

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Campus de Rio Claro

Fernando de Mello Trevisani

## Estratégias de generalização de padrões matemáticos

Dissertação de Mestrado apresentada  
ao Instituto de Geociências e Ciências  
Exatas do Campus de Rio Claro, da  
Universidade Estadual Paulista Júlio  
de Mesquita Filho, como parte dos  
requisitos para obtenção do título de  
Mestre em Educação Matemática.  
Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinicius  
Maltempi

Rio Claro - SP  
2012

Fernando de Mello Trevisani

## Estratégias de generalização de padrões matemáticos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Marcus Vinicius Maltempo (Orientador)

Profa. Dra. Ana Paula dos Santos Malheiros

Profa. Dra. Miriam Cardoso Utsumi

Rio Claro - SP, 28 de janeiro de 2013

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a Deus, por me dar saúde e me tornar capaz de alcançar esse objetivo.

À minha família, em especial à minha mãe Neusa e à minha avó Cida, fundamentais em minha vida e que muitas vezes ofereceram palavras de conforto tão importantes para que eu seguisse meu caminho.

Aos meus tios Norberto e Maria Rosa, pelas inúmeras conversas e orientações como se aconselhassem um filho deles.

À minha futura esposa Amanda, pelo amor, companhia, carinho e paciência. Obrigado por fazer parte e por ser minha vida.

Ao meu orientador, o professor Dr. Marcus Vinicius Maltempo, pelas excelentes orientações e conversas não somente no âmbito acadêmico, mas também pessoal. Obrigado pela sua paciência e dedicação professor!

Às professoras Dra. Miriam Utsumi e Dra. Ana Paula Malheiros, pelas contribuições, críticas e elogios que puderam aprimorar meu trabalho.

Aos membros do grupo de pesquisa GPIMEM, que foram fundamentais para a realização dessa pesquisa. Obrigado por lerem meus capítulos e contribuírem com sugestões significativas para o aperfeiçoamento desse trabalho.

A todos os amigos que fiz em Rio Claro, pelo conhecimento compartilhado e principalmente pelos momentos de risadas e conversas, em especial ao Danilo, Vanessa, Debbie, Nick, Fabian, Fernanda, Denival, Tati, Marcelo, Ana, Línlya, Nilton, Tiago, Maitê, Flávio, Felipe, Vinicius, Jean, Washington, Anderson, Rejane, Daise, Cida, Alexander, Silvana, Ricardo, Elaine, Rosilda, Glen e Silvio. Cada um de vocês foi especial nesses dois anos. Lembrarei-me de todos sempre!

À Tati, Marcelo e Jean, ao Leandro, ao Glen e às meninas da república “Siriemas”, por terem me dado um lugar para ficar em Rio Claro nas vezes que precisei.

À Ariadne, Silvio, Vanessa e Línlya pelas conversas e risadas nos vários trajetos São Carlos – Rio Claro que realizamos juntos.

Aos meus amigos de Marília, São Carlos e Sorocaba, com os quais convivi pouco nesses dois anos, mas cujos momentos de convivência foram fundamentais para mim. É sempre um prazer revê-los!

A todos que de alguma forma puderam contribuir com esse trabalho.

## RESUMO

Pesquisas têm utilizado e discutido com frequência o ensino da álgebra por meio do trabalho com padrões. Além disso, programas governamentais buscam inserir computadores nas escolas públicas, objetivando melhorar a qualidade do ensino. Nesse contexto, apresento esta pesquisa norteada pela questão “**quais são as estratégias utilizadas por alunos do 7º ano do Ensino Fundamental para generalizar padrões com o software MiGen?**”. Buscando compreender as estratégias que estudantes desse ano escolar utilizam para generalizar padrões com o uso de um software denominado MiGen, que trabalha com padrões que se movimentam na tela do computador, uma investigação de caráter qualitativo foi realizada em uma escola pública da cidade de Rio Claro, interior do estado de São Paulo, Brasil. Seis atividades foram elaboradas e aplicadas a oito alunos, que responderam, em duplas, às questões dadas e interagiram com o computador ao mesmo tempo. A análise dos dados se deu com base em cinco estratégias de generalização, a saber: tentativa e erro, contagem, termo unidade, diferença e explícita. A partir dos resultados e do referencial teórico adotado, concluímos que as estratégias usadas pelos alunos foram a explícita, a termo unidade e a contagem, e que o MiGen influenciou na escolha delas para se determinar uma expressão geral de um padrão, principalmente porque este é apresentado de forma dinâmica na tela do computador. Assim, as estratégias utilizadas pelos alunos para generalizar os padrões visaram a busca pela expressão geral do padrão ao invés do trabalho com casos particulares, contribuindo para o desenvolvimento do processo de generalização algébrica dos alunos participantes da pesquisa.

**Palavras-chave:** Tecnologias. Álgebra. Pensamento algébrico. Ensino de matemática.

## ABSTRACT

Research has frequently used and discussed the teaching of algebra by working with patterns. Moreover, educational policies seek to put computers in public schools, aiming to improve the quality of teaching. In this context, I present this research guided by the question "what are the strategies used by grade-7 students to generalize patterns with software MiGen?". A qualitative study conducted with elementary school students in a public school in Rio Claro, at state of São Paulo, Brazil. Trying to understand the strategies that these students used to generalize patterns using software called MiGen, which works with patterns that move on the computer screen. Six activities were developed based on activities available in the software tutorial. Eight students participated in the study, conducting the activities in pairs, completing the tasks on sheets and interacting with the computer at the same time. The analysis of data was based on five strategies of generalization, namely guess-and-check, counting, whole-object, difference and explicit. From the results and the theoretical approach, I conclude that the strategies used by the students were explicit, whole-object and counting, and that MiGen influenced the choices of these strategies to determine a general expression of a pattern, mainly because this is displayed dynamically on the computer screen. Thus, the strategies used by students to generalize patterns aimed the search for the general expressions of the patterns instead of working with individual or singular cases. It contributed to the development of the process of algebraic generalization of the students.

**Key words:** Technologies. Algebra. Algebraic thinking. Mathematics teaching.

## SUMÁRIO

<b>1 APRESENTAÇÃO DA PESQUISA .....</b>	<b>7</b>
1.1 <i>Gênese da pesquisa .....</i>	<i>7</i>
1.2 <i>A pergunta diretriz.....</i>	<i>8</i>
1.3 <i>Estrutura da dissertação .....</i>	<i>9</i>
<b>2 ÁLGEBRA, TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO E A RELAÇÃO ENTRE AMBAS .....</b>	<b>11</b>
2.1 <i>Concepções de álgebra e de educação algébrica e o ensino e aprendizagem de álgebra por meio de padrões.....</i>	<i>11</i>
2.2 <i>A Presença das TIC na educação .....</i>	<i>18</i>
2.3 <i>Álgebra e TIC.....</i>	<i>20</i>
<b>3 REFERENCIAL TEÓRICO .....</b>	<b>24</b>
<b>4 METODOLOGIA DE PESQUISA.....</b>	<b>39</b>
4.1 <i>Contexto de pesquisa .....</i>	<i>40</i>
4.1.1 <i>A Atividade-piloto.....</i>	<i>40</i>
4.1.2 <i>A escola e os alunos.....</i>	<i>41</i>
4.1.2.1 <i>Dupla 1: Helen e Naiara.....</i>	<i>43</i>
4.1.2.2 <i>Dupla 2: Leandro e Laura.....</i>	<i>43</i>
4.1.2.3 <i>Dupla 3: Vanessa e Joana.....</i>	<i>44</i>
4.1.2.4 <i>Dupla 4: Renan e Gustavo .....</i>	<i>45</i>
4.1.3 <i>O software MiGen.....</i>	<i>45</i>

4.2 Coleta dos dados.....	51
4.2.1 As atividades.....	52
4.3 Análise dos dados .....	53
<b>5 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS.....</b>	<b>55</b>
5.1 Atividade 1: A escada.....	55
5.2 Atividade 2: Construindo pontes.....	62
5.3 Atividade 3: Construindo escadas .....	69
5.4 Atividade 4: Construindo canteiros.....	80
5.5 Atividade 5: Construindo flores.....	84
5.6 Atividade 6: Construindo uma cerca.....	91
5.7 Os dados à luz da literatura.....	96
<b>6 CONCLUSÕES .....</b>	<b>102</b>
6.1 O software MiGen e as estratégias de generalização .....	102
6.2 Dificuldades encontradas .....	105
6.3 Sugestões para futuras pesquisas .....	107
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>108</b>

# 1 APRESENTAÇÃO DA PESQUISA

## 1.1 *Gênese da pesquisa*

Em experiências vivenciadas por mim durante os estágios supervisionados das disciplinas “Prática de Ensino de Matemática I e II” cursadas em 2009, durante minha graduação, pude constatar a dificuldade dos alunos da educação básica em compreender parte dos conceitos algébricos.

A forma de ensino dos professores de Ensino Fundamental observada nos estágios, que visava auxiliar os alunos a encontrar uma regra geral (na maioria das vezes algébrica) para determinados valores, era apresentar os problemas de modo independente de qualquer contexto, sem sequer mencionar, direta ou indiretamente, os processos que os conduziam a formar a ideia de como fazer uma generalização matemática, como, por exemplo, a utilização e identificação de padrões.

No ano de 2010 lecionei matemática em uma escola particular. Nela, o conteúdo de matemática era dividido em três disciplinas, denominadas Desenho Geométrico, Programa de Desenvolvimento Matemático (PDM)<sup>1</sup> e Matemática. Na disciplina de PDM, na qual ministrei aulas para os 6º, 7º, 8º e 9º anos, pude notar o interesse dos alunos pelas atividades que eram realizadas com o uso do computador. Em algumas delas, nas quais os alunos tinham que observar, formular, testar e então responder determinadas perguntas, eles se mostravam mais dispostos e interessados em participar em comparação com outras situações em que não era utilizada essa tecnologia.

Esse fato levou-me a querer investigar o motivo desse interesse dos alunos. Nesse sentido, conversei cerca de uma hora com cerca de vinte alunos e os questioneei sobre as atividades aplicadas em PDM. A maioria disse que o computador facilitava a visualização geral da atividade, pois eles podiam colocar tudo na mesma tela, e que também o aprendizado não dependia apenas do que o professor iria falar e explicar: eles podiam formular conjecturas e, com a ajuda do

---

<sup>1</sup> Tem por objetivo o desenvolvimento da inteligência lógico-matemática por meio do uso de computador, jogos eletrônicos e de tabuleiro, e qualquer outra tecnologia que possibilite uma aprendizagem lúdica.



computador, verificar sua veracidade, tornando assim o processo de aprendizagem mais independente.

A partir dessa conversa informal passei a me questionar sobre a aprendizagem que ocorre quando temos de um lado uma atividade que envolve matemática, e de outro o computador, uma tecnologia com potencial para ser explorada, que pode propiciar novas possibilidades para a compreensão dos mais diversos conteúdos curriculares.

Em 2010 também frequentava as reuniões do GPIMEM<sup>2</sup> e era aluno especial do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro (PPGEM). Em uma dessas reuniões, o professor Dr. Marcus Vinicius Maltempo me apresentou o software MiGen<sup>3</sup>, que conheceu em seu pós-doutorado na Inglaterra, em 2009.

Em conversas com esse professor sobre esse software, e a partir das reflexões apresentadas acima, surgiu a ideia desse trabalho, cujo objetivo é investigar as estratégias utilizadas por alunos para generalizar padrões visuais usando o software MiGen. Tal ideia, porém, sofreu ajustes e modificações até chegar nessa forma, e estas serão apresentados na próxima seção.

## **1.2 A pergunta diretriz**

Quando a primeira versão do projeto foi submetida ao processo seletivo do PPGEM, eu já havia cursado duas disciplinas como aluno especial: “Tópicos Especiais em Educação Matemática: Questões Críticas da Educação Matemática” e “Tópicos Especiais: Generalização do Conhecimento e Matemática”. A segunda disciplina, particularmente, contribuiu bastante para a elaboração da primeira versão do projeto, principalmente com as leituras sobre generalização matemática. Assim, o objetivo da pesquisa na versão inicial era investigar *como o processo de generalização de padrões, via software MiGen, poderia contribuir com o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do Ensino Fundamental II*.

Porém, com a intensificação das leituras sobre tecnologias e sobre os processos de ensino e aprendizagem de álgebra, a pergunta diretriz foi modificada.

---

<sup>2</sup> Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática. Home Page: <http://www.rc.unesp.br/gpimem/>. Acesso em 20/11/2012.

<sup>3</sup> Detalhes específicos sobre o software no capítulo quatro.

Conclui que abordar o desenvolvimento do pensamento algébrico era um tanto quanto delicado, pois uma investigação sobre esse assunto requereria uma ampla e densa discussão teórica, inviável para ser realizada no prazo de um mestrado.

Essa pergunta se manteve até o segundo semestre de 2011, época em que já era aluno regular do PPGEM, realizava leituras sobre temas relacionados com essa dissertação e também preparava as atividades para coletar os dados. Durante minha coleta, percebi que diferentes estratégias poderiam ser utilizadas pelos alunos para tentar realizar generalizações e que o MiGen poderia interferir na escolha de determinada estratégia. Assim, o questionamento consolidado, que serviu como diretriz da presente pesquisa, apresenta-se na pergunta “*quais são as estratégias utilizadas por alunos do 7º ano do Ensino Fundamental II para generalizar padrões visuais com o software MiGen?*”. Optei investigar as estratégias adotadas pelos alunos para generalizar padrões visuais usando o MiGen para evidenciá-las e caracterizá-las em um ambiente que continha tal software. Assim, essa questão se faz importante pois, por meio do trabalho com padrões utilizando o MiGen, os alunos poderiam buscar uma expressão geral dos padrões sem se limitar a casos particulares, o que pode permitir o desenvolvimento do processo de generalização algébrica desses alunos, contribuindo para a aprendizagem de álgebra.

### **1.3 Estrutura da dissertação**

Com base na pergunta diretriz, essa dissertação está estruturada da seguinte forma a partir desse ponto. No capítulo dois faço uma revisão de literatura sobre álgebra e tecnologias da informação e comunicação (TIC). Em relação à álgebra, apresento algumas de suas concepções e também algumas concepções de educação algébrica, buscando justificar a definição de álgebra utilizada nessa pesquisa. Posteriormente, com base na definição apresentada, mostro o que entendo por generalização algébrica e pensamento algébrico, e então discuto os processos de ensino e aprendizagem de álgebra por meio de padrões visuais. Já em relação as TIC, faço um breve histórico dos programas governamentais de incentivo ao seu uso, discutindo seu potencial quando utilizadas na educação. Na última parte, relaciono álgebra e tecnologias, apresentando um breve histórico sobre Sistemas Algébricos Computacionais (CAS) nos processos de ensino e aprendizagem de matemática, algumas de suas características e possibilidades de

trabalho com esses sistemas. Terminei esse capítulo fazendo uma ligação entre o trabalho com padrões por meio de tecnologias e álgebra.

No terceiro capítulo apresento o referencial teórico adotado para analisar os dados coletados, fornecendo características particulares de cada estratégia de generalização utilizada em pesquisas realizadas por Stacey (1989), Sasman et al. (1999), Becker e Rivera (2005), Lannin (2005), Lannin et al. (2006) e Barbosa (2010). Explico algumas diferenças existentes entre essas estratégias, mostrando que uma das diversas intersecções existentes entre elas é a visualização. Então, defino o conceito de visualização que adotei e argumento que as estratégias podem ser divididas de acordo com a ênfase que cada uma dá à visualização. Por fim, argumento sobre algumas limitações específicas da visualização para generalização e mostro os fatores que podem influenciar na escolha das estratégias.

No quarto capítulo apresento a escola onde a coleta de dados dessa pesquisa foi realizada, os alunos participantes da mesma, o software MiGen, com o qual desenvolvi as atividades, e também discuto os procedimentos de pesquisa qualitativos adotados para coletar e analisar os dados obtidos no desenvolvimento dessas atividades com os alunos do 7º ano do ensino fundamental.

No capítulo cinco apresento e analiso os dados com base no referencial teórico escolhido. Apresento as atividades desenvolvidas com os alunos, caracterizando-as individualmente. Em seguida, mostro e analiso as resoluções de cada dupla por atividade, buscando identificar as estratégias de generalização adotadas por cada uma para resolver as atividades propostas.

No capítulo seis apresento as conclusões finais do trabalho, considerando a análise realizada a partir das atividades desenvolvidas com o uso do MiGen.

## 2 ÁLGEBRA, TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO E A RELAÇÃO ENTRE AMBAS

Neste capítulo, na primeira seção, trago algumas concepções de álgebra e de educação algébrica, buscando apresentar e justificar as visões adotadas nessa pesquisa. A partir disso, apresento a definição adotada sobre generalização algébrica e pensamento algébrico. Ao final dessa seção, discuto o ensino de álgebra por padrões, enfatizando o trabalho com padrões visuais.

Na seção seguinte, apresento um breve histórico de programas governamentais que objetivam inserir computadores nas escolas públicas e discuto o potencial das tecnologias e as mudanças que elas podem causar quando inseridas nos processos de ensino e aprendizagem de matemática.

Encerro com a terceira seção relacionando álgebra com tecnologias, apresentando um breve histórico sobre pesquisas que articularam os CAS ao ensino e aprendizagem de álgebra e posteriormente relacionando tecnologias com padrões.

### 2.1 *Concepções de álgebra e de educação algébrica e o ensino e aprendizagem de álgebra por meio de padrões*

Não é tarefa simples definir o que é álgebra, pois qualquer definição estará intrinsecamente ligada a uma concepção sobre álgebra e/ou educação algébrica já sistematizada anteriormente. Por isso, antes de apresentar a visão de álgebra que foi adotada nesse trabalho, destaco brevemente algumas de suas concepções e, em seguida, apresento também algumas concepções de educação algébrica.

Fiorentini et al. (1993) apresentam algumas concepções de álgebra. Uma primeira concepção é denominada *processológica*, na qual a álgebra é vista como um conjunto de procedimentos específicos (técnicas algorítmicas) para abordar problemas matemáticos, seguindo uma sequência de passos. Uma segunda concepção é chamada *linguístico-estilística* e define a álgebra como uma linguagem concisa e específica que tem por objetivo expressar determinados procedimentos e técnicas matemáticos. A concepção *linguístico-sintático-semântica* também idealiza a álgebra como linguagem específica e concisa, porém cujo poder de criação e utilização reside na dimensão sintático-semântica, isto é, somente quando se usam letras para representar quantidades determinadas e particulares ou quantidades genéricas é que essa linguagem revela seu potencial de efetuar e expressar

transformações algébricas estritamente simbólicas. Por fim, a quarta concepção apresentada por Fiorentini e colaboradores denomina-se *linguístico-postulacional* e atribui um grau de abstração e generalidade à linguagem algébrica, estendendo o domínio da álgebra à matemática como um todo.

Usiskin (1995) também descreve quatro concepções de álgebra:

- (i) *Álgebra como aritmética generalizada*: variáveis servem como generalizadoras de modelos, ou seja, generalizar significa representar os padrões numéricos observados por sentenças, que utilizam variáveis e compõem os modelos, e por isso temos a sensação de não existirem incógnitas. Por exemplo, generaliza-se  $1 + 5 = 5 + 1$  como  $a + b = b + a$ ;
- (ii) *Álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas*: o objetivo da álgebra é simplificar e resolver, e as variáveis ou são incógnitas ou são constantes. Por exemplo, ao escrevermos em linguagem algébrica o problema “Adicionando 3 ao dobro de certo número, a soma é 21. Achar o número”, obtemos  $2x + 3 = 21$ . Resolvendo essa equação obtemos o valor do número, e a letra  $x$  assume o papel de incógnita;
- (iii) *Álgebra como estudo de relações entre grandezas*: nesse caso, as variáveis variam, logo não são incógnitas para generalizar modelos numéricos, mas sim modelos algébricos. Um exemplo nesse caso é: “O que ocorre com o valor de  $1/x$  quando  $x$  se torna cada vez maior?” (USISKIN, 1995, p.15). Nessa concepção, a variável ou é um argumento (representa valores do domínio de uma função) ou um parâmetro (representa um número do qual dependem outros números);
- (iv) *Álgebra como estudo das estruturas*: a variável é um objeto arbitrário de uma estrutura criada seguindo certas propriedades. Um exemplo seria a matemática desenvolvida em cursos superiores, que envolve estruturas como grupos e anéis.

Lee (2001) apresenta seis concepções de álgebra. A primeira é a *álgebra como linguagem*, em que admite ser consensual o reconhecimento sobre o lado escrito da álgebra que envolve símbolos e regras sobre eles. A partir disso, estabelece outras duas concepções: *álgebra como caminho de pensamento* e *álgebra como uma atividade*.

Em *álgebra como um caminho de pensamento*, a autora destaca pesquisas que questionam o pensamento algébrico, dentre elas a pesquisa de Kieran<sup>4</sup>, que constatou não haver uma definição consensual para isso. Um dos tipos de pensamento algébrico apresentado por Lee (2001) é o envolvido na detecção de padrões, e posteriormente na sua escrita. A autora inclusive acredita que os alunos podem identificar padrões e escrevê-los independentemente da idade, o que constitui uma abordagem com potencial de desenvolvimento do pensamento algébrico. Já na concepção de *álgebra como atividade*, o dinamismo da álgebra estaria associado principalmente com manipulações de símbolos.

A quarta concepção apresentada por Lee (2001) é *álgebra como ferramenta*, utilizada para resolver problemas. Nesse caso, a álgebra se caracteriza como procedimentos matemáticos aplicados para solucionar um problema usando matemática. A quinta é *álgebra como aritmética generalizada*, que pode ser a álgebra das generalizações de padrões numéricos, do estudo da estrutura da aritmética e do estudo das expressões simbólicas. Por fim, a sexta concepção é a *álgebra como cultura*, englobando valores, crenças, práticas, tradições, história e seus processos de transmissão.

Quanto a educação algébrica, Lins e Gimenez (1997) apresentam três concepções: (i) *concepção letrista*: as atividades algébricas são resumidas a cálculos com letras, estando essa visão presente nos livros didáticos disponíveis no Brasil; (ii) *concepção letrista facilitadora*: a capacidade de lidar com expressões literais é alcançada por abstração, por meio do trabalho com situações concretas; (iii) *concepção de modelagem matemática*: o concreto é assumido como real e as atividades visam investigar situações reais.

Fiorentini et al. (1993) também destacam três concepções de educação algébrica: (i) *linguístico-pragmática*: relaciona o papel pedagógico da álgebra como instrumento de resolução de problemas à concepção algébrica denominada linguístico-sintático-semântica, na qual prevalece a crença de que a aquisição de técnicas para obter expressões algébricas equivalentes a partir de certas regras e propriedades seria necessária e suficiente para que os alunos adquirissem a

---

<sup>4</sup> KIERAN, C. The early learning of algebra: a structural perspective. In: WAGNER, S.; KIERAN, C. (Eds.). Research issues in the learning and teaching of algebra. Reston, VA (USA): The National Council of Teachers of Mathematics and Laurence Erlbaum Associates, 1989. p. 33-56.

capacidade de resolver problemas; (ii) *fundamentalista-estrutural*: se baseia na concepção linguístico-postulacional da álgebra, e acredita que a introdução de propriedades estruturais das operações capacitaria os alunos a identificar e aplicar tais estruturas em contextos diversos; (iii) *fundamentalista-analógica*: vincula o papel da álgebra como resolução de problemas novamente à concepção linguístico-semântico-sintática. Essa concepção tenta unir as duas anteriores, tentando recuperar o valor instrumental da álgebra mantendo seu fundamentalismo, porém não mais na forma lógico-estrutural, mas sim em uma nova forma que se baseia em recursos geométricos e visuais.

Fiorentini et al. (1993) argumentam que essas três concepções de educação algébrica possuem um ponto em comum: o de reduzir o pensamento algébrico à linguagem algébrica. Os autores também argumentam, opinião da qual compartilho, que

[...] essa relação de subordinação do pensamento algébrico à linguagem desconsidera o fato de que [...] a linguagem é, pelo menos a princípio, a expressão de um pensamento. Acreditamos subsistir entre pensamento algébrico e linguagem não uma relação de subordinação, mas uma relação de natureza dialética [...]. (FIORENTINI et al., 1993, p. 85)

Isso condiz com o que Vygotsky (1993) também relata, isto é, que pensamento e linguagem são interdependentes, e que um promove o desenvolvimento do outro. Assim, em processos de ensino e aprendizagem de álgebra, especificamente, a linguagem utilizada não necessariamente antecede o pensamento algébrico, embora compreender a linguagem possibilite potencializar o desenvolvimento do pensamento algébrico (FIORENTINI et al., 2005).

A partir dessas concepções de álgebra e de educação algébrica, acredito que “a álgebra pode ser definida como um sistema matemático utilizado para generalizar operações matemáticas permitindo que letras ou outros símbolos substituam os números” (VALE et al., 2007, p.6). Tal definição se aproxima mais da definição de álgebra como aritmética generalizada dada por Usiskin (1995).

Conseqüentemente, corroborando Fiorentini et al. (1993) e Kaput (1999), pelo fato de as concepções de álgebra e educação algébrica poderem mudar, acredito que o pensamento algébrico também se altera, e por isso não é possível dar uma definição precisa do que seja ele. Porém, é possível fornecer elementos característicos de tal pensamento e inclusive desenvolvê-lo antes mesmo da linguagem algébrica simbólica. O pensamento algébrico estaria então relacionado

com: (i) a generalização e formalização de padrões e restrições; (ii) a manipulação de formalismos; (iii) o estudo de estruturas abstratas; (iv) o estudo de funções, relações e de variações; (v) a utilização de linguagens variadas na modelagem matemática (KAPUT, 1999).

Kaput (1999) considera que o pensamento algébrico tem origem quando generalizações são estabelecidas a partir de dados e relações matemáticas e expressas em linguagens cada vez mais formais. A generalização seria então um processo no qual o objetivo é identificar uma propriedade invariante dos elementos de um conjunto específico. Ou seja, para qualquer elemento desse conjunto, a regularidade presente em todo o conjunto deve satisfazer a esse elemento.

Assim, um elemento central do pensamento algébrico é a ideia de generalização: descobrir e comprovar propriedades que se verificam em toda uma classe de objetos. Tais propriedades são chamadas de padrões.

Orton (1999) afirma que pesquisadores não têm conseguido chegar a uma definição consensual do que pode ser considerado como um padrão. Mesmo assim, para Devlin (2002, p. 9):

Foi só nos últimos 20 anos [...] que surgiu a definição matemática que é hoje consensual entre a maioria dos matemáticos: a matemática é a ciência dos padrões. O que o matemático faz é examinar “padrões” abstratos – padrões numéricos, padrões de formas, padrões de movimento, padrões de comportamento etc. Estes padrões tanto podem ser reais como imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, puramente utilitários ou assumirão um interesse pouco mais recreativo. Podem surgir a partir do mundo a nossa volta, das profundezas do espaço e do tempo, ou das atividades mais ocultas da mente humana.

Ainda nesse sentido, relacionando matemática a padrões, para Zazkis e Liljedahl (2002, p.379), “[...] os padrões são o coração e a alma da matemática”. Ou seja, a partir desses autores pode-se perceber que de fato há uma ligação entre padrões e matemática.

Nesse trabalho, padrões estão ligados à ideia de algum tipo de regularidade na qual se possa identificar uma propriedade que permita continuar uma sequência e chegar a uma generalização (VALE et al., 2005). Portanto, generalizar padrões visuais seria observar propriedades matemáticas específicas nem sempre visíveis em um caso específico.

Em relação à generalização, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), o estudo da álgebra constitui um espaço bastante significativo de abstração e



generalização, além de possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas. Segundo esse documento, o professor deve possibilitar ao aluno o reconhecimento de diferentes funções da álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, resolver problemas aritmeticamente complexos), responder problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis e incógnitas) e compreender a sintaxe (regras para resolução) de uma equação.

Como no pensamento algébrico dá-se atenção não só aos objetos, mas principalmente às relações existentes entre eles, o que faz parte do processo de generalização, uma das possíveis vias para promover tal pensamento é pelo estudo de padrões.

Estudos têm utilizado e discutido com frequência a abordagem da álgebra por meio do trabalho com padrões (MASON, 1996; LEE, 1996; ORTON; ORTON, 1999; ZAZKIS; LILJEDAHN, 2002; VALE; PIMENTEL, 2005; RIVERA; BECKER, 2005; ARCAVI, 2003; BARBOSA et al., 2007; WARREN; COOPER, 2008), oferecendo aos alunos a oportunidade de observar e dar voz às generalizações e traduzi-las em uma linguagem formal de acordo com suas idades (KAPUT; BLANTON, 2005).

No trabalho com padrões, a visualização assume um papel de destaque, como constatado, por exemplo, nas pesquisas de Lannin et al. (2006), Sasman et al. (1999), Orton (1999), Becker e Rivera (2005) e Stacey (1989).

Cabe aqui deixar claro o que entendo por visualização, destacando para isso três definições. Ben-Chaim, Lappan e Houang (1989) afirmam que visualizar envolve duas capacidades principais: a de compreender e interpretar alguma informação representada por imagens e a de traduzir e retirar relações abstratas que não são apresentadas visualmente. Já Barbosa (2010, p. 35) defende que “visualização corresponde à capacidade de interpretar e usar informação de natureza visual com o intuito de construir e comunicar conhecimento matemático”.

Para essa pesquisa, concordo com a definição de Arcavi (2003), cujas ideias convergem para as apresentadas anteriormente:

Visualização é a capacidade, o processo e o produto de criação, interpretação, uso de e reflexão sobre figuras, imagens, diagramas, na nossa mente, no papel ou com ferramentas tecnológicas, com o propósito de descrever e comunicar informação, pensar sobre e desenvolver ideias

previamente desconhecidas e progredir no entendimento. (p. 217, tradução minha<sup>5</sup>)

Para Noss, Healy e Hoyles (1997), focar no aspecto numérico do padrão, ainda que haja um contexto visual presente no problema, pode ser um entrave à generalização. Nesse sentido, Mason (1996) afirma que há uma tendência para se inferir valores que originam uma expressão geral com base em casos particulares, o que pode levar o aluno a não realizar a generalização esperada e buscada através de um problema cuja figura representa um padrão.

