motivação dos mesmos para o prosseguimento das atividades, cujas percepções serviriam, para, se necessário, reorientar procedimentos.

Nossas conclusões sobre as contribuições, satisfação e interesse dos alunos se encontram no capítulo 6, o qual reservamo-nos a relatar, nossas impressões sobre o trabalho realizado, conforme o item Relatar Resultados, segundo o modelo de Romberg.

A exposição circunstanciada do desenvolvimento das atividades será descrita posteriormente, no capítulo 5.

CAPÍTULO V: DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES

Para respondermos o questionamento principal: “Como o uso da régua e compasso, e do software cabri-géomètre II podem contribuir para o ensino e aprendizado da geometria hiperbólica?” Com o intuito de buscar subsídios para a elaboração de uma estratégia de ensino de geometria hiperbólica, elaboramos atividades, das quais algumas serão analisadas.

As atividades foram desenvolvidas com alunos do IV termo do curso de engenharia elétrica. Esse curso é oferecido pelo INTESP – Instituto Tecnológico do Sudoeste Paulista, localizado na cidade de Ipaussu, estado de São Paulo. Esta faculdade oferece apenas este curso, no período noturno, durante 10 semestres. Possui, em média, 150 alunos. O laboratório de informática possui aproximadamente 12 computadores. As aulas acontecem no prédio de uma escola particular onde funcionam as seguintes etapas da Educação Básica: educação infantil, ensino fundamental, médio e técnico. (ETEL). Grande parte dos alunos trabalha na subdivisão de engenharia, suas idades variam entre 20 e 40 anos, sendo que 95% do alunado são do sexo masculino.

Os encontros ocorreram de forma diversificada, sendo parte em sala de aula e outra no laboratório de informática da faculdade.

Para a análise dos dados foram feitas leituras das anotações feitas pelos alunos e pesquisadora. Os apontamentos e observações eram feitos durante o envolvimento com os alunos, tomando o cuidado de conferir ao final da reunião se todas as informações captadas haviam sido registradas. As fichas de atividades dos alunos com os problemas resolvidos, e as construções efetuadas eram minuciosamente analisadas. Os alunos que participaram da nossa coleta de dados foram: **M, L, S, C, P e J**.

O acordo estabelecido com os alunos foi que usaríamos nesse mês alguns dias de aula, para a pesquisadora coletar seus dados. Os alunos concordaram, uma vez que a pesquisadora havia planejado as aulas para não atrapalhar o andamento da disciplina durante o semestre.

O primeiro encontro aconteceu no dia 9 de agosto de 2008, sábado, das 08hrs 30min às 12hrs 30min. Os alunos se sentaram próximos uns dos outros, e como a sala era pequena, e o número de alunos também, formamos apenas um grupo. Iniciamos a reunião com o seguinte problema:

Considere um quadrilátero que tem dois ângulos retos e dois lados congruentes, conforme a figura:

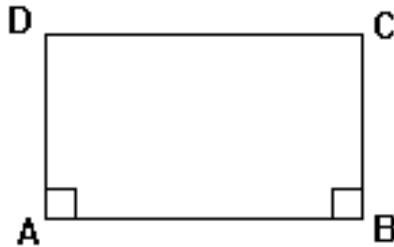


Figura: 66

AB é o lado base, AD e BC são os lados congruentes, enquanto DC é o lado topo do quadrilátero. Você considera possível que esse quadrilátero tenha os ângulos em D e C ângulos congruentes e agudos?

Colocamos essa questão com o objetivo de verificar quais argumentos os alunos utilizariam para responder a pergunta. Desejávamos avaliar, mesmo os seus conhecimentos de Geometria Euclidiana, e se os alunos possuíam algum conhecimento de outras geometrias. Foram obtidas as seguintes respostas:

Aluno M:

Considerando D e C os lados, concluímos não ser possível dentro da geometria utilizada, encontrar os ângulos D e C congruentes e agudos.

Para responder a questão, o aluno fez algumas tentativas de desenhar o quadrilátero, chegando à conclusão que não seria possível. O fato do mesmo ter mencionado a existência de outras geometrias é ligado à referência feita pela pesquisadora durante a divulgação do curso.

Aluno L:

De acordo com a geometria habitual, os ângulos formados entre os pontos D e C não formam ângulos agudos visto que os lados são congruentes.

Sua resposta condiz com seus conhecimentos sobre Geometria Euclidiana.

Aluno S:

Dentro da geometria que estamos acostumados a usar não é possível. Segundo a aula iremos provar que isto pode.

Mais uma vez um aluno menciona a existência de outra geometria além da de Euclides. Sua resposta mostra que o mesmo está interessado em conhecer diferentes geometrias.

Aluno P:

Não é possível.

Aluno J :

Não porque se tenho 2 ângulos retos e 2 lados iguais, dessa forma tenho um retângulo, pois os outros dois tem que ser retos, de caso contrário não teria dois lados iguais.

Observamos nas respostas dos alunos, que concluíram rapidamente não ser possível a construção do quadrilátero. A menção da existência de outra geometria encontrada na resposta do aluno S, ocorreu não pelo fato de ele conhecê-la, mas já pensando nas possibilidades dessa geometria “diferente” que seria estudada durante os encontros. Podemos observar também, que os alunos não possuíam pleno domínio da Geometria Euclidiana, visto que se confundiam com as nomenclaturas dos pontos, dos segmentos, etc.

Considerando as respostas dos alunos vemos conforme Romberg que encontramos-nos no estágio de interpretar a informação coletada.

Nesse momento, apresentamos a Geometria Hiperbólica, até então desconhecida, conforme referencial apresentado no capítulo 3 e falamos da possibilidade de um engenheiro eletricitista precisar de conhecimentos dessa geometria, caso siga a área das telecomunicações, devido à grande quantidade de pavimentações que se podem obter no espaço hiperbólico, que auxiliam na transmissão dos sinais, conforme alguns trabalhos, aos quais nos referimos no capítulo 4. Diante disso, os alunos se empolgaram, questionaram e até lamentaram por nunca terem ouvido falar do assunto. Comentamos que adiante falaríamos sobre pavimentações hiperbólicas, mas que primeiro faríamos uma introdução sobre os conceitos básicos da geometria hiperbólica.

Após a discussão da possibilidade de existência do quadrilátero, prosseguimos os estudos para o desenvolvimento das atividades. Apresentamos, de forma geral, os axiomas e postulados de Euclides, o desenvolvimento histórico ocorrido para o surgimento das geometrias Não – Euclidianas e introduzimos alguns conceitos elementares da Geometria Hiperbólica. Falamos sobre a noção de modelos e mostramos conforme figuras abaixo, algumas superfícies que atendem aos requisitos da geometria hiperbólica como a sela e a pseudo-esfera, que é obtida da tractriz:

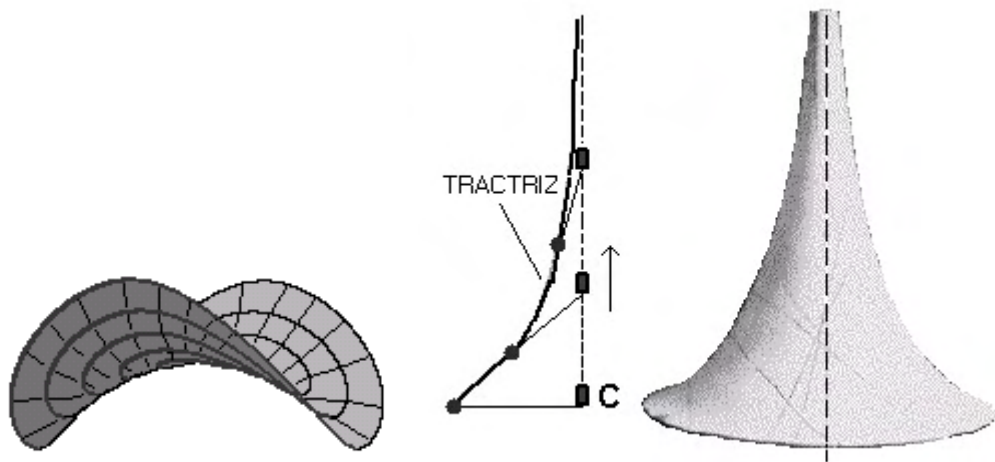


Figura: 67

O modelo plano do disco de Poincaré também foi apresentado aos alunos, os quais ficaram muito atentos às explicações. Aproveitando o momento de atenção, e interesse, apresentamos a seguinte questão:

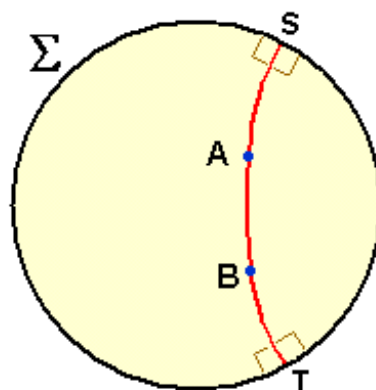


Figura: 68

Observando o disco de Poincaré, como você definiria uma reta na geometria hiperbólica?

Respostas:

Aluno M:

Do princípio que a reta não tem fim (euclidiana) podemos considerar que nos limites da área do disco, podemos traçar um espiral em vários sentidos, onde não encontrando os pontos ela se torna infinita, sendo considerada uma reta.

Considerou a reta ser infinita e refletiu, sobre como pensar em infinito dentro de uma circunferência que delimita um espaço em seu interior.

Observamos uma situação de aprendizagem, na qual o aprendiz desenvolve um papel importante na construção do conhecimento. O mesmo parte de uma situação conhecida, usa os conhecimentos que já foram interiorizados, para fundamentar algo que para ele ainda é desconhecido, testando hipóteses, e também elaborando conjecturas com o objetivo de obter uma resposta ou uma justificativa para a questão proposta.

Na resolução de problemas, o aprendiz primeiramente deve interpretar o problema, testar hipóteses, conjecturar e para tal deve mobilizar seus conhecimentos. Podemos identificar esses aspectos da resolução de problemas, conforme descrevemos no capítulo 1, na resposta do aluno.

Aluno S:

Conforme pude analisar o “disco de Poincaré” uma reta pode ser infinita dentro de um espaço delimitado em uma circunferência.

Aluno P:

A reta hiperbólica é um arco de circunferência dentro da circunferência desde que forme o Ângulo perpendicular nas extremidades com a circunferência.

O aluno definiu reta adequadamente. Acreditamos que essa afirmação foi baseada em sua visualização do desenho do disco.

Aluno J:

Seria o segmento que corta a extremidade do disco em dois pontos distintos, formando com o disco um ângulo de 90° .

Percebemos que a resposta foi devida à visualização. Nas páginas 15 e 16 mencionamos a importância da visualização na formação de imagens mentais.

Aluno L:

Considerando que uma reta é infinita, mas que ao ser limitada por dois pontos, torna-se um segmento de reta. Entretanto se em um círculo ocorrem duas retas é possível encontrar os quatro ângulos retos.

Porém considerando a reta no disco de Poincaré é possível definir um novo formato de reta, considerando o ponto de referência.

Entretanto considerando que a reta não tem fim ela poderia acompanhar o contorno do disco em uma infinita seqüência e seria uma reta constante, considerando o espaço e a própria geometria da Terra.

De acordo com as respostas apresentadas pelos alunos nesta atividade, percebemos uma característica importante da metodologia de ensino de *Resolução de Problemas*. A situação proposta nos levou a conduzir os alunos numa situação de aprendizagem, na qual o conhecimento se constrói fundamentado numa interrogação. Consideramos que a diferença deste episódio para uma aula tradicional é a maneira pela qual a informação é trabalhada com o aluno, sendo conduzida de tal forma que possibilite ao aprendiz construir seu próprio conhecimento. Ele constrói suposições, resgata conhecimentos para justificar tais suposições, e, nesse processo, o novo assunto é formalizado, como citamos Andrade na pág. 19.

Podemos perceber que as respostas refletem seus conhecimentos de Geometria Euclidiana.

Assim, o aluno *M* procurou uma forma de definir uma reta dentro de um círculo, recorrendo aos seus conhecimentos euclidianos de reta infinita. Percebemos que as respostas dos alunos J e P foram dadas pela observação do desenho do disco de Poincaré, porém ao questionarmos sobre como se mediria o ângulo de 90° , os mesmos não souberam responder. As respostas dos alunos *S* e *L* pareceu-nos confusas.

O primeiro encontro foi bastante produtivo, uma vez que os alunos mostravam-se muito interessados em conhecer uma nova geometria cuja questão inicial, propositadamente colocada, era possível de ser respondida afirmativamente.

Em todo momento não separavam a ideia da geometria euclidiana, pois sempre que falávamos sobre reta os mesmos se valiam da idéia de reta euclidiana.

Foi possível observar que faz sentido colocar os alunos em situações que os levem a raciocinar, o que pode contribuir para que os mesmos mudem sua visão ao observarem algo importante. Podemos destacar aqui a questão da visualização, que no caso dos alunos P e J foi essencial para as respostas dos mesmos. Isso nos remete ao artigo de PAIS citado na página pag. 16.

Essas primeiras atividades tinham como objetivos proporcionar-nos uma familiarização com a geometria hiperbólica, levar os alunos a pensarem na existência de outras geometrias, a refletirem e a estarem flexíveis ao exprimirem uma determinada definição.

Como havíamos prometido, falamos sobre as pavimentações hiperbólicas, segundo o artigo de Murari & Lazari: TESSELAÇÕES HIPERBÓLICAS COM RÉGUA E COMPASSO e mostramos algumas pavimentações. O referido trabalho e as ilustrações encontram-se em anexo.

Definição de retas

Para efetuarmos a construção de retas com régua e compasso, foi necessário fazer uma exposição da geometria euclidiana, com alguns elementos necessários para se definir uma reta hiperbólica. Começamos definindo o conceito de inversão, e explicando a construção de pontos inversos:

Inversão com respeito a uma circunferência:

Def. Dada uma circunferência (O, r) , definimos o inverso de qualquer ponto P (distinto de O) como sendo o ponto P' sobre a reta que passa por OP , cuja distância de O satisfaz a equação $OP.OP' = r^2$.

