



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Campus de Bauru



# **IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS NA MODELAGEM DE PROBLEMAS DE CONVECÇÃO NATURAL EM CAVIDADES CILÍNDRICAS**

Alice Jordam

**Bauru**

**2010**

# **IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS NA MODELAGEM DE PROBLEMAS DE CONVECÇÃO NATURAL EM CAVIDADES CILÍNDRICAS**

Alice Jordam

Orientador: Prof. Dr. Vicente Luiz Scalon

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da UNESP – Campus de Bauru, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

**Bauru**

**2010**

Jordam, Alice.

Implementação do método das características na modelagem de problemas de convecção natural em cavidades cilíndricas / Alice Jordam, 2010.

70 f. il.

Orientador: Vicente Luiz Scalon

Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2010

1. CBS. 2. Convecção natural. 3. Método dos elementos finitos. 4. Cavidade cilíndrica. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia. II. Título.

**ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE Mestrado DE ALICE JORDAM, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA, DO(A) FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU.**

Aos 20 dias do mês de agosto do ano de 2010, às 10:00 horas, no(a) ANFITEATRO DO STI, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. VICENTE LUIZ SCALON do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru, Prof. Dr. HELIO APARECIDO NAVARRO do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Escola de Engenharia de São Carlos - USP, Prof. Dr. SERGIO RODRIGUES FONTES do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Escola de Engenharia de São Carlos - USP, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE Mestrado de ALICE JORDAM, intitulada "IMPLEMENTAÇÃO DE PROBLEMA DE CONVECÇÃO NATURAL EM CAVIDADES CILÍNDRICAS UTILIZANDO O ESQUEMA CBS". Após a exposição, a discente foi argüida oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: ABA - VADA. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que, após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Prof. Dr. VICENTE LUIZ SCALON Prof. Dr. HELIO APARECIDO NAVARRO Prof. Dr. SERGIO RODRIGUES FONTES 

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente à Deus, pela vida, por me propiciar viver tamanha experiência e realizar um sonho.

Agradeço imensamente ao meu orientador, Prof. Dr. Vicente Luiz Scalon, que de forma crucial me auxiliou em todos os aspectos deste trabalho.

Agradeço aos meus familiares e amigos que me apoiaram e me incentivaram.

Agradeço também à CAPES pelo apoio financeiro concedido em forma de bolsa de estudo.

Agradeço a todos, professores e funcionários da Unesp, que contribuíram, de certa forma, para o desenvolvimento deste trabalho.

“A gravidade explica os movimentos dos planetas, mas não pode explicar quem colocou os planetas em movimento. Deus governa todas as coisas e sabe tudo que é ou que pode ser feito.”

(Isaac Newton)

Jordam, A. **Implementação do método das características na modelagem de problemas de convecção natural em cavidades cilíndricas.** 85f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, 2010.

## RESUMO

A fluidodinâmica computacional (CFD) tem sido utilizada, estudada e implementada ao longo das duas últimas décadas na solução dos mais diversos problemas de engenharia. O princípio básico desta ciência é a aplicação de métodos numéricos em problemas que envolvam mecânica dos fluidos. Nesse contexto, este trabalho utiliza essa técnica para analisar o comportamento de um fluido incompressível, que se encontra numa cavidade cilíndrica fechada onde as faces inferior e superior são adiabáticas e as superfícies laterais se encontram em diferentes temperaturas. Os perfis de velocidade e temperatura resultantes - ocasionados pela convecção natural- serão avaliados em todo o domínio do problema. Existe uma série de técnicas para a solução de problemas envolvendo escoamentos, sendo as mais comuns as que se utilizam do “Esquema de Passo Fracionado” proposto por Chorin no final da década de 60. Dentre as diversas soluções que se utilizam desta técnica, este trabalho optou pelo uso do método das características e do algoritmo CBS de solução proposto por Zienkiewicz e Codina (1995). Para a implementação do algoritmo de solução do problema proposto foi realizada uma discretização geral através do método dos elementos finitos usando-se de uma malha formada por elementos bilineares. A solução foi obtida a partir de um ambiente matemático adequado, o GNU-Octave (2008). Os resultados foram analisados para diferentes razões de curvatura, números de Rayleigh e métodos de solução, sendo plotados para as suas diversas variáveis buscando descrever o comportamento do fenômeno.

**PALAVRAS-CHAVE:** CBS, Convecção Natural, Método dos Elementos Finitos, Cavidade Cilíndrica.

Jordam, A. **Implementation of the characteristics method in the modeling of free convection problems in cylindrical cavity**. 85f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, 2010.