Rivera e Becker (2005) relatam que os estudantes possuem um forte conhecimento visual de ideias e conceitos matemáticos e por isso o ato de visualizar se torna importante no processo de generalização, devendo, portanto, ser explorado. Além disso, padrões visuais também são uma ferramenta com potencial para se trabalhar expressões numéricas e suas generalizações de modo que os alunos atribuam significados aos símbolos durante o processo de generalização.

Orton (1999) também apresenta outras possíveis contribuições do trabalho com padrões: podem permitir que os alunos construam uma imagem mais positiva da matemática, pois os padrões visuais apelam ao sentido estético e criativo através das figuras que os representam; estabeleçam ligações entre conteúdos matemáticos diferentes; desenvolvam a capacidade de relacionar, ordenar e classificar informações obtidas através da leitura, escrita, símbolos, figuras, tabelas e gráficos.

Vale e Pimentel (2005) acreditam que se deve começar o trabalho com padrões visuais em um nível básico e ir avançando com o tempo. Em princípio, a identificação dos padrões deve ser fácil de ser realizada, visando que os alunos se acostumem com esse tipo de tarefa. Esse caminho facilitará o trabalho com atividades mais complexas.

Porém, muitas vezes o trabalho com a visualização ocorre somente em uma fase inicial ou como complementação à abordagem analítica. Nesse sentido, Thornton (2001) aponta três razões para a reavaliação do papel da visualização no ensino de matemática: (i) permite criar conexões entre diferentes áreas da matemática; (ii) possibilita abordagens simples e eficazes de situações

---

<sup>5</sup> Visualization is the ability, the process and the product of creation, interpretation, use of and reflection upon pictures, images, diagrams, in our minds, on paper or with technological tools, with the purpose of depicting and communicating information, thinking about and developing previously unknown ideas and advancing understandings.

problemáticas; (iii) aliado às tecnologias digitais, o ensino por padrões possibilita um desenvolvimento intuitivo de suas regras gerais.

Portanto, acredito que não há como ensinar e aprender álgebra sem realizar generalizações algébricas, e uma das formas de se abordar isso é por meio de padrões visuais, nos quais a visualização desempenha um papel fundamental na identificação do que se repete e do que varia no padrão. Nesse sentido, inserir as TIC nesse processo pode ajudar na elaboração e na construção de generalizações, favorecendo os processos de ensino e de aprendizagem de álgebra.

## **2.2 A Presença das TIC na educação**

Nas últimas décadas, as políticas públicas têm buscado abordar o uso das TIC na educação através da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB 9.394/96), promulgada em 1996 (BRASIL, 1996), e com a consolidação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), em 1997 (BRASIL, 1997, p. 67).

Materiais de uso social frequente são ótimos recursos de trabalho, pois os alunos aprendem sobre algo que tem função social real e se mantêm atualizados sobre o que acontece no mundo, estabelecendo o vínculo necessário entre o que é aprendido na escola e o conhecimento extraescolar. A utilização de materiais diversificados como jornais, revistas, folhetos, propagandas, computadores, calculadoras, filmes, faz o aluno sentir-se inserido no mundo à sua volta. É indiscutível a necessidade crescente do uso de computadores pelos alunos como instrumento de aprendizagem escolar, para que possam estar atualizados em relação às novas tecnologias da informação e se instrumentalizarem para as demandas sociais presentes e futuras.

Desde a década de 1980 vários programas para incentivar o uso da informática nas escolas vêm sendo implementados pelo governo. O primeiro surgiu em 1981, com a realização do I Seminário Nacional de Informática Educativa. Esse seminário originou projetos como: Educom<sup>6</sup>, Formar<sup>7</sup> e Proninfe<sup>8</sup>. Atualmente, o programa vigente chama-se PROINFO – Programa Nacional de Informática na Educação, lançado em 1997 pela então Secretaria de Educação a Distância (SEED /

---

<sup>6</sup> Computadores na Educação: lançado em 1983 pelo Ministério da Educação e da Cultura (MEC) e pela Secretaria de Educação de Informática. Tinha como objetivo principal estimular o desenvolvimento de pesquisa multidisciplinar, voltada para a aplicação de tecnologias de informática nos processos de ensino e aprendizagem.

<sup>7</sup> Originou-se dentro do projeto Educom para “Formar” recursos humanos para o trabalho na área de informática educativa.

<sup>8</sup> O Programa Nacional de Informática na Educação foi lançado em 1989 pelo MEC e deu continuidade às iniciativas anteriores, contribuindo especialmente para a criação de laboratórios e centros para a capacitação de professores.

MEC). Tal programa objetiva estimular e dar suporte para introduzir a tecnologia informática nas escolas do nível básico.

Com a introdução da informática nas escolas, pesquisas vêm sendo realizadas, objetivando investigar formas de utilização destes recursos na prática docente e nos processos de ensino e aprendizagem (BORBA; PENTEADO, 2001; MALTEMPI, 2005; VALENTE, 1999). A integração dos computadores nos processos de ensino e aprendizagem dos conceitos curriculares em todas as modalidades e níveis de ensino pode enriquecer os ambientes de aprendizagem (VALENTE, 1999).

Para D'Ambrosio (1999), incorporar a tecnologia é essencial para tornar a matemática uma ciência contemporânea. Cada vez mais o ambiente de aprendizagem informatizado ganha espaço como possibilidade de metodologia de ensino. Dessa forma, parece necessário compreender os motivos que perpassam a necessidade de utilização das TIC nos ambientes educacionais.

Um primeiro motivo é que a partir do momento em que se mudam os processos de aprendizagem pela presença das TIC muda-se também o papel do professor dentro da sala de aula. Como afirma Maltempi (2008, p.63):

[...] tanto a prática pedagógica quanto a matemática se modificam quando novas tecnologias tomam parte do ambiente de ensino e aprendizagem. Diante disso, professores e comunidade escolar têm dois caminhos possíveis: ignorar as tecnologias proibindo seu uso pelos alunos em sala de aula ou iniciar um processo de aprendizagem de modo a incorporar as tecnologias ao ambiente escolar.

A reformulação do papel do professor durante o processo de aprendizagem, a mudança de currículo e as novas dinâmicas são algumas das questões levantadas por Borba e Penteado (2001) a partir da introdução das TIC na educação. O educador necessita acompanhar a evolução das TIC para se manter atualizado, até mesmo para entender e conhecer o que seus alunos conhecem, pois como afirma Dowbor (2001, p.12)

A mudança é hoje uma questão de sobrevivência, e a contestação não virá de "autoridades", e sim do crescente e insustentável "saco cheio" dos alunos, que diariamente comparam os excelentes filmes e reportagens científicos que surgem na televisão, nos jornais, com as mofadas apostilas e repetitivas lições da escola.

A própria sociedade, por sua vez, também mostra interesse em que o educador utilize e insira as tecnologias nos processos de ensino e aprendizagem:

A sociedade impõe o uso da tecnologia na educação porque grande parte da população está em um crescente contato com ela no seu dia-a-dia.

Dessa forma, cada vez mais as escolas recebem alunos usuários de tecnologias, habituados a elas, os quais naturalmente pressionam pelo seu uso na educação ao trazerem tecnologias para a sala de aula ou ao relacionarem as atividades realizadas na escola com a possibilidade de serem elaboradas com o apoio de tecnologias (MALTEMPI, 2008, p.62).

Esse também é o entendimento do Ministério da Educação (BRASIL, 2006, p.87):

Não se pode negar o impacto provocado pela tecnologia da informação e comunicação na configuração da sociedade atual. Por um lado, tem-se a inserção dessa tecnologia no dia-a-dia da sociedade, a exigir indivíduos com capacitação para bem usá-la; por outro lado, tem-se nessa mesma tecnologia um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem de Matemática. É importante contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos, ou seja, a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática.

Um segundo ponto pode ser observado em Gravina e Santarosa (1998), ao argumentarem que o ensino e a aprendizagem da Matemática dependem de momentos e ações em que os alunos possam experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar, dentre outros, transformando-os em sujeitos ativos na construção do conhecimento. Quando eles tornam-se sujeitos ativos, a formalização e a construção dos conceitos podem ser uma consequência dos processos de ensino e aprendizagem. Dessa forma, com o auxílio das TIC, essas ações podem tornar-se mais rápidas e efetivas, pois as tecnologias favorecem a elaboração e análise de conjecturas.

Baseado nos argumentos apresentados anteriormente, afirmo que as tecnologias podem auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Dessa forma, é possível pensar em um software através do qual o aluno possa colocar em prática suas ideias, refletir, construir, como um agente participativo de todos esses processos.

### **2.3 Álgebra e TIC**

Com a invenção do primeiro computador eletrônico de grande porte, em 1942; da primeira calculadora de quatro funções, em 1967; do microcomputador, em 1978; e das calculadoras gráficas, em 1985 (KELLY, 2003); matemáticos e educadores matemáticos têm questionado as possibilidades oferecidas pelas tecnologias informáticas na educação (DRIJVERS, KIERAN, MARIOTTI, 2010). O surgimento das tecnologias computacionais, na segunda metade do século XX, possibilitou a

criação de novas ferramentas e uma conseqüente transformação do ensino e da aprendizagem de matemática (LAVICZA, 2010).

Porém, somente no final da década de 1970 que matemáticos e educadores matemáticos perceberam que a computação poderia ter efeitos significativos sobre o conteúdo e a ênfase dada sobre o mesmo nas escolas dos ensinos básico e superior. Nessa década, aplicações computacionais foram desenvolvidas para operar também com símbolos que representassem números.

A partir de 1980 surgiram as primeiras pesquisas sobre o uso de programação no ensino e aprendizagem de matemática. Linguagens de programação, como Logo, Basic e Pascal foram utilizadas em algumas pesquisas em educação, com justificativa de que as experiências dos alunos com uma linguagem de programação poderiam fornecer uma base conceitual para o entendimento de variável, melhorando o desempenho dos mesmos em relação à aprendizagem do conceito de álgebra (FERRARA et al., 2006).

Essas pesquisas influenciaram a investigação de múltiplas representações para o ensino de álgebra e, dessa forma, a tecnologia moldou e tem moldado a forma como a álgebra é vista.

Uma possibilidade de trabalho com a álgebra e suas representações com a utilização de tecnologias, muito estimulado e pesquisado devido aos acontecimentos apresentados acima, é usar CAS no ensino e aprendizagem de álgebra. Originalmente desenvolvidos para matemáticos, cientistas e engenheiros, os CAS são sistemas matemáticos que incluem ferramentas que favorecem a manipulação simbólica de variáveis reais e complexas, gráficos de funções e trabalhos com tabelas numéricas e listas. Eles possuem várias ferramentas matemáticas e podem ser usados em calculadoras ou computadores (THOMAS, MONAGHAN, PIERCE, 2004).

Com essas ferramentas, os CAS possibilitam aos alunos definirem, manipularem, transformarem, compararem e visualizarem expressões algébricas em suas formas tradicionais de representação (BALACHEFF; KAPUT, 1996; ZELLER; BARZEL, 2010).

Segundo estudos realizados por Mayes (1997), o uso do CAS como um reorganizador da relação do aluno com a álgebra leva a resultados positivos no geral, porém esse uso não pode ser realizado visando apenas aumentar a eficiência

e rapidez na implementação de abordagens padrão para solucionar problemas. Segundo Thomas, Monaghan e Pierce (2004), esses resultados positivos poderiam acontecer, pois atividades que utilizam os CAS podem permitir a experimentação e generalização de conjecturas, bem como sua validação ou não. Além disso, permite aos alunos operarem variáveis ou funções, possibilitando uma compreensão mais profunda do que se está estudando, e o conseqüente desenvolvimento da visão algébrica a partir das decisões dos alunos sobre qual caminho seguir na investigação do problema.

Como já mencionado, uma das características dos CAS é possibilitar o trabalho como sendo uma calculadora gráfica. Alguns estudos apresentam investigações nesse sentido (THOMAS, MONAGHAN, PIERCE, 2004; FERRARA, PRATT, ROBUTTI, 2006; ZELLER, BARZEL, 2010). Os resultados gerais desses estudos concluem que a linguagem da calculadora é um modo de expressar as regras gerais que regem padrões numéricos, ajudando os alunos a compreender manipulações e regras algébricas.

Ao lado das capacidades gráficas, a principal característica do CAS é a possibilidade de realizar manipulações algébricas. Pozzi (1994) relata que o CAS pode também apoiar os alunos a tomarem decisões e dar sentido às suas generalizações algébricas, verificando suas manipulações e conjecturas, o que pode aumentar a compreensão dos conceitos e o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Outra forma de se trabalhar álgebra com o uso de tecnologias é por meio de software que trabalham com padrões. Pesquisas envolvendo atividades que utilizam a abordagem por padrões com tecnologias são realizadas em países como Reino Unido (NOSS et al., 2009b) e Austrália (WARREN; COOPER, 2008), porém, como constatado por Lapa e Passos (2011), no Brasil ainda são poucos os trabalhos na área.

Segundo Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005, p. 4), “tradicionalmente o ensino de álgebra se sustenta na crença de que o pensamento algébrico só se manifesta e se desenvolve a partir do cálculo literal ou através da manipulação da linguagem simbólica de álgebra”. Como já mencionado, saber expressar generalização é fundamental para se aprender álgebra, e uma das formas de se

aprender a generalizar e desenvolver o pensamento algébrico é por meio do uso de padrões.

Por outro lado, a presença das TIC, a possibilidade de acesso às mesmas e os programas governamentais que incentivam o uso de computadores no ensino estão fazendo com que muitos educadores os utilizem em suas práticas docentes. Então por que não utilizá-los para se aprender álgebra, ou mais precisamente, para se aprender a generalizar através de padrões e, assim, desenvolver o pensamento algébrico? Foi pensando nisso que essa pesquisa foi desenvolvida, buscando relacionar tecnologias com o ensino e a aprendizagem de álgebra por meio de padrões.



### 3 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo apresento as estratégias de generalização que utilizarei para analisar os dados, caracterizando cada uma delas a partir das discussões teóricas que foram realizadas pelos autores Stacey (1989), Sasman et al. (1999), Becker e Rivera (2005), Lannin (2005), Lannin et al. (2006) e Barbosa (2010).

As estratégias de generalização propostas por Stacey (1989) serviram de embasamento teórico para as pesquisas dos outros autores citados. Tais estratégias de generalização são: Contagem, Tentativa e Erro, Diferença, Termo Unidade e Explícita. Inicialmente, definirei de forma breve cada estratégia para então definir alguns conceitos a partir dos quais poderei abordar cada estratégia com mais profundidade.

A estratégia de **contagem** consiste, como o próprio nome diz, em contar o número de elementos de um padrão, obtendo assim o termo da sequência solicitado (STACEY, 1989). A **tentativa e erro** pode ser entendida de duas maneiras: ou o aluno pode buscar adivinhar a regra geral do padrão fazendo conjecturas com diferentes valores que podem ser obtidos após uma análise desse padrão; ou, estabelecida uma possibilidade de regra geral do padrão, o aluno pode experimentar sucessivos valores buscando confirmar suas conjecturas (LANNIN, 2005; BECKER, RIVERA, 2005).

A estratégia da **diferença** visa utilizar múltiplos da diferença entre o número de elementos de termos consecutivos (STACEY, 1989; SASMAN et al., 1999; LANNIN, 2006; BARBOSA, 2010). Na estratégia **termo unidade**, uma figura da sequência é fixada e múltiplos do total de elementos dessa figura são utilizados para se calcular o que é pedido. Ou seja, um determinado valor, múltiplo de outro valor conhecido na sequência, é utilizado para calcular o que se pede, assumindo que o problema representa uma situação de proporcionalidade direta (STACEY, 1989; SASMAN et al., 1999; LANNIN et al., 2006; BARBOSA, 2010). Por fim, na estratégia **explícita** busca-se construir uma regra que permita calcular de imediato qualquer valor de qualquer termo da sequência (SASMAN et al., 1999; LANNIN et al., 2006; BARBOSA, 2010).

Para exemplificar o uso das estratégias *diferença*, *termo unidade* e *explícita*, utilizarei as atividades desenvolvidas na coleta de dados. Antes disso, faz-se necessário acrescentar que as estratégias *diferença* e *termo unidade* possuem três

subdivisões cada uma, a saber: a *diferença* é subdividida em *recursiva* (para encontrar um termo é necessário completar todos os termos anteriores da sequência com base na diferença entre dois termos), *múltiplo da diferença sem ajuste* (usa um múltiplo da diferença entre dois termos consecutivos como um fator multiplicativo, obtendo o resultado final diretamente, sem ser necessário fazer ajustes no final) e *múltiplo da diferença com ajuste* (usa um múltiplo da diferença entre dois termos consecutivos como um fator multiplicativo, porém para obter o resultado final é necessário fazer um ajuste); já a *termo unidade* é subdividida em *sem ajuste* (toma como unidade uma figura da sequência e utiliza múltiplos do total de elementos dessa figura para responder a questão dada, sem necessidade de fazer ajustes no resultado final), *com ajuste contextual* (toma como unidade uma figura da sequência e utiliza múltiplos do total de elementos dessa figura para responder a questão dada, sendo necessário fazer ajustes no resultado final com base no contexto do problema) e *com ajuste numérico* (toma como unidade uma figura da sequência e utiliza múltiplos do total de elementos dessa figura para responder a questão dada, sendo necessário fazer ajustes no resultado final com base em propriedades numéricas).

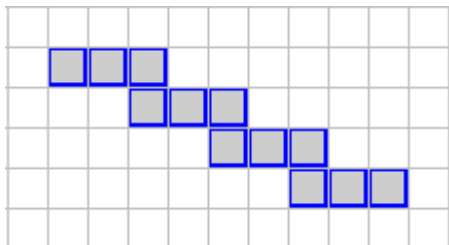
Nos exemplos mostrados a seguir, abordarei as estratégias *diferença* e *termo unidade* pelas suas subdivisões, buscando diferenciá-las umas das outras. A Atividade 1, denominada *A Escada*, servirá para exemplificar as estratégias *diferença recursiva*, *múltiplo da diferença sem ajuste* e *termo unidade sem ajuste*. Já a Atividade 2, nomeada *Construindo Pontes*, será utilizada para exemplificar as estratégias *múltiplo da diferença com ajuste*, *termo unidade com ajuste contextual* e *termo unidade com ajuste numérico*.

A Atividade 1 (Figura 1) continha uma representação visual na folha de questões do quarto termo da sequência, reproduzindo uma escada com 4 degraus e 12 quadrados no total. O objetivo de todas as questões era que os alunos identificassem e, se possível, utilizassem as relações existentes entre o número de quadrados de uma escada com o número de degraus da mesma.

### Figura 1 - Atividade 1 – A Escada

#### ATIVIDADE 1 – A ESCADA

Uma escada é construída da seguinte forma:



Na figura acima, ela possui **4 degraus**, com **12 quadrados** no total.

1. Desenhe uma escada com **2 degraus**.

Quantos quadrados são necessários para construir essa escada?

**Justifique sua resposta.**

2. Quantos quadrados são necessários para construir uma escada com **8 degraus**?

**Justifique sua resposta.**

3. Quantos quadrados são necessários para construir uma escada com **32 degraus**?

**Justifique sua resposta.**

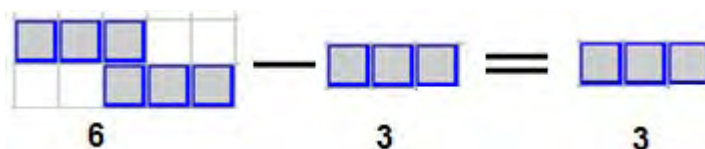
4. Encontre a regra que relaciona o número de quadrados de uma escada com o número de degraus da mesma.

**Justifique sua resposta.**

Fonte: Próprio autor

Uma subdivisão da estratégia da *diferença* poderia ser utilizada para responder a segunda questão da Atividade 1. Para isso, o aluno utilizaria múltiplos da diferença entre dois termos consecutivos. Por exemplo, tomando o segundo e o primeiro termos da sequência formada pelo número de degraus da escada, com 2 e 1 degraus, respectivamente, e fazendo a diferença entre eles nessa ordem, o resultado será igual a 3 (Figura 2).

**Figura 2** - Diferença entre o segundo e o primeiro termo da sequência da Atividade 1



Fonte: Próprio autor

Dessa forma, o aluno pode perceber que para calcular o número total de quadrados de determinada escada basta multiplicar o total de degraus da mesma por 3, sendo este valor obtido da diferença entre termos consecutivos da sequência, pois acrescentar um degrau nessa escada equivale a acrescentar 3 quadrados azuis. Assim, no caso da segunda questão dessa atividade, bastaria multiplicar 8 (total de degraus da escada) por 3 (número de quadrados que aumenta ao se acrescentar um degrau na escada), obtendo como valor final o número 24. Portanto, como foi usado um múltiplo da diferença entre termos consecutivos como um fator multiplicativo para se chegar ao resultado, é possível concluir que a estratégia descrita é a *múltiplo da diferença sem ajuste*.

Caso o aluno fosse completando a escada degrau por degrau com base no resultado obtido na diferença entre o segundo e o primeiro termos até chegar ao total de 8 degraus, a estratégia utilizada seria a *diferença recursiva*, pois ele continuou a sequência com base na diferença entre dois termos consecutivos.

O mesmo resultado poderia ser obtido ao se utilizar a estratégia *termo unidade sem ajuste*. Como dado no enunciado, o desenho fornecido inicialmente representa uma escada com 4 degraus, com um total de 12 quadrados. Então, o aluno pode pensar que, para obter o número total de quadrados de uma escada com 8 degraus, basta dobrar o número de quadrados de uma escada com 4 degraus. Isso significa que o aluno tomou como unidade o desenho dado na própria atividade e utilizou múltiplos do total de degraus dessa figura para responder a questão dada. Dessa forma, se uma escada com 4 degraus tem 12 quadrados, e como 8 é o dobro de 4, então uma escada com 8 degraus terá o dobro de quadrados de uma escada com 4 degraus, ou seja, 24 quadrados. Como se pode perceber, não foi necessário ajustar o resultado no final.

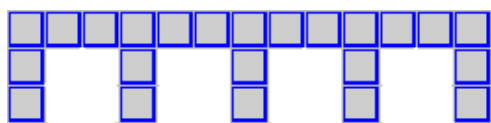
A estratégia *explícita* é caracterizada por se determinar uma regra geral que possibilite o cálculo de qualquer valor da sequência (STACEY, 1989). Seja  $n$  o número total de degraus da escada da Atividade 1. Se o aluno representar ou utilizar a expressão “ $3n$ ” para responder as questões pedidas, então podemos dizer que ele utilizou a estratégia *explícita*, pois formalizou seu raciocínio utilizando linguagem matemática e escreveu uma regra geral para se determinar o número de quadrados de uma escada com qualquer tamanho. Essa estratégia deveria ser utilizada para responder a quarta questão, cujo objetivo era justamente descobrir a regra que relacionava o número de quadrados de uma escada em função do número de degraus da mesma.

A Atividade 2 exemplifica as estratégias *múltiplo da diferença com ajuste*, *termo unidade com ajuste contextual* e *termo unidade com ajuste numérico*. Para responder a questão 2 dessa atividade, por exemplo, é possível utilizar a estratégia da *múltiplo da diferença com ajuste*, cuja ideia é a mesma da estratégia *múltiplo da diferença sem ajuste*, sendo necessário somente realizar uma pequena adequação no resultado com base no contexto do problema.

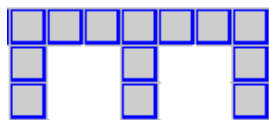
### Figura 3 - Atividade 2 – Construindo Pontes

#### ATIVIDADE 2 – CONSTRUINDO PONTES

Dois exemplos de pontes são mostrados abaixo. A primeira ponte contém **4 arcos**, e é formada por **23 quadrados**.



A segunda ponte contém **2 arcos**, e é formada por **13 quadrados**.



1. Desenhe uma ponte com **5 arcos**.

Quantos quadrados são necessários para construir essa ponte?

**Justifique sua resposta.**

2. Quantos quadrados são necessários para construir uma ponte com **10 arcos?**

**Justifique sua resposta.**

3. Quantos quadrados são necessários para construir uma ponte com **100 arcos?**

**Justifique sua resposta.**

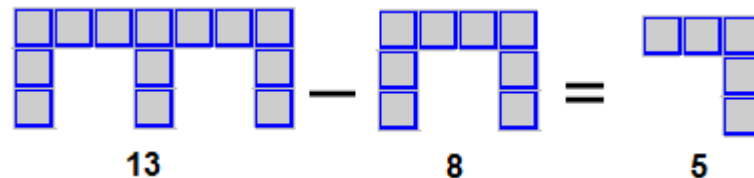
4. Encontre a regra que relaciona o número de quadrados de uma ponte com o número de arcos da mesma.

**Justifique sua resposta.**

Fonte: Próprio autor

Fazendo a diferença entre o segundo e o primeiro termo da sequência (ponte com dois arcos e ponte com um arco, respectivamente), obtemos o desenho mostrado na Figura 4.

**Figura 4 -** Diferença entre o segundo e o primeiro termo da sequência da Atividade 2



Fonte: Próprio autor

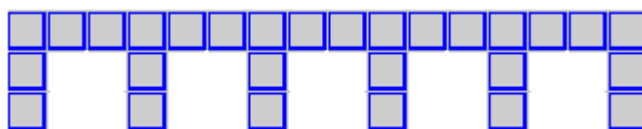
Ou seja, para cada novo arco adicionado à ponte, serão aumentados 5 quadrados. Logo, o aluno pode adotar múltiplos do resultado dessa diferença entre esses dois termos consecutivos como termos da sequência para calcular o número de quadrados de uma ponte. Porém, ele deverá lembrar que faltarão os três quadrados da primeira coluna da ponte, e por isso deverá fazer um ajuste no resultado.

Assim, para se calcular a resposta da questão 2, deve-se multiplicar 10 (número de arcos da questão) por 5 (resultado da diferença entre dois termos

consecutivos da sequência), somando 3 ao final (número de quadrados da primeira coluna da ponte). O total de quadrados da ponte, portanto, seria 53.

Essa segunda questão também poderia ser resolvida utilizando a estratégia *termo unidade com ajuste contextual*. Tomando como unidade a Figura 5, a qual representa uma ponte com 5 arcos que poderia ser obtida acrescentando-se mais um arco no desenho dado na folha, é possível usar múltiplos dela para se determinar a resposta.

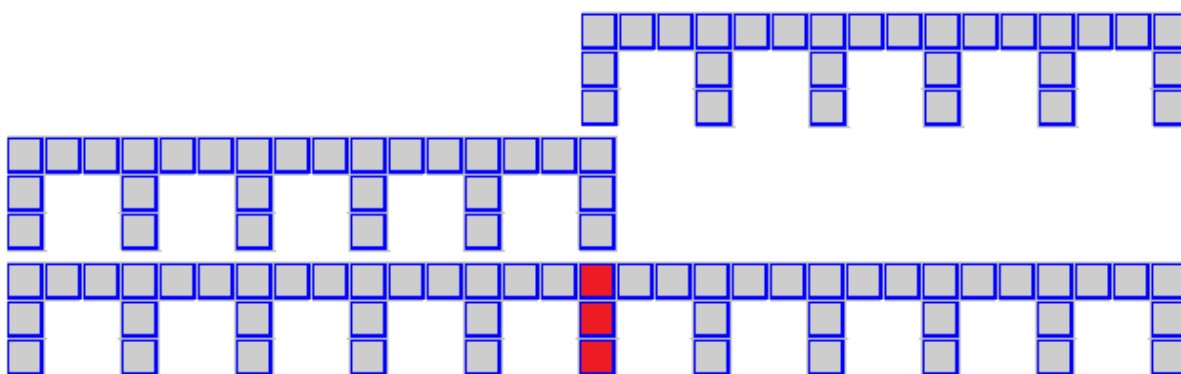
**Figura 5 - Ponte com 5 arcos**



Fonte: Próprio autor

Porém, ao fazer a sobreposição das duas pontes com 5 arcos cada, é possível verificar que há duas colunas se sobrepondo uma à outra (Figura 6). Portanto, para obter a resposta correta, deve-se retirar o número de quadrados de uma coluna da resposta final. Assim, os cálculos seriam: 28 (número de quadrados de uma ponte com cinco arcos) vezes 2 (totalizando dez arcos, como pedido na segunda questão) menos 3 (número de quadrados de uma das colunas que se sobrepõe à outra), resultando em 53.

**Figura 6 - Duas pontes com cinco arcos cada sobrepostas**



Fonte: Próprio autor

A estratégia *termo unidade com ajuste numérico* segue essa mesma ideia da *termo unidade com ajuste contextual*, porém o ajuste realizado deve ser feito com

base em propriedades numéricas do padrão, e não com base no contexto do problema. Um exemplo seria um padrão com primeiro termo sendo duas bolinhas; o segundo sendo três bolinhas; o terceiro sendo quatro bolinhas; o quarto sendo cinco bolinhas; e assim por diante. Fora de um contexto, é possível perceber que o número de bolinhas de um nível  $n$  é igual ao número da posição do termo no padrão somado de 1 unidade. Ou seja, o número de bolinhas do terceiro termo é  $3 + 1 = 4$ ; o número de bolinhas do quarto termo é  $4 + 1 = 5$ . A propriedade numérica do padrão seria exatamente essa: o total de bolinhas de um termo qualquer desse padrão é igual ao número da posição desse termo mais 1. Dessa forma, os ajustes deveriam ser realizados com base nessa propriedade numérica desse padrão.

Para aprofundar no entendimento das estratégias de generalização, vale lembrar que a definição de generalização considerada nessa pesquisa é a mesma de Kaput (1999), em que generalizar significa identificar de forma explícita regularidades entre casos considerados, de modo que seja possível avançar no raciocínio para além desses casos.