Dizemos que os pontos P e P' são inversos em relação ao círculo (O, r) .

Se um dos pontos P ou P' está fora da circunferência, então o outro está dentro, e vice-versa.

Construção de pontos inversos:

Para construir o inverso de um dado ponto P , dentro do círculo de inversão, seja T o final da corda através de P , perpendicular a OP . Então, a tangente em T encontra OP (estendido) no ponto P' . Desde que os triângulos retângulos OPT e OTP' sejam semelhantes e

$$OT = r, \text{ temos: } \frac{OP}{r} = \frac{r}{OP'} \quad \text{ou} \quad r^2 = OP \cdot OP'.$$

Para a construção do inverso de um dado ponto P' , fora do círculo de inversão:

Seja T um dos pontos de intersecção deste círculo com o círculo de diâmetro OP' . Então, o procurado ponto P é o pé da perpendicular de T a OP' .

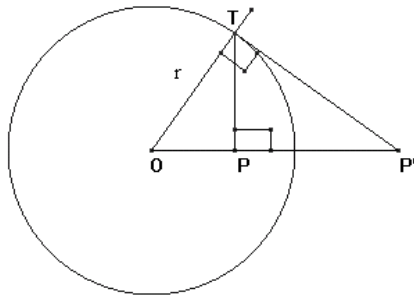


Figura: 69

Após definirmos o conceito de inversão, construímos pontos inversos com os alunos, os quais não apresentaram dificuldades nesta construção, seguindo as orientações dadas pela pesquisadora. Após esta etapa, definimos círculos ortogonais, que são pré – requisitos para a definição de retas hiperbólicas.

Def: Duas circunferências são ditas ortogonais quando se cortam, e os dois raios que incidem no mesmo ponto são perpendiculares entre si.

Teorema: Se uma circunferência (O',r') passa através de dois pontos distintos P e P' , inversos em relação a uma circunferência (O,r) , então as circunferências (O',r') e (O,r) são ortogonais.

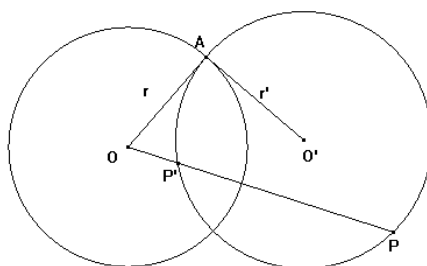


Figura: 70

Encerramos este dia com esta exposição dos conceitos essenciais para a definição de retas.

O encontro seguinte foi realizado no dia 11 de agosto, segunda-feira, das 19hrs 30min. às 22hrs30 min. Iniciamos a reunião estudando retas hiperbólicas.

Definição de retas hiperbólicas:

As retas do plano hiperbólico são os arcos de circunferências C' , ortogonais a C , contidos no plano hiperbólico, juntamente com os segmentos de reta que passam pelo centro e unem dois pontos de C , como pode ser visto na figura.

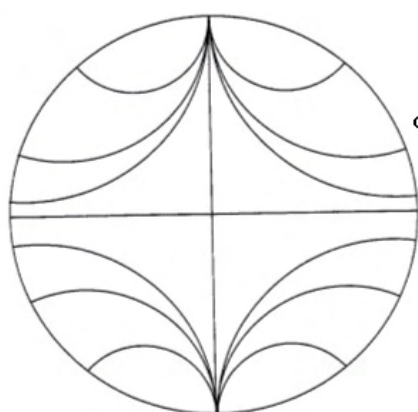


Figura: 71

Na definição de reta procuramos não destacar as retas que passam pelo centro, visto que na atividade posterior queríamos verificar se os alunos conseguiriam perceber o fato de que essas retas euclidianas também são retas hiperbólicas.

Após apresentarmos este referencial, partimos para a construção de retas. Solicitamos aos alunos que construíssem retas no plano hiperbólico.

Nesse momento procedemos a uma primeira construção de retas com os alunos. Fizemos a construção dos pontos inversos, e de círculos ortogonais (relembrando a teoria que havia sido estudada no encontro anterior), que foram dando origem às retas. Os alunos não tiveram dificuldade na construção das retas, nem de aplicar o conceito de inversão. Porém, a atividade era bastante trabalhosa. A princípio, eles só consideravam o ponto médio entre P e P' para traçar a reta, ocasião em que trabalhamos com a propriedade da mediatriz. Desse modo, foram percebendo que se encontrassem a mediatriz de dois pontos inversos, poderiam construir infinitas retas hiperbólicas passando por aqueles dois pontos. O aluno C se mostrou muito interessado em descobrir propriedades; ele fez várias construções de retas e observou que quanto mais perto do horizonte estava o ponto escolhido, menor era a reta (considerando apenas a reta traçada com o centro no ponto médio dos pontos inversos), e dependendo da localização do ponto, a reta mudaria de concavidade. Aparece então mais uma vez a perspectiva da Resolução de Problemas, o aluno testou hipóteses, verificou experimentalmente e alcançou resultados.

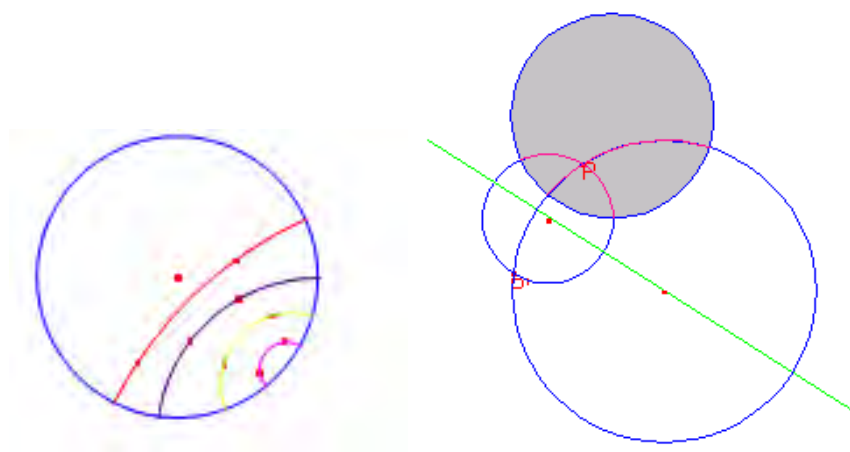


Figura: 72

Apresentamos então, as seguintes questões para serem exploradas:

- Existem "retas" do plano hiperbólico que, quando mapeadas no disco S aparecem para nós como retas sem nenhum problema. Quais são essas retas?

- Dada uma reta no plano hiperbólico, quantas retas paralelas a reta dada podem ser construídas? Observando a resposta da atividade anterior, formalize o enunciado do 5º postulado para a Geometria hiperbólica. Postulado de Lobashevsky.

Aluno M:

1- São as retas que passam pelo centro (plano cartesiano), considerando como uma circunferência ortogonal.

O aluno considerou o plano hiperbólico conforme definimos no referencial teórico e visualizou que essas retas estão totalmente contidas no interior do disco.

2 – Considerando que as retas paralelas não se cruzam, e análise do disco de Poincaré. Então, como no espaço infinito não iriam se cruzar consideramos que será infinitamente impossível.

Aluno C.

1 – Os diâmetros da circunferência, considerando o disco de Poincaré.

Podemos verificar que o aluno relacionou a Geometria Hiperbólica com a Euclidiana.

2 – Podem ser construídas infinitas retas, pois dentro da circunferência podem-se ter infinitos arcos sem se cruzar.

O aluno respondeu a 2ª questão segundo a Geometria Hiperbólica, relacionando conhecimentos da geometria Euclidiana, os infinitos arcos que não se cruzam no interior de uma circunferência é fato da Geometria Euclidiana, porém é o fundamento da Geometria Hiperbólica. Podemos observar também que os alunos estão interiorizando os conceitos que estão sendo apresentados, uma vez que nas justificativas das respostas já estão usando o que lhes foi apresentado.

Aluno P:

1- Todas as que se apresentam como diâmetro, ou, seja vão de uma extremidade a outra passando pelo centro.

Mais uma vez destacamos que a visualização do desenho do disco influenciou a resposta uma vez que, em nosso caso, como já dissemos as representações conceituais através do desenho adquirem especial importância no processo de ensino e aprendizagem.

2-Desde que não se cruzem, todas serão paralelas, de modo que se tornem infinitas.

Usou a geometria Euclidiana para justificar algo no hiperbólico.

Aluno J:

1- São as retas que definem o diâmetro da circunferência.

2- Infinitas desde que não se cruzem. O que diferencia é que as retas são infinitas retas paralelas a aquela reta dada.

Aluno S:

1- As que passam pelo centro.

2- Muitas, visto que não vão se cruzar.

Aluno L;

1- As retas que são diâmetro, pois ela não será curva e sim uma reta.

2- Considerando a reta como foi definida, podemos traçar vários arcos (retas) que não vão encontrar o primeiro arco traçado, logo serão paralelas, logo serão infinitos os números de paralelas.

Podemos observar que a visualização foi fundamental na formulação das respostas dos alunos. Os alunos não tiveram dificuldade de visualizar o 5º postulado para a geometria hiperbólica. Houve a percepção de que as retas que passam pelo centro também são retas hiperbólicas, e deram a definição euclidiana de retas paralelas, como sendo retas que não se encontram.

Deixamos os alunos explorarem a construção de retas. Após as atividades de construção com retas partimos para a construção de triângulos. Levantamos a questão:

- Você considera possível obter um triângulo nesta geometria?

Ao questionarmos os alunos sobre a existência de triângulos, todos responderam que era possível. Diante da resposta afirmativa para a questão, partimos então, para a atividade de construção, sendo solicitado o seguinte:

- Construir um triângulo qualquer no plano hiperbólico.

Um fato interessante foi que, de imediato e como resposta à pergunta, o aluno J desenhou um triângulo euclidiano dentro do disco. Isso mostrou, mais uma vez, que para a solução do problema recorreu-se à idéia dos conceitos Euclidianos.

No momento da construção dos triângulos, os alunos apresentaram dificuldade, pois as construções estavam sendo por tentativas. Na maioria das vezes não conseguiam fechar o triângulo. Construíam os dois lados fazendo uso da mediatriz de dois pontos inversos, e na hora de descobrir o terceiro lado é que aparecia o problema, pois não havíamos apresentado a construção de retas por dois pontos. Então, deixamos como atividade de casa a construção de triângulos hiperbólicos.

O único aluno que tentou fazer em casa foi o aluno C, porém com dificuldade em obter os pontos, como mostra sua resposta para a questão número dois, que fazia parte das perguntas apresentadas logo após as atividades.

Questões:

- 1) **O que você achou de fazer construções com régua e compasso?**
- 2) **Você sentiu dificuldade em fazer essas construções?**
- 3) **Você considera que esta geometria possa ser aplicada em alguma situação do cotidiano?**

Respostas:

Aluno P;

1- *Muito gostoso e divertido.*

2- *Não.*

3- *Talvez quando se faz designer de carros, aviões e construções.*

Aluno J:

1- *É a forma de assimilar melhor seguindo todos os passos.*

2- *No início certa dificuldade por nunca ter ouvido falar de retas hiperbólicas.*

3- *Sim, na área da engenharia das telecomunicações através das ondas.*

Foi possível observar na escrita do aluno J que as construções feitas com régua e compasso, e “passo a passo” foi uma boa forma para assimilar os conteúdos.

Aluno C:

1- *Muito criativo tendo oportunidade de formar novas figuras dentro da circunferência.*

2- *Sim. Dificuldade maior em encontrar o ponto que ia formar a figura imaginada.*

3- *Sim.*

Pela resposta do aluno C, podemos observar que muitas vezes, o conhecimento de apenas uma geometria, no caso a Geometria Euclidiana pode limitar procedimentos. Porém, o discernimento de outras geometrias leva à descoberta da possibilidade de construção de figuras não Euclidianas dentro do círculo.

Aluno S:

1- *Reviver a nostalgia do ginásio.*

2- *Não.*

3- *Sim.*

Aluno M

1- *Legal, pois trabalha-se com a geometria Euclidiana.*

2- *Sim, na hora de formar o triângulo.*

3- *Sim, na transmissão de sinais.*

Aluno L

1- *Trabalhoso, porém legal. É possível relembrar a geometria plana.*

2- *Um pouco.*

3- *Segundo a professora na área de telecomunicações.*

O aluno S e o aluno P deixaram transparecer que o uso de régua e compasso nas construções pode ser “legal e divertido”.

O terceiro encontro, foi realizado no dia 16 de agosto, sábado, das 8hrs 30m às 12 hrs.

Ao iniciarmos as atividades deste dia, desenhamos um círculo na lousa e alguns arcos de circunferência no interior desse círculo. Então, iniciamos a atividade IV com a seguinte questão:

Dado o modelo do disco de Poincaré, qualquer arco de circunferência contida no interior do disco pode ser considerado uma reta hiperbólica?

Respostas:

Aluno P:

Não é preciso que ela forme ângulos de 90° com a extremidade do disco.

Aluno J:

Não. Para afirmar tem que saber se forma o ângulo de 90° .

Aluno C:

Não, porque ele não segue os parâmetros descritos por Poincaré.

Aluno S;

Não.

Aluno M :

Não, é preciso satisfazer as condições de Poincaré.

Aluno L:

Precisa satisfazer a condição de reta hiperbólica, ou seja, ser uma circunferência ortogonal.

Diante das respostas apresentadas e apesar dos alunos não utilizarem uma linguagem formal, pode-se inferir que os alunos assimilaram a ideia de que não basta apenas tomarmos um arco qualquer, e que existe uma definição de retas hiperbólicas. Acreditamos que esta assimilação se deu pelo fato das construções terem sido feitas e visualizadas, uma vez que para se construir uma reta hiperbólica, faz-se necessário realizar todo o procedimento da inversão. Para a continuação das atividades, apresentamos o conceito de ângulos no disco de Poincaré.

Conceito de ângulo.

Se duas retas hiperbólicas se interceptam num ponto A, a medida do ângulo formado entre elas é, por definição, a medida do menor ângulo formado pelas semi-retas euclidianas tangentes aos arcos (reta hiperbólica) em A. Portanto, no modelo de disco de Poincaré, os ângulos entre as tangentes são medidos como no modelo Euclidiano, utilizando-se retas euclidianas tangentes aos arcos.

