

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Modelagem Matemática: elementos históricos sobre seu desenvolvimento em cursos de pós-graduação

Henrique Marins de Carvalho

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Departamento de Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador
Prof. Dr. Sergio Roberto Nobre

2010

510.09 Carvalho, Henrique Marins
C331m Modelagem Matemática: elementos históricos sobre seu desenvolvimento em cursos de pós-graduação/ Henrique Marins de Carvalho-Rio Claro: [s.n.], 2010.
82 f. : fig., tab.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientador: Sergio Roberto Nobre

1. Estatística. 2. Geometria. 3. Cálculo Diferencial e Integral. 4. Equações Diferenciais. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Henrique Marins de Carvalho

MODELAGEM MATEMÁTICA: ELEMENTOS HISTÓRICOS SOBRE SEU
DESENVOLVIMENTO EM CURSOS DE PÓS-GRADUAÇÃO

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Sergio Roberto Nobre
Orientador

Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira
IGCE - UNESP

Prof. Dr. Geraldo Pompeu Junior
Câmpus de Sorocaba - UFSCAR

Rio Claro, 09 de Abril de 2010

*Às pessoas mais importantes da minha vida:
Acacio, Selma, Miriam, Beatriz e Isabel.*

Agradecimentos

A DEUS, por suas bênçãos contínuas.

A minha família, pela compreensão e amor.

Ao meu orientador Sergio Roberto Nobre, pela atenção dispensada, garantindo a tranquilidade necessária para o bom êxito do trabalho.

Ao professor Rodney Carlos Bassanezi, por tudo que representa para a Modelagem Matemática no Brasil.

Ao professor e amigo Geraldo Pompeu Junior, pelos incentivos frequentes e apoio irrestrito.

À coordenação, corpo docente e funcionários do curso de Mestrado em Matemática Universitária pelo profissionalismo no exercício de suas funções.

Aos amigos, alunos do curso, especialmente José, Nilton, Juracélio, Gustavo e Fabrício. “Quem achou um amigo verdadeiro, achou um tesouro.” (Eclo 6,14)

*Todos os matemáticos vivem em dois mundos diferentes.
Eles vivem em um mundo cristalino de formas platônicas perfeitas.
Num palácio de gelo.
Mas eles também vivem no mundo comum,
onde as coisas são transitórias, ambíguas, sujeitas a vicissitudes.
Os matemáticos vão para trás e para a frente, de um mundo para outro.
São adultos no mundo cristalino e crianças no mundo real.*

Sylvain Cappell

Resumo

A Modelagem Matemática, nesse trabalho, é entendida como o conjunto de estratégias e procedimentos para tornar o aprendizado da Matemática, principalmente dos tópicos destinados ao ensino superior, agradável e proveitosa, partindo de uma situação problemática oriunda de diversas áreas do conhecimento. No Brasil, um importante matemático que atuou na divulgação e no aprimoramento da Modelagem é o professor Rodney Carlos Bassanezi. Ele ministrou dezenas de cursos e orientou um grande número de alunos em programas de graduação e pós-graduação. A partir da análise de exemplares de produções científicas desenvolvidas por seus alunos, o presente trabalho, ressaltando o pioneirismo e a perseverança do professor Bassanezi no aperfeiçoamento contínuo da Modelagem Matemática, apresenta a possibilidade de seu emprego no ensino de tópicos de Matemática em cursos de nível superior.

Palavras-chave: Estatística, Geometria, Cálculo Diferencial e Integral, Equações Diferenciais.

Abstract

The Mathematical Modeling in this work is understood as the set of strategies and procedures to make the mathematical learning, especially the topics in college courses, enjoyable and worthwhile, starting from a problematic situation from several areas of knowledge. In Brazil, an important mathematician who worked a lot spreading and improving the Modeling is called Rodney Carlos Bassanezi. He lectured on several courses and guided a great amount of students in undergraduate and graduate programs. From the analysis of several samples of papers developed by his students, the present study, highlighting the pioneering spirit and perseverance of Professor Bassanezi in the continuous improvement of Mathematical Modeling, presents the possibility of its use while teaching Mathematics topics in college-level courses.

Keywords: Estatistics, Geometry, Diferential and Integral Calculus, Diferential Equations.

Lista de Figuras

3.1	Processo de modelagem matemática.	33
5.1	Função densidade de probabilidade χ^2	42
5.2	Desmatamento e Lavoura Temporária e Permanente.	45
5.3	Desmatamento e área destinada à criação de gado bovino.	45
6.1	Alvéolo	50
6.2	Possíveis configurações de um favo.	51
6.3	Polígono regular inscrito.	53
6.4	Prisma de base losangonal correspondente a um terço do alvéolo.	55
7.1	Gráfico da função $f_1(t) = -70000 \cdot 0,0975^t + 80000$	68
7.2	Gráfico da função $f_2(t)$	69
7.3	Gráfico da função $f_3(t)$	71
7.4	Método dos quadrados mínimos.	73
7.5	Determinação do ponto de estabilidade.	74
7.6	Área de colheita de café - dados reais e modelo.	75

Lista de Tabelas

5.1	Desmatamento e Lavoura Temporária e Permanente.	44
5.2	Desmatamento e Criação de gado bovino (em milhões de ha).	45
5.3	Frequências observadas.	46
5.4	Frequências esperadas.	46
5.5	Frequências observadas.	47
5.6	Frequências esperadas.	47
6.1	Polígonos com apótema igual a 2.	53
7.1	Área de colheita de café no período de 1980 a 1992.	72
7.2	Método de Ford-Walford.	72

Sumário

1	Introdução	19
2	Rodney Bassanezi: uma breve biografia	21
3	A Modelagem Matemática e os cursos de Modelagem Matemática	25
3.1	Estrutura e Metodologia de um curso de Modelagem Matemática	28
3.2	Metodologia de Ensino em Modelagem Matemática	29
3.3	Etapas da Modelagem Matemática	31
4	Modelagem para o Ensino Básico	35
4.1	Construção da maquete de uma casa	35
5	Estatística	39
5.1	Aspectos históricos	39
5.2	Definições e procedimentos	40
5.3	Estatística e Desmatamento	43
6	Geometria Aplicada	49
6.1	Geometria e Abelhas	49
7	Cálculo Diferencial e Integral	59
7.1	Aspectos históricos	59
7.1.1	Integral: a ferramenta para o cálculo de áreas e volumes	59
7.1.2	Derivadas: reta tangente e velocidade instantânea	60
7.1.3	Equações Diferenciais e de Diferenças	62
7.2	Cálculo, equações de diferenças, equações diferenciais e Abelhas	64
7.3	Cálculo e Café	71
8	Conclusão	77
	Referências	81

1 Introdução

A qualidade da prática profissional de um matemático que se dedica puramente à pesquisa pode ser comprovada por sua própria obra, reflexo dos anos de trabalho e dedicação que o levaram à excelência em sua área. No entanto, a importância do trabalho de um profissional que se compromete com o ensino da Matemática será melhor confirmada pela observação do material produzido por seus aprendizes.

Assim, o interesse do presente trabalho é destacar o pioneirismo de Rodney Carlos Bassanezi no desenvolvimento e divulgação da Modelagem Matemática, atividade a que se dedica com zelo há mais de três décadas, a partir do estudo de produções científicas formuladas sob sua orientação, observando a possibilidade de utilização de tal estratégia na atividade profissional docente em cursos de nível superior.

Para um estudo mais detalhado, foram selecionadas uma dissertação de mestrado e três monografias de cursos de especialização *lato sensu*. Considerando o texto integral de cada um desses trabalhos, encontram-se dezenas de modelos matemáticos sobre os temas propostos. No entanto, para atingir o objetivo previsto nessa pesquisa, foram destacados aqueles que melhor representassem a possibilidade do emprego dessa estratégia no ensino de disciplinas específicas de Matemática em cursos de nível superior.

A escolha do professor Bassanezi como um referencial pertinente para esta pesquisa justifica-se por ser um dos matemáticos brasileiros com maior experiência tanto na produção científica pessoal, como na orientação de estudantes de cursos de graduação e pós-graduação.

Em conformidade com o objetivo do Programa de Pós-graduação em Matemática Universitária, percebe-se que a formação de um matemático para atuar nas instituições de ensino superior necessita de um suficiente grau de erudição matemática para traçar conexões entre os diversos domínios dessa ciência e entre áreas correlatas, bem como enaltecer e explorar ideias inovadoras de ensino de tópicos de Matemática, nas inúmeras disciplinas dos cursos de nível superior nas áreas de ciência e tecnologia.

A Modelagem Matemática, nas estratégias sugeridas e comprovadas por Bassanezi e por seus orientados e colaboradores, quando bem desenvolvidas, atende a esse objetivo proposto.

O segundo capítulo contém um relato biográfico bastante resumido, visando apenas apresentar um panorama da formação acadêmica de Bassanezi, suas áreas de interesse,

instituições em que trabalhou e a influência dos professores Aristides Barreto e Ubiratan D'Ambrosio em sua carreira.

No terceiro capítulo, são definidos preliminarmente os conceitos de Modelagem e modelo matemático, bem como as diversas tentativas, ao longo da História, de se desenvolver uma representação, em um contexto formal e científico, dos fenômenos naturais observados. São também relacionados os cursos de especialização em Modelagem Matemática já ministrados por Bassanezi e sua equipe, com os respectivos (e peculiares) temas abordados. Descreve-se a estrutura estabelecida nesses cursos que serve de guia para os próximos capítulos.

Considerando o enfoque desse texto para o ensino da Matemática nos cursos de nível superior, o quarto capítulo apenas esboça algumas atividades já colocadas em prática com sucesso, por alunos de Bassanezi, no ensino básico.

No quinto capítulo, após um breve histórico da Estatística, um ramo importante da Matemática em sua evolução acentuada nos últimos quatro séculos, mostra-se a possibilidade de utilizar uma situação-problema extremamente vinculada ao cotidiano dos estudantes (desmatamento do Arco do Desenvolvimento Sustentável) para motivar o estudo, a formulação de hipóteses e suas verificações.

A Geometria é o assunto do sexto capítulo, tomando como ponto de partida o formato dos alvéolos de uma colmeia. Questões sobre a construção de tais estruturas levam à discussão sobre pavimentação do plano, cálculo da área de superfícies e do volume de sólidos, permitindo, ainda, algumas considerações sobre tópicos de Análise.

O sétimo capítulo é dedicado a um tópico de Matemática indispensável em qualquer curso superior da área de ciência e tecnologias: o Cálculo Diferencial e Integral e sua respectiva aplicação no estudo de Equações Diferenciais. Novamente é feita uma breve abordagem histórica dos esforços, principalmente a partir do século XVI, que resultariam nesse amplo contexto que pode ser reunido atualmente sob o título de Cálculo. As monografias analisadas com um enfoque prioritário para este estudo, tratam de problemas aparentemente díspares como a dinâmica populacional de abelhas, a produção cafeeira no Brasil e o desmatamento da Amazônia, mas que podem ser observados sob a ótica de uma mesma teoria matemática.

No quinto e sétimo capítulos, logo após uma abordagem da evolução histórica do tópico em foco, é apresentado um embasamento teórico mínimo, essencial à elaboração do modelo descrito, concluindo com o modelo extraído do texto científico selecionado.

Finalmente, comenta-se, no oitavo e último capítulo, sobre o atual estágio de evolução da pesquisa e prática da Modelagem Matemática no Brasil, percebida pelo crescente número de publicações, cursos regulares e de extensão dedicados ao assunto e pelo surgimento de grupos de estudo e divulgação, sendo notável a influência direta ou indireta de Bassanezi em todos esses avanços.

2 Rodney Bassanezi: uma breve biografia

Rodney Carlos Bassanezi graduou-se em Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Prof. Júlio de Mesquita Filho” - UNESP, no câmpus de Rio Claro, no ano de 1965. Recebeu o título de Mestre em Matemática pela UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas, no ano de 1971, com uma pesquisa sobre Sistemas Ortonormais Completos, sob orientação de Ayrton Badelucci. Doutorou-se em 1977, também pela UNICAMP, com o tema “Problema de Dirichlet para Equação de Superfícies Mínimas em Domínios Pseudo-convexos”, sob os auspícios de Ubiratan D’Ambrosio e Umberto Massari. Nos anos de 1981 e 1985, na Libera Università Degli Studi Di Trento, obteve o pós-doutorado com estudos sobre Teoria das Medidas e Análise Funcional.

Atuou como professor titular ou convidado nas seguintes instituições:

- Universidade Federal de Goiás (UFG);
- Universidade de Brasília (UNB);
- Università Degli Studi Di Trento;
- Fundação Universidade Estadual de Londrina (FUEL);
- Pontifícia Universidade Católica de Campinas (PUC-Campinas);
- Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP);
- Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho- Campus de Rio Claro (UNESP)
- Universidade Federal do ABC (UFABC), sendo que é atualmente Coordenador do Programa de Pós-Graduação do Centro de Matemática, Computação e Cognição desta instituição, além de ainda orientar alunos do programa de pós-graduação da UNICAMP.

Tem uma extensa atividade também como orientador de trabalhos de pós-graduação, sendo responsável pela formação de cerca de quarenta mestres e vinte doutores em Matemática nas diversas instituições em que trabalhou como titular ou como colaborador.

Sua atividade profissional, lecionando para diversos cursos como Engenharia e Medicina, aliada à sua atenção a modernas pesquisas e seu gosto pessoal por aplicações dos conceitos estudados levaram-no a adotar a Modelagem Matemática como uma estratégia perspicaz na prática docente, percebendo que há duas alternativas bastante claras para realizar tal procedimento: adaptar estruturas matemáticas já existentes aos

fenômenos da realidade ou usar as situações da realidade servindo como fonte para a obtenção de novos conceitos e estruturas matemáticas.

No primeiro caso, são exigidas restrições ou simplificações às vezes excessivas enquanto a outra alternativa oferece a oportunidade de substituir os paradigmas da construção científica, já estabelecidos, por estruturas mais coerentes com o fenômeno analisado.

Bassanezi acredita que, em se tratando da investigação em matemática, é comum a combinação das duas alternativas, possibilitando a construção de modelos matemáticos, a partir de uma teoria conhecida que, por sua vez, não contém técnicas e métodos suficientes para obtenção dos resultados desejados, exigindo do matemático habilidade e criatividade, para desenvolver novos métodos e técnicas que vão se mostrando necessários.

Suas concepções, experiências e propostas em Modelagem Matemática estão bem estabelecidas em suas produções científicas, nos trabalhos de conclusão dos cursos de pós-graduação (doutorado, mestrado e especialização) ministrados e, principalmente, nos livros *Equações diferenciais com aplicações* escrito juntamente com o professor Wilson Castro Ferreira Jr. e editado em 1988, *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*, publicado em 2004 e reeditado em 2006 e *Técnicas de Modelagem Matemática em cursos de Especialização*, a ser publicado brevemente.

Bassanezi é, assim, um dos maiores contribuintes para a divulgação e o aprimoramento da Modelagem Matemática no país, mas deve ser ressaltado que dois matemáticos tiveram influência significativa em sua vida e, dessa forma, também no trabalho por ele desenvolvido. São eles: Aristides Barreto e Ubiratan D'Ambrosio. De maneira bastante resumida, segue uma visão geral sobre esses importantes professores cuja abordagem peculiar da Matemática e das formas de ensiná-la causaram um impacto extremamente positivo na prática de Bassanezi.

Aristides Camargos Barreto conheceu a ideia de Modelagem Matemática quando cursou Engenharia na década de 1960. Procurou aplicar modelos matemáticos como estratégia de ensino nas disciplinas de Fundamentos de Matemática Elementar e Prática de Ensino, ministradas para o curso de Licenciatura de Matemática, e de Cálculo Avançado para engenheiros, em programas de pós-graduação na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Desenvolveu trabalhos abordando temas como Linguística, Ecologia e Biologia.

Destaca-se na profícua atividade de Aristides Barreto uma experiência pedagógica realizada em uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral IV, com estudantes pertencentes a cursos de Engenharia (a maioria), além de Matemática, Física e Química.

Na mesma época, Barreto orientou os primeiros trabalhos de pós-graduação que podem ser vistos como estudos sobre Modelagem Matemática, na PUC-Rio, de autoria de Celso Braga Wilmer e Jorge E. Pardo Sánchez.

Os resultados favoráveis percebidos por Aristides Barreto em suas pesquisas pessoais

e naquelas desenvolvidas por seus orientandos levaram-no a defender esta maneira de se ensinar Matemática através de modelos que possibilitem um aprendizado mais significativo e eficiente. Em diversos eventos de Educação Matemática, apresentou tal proposta: motivar os estudantes com uma situação problema inicial que levasse ao desenvolvimento dos tópicos matemáticos necessários para criar um modelo adequado, aplicar tal modelo para encontrar uma solução e, posteriormente, retornar ao problema original para verificar a validade e a qualidade da resposta encontrada.

Como os temas apresentados por Barreto eram bem variados, foi possível cativar diversos docentes para a experiência dessa prática. Um dos matemáticos que foi seduzido por tais ideias foi Rodney Bassanezi, em uma palestra com o título “Modelos Matemáticos” proferida por Barreto em 1979, na UNICAMP, por solicitação do professor Ubiratan D’Ambrosio.

Ubiratan D’Ambrosio também foi um referencial importante para Bassanezi em sua formação e no desenvolvimento de seus trabalhos. Na década de 1960, D’Ambrosio foi professor e pesquisador na Brown University, em Providence, Rhode Island; na University of Rhode Island, em Kingston - Rhode Island e na State University of New York, em Bufalo – New York. Nessa época, tomou ciência da formação do *Undergraduate Mathematics Application Program – UMAP*, que visava preparar módulos de aprendizagem de matemática por tema, com o objetivo de melhorar a aprendizagem matemática de alunos da Educação Superior.

Apesar de ainda não receber o título de “Modelagem Matemática”, na prática já era um germe dessa estratégia, pois tratavam os temas propostos, a partir de problemas e referências a aplicações na vida cotidiana e em outras ciências. Quando D’Ambrosio retornou ao Brasil, em 1972, para atuar na UNICAMP, implantou, com o apoio da OEA e da UNESCO, propostas de educação matemática no Brasil semelhantes às que ocorriam em alguns países da Europa e Estados Unidos. Dentre as propostas implantadas nesse período, destacam-se duas: a produção de materiais de apoio didático na forma de módulos e a criação do 1^o Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática na UNICAMP. Foram produzidos novos materiais de apoio didático sobre vários temas matemáticos, todos voltados ao Ensino Fundamental. Este programa de pós-graduação originou trabalhos nas nascentes áreas de Etnomatemática e Modelagem Matemática.