## **ABSTRACT**

The Computational Fluid Dynamics (CFD) has been used, studied and performed through the last two decades to solve the series of problems in Engineering. The most basic aim of this science is the appliance of numerical methods in cases that involve fluid mechanics. In this context, this work uses this technic to analyse the behaviour of an incompressible fluid, which is found in a closed cylindrical cavity, a place where the inferior and superior surfaces are adiabatic and the lateral surfaces are shown in different temperatures. The resultant profiles of speed and temperature – induced by the free convection – are going to be appraised in all the dominion of the problem. There is a set of technics to solve the problems which involve the drainage, but the most usual are those which use the technic “Fractional Step Method” offered by Chorin in the final of 60s. Among the several solutions that are solved through this technic, this research used the characteristics method and of the CBS algorithm, offered by Zienkiewicz e Codina (1995). For the implementation of the algorithm, it was realized a general discretization through the finite elements method, making use of a loop formed by bilinear elements. The resolution was obtained from an adequated mathematical ambient, the GNU-Octave (2008). The results were analysed for different curvature ratios, Rayleigh numbers and methods of solution, being plotted for its different variables searching to describe the behaviour of the phenomenon.

**KEYWORDS:** CBS, Free Convection, Finite Elements Method, Cylindrical Cavity.



## SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO .....	1
1.1 – Objetivos.....	3
2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	5
3 – METODOLOGIA.....	11
3.1 – O método das características aplicado às equações de transporte.....	14
3.1.1 – Estimativa da velocidade ao longo da linha de característica.....	15
3.1.2 – Aproximações das diversas grandezas no ponto característico.....	16
3.2 – Aplicação do método das características para sistemas radiais.....	18
3.3 – Determinação da forma geral para a equação de transporte.....	20
3.4 – Aplicação às equações de balanço de quantidade de movimento.....	21
3.4.1 – Cálculo das matrizes elementares.....	22
3.4.2 – Tratamento do termo fonte Q.....	25
3.5 – A equação da pressão.....	26
3.6 – A equação da correção das velocidades.....	29
3.7 – Compressibilidade artificial.....	30
3.8 – Incremento de tempo.....	31
3.9 – Método semi-implícito.....	32
3.10 – Ausência do termo característico.....	32
3.11 – A equação de conservação de energia.....	33
3.12 – Procedimento geral de solução.....	33
4 – RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	36
4.1 – Validação do modelo.....	36
4.1.1 – Analisando um problema no plano cartesiano.....	36
4.1.2 – Análise dos perfis de velocidades.....	38
4.2 – Análise do problema para os esquemas explícito, semi-implícito, com e sem o uso dos termos característicos.....	40
4.3 – Resultados para cavidades cilíndricas anulares com diferentes razões de curvatura.....	54
4.4 – Resultados para cavidades cilíndricas com diferentes números de Rayleigh .....	58
5 – CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS.....	65
6 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	67

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Problema proposto.....	4
Figura 2: Diagrama do algoritmo CBS de solução.....	9
Figura 3: Condições de contorno para o problema proposto na Figura 1.....	12
Figura 4: Procedimento de determinação da linha pseudo-característica de Galerkin.....	14
Figura 5: Fluxograma geral do processo de solução.....	34
Figura 6: Malha utilizada na solução do problema.....	37
Figura 7: Geometria do problema proposto por Schneider e Straub (1992).....	39
Figura 8: Resultado para o perfil de velocidades obtido por Schneider e Straub (1992).....	39
Figura 9: Resultado para o perfil de velocidades obtido neste trabalho.....	40
Figura 10: Esquema mostrando as linhas onde estão localizados os resultados para a montagem dos gráficos comparativos.....	41
Figura 11: Comportamento da velocidade $v$ em relação ao seu eixo central para $Ra=10^3$ .....	42
Figura 12: Comportamento da velocidade $u$ em relação ao seu eixo central para $Ra=10^3$ .....	43
Figura 13: Comportamento da velocidade $u$ em relação ao seu eixo central para $Ra=10^6$ .....	44
Figura 14: Comportamento da velocidade $v$ em relação ao seu eixo central para $Ra=10^6$ .....	45
Figura 15: Perfil de temperatura para $Ra=10^3$ .....	46
Figura 16: Perfil de temperatura para $Ra=10^6$ .....	47
Figura 17: Perfil de velocidade e função corrente para $Ra=10^3$ .....	48
Figura 18: Perfil de velocidade e função corrente para $Ra=10^6$ .....	49
Figura 19: Desvio da pressão em função do número de iterações para $Ra=10^3$ .....	50
Figura 20: Desvio da pressão em função do número de iterações para $Ra=10^6$ .....	51
Figura 21: Tempo computacional gasto em função do número de iterações para $Ra=10^3$ .....	52
Figura 22: Tempo computacional gasto em função do número de iterações para $Ra=10^6$ .....	53
Figura 23: Comportamento do número de Nusselt em função da parede aquecida para os diversos esquemas de solução para $Ra=10^3$ .....	53
Figura 24: Comportamento do número de Nusselt em função da parede aquecida para os diversos esquemas de solução para $Ra=10^6$ .....	54
Figura 25: Comportamento do $Nu$ na superfície quente em função da altura para as diferentes razões de curvatura.....	55
Figura 26: Comportamento do perfil de temperaturas em função da razão de curvatura.....	56