Nesse sentido, dependendo da estratégia adotada para se generalizar e da ordem de grandeza do termo de uma sequência que se quer generalizar, há dois tipos de generalização possíveis: a *generalização próxima* e a *generalização distante*. Segundo Barbosa (2010, p. 61):

Quando é possível determinar, de forma rápida e eficaz, um termo da sequência recorrendo a desenhos ou ao método recursivo<sup>9</sup>, a generalização diz-se *próxima*. Se, pelo contrário, dificilmente as abordagens descritas anteriormente permitem o cálculo de um dado termo da sequência, implicando a compreensão e descoberta de uma regra geral, a generalização em causa é *distante*<sup>10</sup>.

Sintetizando os resultados obtidos nas pesquisas realizadas por Stacey (1989), Sasman et al. (1999), Orton (1999), Becker e Rivera (2005), Lannin (2005) e Lannin et al. (2006), Barbosa (2010) concluiu que, para atividades que envolvem generalizações próximas, a estratégia mais utilizada foi a *contagem*; para generalizações distantes, a mais usada foi a *explícita*; e a *diferença (recursiva, com ou sem ajuste)*, a de *tentativa e erro* e a *termo unidade (sem ajuste, com ajuste*

---

<sup>9</sup> Termo usado de maneira geral para descrever o processo de repetição de um objeto de um modo similar a outro que já fora mostrado.

<sup>10</sup> Destaques realizados pela autora.



*numérico e com ajuste contextual*) foram utilizadas em ambos os casos. Com base nisso, seguem algumas considerações que buscam justificar essa síntese.

A estratégia de *contagem* geralmente é utilizada pelos alunos em atividades que apresentam padrões visuais, porém a avaliação de viabilidade dessa estratégia muda de aluno para aluno de acordo com alguns fatores, como, por exemplo, enxergar outros modos para resolver o problema, ter a possibilidade de usar alguma tecnologia (por exemplo, calculadoras ou computador), ou ainda conforme o próprio contexto do problema (STACEY, 1989).

Como já mencionado, a estratégia de contagem é utilizada com frequência para generalizações próximas, pois para a descoberta de termos distantes esse processo fica cansativo e lento, podendo resultar em representações inadequadas ou em contagens erradas. Além disso, quando os padrões são visuais, a disposição da figura, o número excessivo de elementos dela e a estratégia adotada para se contar tais elementos são fatores que apresentam dificuldades para os alunos e que, se realizados com desatenção, podem conduzir a uma resposta incorreta.

Sendo assim, em questões que envolvem itens nos quais se pede para descobrir termos próximos e distantes, normalmente os alunos, ao adotarem o método da contagem para descobrir os próximos termos, mudam de estratégia para descobrir os distantes. A justificativa para a escolha da contagem para termos próximos geralmente é feita com base na rápida obtenção da resposta solicitada, e em muitas vezes a resposta obtida para tais termos é a correta (BARBOSA, 2010). Por isso e por de certa forma ser fácil de realizá-la, acho que essa estratégia é a mais intuitiva de utilizarmos quando temos que fornecer uma quantidade de elementos de determinado padrão.

A estratégia da *diferença* pode ser utilizada tanto para realizar generalizações próximas quanto para distantes. Normalmente, os fatores que determinam a utilização dela são os valores dos termos, a estrutura matemática identificada pelos alunos em relação ao padrão estudado, as estratégias utilizadas anteriormente e a visualização que o aluno tem do padrão figural apresentado (LANNIN et al., 2006). Porém, em alguns casos os alunos percebem que a utilização dessa estratégia para se calcular termos muito distantes pode não ser muito adequada – por exemplo, quando o ajuste contextual for relativamente difícil de ser realizado –, e por isso mudam de estratégia (BARBOSA, 2010).

Sasman et al. (1999) relatam que em atividades cujas questões envolvem primeiro generalizações próximas e depois distantes, os alunos centram-se principalmente na estratégia da *diferença recursiva* em vez de generalizar uma regra para determinar termos distantes, e por isso cometem mais erros. Porém, para termos próximos, os alunos tendem a utilizar a estratégia *recursiva* corretamente.

Geralmente, a utilização da estratégia *diferença* está adequada ao contexto dos problemas nos quais ela é utilizada. O tipo *recursivo* tende a ser o mais utilizado pelos alunos, visto que ele não necessita de nenhum tipo de ajuste (STACEY, 1989). Mas, para termos distantes, usar recursividade pode ser exaustivo já que eles teriam que calcular todos os termos anteriores da sequência. Por isso, os alunos podem usar o *múltiplo da diferença sem ajuste* ou o *múltiplo da diferença com ajuste*. Com a utilização dessas estratégias, o grau de dificuldade de se calcular os termos distantes aumenta, e erros podem ser cometidos mais facilmente, principalmente pelo fato do último tipo necessitar de um ajuste final (BARBOSA, 2010).

As duas estratégias menos utilizadas pelos alunos nas pesquisas realizadas por Lannin et al. (2006), Sasman et al. (1999), Orton (1999), Becker e Rivera (2005) e Stacey (1989) foram a *termo unidade* e a *tentativa e erro*.

Quando esta última é utilizada diretamente, possivelmente os alunos obtêm expressões gerais incorretas, pois a escolha de valores utilizados para tentar determinar uma expressão geral do padrão geralmente é ao acaso, o que torna pouco provável obter êxito.

Ainda com relação às pesquisas citadas anteriormente, a estratégia *termo unidade* foi a menos utilizada pelos alunos. Os fatores determinantes para essa estratégia ser usada são os termos do padrão, os conceitos matemáticos presentes na atividade, a imagem do padrão e os métodos utilizados anteriormente. Sobre os termos do padrão, quando os valores numéricos ou visuais deles são múltiplos, as imagens visuais tendem a ser ignoradas e os alunos são mais propensos a aplicar essa estratégia. Além disso, esse método é mais utilizado para padrões crescentes do que decrescentes, podendo se inferir que os alunos se sentem mais seguros para calcular um termo por multiplicação do que por divisão (LANNIN et al., 2006).

A utilização da estratégia *explícita* ocorre com maior frequência para questões de generalização distante, em que o objetivo das atividades é a identificação da regra geral que permite estimar um termo específico de um determinado padrão.

Como fatores determinantes para a utilização dessa estratégia podem-se citar os termos iniciais de um padrão, os métodos anteriores utilizados pelos alunos e a visualização do padrão dentro do problema ao qual faz parte.

Portanto, pode-se dizer que determinar uma regra geral é o objetivo de todos os processos de generalização, pois qualquer termo de uma sequência pode ser determinado a partir da regra geral de formação dela, e, para se determinar tal regra, a estratégia mais utilizada é a explícita.

Lannin et al. (2006) afirmam que, para um padrão que possui termos iniciais consecutivos com valores relativamente distantes, a tendência é a utilização de uma estratégia explícita, e que raramente essa estratégia é utilizada primeiro em uma atividade, pois para usá-la deve-se compreender todas as características de formação e crescimento do padrão.

Um erro possível de ocorrer é os alunos trabalharem em um contexto puramente numérico a partir da visualização do padrão, inclusive associando os termos dos padrões visuais a números para posteriormente os utilizarem em suas estratégias (BECKER, RIVERA, 2005; SASMAN et al., 1999; ORTON, 1999). Dessa forma, uma relação deduzida de valores particulares é aplicada incorretamente para casos gerais (MASON, 1996).

As atividades desenvolvidas nessa pesquisa possuíam um forte componente visual, tanto pela representação visual dinâmica fornecida pelo MiGen quanto pela figura contida na folha de questões, que representava parte do padrão mostrado dinamicamente no software. Esse fator foi proposital, pois, corroborando Barbosa (2010, p. 371), “a inclusão de um suporte visual em situações que envolvem a exploração de padrões conduz à utilização de múltiplas abordagens para chegar à generalização”. Dessa forma, em problemas desse tipo, os alunos podem utilizar o contexto visual ou o numérico, usando estratégias específicas para cada opção.

Em relação às estratégias, podem existir características comuns entre elas, porém fica inviável falar sobre todas, já que o número é grande e existem diversas possibilidades. Porém, pode-se destacar como uma dessas características entre as estratégias abordadas nas pesquisas de Lannin et al. (2006), Sasman et al. (1999), Orton (1999), Becker e Rivera (2005) e Stacey (1989), o papel que a visualização desempenhou durante a realização das atividades.

No que se refere à visualização, as estratégias utilizadas pelos alunos na pesquisa de Barbosa (2010) podem ser divididas em visuais (*contagem, termo unidade com ajuste contextual, múltiplo da diferença com ajuste e explícita*) e não visuais, com foco no aspecto numérico do padrão (*termo unidade sem ajuste, termo unidade com ajuste numérico, recursiva, múltiplo da diferença sem ajuste e tentativa e erro*), baseado no fato da componente visual do problema ter ou não impacto direto na generalização.

Para Noss, Healy e Hoyles (1997), focar no aspecto numérico do padrão, ainda que haja um contexto visual presente no problema, pode ser um entrave à generalização. Nesse sentido, Mason (1996) afirma que há uma tendência para se inferir valores que originam uma expressão geral com base em casos particulares, o que leva a uma generalização incorreta, muitas vezes sem relação com a figura que representa o padrão.

Nesse sentido, o MiGen busca enfatizar o aspecto visual do padrão através da movimentação ao acaso do mesmo, fazendo com que o aluno procure identificar o que é invariante no padrão e, a partir disso, consiga reproduzir o padrão geral igual e obter a expressão geral que fornece o número de quadrados que formam esse padrão em função do nível do mesmo.

No caso da *contagem*, a utilização da visualização é evidente. Para alunos contarem termos de padrões, é necessário existir uma imagem do tipo de padrão abordado no problema, ou até mesmo que os alunos os desenhem após lerem as descrições de um padrão específico (BARBOSA, 2010). O MiGen tenta inibir a utilização dessa estratégia através da movimentação do padrão, mas no software é possível os alunos pausarem a movimentação do padrão, tornando-o estático e mais fácil de realizar a *contagem* a partir da imagem parada.

Na estratégia *diferença*, a visualização do padrão figural é importante, pois os alunos muitas vezes percebem a dimensão que o desenho tomaria para um termo distante ou o elevado número de elementos que esse termo teria, percebendo a inviabilidade do método para generalizações distantes. Dessa forma, os alunos tendem a optar por outra estratégia. Ou seja, muitas vezes a visualização do padrão figural torna-se fundamental para determinar rapidamente uma estratégia por meio da qual seja possível resolver o problema (LANNIN et al., 2006).

Em relação à *tentativa e erro*, alguns dos valores testados tendem a ter relação com a imagem do padrão, o que não significa maiores chances de acerto ou de erro, mas sim apenas que a imagem pode influenciar em alguma atitude perante a atividade (BARBOSA, 2010; LANNIN, 2005). No MiGen, a imagem também pode influenciar a utilização dessa estratégia. Com a movimentação do padrão, o aluno pode perceber o que se repete e assim utilizar valores a partir disso, objetivando aumentar a possibilidade de acerto na elaboração de sua expressão geral.

Baseado nisso, Sasman et al. (1999) afirmam ser importante formular atividades em que os números ou figura não sejam “sedutores”, isto é, não tenham relação ou semelhança direta entre si para não confundir ou estimular a formação de conclusões incorretas nos alunos. Isso foi considerado no momento da elaboração das atividades desenvolvidas nessa pesquisa.

Um exemplo disso é um padrão figural formado por bolinhas, cujo primeiro termo é uma bolinha e cuja razão de crescimento é multiplicar o termo anterior por 2. Dessa forma, os alunos podem pensar que para o primeiro termo há 1 bolinha, para o segundo há 2 bolinhas, então para o terceiro haverá 3 bolinhas. Ou seja, ao se basear apenas nos dois primeiros termos do padrão, um aluno pode associar o número de bolinhas de cada termo com sua posição, ignorando a regra de formação do padrão.

Ainda com relação à visualização, na estratégia *termo unidade*, os alunos podem utilizar a imagem para identificar se um termo é múltiplo de outro, e com isso optarem pela utilização desse método. Ainda, é possível que o contexto e os números relacionados à imagem façam parte dessa escolha, interferindo na resolução e forma de pensamento dos alunos (BECKER; RIVERA, 2005). Geralmente, quando os alunos optam por essa estratégia, eles fazem um ajuste baseado na visualização da figura.

Por outro lado, há algumas limitações de se utilizar estratégias visuais para generalizações. Contar termos de um padrão para realizar generalizações distantes aumenta a chance de erros, e isso é uma limitação da visualização. Na pesquisa de Barbosa (2010), esse fato foi comum a todos os alunos pesquisados.

Em relação à estratégia *explícita*, o objetivo dela assemelha ao que o MiGen busca proporcionar, ou seja, pelas imagens da movimentação do padrão, o software

tenta fazer com que os alunos percebam propriedades comuns a qualquer nível do padrão e assim desenvolvam a expressão geral do mesmo.

Ainda com base nas pesquisas dos autores citados acima, as estratégias *termo unidade com ajuste contextual* e a *múltiplo da diferença com ajuste* foram as menos utilizadas e nem sempre da forma correta. Como elas exigem um foco maior na imagem, pois necessitam de um ajuste posterior, qualquer erro cometido durante a visualização implicará em um erro na passagem para a generalização.

Para facilitar o entendimento dessas estratégias elaborei o Quadro 1, baseado em um quadro encontrado em Barbosa (2010), utilizado para analisar os dados de sua investigação, na qual procurou compreender “o modo como alunos do 6° ano de escolaridade resolvem problemas que envolvem generalização de padrões em contextos visuais” (BARBOSA, 2010, p. 3).

**Quadro 1 - Estratégias de Generalização**

<b>Estratégia</b>		<b>Descrição</b>
Contagem		Desenhar uma figura e contar seus elementos.
Termo Unidade	Sem ajuste	Considerar o termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade.
	Com ajuste numérico	Considerar o termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado com base em propriedades numéricas.
	Com ajuste contextual	Considerar o termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado com base no contexto do problema.
Tentativa e Erro		Adivinhar a regra por tentativas sucessivas com valores diferentes. Conhecida a regra, experimentar diversos valores até validar determinadas condições do problema.
Diferença	Recursiva	Continuar a sequência com base na diferença entre termos consecutivos.
	Múltiplo da diferença sem ajuste	Usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo, sem ajustar o resultado.

	Múltiplo da diferença com ajuste	Usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo, ajustando o resultado.
Explícita		Descobrir uma regra que permita o cálculo imediato do valor da variável dependente, sendo conhecida a variável independente correspondente.

Lannin et al. (2006) identificaram três fatores que podem influenciar significativamente a escolha de estratégias de generalização. O primeiro é o fator social, resultado da interação dos alunos com seus pares ou com o professor. O segundo é o fator cognitivo, associado às estruturas mentais que o aluno desenvolveu. Já o terceiro, são fatores associados à estrutura da atividade proposta.

No caso do MiGen, ele impacta principalmente no terceiro fator, pois a estrutura da atividade com padrões é modificada quando possibilitamos ao aluno enxergar o padrão de modo dinâmico, através da movimentação do mesmo. Ou seja, o aluno não trabalhará mais com um padrão estático, mas sim será desafiado a encontrar propriedades invariantes de um padrão cujo número de termos está variando.

As interações sociais têm sempre sido destacadas como fator na escolha de uma estratégia, pois se acredita que tais interações podem influenciar o pensamento dos alunos, bem como à formação de novas estruturas mentais ou adaptação das já existentes para a assimilação do novo conhecimento. Conforme as estruturas das atividades propostas mudam (padrões crescentes, decrescentes, termos próximos, distantes, múltiplos uns dos outros, ou até mesmo maneiras diferentes de disposição das figuras), os alunos utilizam diferentes estratégias para generalizar.

Sendo assim, pode-se concluir que os alunos não necessariamente utilizam uma única estratégia para resolver determinado problema, mas sim podem variar as estratégias para alcançar a generalização, seja ela próxima ou distante.

Dessa forma, irei analisar a questão “*quais são as estratégias utilizadas por alunos do 7º ano do Ensino Fundamental II para generalizar padrões com o software MiGen?*” me apoiando nas ideias e nos argumentos apresentados ao longo desse capítulo, que servirão como base para analisar os dados obtidos nas atividades desenvolvidas nessa pesquisa.

#### 4 METODOLOGIA DE PESQUISA

Com o intuito de responder a questão “*quais são as estratégias utilizadas por alunos do 7º ano do Ensino Fundamental II para generalizar padrões visuais com o software MiGen?*”, busquei na metodologia de pesquisa qualitativa o suporte necessário pelo fato de o pesquisador, numa investigação desse tipo, objetivar compreender um determinado fenômeno de forma profunda, descrevendo e buscando entender detalhadamente situações, eventos, pessoas, interações e comportamentos, sem se atentar a uma representatividade numérica do fenômeno estudado (GIL, 2006). Segundo Araújo e Borba (2006, p. 24), “[...] pesquisas que utilizam abordagens qualitativas nos fornecem informações mais descritivas, que primam pelo significado dado às ações”.

Para a realização dessa pesquisa, oito alunos foram observados durante o desenvolvimento de seis atividades com o uso do MiGen. Os encontros ocorreram entre os meses de outubro e dezembro de 2011. Portanto, as principais fontes de dados dessa pesquisa foram as observações e os registros das interações com e entre esses alunos. Tais registros foram realizados por um diário de campo (anotações escritas e elaboradas por mim durante a realização das atividades) por gravações em vídeo (uma câmera que filmava todos os alunos ao mesmo tempo).

Em relação à pesquisa qualitativa, dois fatores são considerados fundamentais. O primeiro, segundo Goldenberg (1997, p. 58), versa sobre a atenção que o pesquisador deve ter quando for definir o objeto de pesquisa, na tentativa de evitar críticas com relação à representatividade do grupo pesquisado e do trabalho a ser realizado:

O pesquisador deve, então, apresentar claramente as características do indivíduo, organização ou grupo, que foram determinantes para sua escolha, de tal forma que o leitor possa tirar suas próprias conclusões sobre os resultados e a sua possível aplicação em outros grupos ou indivíduos em situações similares.

Já o segundo fator que possui importância fundamental em uma pesquisa qualitativa é o modo como os dados são coletados e analisados. Devemos nos preocupar com aspectos que reportem às questões éticas da pesquisa e que são levantados com frequência devido à proximidade entre pesquisador e pesquisado. Dentre elas, destacam-se, segundo Goldenberg (1997, p.49), aquelas que dizem



respeito à omissão de fatos, de ocorrências, de detalhes, a qual pode ser tão significativa quanto sua inclusão nos depoimentos.

Assim, outros estudiosos poderão acompanhar os detalhes da análise e ver como e em que bases o pesquisador chegou às suas conclusões, dando a oportunidade de outros pesquisadores fazerem seus próprios julgamentos quanto à adequação da prova e do grau de confiança a ser atribuído à conclusão.

Uma forma apontada por alguns autores (LINCOLN, GUBA, 1985; ARAÚJO, BORBA, 2006) para se aumentar a credibilidade de uma pesquisa qualitativa é denominada de triangulação de dados, que consiste em utilizar vários métodos para se obter e analisar os dados, articulando-os para discutir a pesquisa realizada. Para Goldenberg (1997, p.63), a triangulação de dados “tem por objetivo abranger a máxima amplitude na descrição, explicação e compreensão do objeto de estudo”.

Essa triangulação de dados, juntamente com a análise dos mesmos, foi feita, principalmente, com base nas gravações em vídeo, comparadas com o diário de campo e com as gravações realizadas pelo software Camtasia<sup>11</sup>. Assim, as limitações das observações realizadas pelo pesquisador em tempo real puderam ser superadas ao assistir os registros das gravações por várias vezes.

Apresentarei a seguir a forma como ocorreu a pesquisa, descrevendo em detalhes o local de realização da mesma, os sujeitos participantes e os procedimentos adotados para a coleta e análise dos dados.

## **4.1 Contexto de pesquisa**

### **4.1.1 A Atividade-piloto**

Antes de iniciar a coleta de dados apliquei uma atividade-piloto com dois alunos do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola particular de Rio Claro. O objetivo dessa atividade era identificar possíveis ajustes a serem feitos tanto na estrutura das atividades elaboradas quanto no modo de explicar o que era o MiGen e como ele funcionava.

Era esperado que tanto os alunos que participaram da atividade-piloto como os que participaram da pesquisa como um todo não tivessem muito contato com softwares matemáticos. Por isso, objetivando minimizar dificuldades em relação à

---

<sup>11</sup> Permite que o usuário crie vídeos capturando tudo o que pode ser visualizado na tela do computador e também a imagem dos alunos, obtida via *webcam* dos notebooks.

utilização do MiGen pelos alunos durante a pesquisa, busquei explicar de maneira clara e concisa o funcionamento do mesmo.

A atividade desenvolvida foi a Atividade 1 dessa pesquisa. A análise aprofundada dos dados obtidos dessa atividade não foi realizada dado o objetivo dessa dissertação e da própria atividade-piloto, mas é possível dizer que os alunos conseguiram chegar na expressão geral que fornecia o número de quadrados em função do número de degraus da mesma sem grandes dificuldades.

Em relação à atividade-piloto, não foi realizada nenhuma alteração nela. Como todas as atividades aplicadas nessa pesquisa foram baseadas no tutorial do software MiGen e estas já tinham algumas questões formuladas, a ideia foi mantida para a elaboração de todas as atividades.

Portanto, a atividade-piloto contribuiu principalmente para se ter uma ideia do tempo médio que os alunos gastavam para realizar uma atividade (cerca de 1 hora) e para a prática das falas dos passos de como funcionava o MiGen.

#### *4.1.2 A escola e os alunos*

O local escolhido para o desenvolvimento das atividades que propiciaram o contexto da coleta dos dados foi uma escola estadual localizada na cidade de Rio Claro, interior de São Paulo. Tal escola foi escolhida por possuir as condições necessárias para a aplicação das atividades, isto é, ter alunos do 7º ano do Ensino Fundamental II, possuir um local para se realizar a pesquisa e pelo fato de membros do GPIMEM, dentre eles meu orientador, já terem realizado investigações anteriores nela, o que facilitou o acesso para essa pesquisa. Já a escolha do 7º ano foi baseada no Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias (2010), que traz os conteúdos introdutórios de álgebra no quarto bimestre letivo.

Optei por coletar os dados na própria escola. Segundo Lincoln e Guba (1985), coletar dados no ambiente natural dos alunos é uma das características de pesquisa qualitativa e, por isso, torna-se mais fácil de ser adaptada para se lidar com múltiplas realidades e também pelo fato de que investigações desse tipo expõem mais diretamente a natureza da interação entre pesquisador e pesquisados. Apesar de minha coleta de dados não ter sido realizada em sala de aula e nem com todos os alunos dos 7º anos, mas sim na biblioteca da escola com apenas oito alunos de duas classes diferentes, entendo que assim mesmo o ambiente era natural para os

alunos, visto que a biblioteca se localiza dentro da escola, os alunos têm acesso a ela e relataram frequentá-la esporadicamente.

Uma das primeiras etapas da coleta de dados foi escolher, juntamente com a professora dos 7º anos, os alunos que iriam participar das atividades, bem como as melhores datas para a realização delas. O critério foi selecionar as classes que tinham aulas duplas de matemática, considerando o tempo médio de realização de cada atividade obtido através da atividade-piloto. Foram selecionadas duas classes, denominadas de “7º A” e “7º B” (“sétimo ano A” e “sétimo ano B”, respectivamente). O desenvolvimento das atividades em cada classe foi realizado separadamente, respeitando o horário de distribuição de aulas de cada uma. Dois dias da semana foram escolhidos, um para cada classe.

O passo seguinte foi selecionar os oito alunos que participariam da pesquisa. Os critérios de seleção foram buscar alunos que se comprometessem com a pesquisa, que participassem ativamente das atividades, que comparecessem com frequência às aulas e que, no decorrer do ano letivo, se mostraram interessados em aprender, mesmo que não tivessem facilidade em aprender conteúdos de matemática. A partir disso, quatro alunos de cada sala foram indicados pela professora. O número oito foi determinado pelo fato de haver somente dois notebooks, da coleta ser realizada em dois dias diferentes e pela opção de desenvolver as atividades em pares.

Os alunos desenvolveram as atividades em duplas formadas por eles próprios, sem interferência minha, que permaneceram as mesmas durante toda a coleta de dados. A opção pelo trabalho em duplas justificou-se pelo objetivo de se querer observar as estratégias dos alunos ao resolver as atividades propostas e também pelo fato de que as interações entre os alunos de cada dupla e entre as duplas poderiam proporcionar momentos e discussões diferentes das que existiriam na relação do aluno com o pesquisador. Os alunos poderiam utilizar linguagens comuns para desenvolver a atividade, sem terem a influência direta de uma linguagem mais formal que porventura eu poderia ter utilizado em algum momento de discussão com eles. Esses momentos de discussões podem ser mais ricos em detalhes, principalmente os que se referem à aprendizagem que pode ocorrer durante os trabalhos em grupo, como, por exemplo, interações mais espontâneas entre os sujeitos de pesquisa do que com o pesquisador.

Visando compreender melhor o trabalho desenvolvido por cada uma das duplas, farei uma breve descrição do perfil de cada dupla, apresentando características de cada aluno<sup>12</sup>.

#### **4.1.2.1 Dupla 1: Helen e Naiara**

Essas alunas eram ativas, falantes, gostavam de participar das aulas de matemática. Ambas tinham 12 anos. Helen possuía computador com internet em casa. Era boa aluna, interessada, participativa, questionadora. Sua nota média era sempre maior que 9,0, e tirava boas notas em todas as matérias segundo relatos da professora. Sua disciplina favorita era matemática. Gostava mais de exercícios de matemática que a fizessem pensar e refletir sobre um problema, reunindo informações para tentar solucioná-lo. Era mais falante e participativa que Naiara, sempre se dispunha e tomava a frente primeiro que sua amiga. Quando algo inicialmente não saía como ela esperava, imediatamente tentava buscar uma solução, discutindo com a amiga ou tentando pensar de outra forma a partir de orientações minhas. Seu passatempo preferido era navegar na internet.

Naiara tinha um computador antigo, que não funcionava muito bem, e por isso não tinha muito interesse em usá-lo. Não usava muito a internet na sua casa, pois a conexão era discada. Era mais calma e pensativa que Helen, porém participava das atividades de forma direta, discutindo com sua amiga sobre as dúvidas e sobre os exercícios em geral. Também disse que matemática era sua disciplina favorita, e assim como Helen, prefere exercícios em que o objetivo é solucionar um problema proposto, buscando informações necessárias para isso. Segundo relatos da própria aluna, suas notas sempre ficavam entre 8,5 e 9,5 em todas as disciplinas.

#### **4.1.2.2 Dupla 2: Leandro e Laura**

Os integrantes dessa dupla eram mais tímidos que a dupla anterior, principalmente nos primeiros encontros. Conversavam normalmente como amigos de classe, mas fora da escola não faziam parte do círculo de amigos um do outro. Ambos tinham 12 anos. Leandro era um pouco menos tímido que Laura. Tinha computador em casa com internet. Era um bom aluno, tirava notas boas, na maioria das vezes entre 8.0 e 9.0 segundo ele mesmo, e sua disciplina preferida era

---

<sup>12</sup> Os nomes dos alunos são fictícios.

educação física. Quando questionado se gostava de matemática, disse que sim, pois não sentia necessidade de decorar nada, relatou que somente pensando conseguia solucionar os exercícios propostos.

Laura era a mais tímida dentre esses quatro alunos. Não possuía computador em casa, o que a deixou um pouco desconfortável no início das atividades. A princípio, eu e seus colegas tivemos que encorajá-la para manusear o computador, porém após o segundo encontro já se sentia mais confortável. Sua disciplina favorita era português. Em matemática, geralmente sua média ficava entre 7.0 e 8.5, segundo a aluna.

#### **4.1.2.3 Dupla 3: Vanessa e Joana**

Essa dupla inicialmente se mostrou tímida, porém conforme os encontros foram ocorrendo as duas alunas se sentiram mais soltas e participaram mais das atividades. Eram amigas e estavam perto de completar 12 anos cada uma. A disciplina preferida das duas era ciências.

Joana era mais tímida que Vanessa. Considerava-se uma aluna mediana, com notas entre 6,5 e 8,5, que julgava serem boas considerando que não gostava muito da maioria dos conteúdos de matemática. Quando questionada sobre quais conteúdos gostava, ela disse que preferia os assuntos ensinados de forma a envolver problemas e investigações matemáticas, mas que poucos eram trabalhados dessa forma. Possuía computador em casa e acessava a internet com certa frequência.

Vanessa se considerava boa aluna também, tinha notas entre 7,0 e 8,0, as quais justificava por ter dificuldades em aprender matemática mesmo gostando da disciplina. Relatou ter mais facilidade em aprender quando discutia e conversava sobre o que estava estudando com amigos. Disse que não participava muito da aula pois se sentia envergonhada. Porém, durante os encontros da coleta de dados, em nenhum momento sua timidez limitou sua participação. Não possuía computador em sua casa, mas quando queria usar um se deslocava até a casa de sua tia, logo tinha acesso frequente a essa tecnologia. Usava a internet toda semana.

#### 4.1.2.4 Dupla 4: Renan e Gustavo

Essa dupla era extremamente tímida. Quase não conversaram durante todas as atividades, somente discutiam suas dúvidas um com o outro quando eu interferia e os questionava insistentemente. Ambos tinham 12 anos.

Renan era o mais tímido de todos os alunos. Não falava com ninguém. Na maioria das vezes que era questionado, gesticulava com a cabeça ou apenas sorria. Quando se pronunciava, falava muito baixo, quase inaudível. Os outros alunos relataram que ele era inteligente, tirava notas acima de 9,0 e que não participava da aula. Possuía computador em casa, acessava a internet com frequência.

Gustavo era tímido também, não se relacionava com seus colegas de classe como se fossem amigos, mantinha certa distância no modo de se relacionar. Era do tipo monopolizador, somente ele queria mexer no computador para fazer as atividades. Como Renan não se manifestava, Gustavo fez a maioria das atividades sozinho, manipulando sozinho o software. Não se importava com isso, gostava de trabalhar sozinho. Era inteligente, com notas acima de 9,0 também. Quando solicitei a ele deixar Renan manipular o software, não gostou e não acompanhou o trabalho do colega, optando por fazer as questões na folha antes de trabalhar com o software. Tinha computador em casa, mas não o utilizava com frequência.