Dentre os matemáticos com os quais D’Ambrosio estabeleceu relações acadêmicas figura um professor da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro PUC-RJ, Aristides Camargo Barreto, cuja brevíssima biografia foi citada algumas linhas acima. Surge então, o convite, por parte de D’Ambrosio, para o proferimento da palestra na UNICAMP, que foi um dos elementos motivadores para Rodney Bassanezi.

Além de sua dedicação na pesquisa e divulgação da Modelagem Matemática, principalmente em cursos de pós-graduação, é necessário salientar que a atividade profissional de Bassanezi também pode ser percebida em relevantes produções na área de Biomatemática e de estudos de Teoria de Conjuntos Fuzzy.

No IMECC da UNICAMP, foi responsável pela criação e coordenação do Grupo de Biomatemática, área definida como de pesquisa na pós-graduação do Departamento de Matemática Aplicada a partir de 1990 e que conta atualmente com 7 pesquisadores e 17 alunos de pós-graduação (11 doutorandos e 6 mestrands). Nesta área, já foram concluídas mais de 20 teses, além de atividades de cooperação científica com vários centros de pesquisas nacionais: EMBRAPA, ESALQ, CAISM, Fundecitrus, Instituto de Biologia (IB–Unicamp), UNESP de Rio Claro e de Botucatu e internacionais: Universidades de Valparaiso e Tarapacá (Chile), Universidade de Trento (Itália), Instituto Weismann (Israel), Rochester Institute (USA).

É editor responsável da revista BIOMATEMÁTICA (ISSN 1679 – 365X), que já está no 19^o volume, com os trabalhos desenvolvidos no IMECC e que são apresentados no Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional CNMAC, tendo também publicado uma série de textos que foram usados em cursos regulares e minicursos de congressos.

Em revistas especializadas, com corpo editorial publicou, com a colaboração de outros pesquisadores, mais de 60 trabalhos e outro tanto em Proceedings e Atas de Congresso. Participou como conferencista, palestrante ou professor de minicursos em um grande número de congressos nacionais e internacionais. (Universidade de Trento Itália; Universidade de Tarapacá Chile; Universidade de Tandil Argentina).

Estudando a Teoria de Conjuntos Fuzzy, em suas possíveis aplicações a problemas de Biomatemática, publicou, em 2006, juntamente com Laecio Carvalho de Barros, o livro *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*, com um excelente embasamento teórico e uma coletânea de estudos de aplicação, referência constante de produções nessa área.

Sobre ombros de gigantes, Bassanezi sempre desenvolveu suas experiências em Modelagem Matemática, tendo como motivação frequente a busca por um modelo que permita a resolução, em um ambiente matemático, de um problema oriundo do mundo real, cuja resposta quantitativa ou qualitativa possa ser transportada novamente ao mesmo cenário do qual surgiu a pergunta, oferecendo a melhoria de algum procedimento ou a explicação de um fenômeno.

O processo para a obtenção de um modelo que atenda a essas exigências demanda um alicerce conceitual e teórico aliado ao interesse na busca de novas práticas de aprendizagem de Matemática. A divulgação de tais ideias tem ocorrido em programas de Pós-graduação de diversas instituições de ensino superior por todo o país, possibilitando, em cada novo curso, a validação e o aperfeiçoamento da proposta defendida por Bassanezi.

3 A Modelagem Matemática e os cursos de Modelagem Matemática

“A Modelagem Matemática é Matemática por excelência. As origens das ideias centrais da Matemática são o resultado de um processo que procura entender e explicar fatos e fenômenos observados na realidade”, afirma D’Ambrosio, no prefácio da obra de Bassanezi (2006) “Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática”.

Definir Modelagem Matemática como estratégia de ensino passa pela simplicidade de compreensão que a própria intuição oferece e pela complexidade de enunciar o objetivo de tal prática, sem restringir a amplitude que lhe é peculiar nem oferecer a ilusão de solucionar todo e qualquer problema existente.

Diversos autores apresentam suas próprias definições sobre a Modelagem, chegando até mesmo a propor outros termos para realizar distinções entre o que julgam ser o uso dos modelos matemáticos em sua aplicação estrita à solução de problemas das diversas áreas científicas e a sua utilização no ambiente educacional.

Não serão, no entanto, listadas inúmeras definições com o mesmo cerne e que se diferenciam apenas por detalhes e particularidades e também não se pretende lançar aqui uma nova tentativa de explicar o que é a Modelagem. Considerando que o objetivo deste trabalho é comprovar a importância do professor Bassanezi para o desenvolvimento dessa prática, tomamos como válida a definição apresentada por ele mesmo: “Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A Modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual” e ainda, “modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado.” (BASSANEZI, 2006)

Uma das primeiras experiências do professor Bassanezi que resultariam no estágio atual de desenvolvimento e divulgação da Modelagem Matemática foi uma experiência realizada com 30 professores de Cálculo de universidades da região sul do país, cuja proposta era simplesmente a formulação de um problema original sobre o conteúdo de Cálculo 1, ministrado por eles. Após duas horas disponibilizadas para a atividade, o

resultado obtido não apresentava criatividade alguma, pois não passavam de exemplos similares aos encontrados nos livros didáticos então utilizados.

A verificação da necessidade de desenvolver no docente a habilidade de formular problemas interessantes, contextualizados e de bom nível matemático foi um dos impulsos para a criação de cursos de especialização tendo a Modelagem Matemática como eixo principal, por ser considerada um instrumento eficaz para tal aperfeiçoamento.

O primeiro curso ministrado por Bassanezi e sua equipe ocorreu na cidade de Guarapuava, no Paraná, na então Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Guarapuava (hoje Unicentro), nos anos de 1983 e 1984. Como um curso pioneiro, os bons rendimentos obtidos com os professores-alunos estimularam a perpetuação da proposta que já foi implementada em diversas cidades, em instituições públicas e privadas. A seguir temos a listagem dos cursos ministrados até então:

- Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Guarapuava (atual Unicentro), Guarapuava - PR (1983-84), (1987-1988), (1990-1991);
- Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá-MT (1987-1988), (2005-06);
- Universidade Estadual de Ponta Grossa-PR (1988-1989);
- UNIMEP, Piracicaba-SP (1988-89);
- FAFI Cornélio Procópio-PR (1989-90);
- FIDENE, Ijuí-RS (1989-90);
- FAFI, Palmas-PR (1989-90);
- Universidade de Mogi das Cruzes, Mogi das Cruzes-SP (1991-92);
- Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá-UNESP, Guaratinguetá-SP (1992-93);
- Pontifícia Universidade Católica de Campinas - PUC, Campinas-SP (1992-1999);
- Fundação Educacional de Barretos (Projeto Pró-Ciências), Barretos-SP (1995-1997), (1998-99);
- Universidade Estadual do Mato Grosso, Cáceres e Sinop-MT (1995-1998);
- FAFI, Campo Mourão-PR (1998-1999);
- UNICAMP (Campinas-SP), Universidade São Francisco (Itatiba-SP e Jundiaí-SP) e UNIMEP (Piracicaba-SP) - Projeto Pró-Ciências (CAPES-FAPESP) (1999-2000);
- Universidade de Cuiabá (UNIC), Cuiabá-MT (2002-03), (2004-05);
- UFABC, Santo André-SP, (2008-09), (2009-10).

Com um total de participantes próximo de oitocentos alunos atingidos diretamente, a diversidade (mais de oitenta) e peculiaridade dos temas escolhidos também é um item a ser percebido:

Agricultura: milho, soja, trigo, cana-de-açúcar (2), seringueira, urucum, café, erva-mate, MST, irrigação;

Fruticultura: laranja, uva (2), banana, maçã (2);

Horticultura: alface, pepino, hidroponia;

Animais: suinicultura (2), apicultura, ranicultura, piscicultura (3), pecuária, minhocultura; avicultura, andorinhas, jacaré, escargot;

Saúde: doenças (2), AIDS, medicamentos genéricos, antibióticos, cefaleia, dengue, dieta alimentar, paranoia, fumo;

Lazer: esporte, Olimpíada, conforto, festa do peão, atividades sociais, brincadeiras infantis, cinema, estilingue, bebidas alcoólicas;

Indústria: papel, cerveja (2), pneu, embalagem, estocagem, móveis, pisos, fermentado lácteo, vinho, cerâmica artística, olaria, tecelagem manual e mecânica, latas, vaca mecânica, olaria, coca-cola, leite, carroça;

Ecologia: poluição, água, lixo (3), Rio Cuiabá, índice pluviométrico, sensoriamento remoto, reflorestamento;

Transporte: coletivos (4), acidentes;

Energia Elétrica usina hidrelétrica, iluminação, eletrificação de uma favela;

Outros: Construção civil, Violência (2), Esoterismo, Madeira, Aquecedor solar, Sabão em pó, Cores, Dívida Externa, Mineração de ouro, Missões jesuítas, Supermercado, Eleição.

Com relação aos professores que já estiveram envolvidos ministrando disciplinas ou palestras nos cursos realizados, podem ser mencionados Eduardo S. Ferreira, Marineuza Gazzetta, Regina Buriasco, Maria Salett Biembengut, Ubiratan D'Ambrósio, Carlos Arguello, João F. A. Meyer, Sidney Ragazzi, Mario Gneri, Sueli Costa, J. Luis Boldrini, Ricardo Bacci, Vera Lúcia Figueiredo, Laércio Vendite, Sandra A Santos, Regina Franchi e Silvio Pregnotatto, Geraldo Pompeu Junior, Paulo Roberto Guimarães, dentre outros.

Importante ressaltar que, conforme o próprio professor Bassanezi, a estruturação e a aplicação desses cursos é intrinsecamente um processo de modelagem, pois implica em estabelecer metas, planos de ação, verificar os resultados obtidos e corrigir ou modificar as etapas com rendimento abaixo do esperado.

Dessa forma, a maneira como os primeiros cursos foram implementados difere em certos aspectos do que é realizado atualmente, principalmente no que tange à quantidade de docentes envolvidos e na apresentação final do trabalho dos alunos.

A quantidade de docentes ministrando o curso foi, no entanto, reduzida para três responsáveis: o próprio professor Rodney Bassanezi, o professor Geraldo Pompeu Junior (UFSCAR - Câmpus de Sorocaba) e o professor Paulo Roberto Guimarães (UNICAMP). A redução do número de professores está relacionada principalmente a uma necessidade intrínseca à modelagem, a interação entre os conteúdos matemáticos estudados, baseada no objetivo do problema. Assim, com menos pessoas, o processo de comunicação e a acessoria aos alunos são facilitados. No entanto, isso não impede a participação de outros professores como palestrantes em momentos específicos do curso.

Sobre o formato de apresentação da monografia há também uma modificação, já que, nos cursos pioneiros, eram realizados trabalhos distintos para cada disciplina ministrada (Estatística, Cálculo Diferencial, etc.) e, nos cursos atuais, um único trabalho escrito é produzido sob a responsabilidade de cada grupo de alunos, reunindo as in-

formações relacionadas aos tópicos estudados e os modelos desenvolvidos, mesmo que contemplem tópicos diferenciados dentre os assuntos abordados.

3.1 Estrutura e Metodologia de um curso de Modelagem Matemática

Bassanezi, em sua obra mais detalhada sobre o assunto “Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática”, apresenta inicialmente uma discussão sobre o emprego da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem, importando do ambiente de pesquisa e experimentação as qualidades de tal atividade para o desenvolvimento do instruendo. Posteriormente, cita as técnicas de modelagem e os modelos clássicos usualmente encontrados nos problemas oriundos de fenômenos físicos, biológicos, sociais e econômicos e, em seguida, sugere a utilização da Modelagem Matemática como disciplina num curso regular de formação de docentes, em cursos de pós-graduação ou em atividades de iniciação científica. Finalmente, comenta sobre a análise e evolução de modelos.

Nos cursos de pós-graduação em Modelagem Matemática ministrados e coordenados por Bassanezi o uso de recursos computacionais sempre foi um diferencial, buscando minimizar o tempo necessário para a realização dos cálculos necessários para a formulação e validação dos modelos, bem como para familiarizar os alunos com o uso de aplicativos voltados para a Matemática. Em algumas oportunidades, foram escolhidos *softwares* matemáticos, como o MATLAB, mas nas edições mais atuais, a opção tem sido o uso da planilha de cálculos Excel, componente do pacote Microsoft Office, em virtude de sua ampla distribuição nos computadores pessoais e nos laboratórios existentes nas escolas, além da aptidão da maioria dos cursistas na utilização de tal ambiente.

A sequência adotada na estruturação dos cursos de formação continuada é a seguinte:

- **Metodologia de Ensino em Modelagem Matemática:** justificativas para a utilização dessa estratégia, embasamento educacional, etapas da modelagem, escolha de temas de estudo, preferencialmente oriundos da realidade política, social e econômica da comunidade local, discussão e formulação de situações-problema;

- **Modelagem para o Ensino Básico (Fundamental e Médio):** desenvolvimento de modelos estáticos e dinâmicos com conteúdos do Ensino Fundamental, por exemplo, Geometria Plana e Espacial, equações de retas e parábolas, proporções, progressões aritmética e geométrica, análise combinatória e matrizes;

- **Estatística:** sistematização da coleta e análise de dados, métodos de amostragem, testes de hipóteses e ajuste de curvas;

- **Métodos Computacionais, Geometria Aplicada e Álgebra Linear:** a partir da exploração dos problemas propostos no primeiro tópico, ou da formulação de

novos, evolução dos modelos, buscando o relacionamento com a prática de ensino dessas disciplinas;

- **Cálculo Diferencial e Integral:** revisão de tópicos e conceitos de Cálculo, buscando, particularmente, a associação desses conceitos com os termos usuais na formulação de problemas dinâmicos: variações, tendências, estabilidade e equilíbrio serão traduzidos como derivadas, convergência, limites e assíntotas, por exemplo.

- **Equações Diferenciais:** estudo de equações de diferenças e equações diferenciais em modelos clássicos (dinâmica populacional), visando o aprimoramento do modelo até então desenvolvido.

Além dessas, outras disciplinas podem ser abordadas, desde que surja a necessidade, dependendo do tipo do problema analisado (Tópicos de Física, Química ou Biologia, Matemática Financeira, Medicina, entre outras).

3.2 Metodologia de Ensino em Modelagem Matemática

Conforme mencionado anteriormente, “a Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” (BASSANEZI, 2006). A motivação inicial e primordial do desenvolvimento humano foi a superação das dificuldades naturais encontradas e a busca pela compreensão dos fenômenos. Assim, todas as ciências, e de forma privilegiada a Matemática, têm sua evolução alicerçada na resolução de problemas.

Tomemos como exemplo uma das máquinas mais simples e, ao mesmo tempo, mais importantes já criadas pelo ser humano: a roda. Possivelmente as rodas mais primitivas não passavam de troncos de árvores tombadas sobre as quais se fazia rolar a carga que se desejava transportar. Posteriormente, percebe-se que bastava um eixo de diâmetro relativamente menor, associado a dois discos rígidos. Ainda um pouco de tempo e notou-se que esses discos não necessitavam ser totalmente rígidos, podendo ser substituídos por um aro com raios.

No entanto, para que a roda tivesse o máximo aproveitamento, com maior durabilidade, os raios deveriam estar igualmente espaçados. Tal problema resolve-se facilmente se forem propostos quatro, oito ou dezesseis raios, já que dois diâmetros perpendiculares resolvem a primeira questão, e bissetrizes de cada setor originam as soluções das próximas.

Porém, a imaginação e a curiosidade humanas transcendem quando o problema puramente prático já foi solucionado e a possibilidade de se dividir uma circunferência em três, cinco, seis ou numa quantidade finita qualquer de partes surgiu como um desafio pertinente.

Portanto, uma questão prática originada pela construção de uma máquina simples destinada ao transporte de cargas e pessoas acabou influenciando o desenvolvimento da Geometria e, mais recentemente, do estudo de equações algébricas e números complexos.

Todo modelo matemático é originado, então, de um problema relacionado a um fenômeno observado. Ciências como a Física, a Química e recentemente a Biologia já têm feito uso extenso de modelos matemáticos no intuito de transformar em “fórmulas” as observações realizadas em experimentos laboratoriais. Outras ciências, como a Sociologia, a Geografia e a Psicologia também têm vencido barreiras culturais de resistência à Matemática e buscado a modelagem de problemas específicos de suas áreas.

Há uma difundida segmentação da Matemática em três áreas, a saber: Matemática Pura, Matemática Aplicada e Educação Matemática, devida à grande quantidade de tópicos atualmente estudados. A Modelagem Matemática é uma técnica que não se limita a apenas uma delas, pois se serve do desenvolvimento da Matemática dita pura para estabelecer uma base firme, é aplicada, por sua própria essência e também permeia os estudos da Educação Matemática, por se tratar de uma atividade voltada para o estímulo e aperfeiçoamento do aprendizado matemático.

A Modelagem Matemática é, então, uma resposta ao anseio intelectual e científico que impulsiona a humanidade há muito tempo. Renè Descartes (1596-1650), em seu magnífico “*Discours de la Methode pour bien conduire la raison et chercher la verite dans les Sciences*”, de 1637, estabeleceu diretrizes para a pesquisa científica, abrangendo a Filosofia, a Astronomia, a Ótica e principalmente a Matemática.

Seu método consistia em:

- aceitar aquilo que seja tão claro em nossa mente que não exija explicação;
- dividir os grandes problemas em problemas menores;
- argumentar, partindo do simples para o complexo;
- verificar o resultado final.

Posteriormente, Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) reconhece a necessidade da evolução da Matemática até então existente, a partir do estabelecimento de uma “*characteristica universalis*”, ou seja, um método universal que fosse, ao mesmo tempo, uma linguagem comum às ciências e uma representação inequívoca da realidade em símbolos matemáticos.

Hermann Günter Grassmann (1809-1877), polímata alemão, publicou, em 1844, sua obra “*Die Lineare Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*” (A Teoria da Extensão: um novo ramo da Matemática), afirmando que se tratava de um primeiro volume de uma obra geral nunca concluída. Nela buscava reunir em uma expressão comum todas as ciências reais ou abstratas para a análise e representação de qualquer fenômeno perceptível aos sentidos ou mesmo aquelas existentes somente no campo das ideias.

Já no século passado, o matemático húngaro George Pólya (1887-1985) escreveu

quatro livros sob o tema “*How to solve it*” (A arte de resolver problemas) que buscava estabelecer um sistema heurístico não só para problemas matemáticos mas para outros oriundos de qualquer ciência. Basicamente, seu método segue os seguintes passos:

- Entenda o problema: esclareça qual é a pergunta, relacione toda a informação disponível, faça diagramas ou esquemas que possam auxiliar;
- Estabeleça um plano: equacione o problema em simbologia matemática, use analogia, faça gráficos, use fórmulas estabelecidas, resolva um problema mais simples como suporte;
- Desenvolva o plano estabelecido: seja paciente e persistente até obter a solução;
- Verifique/Amplie: após a solução obtida, confirmar sua validade e aplicação a outros problemas análogos ou mais complexos.