Figura 27: Comportamento do perfil de velocidades e função corrente em função da razão de curvatura.....	57
Figura 28: Comportamento da velocidade $u$ em relação ao seu eixo central para os números de Rayleigh considerados.....	59
Figura 29: Comportamento da velocidade $v$ em relação ao seu eixo central para os números de Rayleigh considerados.....	60
Figura 30: Perfil de temperatura em função do número de Rayleigh.....	61
Figura 31: Perfil de velocidade e função corrente em função do número de Rayleigh.....	63
Figura 32: Comportamento do Nu na superfície quente em função da altura para os números de Rayleigh considerados.....	64
Figura 33: Desvio da pressão em função do número de iterações para os números de Rayleigh considerados.....	64

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Comparação de alguns resultados, utilizando malha 21x21, com outros disponíveis na literatura.....	38
--	----

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

**AC** – Artificial Compressibility – Compressibilidade Artificial

**CBS** – Characteristic Based Split – Algoritmo utilizando o método das características

## SIMBOLOGIA

### Latinos

$B$	matriz da derivada da função de aproximação elementar
$c$	velocidade do som adimensional
$C$	matriz auxiliar
$Fo$	número de Fourier $[Fo = \alpha t / H^2]$
$F_s$	matriz relacionada às condições de contorno
$g$	aceleração da gravidade $[m/s^2]$
$G$	matriz auxiliar
$h$	menor dimensão do elemento
$H$	comprimento característico
$H$	matriz auxiliar
$H^*$	altura da cavidade cilíndrica
$k$	constante difusiva genérica
$K_u$	matriz auxiliar
$K_k$	matriz auxiliar
$M$	matriz auxiliar
$\vec{n}$	vetor unitário na direção normal à superfície
$N$	matriz da função de aproximação elementar
$Nu$	número de Nusselt $[Nu = h H / k]$
$p$	pressão adimensional
$P$	pressão $[Pa]$
$P$	matriz auxiliar
$Pr$	número de Prandtl $[Pr = \nu / \alpha]$
$Q$	termo fonte genérico
$Ra$	número de Rayleigh $[Ra = Pr g \beta (T_q - T_f) H^3 / \nu^2]$
$Re$	número de Reynolds $[Re = \rho u H / \mu]$
$R_e^*$	raio externo
$R_i^*$	raio interno
$t$	tempo adimensional

$T$	temperatura [K]
$T_f$	temperatura mínima de referência (fria) [K]
$T_q$	temperatura máxima de referência (quente) [K]
$u$	componente adimensional da velocidade na direção radial
$U$	velocidade adimensional na direção radial
$v$	componente adimensional da velocidade na direção vertical
$V$	velocidade adimensional na direção vertical
$r$	coordenada adimensional na direção radial
$z$	coordenada adimensional na direção vertical

### Gregos

$\alpha$	difusividade térmica
$\beta$	fator de compressibilidade artificial
$\beta$	coeficiente de expansão volumétrica [1/K]
$\delta$	comprimento da linha de corrente durante o instante de tempo
$\delta T$	diferença de temperatura de referência
$\Delta$	variação da propriedade que o acompanha
$\phi$	propriedade genérica
$\Gamma$	representação da superfície de controle
$\lambda$	razão de curvatura
$\nu$	viscosidade cinemática [ $m^2/s$ ]
$\Theta$	temperatura adimensional
$\theta, \theta_1, \theta_2$	fatores, entre 0 e 1, que determinam o esquema de discretização no tempo
$\rho$	massa específica [ $kg/m^3$ ]
$\Omega$	representação do volume de controle (domínio)

### Sobrescritos

$n$	instante atual
$n+1$	instante posterior
$n+\theta$	instante intermediário $\theta$
-	valor médio
+	valor dimensional
*	variável auxiliar
'	mudança de uma variável independente para trabalhar coincidente com a linha

corrente

### **Subscritos**

$r, z$	direção de atuação
$i, j, k$	notação tensorial
$ref$	valor referencial
$u$	associado ao campo de velocidades
$p$	associado ao campo de pressões



## **1 – INTRODUÇÃO**

As simulações computacionais são alvos de estudos há décadas e cada vez mais vêm chamando a atenção dos pesquisadores. Este grande interesse se deve ao fato de que, por ser um método de relativa simplicidade e ter grande versatilidade, este diminuiu significativamente os trabalhos de laboratórios. A evolução da velocidade e capacidade de armazenamento dos computadores nas últimas três décadas representou um grande estímulo para a aplicação de novas técnicas numéricas de solução. Além disto, contribui muito também o fato de que a diminuição dos ensaios experimentais reduz os custos dos testes de maneira substancial.