Por causa dessas características, desconsidere as atividades realizadas por essa dupla e não as analisei nessa pesquisa. Julguei que os dados foram insuficientes para se concluir algo a partir deles. Nas filmagens, por exemplo, não conseguia ouvir a voz dos alunos quando esses se manifestaram oralmente, nas poucas vezes que o fizeram. Por isso, analisei apenas as atividades das três duplas anteriores.

#### 4.1.3 O software MiGen

Elaborado e desenvolvido pelo *London Knowledge Lab* (associação do *Institute of Education*<sup>13</sup> – *University of London* com a *Birkbeck University of London*<sup>14</sup>), o MiGen<sup>15</sup> é um ambiente computacional disponibilizado gratuitamente via internet que visa contribuir para a aprendizagem de generalização matemática de

---

<sup>13</sup> Home-page: <[www.ioe.ac.uk/](http://www.ioe.ac.uk/)>. Acesso em: 20 março 2012.

<sup>14</sup> Home-page: <<http://www.lkl.ac.uk/cms/>>. Acesso em: 20 março 2012.

<sup>15</sup> Home-page: <[www.migen.org](http://www.migen.org/)>. Acesso em: 20 março 2012.

alunos entre 11 e 14 anos. Por meio do software eles podem analisar e generalizar padrões, compreendendo o que é generalização matemática, para que ela serve e como ela pode ser expressada (GERANIOU et al., 2009; GERANIOU et al., 2011; NOSS et al., 2012).

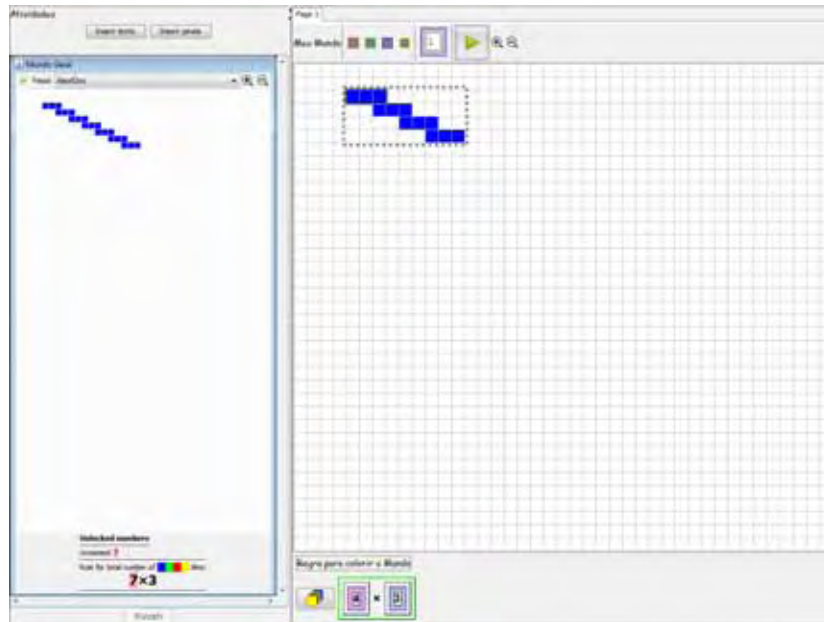
A principal característica desse software é o fato dele ser um ambiente pedagógico formado por alguns componentes que exploram uma propriedade singular das tecnologias digitais: o potencial dinâmico das mesmas (NOSS et al., 2012). Assim, o aluno, a partir do padrão em movimento apresentado dinamicamente na tela do computador, é levado a obter uma expressão geral que representa o número de quadrados que o padrão terá em qualquer nível. Dessa forma, o aluno é induzido a analisar as alterações e propriedades invariantes do padrão no MiGen para determinar essa expressão (NOSS et al., 2009a; GERANIOU et al., 2009).

Para isso, há a necessidade de envolver os estudantes durante a explicação e criação de uma linha de pensamento sobre um padrão de uma determinada estrutura, objetivando dar sentido ao que os alunos muitas vezes veem como manipulação de símbolos sem significado. Para auxiliar nesse processo é necessário criar situações que sejam ricas na construção e análise de padrões e incentivar a sua expressão através de símbolos. Esta foi uma das razões fundamentais para o software MiGen ter sido escolhido na presente pesquisa.

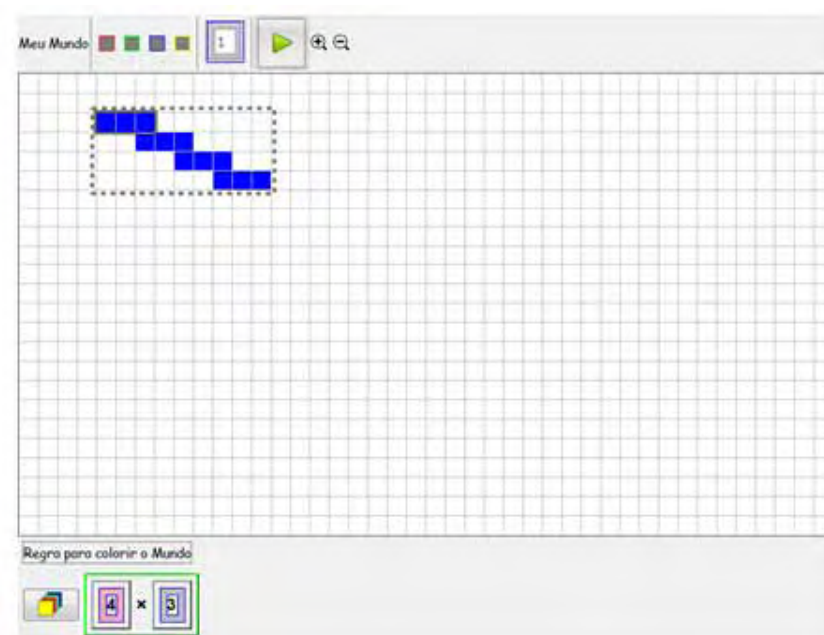
A Figura 7 mostra a interface do MiGen<sup>16</sup>, que consiste em duas áreas principais: uma denominada “Meu Mundo” (Figura 8) e outra chamada “Mundo Geral” (Figura 9). Há também a barra de ferramentas (Figura 10) e a área de atribuição de cor (Figura 11), espaço onde a expressão que fornece o número de quadrados do padrão para qualquer nível dele deve ser colocada. O objetivo dos alunos é justamente esse: descobrir a expressão geral que resulta no número total de quadrados do padrão para um nível  $n$  qualquer, considerando as cores dos quadrados que formam o padrão.

---

<sup>16</sup> Essa foi a versão utilizada na coleta de dados, mas novas versões foram desenvolvidas posteriormente.

**Figura 7 - Interface do software MiGen**

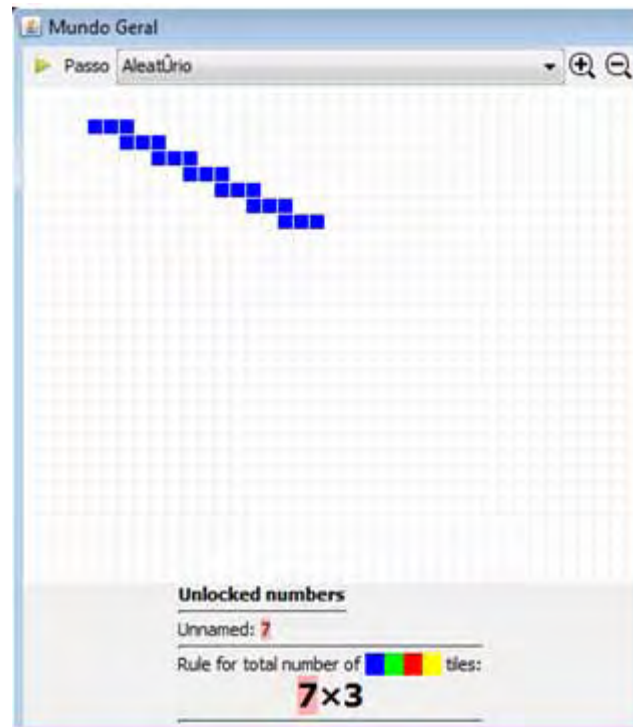
Fonte: Próprio autor

**Figura 8 – Área denominada “Meu Mundo”**

Fonte: Próprio autor



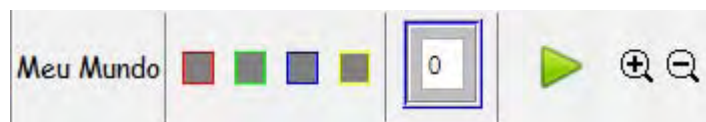
**Figura 9** – Área denominada “Mundo Geral”



Fonte: Próprio autor

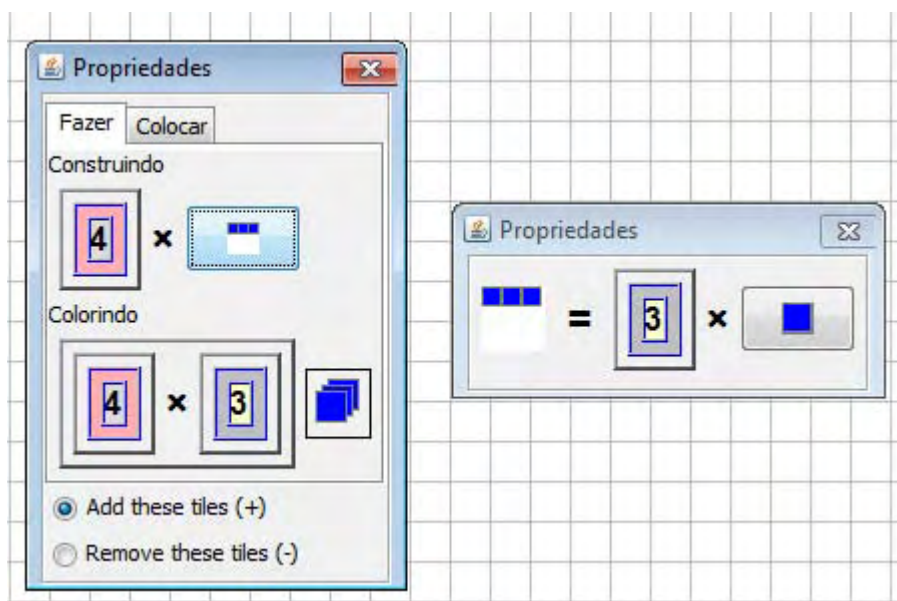
A barra de ferramentas (Figura 10) contém os quadrados utilizados para formar padrões, o gerador de números, botão *play* que anima os padrões e a ferramenta *zoom*. Para usar o gerador de números basta clicar dentro da caixa, digitar o número desejado, clicar na borda da caixa e arrastar o *mouse* para movimentá-la.

**Figura 10** – Barra de ferramentas



Fonte: Próprio autor

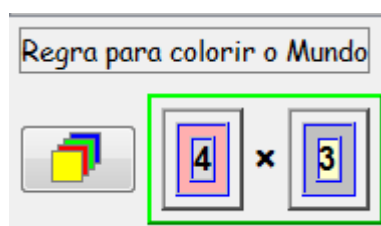
**Figura 11 – Propriedades do padrão**



Fonte: Próprio autor

Ao clicar em um padrão já construído no "Meu Mundo" é possível ver as propriedades dele (Figura 11): na figura da direita, cada bloco (degrau da escada) é formado por 3 quadrados azuis. O padrão da tela "Meu Mundo" é formado por 4 blocos de 3 quadrados cada, o que resulta na expressão "4 x 3" (figura da esquerda). Para abrir a janela da esquerda é necessário clicar sobre o padrão e selecionar a opção "mostrar propriedades". Para abrir a da direita, deve-se clicar no desenho que representa um padrão com três quadrados azuis, mostrado na janela da esquerda. A Figura 12 mostra a expressão "4 x 3" destacada em verde, representando que ela está correta.

**Figura 12 – Área de atribuição de cor dentro do "Meu Mundo"**

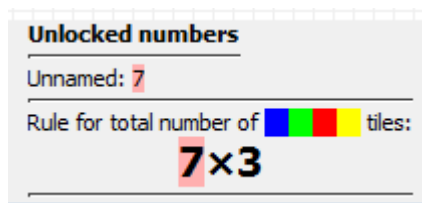


Fonte: Próprio autor

Para um número poder variar devemos desbloqueá-lo clicando nele e selecionando a opção "desbloquear" (NOSS et al., 2012). Quando desbloqueamos um número, seu contorno muda da cor azul para a cor rosa, como mostrado na Figura 12. Como o número de blocos do padrão pode variar, então o "número 4" (da expressão  $4 \times 3$ ) deve ser desbloqueado para que também varie, fazendo o papel do que denominamos de variável em álgebra. Dessa forma, o aluno deverá obter a fórmula final, no caso " $n \times 3$ ", onde  $n$  é o número de blocos do padrão, representado na expressão pelo número "4", o qual poderá variar após o desbloquearmos.

Uma etapa necessária para os alunos cumprirem no MiGen é colorir o padrão do "Meu Mundo", deixando-o igual ao padrão do "Mundo Geral", diferenciando somente o nível mostrado de cada padrão. Os quadrados do padrão somente se colorem após os alunos descobrirem a expressão geral que fornece o número de quadrados do padrão para qualquer nível  $n$ . Para isso, devemos arrastar a caixa que contém essa expressão até o espaço na área de atribuição de cor. Quando fazemos isso, se a expressão desenvolvida estiver correta, seu contorno fica verde e o padrão no "Mundo Geral" fica colorido. No "Mundo Geral" também é apresentada uma expressão (Figura 13) gerada automaticamente pelo próprio MiGen a partir da expressão colocada na área de atribuição de cor no "Meu Mundo".

**Figura 13** – Expressão criada pelo MiGen automaticamente



Fonte: Próprio autor

Para auxiliar no entendimento de como o MiGen funciona, indico fortemente assistir ao vídeo disponibilizado no site <http://www.youtube.com/watch?v=sD6MdLmqUpq&feature=BFa&list=PL10B3F12D9A963B2A>, intitulado "TT2009 Recall1". Ele mostra o funcionamento do software através da construção de um padrão. Pelo vídeo é possível complementar a explicação descrita aqui, facilitando o entendimento de como o MiGen funciona.

Para a utilização do MiGen, optamos por fazer sua tradução objetivando facilitar seu uso, porém algumas partes que compõem as janelas do programa ficaram sem tradução, fato que não interferiu no desempenho e realização das atividades por parte dos alunos.

É importante ressaltar que atualmente desconhece-se algum software específico, exceto o MiGen, que seja voltado para o ensino do processo de generalização matemática por meio do uso de padrões.

#### **4.2 Coleta dos dados**

A coleta de dados foi feita por meio de seis atividades que abordaram o processo de generalização através de padrões. Essas atividades foram elaboradas com base em atividades já existentes no tutorial do software MiGen.

Foram realizados seis encontros com os participantes da pesquisa, com duas aulas de duração cada, no mesmo horário de aula dos alunos, mas em espaços separados da sala de aula. Os instrumentos utilizados para a coleta de dados foram: uma câmera filmadora, que capturou imagens audiovisuais da sala como um todo, enquadrando os quatro alunos com o objetivo de mostrar possíveis interações entre as duplas, dois notebooks, uma folha para cada atividade com questões sobre os padrões trabalhados e um caderno de campo.

A coleta de dados teve como um de seus elementos principais as gravações da câmera filmadora e a geração de vídeos através do software Camtasia Studio em todos os encontros. Através desses vídeos foi possível capturar as interações e comportamentos ocorridos durante os episódios de ensino, além de permitir que os dados obtidos fossem analisados posteriormente por várias vezes.

Os vídeos puderam contribuir também com a questão da validade e confiabilidade dos dados no momento da coleta e análise dos dados. Jaccoud e Mayer (2010), apoiados em Becker<sup>17</sup>, mencionam que para aumentar a validade dos dados seria necessário que o pesquisador retornasse ao campo algumas vezes, para testemunhar novamente a veracidade dos mesmos. O vídeo tem, então, um papel importante quando esse ponto de vista é considerado, pois:

---

<sup>17</sup> BECKER (1958). Problems of Inference and Proof in a Participant Observation. **Sociological Review**, vol. 23, p. 652-660.

O vídeo (filmagem) é indicado para estudo de ações humanas complexas difíceis de serem integralmente captadas e descritas por um único observador, minimizando a questão da seletividade do pesquisador, uma vez que a possibilidade de rever várias vezes as imagens gravadas direciona a atenção do observador para aspectos que teriam passado despercebidos, podendo imprimir maior credibilidade ao estudo. (PINHEIRO; KAKEHASHI; ANGELO, 2005, p. 718).

Dessa forma, os vídeos foram o principal instrumento utilizado para a coleta de dados, pois capturaram as imagens momento-a-momento, registraram as falas e também o comportamento não-verbal dos alunos (POWELL et al., 2004). Assim, as minhas notas, realizadas a partir de minha observação enquanto pesquisador, tornaram-se complementar aos vídeos, pois elas sofreram edições automáticas já no momento da escrita.

#### 4.2.1 *As atividades*

As atividades eram compostas por um padrão figural apresentado no MiGen de forma dinâmica (variando na tela do computador), e por uma folha que continha uma representação visual desse padrão até um determinado nível, com algumas questões referentes a ele, que era entregue após os alunos manusearem o padrão no software por alguns minutos. A ideia era que os alunos visualizassem o padrão primeiro no MiGen, tentassem encontrar a expressão geral que fornecia o número de quadrados que formava o padrão para qualquer nível  $n$  e somente após isso respondessem as questões da folha. O objetivo disso era fazer com que os alunos utilizassem o MiGen para trabalhar com os padrões que se moviam randomicamente, antes de responder as perguntas sobre cada padrão. Caso a folha fosse entregue logo no início, a representação visual do padrão contida nela poderia inibir a utilização da dinamicidade do MiGen para resolver as atividades. Vale salientar que a construção do padrão realizada pelos alunos e a fórmula obtida por eles estava disponível para ser consultada no MiGen poderia ser utilizada pelos alunos para resolver as questões da folha.

O padrão no papel era estático, era uma representação de um único nível ou termo da sequência. Já no MiGen, a variação permitiu que vários termos da sequência fossem mostrados. As questões no papel iniciaram com casos particulares, representados por termos próximos ao primeiro termo da sequência, e então evoluíram para o nível geral, representado pela expressão geral que fornecia o número de quadrados que formavam um padrão. No software, porém, a partir da

visualização randômica do padrão, os alunos tentavam obter essa expressão geral. Ou seja, o MiGen permitiu aos alunos visualizarem vários casos particulares “ao mesmo tempo”, para a partir deles buscarem a expressão geral do padrão.

Todas as atividades desenvolvidas com os alunos eram compostas por padrões diferentes uns dos outros. Por isso, para aplicar as atividades, tentei classificá-las em um nível crescente de dificuldade, baseando-me somente nos padrões. As atividades que continham padrões de uma cor foram consideradas mais fáceis.

Em todas as questões era pedida uma justificativa da resposta fornecida, visando explicitar a forma de pensamento dos alunos, deixando claro o caminho que escolheram. Era permitido utilizar qualquer forma de resolução. Em relação aos conceitos matemáticos, as atividades abordaram operações aritméticas.

#### **4.3 Análise dos dados**

Segundo Bogdan e Biklen (1999, p.205):

A análise de dados é o processo de busca e de organização sistemática de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados, com o objetivo de aumentar a própria compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou.

Sendo assim, da análise dos dados emergiram os resultados desta pesquisa, originados da triangulação entre os registros escritos e gravados com a literatura pertinente e as discussões junto aos pares (LINCOLN e GUBA, 1985).

Defini como categorias de análise cada uma das estratégias de generalização apresentadas pelos autores Stacey (1989), Sasman et al. (1999), Becker e Rivera (2005), Lannin (2005), Lannin et al. (2006) e Barbosa (2010). Caso fosse necessário, existia a possibilidade de essas estratégias serem complementadas por mim, dependendo do surgimento, por influência do MiGen, de alguma outra estratégia de generalização utilizada pelos alunos.

Para categorizar os dados analisados em todas as atividades, realizei os procedimentos descritos a seguir. Primeiro, ainda durante a coleta de dados, revi todos os vídeos no mesmo dia em que eram filmados, mas sem elaborar categorias definidas, somente para me familiarizar com os vídeos e ver como estava a qualidade das filmagens. Com esse procedimento, pude ter uma visão geral dos dados que estava obtendo.

Após finalizar a coleta dos dados, reli os textos utilizados como referencial teórico, buscando compreender profundamente características de cada uma das estratégias que os autores utilizaram (contagem, tentativa e erro, termo unidade, diferença e explícita). Então, analisei os vídeos enfocando e selecionando os momentos que caracterizassem as estratégias de generalização usadas pelos alunos nos padrões visuais apresentados nas atividades, contrastando as informações obtidas neles com o caderno de campo e as atividades realizadas no papel pelos alunos.

Para buscar um melhor entendimento de cada um desses momentos, transcrevi os trechos dos vídeos dos momentos selecionados, complementando as informações com outras obtidas nas folhas que continham as questões respondidas pelos alunos e também com meu caderno de campo.

Com o objetivo de tentar construir uma possível resposta para a questão norteadora dessa pesquisa, no próximo capítulo apresento e analiso os dados coletados com as atividades desenvolvidas juntamente aos alunos.

## 5 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

Nesse capítulo analiso as atividades desenvolvidas com os alunos com o intuito de tentar responder à questão “*quais são as estratégias utilizadas por alunos do 7º ano do Ensino Fundamental II para generalizar padrões visuais com o software MiGen?*”. Para cada atividade apresento as estratégias utilizadas em cada questão, visando mostrar o motivo de cada uma ter sido usada, justificando a escolha por parte dos alunos. Ressalto que, mesmo os alunos se sentando em duplas, em algumas das atividades alunos de uma mesma dupla usaram estratégias diferentes para responder as questões da folha. Por isso, no momento de analisar as respostas, a identificação das estratégias utilizadas foi realizada separadamente.

### 5.1 Atividade 1: A escada

As estratégias utilizadas pelos alunos para resolver a Atividade 1 (pág. 25) foram a *contagem* e a *explícita*. A *contagem* foi utilizada apenas pela dupla Leandro e Laura para responder a primeira questão. Leandro aponta isso ao responder a questão na folha da seguinte forma<sup>18</sup>: “São necessários 6 quadrados para construir essa escada. Eu contei os quadrados”. Já Laura não revelou pela escrita que realizou a contagem dos quadrados de uma escada de dois degraus, mas as gravações feitas em vídeo (tanto pelo software Camtasia quanto pela câmera que filmava os quatro alunos) mostraram-na realizando essa contagem oralmente.

O uso dessa estratégia para essa primeira questão era esperado, pois ela exigia uma generalização próxima. Além disso, usar a *contagem* nesses casos é um processo intuitivo, através do qual pode-se obter uma resposta rapidamente (BARBOSA, 2010). Além disso, a generalização exigida na questão era próxima, tornando mais oportuna ainda a resolução por *contagem* (STACEY, 1989).

As duplas Vanessa/Joana e Helen/Naiara usaram a estratégia *explícita* para responder todas as questões da primeira atividade. Essa estratégia também foi usada por Leandro e Laura para responder a segunda, terceira e quarta questões. De certa forma, mesmo a estratégia *explícita* sendo utilizada principalmente para questões de generalização distante (LANNIN et al., 2006), a facilidade e

---

<sup>18</sup> Como os alunos escreveram suas respostas usando lápis, a escrita ficou muito clara para ser digitalizada, tornando a qualidade da figura ruim. Pelo fato da escrita das figuras estar ilegível, transcreverei o que estava escrito na resolução de cada aluno.



simplicidade do padrão da primeira atividade, bem como a construção dele e de sua expressão geral no MiGen, podem ter contribuído para a obtenção rápida das respostas de todas as questões, no caso da dupla Helen/Naiara e Vanessa/Joana, e das três últimas, no caso da dupla Leandro/Laura.

Como exemplo do uso da estratégia *explícita* e visando mostrar uma possível resolução dessa atividade por meio dela, citarei o desenvolvimento apresentado pela dupla Helen e Naiara em relação à primeira atividade.

As alunas Helen e Naiara iniciaram a resolução dessa primeira atividade diretamente no computador. Antes de iniciá-la, observaram atentamente a variação do padrão no MiGen por aproximadamente dois minutos, retirando informações do padrão que se repetia na tela individualmente, sem conversar uma com a outra, e após isso começaram a construir o padrão no software. Perceberam que colocar um novo degrau na escada era o mesmo que aumentar três quadrados no número de quadrados total da escada. Utilizaram essa ideia corretamente para encontrar a expressão geral que fornecia o número de quadrados de uma escada de qualquer tamanho. Após generalizarem a expressão no software, usaram-na na resolução das questões no papel, iniciando-a sem conversar uma com a outra durante isso.

Na questão 1, já utilizaram a estratégia *explícita* para fornecer a resposta de quantos quadrados eram necessários para construir uma escada com 2 degraus. Ambas responderam “6 quadrados”, justificando com a frase “multipliquei 3 por 2”. No caso, 3 era o número de quadrados de cada degrau e 2 era o número de degraus.

Prosseguiram com essa estratégia para responder todas as outras questões. Na segunda questão, justificaram da mesma forma, multiplicando 8 (número de degraus) por 3 (número de quadrados de cada degrau). Na terceira, houve uma pequena diferença no modo de resolver de cada uma, mas ainda utilizaram a estratégia *explícita*. Helen primeiro multiplicou 3 por 30 e depois 3 por 2, somando os resultados no final, totalizando os 96 quadrados da escada de 32 degraus. Já Naiara fez direto, multiplicando 32 por 3. Acredito que Helen decompôs o número 32 em  $30+2$  pela facilidade de realizar a multiplicação por números que são múltiplos de dez.

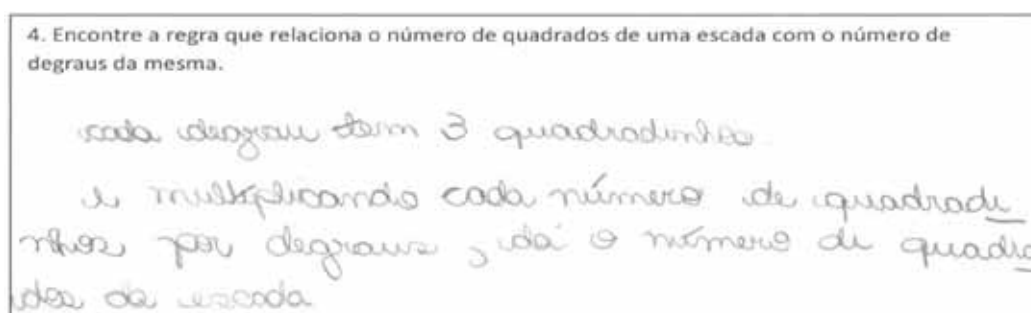
Nas três questões descritas acima considerei que Helen e Naiara usaram a estratégia *explícita*. Nesse caso, poderia também ser considerado que as alunas

usaram a *termo unidade sem ajuste*, mas como em nenhum momento elas escreveram, afirmaram verbalmente ou mostraram, por meio do software, utilizar uma figura de três quadrados como múltiplo para calcular o que era pedido, considere, para efeito da análise, que a estratégia usada foi a *explícita*.

Na última questão escreveram por extenso seus raciocínios, sem utilizar uma fórmula específica que resultasse no número total de quadrados que formam uma escada. Somente Naiara deu indícios de tentar escrever seu raciocínio utilizando uma expressão numérica, explicando o que significava cada número da expressão. Essa foi uma primeira evidência que a passagem da aritmética para a álgebra estava se iniciando, mas ressalto que tal passagem não ocorreu de forma abrupta, e sim foi sendo construída pela aluna desde o início da atividade. As respostas por escrito de cada aluna dessa dupla podem ser lidas nas Figuras 14<sup>19</sup> e 15<sup>20</sup>.

A resposta dessa última questão fortalece minha justificativa de que a estratégia utilizada para responder as anteriores foi a *explícita*, pois as respostas das três primeiras questões foi calculada utilizando a regra geral que já havia sido descoberta pelas alunas, mas somente não tinha sido verbalizada ou escrita no papel.

**Figura 14** - Resposta de Helen para a questão 4 da Atividade 1

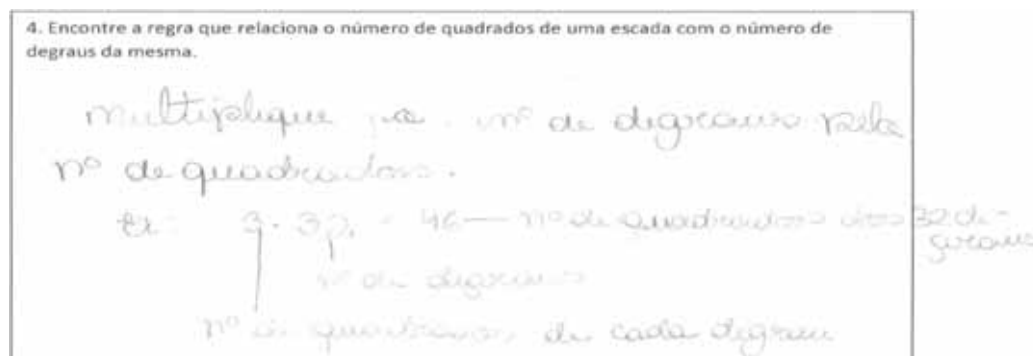


Fonte: Próprio autor

<sup>19</sup> “Cada degrau tem 3 quadradinhos e multiplicando cada número de quadradinhos por degraus, dá o número de quadradinhos da escada”.

<sup>20</sup> “Multipliquei o n° de degraus pelo n° de quadrados. Ex: 3 x 32 = 96” – e, usando um risco saindo de cada número, a aluna escreve o que cada um representa – “3 é o n° de quadrados de cada degrau; 32 é o n° de degraus e 96 é o número de quadrados dos 32 degraus.”

**Figura 15** - Resposta de Naiara para a questão 4 da Atividade 1



Fonte: Próprio autor

Podemos perceber que ambas as alunas não utilizaram letras nem outros símbolos para representar as variáveis, mas sim optaram por escrever por extenso seus raciocínios. Acredito que isso seja natural, pois os alunos não têm o hábito de utilizar símbolos para representar algo que varie em matemática principalmente pelo nível de escolaridade em que estão. Assim, uma das poucas formas, senão a única, de explicitar seus raciocínios através da escrita seria pela utilização de palavras, o que considero também não ser uma tarefa fácil para eles, como será possível notar ainda neste capítulo.