Assim, a Modelagem Matemática é uma resposta ao desejo e à necessidade da mente humana de compreender os fenômenos existentes, bem como de solucioná-los, prevê-los, controlá-los, enfim, estabelecer domínio sobre eles. Apesar de já ser possível realizar tal ação na maioria dos eventos, ainda há alguns aspectos que ainda não puderam ser adequadamente traduzidos para uma fórmula matemática, por envolverem sentimentos e emoções como por exemplo amor, ódio e outras facetas do comportamento humano, mas que não deixam de se apresentar como um desafio interessante: como modelar, por exemplo, a felicidade?

3.3 Etapas da Modelagem Matemática

Antes de enunciar e apresentar detalhes sobre as etapas intelectuais no processo da Modelagem Matemática, Bassanezi (2006. p. 20-21) faz algumas classificações dialéticas dos diversos modelos que podem ser realizados:

- Linear ou não-linear: conforme as equações estudadas tenham essa característica;
- Estático ou dinâmico: se representarem a forma de um objeto ou quando representam os diversos estágios de um fenômeno (normalmente associados ao transcorrer do tempo);
- Educacional ou aplicativo: quando se limita a um número restrito de considerações, tendo, quase sempre, soluções analíticas ou quando se baseia em hipóteses mais realísticas com grande número de parâmetros, buscando uma maior fidelidade ao fenômeno;
- Estocástico ou determinístico: se forem utilizados fatores aleatórios ou não no procedimento.

O processo de modelagem independe, portanto, do tipo de modelo que se está produzindo, pois a obtenção do modelo nada mais é que uma tradução para a linguagem matemática (tabelas, gráficos, funções e equações) de um objeto científico descrito em termos não-matemáticos advindos da Física, Biologia, Economia, Geografia ou qualquer outra ciência.

Essa “tradução” é processada por técnicas matemáticas e é subordinada ao conhecimento que o modelador possuir das duas linguagens que forem utilizadas: a Matemática e a não-Matemática. No que diz respeito ao conhecimento matemático, é essencial o domínio pleno dos fundamentos de Geometria, Álgebra e Análise Combinatória, bem como de tópicos específicos de Matemática superior: Cálculo Diferencial e Integral, Equações diferenciais, Estatística, Cálculo vetorial ou outros que se fizerem necessários. Com relação ao conhecimento da área científica de origem, normalmente é necessário uma consultoria de um especialista da área no intuito de auxiliar a seleção das informações essenciais e determinação da validade do modelo obtido.

Segue, então um roteiro que pode ser encontrado em outras obras ligeiramente modificado ao ser analisado sob o ponto de vista filosófico-educacional de outros autores, mas que é apresentado por Bassanezi (2006, p 27-31) da seguinte forma:

- **Experimentação:** obtenção de informações acerca do fenômeno estudado. Este estágio normalmente demanda a colaboração de um cientista conhecedor do assunto, auxiliado pelo matemático que procederá a seleção dos dados pertinentes e mais relevantes;

- **Abstração:** esta fase deve contemplar quatro ações: seleção de variáveis, problematização, formulação de hipóteses e simplificação.

Na *seleção de variáveis*, o matemático deve distinguir quais são as grandezas de importância para o modelo, bem como os parâmetros que têm influência em sua formulação; na *problematização*, deve ser tornado claro, a partir de uma questão com terminologia científica o objetivo do modelo; a *formulação de hipóteses* se apresenta como a interpretação dos relacionamentos entre as grandezas variáveis envolvidas no processo, podendo fazer uso de modelos clássicos já definidos ou analogias com outros ramos da ciência e, finalmente, a *simplificação* busca eliminar do modelo as variáveis que forem consideradas de “menor” importância, baseada na observação do cientista. O modelo obtido dessa forma deve reproduzir com a melhor qualidade possível as informações já existentes e ser capaz de estimar, com razoável certeza, dados ainda não obtidos.

- **Resolução:** a partir das hipóteses formuladas, a solução do modelo fica atrelada ao seu grau de complexidade, podendo resultar em um resultado analítico ou, quando este não for possível, em uma aproximação por métodos numéricos;

- **Validação:** etapa de extrema importância, pois define se o modelo obtido até o momento será aceito ou não, seja em virtude dos resultados que consegue oferecer em comparação com os dados já obtidos, ou mesmo em relação à concordância dos resultados obtidos com características específicas do fenômeno;

- **Modificação:** por diversas razões um modelo pode ser modificado:

- dados experimentais falsos ou obtidos de forma errônea;
- há variáveis que influenciam a situação real e não foram consideradas no modelo;
- erro matemático cometido na resolução;
- há outra teoria matemática que pode resultar num modelo melhor.

Na figura seguinte é apresentada uma representação gráfica dos processos que são desempenhados em uma atividade de Modelagem Matemática. Como já citado, apesar de tal diagrama poder ser encontrado com ligeiras modificações em outros autores, fez-se aqui a opção sistemática de adotar na íntegra as definições e conceitos de Bassanezi.

As setas contínuas indicam a primeira abordagem do problema. O processo dinâmico de aperfeiçoamento do modelo é representado pelas setas tracejadas, pois as etapas citadas acima podem ser repetidas iterativamente já que, mesmo relacionado ao mesmo tema, qualquer nova pergunta ou modificação da pergunta inicial dá início a uma nova modelagem, causando a obtenção de um novo modelo. Conforme Bassanezi (2006, p. 387) “todo modelo sempre poderá vir a ser modificado e melhorado, basta que se pergunte: e se ...?”

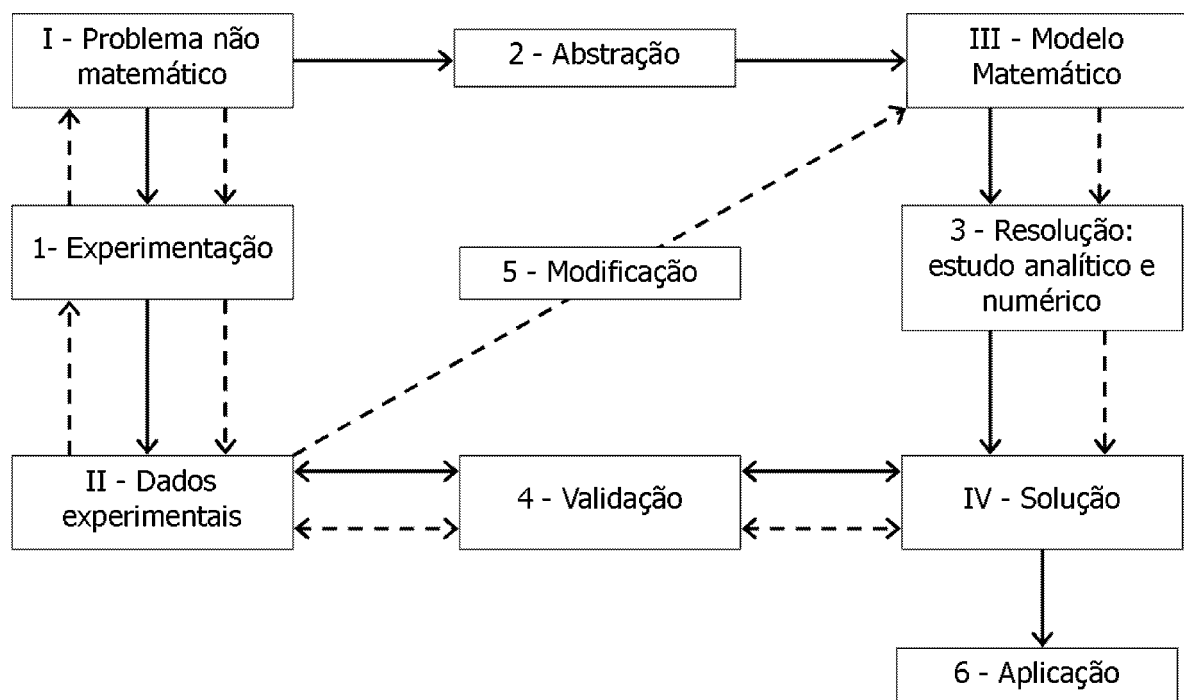


Figura 3.1: Processo de modelagem matemática.

A estrutura empregada para a formulação de modelos não precisa ser modificada em virtude da complexidade do problema inicial. Na verdade, todas as etapas devem ser cumpridas mesmo quando a situação motivadora parece ser *a priori* bastante trivial. Respeitar com disciplina tais etapas garante a qualidade do resultado final e a assimilação dos conceitos e técnicas matemáticas utilizados em cada processo. Assim,

não se limita a Modelagem Matemática a tópicos de Matemática do ensino superior, pois, com as adaptações necessárias, estudantes de níveis iniciais também podem se favorecer dessa estratégia.

Algumas propostas de utilização da Modelagem Matemática para o ensino do conteúdo previsto para as séries de ensino fundamental surgem em trabalhos desenvolvidos por alunos e colaboradores de Bassanezi. Uma delas é aproveitar a construção da maquete de uma residência como fator de motivação para o ensino-aprendizagem de tópicos de Geometria e operações com números inteiros e racionais.

4 Modelagem para o Ensino Básico

Como a maioria dos modelos dinâmicos acabam demandando a utilização de conceitos algébricos do estudo de funções, conteúdo tradicionalmente dedicado ao Ensino Médio, a Modelagem Matemática empregada no Ensino Fundamental quase sempre se baseia em modelos estáticos. É claro que ocorrem exceções, podendo analisar evoluções de fenômenos através de construção de tabelas e gráficos, sem a necessidade de rigor nos tópicos que estão sendo notadamente explorados.

Boa parte dos modelos estáticos se originam de problemas de cunho geométrico. Essas questões não são, de forma alguma, novidade no desenvolvimento humano, já que, nos primórdios da Matemática como ciência nas civilizações clássicas, os modelos são baseados em situações que envolvem a Geometria.

O desafio de medir corretamente distâncias, áreas e volumes seguiu a ordem corriqueira: problema prático - solução - abstração ou conjecturas teóricas - formulação (demonstração) de teses e axiomas.

Tópicos de Geometria Plana e Espacial como proporcionalidade de segmentos, semelhança de triângulos ou a relação existente entre o números de arestas, faces e vértices de um poliedro regular, apesar de terem suas raízes firmadas na civilização helenística de alguns séculos anteriores à era cristã, permeiam toda a sistematização da Matemática nos últimos quatro séculos e ainda hoje são transmitidos aos estudantes do nível fundamental.

A percepção das formas, de seus elementos constituintes, suas particularidades e suas similaridades é o objetivo de uma abordagem inicial da Geometria. A partir de observações e construções é possível comprovar certas hipóteses, levando à verificação dessas importantes proposições.

4.1 Construção da maquete de uma casa

Marineusa Gazzetta, licenciada em Matemática pela PUC-Campinas, atuou como professora da rede estadual de ensino e do Sistema Vocacional de Ensino na cidade de Rio Claro (SP), antes de ingressar no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação (IMECC) da UNICAMP - Campinas (SP) e de integrar o grupo PREMEM (Programa de Extensão e Melhoria do Ensino Médio) e a equipe do 1^o Mestrado em

Ciências, projeto do convênio OEA (Organização dos Estados Americanos) e MEC (Ministério da Educação e Cultura).

Sua prática docente sempre foi pautada na necessidade de adequar o conteúdo teórico a ser ensinado à realidade da comunidade em que a escola está inserida. Assim, sob a forma de projetos e com o auxílio de professores das demais áreas, desenvolvia suas atividades com os alunos. Esta sua experiência foi essencial para a elaboração, junto ao PREMEM, entre 1974 a 1984, de materiais didáticos, inicialmente para as Séries Iniciais, denominados Iniciação a Matemática (três volumes I - II - III) e, posteriormente, na forma de módulos, aplicando conteúdos de Geometria, Funções e Equações para estudantes do Ensino Fundamental.

Durante a década de 1980, nos cursos de especialização de professores, foi uma importante colaboradora de Bassanezi, o que a motivou a defender, sob sua orientação, no programa de Pós-graduação da UNESP de Rio Claro, a dissertação intitulada *A modelagem como estratégia de aprendizagem na matemática em cursos de aperfeiçoamento de professores*.

Uma das atividades sugerida e executada por Gazzetta com enfoque nos estudantes das séries iniciais do Ensino Fundamental foi a construção da maquete da escola, abordando conceitos e problemas sobre formas, medidas e técnicas operatórias, aliadas a comentários mais abrangentes a respeito do contexto sócio-cultural em que se encontrava a escola.

Dois outros professores, também alunos de Bassanezi, experimentaram estratégia semelhante em sala de aula. Maria Salett Biembengut, estimulada pela possibilidade do uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino defendida por Bassanezi e sua equipe, desenvolve e aplica, em 1986, esta proposta em uma classe da 5^a série do ensino fundamental, da rede pública de ensino do município de Mogi Guaçu-SP.

Dionísio Burak que, orientado por Bassanezi, obteve o título de Mestre em Educação Matemática, em 1987, no programa de pós-graduação da UNESP, câmpus de Rio Claro, apresentando um trabalho intitulado *“Uma metodologia alternativa para o ensino de Matemática na 5^a série”*, descreve um projeto realizado com professores do Ensino Fundamental dos municípios paranaenses de Laranjeiras do Sul, Pitanga e Guarapuava.

A partir da proposta inicialmente defendida e descrita por Gazzetta, Biembengut e Burak desenvolvem a possibilidade de apresentação e aprimoramento de conceitos aritméticos e geométricos constituintes do conteúdo previsto para o primeiro ciclo da Educação Fundamental:

- unidades de medida de comprimento (múltiplos e submúltiplos);
- números racionais (decimais e frações);
- operações com números decimais;
- operações com frações;
- proporções;
- divisores (máximo divisor comum), múltiplos (mínimo múltiplo comum);

- unidades de medida de área (múltiplos e submúltiplos);
- cálculo de áreas de figuras planas (quadrado, retângulo, paralelogramo, triângulo);
- cálculo aproximado de áreas de figuras irregulares;
- unidades de medida de volume e de capacidade (múltiplos e submúltiplos)
- cálculo de volumes de paralelepípedos.

Ainda outros conceitos da Geometria plana como paralelismo, perpendicularidade e ângulos, bem como operações voltadas para questões financeiras como custo, lucro e salários puderam ser implementados e desenvolvidos com os participantes desses projetos, conseguindo, ainda, outro resultado importante: o envolvimento dos pais de alunos na elaboração dos trabalhos.

Biembengut descreve ainda outras propostas de Modelagem Matemática voltadas para as séries do Ensino Fundamental em sua dissertação de Mestrado, também sob orientação de Bassanezi, com o título “*Modelação matemática como método de ensino-aprendizagem de matemática em cursos de 1^o e 2^o graus*”.

Não serão apresentadas as minúcias das atividades realizadas por Gazzeta, Burak e Biembengut em suas pesquisas, já que o enfoque da presente pesquisa é o estudo dos modelos matemáticos desenvolvidos por Bassanezi e seus alunos que tenham possível aplicação no ensino de Matemática em cursos superiores.

Nesses cursos universitários, mesmo não sendo da área das ciências exatas, uma disciplina bastante encontrada na grade curricular é a Estatística, comumente associada a estudos de probabilidade. Quando sua apresentação segue um roteiro didático apoiado somente em um livro com conceitos e exercícios de aplicação imediatos, a assimilação costuma ser precária. As experiências encontradas nas monografias dos cursos liderados por Bassanezi mostram uma maneira mais peculiar, visando partir de uma situação que seja conhecida pelos alunos e extrair daí a sistematização de técnicas e conceitos. O próximo capítulo traz um exemplo selecionado de tal abordagem.

5 Estatística

Aqueles que pretendem utilizar a Modelagem Matemática em sua atividade de ensino devem estar prontos e aptos para lidar com algumas práticas que são intrinsecamente ligadas à Estatística. Pode ser definida a Estatística como “um conjunto de métodos especialmente apropriado para o tratamento de dados numéricos afetados por uma multiplicidade de causas” (YULE, apud MEMÓRIA, 2004), ou seja, compete à Estatística fornecer métodos para coleta, organização, descrição, análise e interpretação de dados e para a utilização dos mesmos na tomada de decisões.

5.1 Aspectos históricos

Sua origem histórica é denunciada por sua etimologia; a Estatística tratava inicialmente apenas de informações que diziam respeito à administração política, econômica e militar de países (*status*=estado). Seu surgimento como ciência, no entanto, ocorreu entre os séculos XVII e XVIII, sendo que não há certeza sobre quem deve ser aceito como seu criador. Alguns nomes já propostos foram os dos alemães Hermann Conring (1606-1681), Gottfried Achenwall (1719-1782) e Johann Peter Süssmilch (1707-1767), bem como dos britânicos John Graunt (1620-1674) e William Petty (1623-1687).

Achenwall produziu obras que tratavam das características sociais, políticas e econômicas dos diferentes estados, na ciência já denominada *Statistik*. Süssmilch era um religioso, sendo seu principal trabalho “*The Divine order in the circumstances of the human sex, birth, death and reproduction*”, publicado em 1712, carregado de informação teológica e doutrinária. Porém, o trabalho mais antigo que pode ser visto como a primeira tentativa de tratar formalmente dados a respeito de um fenômeno social é “*Natural and Political Observations upon the Bills of Mortality*”, publicado por Graunt em 1662.

Todos esses cientistas citados trataram de aspectos filosóficos, políticos e sociais daquilo que viria a ser conhecido como Estatística. As bases matemáticas para tal desenvolvimento foram formuladas por Blaise Pascal (1623-1662), Pierre de Fermat (1601-1665), Carl Friederich Gauss (1777-1855) e Abraham de Moivre (1667-1754).

Pascal e Fermat, entre outros tantos trabalhos desenvolvidos, preocuparam-se com um estudo que, apesar de sua origem mítica e lúdica, impulsionou o desenvolvimento

daquilo que hoje é conhecido como Teoria de Probabilidades. Gauss, por volta de 1794, estabeleceu formalmente o método dos mínimos quadrados, de importância fundamental para o processamento de amostras, suavização e ajuste de curvas. De Moivre já efetuava cálculos relativos a seguros de vida, por volta do ano de 1720 e analisou, em sua obra “*The Doctrine of Chances*”, de 1738, a distribuição normal, que busca uma aproximação de distribuições binomiais, com amostras muito grandes.