Pode-se dizer, de uma maneira geral, que as simulações de soluções para problemas científicos, deve ser capaz, através de técnicas matemáticas e computacionais, imitar um processo ou operação do mundo real, em outras palavras, deve abranger desde a análise dos fenômenos, o desenvolvimento de modelos matemáticos para sua descrição até a elaboração de códigos computacionais para obtenção das soluções desejadas. É uma área em expansão, que tem uma vasta aplicação, como por exemplo, em desenvolvimento de produtos industriais, pesquisas científicas básicas e aplicadas, simulações e previsões temporais e espaciais de fenômenos, dentre outras.

Existem vários métodos estudados na modelagem computacional, podendo-se destacar os que têm aplicações diretas na solução de problemas típicos de engenharias, tais como: métodos dos elementos finitos, métodos dos elementos de contorno, métodos dos volumes finitos, métodos das diferenças finitas, métodos integrais e variacionais e métodos auto adaptativos. Além destes, há ainda técnicas computacionais, com o propósito de aprimorar e, principalmente, aumentar a velocidade de solução dos modelos anteriormente descritos, como por exemplo, redes e malhas computacionais, computação vetorial e paralela

aplicada, entre outras. Por fim tem-se ainda, para auxiliar nas etapas de estabelecimento do domínio computacional e visualização das soluções, princípios e, muitas vezes, programas que permitem etapas de pré e pós-processamento gráfico e otimização, sistemas de orientação espacial e modelagem.

A solução por métodos numéricos de um problema é uma aproximação da solução de equações diferenciais, tanto ordinárias como parciais. Pode-se descrever simplificada o método da seguinte forma, as equações diferenciais parciais são resolvidas primeiramente através da discretização da equação, trazendo para dentro de um subespaço dimensional finito (isto pode ser feito através do método de elementos finitos, método das diferenças finitas ou método dos volumes finitos). Ao fazer isto, muitas vezes é necessário a solução de sistemas lineares ou não lineares de equações, que serão descritos no parágrafo à seguir. A justificativa teórica desses métodos envolvem teoremas de análise funcional que reduzem o problema para solução de equações algébricas. No presente estudo esta análise foi realizada utilizando-se o método dos elementos finitos.

Os sistemas lineares ou não lineares de equações, representam outra importante interface entre os métodos numéricos e a análise matemática. Existem duas alternativas de soluções: o método direto e o iterativo. No método direto, a solução ocorre em um número finito de passos e fornece uma resposta precisa se utilizados com precisão aritmética infinita. No método iterativo não existe um número especificado de passos a serem calculados, começa com uma estimativa inicial que posteriormente com sucessivas aproximações converge para a resposta do problema. Um critério de convergência é especificado para decidir o quanto a solução está suficientemente precisa. Em geral, nos procedimentos de solução numérica os métodos iterativos são mais comumente utilizados que os métodos diretos, mesmo porque, são os indicados em sistemas de equações não-lineares.

Cabe ressaltar, entretanto, que a análise numérica é anterior em muitos séculos ao uso dos computadores. Há 2.000 anos atrás, por exemplo, já era utilizada a interpolação linear. Vários grandes matemáticos do passado já estavam preocupados com a análise numérica que pode-se refletir hoje, como resultado, nomes de importantes algoritmos como o método de Newton, interpolação polinomial de Lagrange, eliminação Gaussiana, o método de Euler entre outros. Foram produzidos muitos livros com fórmulas e tabelas contendo dados, tais como, pontos de interpolação e coeficientes de funções que eram e ainda são utilizados atualmente.

## 1.1 – Objetivos

Conhecidas as principais ferramentas disponíveis e seguindo a tendência de opção pelos modelos numéricos, este trabalho objetiva implementar e aplicar um algoritmo numérico para a simulação dos efeitos da convecção natural num fluido incompressível, situado no interior de uma cavidade cilíndrica, onde duas de suas faces encontram-se a diferentes temperaturas e as demais são adiabáticas. A convecção natural consiste na transferência de calor dentro de um fluido através de movimentos do próprio fluido, ocorrendo como consequência de diferenças na densidade ocasionada pela distribuição de temperaturas associadas à força gravitacional local e forças centrífugas. Seu estudo é de considerável importância em problemas de engenharia, uma vez que esta configuração pode ser tomada como uma representação simplificada de muitas situações práticas em diversas áreas da engenharia (nuclear, solar, mecânica). Pode-se citar como exemplo, a geometria típica de sistemas coletor-armazenador e o processo de convecção natural de água no interior de tanques.