Por terem conseguido expressar uma regra geral para determinar o número de quadrados de qualquer escada, mesmo que por palavras, é possível considerar que a estratégia usada foi a *explícita*, cujo objetivo é descobrir uma regra que permita o cálculo imediato do valor da variável dependente, sendo conhecida a variável independente correspondente (BARBOSA, 2010). Vale salientar que em nenhum momento é exigido que a expressão dessa regra geral seja feita por símbolos matemáticos usuais.

Baseado na definição de generalização adotada nessa pesquisa, a saber: generalização é o processo no qual se busca identificar propriedade(s) invariante(s) dos elementos de um conjunto específico (KAPUT, 1999), é possível afirmar que houve generalização nesse caso, pois a dupla Naiara/Helen identificou a propriedade descrita nas Figuras 14 e 15.

É importante ressaltar que a identificação das propriedades do padrão, e consequentemente a generalização do número de quadrados para uma escada de qualquer tamanho, foi construída ao longo da atividade, iniciada pela manipulação e

utilização do MiGen e finalizada com a resolução das questões apresentadas na folha. Para mostrar esse processo, citarei como exemplo a resolução da dupla Leandro/Laura.

Os alunos iniciaram a Atividade 1 também diretamente no computador, discutindo sobre quantos espaços o padrão se movimentava para o lado direito e quantos espaços se movimentava para baixo.

**Leandro:** São 3 né? [se referindo ao número de espaços que o padrão deveria se mover para a direita]

**Laura:** Sim.

**Leandro:** Aqui são 3 também né? [se referindo ao número de espaços que o padrão deveria se mover para baixo]

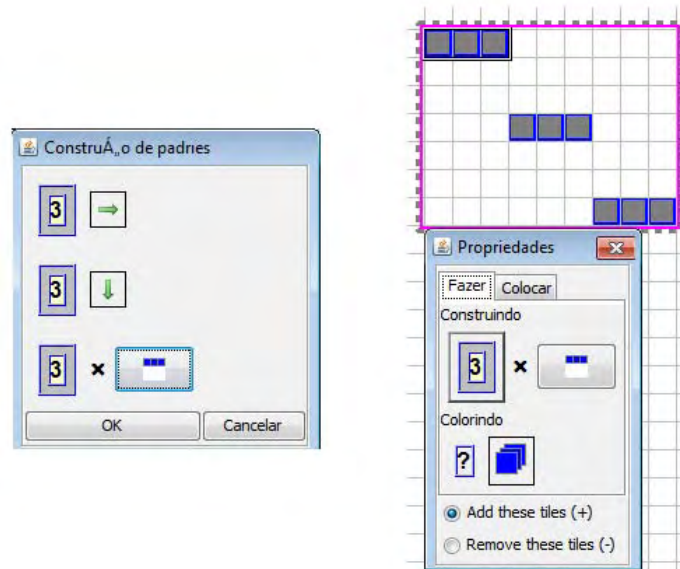
**Laura:** Para baixo? Não tem nenhum para baixo. Quantos vão pra baixo? São 3 também.

**Leandro:** Então são 3.

**Laura:** Dê ok.

Após isso, a dupla visualizou o resultado mostrado na Figura 16.

**Figura 16 - Padrão obtido por Leandro e Laura durante a resolução da Atividade 1**



Fonte: Próprio autor

Imediatamente perceberam que haviam errado, substituindo o número 3, que indicava quantos espaços o padrão se movimentaria para baixo, pelo número 1. O diálogo entre os dois alunos logo após visualizarem a imagem da Figura 16 foi:

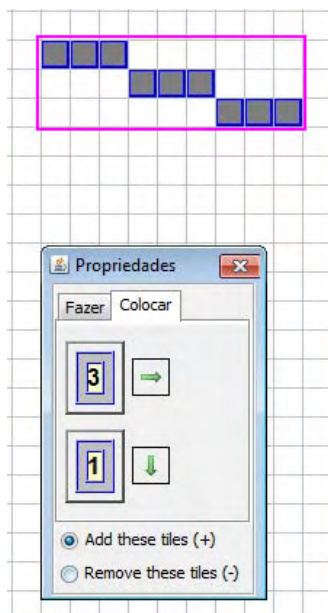
**Leandro:** Não, era 1.

**Laura:** Era 1. Para baixo que é 1, não é?

**Leandro:** É.

A implicação dessa troca na disposição do padrão pode ser observada na Figura 17.

**Figura 17** - Tentativa de correção na movimentação do padrão pela dupla 2.



Fonte: Próprio autor

De imediato, não perceberam que se equivocaram em quantos quadrados o padrão de movimentava para a direita. Porém, no meio da atividade, perceberam que erraram novamente ao preencher o deslocamento para a direita como sendo 3 quadrados e apagaram parte da resolução que tinham feito até o momento.

Como o tempo do encontro já estava se esgotando e a primeira dupla já havia conseguido realizar a primeira atividade corretamente, convidei as alunas Helen e Naiara para ajudar Leandro e Laura na resolução do problema. Helen imediatamente se prontificou a ajudar, Naiara ficou mais alguns poucos minutos vendo seu exercício.

Iniciei o dialogo questionando se os valores que representavam o deslocamento do padrão no MiGen estavam corretos.

**Pesquisador:** Esses valores aqui [apontando para os valores preenchidos por eles] estão corretos? [silêncio] Quando questiono se estão corretos não quero dizer que estão errados, apenas quero fazê-los pensar no que responderam. [silêncio] O padrão variava quantos para a direita e quantos para baixo?

**Laura:** Acho que aqui está errado [apontando para o número 1 preenchido no local que indicava o número de quadrados que o padrão deveria se deslocar para direita], deveria ser 3. Vou colocar aqui. Pode? Vai, coloca aí Leandro.

[Leandro substitui o número 1 por 3 e dá ok]

**Pesquisador:** Olha, ele ficou assim. Era assim que ele apareceu inicialmente? (Figura 17)

**Leandro:** Não sei.

**Helen:** [...] Ele andou quantos para o lado e quantos para baixo?

**Leandro:** [...] 2 para a direita e 1 para baixo.

Então, a partir de sua resposta, Leandro substituiu os números por 2 e 1, representando os espaços que o padrão se deslocou para a direita e para baixo respectivamente.

Quando Helen se aproximou e visualizou a tela do computador de Laura e Leandro, ela percebeu que eles não desbloquearam nenhum número, o que impossibilitou a variação. Questionei, então, se o número de blocos da tela poderia variar, e Leandro respondeu que sim. Então, questionei o que eles tinham que fazer para o número de blocos variarem, e Leandro desbloqueou o número, sem falar a resposta verbalmente.

A partir daí conseguiram montar a expressão que fornecia o número de quadrados da escada em função do número de blocos no software. Arrastaram a expressão para o local correto e o contorno dela ficou verde. Eles comemoram o acerto da resposta. Imediatamente após deram *play*<sup>21</sup> para visualizar o padrão em movimento. Um olhou para o outro e sorriram como se estivessem comemorando a

---

<sup>21</sup> Estava pausado, pois, para mexer no Meu Mundo, o padrão necessariamente deve estar pausado, já que o MiGen não permite alterar o padrão quando o mesmo está em movimento.

resposta alcançada. Após generalizarem a fórmula no computador, iniciaram a resolução da atividade no papel.

Como já mencionado, para responder a primeira questão eles utilizaram a estratégia de *contagem*, utilizando a figura estática da própria folha para isso. Acredito que adotaram essa estratégia pela facilidade em contar os termos a partir da figura do padrão dada na folha como também por se tratar de uma *generalização próxima*, o que pode induzir ao uso dessa estratégia (BARBOSA, 2010).

Para a segunda e a terceira questão, utilizaram a estratégia explícita, multiplicando o número de degraus por 3 diretamente. Isso foi possível, pois já haviam generalizado a fórmula que fornecia o número total de quadrados utilizando o MiGen, usando o resultado obtido para responder essas questões.

Para responder a quarta questão, assim como Helen e Naiara, também utilizaram somente palavras, não utilizaram símbolos nem montaram uma fórmula. Leandro e Laura apresentaram respostas muito próximas, quase idênticas, que diziam que o número total de quadrados de uma escada qualquer é dado pelo “número de quadrados vezes o número de degraus”.

Nessa resposta, há um pequeno erro ao não mencionarem que o número total de quadrados de uma escada é o número de quadrados *de cada degrau* vezes o número de degraus, ou seja, eles se esqueceram de escrever o que está destacado em itálico. Porém, revendo o modo como resolveram a atividade pelos vídeos, percebi que o erro foi apenas no modo como se expressaram na escrita, mas que o modo de pensar estava correto.

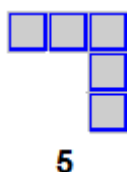
## **5.2 Atividade 2: Construindo pontes**

Para resolver as questões dessa atividade (pag. 27), os alunos utilizaram as estratégias *contagem*, *termo unidade com ajuste contextual* e *explícita*. A *contagem* foi utilizada pelas alunas Laura e Helen para responder a primeira questão. Como na atividade havia a figura de uma ponte com 4 arcos e nessa questão era pedido o número de quadrados de uma ponte com 5 arcos, as alunas desenharam uma ponte com um arco a mais e contaram seus quadrados. Portanto, pode-se afirmar que a *contagem* foi utilizada para uma generalização próxima (STACEY, 1989).

Helen utilizou a estratégia *termo unidade com ajuste contextual* para responder a segunda e terceira questões. Essa estratégia também foi usada por Leonardo para

responder as três primeiras questões dessa atividade. Helen justifica suas respostas esboçando desenhos que foram utilizados para calcular as respostas de ambas as questões. Na segunda questão, utiliza o número total de quadrados do desenho mostrado na Figura 18 como múltiplo para calcular o número de quadrados a partir do número de arcos da ponte. Ao resultado final, Helen soma três, que representa o número de quadrados da primeira coluna da ponte. Esse número não varia independente do número de arcos da ponte.

**Figura 18** - Figura que representa o número de quadrados adicionados em uma ponte quando se deseja adicionar um novo arco a ela.



Fonte: Próprio autor

O cálculo que origina o resultado obtido por Helen é  $10 \times 5 + 3 = 53$ , sendo 10 o número de arcos da ponte da segunda questão, 5 o número de quadrados a serem adicionados à ponte por cada arco dela, e 3 o número de quadrados da primeira coluna da ponte.

Ao adicionar o número 3 no final, Helen está fazendo um ajuste ao resultado obtido a partir da Figura 18, que representa parte de cada arco que deve ser adicionado à ponte a partir da primeira coluna. Como esse número 3 representa o total de quadrados da primeira coluna da ponte, Helen se baseou no contexto do problema para realizar seu ajuste. Portanto, pelo fato da aluna ter utilizado múltiplos do total de elementos de uma figura e ter realizado um ajuste no resultado final com base no contexto do problema, a estratégia utilizada por ela é a *termo unidade com ajuste contextual* (SASMAN et al., 1999; LANNIN et al., 2006; BARBOSA, 2010).

Um raciocínio semelhante é usado para ela responder a terceira questão. A única mudança foi no valor do número de arcos, que de 10 passou a ser 100. Assim, os cálculos de Helen passaram a ser:  $100 \times 5 + 3 = 503$ . Pelas mesmas razões descritas anteriormente, a estratégia usada nessa questão caracteriza-se também como *termo unidade com ajuste contextual*.



Nesse caso, Helen usou o MiGen para identificar que, para cada arco adicionado a uma ponte, seriam acrescentados cinco quadrados a ela, dispostos como mostrado na Figura 18. Ela e Naiara não verbalizaram as ações específicas sobre a atividade ou sobre alguma estratégia de generalização, apenas discutiram dúvidas sobre questões relativas ao manuseio do software, e por isso seus diálogos não serão transcritos aqui.

Para responder a última questão, Helen e Leandro utilizaram a estratégia *explícita*. Joana, Vanessa e Naiara também usaram essa estratégia para responder todas as suas questões. Aqui é importante salientar que mesmo Naiara e Helen resolvendo a atividade proposta em dupla, no momento de responder as questões cada uma resolveu de sua forma, utilizando estratégias diferentes. Para mostrar essa diferença, abordarei a resolução feita por Naiara.

Como mencionado, Naiara usou a estratégia *explícita* em todas suas questões. Na primeira questão ela iniciou a construção de uma regra geral, respondendo da seguinte forma<sup>22</sup>: “28. Eu multipliquei o número de quadrados da coluna pelo número de coluna e somei ao restante das barrinhas. Cada arco tem 2 quadrados que não são das colunas”.

Essa regra elaborada por Naiara e escrita dessa forma apresenta alguns pontos não especificados pela aluna, a saber: em sua escrita, Naiara não menciona de qual coluna da ponte considerou o número de quadrados usados para multiplicar pelo número de colunas, o que me levou a inferir que ela considerou qualquer coluna, visto que todas têm o mesmo número de quadrados; nessa questão, ela não deixou claro como calculou o número de colunas de uma ponte; o termo “barrinhas” se refere a dois quadrados que ligam duas colunas consecutivas (como a aluna usa a palavra “quadrados” nessa mesma questão, considere que “barrinhas” não quer dizer “quadrados”, então a única opção possível é esta que mencionei).

Por causa desses pontos não especificados, escrevi que Naiara “iniciou a construção de uma regra geral” anteriormente. Acredito, baseado nas respostas das outras três questões, que mesmo com essas omissões, Naiara encontrou a regra correta para determinar o número de quadrados de uma ponte qualquer, e somente não dissertou por completo o que estava pensando. Julgo que isso novamente

---

<sup>22</sup> A figura com a resposta de Naiara não foi colocada aqui devido a sua má qualidade de visualização.

decorreu devido à inexperiência dos alunos em expressarem seus pensamentos por escrito e ao fato de não estarem habituados, na época, em escrever utilizando notação matemática.

Na segunda e terceira questões, o modo de resolver de Naiara foi muito semelhante. Por isso, relatarei apenas o que foi descrito na terceira questão, por ela tratar da aplicação da regra geral descoberta pela aluna em um caso de generalização distante, o que embasará de modo mais consistente algumas considerações que farei ao longo da análise da atividade dessa aluna. A resposta de Naiara para a terceira questão foi:

*“ $100 + 1 = 101 = \text{número de colunas}$*

*$100 \times 2 = 200 = \text{número de quadrados fora das colunas}$*

*$3 \times 101 = 303 + 200 = 503 \text{ quadrados}$* <sup>23</sup>

*O número de colunas é o número de arcos + 1. Então multipliquei o número de colunas pelo número de quadrados em cada coluna.*

*Depois, sabendo que o número de quadrados restantes é o número de arcos x 2, somei os 2 resultados.”*

Analisando a resposta da aluna, pode-se confirmar minha afirmação de que as omissões da resposta da primeira questão se deram apenas na escrita, mas na forma de pensamento havia clareza sobre a regra geral. Uma comprovação disso é que a aluna conseguiu encontrar o número de quadrados para 100 arcos, o que representa uma generalização distante em relação aos termos mostrados na figura da folha e vistos no MiGen. A expressão que pode ser escrita a partir da resposta dada pela aluna é: seja  $c$  o número de colunas e  $a$  o número de arcos. Então:

*“O número de colunas é o número de arcos + 1”* pode ser escrito como  $c = a + 1$ . ( I )

*“Então multipliquei o número de colunas pelo número de quadrados em cada coluna.”* pode ser escrito como  $3c$ .

*“sabendo que o número de quadrados restantes é o número de arcos x 2”* quer dizer  $2a$ .

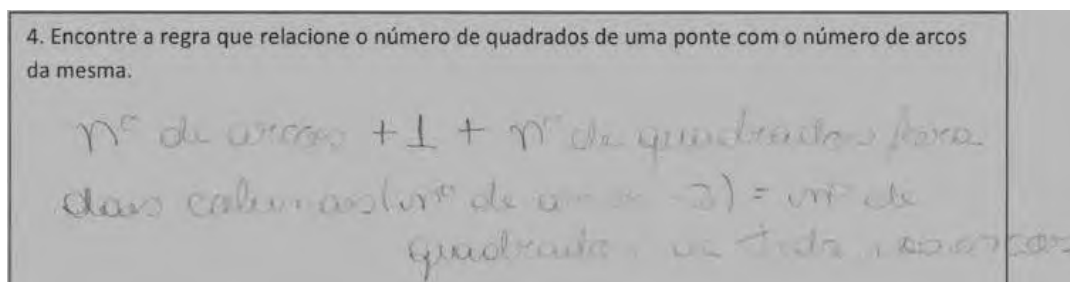
---

<sup>23</sup> Em alguns casos os alunos escreveram igualdades indevidas. Esse é um exemplo, pelo qual é possível entender que  $3 \times 101 = 503$ . Isto está incorreto. Como não era o foco do trabalho, nada foi dito no momento da escrita, mas uma observação foi realizada ao final dos encontros visando esclarecer isso a eles.

“somei os 2 resultados” se refere a somar  $3c + 2a$ . ( II )

Substituindo I em II temos:  $3c + 2a = 3(a + 1) + 2a = 3a + 3 + 2a = 5a + 3$ . Essa seria a expressão correta para o total de quadrados de uma ponte qualquer. Porém, na quarta questão Naiara não consegue escrever de maneira correta, usando palavras, essa regra geral. Sua resposta pode ser visualizada na Figura 19.

**Figura 19<sup>24</sup>** - Resposta da quarta questão resolvida por Naiara



Fonte: Próprio autor

Chamando de  $n$  o número de arcos e substituindo na descrição da regra geral feita pela aluna, temos que  $n + 1 + (n \times 2) =$  número total de quadrados da ponte. Essa expressão seria igual a  $3n + 1$  se fosse considerado somente o que a aluna escreveu<sup>25</sup>.

O erro da aluna pode ter sido causado por seu raciocínio estar baseado no número de colunas da ponte, e como as perguntas eram feitas em relação ao número de arcos, ela tentou encontrar uma relação entre ambos. Esse fator aumentou a dificuldade de escrever uma regra geral para calcular o número total de quadrados de uma ponte, pois, para relacionar arcos com colunas, a aluna deveria realizar uma substituição e posteriormente aplicar a propriedade distributiva, conceitos algébricos que podem conduzir a um erro mais facilmente do que quando comparados a uma expressão onde tais propriedades não aparecem.

Baseado na definição de Kaput (1999) sobre generalização é possível afirmar que a aluna conseguiu generalizar esse padrão, pois conseguiu identificar

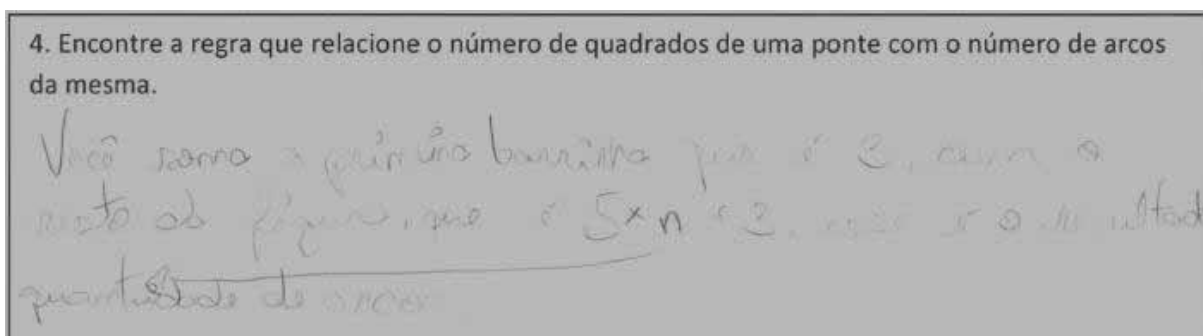
<sup>24</sup> Transcrição da resposta de Naiara: “número de arcos + 1 + número de quadrados fora das colunas (número de arcos x 2) = número de quadrados ao todo nos arcos”.

<sup>25</sup> Aqui foi considerado que o parênteses utilizado por ela não tinha significado matemático, mas sim somente tinha o objetivo de explicar que o número de quadrados fora das colunas era igual ao número de arcos vezes 2.

propriedades invariantes do mesmo. O que a aluna não conseguiu foi expressar, por meio de palavras ou de notação matemática, tais propriedades.

Como outro exemplo da utilização da estratégia *explícita* na quarta questão, citarei a resolução de Leandro (Figura 20), por ela ser a primeira vez durante a coleta de dados que um aluno utilizou uma letra para representar uma variável.

**Figura 20<sup>26</sup>** - Resposta da quarta questão resolvida por Leandro



Fonte: Próprio autor

Leandro obteve os valores 5 e 3 da mesma forma que Helen, por isso não descreverei aqui o processo em detalhes. Ele foi o único dos seis alunos considerados na análise dessa atividade que utilizou uma letra para representar uma variável. Ressalto que o uso da letra partiu única e exclusivamente do aluno, sem interferências minhas ou de suas colegas. Pelo fato de ter encontrado a regra geral para fornecer o número total de quadrados de uma ponte qualquer a partir de propriedades do padrão visualizadas com a ajuda do MiGen, pode-se afirmar que Leandro conseguiu chegar à generalização desse padrão.

Todos os alunos, exceto Laura, conseguiram generalizar o padrão. Como ela foi a única que não conseguiu realizar essa atividade corretamente, abordarei também o caso dessa aluna. Na primeira questão, como já mencionado, Laura utilizou o processo de contagem para determinar a resposta. Tal processo é intuitivo e utilizado para generalizações próximas, e isso levou Laura a usá-lo (STACEY, 1989).

<sup>26</sup> Transcrição da resposta de Leandro: “Você soma a primeira barrinha que é 3, com o resto da figura, que é  $5 \times n + 3$ , esse é o resultado” – e puxando uma seta da letra  $n$  escreve “quantidade de arcos”.

Nas outras questões, Laura não respondeu corretamente. Um exemplo das respostas dadas pela aluna é a questão três, em que a aluna escreveu:

*“1 arco = 8 quadrados*

*100 arcos = 100 x 8 = 800”*

Baseado nas discussões anteriores sobre a expressão geral que fornece o total de quadrados de uma ponte qualquer, pode-se perceber que essa resposta está errada. A regra para obtê-la foi descrita na questão quatro da seguinte forma:

*“Você multiplica o número de arcos pelo número de quadrados. Ex: 1 arco = 8 quadrados. 100 arcos = 100 x 8 = 800.”*

Laura realizou a atividade com Leandro no MiGen e conseguiram construir o padrão corretamente. Era Leandro quem manipulava o *mouse* e o software. Durante a construção do padrão, ele perguntou por duas vezes se Laura estava entendendo e ela respondeu por gestos com a cabeça que estava. Ao final, perguntou novamente se ela tinha entendido, e a resposta foi um sim dado de maneira tímida.

Após responder todas as questões da folha, pedi autorização para Laura e mostrei a resolução dela ao Leandro, que a questionou dizendo:

**Leandro:** Perguntei se você tinha entendido e você disse que sim.

**Laura:** Entendi até uma parte, achei que conseguiria responder, mas você fez muito rápido.

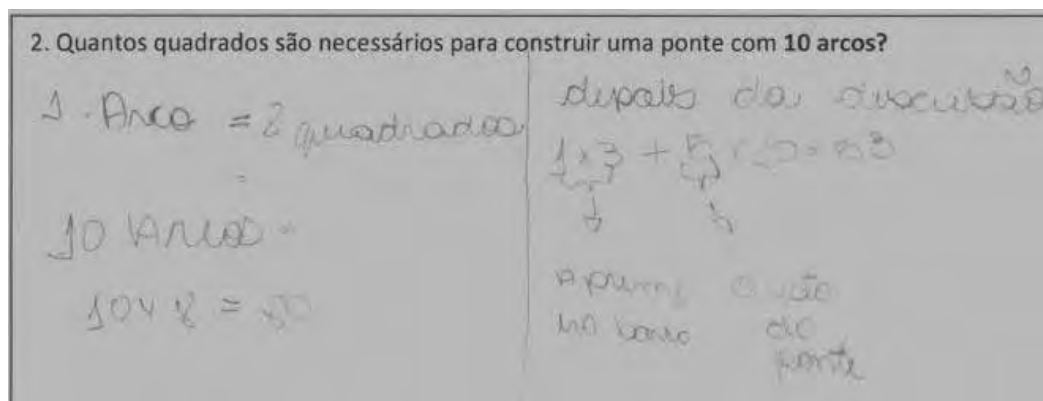
Pedi a Leandro que explicasse seu raciocínio mostrando no software o que ele tinha feito para que Laura compreendesse. Sem iniciar a atividade novamente, Leandro apenas deu *play* na construção que tinha elaborado e questionou Laura:

**Leandro:** O que varia aqui? Quando coloco um novo arco o que muda?

**Laura:** Aumenta um “L” assim [fazendo um sinal de um L invertido, representando o desenho mostrado na Figura 19]. Ah, acho que entendi!

Laura então inicia a atividade novamente a partir da segunda questão. A Figura 21 mostra as respostas dadas por Laura antes e depois de conversar com Leandro.

**Figura 21**<sup>27</sup> - Resposta da segunda questão, elaborada por Laura.



Fonte: Próprio autor

É possível perceber que, após discutir com Leandro, Laura conseguiu resolver corretamente a segunda questão. Isso mostra que em alguns casos quem manipula o *mouse* e constrói o padrão no software tem mais facilidade em responder as questões, pois é seu pensamento que está sendo colocado em prática. Para tentar minimizar esse problema é necessário que haja diálogo e comunicação entre os alunos de cada dupla e que ambos sejam participantes ativos no processo de construção do padrão. Laura não teve tempo de refazer as outras duas questões, o sinal do fim da aula tocou e ela retornou para sua classe. Essa atividade não foi entregue novamente para não atrasar o cronograma da coleta de dados.

### 5.3 Atividade 3: Construindo escadas

Para resolver essa atividade (Figura 22), os alunos utilizaram as estratégias *contagem* e *explícita*. Helen, Leandro e Laura utilizaram a *contagem* para responder a primeira questão, que pedia o número de quadrados de uma escada com 4 degraus. Os exemplos dados no papel mostravam figuras de escadas com 3 e 5 degraus respectivamente. Por isso, pode-se considerar que a justificativa da contagem ter sido usada se deve ao fato de a generalização ser próxima, de modo que a resposta pôde ser obtida rapidamente.

<sup>27</sup> Resposta dada antes de discutir a atividade com seu parceiro: “1 arco = 8 quadrados.

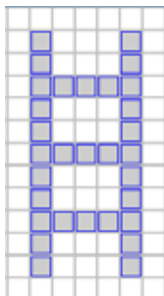
10 arcos = 10 x 8 = 80 quadrados.

Resposta dada após discutir com seu parceiro: “1 x 3 + 5 x 10 = 53” – puxando uma seta de “1 x 3” escreve “a primeira barra” (querendo dizer que essa expressão se deu a partir do número de quadrados da primeira coluna); e puxando outra seta do “5” escreve “o resto da ponte” (querendo dizer que o número 5 representa os quadrados de cada novo arco adicionado à ponte).

Figura 22 - Atividade 3

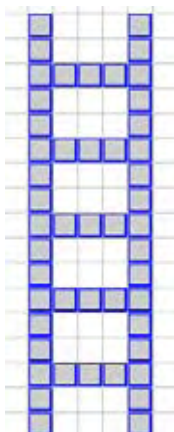
**ATIVIDADE 3 – CONSTRUINDO ESCADAS**

Dois exemplos de escada são mostrados abaixo. A primeira escada contém **3 degraus**, e é formada por **31 quadrados**.



**Escada com 3 degraus - 31 quadrados**

A segunda escada contém **5 degraus**, e é formada por **49 quadrados**.



**Escada com 5 degraus - 49 quadrados**

1. Desenhe uma escada com **4 degraus**. Quantos quadrados são necessários para construir essa escada? **Justifique suas respostas.**

2. Quantos quadrados são necessários para construir uma escada com **9 degraus**?

**Justifique sua resposta.**

3. Quantos quadrados são necessários para construir uma escada com **50 degraus**?

**Justifique sua resposta.**

4. Com 67 quadrados é possível construir uma escada com quantos degraus?

**Justifique sua resposta.**

5. Encontre a regra que relacione o número de quadrados de uma escada com o número de degraus da mesma.

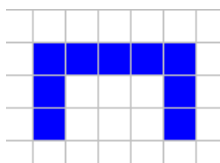
**Justifique sua resposta.**

Fonte: Próprio autor

As outras questões desses três alunos foram respondidas utilizando a estratégia *explícita*. Essa estratégia também foi usada por Naiara, Vanessa e Joana para responder todas as questões de suas atividades. Os alunos das duplas resolveram as atividades de modos parecidos internamente a cada dupla. A novidade é que Laura foi a primeira aluna a utilizar a expressão que encontrou no MiGen para resolver uma questão. Dessa forma, descreverei como ela e Leandro determinaram tal expressão e também relacionarei com a resposta obtida na atividade da aluna.

Inicialmente, Laura e Leandro visualizaram o padrão em movimento na tela do computador. Rapidamente conseguiram perceber que, para cada novo degrau da escada, são adicionados 9 quadrados dispostos como representado na Figura 23.

**Figura 23** - Disposição dos quadrados adicionados para cada novo degrau da escada.

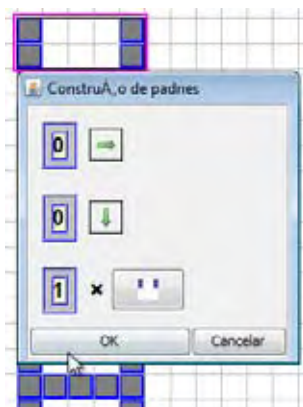


Fonte: Próprio autor

Por isso, decidiram formar um bloco de construção com os quatro primeiros quadrados que formavam a escada. Como se pode perceber, ao observar os zeros colocados ao lado das setas, concluímos que os alunos queriam deixar esse bloco estático, já que ele não variaria conforme a escada aumentasse de tamanho (Figura 24).