Outro nome que não pode deixar de ser mencionado é o de Karl Pearson (1857-1936), estatístico inglês, que foi um dos maiores defensores e protagonistas do estabelecimento da Estatística como uma disciplina independente e reconhecida no âmbito científico, tendo sido fundador, em 1911, do primeiro departamento de Estatística no mundo, o Department of Applied Statistics na University College London. Pode-se perceber a influência de Pearson em inúmeras teorias fundamentais para o desenvolvimento dessa ciência, como regressão linear e correlação, classificação das distribuições, teste Chi-quadrado, teste de significância estatística, coeficientes de correlação e de assimetria.

Nos trabalhos de Modelagem Matemática a aquisição e organização de dados representa um papel fundamental, já que toda a construção do modelo pode se mostrar infrutífera se os dados que estiverem sendo manipulados forem errôneos ou, sob certos aspectos, inadequados ao objetivo proposto.

5.2 Definições e procedimentos

A seguir, são apresentados alguns conceitos em Estatística, necessários para um bom entendimento do exemplo que será abordado na seção seguinte.

Desvio-padrão é uma medida de dispersão indicada na mesma unidade da variável de interesse e é calculada como a raiz quadrada da variância: $s_x = \sqrt{s_x^2}$.

Variância também é uma medida de dispersão dada pela média dos quadrados das diferenças dos valores em relação à sua média, isto é, dado um conjunto de n valores

$$x_i: s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Covariância entre duas variáveis x e y ($cov(x, y)$) é dada pelo produto de suas variâncias.

Considerando as variáveis x e y calcula-se o coeficiente de correlação linear de Pearson pela expressão:

$$r = \frac{cov(x, y)}{s_x s_y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

Usando a representação abreviada dos somatórios

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}),$$

e tomando

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^n (x_i y_i) - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n}$$

e

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n} \text{ e } S_{yy} = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^2}{n},$$

temos:

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} \cdot S_{yy}}} = \frac{n \sum_{i=1}^n (x_i y_i) - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{\left(n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2\right) \cdot \left(n \sum_{i=1}^n y_i^2 - (\sum_{i=1}^n y_i)^2\right)}}$$

Teste de independência

Segundo Costa Neto (1979), esse teste é empregado quando existem duas ou mais variáveis qualitativas de interesse e segue o procedimento comum aos testes de hipóteses, isto é:

- designar por H_0 a hipótese que afirma que as variáveis são independentes.
- designar por H_1 a hipótese alternativa, ou seja, as variáveis não são independentes, apresentando algum grau de associação entre si.
- efetuar os cálculos relacionados à estatística do teste;
- concluir pela aceitação da hipótese principal ou de sua complementar, sob um certo grau de significância.

A estatística utilizada é dada pela expressão:

$$\chi_v^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{O_{ij}^2}{E_{ij}} - n \quad (5.1)$$

em que

χ_v^2 é a estatística de teste com v graus de liberdade;

r é o número de linhas da tabela;

s é o número de colunas da tabela;

O_{ij} é a frequência observada na interseção da linha i com a coluna j ;

E_{ij} é a frequência esperada na interseção da linha i com a coluna j , segundo o modelo testado;

$n = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s O_{ij}$ é o número de elementos da população (amostra).

A função χ^2 é de vital importância no estudo da estatística, sendo aplicada em inúmeras demonstrações e testes e é definida como:

$$f(\chi_v^2) = \begin{cases} \frac{(\chi_v^2)^{\frac{v}{2}-1} \cdot e^{-\frac{\chi_v^2}{2}}}{2^{\frac{v}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} & \text{se } \chi_v^2 \geq 0 \\ 0 & \text{se } \chi_v^2 < 0. \end{cases}$$

$\Gamma(x)$ é a função *gamma* definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$$

que não é nada mais que uma generalização da noção de fatorial, pois, se x for inteiro, $\Gamma(x) = (x - 1)!$.

A figura 5.1 apresenta a representação gráfica da função densidade de probabilidade χ^2 para alguns valores de v .

Frequência de um dado valor de uma variável é o número de vezes que esse valor foi observado em um estudo ou experimento.

Classes de frequência são intervalos contínuos de variação dos valores que a grandeza estudada pode assumir.

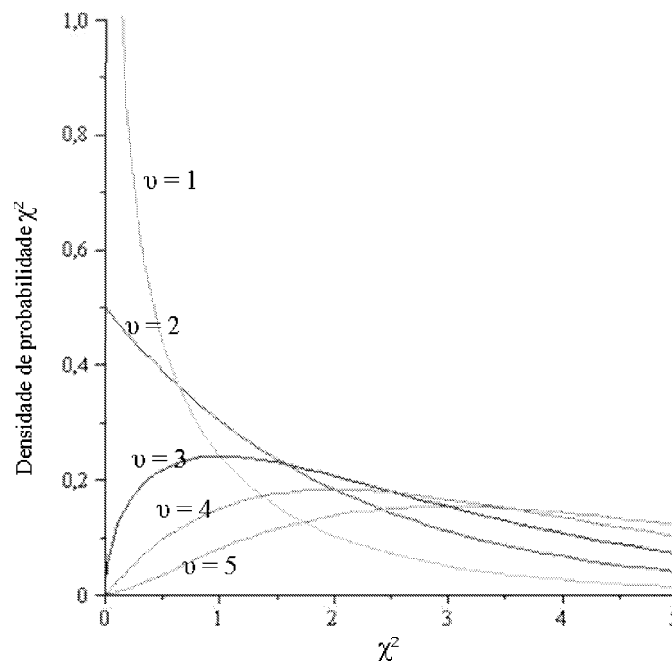


Figura 5.1: Função densidade de probabilidade χ^2

O cálculo das frequências esperadas em cada célula da tabela é feito por:

$$E_{ij} = np_{ij},$$

em que p_{ij} é a probabilidade, segundo o modelo, de se obter um valor da variável na classe considerada. Esta expressão resulta do fato de que cada frequência observada O_{ij} terá, para uma população infinita, distribuição binomial com parâmetros n e p .

Mas, se as variáveis forem realmente independentes, conforme prevê a hipótese H_0 , temos que:

$$p_{ij} = p_i \cdot p_j,$$

sendo p_i a probabilidade marginal correspondente à linha i e p_j a probabilidade marginal correspondente à coluna j .

Estas probabilidades deverão ser estimadas, no caso de uma amostra, pelas correspondentes frequências relativas p'_i e p'_j . Assim:

$$p'_i = \frac{f_i}{n} \text{ e } p'_j = \frac{f_j}{n}$$

$$\therefore E_{ij} = np_i \cdot p_j \cong n \frac{f_i}{n} \frac{f_j}{n} = \frac{f_i \cdot f_j}{n}$$

Temos, assim, uma regra prática para o cálculo das frequências esperadas: basta efetuar o produto do total da linha pelo total da coluna e dividir pela frequência total n .

Quanto ao número de graus de liberdade com que a variável de teste χ^2 deve ser considerada, sua determinação está relacionada ao número de frequências observadas O_{ij} que permanecem realmente “livres” após a determinação das frequências esperadas, que são determinadas com base na fixação dos totais marginais. Então, o número de valores O_{ij} com grau de liberdade será:

$$v = (r - 1)(s - 1),$$

pois sempre a última frequência observada a ser considerada em cada linha ou coluna estará atrelada ao total fixado em cada linha ou coluna e, portanto, não será um valor “livre”.

No caso bastante comum, em que os dados estão dispostos numa tabela 2×2 , o cálculo de χ^2 pode ser feito alternativamente pela expressão:

$$\chi_{v=1}^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(a + c)(b + d)(c + d)}, \quad (5.2)$$

sendo a , b , c e d as frequências observadas, organizadas conforme o esquema

a	b
c	d

5.3 Estatística e Desmatamento

No curso de Especialização realizado por Bassanezi e sua equipe na Universidade Federal do Mato Grosso, na cidade de Cuiabá, em 2005, um dos grupos, constituído por Carlos Antonio Moraes Machado, Cecília Pratts Meira Chaves, Edirlene Kerllem Rodrigues Silva, Ives Orlando Lopes da Silva, Márcia Elizabeth Rudnik Lobato e Marina Hilda Peres de Mattos optou por desenvolver sua pesquisa com o tema “*Sensoriamento Remoto - Desmatamento*”.

A escolha do tema demonstra inicialmente o interesse por uma questão que, apesar de ser bastante comentada e discutida em todo o país e também nos fóruns internacionais, é muito mais percebida e sofrida pelos habitantes da chamada Amazônia legal,

que compreende os estados do Acre, Amapá, Amazonas, Pará, Mato Grosso, Rondônia, Roraima, Tocantins e parte do Maranhão, abrangendo cerca de 5 milhões de km².

Nessa região identifica-se o anteriormente chamado *Arco do Desmatamento*, rebatizado por órgãos federais ligados ao Meio Ambiente para *Arco do Desenvolvimento Sustentável*, que designa uma ampla faixa do território que se localiza na fronteira das macrorregiões Norte e Centro-oeste, na transição entre o cerrado e a floresta Amazônica. Inicia-se no sul do Pará, percorre todo o norte dos estados do Tocantins, Mato Grosso, adentra Rondônia e encerra no Acre.

É uma área que historicamente sempre foi dedicada à agropecuária extensiva e, portanto, onde sempre foi frequente a prática do desmatamento da flora nativa no intuito de estabelecer região de pastagens, cultivo de soja, arroz e milho. Tal desmatamento ocorria de forma desordenada e sem fiscalização, basicamente com o uso de queimadas para a limpeza de capoeiras e áreas de cultivo após as colheitas.

Dadas as preocupações atuais com relação às questões ambientais e sobre o desenvolvimento sustentável com reposição, os recentes governos federais tem envidado esforços para a instalação de sistemas de vigilância e fiscalização de práticas ilegais e abusivas, paralelamente a programas de investimento em estratégias alternativas para a economia e desenvolvimento dessa região.

Nesse contexto, Chaves, Lobato, Machado, Mattos, Silva e Silva (2005), baseados em dados obtidos de institutos ligados a programas federais e estaduais de vigilância e levantamento de dados como o INPE (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais), INCRA (Instituto Nacional de Colonização e Reforma Agrária) e FEMA-MT (Fundação Estadual do Meio Ambiente do Mato Grosso), procuraram desenvolver modelos matemáticos para atender a questionamentos sobre o desmatamento.

Empregando conceitos de Estatística, pode ser respondida a seguinte questão:

Qual a influência, no processo de desmatamento, das seguintes atividades: lavoura temporária, lavoura permanente e criação de gado bovino?

Os dados, obtidos pelos autores, são apresentados a seguir na forma tabular e na disposição gráfica:

Ano	Desmatamento	Lavoura Temporária e Permanente
1996	0,441	0,568
1997	0,818	0,645
1998	1,509	0,762
1999	2,125	0,949
2000	2,514	1,268

Tabela 5.1: Desmatamento e Lavoura Temporária e Permanente.

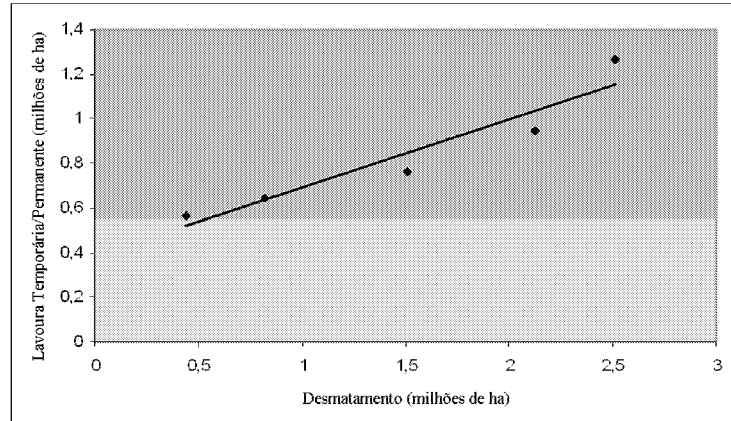


Figura 5.2: Desmatamento e Lavouira Temporária e Permanente.

A partir desses dados, calcula-se o chamado coeficiente de correlação linear de Pearson, que indica a maior ou menor tendência dos pontos a se agruparem segundo uma reta e é dada pela razão entre a covariância e os desvios-padrão das variáveis estudadas, obtendo $r = 0,950971$.

Na tabela e gráfico seguintes apresentam-se os dados que relacionam o desmatamento com a criação de gado bovino, com o respectivo coeficiente de correlação calculado.

Ano	Desmatamento	Criação de gado bovino
1996	0,441	4,970
1997	0,818	5,493
1998	1,509	5,894
1999	2,125	6,231
2000	2,514	7,047

Tabela 5.2: Desmatamento e Criação de gado bovino (em milhões de ha).

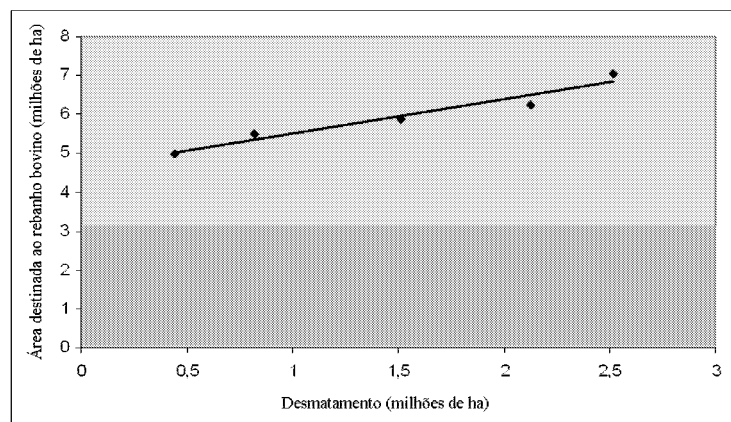


Figura 5.3: Desmatamento e área destinada à criação de gado bovino.

Neste caso, o coeficiente de correlação é $r = 0,970844$.

Os coeficientes de correlação, apresentam indícios de que as atividades estudadas influenciam no processo do desmatamento, no entanto, para responder a questão enunciada, será realizado um estudo pouco mais elaborado, que é o teste de independência usando tabelas de contingência.

Retornando à questão proposta, o objetivo é verificar se são independentes as variáveis *desmatamento* e *lavoura temporária/permanente* e, numa verificação semelhante, se são independentes *desmatamento* e *criação de gado bovino*.

As hipóteses testadas têm como base os dados obtidos na série temporal relacionada à situação do Arco do Desenvolvimento Sustentável, conforme Chaves e outros (2005).

Assim, dispostas as variáveis em tabelas 2×2 , temos:

Desmatamento	Lavoura Temporária/Permanente		Total
	abaixo de 20.072	acima de 20.072	
abaixo de 12.204	114	11	125
acima de 12.204	49	19	68
Total	163	30	193

Tabela 5.3: Frequências observadas.

Desmatamento	Lavoura Temporária/Permanente		Total
	abaixo de 20.072	acima de 20.072	
abaixo de 12.204	106	19	125
acima de 12.204	57	11	68
Total	163	30	193

Tabela 5.4: Frequências esperadas.

Para estes valores, tomam-se como hipóteses principal e alternativa:

H_0 : a relação entre as variáveis *desmatamento* e *lavoura temporária/permanente* é de independência.

H_1 : a relação entre as variáveis *desmatamento* e *lavoura temporária/permanente* não é de independência.

Empregando quaisquer das equações 5.1 ou 5.2, com $v = 1$, calcula-se a variável de teste $\chi_1^2 = 10,91$. Tomando um nível de significância igual a 5%, obtém-se um valor crítico de 3,841 ($\chi_{crítico}^2 = \chi_{1;5\%}^2 = 3,841$). Este valor crítico é facilmente obtido em tabelas apresentadas em livros específicos, como por exemplo Costa Neto (1979).

Como o valor obtido é maior que o valor crítico, decide-se, com 5% de significância, pela rejeição de H_0 , isto é, há *dependência* na relação entre as variáveis *desmatamento* e *lavoura temporária/permanente*.

Analogamente, para a situação que envolve *desmatamento* e *rebanho bovino*, pode ser estabelecida uma tabela e cálculos para o teste de hipóteses.

Desmatamento	Rebanho bovino		Total
	abaixo de 134.709	acima de 134.709	
abaixo de 12.204	87	38	125
acima de 12.204	38	30	68
Total	125	68	193

Tabela 5.5: Frequências observadas.

Desmatamento	Rebanho bovino		Total
	abaixo de 134.709	acima de 134.709	
abaixo de 12.204	81	44	125
acima de 12.204	44	24	68
Total	125	68	193

Tabela 5.6: Frequências esperadas.

Para estes valores, tomam-se como hipóteses principal e alternativa:

H_0 : a relação entre as variáveis *desmatamento* e *rebanho bovino* é de independência.

H_1 : a relação entre as variáveis *desmatamento* e *rebanho bovino* não é de independência.

Empregando quaisquer das equações 5.1 ou 5.2, com $v = 1$, calcula-se a variável de teste $\chi_1^2 = 3,580$. Como anteriormente, o valor crítico é igual a 3,841, com um nível de significância de 5%.

Como o valor obtido é menor que o valor crítico, decide-se, com 5% de significância, pela aceitação de H_0 , isto é, a variável rebanho bovino é *independente* da variável desmatamento.

A partir desses testes de hipóteses, pode-se concluir, dentro dos níveis de erro aceitos, que a lavoura temporária e permanente têm influência sobre a área de desmatamento no Arco do Desenvolvimento Sustentável, enquanto a atividade pecuária se desenvolve independentemente do aumento da área devastada. Certamente, a qualidade das conclusões obtidas está fortemente atrelada à confiabilidade das informações disponíveis para análise, no entanto, no contexto do ensino de Estatística para cursos de nível superior, a modelagem realizada é extremamente profícua, pois coloca em prática os conceitos e procedimentos estudados teoricamente na resolução de um problema proposto pelos próprios estudantes.

Em algumas situações, no entanto, o fenômeno que se deseja modelar não favorece a obtenção de uma série temporal de dados numéricos, elemento essencial para uma abordagem que faça uso da Estatística. De acordo com Bassanezi (2006), há modelos classificados como *estáticos* e, para esses casos, a Geometria é o ramo da Matemática em que se buscam as ferramentas necessárias para o desempenho do modelo.

6 Geometria Aplicada

A Geometria é um dos ramos da Matemática que nasceu para atender a necessidades práticas geradas pelo desenvolvimento da sociedade humana. A medição de terras para o plantio, a construção de moradias, a confecção de itens bélicos ou de artefatos de engenharia (pontes, estradas), tudo isso demandava um conhecimento sobre as figuras geométricas que pudessem ser utilizadas como modelos dos objetos reais.