Muitos algoritmos e programas podem ser utilizados para implementar e executar a análise numérica nos computadores. Neste trabalho optou-se por implementar as rotinas de teste num ambiente matemático onde as ferramentas de análise e solução se encontram pré-implementadas. Para tanto, será utilizado o programa GNU-Octave (2008), que é um programa livre, aberto e com distribuição gratuita e pode ser executado nos sistemas operacionais Linux e Windows. Para o pós processamento e elaboração dos gráficos, embora pudesse ser feito diretamente pelo programa GNU-Octave, será utilizada uma outra ferramenta que melhor se adequa às necessidades de geração de isocurvas. Esta ferramenta pode ser encontrada em Kelley e Galbraith, GRI (2008) e também é livre, aberto, com distribuição gratuita e pode ser executado nos sistemas operacionais Linux e Windows.

O problema a ser solucionado consiste numa cavidade cilíndrica fechada na qual há diferenças de temperaturas em suas paredes opostas, a superfície interna encontra-se quente e a externa fria, as paredes superior e inferior são adiabáticas, como pode ser observado na Figura 1. Pretende-se analisar o comportamento da convecção natural para diferentes razões de curvatura. Define-se a razão de curvatura  $\lambda$  como a diferença entre raio externo  $R_e^*$  e raio interno  $R_i^*$  sobre o raio interno ( $\lambda = \Delta r^* / R_i^*$ ). A razão geométrica

$(\Delta r^*/H^*)$ , representada pela diferença de raios sobre a altura da cavidade permanecerá constante e igual a 1. Para todos os casos será analisado também o comportamento do número de Nusselt (Nu), na superfície radial interna (superfície aquecida). Os perfis de velocidades e temperaturas resultantes dos diferentes métodos de solução também serão alvos de análise, bem como o comportamento do problema para diferentes números de Rayleigh.

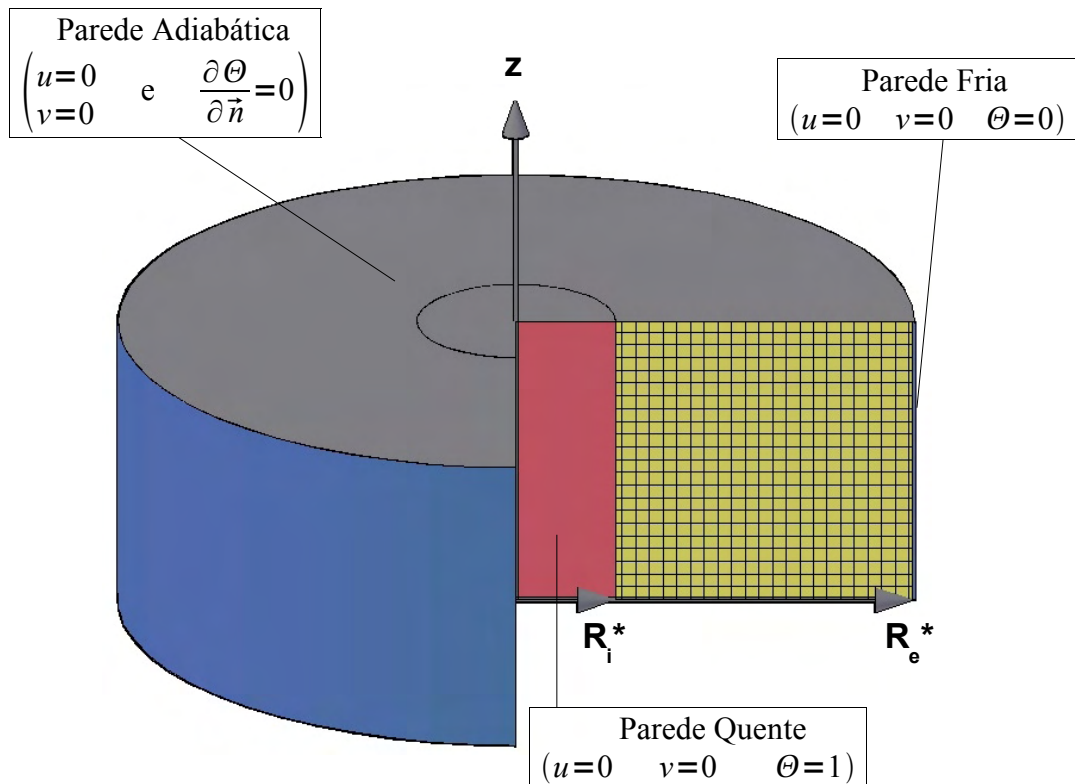


Figura 1: Problema proposto.

## 2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Há uma vasta diversidade de trabalhos que abordam os métodos numéricos. Por serem versáteis, flexíveis e de uma significativa simplicidade vários autores utilizam-se de problemas de engenharias para testá-los.

O problema clássico de cavidade recirculante para o teste do funcionamento de modelos numéricos foi solucionado por Ghia, Ghia e Shin (1982), utilizando uma formulação baseada nas equações para escoamentos bidimensionais e incompressíveis de Navier-Stokes. O trabalho apresentou, ainda, uma grande variedade de informações dos testes realizados, com os resultados avaliados para diversos números de Reynolds. Uma série de outros resultados para cavidade recirculante e com diferentes geometrias também podem ser vistos no trabalho de Erturk (2008).