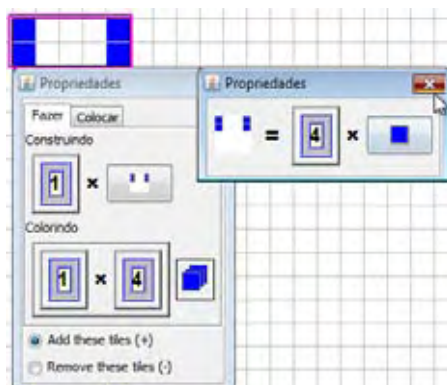
**Figura 24** - Bloco de construção formado pelos quatro primeiros quadrados da escada.



Fonte: Próprio autor

A partir disso, montaram a expressão “1 x 4”, que representava o total de quadrados que havia nesse bloco de construção, e a arrastaram para a área de atribuição de cor. Como pode ser visto na Figura 25, os números que compõem a expressão estão azuis, o que confirma a não variação deles.

**Figura 25** - Expressão referente ao bloco de construção formado pelos quatro primeiros quadrados da escada.



Fonte: Próprio autor

Posteriormente, selecionaram 9 quadrados dispostos como na Figura 23 e formaram outro bloco de construção. Porém, no momento de preencher os valores que representavam quantos quadrados esse bloco iria se deslocar, ficaram em dúvida e discutiram sobre isso:

**Leandro:** E agora, quantos quadrados [o bloco] anda?

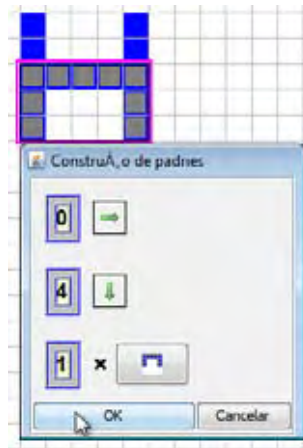
**Laura:** Vamos ver, deixa *eu* contar. [10 segundos depois] 5? Não, 4. Anda 4.

**Leandro:** É 4 né?

**Laura:** *aham*. Isso.

A partir dessa discussão, colocaram o número quatro ao lado da seta que indica movimentação para baixo e zero ao lado da seta que indica movimentação para a direita (Figura 26).

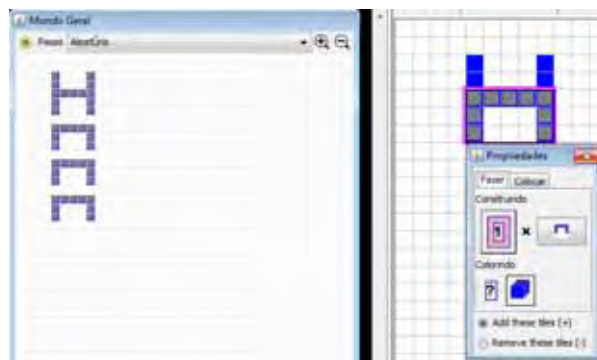
**Figura 26** - Preenchimento dos números que representam a movimentação do bloco de construção formado por 9 quadrados.



Fonte: Próprio autor

Ao clicar em “ok” e desbloquearem o número “1” para permitir a variação do bloco de 9 quadrados, perceberam a consequência de sua ação no Mundo Geral do software (Figura 27).

**Figura 27** - Consequência da ação dos alunos no padrão do Mundo Geral.



Fonte: Próprio autor

Como pode ser visto, colocar o número quatro ao lado da seta que indica movimentação para baixo fez com que o bloco de construção de 9 quadrados se deslocasse um quadrado a mais para baixo do que o necessário. Após isso, os alunos conversaram novamente:

**Laura:** Desbloqueia o 1.

[visualizam a consequência no Mundo Geral]

**Leandro:** É 3 para baixo então.

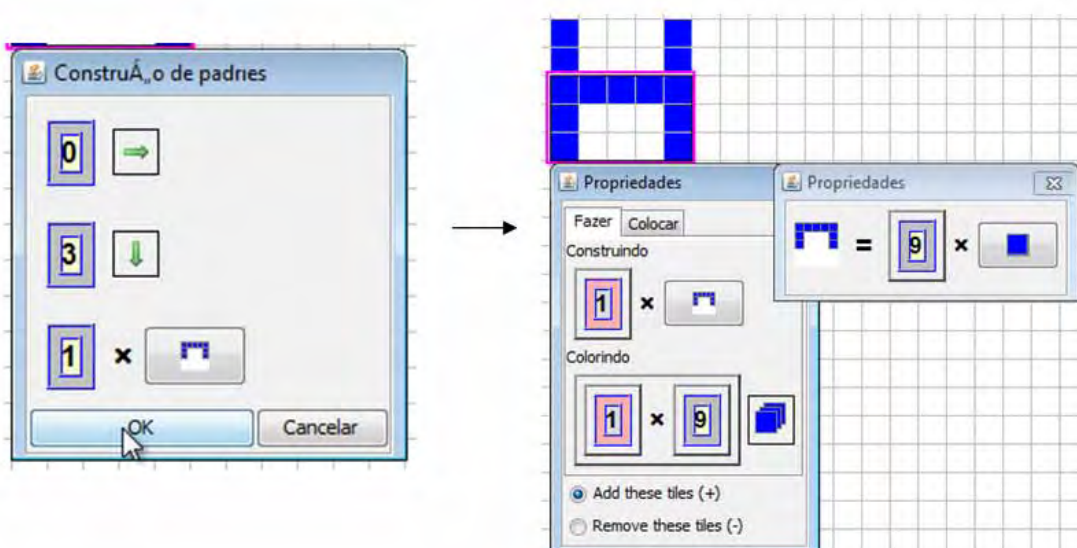
**Laura:** Alguma coisa está errada.

**Leandro:** É 3 para baixo.

**Laura:** Então vai, coloca.

Assim, Leandro substituiu o número quatro pelo número três ao lado da seta que indicava movimentação para baixo. Depois, clicou em *ok* para aplicar sua modificação, desbloqueou novamente o número “1” e montou a expressão “1 x 9”, que representava o número de quadrados no bloco considerado. Vale salientar que, como o número 1 está desbloqueado, o resultado dessa expressão irá variar conforme o padrão varie.

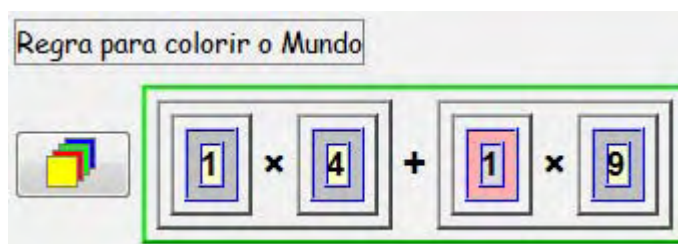
**Figura 28** - Ações da dupla Leandro e Laura para montar a expressão do bloco de construção composto por 9 quadrados



Fonte: Próprio autor

Após montar essa expressão, os alunos a arrastaram para a área de atribuição de cor, visando colorir o padrão do Meu Mundo como também o do Mundo Geral. Ao arrastar a expressão “1 x 9” para a área de atribuição de cor, selecionaram a opção “somar” para que essa expressão fosse somada à expressão “1 x 4” (Figura 29). O circulado em verde mostra que a expressão para o padrão da atividade estava correta.

**Figura 29** - Expressão elaborada pelos alunos para colorir o padrão

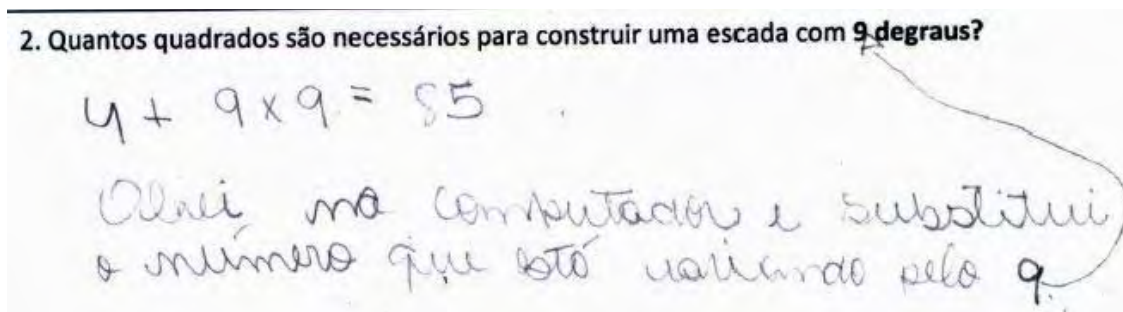


Fonte: Próprio autor

Com essa expressão montada, a dupla iniciou a resolução das questões da folha. Como já mencionado, para responder a primeira questão utilizaram a estratégia *contagem*. Para as outras questões ambos usaram a estratégia *explícita*.

Laura, pela primeira vez em relação a todos os alunos, utilizou a expressão geral do número de quadrados que formam o padrão para qualquer nível do mesmo para calcular a resposta das questões dois e três. Como exemplo, a Figura 30 mostra a resposta de Laura para a segunda questão.

**Figura 30**<sup>28</sup> - Resposta de Laura para a questão dois.



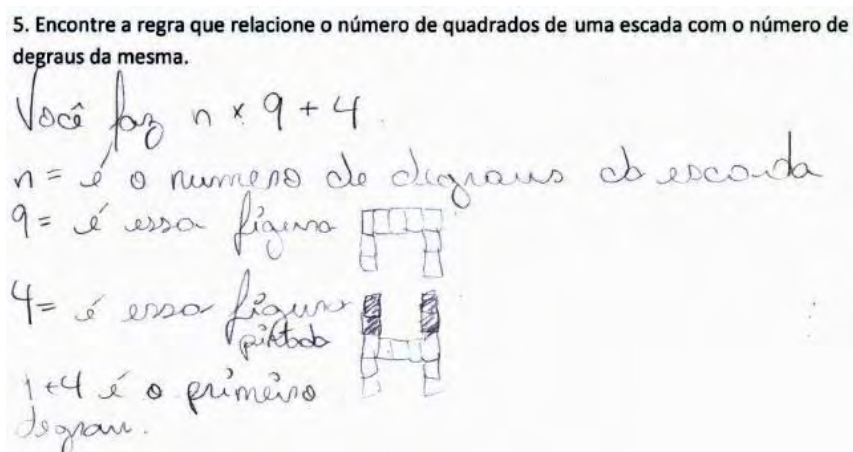
Fonte: Próprio autor

<sup>28</sup> Transcrição da resposta de Laura: “4 + 9 x 9 = 85. Olhei no computador e substituí o número que está variando pelo 9.”

Assim, após obter a expressão geral do padrão, substituiu para um caso particular (9 degraus) e calculou o total de quadrados. Mesmo que a expressão geral descoberta com o uso do MiGen tenha sido usada posteriormente, isso caracteriza a estratégia *explícita*, pois tal expressão foi montada a partir de propriedades invariantes do padrão (LANNIN et al., 2006).

Para responder a última questão, Leandro usou as figuras dos blocos de construção apenas para justificar os números da expressão que encontrou. Isso mostra que o MiGen também influenciou sua resposta, porém de modo diferente do que na resposta de Laura. A resolução de Leandro pode ser vista na Figura 31.

**Figura 31**<sup>29</sup> - Resposta de Laura para a questão cinco.

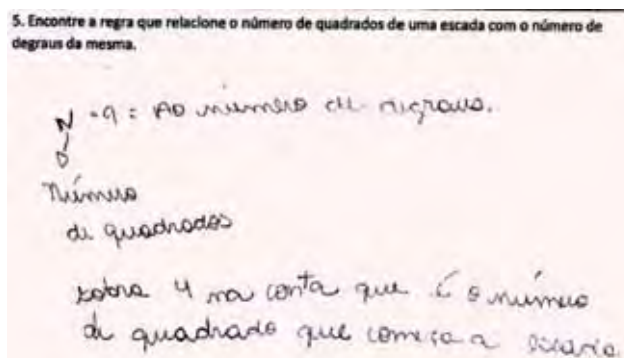


Fonte: Próprio autor

Para concluir, no que se refere às atividades da dupla Laura e Leandro, é importante salientar que ambos os alunos utilizaram letras para representar números que variam. Novamente, esclareço que o uso de letras partiu dos alunos. Laura, porém, observou a atividade de Leandro e, ao perceber que ele usou letras, disse em voz alta: “boa ideia”. Porém, ao analisar sua resposta, é possível perceber que o significado da letra usada por Leandro não ficou claro para a aluna (Figura 32).

<sup>29</sup> Transcrição da resposta de Leandro: “Você faz  $n \times 9 + 4$ ;  $n$  = é o número de degraus da escada.  $9$  = é essa figura (olhar desenho na resolução)  $4$  = é essa figura pintada (olhar desenho na resolução)  $1 + 4$  é o primeiro degrau”.

**Figura 32<sup>30</sup>** - Resposta de Laura para a questão cinco.



Fonte: Próprio autor

A letra “n” seria, na verdade, o número de degraus pedidos na figura, e não o número de quadrados. Apesar desse erro ter sido cometido, acredito novamente que o mesmo ocorreu somente na parte escrita, e não no entendimento da regra do padrão, pois a aluna utilizou a expressão encontrada no software e no lugar do número que variava substituiu o número de degraus pedido em cada questão corretamente.

Na parte final da atividade, o fato de a aluna ter escrito “sobra 4 na conta” se refere à quarta questão, cuja proposta era que os alunos calculassem quantos degraus teria uma escada com 67 quadrados. Ao calcular 67 dividido por 9, o resultado é 7 e o resto é 4. O número 4 escrito por Laura, portanto, se refere a esse resto.

A dupla Naiara e Helen resolveu todas as questões usando a estratégia *explícita*, com exceção da primeira de Helen, que foi solucionada usando *contagem*. As resoluções de ambas estão semelhantes, e como também constatado nas filmagens, isso mostra que as alunas conversaram sobre a atividade (Figura 35).

É possível observar que as letras utilizadas por ambas as alunas são as mesmas e possuem os mesmos significados, o que comprova mais uma vez que uma discussão entre a dupla ocorreu.

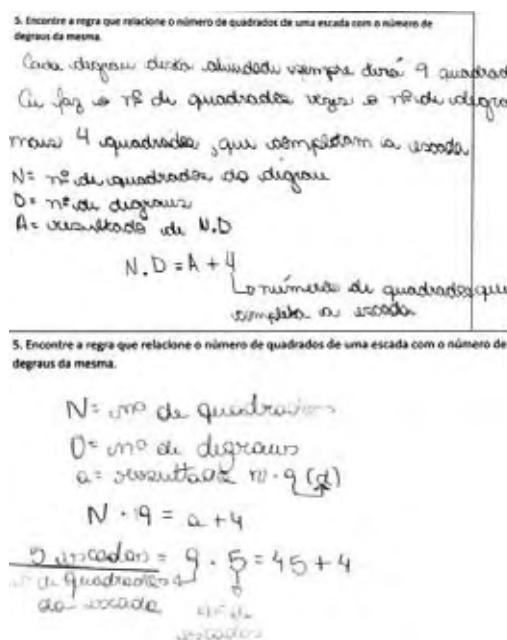
As alunas, no entanto, utilizaram a letra “N” para representar o número 9, que é o número de quadrados de cada degrau. Com isso, fica evidente que elas confundiram a utilização das letras para números que variam e números que não

<sup>30</sup> Transcrição da resposta de Laura: “ $n \times 9 =$  ao número de degraus” – e puxa uma seta de n e escreve “número de quadrados”. Continua a resposta abaixo dessa escrita: “sobra 4 na conta que é o número de quadrados que começa a escada”.

variam na atividade. Se considerássemos que essa escada poderia ter degraus maiores, a expressão das alunas poderia estar correta, mas como esse não é o caso e nada sobre isso foi mencionado, não considerei esse fator em minha análise.

Vale salientar que, na resposta de Naiara, o fato de ela ter substituído valores na expressão encontrada para verificar a veracidade da mesma não indica o uso da estratégia *tentativa e erro*, pois os valores da expressão foram obtidos de propriedades invariantes do padrão e não de testes ao acaso. O fato de um degrau possuir 9 quadrados é uma dessas propriedades. Todos os degraus da escada possuirão 9 quadrados desde que sejam da forma como mostra a figura 23. Outra propriedade é que, para uma escada do mesmo formato da apresentada nessa atividade, sempre sobrarão 4 quadrados independentemente do tamanho dessa escada.

**Figura 33**<sup>31</sup> - Respostas de Helen e Naiara, respectivamente, para a questão cinco.



Fonte: Próprio autor

<sup>31</sup> Transcrição da resposta de Helen: “Cada degrau desta atividade sempre terá 9 quadrados. Aí faz o número de quadrados vezes o número de degraus mais 4 quadrados, que completam a escada.

$N =$  número de quadrados do degrau

$D =$  número de degraus

$A =$  resultado de  $N \cdot D$

$N \cdot D = A + 4$  – puxa uma seta do número 4 e escreve “números de quadrados que completa a escada”.

Transcrição da resposta de Naiara: “ $N =$  número de quadrados

$D =$  número de degraus

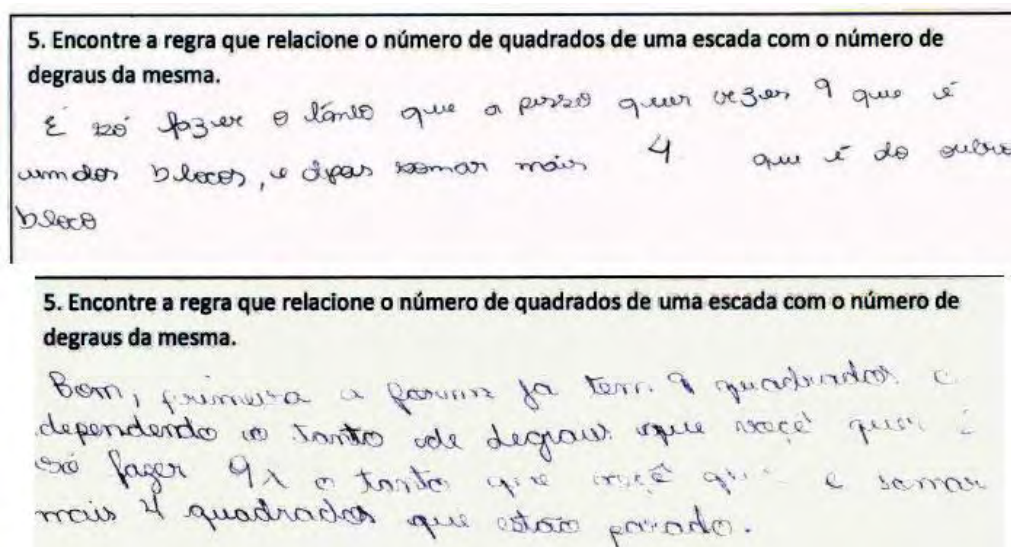
$a =$  resultado  $N \cdot 9$  – puxando uma seta do número 9 escreve “(d)”.

“5 escadas =  $9 \cdot 5 = 45 + 4$ ” – puxando uma seta do número 9 escreve “número de quadrados da escada” e em outra seta do número 5 escreve “número de escada”.

O fato de as alunas terem nomeado o resultado de “N . D” de “A” mostra que elas ainda não possuem um conhecimento de relação funcional, onde o total de quadrados de uma escada varia conforme o número de degraus da mesma. Porém isso não impediu que elas fizessem a atividade e descobrissem a expressão que fornece esse número total de quadrados de uma escada de qualquer tamanho.

Como vimos, as duplas Leandro/Laura e Helen/Naiara já usaram letras para representar valores variáveis nas expressões. A dupla Joana/Vanessa ainda não o fizeram. Para que o leitor possa contrastar as respostas delas com as das outras duas duplas, apresentei-as na figura 34.

**Figura 34**<sup>32</sup> - Respostas de Joana e Vanessa, respectivamente, para a questão cinco.



Fonte: Próprio autor

Novamente, baseado na semelhança entre as respostas, fica evidente que as alunas conversaram e pensaram da mesma forma durante a resolução da atividade. Tal conversa não foi descrita aqui por se tratar de diálogos sobre comandos do software e não sobre o padrão especificamente.

<sup>32</sup> Transcrição da resposta de Joana: “É só fazer o tanto que a pessoa quer vezes 9 que é um dos blocos, e depois somar mais 4 que é do outro bloco.”

Transcrição da resposta de Vanessa: “Bom, [a] primeira forma já tem 9 quadrados e dependendo o tanto de degraus que você quer é só fazer 9 x o tanto que você quer e somar mais 4 quadrados que estão parados”.



Como pode ser visto, ambas as alunas não utilizaram letras em suas respostas, mas sim escreveram a regra que encontraram por extenso. Além disso, ambas utilizaram palavras que têm significado no MiGen, como “bloco” e “parados” (“quadrados que estão parados”). A primeira é usada para fazer construções do que pode ficar estático ou variar; a segunda é usada para descrever o bloco que não varia, que fica estático. Isso mostra que elas utilizaram o MiGen para resolver as questões e que relacionaram o raciocínio empregado durante a construção do padrão no software à atividade resolvida em papel.

#### 5.4 Atividade 4: Construindo canteiros

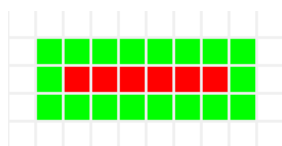
Nessa atividade (Figura 35) serão analisadas somente as respostas das duplas Helen/Naiara e Leandro/Laura, pois a aluna Joana faltou no dia do encontro em que tal atividade foi desenvolvida com os alunos de sua classe.

Nesse dia, Vanessa, Renan e Gustavo desenvolveram a atividade juntos. Gustavo foi quem manipulou o software, mesmo eu pedindo para ele revezar com seus colegas. O fato de Vanessa estar formando um trio com os dois alunos deixou Renan ainda mais tímido e retraído, o que prejudicou o pouco diálogo que ele tinha com seu parceiro. Além disso, o fato de Vanessa trabalhar com dois meninos parece tê-la deixado desconfortável, fazendo-a participar pouco da atividade. Por causa desses fatores optei por não analisar a atividade desse trio.

**Figura 35 - Atividade 4**

#### **ATIVIDADE 4 – CONSTRUINDO CANTEIROS**

Dois exemplos de canteiros são mostrados abaixo. O primeiro canteiro contém **6 rosas** (cada quadrado vermelho equivale a uma rosa), e também 14 ladrilhos ao seu redor (cada ladrilho equivale a um quadrado verde).



**Figura 1: Canteiro com 6 rosas - 14 ladrilhos**

O segundo canteiro contém **2 rosas** e **10 ladrilhos**.



**Figura 2: Canteiro com 2 rosas - 10 ladrilhos**

1. Construa um canteiro com **8 rosas**.

Quantos quadrados **de cada cor** são necessários para construir esse canteiro?

**Justifique suas respostas.**

2. Quantos quadrados **de cada cor** são necessários para construir um canteiro com **4 rosas**?

**Justifique sua resposta.**

3. Quantos quadrados **de cada cor** são necessários para construir um canteiro com **40 rosas**?

**Justifique sua resposta.**

4. Encontre a regra que relacione o número de quadrados de rosas com o número de ladrilhos de um canteiro.

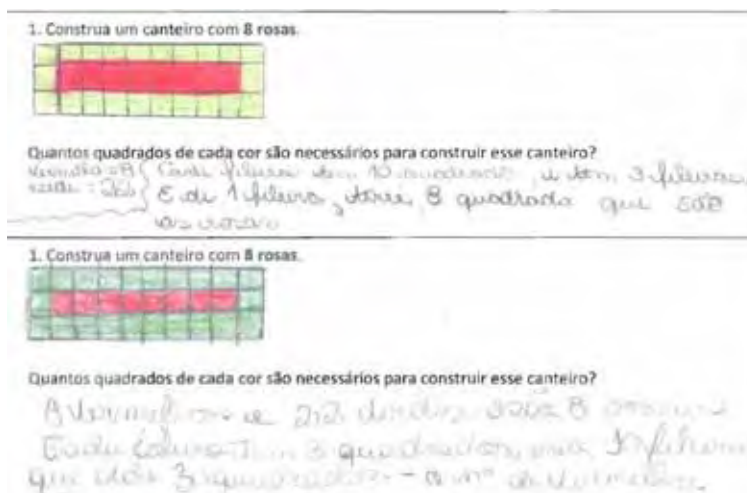
**Justifique sua resposta.**

Fonte: Próprio autor

As outras duas duplas utilizaram, nas duas primeiras questões, a estratégia *termo unidade com ajuste contextual* e nas duas últimas a estratégia *explícita*, porém de modos diferentes. Por causa disso, irei abordar ambas as resoluções.

Helen e Naiara fizeram suas atividades de maneira bem semelhante. Na primeira questão ficou evidente ter havido comunicação entre ambas, como pode ser visto na Figura 36.

Figura 36<sup>33</sup> - Respostas de Helen e Naiara, respectivamente, para a questão um



Fonte: Próprio autor

Ambas utilizaram a mesma ideia para responder essa questão. Porém, na resolução delas houve uma diferença quanto ao significado da palavra “fileiras”: Helen considerou que as fileiras eram as sequências de 10 quadrados horizontais; já Naiara considerou as fileiras como sendo verticais, formadas, cada uma, por 3 quadrados. Mas isso não impediu que ambas respondessem corretamente a questão.

Nas duas resoluções foi necessário realizar um ajuste no resultado final para se obter a resposta correta. Como ambas calcularam o número 30, que representa o total de quadrados para um canteiro com 8 rosas, foi necessário subtrair o número de rosas (quadrados vermelhos) para que elas obtivessem o número total de ladrilhos (quadrados verdes).

Por terem utilizado múltiplos do número do total de elementos de uma figura, a estratégia utilizada por ambas se enquadra na *termo unidade*. Pelo fato de ter havido um ajuste no final que foi baseado no contexto do problema e não em propriedades numéricas do padrão, a subdivisão da estratégia usada é a *termo unidade com ajuste contextual* (STACEY, 1989; LANNIN et al., 2006; BARBOSA, 2010).

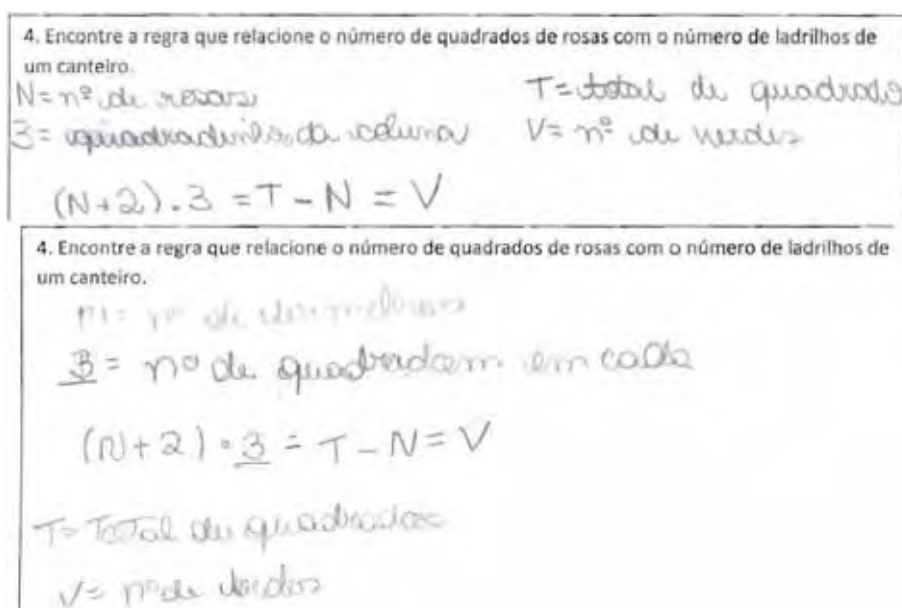
<sup>33</sup> Transcrição da resposta de Helen: “Cada fileira tem 10 quadrados, e tem 3 fileiras. E de 1 fileira, tirei 8 quadrados que são as rosas. Vermelho = 8 e Verde = 22”.

Transcrição da resposta de Naiara: “8 Vermelhos e 22 Verdes. São 8 rosas. Cada coluna tem 3 quadrados, são 10 fileiras que dão 30 quadrados – [sinal de menos] o número de vermelhos”.

A dupla Leandro/Laura também utilizou a estratégia *termo unidade com ajuste contextual* para calcular a resposta da primeira questão. A diferença da resolução dessa dupla quando comparada à resolução da dupla Helen/Naiara é que Leandro e Laura utilizaram como múltiplos os elementos de uma fileira de 10 ladrilhos e realizaram um ajuste ao resultado obtido somando 2 ladrilhos, que são localizados nos extremos da fileira de rosas. Dessa forma, descobriram o número de quadrados verdes do canteiro, e consideraram que o número de quadrados vermelhos era igual ao número de rosas. Não colocarei figuras das resoluções deles devido à má qualidade de visualização delas.

Para as duas últimas questões, as duplas Helen/Naiara e Leandro/Laura utilizaram a estratégia explícita. Especificamente na quarta questão, Helen e Naiara usaram letras para escrever a expressão geral que fornece o número de quadrados de um canteiro de qualquer tamanho. A resolução de ambas as alunas pode ser vista na Figura 37.

**Figura 37**<sup>34</sup> - Respostas de Helen e Naiara, respectivamente, para a questão quatro



Fonte: Próprio autor

<sup>34</sup> Transcrição da resposta de Helen: “N = número de rosas. T = total de quadrados. 3 = quadrados da coluna. V = número de verdes.  
 $(N+2) \cdot 3 = T - N = V$ .”

Transcrição da resposta de Naiara: “N = número de vermelhos. 3 = número de quadrados em cada.  
 $(N+2) \cdot 3 = T - N = V$ .”

T = total de quadrados. V = número de verdes”.

Pela resolução de Naiara é possível perceber que houve uma contradição na forma de pensamento da aluna para resolver as duas primeiras questões quando comparada a resolução delas com a da quarta questão. Nas duas primeiras, ela utiliza o número 3 como sendo o número de quadrados de cada coluna. Já na quarta questão esse número significa o número de fileiras.