Posteriormente, a Geometria ganha um aspecto mais aperfeiçoado. Buscando organizar os conhecimentos já desenvolvidos e sistematizá-los, foi empregado uma estrutura oriunda da Filosofia, surgindo então os axiomas, os postulados e as demonstrações com a retórica e a lógica tão cara aos gregos. Assim, há matemáticos que passam a desenvolver a Geometria sob uma ótica puramente teórica e formalista, enquanto outros desejam sempre associá-la aos demais campos científicos, notadamente a Física e as Engenharias.

Pela essência da Modelagem Matemática, a Geometria é vista sob esse segundo aspecto, visando seu emprego a fenômenos reais, porém, sem detrimento algum do embasamento teórico que sustenta a formulação dos modelos. Por exemplo, se num determinado objeto real que se deseja modelar for perceptível um formato que se assemelhe a um triângulo retângulo, serão utilizadas todas as relações métricas e trigonométricas que se sabem válidas para tal ente geométrico, apresentando, sempre que se fizer necessário, os antecedentes teóricos (axiomas, postulados e teoremas) que garantem a validade dos cálculos efetuados.

6.1 Geometria e Abelhas

Em um dos trabalhos pioneiros do primeiro curso de Modelagem Matemática em Guarapuava, no ano de 1986, o tema proposto para a modelagem foi ‘abelhas’. O grupo de pós-graduandos formado por João Rosa Müller, Marcos Flávio da Cunha, Osvaldo Deucher, Rui Branco e Vicente Bellaver, dedicou-se a explorar o assunto, formulando, entre outras, a questão “por que a secção transversal de um alvéolo é um hexágono?”

Porém, como já foi citado, nos primeiros cursos de Especialização desenvolvidos por Bassanezi, as monografias abordavam tópicos específicos e, neste caso, o tópico desenvolvido era o Cálculo Diferencial e Integral, ficando, então, esta questão de Geometria

sem um estudo aprofundado.

No entanto, o problema é retomado pelo próprio Bassanezi (BASSANEZI, 2006) e por sua orientanda Catharina de Oliveira Corcoll Spina (SPINA, 2002), em sua dissertação de Mestrado do programa de pós-graduação em Educação Matemática da UNESP (câmpus de Rio Claro), procurando, então, apresentar ‘justificativas’ matemáticas para o formato dos alvéolos das colmeias.

Os recipientes, denominados alvéolos, têm a forma de um prisma hexagonal regular (faces laterais iguais e ângulos entre as faces iguais) aberto numa extremidade e formando um ápice triédrico na outra face. (BASSANEZI, apud SPINA, 2002)

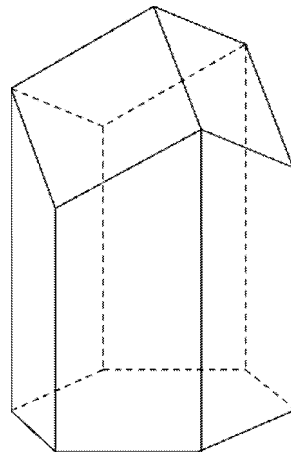


Figura 6.1: Alvéolo

Assim, algumas perguntas podem ser propostas:

- Por que a base é hexagonal?
- Qual o ângulo formado entre as faces do ápice triédrico e por que essa medida?

Para solucionar a primeira das questões, deve ser verificado que o corte transversal de um favo representa um mosaico com a repetição de hexágonos regulares. É latente na observação da natureza a economia de recursos, buscando a otimização de espaços, a redução de consumo de energia, tendo em vista a sobrevivência, perpetuação e, segundo as teorias evolucionistas, o aprimoramento da espécie. Assim, toda a região plana da secção transversal do favo deve ser plenamente aproveitada.

Traduzindo para uma linguagem matemática, os polígonos que são reproduzidos na construção do mosaico observado no corte transversal do favo devem ser de tal forma que completem todo o plano. Chamamos esse processo de *pavimentação* do plano, que é a ação de cobrir uma região plana, denominada *mosaico* com uma mesma figura, chamada de *molde* (em nosso estudo, um polígono regular), sem deixar espaços vazios, nem ter figuras interseccionadas. (BASSANEZI, 2006).

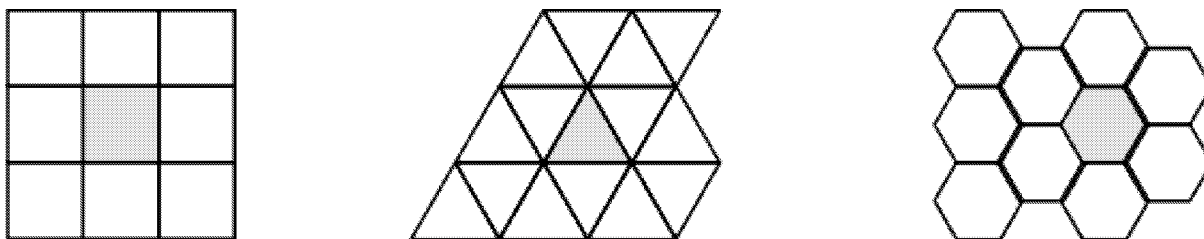


Figura 6.2: Possíveis configurações de um favo.

Pode ser enunciada, então, a seguinte proposição:

Apenas três polígonos regulares podem ser utilizados para pavimentar o plano: o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono.

Todo polígono regular pode ser inscrito em um círculo, sendo seus lados cordas, de medida ℓ , congruentes. Assim, dado um polígono regular de n lados inscrito em um círculo de centro O e raio r , ele pode ser dividido em n triângulos isósceles de base ℓ , lados r . Em cada um desses triângulos, o ângulo v do vértice é igual a $v = \frac{360^\circ}{n}$ e os ângulos da base valem $\alpha = \frac{\theta}{2}$, sendo θ o ângulo interno do polígono.

Dada a relação $\theta = 180^\circ - v$, temos

$$\alpha = \frac{\theta}{2} = \frac{180^\circ - v}{2} = \frac{90^\circ(n-2)}{n}, \text{ com } \frac{360^\circ}{v} = n, n \in \mathbb{N}.$$

Um polígono regular pode se propagar, formando um mosaico, se $\frac{360^\circ}{\theta}$ for um número inteiro positivo. Este número nos dá a quantidade de polígonos que têm vértice comum. (basta observar que, dado um vértice comum a n polígonos que cobrem uma região, deve ser verificado $n \cdot \theta = 360^\circ$, para se obter um encaixe perfeito).

Como $\theta = 2\alpha$, usando a equação $\alpha = \frac{90^\circ(n-2)}{n}$, obtemos

$$\frac{360^\circ}{\theta} = \frac{360^\circ n}{180^\circ(n-2)} = \frac{2n}{n-2} \text{ com } n \in \mathbb{N}, n \geq 3.$$

Assim, um polígono regular de n lados pode formar um mosaico no plano se, e somente se, $\frac{2n}{n-2}$ for um número inteiro positivo, divisor de 360, com $n \geq 3$.

Sabemos que θ deve ser menor que 180° pois θ é o ângulo interno do polígono. Por outro lado, o polígono regular de menor número de lados é o triângulo equilátero, $n = 3$ e, neste caso, temos $\theta = \frac{360^\circ(n-2)}{2n} = \frac{360^\circ(3-2)}{6} = 60^\circ$.

Como θ cresce quando n cresce, devemos ter então:

$$60^\circ \leq \theta < 180^\circ.$$

Dentre os divisores de 360, os valores possíveis que θ pode assumir são 60° , 72° , 90° e 120° .

Para $\theta = 72^\circ$, temos

$$\frac{360^\circ}{72^\circ} = 5 = \frac{2n}{n-2} \implies 2n = 5n - 10$$

ou seja, $n = \frac{10}{3} \notin \mathbb{N}$.

Isto significa que não podemos ter um mosaico do plano formado somente de pentágonos regulares, o que leva à conclusão que somente podemos ter 3 polígonos regulares para pavimentar o plano: triângulo equilátero ($\theta = 60^\circ$), quadrado ($\theta = 90^\circ$) e hexágono ($\theta = 120^\circ$).

A mesma conclusão pode ser obtida se considerarmos que

$$\frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (n-2) \text{ divide } 4, \text{ logo,}$$

$$n-2 = 1, \text{ ou } n-2 = 2 \text{ ou } n-2 = 4, \text{ assim: } n \in \{3, 4, 6\}.$$

Verificada essa proposição, surge a questão: se os alvéolos poderiam ter bases triangulares equiláteras, quadradas ou hexagonais, por que a ‘escolha’ das abelhas recai sobre esse último formato?

Como já mencionado, é nítido na natureza e no comportamento da maioria dos seres vivos a busca pelo aproveitamento dos recursos com o máximo rendimento. A grandeza que se pretende maximizar nesse caso é a área da base do alvéolo que irá proporcionar o maior volume e, portanto, capacidade para o armazenamento de maior quantidade de mel.

Calculando-se a área das regiões limitadas por um triângulo equilátero, um quadrado e um hexágono de perímetro fixado p , obtemos:

$$\text{Triângulo equilátero: } A = \frac{\left(\frac{p}{3}\right)^2 \sqrt{3}}{4} \cong 0,0481p^2;$$

$$\text{Quadrado: } A = \frac{p^2}{16} = 0,0625p^2;$$

$$\text{Hexágono: } A = \frac{3\left(\frac{p}{6}\right)^2 \sqrt{3}}{2} \cong 0,0722p^2.$$

Portanto, para um mesmo perímetro, dentre as três figuras propostas, a que apresenta a maior área é o hexágono.

O processo de Modelagem Matemática pressupõe a possibilidade de explorar, a partir de um tema único proposto, diversos aspectos da Matemática, então, apesar da questão do formato dos alvéolos ter um cunho prioritariamente geométrico, pode-se também aproveitá-la para analisar a seguinte proposição, que fará uso de conceitos de Análise:

Dado qualquer polígono regular, o valor numérico de seu perímetro coincide com o de sua área se, e somente se, seu apótema vale 2.

Seja um polígono regular, inscrito em um círculo com perímetro p e apótema a . Esse polígono pode ser visto como n triângulos isósceles de base $\ell = \frac{p}{n}$ e altura a . Então a área do polígono será dada por:

$$A = n \cdot \frac{pa}{2n} = \frac{pa}{2}$$

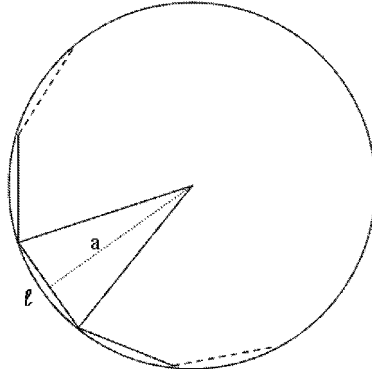


Figura 6.3: Polígono regular inscrito.

Respeitadas as unidades de medidas adequadas, se $p = A$, temos $a = 2$, conforme enunciado.

Agora, se tomarmos um polígono regular de n lados cujo apótema vale 2, em cada um dos n triângulos isósceles de base $\ell = \frac{p}{n}$ e altura a , em que ele pode ser dividido, considerando o ângulo da base de medida α , temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{a}{\frac{\ell}{2}} = \frac{4n}{p} \text{ e, como } \alpha = \frac{180^\circ - \frac{360^\circ}{n}}{2}, \text{ então } \frac{4n}{p} = \operatorname{tg} \left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n} \right) \\ \frac{4n}{p} &= \operatorname{cotg} \left(\frac{180^\circ}{n} \right) \implies p = \frac{4n}{\operatorname{cotg} \left(\frac{180^\circ}{n} \right)} = 4n \operatorname{tg} \left(\frac{180^\circ}{n} \right) \end{aligned}$$

Como a área do polígono é numericamente igual a seu perímetro, segue que:

$$A_n = 4n \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{n} \right)$$

com a medida angular dada em radianos.

Observando a área de alguns polígonos, com apótema igual a 2, observam-se os seguintes valores:

Polígono	n	A_n
triângulo equilátero	3	20,7846
quadrado	4	16,0000
pentágono	5	14,5308
hexágono	6	13,8564
decágono	10	12,9967
100-ágono	100	12,5705
1000-ágono	1000	12,56641
10000-ágono	10000	12,56634

Tabela 6.1: Polígonos com apótema igual a 2.

Nota-se que a sequência (A_n) , $n \geq 3$ é decrescente conforme n e é limitada pela área de um círculo de raio 2, que é o limite de um polígono de n lados, com apótema

igual a 2, se considerarmos n assumindo um valor muito grande ($n \rightarrow \infty$).

No caso de n tomado como um valor muito grande, $\frac{\pi}{n}$ é um valor próximo de zero e torna-se válida a seguinte sentença:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \leq \frac{\pi}{n} \leq \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

Dividindo os dois primeiros termos da desigualdade por $\cos \frac{\pi}{n}$, tem-se:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \leq \frac{\frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}}$$

e

$$\frac{\pi}{n} \leq \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \leq \frac{\frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \Rightarrow \pi \leq n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \leq \frac{\pi}{\cos \frac{\pi}{n}}.$$

Pelo Teorema do Confronto (Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ e $x_n \geq z_n \geq y_n$ para todo n suficientemente grande, então $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$) pode-se afirmar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{\cos \frac{\pi}{n}} \right) = \pi, \text{ então:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \right) = \pi.$$

Assim, voltando ao cálculo da área dos polígonos com apótema igual a 2, temos $A_n = 4n \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{n} \right) \rightarrow 4\pi \simeq 12,566371 \dots$, quando $n \rightarrow \infty$.

Ainda pode ser mencionado que a garantia da convergência da sequência $\{A_n\}_{n \geq 3}$ deve-se a sua monotonicidade (decrecente) e limitação (área do círculo de raio 2).

Área do alvéolo

Cada alvéolo, como já foi afirmado, tem o formato de um poliedro de base hexagonal, faces retangulares, ortogonais à base e culminado por um ápice triédrico.

A questão proposta agora é minimizar a área do alvéolo, correspondendo à mínima utilização de cera necessária à produção dos favos para o armazenamento do mel. Para maior facilidade de estudo, e devido à simetria existente, podemos calcular a área total determinando a área de uma das faces laterais e de um dos losangos que constituem o ápice, conforme sugere Spina (2002, p. 98-103), sendo a área total A dada pela soma de seis vezes a área de um dos trapézios e três vezes a área de um dos losangos.

Cada face lateral corresponde a um trapézio retângulo de bases h_1 e h_2 , com altura igual a ℓ , congruente ao lado da base hexagonal. Considere, ainda, a medida do ângulo agudo formado entre a altura do alvéolo e uma das faces losangonais igual a θ .

Na figura 5.4, observe que $\overline{bH'} = h_2 + \overline{BH'} = h_1$.

Dos triângulos retângulos congruentes VHD e $BH'D$, temos

$$\overline{BH'} = \overline{VH}$$

e

$$\cotg \theta = \frac{\overline{VH}}{\overline{HD}},$$

mas como

$$\overline{HD} = \frac{\ell}{2},$$

então

$$\overline{BH'} = \overline{VH} = \frac{\ell}{2} \cotg \theta,$$

assim,

$$h_2 = h_1 - \frac{\ell}{2} \cotg \theta.$$

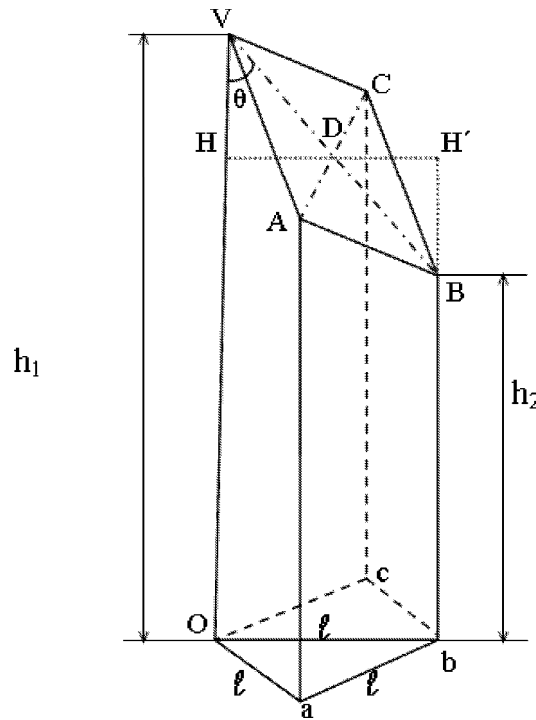


Figura 6.4: Prisma de base losangonal correspondente a um terço do alvéolo.

É sabido que a área de um trapézio é igual ao produto da semi-base pela altura, então:

$$A_t = \frac{h_1 + h_2}{2} \ell = \left[\frac{h_1 + \left(h_1 - \frac{\ell}{2} \cotg \theta \right)}{2} \right] \ell = \ell h_1 - \frac{\ell^2}{4} \cotg \theta.$$

Para determinar a área de um dos losangos que compõem o ápice triédrico, determinamos a área de um dos quatro triângulos retângulos que se apresentam quando traçamos \overline{BV} e \overline{AC} suas diagonais e posteriormente quadruplicamos tal quantidade.

Para isso, temos que \overline{CD} , que corresponde à altura de um triângulo equilátero de lado ℓ vale $\frac{\sqrt{3}}{2} \ell$ e $\overline{VD} = \frac{\overline{HD}}{\text{sen } \theta} = \frac{\ell}{2 \text{sen } \theta}$. (Basta observar o triângulo retângulo VHD).

Assim a área do triângulo VCD é igual a:

$$\frac{\overline{CDVH}}{2} = \frac{1}{2} \frac{\ell}{2 \text{sen } \theta} \frac{\sqrt{3}}{2} \ell = \frac{\sqrt{3} \ell^2}{8 \text{sen } \theta}$$

Portanto, a área de uma das faces losangonais que formam o ápice é:

$$A_\ell = \frac{\sqrt{3} \ell^2}{2 \text{sen } \theta}$$

A área lateral total do alvéolo é então:

$$A = 6 \cdot A_t + 3 \cdot A_\ell = 6 \left(\ell h_1 - \frac{\ell^2}{4} \cotg \theta \right) + 3 \frac{\sqrt{3} \ell^2}{2 \operatorname{sen} \theta}$$

$$A = 6 \ell h_1 + \frac{3}{2} \ell^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{sen} \theta} - \cotg \theta \right)$$

Como esta equação está expressa em função de ℓ , h_1 (valores dados) e θ , o problema passa a ser a determinação do valor de θ , ($0 < \theta < 90^\circ$) para o qual a expressão

$$T(\theta) = \left(\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{sen} \theta} - \cotg \theta \right) = \frac{\sqrt{3} - \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \text{ atinge um mínimo.}$$

Isso é garantido pela proposição que afirma que, dada uma função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, contínua e diferenciável, tal que $f'(x_0) = 0$, com x_0 ponto interior de A , então x_0 é um candidato a extremo (máximo ou mínimo) local da função.