Resolvemos apresentar de imediato o conceito de ângulo, pois em atividades anteriores já havíamos percebido que apesar de os alunos falarem em ângulo pela observação do disco, os mesmos não imaginavam como defini-lo.

Após o estudo das definições realizamos atividades de construção:

- 1) Construa um feixe de retas que passam por um ponto, no modelo de Poincaré.

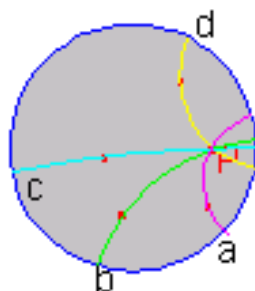


Figura: 73

- 2) Construa uma reta que passe por dois pontos.

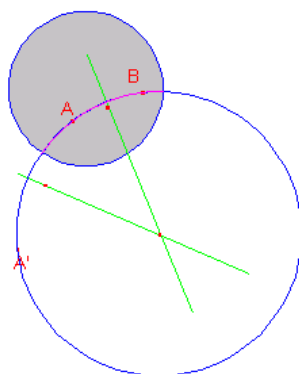


Figura: 74

3) Construa retas perpendiculares.

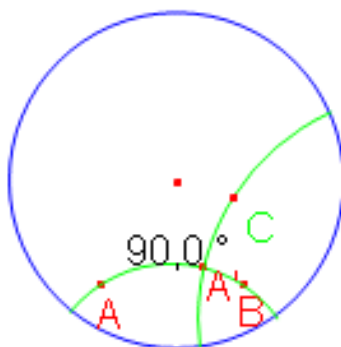


Figura: 75

5) Construa um triângulo.

6) Construa um triângulo retângulo.

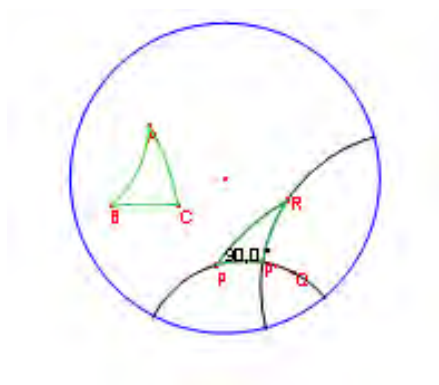


Figura: 76

Essas atividades foram feitas juntamente com os alunos. Lembramos que o feixe de retas era o que já havíamos feito, quando achamos dois pontos inversos e sua mediatriz. Somente relembramos que a mediatriz entre dois pontos inversos é o lugar geométrico dos centros de circunferências ortogonais à circunferência dada que passam pelo ponto P, constituindo então um feixe de retas por P. Passamos então para a construção das retas que passam por dois pontos.

Pedimos para os mesmos escolherem dois pontos dentro do disco e encontrar o ponto inverso de um deles, depois lhes foi solicitado que traçassem a mediatriz dos pontos inversos. Agora, eles deveriam traçar a mediatriz entre os dois pontos escolhidos, inicialmente, no

interior do disco. O lugar em que estas duas mediatrizes se encontrassem seria o centro da circunferência que lhes forneceria, no interior do disco, a reta procurada. Os alunos não sentiram dificuldade em seguir os passos. E algo que lhes chamou a atenção foi que a geometria hiperbólica é toda trabalhada com conceitos euclidianos. O aluno M comentou:

“Acaba sendo tudo geometria euclidiana, pois sempre a usa.”

Para a construção de retas perpendiculares, primeiramente, conduzimos os alunos ao raciocínio de que pela definição de reta, esta deve ser um arco ortogonal ao círculo, o qual é o disco de Poincaré. Por outro lado, alertamos que se quisermos construir uma perpendicular à reta dada, ela deve também, ser ortogonal ao disco, e então para isso, precisamos trabalhar novamente alguns conceitos de geometria euclidiana, os quais apresentamos a seguir:

Potência de ponto com relação a um círculo.

Seja (C, r) uma circunferência de centro C e raio r , e seja P um ponto externo a essa circunferência.

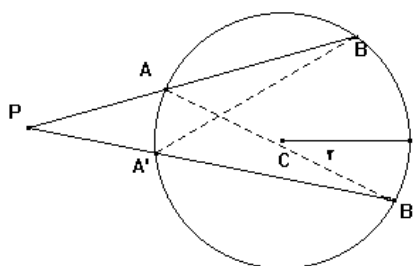


Figura: 77

Ao traçarmos duas secantes a essa circunferência obteremos os pontos A, B, A', B' , conforme figura 77.

Temos então, a igualdade $PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$, pois $\triangle PBA' \sim \triangle PB'A$.

O produto constante $PA \cdot PB$ não depende da secante traçada pelo ponto.

$PA \cdot PB$ é chamado *potência do ponto P* , relativo a (C, r) .

Se $A = B = E$ e PE é tangente a (C, r) , conforme figura, então:

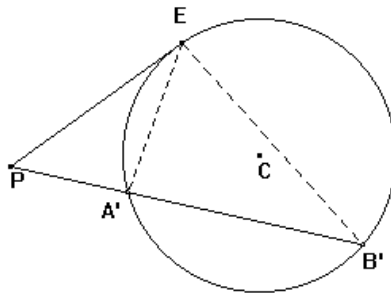


Figura: 78

$$(PE)^2 = PA' \cdot PB', \text{ pois } \triangle PA'E \sim \triangle PEB'.$$

Potência do ponto P em função do raio m e da distância $d = PC$ ao centro da circunferência:

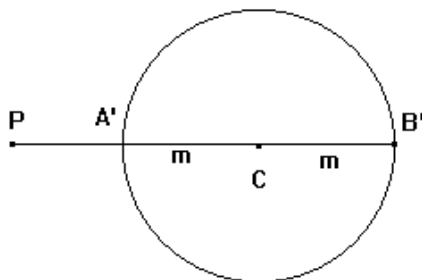


Figura: 79

$$Pot(PC) = PA' \cdot PB' = |d - m| \cdot (d + m) = |d^2 - m^2|.$$

Equipotência.

Def: Um ponto é dito *equipotente* em relação a duas circunferências, quando sua potência (potência do ponto) é a mesma, tanto com relação a uma como com relação à outra.

O eixo radical de dois círculos

Sejam dados dois pontos fixos B e C , e um comprimento d constante. Construir um triângulo retângulo de catetos d e y , e hipotenusa x , como indicado na figura:

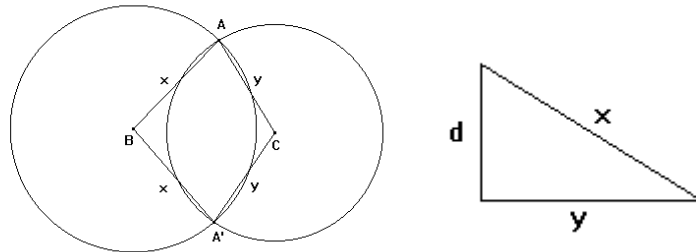


Figura: 80

Os arcos (B,x) e (C,y) (figura 80), determinam pontos A e A' , tal que as distâncias de $A(A')$ ao ponto B é hipotenusa (x) e a distância de $A(A')$ ao ponto C é cateto y do triângulo retângulo (figura 80).

As distâncias de (A,A') aos pontos B e C têm diferenças dos quadrados constantes:
 $x^2 - y^2 = d^2 = \text{constante}$.

Unindo B a C , e baixando a perpendicular por A a BC obtemos uma reta l , tal que todo ponto $A \in l$ tem a propriedade enunciada acima.

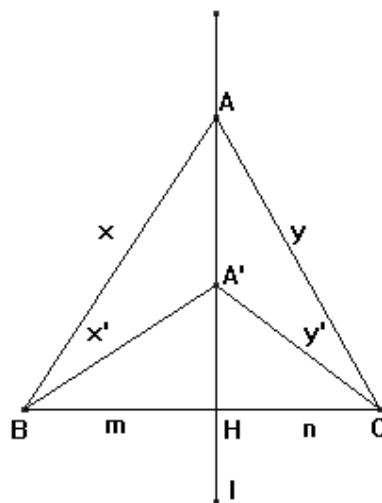


Figura: 81

Disso segue: O lugar geométrico (*lg*) dos pontos *A*, cujas distâncias a dois pontos fixos *B* e *C* variam, mas conservam, respectivamente, a diferença dos quadrados constante, é uma reta perpendicular à reta *BC* (eixo radical).

Construção do eixo radical:

1º caso: As circunferências são secantes.

O eixo radical é a secante comum, pois os pontos secantes *P* e *P'* são equipotentes (potência nula), e dois pontos determinam uma reta (figura 81).

$$Pot(P, B) = Pot(P, C) = 0$$

$$Pot(P', B) = Pot(P', C) = 0$$

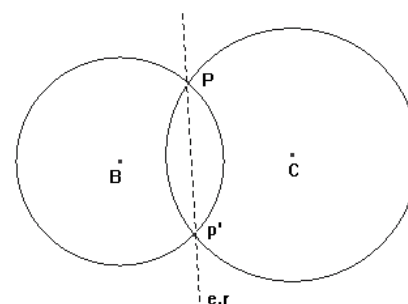


Figura: 82

2º caso: As duas circunferências são tangentes externas ou internamente: (figura 82). O eixo radical é a tangente comum, pois o ponto de tangência é equipotente em relação às circunferências ($e.r. \perp BC$).

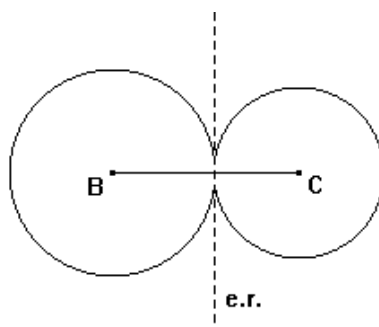


Figura: 83

3º caso: As duas circunferências não se encontram, podendo ser externas ou internas. Neste caso, recorremos a uma circunferência auxiliar de centro *X* que corta as duas outras. Os eixos radicais das circunferências de centros *B* e *X*, e das circunferências de centros de *C* e *X* se encontram num ponto *P* equipotente com relação às três circunferências. Logo, *P* pertence ao eixo radical das circunferências de centros *B* e *C*, que é perpendicular a *BC* (figura 84).

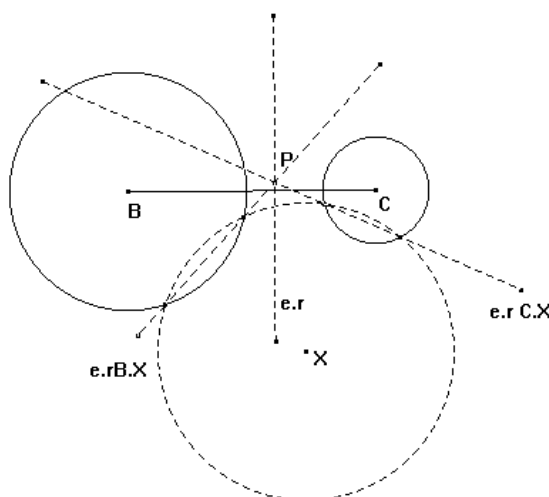


Figura: 84

Circunferências ortogonais:

Def: O *lg* dos centros de circunferências ortogonais, simultaneamente a duas circunferências fixas é o eixo radical delas.

Após o estudo desses conceitos, podemos definir então, a construção de retas perpendiculares. Ressaltamos a importância de estarmos fazendo essas construções, a princípio, com régua e compasso, pelo fato de que foram esses procedimentos que determinaram as bases da teoria da geometria euclidiana. Usaremos nas construções de retas perpendiculares o 1º caso de eixo radical, pois uma reta hiperbólica e o disco sempre serão secantes.

Os alunos não apresentaram dificuldade. O processo foi trabalhoso; mais uma vez escolheram o ponto, acharam o seu inverso, construíram a reta, e naquele momento, com a definição de eixo radical, construíram retas perpendiculares.

- Construa um triângulo retângulo.

Os alunos não tiveram dificuldade. Aproveitando as retas perpendiculares já construídas, escolheram dois pontos para fechar o triângulo retângulo e aplicaram novamente, a construção de retas hiperbólicas que passam por dois pontos.

Após terminar essas atividades, colocamos as seguintes questões, para observar como os alunos estavam percebendo o desenrolar dos acontecimentos, bem como seu modo de ver e pensar:

Quais conceitos de geometria euclidiana foram utilizados nessas construções?

Você considera que estas construções, feitas com régua e compasso e “passo a passo” auxiliaram na apreensão dos conceitos?

Respostas:

Aluno C:

1- Os mesmos utilizados nas construções normais, mas encontramos formas diferentes.

2- Sim, dando conhecimento da base para sabermos como as formas são encontradas e as regras, normas, para formar tais figuras.

Na resposta do aluno C observamos algo que para nós consideramos muito importante. O aluno conseguiu observar que as figuras por ele construídas no interior do círculo apesar de serem fundamentadas nas construções com régua e compasso da Geometria Elementar se diferenciam por sua forma e por suas propriedades, o que nos remeteu mais uma vez a fundamentarmos os conceitos da Geometria Hiperbólica.

Identificamos em sua resposta para a questão número 2, a contribuição da utilização da régua e compasso na elaboração passo -a- passo de cada atividade, o que também faz parte de nossa hipótese, o fato da justificativa para cada passo em cada construção, contribuir para assimilação dos conteúdos.

Aluno P:

1 – Definições de retas (paralelas, perpendiculares, mediatrizes) definições de circunferências, triângulos, espaços.

2 – Com certeza a prática leva à evolução.

Aluno J.

1 – Retas perpendiculares, mediatriz, ponto médio.

2- Sim e muito.

Aluno M.