Isso mostra uma mudança na forma de raciocinar de Naiara, que acredito ter acontecido por influências de Helen, considerando as resoluções de ambas. Portanto, o diálogo entre essa dupla se mostrou evidente e interferiu de forma direta no modo de pensamento das alunas, provocando alterações no mesmo.

A dupla Leandro/Laura não escreveu uma expressão que permitisse calcular o número de quadrados de um canteiro qualquer. Laura respondeu à questão usando apenas palavras, e Leandro escreveu em duas expressões distintas como calcular o número de quadrados verdes e o número de quadrados vermelhos de um padrão. Por má qualidade de visualização dessas respostas, as transcrevo aqui:

**Laura:** Você vê quantas rosas têm e soma 2 e faz multiplicação por 2 + 2 lados + o número de rosas.

**Leandro:** (número de ladrilhos + 2) . 2 + 2 = verdes  
Número de rosas = n.

Como a pergunta era “Encontre a regra que relaciona o número de quadrados de rosas com o número de ladrilhos de um canteiro”, é possível concluir que Leandro não a responde, visto que ele separou sua resolução em quadrados verdes e quadrados vermelhos (número de ladrilhos e número de rosas foram usados com o mesmo significado por Leandro). Mesmo assim, considero que o aluno, assim como Helen, Naiara e Laura, conseguiu generalizar a regra para esse padrão, pois descobriu propriedades invariantes dele (BARBOSA, 2010).

### **5.5 Atividade 5: Construindo flores**

Diferentemente das outras atividades, nessa não houve questões de generalização próxima. Havia somente o padrão representado em uma figura. Para construí-lo no software, os alunos deveriam observá-lo no “mundo geral”, para perceberem sua movimentação na tela do computador, reproduzindo-o no “meu mundo”.

A primeira questão (Figura 38) já pedia para que os alunos descobrissem a regra que resultava no total de quadrados do padrão para qualquer nível dele. O intuito dessa mudança foi descobrir se os alunos eram capazes de generalizar uma regra somente utilizando o MiGen, sem questões que pudessem contribuir para uma análise e generalização do padrão.

Nessa atividade também era pedido o número total de quadrados de um padrão cujo número de elementos fosse sempre par. Nesse caso, o objetivo era estudar se os alunos entenderiam que para o número de elementos ser sempre par ele deve ser múltiplo de dois, ou seja, no caso desse padrão, que era composto de flores, sempre deveriam aparecer na tela do computador um número par de flores. Assim, o que se repetiria de um nível para o outro seria duas flores e não uma.

### Figura 38 - Atividade 5

#### ATIVIDADE 5 - FLORES

Um exemplo de uma flor é mostrado abaixo. Ela contém **5 quadrados amarelos**, que representam as **pétalas**, e **5 quadrados verdes**, que representam o **caule**.

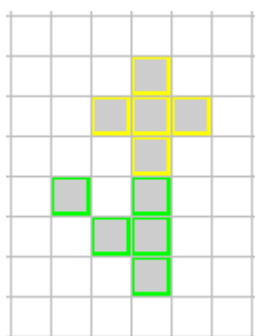


Figura 3: Flor com 5 quadrados amarelos (pétalas) e 5 quadrados verdes (caule)

1. Encontre a regra que relacione o número de quadrados de pétalas amarelas (quadrados amarelos) com o número de folhas verdes (quadrados verdes) quando uma flor como a da figura acima se repete na tela do computador um número  $n$  de vezes ( $n$  finito).

2. Encontre a regra que relacione o número de quadrados de pétalas amarelas (quadrados amarelos) com o número de folhas verdes (quadrados verdes) quando flores como a da figura acima se repetem na tela do computador um número  $n$  de vezes ( $n$  finito), de modo que se tenha um número par de flores

### 3. Qual a relação entre as expressões obtidas nas questões 1 e 2?

Fonte: Próprio autor

Após determinarem essas duas expressões, na terceira questão o objetivo era que os alunos relacionassem-nas. Para isso, deveriam comparar as respostas visando perceber o que se alterou de uma para outra.

Todos os alunos usaram a estratégia *explícita* para responder a primeira e a segunda questão. O fato de a generalização exigida ser distante contribuiu para o uso dessa estratégia (BARBOSA, 2010). Na terceira questão não se fazia necessário o uso de uma estratégia de generalização, visto que ela não pedia aos alunos para generalizarem algo, mas apenas para comparar as respostas das duas questões anteriores.

Ao utilizar o MiGen para construir o padrão, as três duplas cometeram um mesmo erro. A seguir, descreverei os passos de como Leandro e Laura construíram o padrão no software, visando exemplificar o erro cometido por todos.

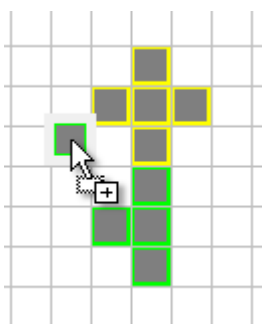
Quem manipulou o *mouse* nessa atividade foi Laura. Inicialmente, ela construiu o padrão de uma flor no MiGen, começando pelas pétalas (quadrados amarelos). No momento de colocar os quadrados verdes, que representavam o caule da flor, Laura fica em dúvida e questiona Leandro:

**Laura:** Onde coloco esse [arrastando o quadrado verde com o *mouse*]?  
No segundo, não é?

**Leandro:** É, no segundo e depois no primeiro.

No diálogo dos dois, as palavras “primeiro” e “segundo” representam as linhas dos quadrados do caule de cima para baixo, como mostra a Figura 39.

**Figura 39** - Representação da figura construída por Laura e Leandro.



Fonte: Próprio autor

Após construir a figura, Laura não quis mais manusear o *mouse*, e Leandro a incentivou, dizendo que a ajudaria na atividade. Mesmo Laura revezando com Leandro no manuseio do computador, ela ainda não se sentia a vontade em utilizar o *mouse* na frente de Leandro pela pouca habilidade que tinha com computadores. Após o incentivo de Leandro, Laura decidiu manipular o software.

**Leandro:** Vai Laura, eu te ajudo. Primeiro, selecione todos os amarelos.

**Laura:** Só os amarelos?

**Leandro:** É. Clica em cada um.

[Laura clicou em cada um dos quadrados amarelos. Leandro estava segurando o botão SHIFT do teclado, o que permitiu selecionar todos os quadrados um por um]

**Laura:** E agora?

**Leandro:** Agora forma um bloco. [Laura forma um bloco de construção com os quadrados amarelos selecionados, dá *ok* e a janela de preencher quantos quadrados o bloco se locomoverá para a direita e para baixo se abre] E agora, quantos para o lado?

**Laura:** Quatro.

**Leandro:** Não tem que ser mais? Olhe, um, dois, três, quatro. [contando o número de quadrados na horizontal que formam a largura de uma flor]

**Laura:** Quatro? Para o lado? Zero para baixo?

**Leandro:** É.

Dessa forma, Leandro e Laura desenvolveram a expressão “1 x 5”, que indicava quantos quadrados amarelos haveriam no padrão para qualquer número de flores, com o número 1 estando desbloqueado para que pudesse variar. Posteriormente, iniciaram a construção do padrão para os quadrados verdes, que representam o caule da flor. Selecionam todos os quadrados, criam um bloco de construção com eles, colocam os números quatro e zero nos espaços que indicam movimentação para a direita e para baixo, respectivamente, e criam também a expressão “1 x 5” para indicar quantos quadrados verdes haveriam no padrão para qualquer número de flores, também com o número 1 estando desbloqueado para que pudesse variar.

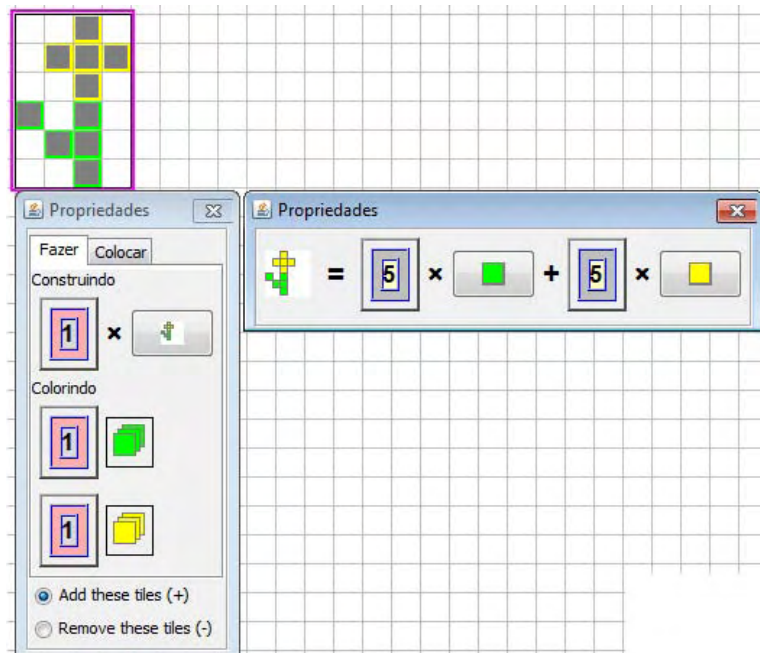


Arrastaram as duas expressões para a área de atribuição de cor e formaram a expressão “ $1 \times 5 + 1 \times 5$ ”. Porém, ao apertarem *play*, a variação de ambos os números 1 foi diferente, fazendo com que hora houvessem mais pétalas, hora houvessem mais caules. Isso aconteceu pelo fato de os alunos utilizarem números 1 diferentes no momento de criar o padrão, isto é, quando criaram o bloco de construção das pétalas, digitaram um número 1 no gerador de números, e quando criaram o bloco de construção dos caules, digitaram novamente um número 1 no gerador de números. Quando desbloqueados, o MiGen entende que, como os números não são os mesmos (no sentido de que novos números foram inseridos repetidas vezes), a variação pode ser diferente para cada um deles.

Para que a variação fosse a mesma para os blocos de pétalas e caules, era necessário que os alunos utilizassem o número 1 usado para formular a expressão geral do número de quadrados das pétalas para formular também a expressão geral do número de quadrados do caule. Isso poderia ter sido feito arrastando o número 1 da expressão geral do total de quadrados das pétalas para compor a expressão geral do total de quadrados do caule.

Percebido o erro, os alunos optaram por iniciar a atividade novamente. Dessa vez, Laura criou uma flor, selecionou todos os quadrados dela e formou um bloco de construção, preenchendo com o número quatro o valor de quadrados que o padrão se deslocaria para a direita e com o número zero o valor de quadrados que o padrão se movimentaria para baixo. Essas ações que Laura executou foram feitas sem ela conversar com Leandro. Ao clicar em *ok*, as janelas mostradas na Figura 40 apareceram.

**Figura 40** - Propriedades do padrão de flores construído por Leandro e Laura.



Fonte: Próprio autor

Na figura acima, todos os números 1 estão desbloqueados. Isso garantiu que quando os alunos tornassem o padrão dinâmico clicando no ícone *play*, a variação do número de quadrados verdes e amarelos que compõem o padrão fosse a mesma.

A partir desse erro, tomarei como exemplo a resolução da primeira questão de Leandro e Laura para explicar o significado desses números 1 na expressão geral do padrão. Devido à má qualidade de visualização, transcreverei as respostas dos alunos.

Transcrição da resposta de Leandro:

“ $n \times 10 : 2 = 5$  verdes e 5 amarelos.” – puxa uma seta de  $n$  e do número 10 e escreve, respectivamente, “número de flores” e “número de quadrados da flor”. [continua a resolução]

“ $5 \times n =$  número de quadrados amarelos

+

$5 \times n =$  número de quadrados verdes

$5 \times n + 5 \times n.$ ”

Transcrição da resposta de Laura: “ $n \times 10$ ” – puxa uma seta de  $n$  e do número 10 e escreve, respectivamente, “número de flores x número de quadrados da flor” [continua a resolução]

“Amarelo = 5

Verde = 5

$5 \times n + 5 \times n$ ” – puxa uma seta de cada número 5 e escreve, respectivamente, “amarelo” e “verde”.

Como é possível verificar, a expressão que ambos os alunos encontraram para o total de quadrados do padrão é  $5 \times n + 5 \times n$ , onde  $n$  é o total de flores do padrão. O número 1 faz, portanto, o papel de  $n$ , que é o número que pode variar. Se ele variasse de modo distinto, então seria o mesmo que considerarmos variáveis distintas na expressão geral.

A segunda questão foi respondida de modo mais direto por todas as duplas. Eles compreenderam que para obter um número par de flores deveriam considerar o padrão que se repete como sendo composto por duas flores. Como exemplo de respostas obtidas, transcrevo a de Joana e a de Naiara, alunas de duas duplas diferentes.

Transcrição da resposta de Joana:

“Em vez de nós colocarmos 1 figura que é ímpar, nós colocamos 2 figuras para variar só números par.

$$n \times 10 + n \times 10 = v$$

Transcrição da resposta de Naiara:

“2 flores

$$(n \cdot 10) + (n \cdot 10) = v$$

$V$  = número de flores

$n$  = número qualquer

Para um número dar sempre par, duplicamos o padrão utilizando 2 flores. Somando as verdes e as amarelas temos o número de flores.”

Na resposta da terceira questão, as duplas conseguiram explicar a relação entre as expressões obtidas na primeira e segunda perguntas. Para exemplificar, apresento na Figura 41 a resposta de Helen.

**Figura 41**<sup>35</sup> - Resposta de Helen para a terceira questão

3. Qual a relação entre as expressões obtidas nas questões 1 e 2?

$$1^{\text{a}} \neq N \cdot 5 + N \cdot 5 = F$$

$$2^{\text{a}} \neq N \cdot 10 + N \cdot 10 = F$$

A 2<sup>a</sup> é o dobro da 1<sup>a</sup>.  
 Pois o padrão 1, é uma só flor  
 E o padrão 2 são 2 flores.

Fonte: Próprio autor

É possível ver que Helen, assim como os outros alunos, conseguiu perceber que a expressão da segunda questão era o dobro da expressão da primeira, e que isso aconteceu pois o número de flores do padrão foi dobrado.

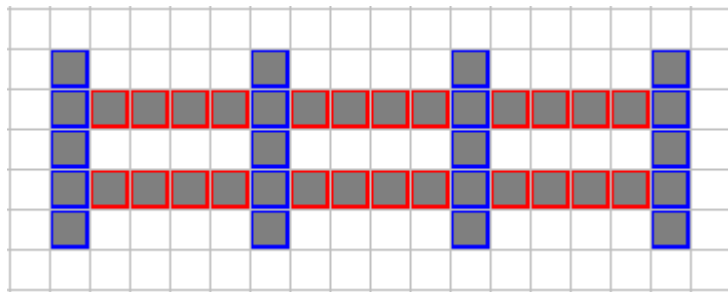
### 5.6 Atividade 6: Construindo uma cerca

No dia de os alunos resolverem a atividade seis (Figura 42), Helen não compareceu à escola. Por isso, analisarei as respostas de um trio, formado por Naiara, Laura e Leandro, e da dupla Joana/Vanessa. Considerarei o trio nessa análise para que eu tenha parâmetros para comparar uma atividade resolvida em duplas com outra resolvida em trios.

<sup>35</sup> Transcrição da resposta de Helen: “1<sup>a</sup> [sinal de diferente]  $N \cdot 5 + N \cdot 5 = F$   
 2<sup>a</sup> [sinal de diferente]  $N \cdot 10 + N \cdot 10 = F$   
 A 2<sup>a</sup> é o dobro da 1<sup>a</sup> pois o padrão 1 é uma só flor e o padrão 2 são 2 flores.”

**Figura 42** - Atividade 6 – Construindo uma cerca**ATIVIDADE 6 – CONSTRUINDO UMA CERCA**

Um exemplo de uma cerca é mostrado abaixo.

**Figura 4:** Cerca com 4 pilares de madeira e 3 seqüências de arame

Um fazendeiro construirá essa cerca em sua fazenda. Essa cerca terá comprimento mínimo como o mostrado acima: 4 pilares de madeira e 3 seqüências de arame.

1. Quantos quadrados **de cada cor** são necessários para construir uma cerca com **6 pilares de madeira**?

2. Quantos quadrados **de cada cor** são necessários para construir uma cerca com **11 seqüências de arame**?

**Justifique sua resposta.**

3. Encontre a regra que relaciona o comprimento da cerca com o número de quadrados que formam os pilares de madeira e o número de quadrados que formam as seqüências de arame.

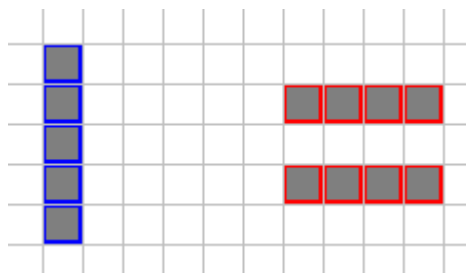
Fonte: Próprio autor

As duas primeiras questões envolviam generalizações próximas e a terceira envolvia generalização distante, pedindo para os alunos determinarem a expressão geral do padrão. As estratégias usadas pelos alunos foram a *contagem*, a *termo unidade* e a *explícita*. Joana e Vanessa contaram os quadrados para obter a resposta da primeira questão, que era 30 quadrados azuis (dos pilares) e 40 vermelhos (dos arames). Elas pausaram a movimentação do padrão construído no MiGen para realizar essa contagem.

Para resolver a segunda questão, essa dupla usou a estratégia *termo unidade com ajuste contextual*, que também foi usada pelo trio Leandro/Laura/Naiara para responder as duas primeiras questões.

Os alunos do trio separaram o padrão da cerca em pilares e arames (Figura 43), e utilizaram múltiplos do total de elementos de cada uma dessas figuras para responder às questões. Nenhum deles fez um desenho representativo de um pilar ou de uma sequência de arames, mas mesmo assim é possível afirmar que a estratégia usada é a *termo unidade*, já que utilizaram o total de elementos de cada pilar de madeira ou arame (SASMAN et al., 1999; LANNIN et al., 2006; BARBOSA, 2010).

**Figura 43** - Representação de pilares e arames, respectivamente.



Fonte: Próprio autor

A seguir, apresento a transcrição das respostas de Leandro para as questões um e dois.

Transcrição da resposta de Leandro para a questão 1:

“ $5 \times 6 = 30$  azuis

$5 \times 8 = 40$  vermelhos

Cada pilar tem 5 quadrados, multipliquei o nº de pilares por 5.

Entre os pilares têm 8 quadrados, que é o nº de quadrados da cerca, então você faz  $8 \times$  o nº de pilares – 1.”

Transcrição da resposta de Leandro para a questão 2:

“ $12 \times 5 = 60$  quadrados

$11 \times 8 = 88$  quadrados

Cada pilar tem 5 quadrados, multipliquei o nº de pilares por 5.

Entre os pilares têm 11 quadrados, que é o n° de quadrados da cerca, então você faz  $8 \times$  o n° de pilares  $- 1$ .”

É possível perceber que na resposta da segunda questão Leandro escreve que entre os pilares de madeira há 11 quadrados, quando na verdade há somente 8 quadrados. Leandro confundiu o total de sequência de arame da cerca pedido na questão, que é 11, com o número de quadrados de uma sequência de arame, que é 8. Apesar disso, na sua resposta calculou corretamente o número total de uma cerca com 11 sequências de arame, confirmando que o erro foi somente no momento da escrita de sua resposta e não na sua forma de pensamento.

Na segunda questão, Naiara comete um erro, como pode ser observado na transcrição de sua resposta.

Transcrição da resposta de Naiara para a segunda questão:

“Multipliquei o n° de quadrados em cada pilar pelo n° de pilares.  $5 \cdot 11 = 55$  quadrados.

Cada pilar acompanha 8 quadrados de arame, tirando o do último pilar.

Multipliquei 8 pelo n° de pilares.  $10 \cdot 8 = 80$  quadrados”.

Como é possível ver, Naiara considerou o número de pilares como sendo 11 quando na verdade deveriam ser 12, um a mais que o número das sequências de arame dado na questão. O cálculo correto, portanto, deveria ser  $12 \cdot 5 + 11 \cdot 8 = 148$  quadrados. Acredito que essa confusão se deu ao relacionar o número de pilares com o número de arames.

Para a terceira questão, todos os alunos utilizaram a estratégia *explícita*. Porém, quando comparadas as resoluções do trio com as da dupla, pode-se perceber uma pequena diferença entre elas.

Transcrevi, devido à má qualidade da imagem, a resposta de dois alunos do trio, Leandro e Naiara, para mostrar como a resposta de Leandro pode ter interferido na resolução de Naiara. Também transcrevi as respostas de Joana e Vanessa, destacando a diferença entre as do trio.

Transcrição da resposta de Leandro para a questão três:

“ $n \times 5 =$  o n° de quadrados dos pilares.

$n \times 8 =$  o n° de quadrados dos arames.

$5 \cdot n =$  cada pilar tem 5 quadrados, então faço  $5 \times$  o n° de pilares.

$8 \cdot n$  = entre cada pilar tem 8 quadrados que formam o arame, tirando o último.

$8 \cdot n + n \cdot 5 + 1 \cdot 5$ ". ( $n$  = fileiras de arames)

Transcrição da resposta de Naiara para a questão três:

"Multiplica-se o  $n^\circ$  de quadrados em cada pilar pelo  $n^\circ$  de pilares.

$N$  =  $n^\circ$  de pilares

$5 \cdot N$  =  $n^\circ$  de quadrados dos pilares.

Cada pilar acompanha 8 quadrados de arame, tirando o último pilar.

Multipliquei 8 pelo  $n^\circ$  de pilares – 1.

$8 \cdot x$  =  $n^\circ$  de quadrados do arame

$x$  =  $n^\circ$  de pilares – 1

$8 \cdot N + 5 \cdot N + 1 \cdot 5$ " – e puxando uma seta da expressão  $1 \cdot 5$  escreve "pilar do começo".

É possível perceber que ambas as resoluções são parecidas e que na de Naiara há uma pequena incoerência. Pode-se perceber que ela utiliza a letra  $N$  para representar o número de pilares e  $x$  para representar o número de sequências de arame, porém quando escreve a expressão geral do padrão utiliza somente a letra  $N$ , que se refere ao número de pilares de madeira. Nesse processo há uma incoerência, a saber: como Naiara escreveu  $x$  em função de  $N$ , a expressão correta deveria ser  $8 \cdot (N - 1) + 5 \cdot N = 8N - 8 + 5N = 13N - 8$ , e não  $8N + 5N + 5 = 13N + 5$ , como a aluna escreveu. Outra opção de resposta seria Naiara utilizar o número de sequência de arames para escrever a fórmula, obtendo  $8 \cdot x + 5(x + 1) = 8x + 5x + 5 = 13x + 5$ , sendo  $x$  o número de sequências de arames fornecido. No caso, ela usou a segunda expressão com  $N$  no lugar de  $x$ , trocando o número de sequências de arame pelo número de pilares de madeira.

Não é possível afirmar que o erro aconteceu devido à discussão entre o trio, pois os únicos diálogos ocorridos foram em relação a preencher quantos quadrados o padrão iria variar para baixo e para a direita e qual padrão considerar para criar um bloco de construção.

As resoluções elaboradas por Joana e Vanessa foram parecidas, por isso apresento apenas a resposta de Vanessa.



Transcrição da resposta de Vanessa para a terceira questão:

$$“(n - 1) \cdot 5 + x \cdot 8 = v$$

O  $(n - 1)$  é o tanto de arames  $- 1$ . O 5 é o tanto de quadrados que tem.

O  $x$  também é o número que você quer de pilares  $\times 8$  que é o tanto de quadrados azul que tem. E o  $v$  é o tanto de quadrados ao total.”

Analisando a resposta da aluna é possível perceber que sua escrita está um pouco confusa, com trechos difíceis de entender. Um desses trechos é onde Vanessa menciona o número 5. Ela não completa a frase dizendo o que ele significa. Pela sua resposta, pode-se inferir que esse número é o total de quadrados de um pilar de madeira.

Outro fator que contribuiu para a resposta ficar confusa é que ela relacionou o número de sequências de arames com o número de pilares de madeira, porém não escreveu de forma clara essa relação. Pela resolução da aluna, pode-se inferir que  $x + 1 = n$ , sendo  $x$  o número de sequências de arames e  $n$  o número de pilares de madeira, pois  $x$  é o número de pilares e  $n$  é o número de arames. Vanessa escreve que “ $(n - 1)$  é o tanto de arames”, quando na verdade somente  $n$  é a letra que representa o número de arames.

### 5.7 Os dados à luz da literatura

Para contrastar os resultados obtidos das análises das atividades propostas com a literatura estudada, elaborei a Tabela<sup>36</sup> 1 que mostra as estratégias mais utilizadas pelos alunos por atividade.

Nessa tabela é possível observar que a *contagem* foi utilizada por seis vezes, sempre para responder a primeira questão de algumas atividades, que envolviam o processo de generalização próxima. Essa utilização da estratégia *contagem* para responder perguntas de generalização próxima corrobora a literatura estudada.

---

<sup>36</sup> Como nem sempre os alunos de uma dupla utilizaram a mesma estratégia para responder uma questão, a tabela foi elaborada por aluno, porém considerando sua dupla. Para compreender como interpretá-la, considere as duplas Leandro/Laura e Naiara/Helen na atividade 3. Observe que na linha referente à dupla Leandro/Laura não há barras, o que indica que os dois alunos da dupla utilizaram a estratégia *contagem* para responder a questão um e a *explícita* para responder a dois, três e quatro. Já na linha referente à dupla Naiara/Helen há barras separando os números. Na coluna da *contagem*, “/1” significa que Helen utilizou a *contagem* para responder à questão um. Na coluna da estratégia *explícita*, “1234/234” significa que Naiara utilizou essa estratégia para responder todas suas questões e Helen para responder a segunda, terceira e quarta questões.

Barbosa (2010) afirma que em perguntas que envolvem generalizações próximas, a *contagem* é a estratégia mais utilizada pelos alunos.

**Tabela 1** - Estratégias utilizadas pelos alunos em cada atividade.

		Contagem	Tentativa e erro	Termo Unidade			Diferença			Explícita
				S/ Ajuste	Aj. Contextual	Aj. Numerico	Recursiva	S/ Ajuste	C/ Ajuste	
Atv. 1	Leandro/Laura	1								234
	Naiara/Helen									1234
	Vanessa/Joana									1234
Atv. 2	Leandro/Laura*	/1			123/					4/
	Naiara/Helen	/1			/23					1234/4
	Vanessa/Joana									1234
Atv. 3	Leandro/Laura	1								234
	Naiara/Helen	/1								1234/234
	Vanessa/Joana									1234/1234
Atv. 4	Leandro/Laura				12					34
	Naiara/Helen				12					34
	Vanessa/Joana**									
Atv. 5	Leandro/Laura									12
	Naiara/Helen									12
	Vanessa/Joana									12
Atv. 6	TRIO				12					3
	Vanessa/Joana	1			2					3
	<b>Total</b>	<b>6</b>	<b>Zero</b>	<b>Zero</b>	<b>12</b>	<b>Zero</b>	<b>Zero</b>	<b>Zero</b>	<b>Zero</b>	<b>49</b>
*Laura não respondeu as três últimas questões da atividade 2										
**Dupla não analisada devido ao não comparecimento de uma das alunas										

Fonte: Próprio autor

É possível constatar, porém, que nas primeiras questões de algumas atividades a *contagem* não foi utilizada, mas isso pode ser justificado. O padrão da questão um da primeira atividade pode ser considerado de fácil generalização pelo fato de duas das três duplas, mesmo com pouca experiência em atividades de generalização, terem utilizado a estratégia *explícita* logo de início.

Em relação à atividade 4, nas questões um e dois, respectivamente, era solicitado ao aluno construir um canteiro com oito rosas e outro com quatro rosas, e por isso a primeira questão dessa atividade pode não ter sido considerada como generalização próxima pelos alunos, pois construir 8 rosas poderia ser considerado um processo cansativo devido ao padrão dessa atividade.

Já a questão um da atividade 5 não envolvia generalização próxima como nas primeiras perguntas das outras atividades. Essa atividade iniciava pedindo a expressão geral do padrão diretamente, sem o aluno ter realizado generalizações

próximas do mesmo padrão da atividade anteriormente. Na atividade 6 o padrão era formado por muitos quadrados, o que tornava o processo de *contagem* lento e cansativo.

Dessa forma, acredito que a *contagem* foi utilizada pelos alunos quando era possível obter rapidamente a resposta do que era perguntado, corroborando novamente a literatura estudada (STACEY, 1989). Além disso, a possibilidade dos alunos terem usado uma tecnologia que mostra o padrão dinamicamente na tela do computador, se repetindo aleatoriamente, pode ter inibido a utilização desse processo, visto que para se realizar uma *contagem* o ideal é que a figura (padrão) esteja estática, sem movimento, para que se tenha maior precisão ao contar seus elementos (quadrados).

Como menciona Barbosa (2010), para atividades que abordam generalizações próximas e posteriormente distantes, os alunos adotam, após utilizar a *contagem* para descobrir termos próximos, outras estratégias para descobrir termos distantes. Isso é corroborado pelos dados coletados nessa pesquisa.

Após utilizar a *contagem*, os alunos utilizaram as estratégias *termo unidade com ajuste contextual* e *explícita* para responderem as outras questões. Na sequência de minha escrita justificarei a utilização de cada uma dessas estratégias e depois mostrarei o motivo de as outras estratégias não terem sido utilizadas pelos alunos. A estratégia *termo unidade com ajuste contextual* foi a segunda mais utilizada pelos alunos, sendo usada em 12 questões ao todo. Como já mencionado, esse fato contraria a literatura estudada. Barbosa (2010) sintetiza em sua tese os resultados encontrados nas pesquisas de Lannin et al. (2006), Sasman et al. (1999), Orton (1999), Becker e Rivera (2005) e Stacey (1989) e constata que essa estratégia foi uma das menos utilizadas pelos alunos.

Considero que a *termo unidade com ajuste contextual* foi bastante utilizada em minhas atividades devido à característica dinâmica do MiGen. Ao variar o padrão na tela do computador, o software insere automaticamente e randomicamente a parte que se repete do padrão. Essa parte é parte de um todo, o padrão, e múltiplos dela são usados para diminuir ou aumentar o tamanho do padrão mostrado no computador.