A comprovação pode ser feita verificando a derivada segunda da função analisada. Se $f''(x_0) < 0$, x_0 é um ponto de máximo e se $f''(x_0) > 0$, x_0 é um ponto de mínimo.

Dessa forma, resta calcular o ponto θ^* que anula a primeira derivada de $T(\theta)$, sendo a derivada segunda nesse ponto negativa.

$$T'(\theta) = \frac{1 - \sqrt{3} \cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} = 0$$

como $0 < \theta < 90^\circ$, $\operatorname{sen} \theta > 0$, então:

$$1 - \sqrt{3} \cos \theta^* = 0 \Rightarrow \theta^* \cong 54,73561^\circ$$

$$T''(\theta) = \frac{\sqrt{3} - 2 \cos \theta + \sqrt{3} \cos^2 \theta}{\operatorname{sen}^3 \theta}$$

$$T''(\theta^*) = T''(54,73561^\circ) \cong 2,1213$$

Dessa forma, a função que determina a área do alvéolo tem seu menor valor, no intervalo de interesse, quando o ângulo formado entre as faces do ápice triédrico é aproximadamente igual a $54,73561^\circ$.

Volume do alvéolo

Ainda considerando a figura 5.4, pode ser observado que os tetraedros $VACH$ e $BACH'$ tem volumes iguais, graças às seguintes constatações:

- $VABC$ é um losango $\overline{VA} = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CV}$;
- já foi mostrado que $\overline{VH} = \overline{BH'}$; e
- os triângulos ACH e ACH' são congruentes.

O cálculo do volume do alvéolo é então simplificado, pois basta que se calcule o volume de um prisma de base hexagonal de lado ℓ e altura $h = \overline{OH}$, ou seja, adotando que o apótema a é igual a 2:

$$V_{\text{alvéolo}} = A_b \cdot h = 6\ell h$$

Em um favo real, como o diâmetro médio do abdômem de uma abelha mede cerca de 4 mm, os alvéolos são construídos com o apótema da base de medida próxima a 2 mm, o que faz com que $\ell \cong 2,3$ mm. Considerando, ainda, dados empíricos, a altura $h = 10$ mm, temos que o volume médio de um alvéolo é igual a

$$V = 6 \cdot 2,3 \cdot 10 = 138 \text{ mm}^3$$

Os modelos apresentados são bons exemplos da exploração de um tema simples, oriundo de uma mera observação da natureza, mas que pode levar a estudos significativos e ao aprimoramento dos estudantes no que tange a conceitos de Geometria e Análise.

7 Cálculo Diferencial e Integral

7.1 Aspectos históricos

7.1.1 Integral: a ferramenta para o cálculo de áreas e volumes

Os primeiros problemas que apareceram na História relacionados com as integrais são os problemas de quadratura. Quando os antigos geômetras começaram a estudar as áreas de figuras planas, eles as relacionavam com a área do quadrado, por ser essa a figura plana mais simples. Assim, buscavam encontrar um quadrado que tivesse área igual à da figura em questão.

A palavra quadratura é um termo antigo que se tornou sinônimo do processo de determinar áreas. Quadraturas que fascinavam os geômetras eram as de figuras curvilíneas, como o círculo, ou figuras limitadas por arcos de outras curvas.

As lúnulas - regiões que se assemelham com a lua no seu quarto-crescente - foram estudadas por Hipócrates de Chios, 440 a.C., que realizou as primeiras quadraturas da História. Antifon, por volta de 430 a.C., procurou encontrar a quadratura do círculo através de uma seqüência infinita de polígonos regulares inscritos. Tal ideia genial originou o que hoje é chamado de método da exaustão.

Nesse contexto, por volta do ano 225 a.C., Arquimedes descobriu que a área da região limitada por uma parábola cortada por uma corda qualquer, é igual a $\frac{4}{3}$ da área do triângulo que tem a mesma altura e que tem a corda como base. Outra contribuição de Arquimedes foi a utilização do método da exaustão para encontrar a área do círculo, obtendo uma das primeiras aproximações para o número π .

A próxima contribuição para o Cálculo Integral somente ocorreu ao final do século XVI quando a Física, com os atuais estudos de Mecânica e Astronomia levou vários matemáticos, como Luca Valerio, Johannes Kepler, Pierre Fermat e Cavalieri a pensar no cálculo de áreas de superfícies e volumes de sólidos como uma soma infinita de componentes ou segmentos “indivisíveis”.

Ainda outro aspecto que motivou o estudo do Cálculo como hoje o conhecemos, foi o problema do movimento, que já estava sendo estudado desde a época de Galileu. Tanto Torricelli como Barrow consideraram o problema do movimento com velocidades variadas. A derivada da distância era a velocidade e a operação inversa, partindo da

velocidade, levava à distância. A partir desse problema envolvendo movimento, a ideia de operação inversa da derivada desenvolveu-se naturalmente e a ideia de que a integral e a derivada eram processos inversos era familiar a Barrow.

A partir de então, já se torna perceptível a inseparabilidade do estudo das integrais e das derivadas que, até então vinham sendo tratadas distintamente.

Newton continuou os trabalhos de Barrow e Galileu sobre o estudo do movimento dos corpos e desenvolveu os métodos das *fluxions* - derivação - e *fluents* - integração - utilizando-os na construção da mecânica clássica. Para Newton, a integração consistia em achar *fluents* para um dado *fluxion* considerando, desta maneira, a integração como inversa da derivação.

Leibniz, diferentemente de Newton, usava a integração como uma soma, de uma maneira bastante parecida à de Cavalieri. Daí vem o símbolo - um 's' longo - para representar *summa*. Segundo ele, “represento a área de uma figura pela soma das áreas de todos os retângulos infinitesimais definidos pelas ordenadas e pelas diferenças entre as abscissas . . . e portanto eu represento em meu cálculo a área da figura por \int ”.

Ambos desenvolveram o Cálculo Integral separadamente, entretanto Newton via o Cálculo como geométrico, enquanto Leibniz o via mais como analítico. Os trabalhos de Leibniz sobre o Cálculo Integral foram publicados em 1684 e em 1686 sob o nome *Calculus Summatorius*. O nome Cálculo Integral foi criado por Johann Bernoulli e publicado pela primeira vez por seu irmão mais velho Jacques Bernoulli em 1690.

7.1.2 Derivadas: reta tangente e velocidade instantânea

O aparecimento e desenvolvimento do Cálculo Diferencial estão ambos intimamente ligados à questão das tangentes. Desde a época dos Gregos antigos, já se conhecia a reta tangente como sendo uma reta que intercepta uma curva em um único ponto, generalizando a situação observada no caso da circunferência. Na realidade, essa ideia é muito imprecisa e precisamos de um tratamento bem mais rigoroso para a questão da tangente à uma curva.

Arquimedes e Apolônio utilizavam métodos geométricos, que diferiam entre si, para a determinação de tangentes a parábolas, elipses e hipérbolas. Vários outros métodos para resolver o problema de encontrar a tangente a uma curva em um ponto foram desenvolvidos ao longo da história.

Na realidade, após os Gregos, o interesse por tangentes a curvas reapareceu no século XVII, como parte do desenvolvimento da geometria analítica. Como equações eram então utilizadas para descrever curvas, a quantidade e variedade de curvas estudadas aumentou bastante em comparação àquelas conhecidas na época clássica. A introdução de símbolos algébricos como uma ferramenta para estudar a geometria das curvas também contribuiu para o desenvolvimento do conceito de derivada. Com o tempo, o tratamento se tornou mais algébrico e menos geométrico, proporcionando um contínuo progresso no desenvolvimento dos conceitos de funções, derivadas, integrais e outros

tantos tópicos relacionados ao Cálculo.

Fermat elaborou um método algébrico para determinar os pontos de máximo e os pontos de mínimo de uma função. Ele encontrava geometricamente os pontos onde a reta tangente ao gráfico tinha inclinação zero, ou seja, buscava os pontos em que o coeficiente angular da reta tangente era nulo. Escreveu a Descartes explicando o seu método que é basicamente utilizado ainda hoje.

Newton, ao estudar as órbitas dos planetas, sugeriu que se fossem formadas por segmentos de retas, ao invés de curvas, seriam muito mais fáceis de serem estudadas. Por que não considerá-las então como um conjunto de pequenas retas que, aproximadamente, representariam o movimento daquela curva? Este simples pensamento significou para Newton o começo de uma longa e frutífera produção científica que englobou, entre outras coisas, as derivadas, as integrais e toda a base da mecânica clássica.

Leibniz, em 1672, enquanto vivia em Paris, encontrou-se com Huygens e com ele aprendeu muito e recebeu muitos conselhos que constituíram um forte impulso para que viesse a desenvolver o seu Cálculo Diferencial e Integral. Nesse período, ele estabeleceu contato com muitos dos matemáticos respeitados da Royal Society e, dentre eles, destaca-se Barrow. Leibniz teve acesso aos seus trabalhos e estabeleceu um longo período de correspondências. Seu Cálculo Diferencial tinha uma fundamentação bem diferente daquele de Newton. Leibniz não estudou o movimento para chegar aos conceitos de derivada e integral. Ele pensou nas variáveis x e y como grandezas que variavam por uma sucessão de valores infinitamente pequenos. Introduziu dx e dy como a diferença entre esses valores sucessivos. Embora Leibniz não tenha usado como definição de derivada, ele sabia que representava o coeficiente angular da tangente.

Há um capítulo especial na história do Cálculo: uma longa e quase sempre inescrupulosa disputa entre Newton e Leibniz sobre quem havia “criado” o Cálculo. Ambos não pouparam acusações picantes para descrever o outro e os seus feitos e geraram uma discussão acalorada no meio científico da época sobre quem seria a mais importante autoridade em Cálculo. Essa situação chegou a tal ponto que os matemáticos que viviam no Reino Unido se distanciaram durante um período bastante longo dos matemáticos do continente. Enquanto o Cálculo “Leibniziano” ganhava cada vez mais adeptos na Europa - entre esses a família Bernoulli - os matemáticos da “ilha”, como dizem alguns historiadores, davam mais atenção às pompas e circunstâncias criadas para a cerimônia fúnebre de Newton na Abadia de Westminster. Durante ainda algum tempo, esses matemáticos ficaram um pouco “ilhados” e, quando voltaram a estabelecer relações com os europeus do continente, haviam não só perdido parte do avanço do Cálculo como também não compreendiam muito bem a notação “Leibniziana” então largamente utilizada.

“Como consequência da infeliz disputa entre Newton e Leibniz, os matemáticos britânicos ficaram de certa forma alienados dos trabalhos do continente (...) e o desenvolvimento da Matemática não conseguiu acompanhar o rápido progresso dos outros

países da Europa ao longo do século XVIII” (BOYER, 1996).

Apesar das diferenças, tanto Newton quanto Leibniz reconheceram até certo ponto a importância do “adversário”. Leibniz disse: “Considerando a Matemática desde o início do mundo até a época de Newton, o que ele fez é sem dúvida a melhor metade”. Newton, por sua vez, na primeira edição do *Principia*, admitiu que Leibniz possuía um método semelhante ao seu. Infelizmente, na terceira edição, após o ápice das desavenças, Newton retirou a referência a Leibniz.

7.1.3 Equações Diferenciais e de Diferenças

De várias maneiras, equações diferenciais são o coração da Análise e do Cálculo, dois dos mais importantes ramos da matemática nos últimos 300 anos. Equações diferenciais são uma parte integral ou um dos objetivos de vários cursos de graduação de cálculo. Como uma ferramenta matemática importante para ciências físicas, a equação diferencial não tem igual. Assim é amplamente aceito que equações diferenciais são importantes em ambas matemáticas, pura e aplicada.

Apesar de Leonhard Euler ser notadamente o maior contribuinte nesse estudo, existem vários contribuintes importantes, e aqueles que vieram antes de Euler foram necessários para que ele pudesse entender o Cálculo e a Análise necessários para desenvolver muitas de suas fundamentais.

A história das equações diferenciais surge, obviamente, simultaneamente com o nascimento do Cálculo, pois, a partir do momento em que se estabeleceram entendimento suficiente e notação para a derivada, esta logo apareceu em equações, porém as soluções eram raramente obtidas com simples manipulações algébricas.

A integral (antiderivada) e seu papel teórico no Teorema Fundamental do Cálculo ofereceu ajuda direta apenas quando as variáveis eram separadas, sendo esse método desenvolvido por Jakob Bernoulli e generalizado por Leibniz. Assim, estes pesquisadores iniciais do século XVII focalizaram estes casos especiais e deixaram um desenvolvimento mais geral das teorias e técnicas para aqueles que os seguiram.

Ao redor do início do século XVIII, as equações diferenciais tem uma ampla difusão em problemas vinculados à Astronomia e ciências físicas. Jakob Bernoulli estudou cuidadosamente e escreveu equações diferenciais para o movimento planetário, usando os princípios de gravidade e momento desenvolvidos por Newton. O trabalho de Bernoulli incluiu o desenvolvimento da catenária e o uso de coordenadas polares. Halley usou os mesmos princípios para analisar a trajetória de um cometa que hoje leva seu nome. O irmão de Jakob, Johann Bernoulli, foi provavelmente o primeiro matemático a entender o cálculo de Leibniz e os princípios de mecânica para modelar matematicamente fenômenos físicos usando equações diferenciais e a encontrar suas soluções. Riccati (1676-1754) começou um estudo sério de uma equação em particular, mas foi limitado pelas teorias do seu tempo para casos especiais da equação que leva hoje seu nome.

Leonhard Euler, tendo então o benefício dos trabalhos anteriores, associado ao

seu próprio estudo focado em funções, suas propriedades e definições, desenvolveu procedimentos para soluções de muitos tipos de equações. Foi o primeiro a entender as propriedades e os papéis das funções exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e muitas outras funções elementares. Euler também desenvolveu várias funções novas baseadas em soluções em séries de tipos especiais de equações diferenciais. Em 1739, desenvolveu o método de variação de parâmetros. Seu trabalho também incluiu o uso de aproximações numéricas e o desenvolvimento de métodos numéricos, os quais proveram “soluções” aproximadas para quase todas as equações.

Em 1728, Daniel Bernoulli usou os métodos de Euler para as equações diferenciais que modelam as oscilações percebidas em fenômenos físicos. Posteriormente, com motivações que surgiam de problemas da mecânica como o movimento de projéteis, pela primeira vez levando em conta novos fatores tais como resistência do ar e velocidades iniciais ou no estudo da difusão de calor, surgem as figuras de D’Alembert, Lagrange, Fourier e Laplace, tendo, este último, reconhecido a importância de Euler em sua área de estudo quando escreveu “Leia Euler, leia Euler, ele é nosso mestre”.

O próximo avanço importante neste assunto ocorreu no início do século XIX, quando as teorias e conceitos de funções de variáveis complexas se desenvolveram. Os dois contribuintes principais deste desenvolvimento foram Gauss e Cauchy. Gauss usou equações diferenciais para melhorar as teorias das órbitas planetárias e gravitação. Cauchy foi o primeiro a definir completamente as ideias de convergência e convergência absoluta de séries infinitas e iniciou uma análise rigorosa de cálculo e equações diferenciais.

Na metade do século XIX, uma nova estrutura era necessária para atacar sistemas de mais de uma equação diferencial, e Jacobi desenvolveu a teoria de determinantes enquanto Cayley criou uma teoria para operações com matrizes em 1854. No final desse mesmo século, os principais esforços em equações diferenciais se moveram para um plano teórico. Em 1876, Lipschitz (1832-1903) desenvolveu teoremas de existência para soluções de equações diferenciais de primeira ordem, enquanto Hermite buscou desenvolver a teoria de funções e soluções de equações.

O próximo a construir fundamento teórico foi Bernhard Riemann, sendo seu trabalho uma contribuição importante para soluções de equações diferenciais em dinâmica e física. Sonya Kovalevsky (1850-1891), a maior matemática antes do século XX, com um trabalho baseado em teoria de equações diferenciais parciais e um resultado central sobre a existência de soluções que ainda leva seu nome.

Com o início do século XX, com participação decisiva de Carl David Tolmé Runge (1856-1927), Martin Wilhelm Kutta (1867-1944), Richard Courant (1888-1972) e Garrett Birkhoff (1884-1944) desenvolveram-se métodos numéricos mais robustos e eficientes para dar soluções rápidas e eficientes para sistemas de equações diferenciais, gerados pelo estudo de geometrias complexas, de grande escala.

Henri Poincaré (1854-1912) produziu mais de 30 livros técnicos sobre mecânica ce-

leste e física-matemática, a maioria destes com o uso e análise de equações diferenciais. As áreas nascentes nesse século e estendidas contemporaneamente, como a Álgebra Linear e a Topologia, agregam novos conceitos, possibilitando generalização e elegância cada vez maiores nesse estudo de equações diferenciais, que pretende modelar com a linguagem simbólica da Matemática a própria essência sempre variável da Natureza, conforme o filósofo Heráclito (MONDIN, 1980): “Tudo flui e nada permanece; tudo se afasta e nada fica parado ... Você não consegue se banhar duas vezes no mesmo rio, pois outras águas e ainda outras sempre vão fluindo ...”.

7.2 Cálculo, equações de diferenças, equações diferenciais e Abelhas

No trabalho pioneiro do Curso de Especialização ministrado por Bassanezi em Guarapuava-PR, no ano de 1986, destacou-se, conforme já mencionado no capítulo 6, a monografia de autoria de Müller, Cunha, Deucher, Branco e Bellaver da qual foram extraídas as informações e modelos que se seguem.

Estudo do crescimento da população de abelhas

A partir de dados obtidos em textos sobre apicultura, define-se uma colmeia como um grupo de abelhas alojadas em um habitat, com população equilibrada e a presença de três castas. A constituição de uma colmeia e os dados necessários para o estudo de sua dinâmica populacional são:

- uma rainha;
- 60.000 a 80.000 abelhas;
- de 0 a 400 zangões.

A longevidade das abelhas varia conforme a casta:

- Rainha: até cinco anos;
- Operária: entre 38 e 42 dias;
- Zangão: até 80 dias.

A longevidade da operária pode variar em função do clima e a do zangão é determinada pela abundância da florada ou de alimento na colmeia.

A capacidade de postura de uma rainha vai até 3.000 ovos por dia, sendo limitada pelo espaço disponível para a postura, pela qualidade genética da rainha e pelas condições florais (alimento) e climáticas do local.

Um enxame novo, recém alojado, conta normalmente com 8.000 a 12.000 abelhas.