1- *Para fazer as construções utiliza-se somente conceitos de geometria que estamos acostumados, mas o resultado é que muda, como por exemplo fornece um triângulo hiperbólico.*

2- *Acredito que sim, pois conseguimos distinguir definitivamente a diferença da geometria plana para a não-euclidiana.*

Aluno S:

1 - *mediatriz, ponto médio, perpendiculars.*

2- *Sim, pois temos que seguir à risca os conceitos na hora de construir senão não sai o resultado correto.*

Aluno L:

1 – *mediatriz, ponto médio, inversão, entre outros.*

2 - *Sim, pois é feito passo a passo seguindo às regras, o que auxilia para guardar os conceitos.*

A atividade posterior é a construção do quadrilátero de Saccheri. Construimos o quadrilátero juntamente com os alunos, conforme o seguinte roteiro:

- 1) Construir a circunferência D , com centro O , e a reta l vertical;
- 2) Dado o ponto $P \in l$, obter o inverso P' e a circunferência C , ortogonal a D ;
- 3) Obter o *e.r.* (eixo radical) das circunferências D e C ;
- 4) Tomar o ponto A , em C , e construir o seu simétrico $A' \in C$;
- 5) Determinar no *e.r.* o ponto O' , centro da circunferência C' , ortogonal a C e D , através das retas l' e l'' . $A \in l'$ e $l' \perp l''$;
- 6) Construir C'' com centro em O'' , simétrica de C' , em relação à reta l ;
- 7) Construir a circunferência C''' , ortogonal à circunferência D , contendo os pontos inversos q e q' , determinando os pontos A'' e A''' nas interseções com as circunferências C' e C'' , respectivamente;

Construir o quadrilátero de Saccheri $AA'A''A'''$, através de seus arcos.

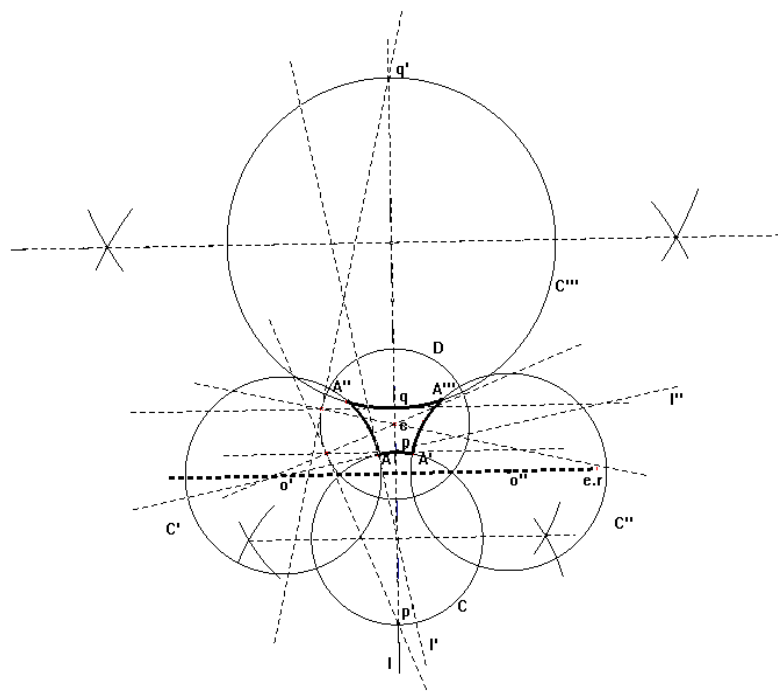


Figura: 85

A construção do quadrilátero de Sacheri foi trabalhosa, porém produtiva, pois nela se utilizam muitos dos conceitos trabalhados anteriormente. Essa construção aconteceu em conjunto (pesquisadora e alunos).

O quarto encontro aconteceu no dia 18/08/08, primeiro nos reunimos às 19hrs15min, e reforçamos a construção do quadrilátero de Sacheri com régua e compasso, último assunto que havíamos tratado no sábado anterior, pedimos que eles refizessem a figura, agora sozinhos, justificando cada construção. Foi permitido que, se necessário, examinassem o desenho efetuado no encontro anterior. Logo em seguida nos dirigimos para o laboratório de informática para nos dedicarmos às atividades com o auxílio do software. Combinamos com os alunos que tiraríamos fotos para anexar junto ao trabalho, os mesmos concordaram.

Quanto as construções do quadrilátero, obtivemos as seguintes produções dos alunos, vistas abaixo, mencionaremos apenas 3, visto que como estavam sentados juntos as justificativas ficaram parecidas.

Aluno 1:

- *Faz a bola (brincou).*
- *Faz à reta l .*
- *Fazer tudo aquilo lá de novo (achar o ponto inverso).*
- *Faz a mediatriz entre P e P' .*
- *Traçar a reta.*
- *Encontrar o eixo radical.*
- *Achar um ponto na reta r .*
- *Achar por simetria.*
- *Pegar um ponto no eixo radical e traçar uma reta por R .*
- *Achar um ponto na reta r .*
- *Fazer todo o procedimento de unir os pontos , achar D e D'*
- *Traçar a mediatriz entre D e D' .*
- *Construir o quadrilátero de Sacheri.*

Aluno 2:

- *Constrói-se o disco.*
- *Traça-se um diâmetro l prolongando-o.*
- *Determina-se um ponto em l dentro do disco.*
- *Acha-se o inverso.*
- *Acha-se a mediatriz entre o ponto e seu inverso.*
- *Do ponto médio até o ponto traça-se o arco (que no caso é uma reta), e define-se um ponto nesse arco e seu simétrico.*
- *Acha-se o eixo radical.*

- *Define-se um ponto neste eixo e o seu simétrico (o).*
- *De O a A, com o compasso, traça-se um arco. O mesmo com o' e A'.*
- *Neste arco, define-se um ponto qualquer (B e B') utilizando-se de l.*
- *Acha-se o inverso de B e a mediatriz entre eles.*
- *Liga a mediatriz à reta l (Q).*
- *de Q até B, abre o compasso e liga com B'.*
- *O quadrilátero é então AA'BB'.*

Aluno 3:

Faço um círculo, acho um ponto qualquer e ligo os dois pontos passando uma reta para fora do círculo. Traço uma reta perpendicular com a reta cortando o círculo, acho a tangente e cruzo a reta que foi unida do centro ao ponto P. Acho a mediatriz, e do centro da mediatriz traço a primeira reta hiperbólica. Traço uma reta l na vertical, no centro do círculo. Pego um ponto qualquer no eixo radical e marco até ao meio, e faço o inverso. Pego o ponto O e traço a reta que passa pelo ponto A e O'por A'. Pego qualquer ponto na reta A e acho a mediatriz com B'. Fecho a mediatriz.

Podemos observar no trabalho dos alunos 1 e 2, que eles conseguiram justificar cada passagem da construção. Outro aspecto que podemos observar é a questão do vocabulário desses alunos não ser uma linguagem teórica, porquanto eles apresentam pouco conhecimento, até mesmo da geometria euclidiana. No entanto, através das justificativas podemos observar que eles assimilaram os conceitos e conseguiram fazer as construções, porém tinham dificuldades de expressá-las graficamente, como é o caso do aluno 3, que apesar de um pouco confuso em suas justificativas conseguiu construir o quadrilátero, sugestionando que fez, primeiramente, toda a construção, e somente depois é que escreveu as justificativas. Através da frase do aluno 1, “*Faz tudo aquilo lá*”, é possível inferir que ele entendeu o conceito de reta. Podemos perceber também, a necessidade e a importância de se dar ao aluno um bom embasamento teórico do V postulado de Euclides, fato esse presente em nosso trabalho, e que vieram reforçar os procedimentos e confirmar o delineamento da nossa proposta.

Assim, numa análise associada ao desenvolvimento das atividades, com as produções escritas dos alunos, e também, com o nosso envolvimento com os mesmos durante as atividades, podemos perceber que as construções com régua e compasso foram fundamentais na apreensão e assimilação dos conceitos, além de se ter a oportunidade de relembrar conceitos de geometria como mediatriz, lugar geométrico e outros, que foram trabalhados em níveis escolares anteriores, o que pode tornar o trabalho interessante.

Os alunos se sentiram desafiados a realizar todos os procedimentos para a construção das retas. No momento que mencionamos a possibilidade de se fazer todas aquelas construções através de um software, e quando dissemos, como exemplo, que para a construção de uma reta somente era preciso criar o disco, e depois usar um comando, nos surpreendemos quando um aluno se manifestou dessa maneira:

“Assim não tem graça, eu quero saber como é que faz”.

Os problemas apresentados através das atividades se mostraram como situações desafiadoras aos alunos, pois, a princípio, os métodos requeridos para se efetuarem as construções pareciam muito difíceis, e extrapolavam aquilo que era por eles conhecido. Porém, à medida que os conceitos eram progressivamente apreendidos, os alunos se sentiam mais motivados e não desanimados, sentiam-se estimulados a prosseguirem no estudo por nós proposto. Outro aspecto interessante que podemos constatar é que o estudo de uma nova geometria pode mesmo contribuir para melhorar a percepção espacial, além de nos levar a repensar e mudar a maneira de enxergar as coisas. Isso pode ser percebido na fala do aluno J quando diz:

“Olha como a visão da gente muda”.

O aluno disse essa frase no momento da construção do quadrilátero de Sacheri, visto que lá no início da nossa primeira reunião, ele pensava ser impossível obter um quadrilátero com as características solicitadas, e agora, com a apreensão de novos conhecimentos, estava construindo o mesmo quadrilátero que imaginava irrealizável. No início de nosso trabalho ele só conseguia imaginar um retângulo euclidiano, e com o desenvolvimento das atividades sua visão foi mudando, passando a enxergar outras possibilidades para os polígonos, como no caso do triângulo que ele, a princípio, desenhou um triângulo euclidiano dentro do círculo.



Figura: 86



Figura: 87

As atividades referentes ao software envolviam definições, e teoremas hiperbólicos sobre retas, triângulos, quadriláteros, sendo que os conceitos iniciais e preliminares foram adquiridos através do estudo com régua e compasso. Tal procedimento objetivava fornecer ao aprendiz um conhecimento teórico sobre os passos das construções antes de efetuá-las num ambiente de geometria dinâmica.

Após terminarmos a atividade referente ao quadrilátero de Sacheri, nos dirigimos ao laboratório de informática, onde iniciamos o estudo do software. Passamos algumas informações e mostramos algumas construções para os alunos. Como gostaríamos que o trabalho com o software se desenvolvesse no mesmo dia, e isso não foi possível, a pesquisadora solicitou a um colega de trabalho que lhe cedesse a aula de terça-feira para a mesma terminar o trabalho com a turma. O mesmo cedeu às aulas, e assim o trabalho foi

concluído. Avisamos os dois alunos que não participaram da atividade com o software na segunda feira para os mesmos não virem, visto que estaríamos terminando o trabalho iniciado.



Figura: 88



Figura: 89



Figura: 90



Figura: 91

As atividades que foram realizadas com o auxílio do software se procederam da seguinte maneira:

No encontro da terça-feira, como já havíamos mostrado algumas construções para os alunos, e também havíamos mostrado o menu, iniciamos com as atividades propostas.

Iniciamos as atividades construindo o horizonte, ou o disco de Poincaré. Lembrando aos alunos de que o plano é o interior de um círculo Euclidiano. Explicamos aos alunos o comando que deveriam acionar. Para a construção de retas os alunos não apresentaram dificuldade, visto que iam seguindo as orientações de que comando acionar, depois que construíamos uma vez, os mesmos faziam várias construções explorando dinamicamente a construção de retas.

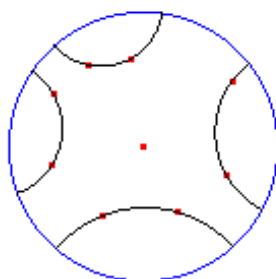


Figura: 92

Uma atividade bastante proveitosa foi uma comparação que a pesquisadora fez entre a construção de uma reta hiperbólica seguindo a teoria da régua e compasso, e a construção dinamicamente. Solicitamos aos alunos que seguissem o seguinte roteiro para a construção:

- 1) Construa um círculo.
- 2) Obtenha um ponto no interior do círculo.
- 3) Usando o comando euclidiano inversão, encontre o inverso do ponto escolhido.
- 4) Usando o comando euclidiano mediatriz encontre a mediatriz entre os pontos inversos.
- 5) Construa uma circunferência com centro na mediatriz, e que passe pelos pontos inversos.
- 6) Usando o ícone do menu euclidiano d-line (bnd points), construa a reta hiperbólica que passa pelos pontos de intersecção entre as duas circunferências. Você vai observar que as retas nas duas construções coincide.

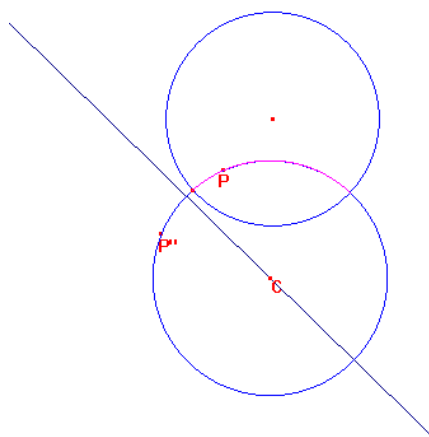


Figura: 93

Consideramos que esta atividade foi proveitosa no sentido dos alunos poderem comprovar a teoria.

O aluno *P* fez um comentário que consideramos relevante.

Com o computador realmente fica mais fácil, porém se não conhecer a parte teórica fica sem sentido.

Continuamos com as atividades que explorassem a construção de retas, conforme as atividades que havíamos proposto.

Os alunos sempre comentavam da facilidade do software, como por exemplo, na construção de retas perpendiculares, onde a pesquisadora no momento dessas construções, ia lembrando-os de que com régua e compasso eles precisariam usar o conceito de construção de retas por dois pontos, o conceito de eixo radical e de que havia muito conceito por detrás daquela simples construção no software.

O aluno *M* mencionou:

No computador, depois que a gente aprende a usar o programa fica bem mais fácil.

Na atividade de construção de retas paralelas assintóticas e divergentes os alunos seguiram as seguintes orientações da pesquisadora para a construção:

Construa uma reta *a* e um ponto *P*. Construa também, duas retas paralelas a reta *a*, que passem pelo ponto *P*, retas (*b* e *c*). As retas *b* e *c* formarão entre si um espaço angular *QPR* à direita de *P* e *XPY* à esquerda de *P*. Construam retas nesses espaços angulares e que passem pelo ponto *P*. Explore dinamicamente a figura.