A estratégia *termo unidade com ajuste contextual* tem exatamente essa definição: uma figura vira unidade e múltiplos do total de elementos dessa figura são

usados para se calcular o que se pede, com um ajuste sendo realizado no resultado com base no contexto do problema. Ou seja, conforme o software varia o padrão no computador, o aluno pode perceber que parte do padrão é retirada ou acrescentada para diminuir ou aumentar a sequência mostrada. A partir dessa percepção e identificação da parte retirada ou acrescentada, o aluno tende a utilizá-la para fazer seus cálculos e responder as questões das atividades.

Porém, a partir da identificação do total de elementos da figura que era considerada como múltiplo, os alunos ignoravam a imagem visual de tal figura e focavam apenas no aspecto numérico do padrão. Isso e o fato de essa estratégia ter sido utilizada tanto para questões de generalização próxima quanto distante corrobora a literatura estudada (LANNIN et al., 2006).

Por último, a estratégia *explícita* foi a mais utilizada pelos alunos. Assim como afirmam Lannin et al. (2006), raramente essa estratégia foi utilizada primeiro em uma atividade, pois para usá-la é necessário compreender como o padrão se forma e como ele cresce ou decresce. O uso direto dela somente ocorreu maior parte da atividade 1, na atividade 3 pela dupla Joana/Vanessa e na atividade 5.

Como já mencionado, na atividade 1 acredito que os alunos aplicaram diretamente essa estratégia devido à facilidade de identificação do padrão. Na atividade 3, como mostrado em sua análise, a dupla Joana/Vanessa forneceu indícios de utilizar o MiGen para responder as questões, o que indica que utilizaram a expressão geral do padrão encontrada com a ajuda do software para responder as perguntas. A atividade 5 já iniciava com a primeira pergunta solicitando aos alunos encontrar a expressão geral do padrão, sem fornecer exemplos ou sem perguntar sobre padrões com generalização próxima, como nas outras atividades. Isso fez com que os alunos utilizassem a estratégia *explícita* diretamente nessa primeira questão.

Ainda corroborando Lannin et al. (2006), a utilização da estratégia *explícita* ocorreu com maior frequência para questões de generalização distante. Em vinte e duas das quarenta e nove utilizações dessa estratégia era para questões em que era pedida a expressão geral que fornecia o total de quadrados de um padrão para algum nível dele. Ou seja, por vinte e sete vezes a *explícita* foi usada em casos de generalização distante.

Esses autores também afirmam que em um padrão com termos iniciais consecutivos com valores relativamente distantes, a tendência é a utilização dessa estratégia. De certa forma, isso se confirmou na atividade 3, em que a diferença entre termos consecutivos era a segunda maior dentre todos os padrões das atividades, totalizando nove quadrados. A maior diferença entre termos consecutivos de todos os padrões trabalhados ocorreu na atividade 6, totalizando 13 quadrados. Nessa atividade, os alunos utilizaram a estratégia *explícita* para responder somente a última questão.

Penso que talvez o fato de as perguntas dessa atividade ora serem feitas considerando o número de pilares de madeira de uma cerca e ora serem feitas considerando o número de sequências de arame tenha influenciado os alunos a utilizar a estratégia *termo unidade com ajuste contextual* para responder as duas primeiras questões. Não posso afirmar com certeza isso, mas o fato de haver uma relação funcional presente nessa atividade pode induzir à utilização de uma ou outra estratégia. Para afirmar isso, outras investigações teriam que ser realizadas.

De modo geral, como já mencionado nesse trabalho, acredito que o objetivo da estratégia *explícita*, que é determinar uma regra geral que fornece o total de elementos de um padrão, seja o objetivo de todos os processos de generalização. A partir disso, considero que os alunos conseguiram, de modo geral, generalizar os padrões apresentados nas atividades com base no total de vezes em que a estratégia *explícita* foi usada, sendo quase a totalidade dessas vezes de forma correta.

Um ponto importante a ser destacado é que todas as estratégias utilizadas (*contagem*, *termo unidade com ajuste contextual* e *explícita*) são estratégias visuais (BARBOSA, 2010), com base na possibilidade da componente visual do problema poder impactar na generalização. Isso ressalta uma característica principal do MiGen, que é mostrar o padrão variando dinamicamente no computador, podendo ter induzido os alunos ao uso de estratégias visuais e conseguindo realizar, de modo geral, generalizações.

As estratégias não utilizadas pelos alunos foram a *termo unidade sem ajuste*, *termo unidade com ajuste numérico*, a *tentativa e erro* e a *diferença* (em todas suas subdivisões). No caso da *termo unidade sem ajuste*, acredito que o seu não uso ocorreu pelos padrões apresentados. Em todos os casos que a *termo unidade com*

*ajuste contextual* foi utilizada, era necessário realizar um ajuste no resultado final com base no contexto.

Já no caso da *termo unidade com ajuste numérico*, acredito que seu não uso pode ser justificado justamente pela forte presença da componente visual nas atividades, principalmente pela utilização do MiGen na construção dos padrões. Assim, o foco no aspecto numérico diminuiu, e pelo papel da visualização se sobressair, a utilização de estratégias visuais se fez mais propícia (NOSS; HEALY; HOYLES, 1997).

A *tentativa e erro* não foi usada pelo fato de que ela consiste em adivinhar a regra geral dos padrões com base em conjecturas ou na aleatoriedade seguida de testes. Como os alunos tinham alguns exemplos de padrões nas folhas e também a construção e representação dos padrões no MiGen, era possível obter algumas informações desses padrões, não fazendo necessário utilizar valores ao acaso para se determinar uma regra geral. Além disso, o MiGen era utilizado para auxiliar o aluno na construção dessa regra, diminuindo a possibilidade de fazê-lo optar pela aleatoriedade na determinação da mesma.

Por fim, acredito que também o fato de o MiGen ter uma característica dinâmica na apresentação dos padrões no computador fez com que todas as subdivisões da estratégia *diferença* não fossem utilizadas, pois elas se baseiam na diferença ou em múltiplos da diferença entre dois termos consecutivos do padrão. Como o padrão está sempre em movimentação, penso que o aluno tenha dificuldade em fazer essa diferença entre termos consecutivos de um padrão, visto que ele não obtém tais termos de forma estática, de modo que poderia compará-los visando calcular o resultado da diferença entre eles. Por isso, essa estratégia não foi adotada.

## 6 CONCLUSÕES

Nesse capítulo, apresento as conclusões do trabalho, cuja questão norteadora é “*quais são as estratégias utilizadas por alunos do 7º ano do Ensino Fundamental II para generalizar padrões visuais com o software MiGen?*”. Para isso, divido-o em três partes. Na primeira, discuto se e como o MiGen pode ter influenciado na escolha das estratégias de generalização apresentadas, abordando o papel desempenhado por ele nas atividades, enfatizando o papel da visualização, visando discutir respostas para a questão de pesquisa delineada. Em um segundo momento, apresento algumas limitações dessa investigação. Por fim, exponho sugestões para futuras investigações.

### 6.1 O software MiGen e as estratégias de generalização

Em relação às estratégias consideradas a partir da literatura estudada para analisar as seis atividades desenvolvidas nessa pesquisa, acredito que o software MiGen modificou principalmente os critérios de seleção de estratégias por parte dos alunos para resolverem questões de generalização de padrões figurais.

O aspecto visual presente no software e principalmente sua característica dinâmica influenciaram na escolha de estratégias para se construir generalizações, favorecendo a seleção daquelas que podem ser classificadas como visuais, que são as estratégias em que a visualização desempenha um papel fundamental no processo de generalização (BARBOSA, 2010).

Nesse sentido, a apresentação do padrão em movimento dificultou a associação de números a cada nível da seqüência, fazendo com que trabalho com o aspecto visual fosse ressaltado. Dessa forma, considerando a questão norteadora, é possível responder que, com base nas atividades desenvolvidas nessa pesquisa, as estratégias utilizadas pelos alunos foram a *contagem*, a *termo unidade com ajuste contextual* e a *explícita*, sendo todas elas estratégias visuais.

Uma modificação na escolha de uma estratégia foi o fato de o aspecto visual do MiGen algumas vezes fazer com os alunos não conseguissem realizar a *contagem* do total de quadrados de determinados padrões devido à movimentação do mesmo no computador, e a partir disso serem influenciados a utilizar outras estratégias para responder às questões propostas.

Na verdade, o MiGen realmente busca inibir a utilização da estratégia *contagem* através da movimentação do padrão, e nessa pesquisa atingiu esse objetivo com certa eficácia, considerando o número de vezes que a contagem foi utilizada (total de seis vezes), os padrões em que ela foi utilizada e se a generalização exigida na questão era próxima ou distante. Vale ressaltar que no software é possível os alunos pausarem a movimentação do padrão, tornando-o estático e mais fácil de realizar a *contagem* a partir da imagem parada, mas mesmo assim o aspecto dinâmico do MiGen torna convidativa a construção do padrão na tela do computador e a respectiva construção de sua expressão geral. Na maioria das vezes em que a *contagem* foi utilizada, o intuito dos alunos era obter as respostas de forma rápida, corroborando a literatura (STACEY, 1989).

Outra influência foi na utilização da estratégia *explícita*. Essa estratégia foi a mais usada pelos alunos (total de 49 vezes). Como os alunos algumas vezes obtiveram a expressão geral do padrão usando o MiGen, no momento de responder às questões da folha era possível eles utilizarem essa expressão diretamente. Nessa pesquisa, a utilização da expressão geral do padrão encontrada com o uso do MiGen aconteceu somente uma vez, mostrando que os alunos podem não ter relacionado tal expressão encontrada no computador com as questões realizadas na folha. Porém, é possível inferir que compreenderam que, após perceberem as propriedades invariantes de um padrão e utilizarem-nas para obter a expressão geral do mesmo, a partir delas era possível calcular qualquer termo desse padrão.

Difícilmente a estratégia *explícita* foi utilizada para responder as primeiras questões das atividades, visto que era necessário os alunos compreenderem o padrão e suas propriedades para utilizá-la. Assim como Lannin et al. (2006) afirmam, o uso da estratégia *explícita* ocorreu com maior frequência para generalizações distantes ou em padrões cujos termos iniciais possuíam valores relativamente distantes.

O foco das atividades era que os alunos construíssem a expressão geral que fornecia o total de quadrados para qualquer nível dos padrões. Essa expressão pode ser calculada utilizando a estratégia *explícita*. Ou seja, é possível dizer que na maioria das vezes os alunos utilizaram essa estratégia para encontrar a expressão geral do padrão, conseguindo fazer generalizações.



No caso da estratégia *termo unidade com ajuste contextual*, pode-se dizer que seu uso ocorreu principalmente devido à dinamicidade do MiGen ao mostrar os padrões no computador. Ao visualizar o padrão no software, o aluno pode perceber a parte que se repete do padrão. A variação do padrão é feita usando múltiplos de uma parte desse padrão (a parte que se repete), e isso consiste exatamente na definição dessa estratégia, que é utilizar múltiplos do total de elementos de uma figura para calcular o que é pedido, com ajuste a ser realizado com base no contexto do problema (LANNIN et al., 2006).

As estratégias que não foram utilizadas pelos alunos são a *termo unidade sem ajuste*, *termo unidade com ajuste numérico*, *tentativa e erro* e a *diferença* (com todas suas subdivisões). No caso da primeira delas, imagino que o seu não uso se deu pelas atividades desenvolvidas nessa pesquisa. Em todas elas a estratégia *termo unidade com ajuste contextual* foi utilizada, era necessário realizar um ajuste com base no contexto do problema. Caso não houvesse a necessidade desse ajuste, seria possível que os alunos utilizassem a *termo unidade sem ajuste*.

A outra subdivisão da *termo unidade*, a *com ajuste numérico*, não foi usada devido ao aspecto visual presente no MiGen. Como esse software foca no aspecto visual por repetir os padrões no computador de forma dinâmica, o foco no aspecto numérico diminuiu, fazendo que estratégias visuais tendessem a ser mais utilizadas (NOSS; HEALY; HOYLES, 1997).

Os alunos não usaram a *tentativa e erro* pois ela objetiva adivinhar a regra geral dos padrões baseada em conjecturas a serem testadas com números aleatórios. Pelo fato de os alunos conseguirem visualizar o padrão no computador e os exemplos das folhas, algumas informações podiam ser obtidas, diminuindo a necessidade de usarem valores aleatórios na busca da regra geral.

Por último, todas as subdivisões da estratégia *diferença* não foram usadas pois todas consistem em usar a diferença ou múltiplos da diferença entre dois termos consecutivos do padrão. Como o MiGen varia o padrão dinamicamente, era de certo modo difícil obter dois termos consecutivos de um padrão para calcular a diferença entre eles.

## **6.2 Dificuldades encontradas**

Durante a realização dessa pesquisa era previsto que surgissem algumas dificuldades. Nesse sentido, a realização da atividade-piloto foi fundamental para prever o maior número possível dessas dificuldades e tentar saná-las antes mesmo delas ocorrerem. Nesse tópico busco expô-las, objetivando guiar futuros estudos ou pesquisas que porventura possam usufruir desse trabalho.

A primeira dificuldade se deve aos computadores a serem utilizados. Em algumas atividades em que o padrão era formado por muitos quadrados, exigindo que os alunos dessem mais comandos no MiGen, houve pequenos atrasos no tempo de resposta da máquina. Em uma das coletas, inclusive houve a interrupção do funcionamento da máquina, sendo necessário reiniciá-la e começar a atividade novamente.

Outra dificuldade encontrada foi o fato de dois alunos participantes da pesquisa terem faltado às aulas por dois dias. Como a atividade estava sendo desenvolvida em duplas, devido à falta de um dos alunos decidi formar um trio com os outros três presentes. Pelo fato de a tela do computador ser de quatorze polegadas, um dos alunos ficou deslocado da frente dela, e pela claridade da sala não conseguia enxergar perfeitamente a construção do padrão na tela do computador.

Isso fez com que o aluno focasse sua atenção no padrão estático da folha de questões e deixasse de construí-lo no software, o que implicou em uma interação menor com os outros dois alunos que compunham o trio. Assim, sugiro que as atividades sejam desenvolvidas em duplas, visando estimular diálogos, discussões e socialização. Em último caso, se houver trios, sugiro que uma tela de computador maior seja utilizada para não prejudicar a visualização do desenvolvimento da atividade.

Além disso, como os alunos não tinham o hábito de usar um software na aula de matemática, inicialmente houve certo estranhamento com relação ao manuseio do próprio software, mesmo após explicação aos alunos. Pelo fato de o MiGen ser o primeiro software a trabalhar generalização pela construção de padrões, ele possui características particulares diferentes de outros software disponíveis no mercado, então mesmo que os alunos tenham certa habilidade em utilizar software de matemática, sugiro deixá-los explorar livremente o MiGen por alguns minutos e

somente após explicar a eles como o MiGen funciona. Isso foi realizado durante a atividade-piloto.

A principal dificuldade encontrada foi após a pesquisa, no momento da análise. Durante a coleta de dados, os alunos ficaram relativamente tímidos devido às filmagens, por isso os deixei responder as questões em suas folhas sem consultar o que estavam escrevendo na hora para que tivessem certa privacidade. Somente após o término de cada atividade, lia o que tinham escrito. Isso fez com que eu ficasse com dúvidas em relação à escrita que não puderam ser sanadas, visto que o encontro já estava no fim ou a coleta de dados já havia terminado.

Muitas dessas dúvidas foram em relação à escrita da expressão geral do padrão, o que prejudicou, de certa forma, a análise das estratégias usadas nessas questões, bem como se houve generalização do padrão ou não. Como relatado em algumas atividades analisadas e descritas no capítulo cinco, alguns alunos respondiam corretamente questões de generalização próxima e distante dos padrões das atividades, utilizando uma regra implícita em seus cálculos, mas no momento de escrever essa regra cometiam erros sobre os quais eu poderia ter feito perguntas visando clarear o pensamento deles e também posteriormente facilitar minha análise.

Considero que parte desses erros foi cometida pela inexperiência em escrever ideias matemáticas, utilizando ou não notação matemática usual na escrita. Dessa forma, expressar o que estavam pensando se tornou difícil, talvez até mais difícil do que a própria atividade que estavam realizando, e por isso cometeram erros.

Finalmente, quero mencionar uma sugestão para a utilização de padrões para se ensinar generalização. Acredito ser fundamental que fique claro para os alunos as vantagens e limitações de cada estratégia que eventualmente seja utilizada por eles. Assim, eles poderão compreender a estratégia e serão capazes de utilizá-las de maneira correta. Por isso, acredito ser importante o professor criar espaços de discussões antes e após as atividades, para que os alunos possam verbalizar seus pensamentos, interagir com outros alunos, comparar formas de resolução de atividades e discutir as estratégias adotadas por cada um.

### **6.3 Sugestões para futuras pesquisas**

Os estudos utilizados como referencial teórico para essa pesquisa (STACEY, 1989; SASMAN et al., 1999; BECKER; RIVERA, 2005; LANNIN, 2005; LANNIN et al., 2006; BARBOSA, 2010) têm investigado estratégias de generalização para o desenvolvimento do pensamento algébrico com alunos de diversas idades e níveis escolares e têm revelado a grande dificuldade deles com atividades que envolvem generalizações.

Utilizando o MiGen, essa pesquisa foi realizada com alunos do 7º ano do ensino fundamental, e suas características e resultados devem ser considerados, em sua maioria, somente dentro do contexto dessa pesquisa. Porém, acredito ser interessante investigar de que forma alunos de outros níveis de ensino se portariam diante de tarefas que envolvam tecnologias e generalizações de padrões.

Como já mencionado nessa pesquisa, a generalização é um aspecto importante do pensamento algébrico, e este por sua vez perpassa todos os ciclos do ensino. Por isso, pesquisas que investiguem generalização de padrões e sua relação com o ensino e a aprendizagem de conteúdos algébricos são importantes e se fazem necessárias para todos os níveis escolares.

Investigações sobre “quais as estratégias que alunos de um determinado nível escolar utilizam para generalizar padrões com determinada tecnologia?”, “quais os erros cometidos por esses alunos?”, “qual o papel desses erros cometidos na aprendizagem desses alunos?”, “qual o erro mais comum cometido?”, “qual a influência do desenvolvimento do processo de generalização na aprendizagem futura de determinado conceito algébrico?”, dentre outras, são importantes para que se possa repensar o ensino e a aprendizagem de conteúdos algébricos como um todo.

## REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, J.L.; BORBA, M.C. Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, M.C.; ARAÚJO, J.L. (Org.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. 3ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p. 27-48.
- ARCAVI, A. The role of visual representations in the learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, 52, 215-241, 2003.
- BALACHEFF, N.; KAPUT, J. Computer-Based Learning Environments in Mathematics. In: BISHOP, A.; CLEMENTS, K.; KEITEL, C.; KILPATRICK, J.; LABORDE, C. (Ed.). **International Handbook of Mathematics Education**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996, p. 469 – 504.
- BARBOSA, A.; VALE, I.; PALHARES, P. Patterns and generalization: the influence of visual strategies. In: PITTA-PANTAZI, D.; PHILIPPOU, G. (Ed.). **Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education – CERME 5**. Larnaca, Cyprus: European Society for Research in Mathematics Education and University of Cyprus, 2007. p. 844-851.
- BARBOSA, A. **A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contexto visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2º ciclo do ensino básico**. 2010. 448 f. Tese (Doutorado). Braga: Universidade do Minho.
- BECKER, J.; RIVERA, F. Generalization strategies of beginning high school algebra students. In: CHICK, H.; VINCENT, J. (Ed.). **Proceedings of the 29 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, 2005. Cap. 4, p. 121-128.
- BEN-CHAIM, D.; LAPPAN, G.; HOUANG, R. The role of visualization in the middle school mathematics curriculum. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, 11, 49-60, 1989.
- BLANTON, M.; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning, **Journal for Research in Mathematics Education**, 36(5), 412-446, 2005.
- BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Portugal, Porto Editora, 1999.
- BORBA, M.C.; PENTEADO, M.G.P. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de Dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional. *Diário Oficial [da República Federativa do Brasil]*, Brasília, DF, v. 134, n. 248, 23 dez. 1996. Seção 1, p. 27834-27841.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto / Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- BRASIL. Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**, v. 2. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, MEC, 2006.

**CURRÍCULO DO ESTADO DE SÃO PAULO: MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS** / Secretaria da Educação. São Paulo: SEE, 2010.

D'AMBROSIO, U. **Informática, Ciência e Matemática**, 1999. Disponível em: <http://vello.sites.uol.br/ubi.htm>. Acesso em: 5 jun. 2010.

DEVLIN, K. **Matemática: a ciência dos padrões**. Porto: Porto Editora, 2002.

DOWBOR, L. **Tecnologias do Conhecimento: os desafios da educação**. Petrópolis: Vozes, 2001.

DRIJVERS, P., KIERAN, C., MARIOTTI, M.A. Integrating technology into mathematics education: theoretical perspectives. In: HOYLES, C.; LAGRANGE, J. (Ed.). **Mathematics education and technology - Rethinking the terrain**. Berlin: Springer, 2010. p. 89-132.

FERRARA, F.; PRATT, D.; ROBUTTI, O. The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. In: GUTIÉRREZ, A.; BOERO, P. (Ed.). **Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education**, 2006. p. 237–273.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M.; MIGUEL, A. Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar. In: **Pro-Posições**, Revista Quadrimestral da Faculdade de Educação – Unicamp. Campinas: Cortez Editora, 1993. Vol. 4, n° 1 [10]. p. 78-91.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E.M. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: **CIBEM V- Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática**. Porto, 2005.

GERANIOU, E.; MAVRIKIS, M.; HOYLES, C.; NOSS, R. Towards a constructionist approach to mathematical generalisation. **Research in Mathematics Education**, 11(1), p. 75-76, 2009.

GERANIOU, E.; MAVRIKIS, M.; HOYLES, C.; NOSS, R. Student's justification strategies on the equivalence of quase-algebraic expressions. **International Conference on Psychology of Mathematics Education**. Ancara, Turkey, 2011.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 5.ed. São Paulo: Atlas, 2006.

GOLDENBERG, M., **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais**. Rio de Janeiro: Record, 1997.

GRAVINA, M.A.; SANTAROSA, L.M.C. A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados. In: **Informática na Educação: Teoria e Prática**. 1998. vol.1, n. 1.

JACCOUD, M.; MAYER, R. A observação direta e a pesquisa qualitativa. In: POUPART, J.; DESLAURIES J-P.; GROULX, L-H.; LAPERRIÈRE, A.; MAYER, R.; PIRES, AP.B. **A pesquisa qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos**. Petrópolis: Vozes, 2010.

KAPUT, J. Teaching and learning a new algebra. In: FENNEMA, E.; ROMBERG, T. (Ed.). **Mathematics classrooms that promote understanding**. Mahwah, NJ: Erlbaum, 1999. p. 133-155.

KAPUT, J.; BLANTON, M. Algebrafying the elementary mathematics experience in a teacher-centered, systemic way. In: ROMBERG, T.; CARPENTER, T. (Ed.). **Understanding mathematics and science matters**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2005. p. 99-125.

KELLY, B. The emergence of technology in mathematics education. In: STANIC, G.M.A.; KILPATRICK, J. (Ed.). **A History of School Mathematics**. Reston: NCTM, 2003. p. 1037–1081.

LANNIN, J. K. Generalization and Justification: The challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. **Mathematical Thinking and Learning**, 7(3), 231-258, 2005.

LANNIN, J., BARKER, D., TOWNSEND, B. Algebraic generalization strategies: factors influencing student strategy selection. **Mathematics Education Research Journal**, 18(3), 3-28, 2006.

LAPA, C.M.S.; PASSOS, D.S. Ensino e aprendizagem de álgebra: levantamento bibliográfico de pesquisas brasileiras. In: **V Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade**. Sergipe: 2011.

LAVICZA, Z. Integrating technology into mathematics teaching at the university level. **ZDM Mathematics Education**. v.42, p.105–119, 2010.

LEE, L. An initiation into algebraic culture through generalization activities. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Ed.). **Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 87-106.

LEE, L. Early – but which algebra? The future of the teaching and learning of algebra. In: ICMI STUDY CONFERENCE. **Proceedings...** Melbourne: ICMI, 2001. v. 2, p. 392-300.

LINCOLN, Y.; GUBA, E. **Naturalistic inquiry**. Londres: Sage Publications, 1985.

LINS, R.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

MALTEMPI, M.V. Novas Tecnologias e Construção de Conhecimento: Reflexões e Perspectivas. In: V Congresso Ibero-americano de Educação Matemática (CIBEM). Porto, Portugal, 2005. **Anais em CD**.

MALTEMPI, M. V. Educação matemática e tecnologias digitais: reflexões sobre prática e formação docente. In: **Acta Scientiae**. São Paulo, 2008. v.10, n.1, p.59-67.

MASON, J. Expressing Generality and Roots of Algebra. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. **Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching**. Netherland: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 65-86.

MAYES, R. Current state of research into CAS in mathematics education. In: BERRY, J.; KRONFELLNER, M.; MONAGHAN, J.; KUTZLER, B. (Ed.). **The state of computer algebra in mathematics education**. Lund, Sweden: Chartwell-Bratt. 1997. p. 171-189.

NOSS, R.; HEALY, L.; HOYLES, C. The Construction of Mathematical Meanings: Connecting the Visual with the Symbolic. **Educational Studies in Mathematics**, 33(2), p. 203-233, 1997.

- NOSS, R.; GERANIOU, E.; MAVRIKIS, M.; KAHN, K.; HOYLES, C. Developing a Microworld to Support Mathematical Generalisation, **PME 33**: International Group for the Psychology of Mathematics Education, Thessaloniki, Vol.3, p. 49-56, 2009a.
- NOSS, R.; HOYLES, C.; MAVRIKIS, M.; GERANIOU, E.; GUTIERREZ-SANTOS, S.; PEARCE, D. Broadening the sense of 'dynamic': a microworld to support students' mathematical generalisation. In: HEGEDUS, S.; MORENO-ARMELIA, L. (Ed.). *Transforming Mathematics Education through the use of Dynamic Mathematics Technologies*. Special Issue, **ZDM Mathematics Education**, 2009b.
- NOSS, R.; POULOVASSILIS, A.; GERANIOU, E.; GUTIERREZ-SANTOS, S.; HOYLES, C.; KAHN, K.; MAGOULAS, G.D.; MAVRIKIS, M. The design of a system to support exploratory learning of algebraic generalization. **Computers & Education**. V. 59, p. 63-81, 2012.
- ORTON, A.; ORTON, J. Pattern and the Approach to Algebra. In: ORTON, A. **Pattern in the teaching and learning of mathematics**. London: Cassel, 1999.
- ORTON, J. Children's Perception of Pattern in Relation to Shape. In: ORTON, A. (Ed.). **Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics**. London: Cassell, 1999. p. 104-124.
- PINHEIRO, E. M.; KAKEHASHI, T. Y.; ANGELO, M. O uso de filmagem em pesquisas qualitativas. **Revista Latino-Americana de Enfermagem**, Ribeirão Preto, v. 13, n. 5, p. 717-722, 2005.
- POWELL, A.B.; FRANCISCO, J.M.; MAHER, C.A. Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento de ideias e raciocínios matemáticos de estudantes. In: **Bolema**, nº 21, Ano 17, p. 81 – 140, UNESP, Rio Claro. 2004.
- POZZI, S. Algebraic Reasoning and CAS: Freeing Students from Syntax? In: HEUGL, H.; KUTZLER, B. (Ed.). **DERIVE in Education: Opportunities and Strategies**. Bromley, UK: Chartwell-Bratt. 1994.
- RIVERA, F.; BECKER, J. Figural and numerical modes of generalization in Algebra, **Mathematics Teaching in the middle school**. 2005. p.198-203.
- SASMAN, M.; OLIVIER, A.; LINCHEVSKI, L. Factors influencing students' generalization thinking processes. In: ZASLAVSKY, O. (Ed.). **Proceedings of the 23th International Conference for Psychology of Mathematics Education**. Israel: PME, 1999. p. 161-168.
- STACEY, K. Finding and Using Patterns in Linear Generalising Problems. **Educational Studies in Mathematics**, 20(2), 147-164, 1989.
- THOMAS, M.O.J; MONAGHAN, J.; PIERCE, R. Computer algebra systems and algebra: curriculum, assessment, teaching, and learning. In: STACEY, K.; CHICK, H.; KENDAL, M. (Ed.). **The future of the teaching and learning of algebra: the 12<sup>th</sup> ICMI study**. Boston, EUA: Kluwer Academic Publishers, 2004.
- THORNTON, S. **A Picture is Worth a Thousand Words**. 2001. Disponível em: <<http://math.unipa.it/~grim/AThornton251.PDF>>. Acesso em: 21 jun. 2012.



USISKIN, Z. Concepções sobre álgebra da escola média e utilização das variáveis. In: COXFORD, A.F.; SHULTE, A.P. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 9-22.

VALE, I.; PIMENTEL, T. Padrões: um tema transversal no currículo. **Revista Educação e Matemática**, Portugal, v.85, p. 14-20, Nov/dez, 2005.

VALE, I.; PALHARES, P.; CABRITA, I.; BORRALHO, A. Os padrões no ensino e aprendizagem da álgebra. In: VALE, I.; PIMENTEL, A.; BARBOSA, L.; FONSECA, L.; SANTOS, L.; CANAVARRO, P. (Ed.) **Número e Álgebra**. Lisboa: SEM-SPCE, 2007, p.193-211.

VALENTE, J. A. **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas: Unicamp/NIED, 1999.

VYGOTSKY, L.S. **Pensamento e Linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1993.

WARREN, E.; COOPER, T.J. Patterns that support early algebraic thinking in the elementary school. In: GREENES, C.E.; RUBENSTEIN, R. (Ed.). **Algebra and algebraic thinking in school mathematics**. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 2008.

WARREN, E. Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. **Educational Studies in Mathematics**, 67, 171-185, 2008.

ZAZKIS, R., LILJEDAHN, P. Generalisation of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. **Educational Studies in Mathematics**, 49, 379-402, 2002.

ZELLER, M.; BARZEL, B. Influences of CAS and GC in early algebra. **ZDM Mathematics Education**. v.42, n.7, p.775-788. 2010.