Um outro problema, que recentemente foi sugerido como um referencial para fluxos incompressíveis, foi solucionado por Nithiarasu e Liu (2005), onde utiliza-se o algoritmo *CBS* para resolver tanto fluxos estáveis quanto instáveis dentro de uma dupla cavidade não-retangular para diferentes números de Reynolds. Ambas as malhas, estruturadas e não estruturadas foram empregadas no presente estudo para certificar-se de que os resultados obtidos estariam próximos da realidade. A conclusão sobre os resultados observados é que, quando utiliza-se Reynolds variando de 50 a 1.000, o fluxo encontra-se num regime estacionário, para Reynolds entre 1.000 e 6.000, o fluxo adquire um estado de transitoriedade e afasta-se do estado citado acima. E para Reynolds igual ou maior que 6.000 o fluxo se aproxima de um regime turbulento.

Em relação ao método utilizado, Codina et al (2006) compararam alguns métodos numéricos para a solução das equações de Navier-Stokes. O primeiro é baseado no algoritmo *CBS-compressibilidade artificial* e os outros dois abordam particularmente o

método *SGS* (subgrid scale). O estudo pôs em destaque que estes mecanismos de estabilização são na verdade muito semelhantes. O *CBS* é melhor em alguns casos, enquanto o regime *SGS* tem desempenho melhor em outros. Em relação a utilização do computador, o tempo é sem dúvida menor ao utilizar-se o *CBS*.

Nesta mesma linha, Massarotti et al. (2006) apresentaram em seu trabalho uma comparação dos métodos explícitos e semi-implícitos do algoritmo *CBS-compressibilidade artificial*. O estudo mostrou que os dois métodos apresentaram bons resultados. Todas as soluções para o estado estacionário se mostraram praticamente idênticas, especialmente para problemas de convecção natural. Entretanto, a aplicação do método explícito em problemas desta natureza apresenta alguns problemas de convergência e forças de flutuações extremamente altas. Na solução de problemas transientes nota-se algumas diferenças com relação ao incremento de tempo utilizado em cada situação.

Embora o algoritmo *CBS* já tenha sido utilizado com sucesso em problemas de escoamento turbulento e com elevados valores do número de Reynolds, modelos de turbulência ainda não haviam sido testados. Percebendo-se esta lacuna, Nithiarasu e Liu (2006) apresentaram um algoritmo utilizando compressibilidade artificial e o algoritmo *CBS* para fluxos contínuos e com instabilidades de turbulência que pode ser aplicado a fluidos incompressíveis. Testes realizados pelos autores demonstraram o sucesso da aplicação do modelo  $k-\epsilon$ , aumentando assim, a gama de uso de variações do algoritmo *CBS*.

A questão conservativa também foi abordada no trabalho de Nithiarasu e Zienkiewicz (2006). Neste estudo, foi realizado uma análise do método explícito para fluidos incompressíveis utilizando o algoritmo *CBS*, empregando tanto a forma conservativa como a não-conservativa. A estabilização, convergência e aspectos de conservação do presente método foram discutidas. Um procedimento para eliminação dos erros de primeira ordem no tempo foi proposto. Os resultados foram comparados com outros métodos tendo apresentado uma boa concordância.

Escoamentos sem viscosidade e compressíveis utilizando como base o algoritmo *CBS* também foram analisados por Thomas e Nithiarasu (2005). Os resultados obtidos com este trabalho demonstraram que o tamanho do elemento e a sua uniformização são aspectos importantes na avaliação de sua precisão. Através deste estudo, os autores demonstraram que algoritmos que produzem maior refinamento, na direção da linha aerodinâmica, melhoram a acuracidade da solução na região supersônica do escoamento.

Ampliando a aplicação do algoritmo *CBS*, Rojek, Oñate e Taylor (2006) fizeram uma adaptação do esquema, antes aplicado somente na mecânica dos fluidos, para o uso em problemas que envolvam mecânica dos sólidos. Vários exemplos foram resolvidos, obtendo resultados bastante semelhantes aos utilizados com outros métodos de estabilização.

Confirmando a vasta aplicação do algoritmo *CBS*, Kulkarni et al. (2006), utilizaram um modelo numérico bidimensional para simular o comportamento do fluido nos moldes de enchimento no processo de encapsulamento de um circuito integrado. As equações que regem o problema foram resolvidas usando o método das características baseado no algoritmo *CBS* em regime semi-implícito, juntamente com o método de elementos finitos. A simulação foi realizada para uma determinada geometria de um flip-chip. Os resultados obtidos apresentaram boa concordância com os numéricos e experimentais disponíveis, tal situação se enquadra para baixos números de Reynolds, que é o caso do processo de encapsulamento, devido ao alto índice de viscosidade de resina. Assim, foi possível demonstrar que a aplicação do presente modelo numérico mostrou-se uma alternativa eficaz.