O que você observa sobre essas retas em relação à reta *a*?

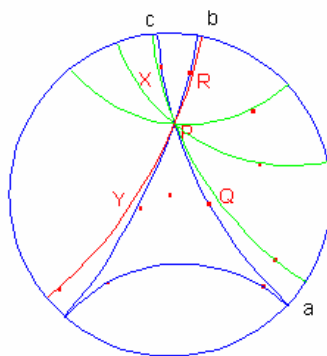


Figura: 94

Aluno M:

Não cruzam com a reta a

Aluno P:

Elas não cortam a reta a.

Aluno J:

Não cortam a reta a.

Aluno C:

Ficam sempre entre as retas b e c, porém fora do triângulo.

Podemos observar que os alunos conseguiram perceber que as retas que estavam à direita e à esquerda do ponto P não encontrariam a reta a, porém para eles a questão do paralelismo entre as retas b e c, em relação a reta a, princípio não estava de fácil visualização. No momento que lhes fornecemos os comandos para se construir as duas paralelas por um ponto, o aluno C menciona:

Mas elas não estão se cruzando?

Então explicamos que na realidade aquelas retas não se cruzam, porém o disco é infinito e quanto mais nos aproximamos de sua extremidade parece-nos que as retas estão se encontrando.

Ao final da atividade apresentamos os conceitos para os alunos conforme material presente no referencial teórico.

Na atividade referente a construção de ângulos de paralelismo, todos os alunos devido à visualização perceberam que eram congruentes, e a pesquisadora perguntou, se a medida de algum ângulo era maior que noventa graus, e claro ninguém havia chegado nisso e assim definimos ângulos de paralelismo.

Quanto a construção de triângulos também não tivemos problemas, visto que deveriam somente acionar comandos, porém na construção de triângulos isósceles, tivemos a oportunidade de enriquecer as atividades com a propriedade da mediatriz, pedimos para os mesmos construírem um segmento hiperbólico, clicando em dois pontos no interior do disco,

e usando o comando `d -segment`, em seguida encontrar o ponto médio, através do comando `midpoint`, em seguida construir uma perpendicular ao segmento pelo ponto médio, escolher um ponto qualquer na perpendicular, e construir os segmentos que iriam delimitar o triângulo, medimos as distâncias através do comando `non E distance`, e os alunos puderam realizar a construção de triângulos isósceles. Os alunos comprovaram através das construções, que a soma dos ângulos internos é sempre menor que 180° , verificar que os triângulos isósceles carregam para a geometria hiperbólica a propriedade de possuírem os ângulos da base congruentes, e que o teorema de Pitágoras não é válido na geometria hiperbólica.

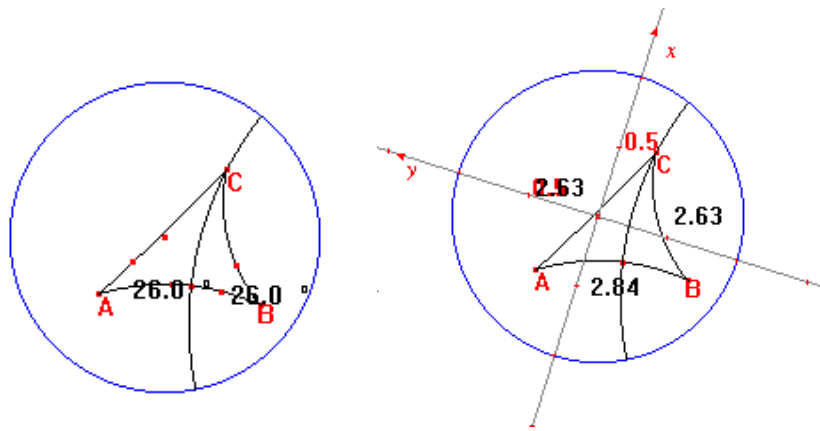


Figura: 95

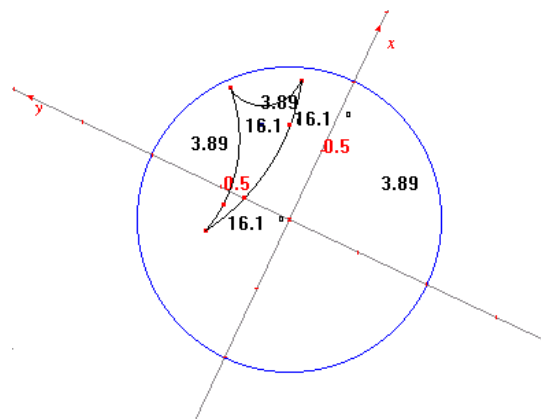


Figura: 96

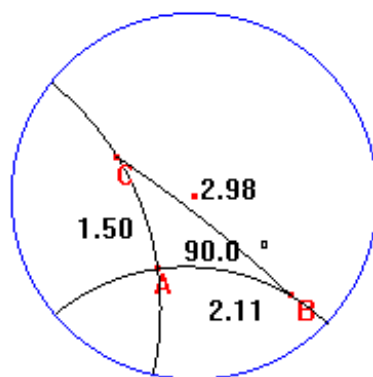


Figura: 97

Nesse aspecto ressaltamos nossa opinião quanto à importância de um estudo que utiliza os recursos integrados, visto que para se visualizar tais questões com régua e compasso seria um trabalho árduo que envolveria a construção de tangentes para se medir os ângulos e também a noção de distância, o que na geometria hiperbólica não é um recurso muito fácil.

Realizamos então as construções de quadriláteros de Sacheri, que foi uma construção bastante enriquecedora com régua e compasso. A construção do quadrilátero no software também foi produtiva, sendo que o menu não possui um comando que construa o quadrilátero, então em sua construção é utilizado todo o conceito. Apresentamos um roteiro para a construção do quadrilátero no software para os alunos.

Construção no software Cabri-Géomètre II:

- 1) Traçar a circunferência D com centro O (botão *circunferência*);
- 2) Através do botão *d-line*, função (*bnd points*), obter a reta a , clicando nos dois pontos fronteiros do disco D (pontos fronteiros de a), e posteriormente, num ponto qualquer de D ;
- 3) Obter P (ícone *ponto* – função *ponto*) na reta a ;
- 4) Através do botão *centre d-line*, função perpendicular *at point*, obter a reta b (hiperbólica), perpendicular a reta a e passando por P ;
- 5) Determinar A e A' em b , através do ícone simetria axial;

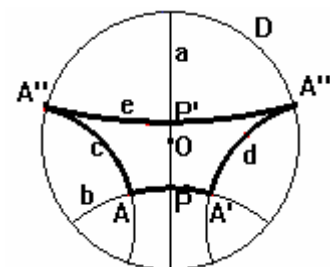


Figura: 98

- 6) Obter as retas c e d (hip) passando por A e A' , respectivamente, pelo mesmo processo feito em (4);
- 7) Obter $P' \in a$ e usando o mesmo procedimento de (4) para obter a reta (hip), que intercepta as retas c e d nos pontos A'' e A''' ;
- 8) Através dos arcos formados pelos pontos $AA'A''A'''$ temos construído o quadrilátero de Saccheri.

Uma vez realizada as construções, exploramos a figura dinamicamente, e os alunos conferiram as propriedades do quadrilátero de Saccheri, que o topo é maior que a base, que os ângulos do topo são congruentes e agudos, um recurso que dificilmente conseguiríamos com régua e compasso.

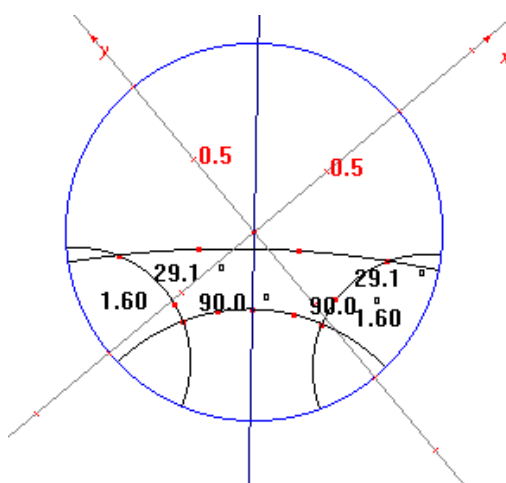


Figura: 99

Realizamos construções do quadrilátero de Lambert e finalmente fizemos uma atividade de demonstração, que utilizava o quadrilátero de Saccheri, para isso íamos de aluno em aluno e realizamos a demonstração juntamente com eles.

Os alunos deveriam demonstrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor que 180° . Seguimos o seguinte roteiro para a demonstração:

- 1 - Construa um triângulo $\triangle ABC$.
- 2 - Sejam D e E os pontos médios respectivamente de \overline{AB} e \overline{AC} . Trace \overline{DE} .
- 3 - Trace por B a perpendicular à reta \overline{DE} , que a encontra no ponto F . Do mesmo modo,

tracemos por C a perpendicular à reta \overline{DE} , que a encontra em G.

4 - O quadrilátero $\square GFBC$ é um quadrilátero de Saccheri, sendo \overline{FG} a base.

5 - $m(\widehat{FBC}) + m(\widehat{GCB})$ é igual à soma dos ângulos internos de $\triangle ABC$. Explicamos que isto é devido a um teorema.

6- $m(\widehat{FBC}) < 90^\circ$ e $m(\widehat{GCB}) < 90^\circ$.

7 - $m(\widehat{FBC}) + m(\widehat{GCB}) < 180^\circ$.

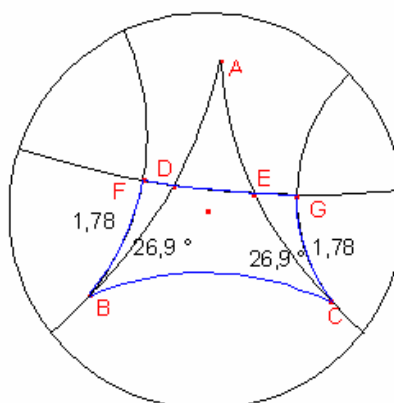


Figura: 100

8 – Portanto, a soma dos ângulos internos de um triângulo, é menor que 180° .

Ao final das atividades apresentamos 3 questões, com o objetivo de buscarmos as impressões dos alunos sobre o trabalho realizado.

Questões:

- 1) O que você achou de realizar estas construções com o auxílio do software?
- 2) Você havia realizado estas construções com régua e compasso e agora com o software.
Como você avalia estes dois recursos para o estudo da geometria Hiperbólica?
- 3) Você gostou de ter participado deste curso?

Respostas:

Aluno P:

Achei legal, é mais rápido do que com régua e compasso.

Aluno M :

Com o software é mais fácil em termos de dar menos trabalho do que com régua e compasso, a questão da visualização é melhor, pois as figuras ficam perfeitas.

Aluno C:

É menos trabalhoso do que com régua e compasso, assim pode-se construir várias vezes a mesma figura sem perder muito tempo.

Aluno J:

Achei interessante e bem mais rápido.

Questão 2:

Aluno P:

Como respondi anteriormente com o software é bem mais rápido, porém ele faz tudo direto, já com régua e compasso faz passo-a passo e necessita saber mais os conceitos. Então um é mais viável num sentido e o outro em outro.

Aluno M:

Tanto um quanto o outro é fundamental, durante as construções a professora nos lembrava que se estivéssemos usando régua e compasso precisaríamos de tais e tais conceitos, então se não tivesse sido feito à mão talvez não nos preocuparíamos com isso e aprendêssemos apenas a utilizar o software e fazer a figura , então considero que se deve fazer dos dois jeitos um para desenvolveros conceitos e do outro para fazer uso da facilidade e da precisão que a tecnologia nos oferece.

Aluno C:

Os dois recursos são bons um oferece mais facilidade e uma melhor visualização da figura e o outro é bom pra gente relembrar conceitos e fazer seguindo as regras da geometria hiperbólica.

Aluno J:

Um é melhor porque usa a teoria e outro é mais rápido e a as figuras ficam mais perfeitas.

Questão 3:

Aluno P:

Sim, é sempre bom aprender coisas novas.

Aluno M:

Sim, além de relembrar conceitos de geometria euclidiana pude conhecer uma outra que não imaginava que pudesse existir.

Aluno C:

Gostei, achei interessante, quem sabe eu possa utilizá-la um dia.

Aluno J:

Sim é muito bom ter a oportunidade de saber mais.

Podemos perceber nas respostas dos alunos, que o trabalho com o software é interessante, pois nos remete à comodidade e a perfeição que a tecnologia nos oferece, seu valor é incalculável, por outro lado em nossa investigação desejamos saber quais as contribuições da utilização integrada do software, da régua e compasso no ensino e aprendizagem da geometria hiperbólica. Compreendemos pelos relatos dos alunos ao final das atividades com o software, que os mesmos tiveram acesso a um conhecimento que por eles foi assimilado, e que a utilização dos recursos integrados foi fundamental para isso.

Acreditamos que nossos sujeitos hoje são capazes de visualizar e identificar triângulos, quadriláteros, retas da geometria hiperbólica, não com o ponto de vista euclidiano, porém com o ponto de vista de habitantes nas superfícies específicas. Se por exemplo, um habitante do espaço hiperbólico fosse traçar a linha mais curta entre dois pontos, apesar de parecerem curvas para nós, para ele é uma reta, para os habitantes do espaço hiperbólico não é possível saber que poderia haver alguém num mundo tridimensional que chamaria de reta uma linha diferente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS:

A escassez de trabalhos na Educação Matemática, que abordam a geometria hiperbólica, e a não abordagem desse importante tema nos cursos de graduação, impulsionou-nos a realizar essa pesquisa. Também, o fato de trabalharmos numa faculdade com alunos do curso de engenharia elétrica, motivou-nos a buscar conteúdos que enriquecessem a formação destes indivíduos, encontramos na geometria hiperbólica temas de estudo que não são habitualmente tratados, mas que podem ter grande aplicabilidade em seu campo de trabalho.