De posse desses dados, é possível estabelecer os seguintes parâmetros para se iniciar a modelagem:

- quantidade inicial de abelhas na colmeia: 10.000 indivíduos;
- postura da rainha: 2.000 ovos por dia;
- longevidade das operárias: 40 dias.

Por simplificação, será desconsiderada inicialmente a quantidade de zangões. A quantidade de abelhas num certo instante t , dado em dias pode ser expresso pela equação

$$y_t = y_{t-1} + 2000 - 0,025y_{t-1}$$

ou

$$y_t = 0,975y_{t-1} + 2000,$$

sendo y_{t-1} a população no dia anterior, $y_0 = 10000$ e $\frac{1}{40} = 0,025$ a taxa de mortalidade diária.

De posse dessa equação e fazendo uso de algumas poucas linhas de programação (na época, utilizando-se da linguagem BASIC em um microcomputador TK 90X), é possível obter uma série de dados numéricos indicando a população a qualquer instante t .

Apenas pela verificação desses valores já se pode perceber uma tendência de estabilização da população a partir de um determinado valor de t , já que os aumentos diários do tamanho da população diminuem da seguinte forma:

- aos 90 dias, há um aumento de 189 abelhas em relação ao número de abelhas no dia anterior;
- aos 150 dias, há um aumento de 42 abelhas em relação ao número de abelhas no dia anterior;
- aos 180 dias, há um aumento de 19 abelhas em relação ao número de abelhas no dia anterior;
- aos 210 dias, há um aumento de 9 abelhas em relação ao número de abelhas no dia anterior;
- aos 240 dias, há um aumento de 4 abelhas em relação ao número de abelhas no dia anterior;
- aos 300 dias, há um aumento de 1 abelha em relação ao número de abelhas no dia anterior;
- aos 330 dias, a diferença entre a quantidade de abelhas em relação ao dia anterior é menor que uma unidade.

Assim, uma colmeia com uma rainha de potencial de postura de 2.000 ovos por dia, terá, depois de cerca de 10 meses, uma população de 80.000 abelhas.

Supondo a capacidade de postura da rainha com valores iguais a 500, 1.000 e 1.500 ovos por dia, nota-se que a população máxima atinge 20.000, 40.000 e 60.000 abelhas. Em cada um desses casos, quando se atinge a população máxima os nascimentos diários são equilibrados pelas mortes.

Como se determinar analiticamente a população máxima e o tempo necessário para atingi-la? Observa-se que a população está dada por:

$$y_t = k \cdot y_{t-1} + N. \quad (7.1)$$

Assim, analisando a variação populacional ao longo do tempo, temos:

$$y_1 = k \cdot y_0 + N$$

$$y_2 = k \cdot y_1 + N = k \cdot (k \cdot y_0 + N) + N = k^2 \cdot y_0 + k \cdot N + N$$

$$y_3 = k \cdot (k^2 \cdot y_0 + k \cdot N + N) + N = k^3 \cdot y_0 + k^2 \cdot N + k \cdot N + N$$

Usando o Princípio da Indução Finita, é possível mostrar que a solução de 7.1 é dada por:

$$y_t = k^t \cdot y_0 + k^{t-1} \cdot N + k^{t-2} \cdot N + \dots + k^2 \cdot N + k \cdot N + N, t \in \mathbb{N},$$

ou seja:

$$y_t = k^t \cdot y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} N \cdot k^i, \quad (7.2)$$

Conforme a equação 7.1, y_{t+1} pode ser dado por $y_{t+1} = k \cdot y_t + N$.

Supondo que 7.2 é válido para t ,

$$y_{t+1} = k \cdot \left(k^t \cdot y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} N \cdot k^i \right) + N$$

$$y_{t+1} = k^{t+1} \cdot y_0 + N + \sum_{i=0}^{t-1} N \cdot k^{i+1}$$

$$y_{t+1} = k^{t+1} \cdot y_0 + \sum_{i=0}^t N \cdot k^i,$$

que comprova a validade de 7.2 também para $t + 1$.

Salientando que $\sum_{i=0}^{t-1} k^i$ representa a soma dos termos de uma progressão geométrica com razão igual a k e primeiro termo igual a N , essa soma pode ser reescrita como $\frac{k^t - 1}{k - 1} \cdot N$. Assim, a solução dada por 7.2 pode ser escrita na forma:

$$y_t = k^t \cdot y_0 + \frac{k^t - 1}{k - 1} \cdot N,$$

sendo y_0 a população inicial N a capacidade de postura da rainha e $k = 1 - \bar{k}$ o índice de sobrevivência diária, já que \bar{k} indica a taxa de mortalidade diária.

Voltando aos parâmetros estipulados, temos a equação:

$$y_t = 0,975^t \cdot 10000 + \frac{0,975^t - 1}{0,975 - 1} \cdot 2000,$$

ou seja

$$y_t = -70000 \cdot 0,0975^t + 80000.$$

Tomando a população y como uma variável dependente do tempo t num dado intervalo contínuo, estabelece-se a função $y = f(t) = -70000 \cdot 0,0975^t + 80000$, que pode ser expressa como uma função exponencial:

$$f(t) = \alpha e^{\beta t} + y^*,$$

bastando tomar $\alpha = -70000$, $\beta = \ln 0,0975$ e $y^* = 80000$.

Passa-se então ao estudo minucioso dessa função, em todas as suas características:

Domínio: $Dom(f) = \{t \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$

Imagem: $Im(f) = \{y \in \mathbb{R}, 10000 \leq y \leq 80000\}$

Raízes: Como no intervalo $t \geq 0$, $y(t) \geq 10000$, não existem raízes.

Crescimento: $y(t)$ é crescente em todo o domínio, pois dados t_1 e t_2 pertencentes ao domínio, com $t_1 < t_2$, tem-se $f(t_1) = \alpha e^{\beta t_1} + y^* < \alpha e^{\beta t_2} + y^* = f(t_2)$

Também pode ser verificado pelo cálculo da derivada primeira $f'(t) = \alpha \beta e^{\beta t}$. Como $\alpha < 0$ e $\beta < 0$, $f'(t) > 0$ para todos os valores de t pertencentes ao domínio e, portanto, $f(t)$ é crescente.

Limites e assíntotas: Quando a t são atribuídos valores muito grandes $t \rightarrow \infty$, $e^{\beta t}$ assume valores próximos de zero, já que $\beta < 0$ e a função $f(t)$ se aproxima de y^* , isto é, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = y^*$

A assíntota é então a reta horizontal $y = y^* = 80000$ e não há assíntota vertical.

Concavidade do gráfico: tem concavidade voltada para baixo, já que $f''(t) = \alpha \beta^2 e^{\beta t}$, sendo $\alpha < 0$ e $\beta < 0$, $f''(t) < 0$ para qualquer valor pertencente ao domínio.

Após esse estudo preliminar, outras variáveis podem ser acrescentadas ao modelo. Por exemplo, como o período entre a postura dos ovos e o nascimento de abelhas é de 21 dias, então num enxame recém instalado, nesse período inicial não haverá nascimentos, apenas mortes das abelhas mais velhas. A função que representa a dinâmica populacional dessa população deve ser representada em dois intervalos subsequentes, de 0 a 21 dias e após o 21^o dia.

No primeiro intervalo $0 \leq t \leq 21$, teremos uma função notadamente decrescente dada por

$$y(t) = 10000 - 250t.$$

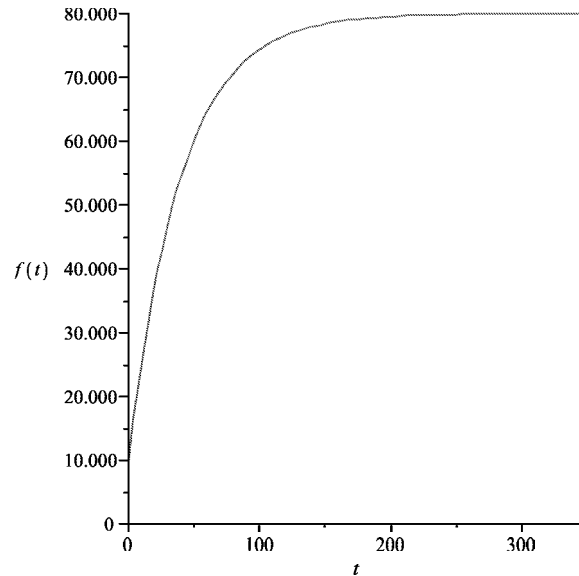


Figura 7.1: Gráfico da função $f_1(t) = -70000 \cdot 0,0975^t + 80000$.

A partir desse tempo $t > 21$, a função assume um comportamento crescente exponencial e dotado de uma assíntota horizontal, como já analisado anteriormente, sendo alterada apenas a população inicial y_0 , que agora corresponde à imagem da função $y(t) = 10000 - 250t$, quando $t = 21$, ou seja $y(21) = 4750$. A função, expressa em suas duas partes é, então:

$$f_2(t) = \begin{cases} 10000 - 250t & \text{se } 0 \leq t \leq 21 \\ -75250 \cdot e^{-0,025(t-21)} + 80000 & \text{se } t > 21. \end{cases}$$

correspondente ao gráfico abaixo:

Bassanezi (2006) comenta que, quando se escolhe um tema para o trabalho com modelagem, podem ser aproveitados conceitos de Matemática já familiares aos alunos ou aproveitar a oportunidade para a apresentação e treino de novas habilidades. Assim, para a mesma questão, outro modelo pode ser obtido se considerarmos, nos primeiros 21 dias, a variação da população de abelhas (mortalidade) proporcional à quantidade de abelhas a cada instante.

No período seguinte, $t > 21$ dias, o crescimento da colmeia é diretamente proporcional à diferença entre a população máxima e a população atual, significando que, se a colmeia ainda tem boas condições de ampliação (espaço, alimento) seu crescimento se dá de forma mais acelerada e, quanto mais próxima a população estiver de seu valor limítrofe, maior será a redução desse crescimento.

Isto é traduzido pelas expressões:

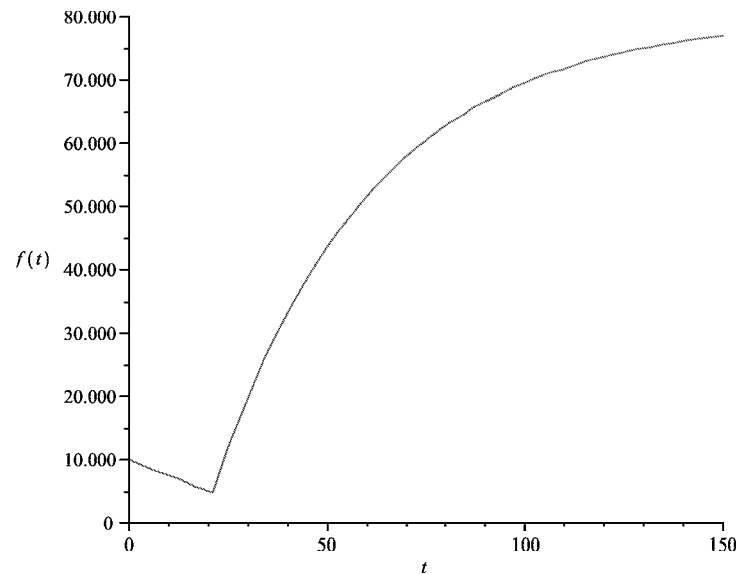


Figura 7.2: Gráfico da função $f_2(t)$.

$$\frac{dy}{dt} = \begin{cases} -k_1 y & \text{se } 0 \leq t \leq 21 \\ k_2(y^* - y) & \text{se } t > 21. \end{cases}$$

com $y_0 = 10000$, $y^* = 80000$, $k_1 = 0,025$ e $k_2 = \ln 0,975$.

Em cada um desses casos, podemos determinar a função $y(t)$, pelo método chamado de *separação de variáveis*.

Considerando

$$\frac{dy}{dt} = -k_1 y$$

e

$$\frac{dy}{y} = -k_1 dt.$$

Temos:

$$\int \frac{dy}{y} = \int -k_1 dt,$$

ou seja,

$$\ln y = -k_1 t + c,$$

que resulta em

$$y(t) = e^c \cdot e^{-k_1 t}.$$

Como $y_0 = 10000$, então $e^c = 10000$ e a função, no intervalo $0 \leq t \leq 21$ é

$$y(t) = 10000e^{-0,025t}.$$

No segundo intervalo $t > 21$, temos

$$\frac{dy}{dt} = k_2(y^* - y) \quad \frac{dy}{y^* - y} = k_2 dt.$$

Integrando, obtemos:

$$-\ln(y^* - y) = k_2 t + c$$

ou ainda

$$y(t) = y^* - e^c \cdot e^{-k_2(t-21)}.$$

Mas, para $t = 21$ dias, podemos assumir uma população de 8000 abelhas, pois tomando $t = 21$ na função anterior, obtemos um valor próximo de 6000, e temos, nesse dia, o nascimento de 2000 novas abelhas relativas aos ovos postos quando $t = 0$.

Assim, a função, no segundo intervalo, será dada por

$$y(t) = 80000 - 72000e^{-0,02532(t-21)}$$

O modelo completo será dado por:

$$f_3(t) = \begin{cases} 10000e^{-0,025t} & \text{se } 0 \leq t \leq 21 \\ 80000 - 72000e^{-0,02532(t-21)} & \text{se } t > 21. \end{cases}$$

cujo comportamento pode ser observado na próxima figura.

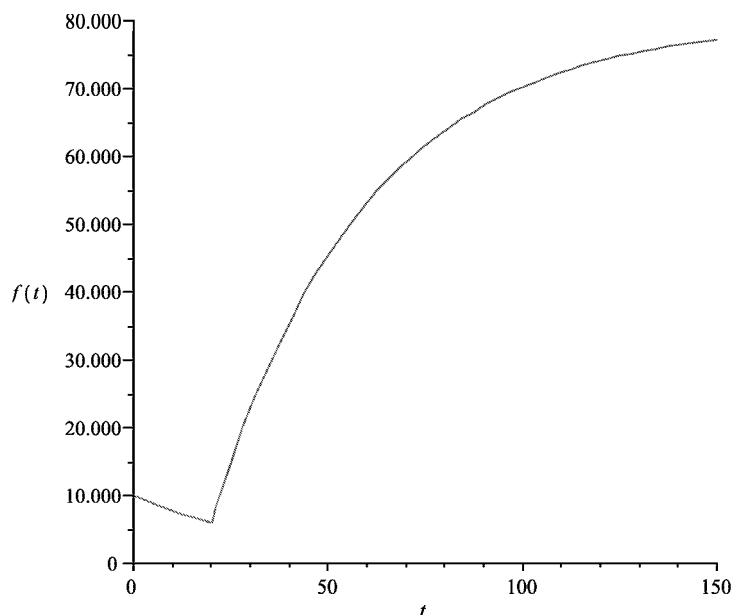


Figura 7.3: Gráfico da função $f_3(t)$.

7.3 Cálculo e Café

No curso de especialização em Modelagem Matemática e Etnomatemática vinculado à Pontifícia Universidade Católica de Campinas (PUC-Campinas), no ano de 1998, um dos grupos de participantes formado por Cléa Mendes da Silva, Marisa Ieda Arioli del Conti, Milton Rosa, Regina Célia Vialta e Rosângela Marisa Narciso Beraldo desenvolveu um trabalho tomando como tema um elemento importante tanto na cultura nacional como na história e na economia: o café.

Nessa monografia, os autores discorrem sobre a origem do cultivo do café em solo nacional, sua importância no estabelecimento da economia, bem como o aspecto social que envolve o preparo e a degustação desse, que pode ser considerado um dos produtos agrícolas mais relevantes para o nosso país.

Dentre os diversos modelos matemáticos desenvolvidos com base em informações obtidas sobre o café, será apresentado aqui, de forma mais detalhada, aquele que toma como ponto de partida uma questão sobre a produção cafeeira, buscando levantar conjecturas e realizar uma previsão coerente para o futuro. A pergunta apresentada é:

- Supondo que a área dedicada ao cultivo de café se estabilizará futuramente, qual será esse valor de estabilidade e quando ele ocorrerá?

Considerando a tabela, que apresenta a área colhida no período de 1980 a 1992 e o gráfico correspondente a esses pontos, nota-se um comportamento monótono (crescente) e sabe-se que essa grandeza é limitada, pois a área disponível é, no máximo, igual à soma de toda a área cultivável do país. Assim, é possível estimar o seu valor de estabilidade.

Ano	Área colhida	Ano	Área colhida
1980	2460	1987	3045
1981	2700	1988	3245
1982	2800	1989	3295
1983	2900	1990	3310
1984	3000	1991	3370
1985	3030	1992	3400
1986	3045		

Tabela 7.1: Área de colheita de café no período de 1980 a 1992.

O método empregado para isso é denominado método de Ford-Walford, assim chamado em homenagem a dois biólogos que estudavam o crescimento de peixes e consiste em dispor, os $k + 1$ dados reais obtidos em uma série temporal uma tabela com duas colunas, sendo que na segunda coluna os dados serão colocados deslocados de uma linha, conforme o exemplo abaixo:

A_0	A_1
A_1	A_2
\vdots	\vdots
A_t	A_{t+1}
\vdots	\vdots
A_k	A_{k+1}

Tabela 7.2: Método de Ford-Walford.

O ajuste linear $y = mx + n$, pode ser obtido pelo método dos quadrados mínimos, sendo os coeficientes m e n dados por:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^k x_i y_i - n \cdot \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^k x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2}$$

$$n = \bar{y} - m \cdot \bar{x},$$

considerando $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{k}$ e $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^k y_i}{k}$ as médias dos valores de x e y para um dado conjunto de pares ordenados (x_i, y_i) .

A partir de uma observação prévia da distribuição dos pontos obtidos nessa tabela, é propícia realizar um ajuste linear, obtendo uma equação do tipo $y = mx + n$. Cabe uma observação que tal ajuste poderia ser feito com base em qualquer outra curva (polinomial de grau maior ou igual a dois, trigonométrica etc.).

A partir da reta, é possível determinar o ponto $P^*(x^*, y^*)$, intercessão com a reta bissetriz dos quadrantes ímpares ($y = x$), que será a estimativa do valor de estabilidade.