Fazendo uma compilação dos trabalhos até então publicados, Zienkiewicz e Taylor (2000) apresentaram um livro com a descrição completa da metodologia *CBS*. Utilizando-se da discretização de Galerkin e do método de elementos finitos, o livro mostra os passos da resolução, as formulações utilizadas e as avaliações do método, entre outras informações. Essa metodologia, a partir deste seu maior detalhamento, serviu como base de desenvolvimento para diversos autores no mundo inteiro, que passaram a trabalhar e divulgar este novo modelo.

Nesse mesmo período, destaca-se ainda, outro trabalho de Nithiarasu e Zienkiewicz (2000) onde são apresentadas as técnicas de estabilização com os passos de tempo. Este trabalho tinha o seu principal foco nos escoamentos incompressíveis e na aceleração convectiva, utilizando o algoritmo *CBS*. Os modelos foram novamente testados para o caso da cavidade recirculante e, assim, foi possível uma avaliação dos resultados obtidos com a nova técnica.

Mudando alguns aspectos da discretização usual apresentada por Zienkiewicz e Taylor (2000) com a utilização da forma fraca da equação em alguns outros pontos, Nithiarasu (2003) apresenta uma proposta variante do algoritmo *CBS* tradicional. As alterações propostas, de acordo com os resultados apresentados, mostraram que a qualidade do resultados não foi afetada e que a facilidade de aplicação teve um ganho. A eliminação da

necessidade de determinadas matrizes e/ou procedimentos trouxe um ganho para a sua aplicação, principalmente em problemas dinâmicos mais complexos onde o tempo de processamento torna-se mais significativo.

Em relação a outros métodos de solução, Thomas e Nithiarasu (2007) comparam dois métodos: o método *LCG* (locally conservative Galerkin) e o método *GG* (Global Galerkin). Ao final do trabalho, pode-se concluir que ambos os métodos são praticamente idênticos, exceto pelo fato do *LCG* ter taxas de convergência maiores.

Ampliando o método *LCG*, Thomas, Nithiarasu e Bevan (2007) resolveram as equações para fluido incompressível de Navier-Stokes. Além da implementação do método, dois exemplos de referência foram apresentados para demonstrar a veracidade do método.

Voltando ao algoritmo *CBS*, as suas diversas aplicações e pequenas atualizações levaram à publicação de um novo trabalho escrito por Nithiarasu, Codina e Zienkiewicz (2006) onde eles apresentam uma visão abrangente de várias técnicas da dinâmica dos fluidos aplicadas no algoritmo, ou seja, neste trabalho encontram-se suas principais dificuldades de implementação, seus aspectos mais importantes, enfim todas as considerações necessárias para a aplicação do sistema *CBS* em resolução de problemas são exaustivamente discutidas.

Uma grande variedade de trabalhos poderia ainda ser citada, abrangendo a utilização do algoritmo *CBS* e *AC* (Artificial Compressibility) em diversas situações. Entretanto, foi dada uma maior ênfase aos trabalhos relacionados ao desenvolvimento da sua metodologia e à soluções de escoamento de fluido incompressível utilizando o algoritmo *CBS* associado à compressibilidade artificial. Cabe destacar entre as referências apresentadas, os trabalhos de Zienkiewicz e Taylor (2000) e Nithiarasu (2003) que propõem as bases dos modelos utilizados e serão citados de forma recorrente durante o texto.

Para melhor entender o algoritmo *CBS*, a Figura 2 ilustra um resumo do método, baseado no trabalho de Zienkiewicz e Taylor (2000). Pode-se observar que a solução por tal algoritmo consiste em uma solução fracionada, sendo que: primeiramente calcula-se as velocidades sem inserir a pressão, no segundo passo resolve-se a equação da pressão com os valores das velocidades calculados anteriormente, após corrige-se as velocidades. Com estas “novas” velocidades repete-se o processo até que o mesmo seja considerado convergente para a solução do problema.