Nossa proposta foi voltada a um público específico, com abordagem da geometria hiperbólica de uma maneira singular, porém acreditamos ser necessário, ainda, o desenvolvimento de outras pesquisas que tenham também, como foco as geometrias não euclidianas. Introduzimos os conhecimentos geométricos não-euclidianos baseados em concepções teóricas, de que a visualização e a análise das propriedades geométricas relativas a um conceito geométrico euclidiano são etapas preliminares para o entendimento destes novos conceitos.

Considerando que os conhecimentos geométricos euclidianos (antes pautados nas relações lógicas e construções de traçados de desenhos) evoluíram, de modo geral, do resultado do desenvolvimento teórico da Matemática e do aparecimento de novas concepções geométricas, em nossa investigação organizamos e aplicamos atividades com conteúdos da geometria não-euclidiana, especificamente a geometria hiperbólica, por entendermos que esse campo do conhecimento é importante para a formação do indivíduo (qualquer que seja o seu espaço de atuação) e que, assim instruídos, estarão aptos a reconhecer as semelhanças e diferenças em relação aos conceitos e conhecimentos euclidianos.

Muitos profissionais da educação indicam a inclusão de conteúdos das Geometrias não-Euclidianas na grade curricular (nível médio ou superior) por considerarem tais conhecimentos geométricos muito apropriados à formação dos alunos, razão pela qual nos interessamos por eles. Também foi nosso objetivo colaborar com a formação de um indivíduo criativo, consciente e crítico do ambiente que o cerca, estimulando nele a capacidade de resolver problemas e de fazer conexões entre os novos conhecimentos e aquilo que já era conhecido, e de aplicar o aprendido no seu cotidiano.

Com o objetivo de contribuir para o ensino e aprendizagem da geometria, em particular da geometria hiperbólica, apresentamos uma proposta que visa à introdução do estudo dessa geometria. Para o desenvolvimento de nosso trabalho, elaboramos uma sequência de atividades que tratavam a geometria hiperbólica, fazendo uso do laboratório de ensino e do laboratório de informática, utilizando os recursos integrados régua e compasso e o software cabri-géomètre II (menu – hiperbólico).

A construção do conhecimento matemático exige uma passagem constante, entre o concreto e o abstrato. Assim, utilizamos diferentes metodologias no desenvolvimento do processo educativo, com a finalidade de poder contribuir para a melhoria da aprendizagem, apresentando representações distintas dos conceitos, através de lápis/papel e do computador, procurando explorar as potencialidades visuais oferecidas por esse último recurso.

Procuramos em nosso trabalho fazer um breve relato histórico dos matemáticos, que se envolveram na tentativa de prova do quinto postulado de Euclides, o que originou as geometrias não Euclidianas. Da mesma forma, procuramos tratar os conceitos da geometria hiperbólica envolvidos no trabalho de modo claro, recorrendo às vezes para as figuras para representar uma situação.

Como já citamos anteriormente, os alunos não possuíam um pleno conhecimento da geometria euclidiana, por isso, fez-se necessário abordar alguns conceitos dessa geometria, necessários para efetuarmos a construção de retas hiperbólicas com régua e compasso, especialmente o conceito de *inversão*, fundamental para a construção de *pontos inversos*.

Como metodologia de ensino, escolhemos a resolução de problemas. Através de situações de aprendizagem o próprio aluno desenvolveu um papel importante na construção do seu conhecimento. Partindo de situações-problema, os educandos puderam usar os conhecimentos já interiorizados, para fundamentar algo que para eles era ainda desconhecido. Destacamos também, que a representação dos objetos hiperbólicos por desenhos, contribuiu para a compreensão dos novos conceitos que estavam sendo apresentados, e muito auxiliou os alunos na busca das respostas para as questões apresentadas.

As atividades continham problemas que se mostravam aos alunos como situações desafiadoras, cuja solução afigurava-se a necessidade de lançar mão de métodos difíceis para efetuar as construções; porém, extrapolavam as perspectivas, utilizando aquilo que era por eles conhecido. À medida que os conceitos eram progressivamente apreendidos, os alunos se sentiam mais motivados e estimulados a prosseguirem o estudo por nós proposto. Outro

aspecto interessante que pudemos constatar foi que o estudo de uma nova geometria pode mesmo contribuir para melhorar a percepção espacial, além de levar as pessoas a repensar e mudar a maneira de enxergar as coisas, como mostrado na fala dos alunos.

O estudo da geometria hiperbólica efetuado com construções no papel, utilizando régua e compasso foi fundamental para assimilar os conceitos, uma vez que com estes instrumentos as construções geométricas foram efetuadas passo a passo, sem pular etapas e colocando os aprendizes diante de cada teoria utilizada na realização de cada procedimento, desse modo, aprendendo o conjunto dos princípios fundamentais da geometria hiperbólica que propomos neste trabalho. Também com o uso do software Cabri-Géomètre II, observamos a importância de um estudo que utiliza os recursos integrados, visto que em alguns momentos o uso somente da régua e compasso seria um trabalho difícil. Com o software visualizamos com exatidão a figura desenhada, além de testar as hipóteses com agilidade e precisão. Pudemos perceber nas respostas dos alunos, que o trabalho com o software é interessante, pois nos remete à comodidade e a perfeição que a tecnologia nos oferece, e que seu valor é incalculável. Por outro lado em nossa investigação desejamos saber quais as contribuições da utilização integrada do software, da régua e compasso no ensino e aprendizagem da geometria hiperbólica, e compreendemos pelos relatos dos alunos ao final das atividades, que os mesmos tiveram acesso a um conhecimento que por eles foi assimilado, e que a utilização dos recursos integrados foi fundamental para isso.

A representação na tela do computador das sequências das construções feitas primeiramente no papel auxiliou no processo de elaboração e da aquisição de conhecimento, pois as propriedades geométricas estudadas foram desse modo, visualizadas. Assim, as limitações próprias do ambiente papel/lápis foram compensadas pelos recursos tecnológicos, o que facilitou o processo de ensino-aprendizagem.

Na construção de figuras geométricas no papel, através da régua e do compasso procuramos dar ênfase à leitura de propriedades e descrição de figuras assim construídas, orientando para que as propriedades geométricas das figuras não fossem lidas somente a partir daquele desenho específico da figura geométrica, mas que fosse analisada tendo em vista as propriedades gerais da classe de figura a que ela faz parte. Se por um lado o caráter estático muitas vezes dificulta a construção do significado, isto é, o conceito global da figura pode não ficar muito claro no ambiente lápis/papel, este vem ser reforçado quando o aluno visualiza as características e/ou propriedades da figura e movimenta os objetos em várias direções,

utilizando as ferramentas do ambiente computacional, o que proporciona aos alunos a aquisição de conhecimentos de uma forma dinâmica.

Destacamos como pontos positivos de nosso estudo os questionamentos e soluções interessantes apresentadas para os problemas e, especialmente, a postura investigativa dos alunos diante das questões propostas e também o fato de podermos ter colaborado com esses alunos na compreensão, em maior amplitude, da geometria euclidiana, pois desconheciam tais conceitos. As atividades proporcionaram momentos de experimentação e conjecturas, conforme já mencionado no capítulo anterior, referente à análise dos dados.

De acordo com o relato escrito dos alunos, verificamos que a aquisição dos conceitos e propriedades básicas sobre a geometria hiperbólica, assim como reflexões sobre ela comparadas à geometria Euclidiana ocorreu de forma satisfatória, pois na maioria das atividades os alunos relacionavam as duas geometrias, observando que as construções utilizadas para se trabalhar no espaço hiperbólico são as mesmas utilizadas no euclidiano mudando apenas os conceitos, que assumem definições próprias da geometria hiperbólica.

Com relação ao questionamento principal de nossa pesquisa, podemos dizer que o estudo da geometria hiperbólica com o uso de régua e compasso e do software *cabri-géomètre II* trouxe muitas contribuições para o conhecimento dos assuntos abordados, haja vista que os alunos se mostraram muito interessados no desenvolvimento das atividades.

Como principal contribuição, destacamos: o fato de os alunos terem compreendido a existência de uma nova geometria, a verificação da existência de um sistema axiomático consistente, que permite a visualização da negação do quinto postulado de Euclides. Podemos afirmar que os sujeitos dessa pesquisa, são capazes de identificar retas, triângulos, quadriláteros da geometria hiperbólica. Acreditamos ainda, que esses alunos foram colocados frente a um conhecimento que não fazia parte de suas rotinas, porém ações não rotineiras são inevitáveis e também essenciais na vida diária das pessoas, e pensamos ter contribuído na formação dos mesmos, uma vez que existe a possibilidade de virem a usufruir desse conhecimento ao longo de suas carreiras.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLEVATO, N.S.G. **Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência.** Rio Claro, 2005. Tese de Doutorado, UNESP– Universidade Estadual Paulista.

ALVES – MAZZOTTI, A. J & GEWANDSZNAJDER. P. **O Método nas ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa.** São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2001. 2ª ed.

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de Matemática via resolução, exploração, codificação e decodificação de problemas.** Rio Claro, 1998. Dissertação de mestrado – Universidade Estadual Paulista.

ARCARI, I. **Um texto de Geometria Hiperbólica.** Campinas, 2008. Dissertação de Mestrado –Universidade Estadual de Campinas.

BARBOSA, J.L.M. **Geometria Hiperbólica.** 20º Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA: Instituto de Matemática Pura e aplicada, Rio de Janeiro, 1995.

BARBOSA, J.L.M. **Geometria Hiperbólica.** Goiânia: Instituto de matemática e estatística da UFG, 2002.

BOGDAN, R.C; BIKLEN S. K. **Investigação qualitativa em educação.** Porto: Porto Editora, 1994. 336 p.

BRITO, A. J. **Geometrias não-euclidianas: um estudo histórico-pedagógico.** Campinas, 2005. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas.

CABARITI, E. **Geometria Hiperbólica. Uma proposta metodológica em ambiente informatizado.** Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2004.

COUTINHO, L. **Convite às geometrias não-euclidianas.** Rio de Janeiro, Interciência, 2001.

COXETER, H. S. M. **Introduction to Geometry.** New York: John Wiley & Sons, 1961.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas: 1ª a 5ª séries.** São Paulo. Ática, 1999.

EVES, H. **Introdução à história da matemática;** tradução: Hygino Domingues, 2ª ed. Campinas, S.P: Editora da UNICAMP, 1997.

FAINGUELERNET, E.K. **O ensino de geometria no 1º e 2º Graus:** A Educação Matemática em Revista. São Paulo, SBEM, n.4, pp. 45-53, 1995.

FETISSOV. A. I. **A demonstração em Geometria.** Tradução Hygino Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

GAZIRE, E. **Resolução de Problemas uma perspectiva de trabalho em sala de aula,** Dissertação de Mestrado, UNESP, Rio Claro, 1989.

GOODMAN-STRAUSS, C. **Compass and Straightedge in the Poincaré Disk**. The Mathematical Association of America, January, 2001.

GOULART, L. J. **O que é geometria? Por que ensiná-la?** Dissertação de mestrado, Rio Claro, 1989. UNESP- Universidade estadual Paulista.

GRAVINA, M. A; SANTAROSA, L. M. Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados: In: CONGRESSO RIBIE, 4. 1998, Brasília. **Actas do IV Congresso RIBIE**. Brasília: Rede Iberoamericana de Informática Educativa, 1998. p. 117 -178. CD-ROM.

HILBERT, D. **Fundamentos da Geometria**. Oliveira, A. J. Franco (coord.). Lisboa: ed. Gradiva, 2003.

JACOBS, H. J. **Geometry**. New York: W. H. Freeman and Company, 1974.

LINS, G. H. B. **Introdução à geometria Hiperbólica: Semelhanças e Diferenças**. Dissertação (mestrado em matemática aplicada) Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2002.

LUDKE, M., ANDRÉ, M.E.D.A. **Pesquisa Qualitativa em Educação**. Abordagens Qualitativas. São Paulo, Editora. Pedagógica e Universitária, 1986.

KUTUZOV, B. V. **Studies in Mathematics – Volume IV – Geometry**. Chicago, 1960.

MARMO, C. **Construções fundamentais**. Livro I. São Paulo: Moderna, 1964.

_____ **Métodos I**. Livro II. São Paulo 1974.

MURARI, C., BARBOSA R. M. **Divagações de um problema curioso**. São Paulo, Sociedade Brasileira de Matemática, Revista do Professor de Matemática nº 16, 1ºsem1990, p.13-18.

MURARI, C., PEREZ G., BARBOSA R. M. **Caleidoscopios educacionales: coloraciones múltiples**. Barcelona: Graó, Uno - Revista de Didáctica de las Matemáticas nº 27, 2001, p.7-20.

MURARI, C. **A tesselação (5,6,6) – a bola de futebol - visualizada em caleidoscópio generalizado**. Recife: SBEM, CD - Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, GT-03, CC., 2004.

MURARI, C. **Espelhos, caleidoscópios, simetrias, jogos e softwares educacionais no ensino e aprendizagem de Geometria**, In BICUDO, M. A & BORBA, M.C (orgs). **Educação Matemática: pesquisa em Movimento**, São Paulo: Cortez, 2004, p.198-212.

MURARI, C; LAZARI, H. **Tesselações Hiperbólicas com régua e compasso**, In: **VII EPEM - Matemática na Escola: conteúdos e contextos**, ANAIS DO VII EPEM. São Paulo: SBEM - SP, 2004. CD. P.01 – 10.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista da Educação Matemática – ano 9 - 10, 2004 - 2005, p.1- 6.**

ONUCHIC, L.L.R. **Ensino e aprendizagem da matemática através da resolução de problemas.** In BICUDO, M.A.V. (org.) **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e perspectivas.** São Paulo. Editora da UNESP, 1999, p.213 – 231.

PAIS, L. **Intuição, Experiência e Teoria Geométrica.** Revista Zetetiké, v.4, n.6, p.65-74, jul/dez, Campinas, SP,1996.

PENTEADO, M.A, MURARI, C., LAZARI, H. **Construções Geométricas de Quadriláteros de Saccheri** In: IX EPREM - Encontro Paranaense de Educação Matemática, 2007, Assis Chateaubriand. **Educação Matemática: Avanços e Desafios para Formação de Professores.** , 2007. v.CD. p. 01 – 14.