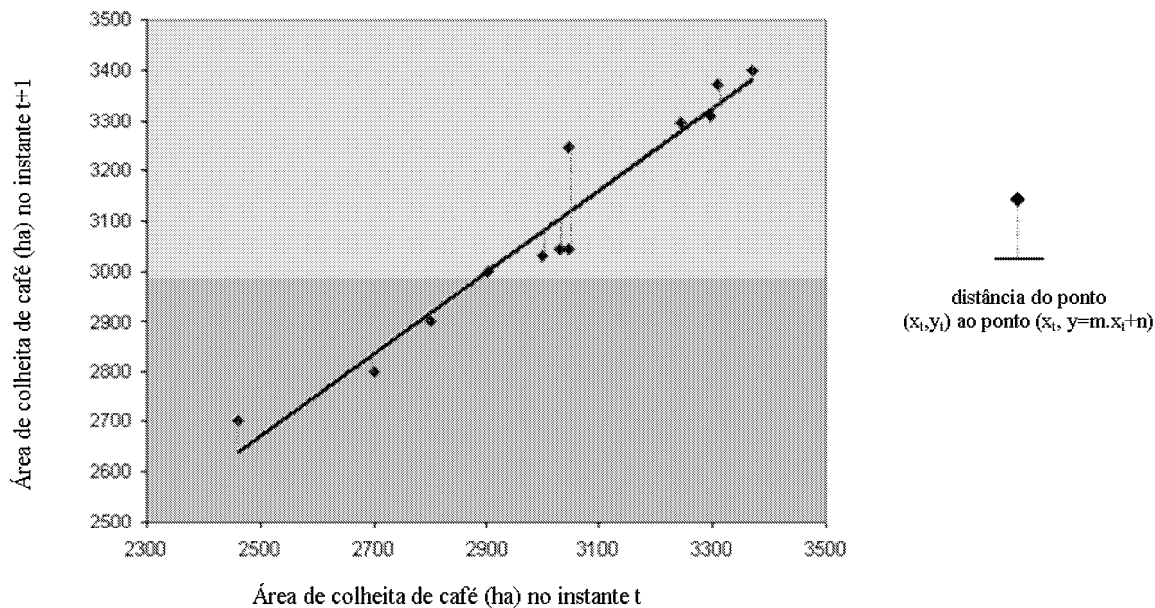


Figura 7.4: Método dos quadrados mínimos.

Tal método se baseia no fato de que, sendo a sequência de valores estritamente crescente e limitada, ela será convergente e, a partir do momento em que esse valor de estabilidade foi atingido, sempre se terá o valor no instante $t+1$ igual ao valor no instante t . Assim, considerando o ajuste feito por $y = mx + n$, a estabilidade ocorrerá a partir do instante em que $x = \frac{n}{1-m}$.

Obtém-se então, o valor $x^* = A^* \cong 3442$.

Com esses dados iniciais pode-se acrescentar às hipóteses iniciais a seguinte consideração: o aumento da área de colheita é proporcional à diferença entre o valor da área de estabilização (chamemos de A^*) e a área atual A_t . Tal assertiva é plausível, pois, se a área atual ainda for consideravelmente menor que a área máxima que será obtida, sua variação ocorrerá com maior velocidade que nas proximidades desse valor de estabilidade.

Esse comportamento pode ser verificado em diversas outras situações como o crescimento de populações (já visto anteriormente) ou de dimensões de seres vivos, cuja verificação ainda pode ser simplificada pela chamada lei de Alometria que estabelece que os órgãos cuja dimensão (massa, volume ou comprimento) variam durante os diferentes estágios de desenvolvimento de um indivíduo (planta ou animal) respeitam uma proporcionalidade nessas variações.

Assim temos que:

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = \beta \cdot (A^* - A_t) \\ A(0) = A_0 \text{ dado} \end{cases}$$

$$\frac{dA}{A^* - A_t} = \beta \cdot dt$$

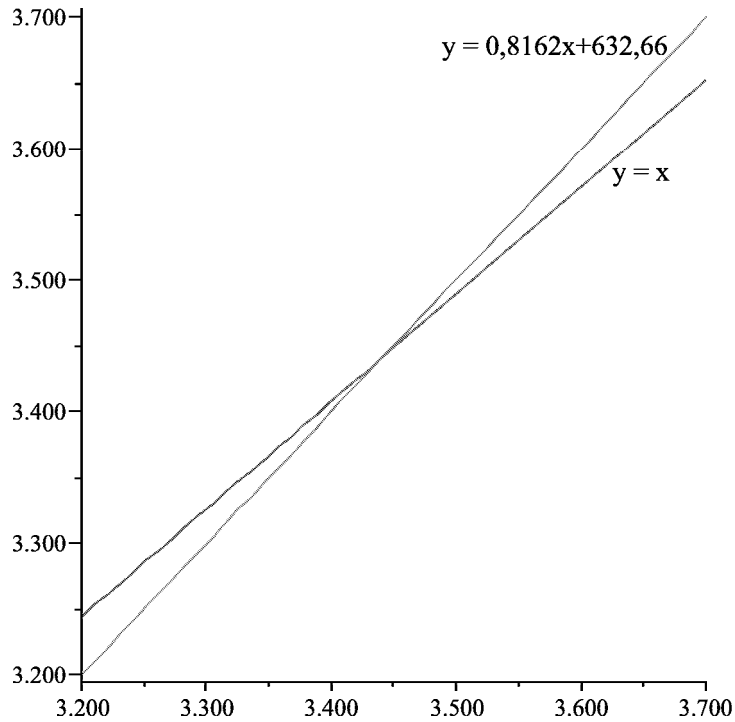


Figura 7.5: Determinação do ponto de estabilidade.

$$\int \frac{dA}{A^* - A_t} = \int \beta \cdot dt$$

$$-\ln(A^* - A_t) = \beta t + k$$

$$\ln(A^* - A_t) = -\beta t - k$$

ou ainda

$$e^{\ln(A^* - A_t)} = e^{-\beta t - k} = e^{-\beta t} \cdot e^{-k}$$

ou seja

$$A^* - A_t = e^{-\beta t} \cdot e^{-k}$$

Considerando a condição inicial $A(0) = A_0$, temos:

$$A^* - A_0 = e^{-k}$$

Assim, a expressão que modela o fenômeno da evolução da área em função do tempo é:

$$A_t = A^* - (A^* - A_0) \cdot e^{-\beta t}. \quad (7.3)$$

Baseado nos dados apresentados na tabela anterior, podemos determinar o valor de β por uma simples mudança de variável, chamando $z = \ln A_i$.

Dessa forma, a equação

$$A_t = A^* - (A^* - A_0) \cdot e^{-\beta t}$$

pode ser reescrita como

$$z = \beta t + \ln \left(\frac{A^*}{A^* - A_0} \right).$$

Com a mesma estratégia do ajuste linear, a partir dos mínimos quadrados, calcula-se o coeficiente β que ainda restava determinar, podendo finalmente escrever a expressão de A_t dado na equação 7.3:

$$A_t = 3442 - 983e^{-0,2327t}.$$

Como já mencionado, o modelo obtido será adequado na medida em que consegue apresentar valores próximos aos dados reais em instantes anteriores e, com maior importância, possibilitar a previsão do fenômeno em momentos futuros. No gráfico seguinte, são apresentados os valores reais \diamond e os valores dados pelo modelo \square .

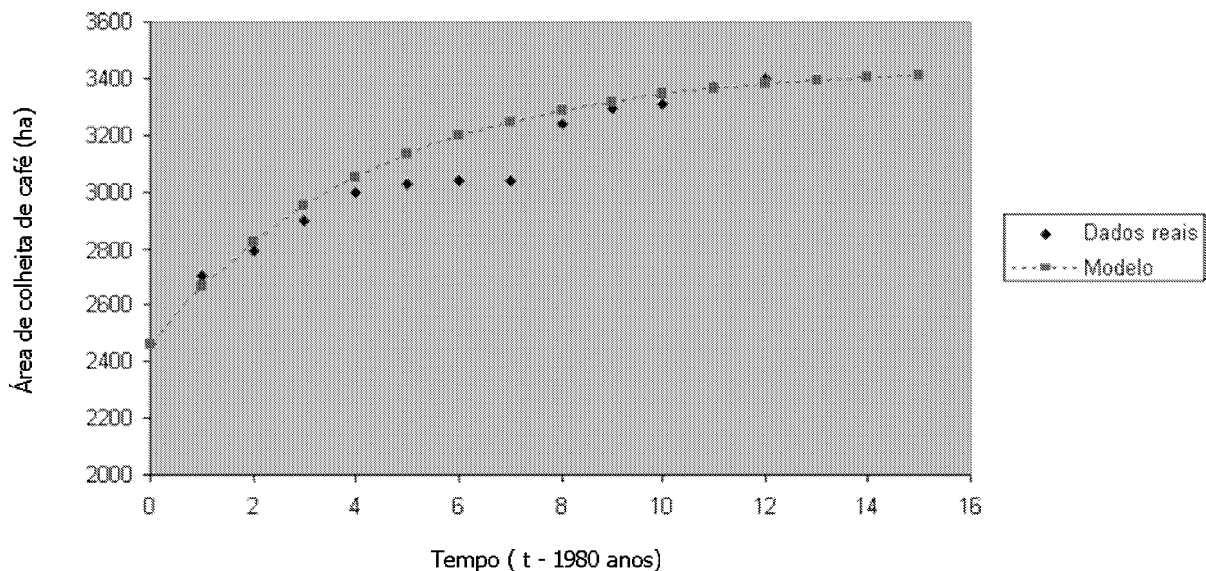


Figura 7.6: Área de colheita de café - dados reais e modelo.

No caso específico da produção de café, isso resulta, num cenário mais amplo, na determinação de investimentos públicos ou privados, criação de empregos, incentivo a novas pesquisas para o aprimoramento da produção, sendo que o bom modelo deve ser flexível para adaptações devidas a cada nova variável envolvida no problema.

8 Conclusão

A atualidade e o futuro da Modelagem Matemática

O movimento da Modelagem Matemática iniciado por Aristides Barreto, Ubiratan D'Ambrosio e desenvolvido com dedicação e responsabilidade por Rodney Bassanezi já se perpetua por trinta anos e se estabelece como um elemento importante na produção científica brasileira e nos cursos de graduação e pós-graduação, especialmente na formação básica de docentes ou em cursos de pós-graduação voltados à formação continuada.

No contexto da produção científica, é mister ressaltar o trabalho que vem sido desenvolvido, desde sua inauguração no ano de 2006, pela equipe do Centro de Referência de Modelagem Matemática no Ensino (CREMM), vinculado à Faculdade de Blumenau (FURB), idealizado e coordenado pela professora Maria Sallet Biembengut, que foi uma das inúmeras pessoas influenciadas pelo entusiasmo apresentado por Bassanezi nos cursos e palestras proferidas.

O objetivo do CREMM, nas palavras da pesquisadora Biembengut é “indicar o conhecimento produzido, permitindo aos interessados criar novos sentidos e relevantes conhecimentos. Esse Centro deve possibilitar uma geração de conhecimentos novos sobre questões educacionais, desenvolver mapas-contexto que levem a novas realidades, presentes, mas talvez incapazes de ganhar visibilidade significativa para a melhoria da Educação”. A partir do mapeamento de um histórico sobre os precursores da Modelagem Matemática, das atividades desenvolvidas, aliado à reunião bibliográfica de produções (teses, dissertações, monografias e artigos) e de disciplinas oferecidas em cursos regulares e de extensão, busca-se atingir o objetivo proposto.

Esse centro já catalogou quinze teses de doutorado, 88 dissertações de mestrado, 105 monografias de pós-graduação *lato sensu*, 31 trabalhos de conclusão de curso (TCC) e 49 de iniciação científica que apresentam temática diretamente relacionada à Modelagem Matemática. No que tange a artigos, são listados 82 em revistas científicas e 754 em anais de eventos.

Com relação aos eventos, merece especial destaque a Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM) cuja primeira edição ocorreu no ano de 1999 e, no ano da redação deste trabalho (2009), volta a reunir pesquisadores e entusiastas da Modelagem para discussões, questionamentos e troca de experiências

(VI CNMEM - realizado de 12 a 14 de novembro na Universidade Estadual de Londrina - PR).

Foram relacionados também doze artigos como capítulos de livros e quatro livros completos, sendo que, dentre estes, está certamente a obra de Bassanezi com extensa citação neste trabalho.

Abordando o outro aspecto do desenvolvimento da Modelagem como estratégia de ensino nessas três décadas de existência, ainda de acordo com Biembengut (2009), existem hoje, dentre instituições públicas e particulares, 413 cursos de formação de professores de Matemática no Brasil. Desses, 112 têm, na grade curricular do curso, uma disciplina com o título de Modelagem Matemática ou uma disciplina que aborde a estratégia de ensino através de modelos.

Os programas dessas disciplinas sugerem que, nas práticas de sala de aula, as propostas têm buscado encorajar os estudantes a se envolverem ativamente na sua aprendizagem; produzirem trabalhos a partir de necessidades, interesses, metas pessoais de forma desafiadora e talentosa e levarem a risco compromissos humanitários. Embora a modelagem matemática na formação de professores não possua um estatuto definido, existem regimentos que permitem guiar professores a desenvolverem ensino e pesquisa integrando a matemática a outras áreas do conhecimento; propiciando aos estudantes, em qualquer período de escolarização, aprender a fazer uso da matemática nas atividades cotidianas, fora do contexto escolar, despertando seus interesses por outras áreas do conhecimento, instigando seus sentidos imaginativos e críticos ao passar a fazer pesquisa, no sentido lato do termo, que ultrapassa o levantamento de dados, analisando estes dados com critérios, com fundamento. (JIANG, MCCLINTOCK e O'BRIEN, 2003; BIEMBENGUT, 2007)

Como já mencionado no capítulo 2, a participação direta ou indireta de Bassanezi numa parcela significativa desse rol de produções científicas pode ser comprovada pelos vários cursos ministrados e diversas orientações de pós-graduação já concluídas ou ainda em andamento. Cabe mencionar que, no ano em que este trabalho está sendo desenvolvido, o professor Bassanezi coordena e ministra mais um curso de especialização destinado a professores da rede estadual de ensino de São Paulo, na Universidade Federal do ABC (Santo André - SP), cuja estrutura é a mencionada no segundo capítulo deste trabalho e que visa oferecer a esses docentes a possibilidade de conhecer a possibilidade de empregar as estratégias da Modelagem Matemática no processo de ensino-aprendizagem, aprimorando seus conhecimentos matemáticos e aperfeiçoando sua prática educacional.

Há matemáticos que produzem Matemática de primeira linha, mas cujo trabalho é findo em si próprio, mas há aqueles cuja pesquisa e prática no desenvolvimento científico em prol da melhoria da qualidade da ciência nacional criam uma rede de descendentes e colaboradores. Comparativamente a uma árvore genealógica, cada orientando de Bassanezi, ou mesmo os participantes de cursos por ele ministrados que, com mente

aberta e pronta disposição se deixaram cativar por essa proposta motivadora do ensino da Matemática, tornaram-se, por sua vez, seus novos divulgadores.

Os trabalhos selecionados e apresentados do quinto ao sétimo capítulos são exemplares da aplicabilidade dos procedimentos de Modelagem Matemática em cursos de nível superior, evidenciados pela quantidade de cursos já realizados, em uma variedade de instituições em diversos estados brasileiros, alguns com colaboração de instituições de fomento. Tais cursos serviram para formar e incentivar centenas de profissionais na utilização dessa estratégia, disseminando o desejo de Bassanezi de fazer com que o momento dedicado ao aprendizado da Matemática seja prazeroso.

Estes adeptos, apesar de suas características pessoais, perpetuam e disseminam os conceitos e o *modus operandi* de Modelagem adotados e ensinados por Bassanezi, aperfeiçoando-os quando possível e estabelecendo, cada vez mais, esta prática como uma alternativa a ser adotada para levar os alunos dos diversos níveis e modalidades de ensino a gostar mais de Matemática, pois “acreditamos que este gosto se desenvolve com mais facilidade quando é movido por interesses e estímulos externos, vindos do ‘mundo real’ ” (BASSANEZI, 2006).

Referências

- [1] BASSANEZI, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2006. 389 p.
- [2] BASSANEZI, R. C., FERREIRA JR., W. C. *Equações Diferenciais com Aplicações*. São Paulo: Harbra Ltda, 1988. 572 p.
- [3] BIEMBENGUT, M. S. 30 anos de modelagem matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. *ALEXANDRIA: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 7-32, jul. 2009.
- [4] _____. *Modelação matemática como método de ensino-aprendizagem de matemática em cursos de 1^o e 2^o graus*. 1990. 158 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Câmpus de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro. 1990.
- [5] BELLAVER, V.; BRANCO, R.; CUNHA, M. F.; DEUCHER, O.; MÜLLER, J. R. *Projeto: apicultura*. 1986. 17 f. Monografia (Especialização em Ensino de Matemática) Fundação Faculdade Estadual de Filosofia, Ciências e Letras de Guarapuava, Guarapuava. 1986.
- [6] BERALDO, R. M. N.; CONTI, M. I. A.; ROSA, M.; SILVA, C. M.; VIALTA, R. C. *Café*. 1998. 202 f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica, Campinas. 1998.
- [7] BOYER, C. B. *História da matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- [8] BURAK, D. *Modelagem matemática: uma metodologia alternativa para o ensino de matemática na 5^a série*. 1987. 186 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Câmpus de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro. 1987.
- [9] CENTRO DE REFERÊNCIA DE MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO *Inform@cremm: Boletim informativo*. Disponível em: <http://www.furb.br/cremm/portugues/informcremm2.pdf>. Acesso em: 14 ago. 2009.

- [10] CHAVES, C. P. M.; LOBATO, M. E. R.; MACHADO, C. A. M.; MATTOS, M. H. P.; SILVA, E. K. R.; SILVA, I. O L. *Sensoriamento remoto - desmatamento*. 2005. 85 f. Monografia (Especialização em Modelagem Matemática no Ensino-aprendizagem) Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá. 2005.
- [11] COSTA NETO, P. L. *Estatística*. São Paulo: Blücher, 1977. 264 p.
- [12] DESCARTES, R. *O discurso do método*. Coleção “Os Pensadores”. São Paulo: Nova Cultural, 1996.
- [13] FEARNLEY-SANDER, D., Hermann Grassmann and the Creation of Linear Algebra. *American Mathematical Monthly*, Washington, v. 86, p. 809-817, 1979.
- [14] KATZ, V. J. *A history of mathematics: an introduction*, New York: HarperCollins College Publishers, 1993.
- [15] MEMÓRIA, J. M. P. *Breve História da Estatística*, Brasília: Embrapa Informação Tecnológica, 2004. 111 p.
- [16] MONDIN, B. *Introdução à filosofia*, São Paulo: Paulinas, 1980.
- [17] POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.
- [18] SPINA, C. O. C. *Modelagem matemática no processo ensino-aprendizagem do cálculo diferencial e integral para o ensino médio*. 2002. 162 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Câmpus de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro. 2002.
- [19] THOMAS, G. B. *Cálculo: tópicos de história*. Disponível em: <http://cwx.prenhall.com/bookbind/pubbooks/thomas br/medialib/indexb.html>. Acesso em: 05 set. 2009.