PILLA, E. C. G . **Construções de constelações de sinais geometricamente uniformes.** Dissertação de mestrado (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro. Interciência, 1978.

RIBEIRO, M. J. B.; PONTE, J. P.(2000). A formação em novas tecnologias e as concepções e práticas dos professores de matemática. **Quadrante**, v. 9, p.3-26.

ROCHA, M.V. **Uma proposta de ensino para o estudo da geometria hiperbólica em ambiente de geometria dinâmica.**São Paulo, 2008. Mestrado em educação Matemática. Pontífca Universidade Católica de São Paulo- PUC- SP.

RODRIGUES. V. **A resolução de problemas como estratégia para incentivar e desenvolver a criatividade dos alunos na prática educativa matemática.** Rio Claro, 1992 . Mestrado em educação matemática. Universidade Estadual Paulista – UNESP.

ROMBERG, T. A. **Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa - Perspectives on Scholarship and Research Methods.** Tradução: Lourdes de La Rosa Onuchic. In: Bolema, Rio Claro (SP), ano 20, nº 37, 2007, pp. 93 a 139.

ZULATO, R.B.A. **Professores de Matemática que utilizam softwares de Geometria Dinâmica: suas características e perspectivas.** Rio Claro, 2002. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista-UNESP.

Anexos

Anexo 1

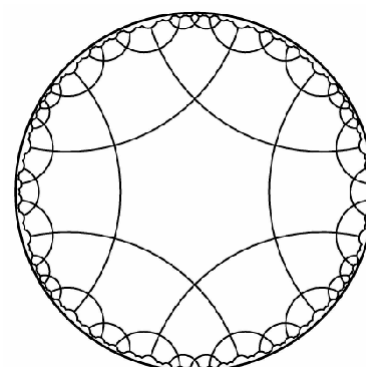
TESSELAÇÕES HIPERBÓLICAS COM RÉGUA E COMPASSO

Claudemir Murari, UNESP, Rio Claro, murari@linkway.com.br

Henrique Lazari, UNESP, Rio Claro, hlazari@rc.unesp.br

Tesselações do plano Hiperbólico

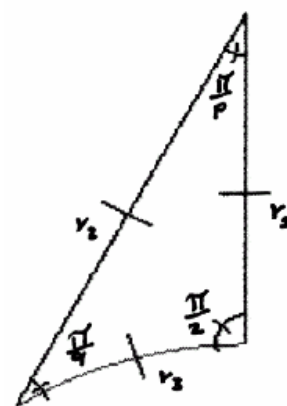
Vamos chamar de tesselação regular ou ladrilhamento regular do plano hiperbólico a uma decomposição do mesmo em polígono congruentes entre si, de modo que estes polígonos cubram todo o plano hiperbólico, e que eles se interceptem somente em vértices ou lados inteiros, fixamos uma convenção de notação, se em uma tesselação, os polígonos tem p vértices e se encontram q polígonos em cada vértice, então chamamos a tesselação regular de $\{p,q\}$, na figura ao lado vemos uma representação da tesselação $\{6,4\}$:



O processo de construção de tesselações regulares, em geral toma como ponto de partida um triângulo hiperbólico retângulo (adequado, com ângulos $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{2}$, satisfazendo a

inequação $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$) e, depois, por repetidas rotações em torno

dos seus vértices, obtemos um polígono regular que por translações vai construir a tesselação.

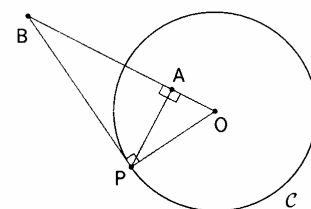


O usual é começar com o triângulo retângulo, conforme a figura. Mas, neste caso, transformamos depois este triângulo em um triângulo isósceles por meio de uma reflexão (na figura ao lado, seria reflexão no eixo vertical)

A fundamentação teórica deste processo pertence à teoria geométrica dos grupos de isometrias do plano hiperbólico, para um estudo completo deste assunto sugerimos []

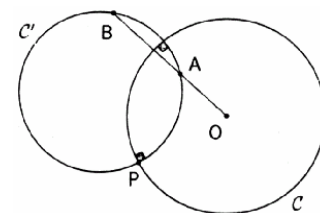
Construções Elementares

1) No conjunto das técnicas fundamentais para a execução do presente processo, é fundamental a idéia de inversão. Queremos lembrar que se B é um ponto exterior a um círculo C , de centro O , então seja P um ponto de C que também é ponto do círculo centrado no ponto médio de \overline{OB} e passando por O (logo por B).

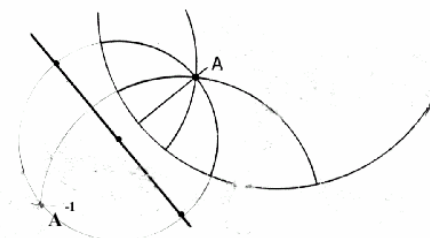


Então, por uma inspeção direta da figura, vemos que o círculo de centro B e passando por P é ortogonal a C e a projeção perpendicular de P em \overline{OB} , denotado por A é o inverso de B . A construção está representada na figura seguinte:

2) Dados dois círculos ortogonais C e C' e um ponto A pertencente a C' (como mostra a figura, construir o inverso de A com respeito a C . Para isso, basta traçar a semi-reta \overline{OA} : O , centro de C , para determinar B em C' .

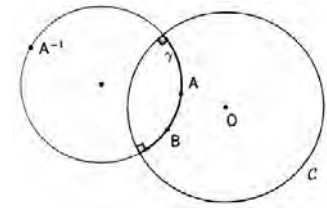


3) Dado um círculo C e um ponto A , como na figura ao lado. Traçar o lugar geométrico Lg dos centros de círculos ortogonais a C e passando pelo ponto A .

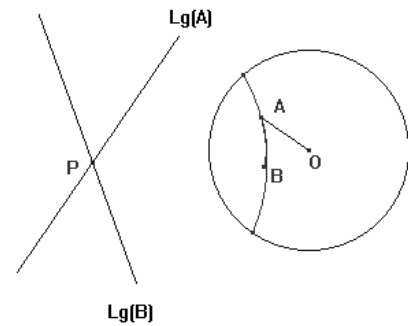


Construir o inverso de A^{-1} de A , e traçar a bissetriz de $\overline{AA^{-1}}$

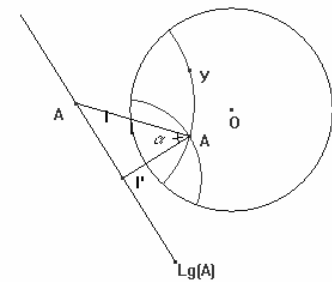
4) Seja C o disco de Poincaré. Se A e B estão no seu interior, traçar a geodésica (reta hiperbólica) por A e B . Inverter A , obtendo A^{-1} e a desejada reta é o arco γ através de A, B, A^{-1} .



5) Dados os pontos A, B na circunferência C e seus lugares geométricos $Lg(A)$ e $Lg(B)$. Construir a reta hiperbólica. Construir o arco com centro em P e raio $\overline{PA} = \overline{PB}$.

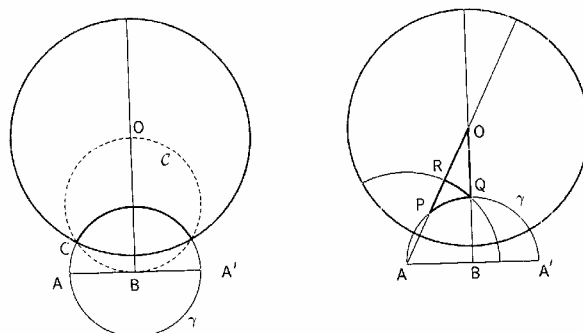


6) Dada uma reta hiperbólica γ , um ponto A pertencente a γ e um ângulo euclidiano α , construir uma reta hiperbólica encontrando γ em A , com ângulo α . Construir o $Lg(A)$ e o centro do arco geodésico B^{-1} . Seja l o segmento de reta unindo A e B^{-1} . Rotacionando l de um ângulo α obtemos l' . Então, a geodésica tem centro $P = Lg(A) \cap l'$ e raio \overline{PA} .



Construção do triângulo gerador da tesselação 7,4,2

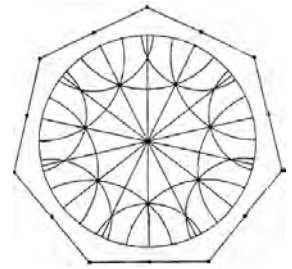
Todo o processo de construção do triângulo gerador tem como referência a figura abaixo.



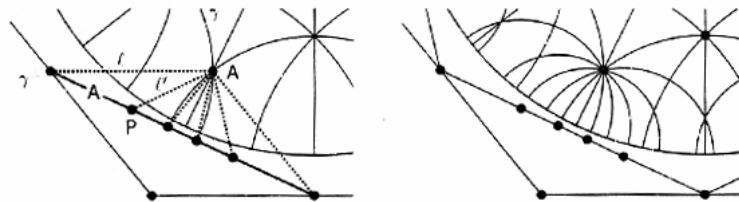
Uma característica do processo é que a circunferência que determina os limites do plano hiperbólico será obtida durante a construção. O ponto que vai ser o centro do nosso modelo vai ser denotado por O e tomo um ponto A qualquer do plano (euclidiano). Vamos considerar agora a rotação de centro O de ângulo $2\frac{\pi}{7}$ (lembramos que consideramos sempre as rotações no sentido anti-horário) e vamos chamar de A' a imagem do ponto A por esta rotação e denotamos por B o ponto médio do segmento $\overline{AA'}$, vamos denotar por γ o círculo centrado em B e passando por A , logo também por A' . Pelo ponto médio de \overline{OB} traçar um círculo C passando por B e O e vamos denotar por C e C' os elementos de $C \cap \gamma$, vamos então construir o círculo que delimita o plano hiperbólico, tomando O como centro e passando por C e C' .

Vamos notar que o triângulo OCB está contido em um semicírculo e portanto é retângulo em C o que mostra que γ determina uma reta hiperbólica, ou seja é ortogonal ao círculo e também é ortogonal à reta hiperbólica (neste caso, segmento) determinada por \overline{BO} (note que é um subconjunto próprio de \overline{BO}). Considerando agora $P = \overline{AO} \cap \gamma$, e o triângulo APB que é isósceles e tem os ângulos \hat{A} e \hat{P} iguais a $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}$, de onde concluímos que o ângulo entre γ e \overline{AO} é $\pi/7$. Obtivemos, então, um triângulo hiperbólico isósceles PQO com ângulos $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{7}$ e $\frac{\pi}{7}$. Seja, agora, $Q = \overline{BO} \cap \gamma$, então segue da definição de Q que ABQ é um triângulo retângulo isósceles de ângulos $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{4}$. Vamos agora, construir o ponto R como a intersecção da circunferência com centro A e passando por Q (que deve ser perpendicular ao círculo que determina o plano hiperbólico), do triângulo (euclidiano) ABQ , vemos que o triângulo hiperbólico OQR tem ângulos $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{7}$, que é o requerido.

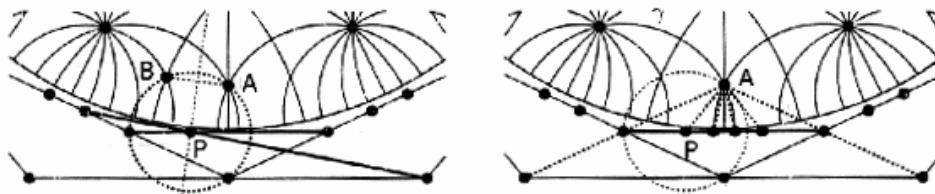
Agora, podemos pavimentar parte do disco de Poincaré por imagens congruentes desses triângulos através de simetrias, obtendo-se a figura ao lado.



A seguir, precisamos adicionar geodésicas em torno de pontos da figura onde devemos obter novos triângulos congruentes ao triângulo OQR. Assim, teremos tipos de situações como as apresentadas nas figuras abaixo:

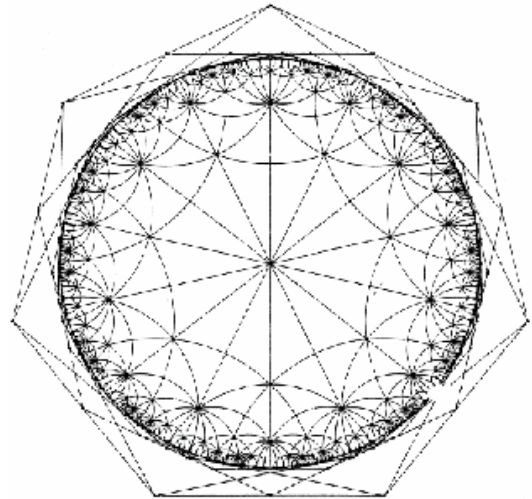


rotacionando geodésicas em torno de um ponto.



Produzindo uma geodésica através de dois pontos e rotacionando em torno de um ponto.

Prosseguindo neste processo, teremos obtido a tesselação ao lado:

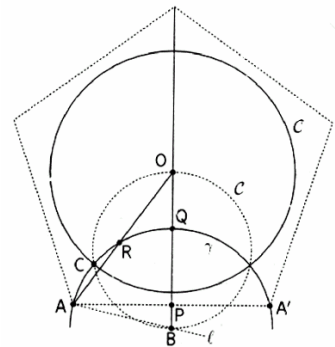


Construção da pavimentação por triângulos com ângulos $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{2}$.

A figura ao lado mostra a construção do triângulo desejado.

Não é difícil demonstrar que triângulo ORQ tem os ângulos

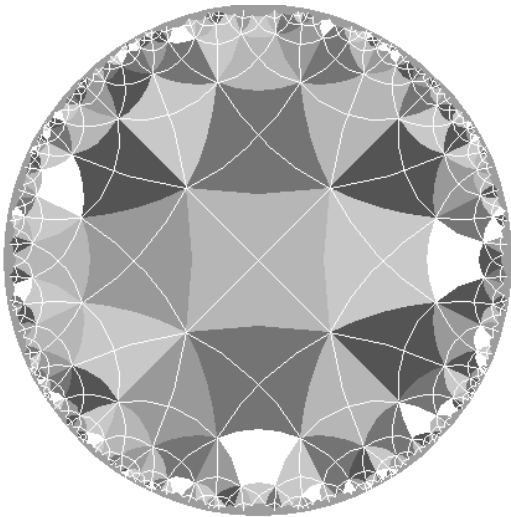
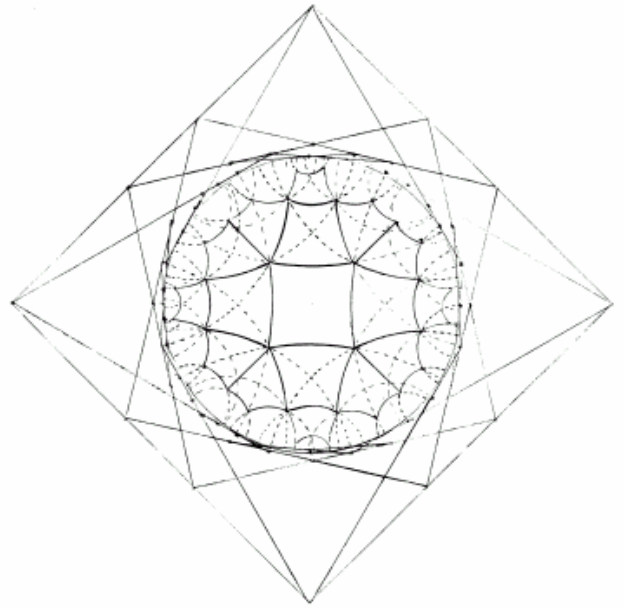
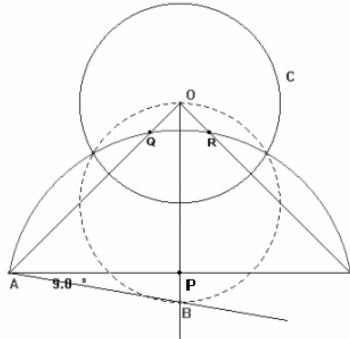
referenciados. O ângulo $\widehat{PAB} = \alpha = \frac{\pi}{p} - \frac{\pi}{q}$.



Tendo o triângulo, o procedimento é análogo como antes, para produzir a pavimentação por triângulos.

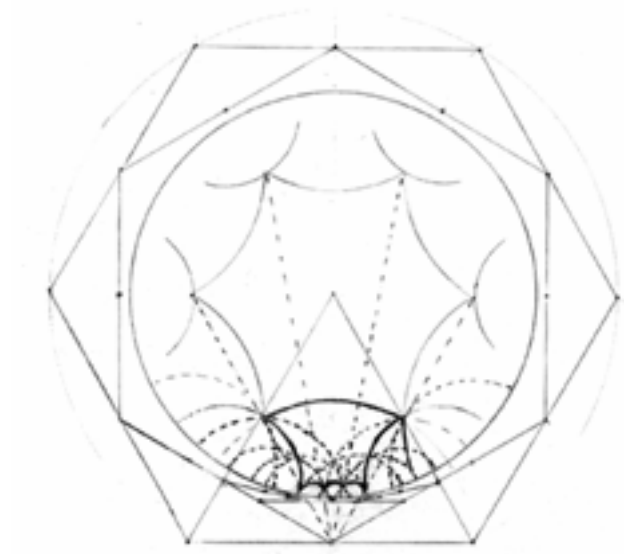
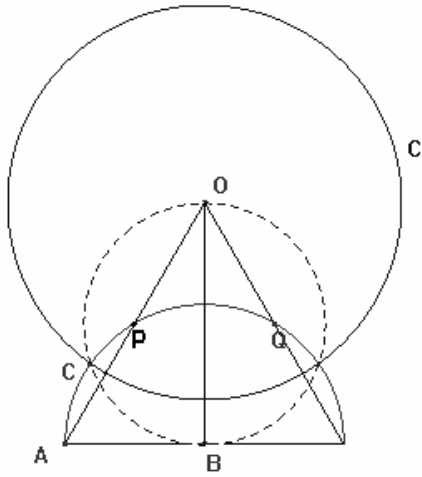
EXEMPLOS DE OUTRAS TESSELAÇÕES

Utilizando os procedimentos acima especificados, podemos obter tesselações regulares, como as abaixo:

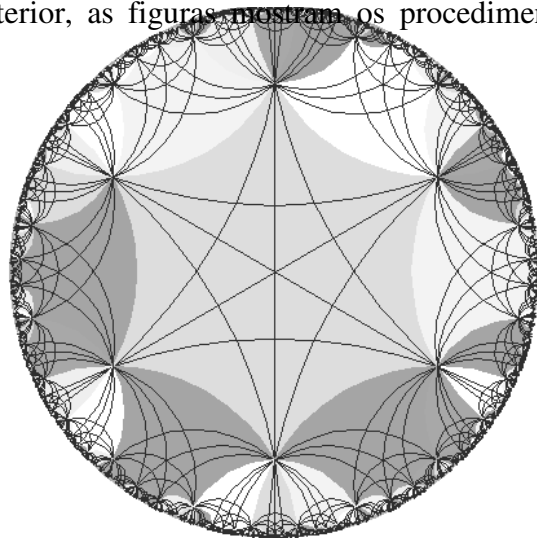


As figuras, mostram, primeiro, o triângulo original, e seu simétrico, formando o triângulo isósceles OQR. Por rotações, obtemos, por régua e compasso, a segunda figura, que é parte da tesselação $\{4,5\}$. O prosseguimento do processo gera a figura ao lado.

A Tesselação {6,6}



Conforme o explicitado na tesselação anterior, as figuras mostram os procedimentos para chegar-se à tesselação {6,6}.



Considerações finais

Este trabalho mostra que podemos construir tesselações regulares do plano hiperbólico através de régua e compasso e, também, fazer comparações entre as diferentes geometrias. Dessa maneira, conceitos como inversão, simetria e lugares geométricos podem ser estudados de uma maneira diferente da tradicional, possibilitando um enriquecimento de conhecimentos por parte dos alunos da graduação em Matemática.

Referências Bibliográficas

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: SBM, 1985.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Hiperbólica**. Rio de Janeiro: IMPA, 1995.

COXETER, H.S.M. **Introduction to GEOMETRY**. New York: Wiley & Sons, 1961.

GOODMAN-STRAUSS, C. **Compass and Straightedge in the Poincaré Disk**. The Mathematical Association of America, January, 2001.

KATOK, S. **Fuchsian Groups**. Chicago: Library of Congress Cataloging, 1992.

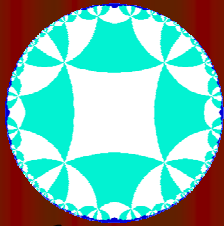
KUTUZOV, B. V. **Studies in Mathematics – Volume IV – Geometry**. Chicago, 1960.

Anexo 2: Ilustrações Tesselações hiperbólicas

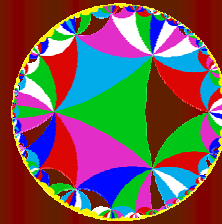
Tesselações hiperbólicas

Vamos chamar de tesselação regular ou ladrilhamento regular do plano hiperbólico a uma decomposição do mesmo em polígono congruentes entre si, de modo que estes polígonos cubram todo o plano hiperbólico, e que eles se interceptem somente em vértices ou lados inteiros, fixamos uma convenção de notação, se em uma tesselação, os polígonos tem p vértices e se encontram q polígonos em cada vértice, então chamamos a tesselação regular de $\{p,q\}$, na figura seguinte vemos uma representação da tesselação $\{4,8\}$:

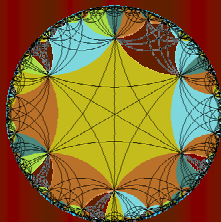
Tesselação $\{4,8\}$:



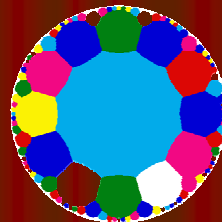
Tesselação $\{3,12\}$:



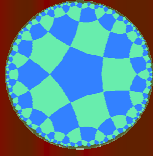
Tesselação $\{6,6\}$:



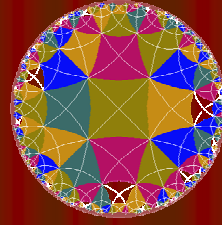
Tesselação $\{12,3\}$:



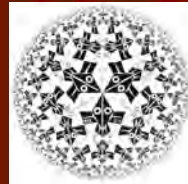
Tesselação {5,4}:



Tesselação {4,5}



Gravuras de Maurits Escher



Anexo 3: Atividades

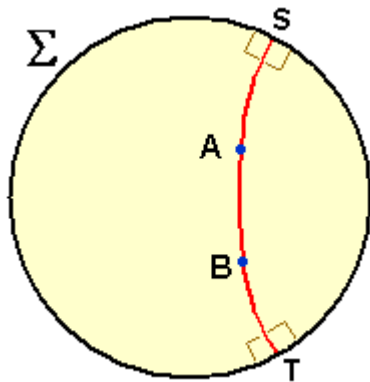
Anexo 1: Atividades

Atividade I

Um quadrilátero com dois ângulos retos e dois lados congruentes. AB é o lado base, AD e BC são lados congruentes, enquanto DC é o lado topo do quadrilátero. É possível que esse quadrilátero, tenha os ângulos em D e C congruentes e agudos?

Atividade II

Observe o disco de Poincaré.



Como você definiria uma reta na geometria hiperbólica?

Atividade III

Existem "retas" do plano hiperbólico que, quando mapeadas no disco S têm a aparência de retas (segmentos) do plano euclidiano. Quais são essas retas?

Dada uma reta no plano hiperbólico quantas retas paralelas à reta dada podem ser construídas?

Observando a resposta da atividade anterior Formalize o enunciado do 5º postulado para a Geometria hiperbólica. Postulado de Lobashevsky.

Atividade IV

Conceito de ângulo.

Se duas retas hiperbólicas se interceptam num ponto A , a medida do ângulo formado entre elas, é por definição, a medida do menor ângulo formado pelas semi-retas euclidianas tangentes aos arcos (reta H) em A .

- Construa retas no plano hiperbólico.
 - Meça o ângulo entre as retas construídas na atividade anterior.
 - Você considera possível obter um triângulo nesta geometria?
 - Construa 1 triângulo qualquer no plano hiperbólico.
- 4) O que você achou de fazer construções com régua e compasso?
 - 5) Você sentiu dificuldade em fazer essas construções?
 - 6) Você considera que esta geometria possa ser aplicada em alguma situação do cotidiano.

Atividade V.

Dado o modelo do disco de Poincaré, qualquer arco de circunferência contidos no interior do disco pode ser considerado uma reta hiperbólica?

- Construa um feixe de retas que passam pelo ponto P, no modelo de Poincaré.
 - Construa uma reta que passe por dois pontos.
 - Construa retas perpendiculares.
 - Construa um triângulo.
 - Construa um triângulo retângulo.
- 1) Quais conceitos de geometria Euclidiana foram utilizados nessas construções?
 - 2) Você considera que estas construções feitas com régua e compasso e passo a passo podem contribuir para que os conceitos sejam assimilados?

Atividade VI

Como vimos no referencial histórico, o estudo desse tipo de quadrilátero resultou no desenvolvimento das geometrias não - euclidianas. O quadrilátero de Sacheri tem 2 ângulos retos e os 2 lados perpendiculares à base congruentes entre si. Seja ABCD um quadrilátero de Sacheri, AB é o lado base, AD e BC são os lados

Congruentes, enquanto AC é o lado topo do quadrilátero.

- Construa esse quadrilátero no modelo do disco de Poincaré.

Atividades para serem trabalhadas com o uso do Cabri- Géomètre II.

Atividade VII

- Construa retas no plano hiperbólico.
- Meça o ângulo entre as retas construídas na atividade anterior.
- Construa um feixe de retas que passam pelo ponto P, no modelo de Poincaré.
- Construa uma reta que passe por dois pontos.
- Construa retas perpendiculares.

Atividade VIII

Construa uma reta a e um ponto P . Construa também duas retas paralelas à reta a que passem pelo ponto P , retas (b e c). As retas b e c formarão entre si um espaço angular QPR à direita de P e XPY à esquerda de P .

Construam retas nesses espaços angulares e que passem pelo ponto P .

Explore dinamicamente a figura.

O que você observa sobre essas retas em relação à reta a ?

Definir paralelas assintóticas, paralelas divergentes e retas secantes.

Atividade IX

Tracem retas no plano hiperbólico:

- Próximas à extremidade de disco
- Próximas ao centro do disco.
- Que passem pelo centro do disco.

Atividade X

Construa uma reta A e um ponto P , e construa duas paralelas à reta a pelo ponto P (retas b e c). Escolha um ponto W na reta a e um ponto Y na reta b . Construa também uma reta perpendicular à reta a pelo ponto P , e chame esta intersecção de Q .

Explore dinamicamente a figura.

O que você observa em relação aos ângulos WPQ e YPQ ?

Definir ângulo de paralelismo.

Atividade XI

Construa um triângulo.

Construa um triângulo isósceles.

Construa um triângulo equilátero.

Construa um triângulo retângulo.

Atividade XII

Abaixo estão anunciados alguns teoremas da geometria euclidiana.

Verifique quais também são válidos na geometria hiperbólica.

- 1- A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° .
- 2- Em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.
- 3- Os ângulos internos de um triângulo equilátero medem 60° .
- 4- O teorema de Pitágoras é válido na Geometria Hiperbólica?

Explore essas questões dinamicamente.

Atividade XIII

Construa quadriláteros de Saccheri e verifique que o topo é sempre maior que sua base.

Atividade XIV

Demonstre que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180° .

Atividade XV

Construa quadriláteros que possuam 3 ângulos retos (quadriláteros de Lambert) e investigue o que acontece com os outros ângulo.

Atividade XVI

Seja c paralela assintótica à reta a por P . A reta a é também paralela assintótica à reta c por um seu ponto qualquer? Explore esta questão dinamicamente.