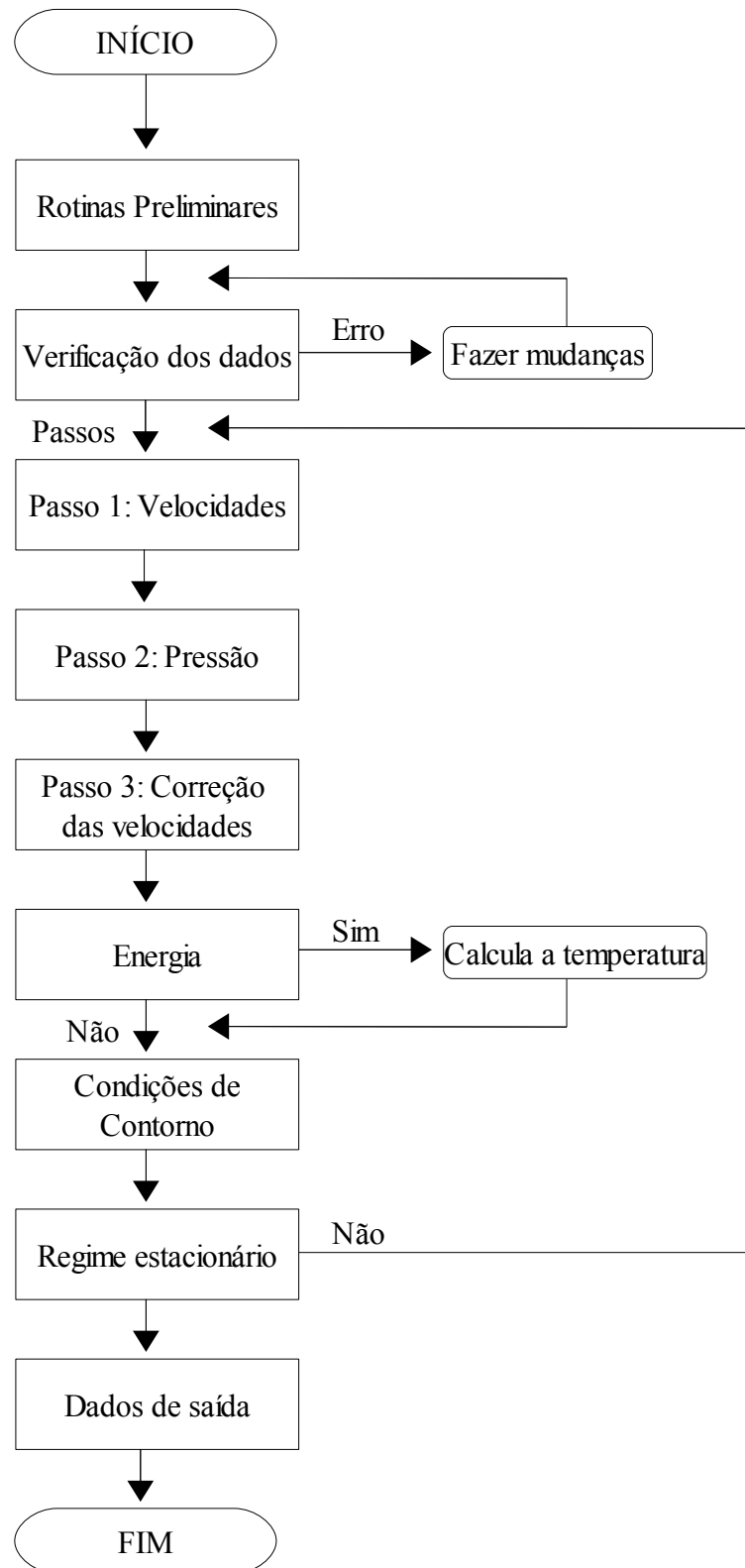


Figura 2: Diagrama do algoritmo CBS de solução.

Cabe destacar ainda, que a grande maioria dos trabalhos citados utiliza-se da solução através de elementos finitos por elementos bidimensionais triangulares. Para o trabalho proposto a solução será avaliada com outro tipo de elemento: os elementos bidimensionais quadrangulares ou bilineares.

Já em relação à convecção natural em cavidades cilíndricas, salienta-se que poucos artigos foram encontrados, e dentre esses, nenhum coincide com o problema proposto neste trabalho, no entanto pode-se destacar os trabalhos de Kurian, Varma e Kannan (2009), onde estuda-se os efeitos da convecção natural em um cilindro vertical com diversas inclinações. As superfícies inferior e superior estão a diferentes temperaturas e as demais são adiabáticas. Os resultados foram analisados para Prandtl fixado em 0,71, Rayleigh variando de  $10^3$  a  $3,1 \times 10^4$  e ângulos de inclinação variando de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ . Relações empíricas entre a velocidade máxima e número de Nusselt em função do ângulo de inclinação e número de Rayleigh foram analisadas neste trabalho.

Preocupando-se com os efeitos da inclinação do cilindro sobre o comportamento do fluido, Soong et al. (1996) relataram um estudo numérico de convecção natural numa cavidade cilíndrica aquecida e inclinada. Os efeitos foram estudados para diversos números de Rayleigh e razões de curvatura.

Seguindo esta mesma linha, mas não somente com a intenção de examinar as razões de curvatura, Ivancic et al. (1999) analisaram também as condições de contorno num cilindro vertical aquecido por baixo, com parede lateral sob duas condições: adiabática e condutora. Os resultados foram analisados para diferentes números de Rayleigh e Prandtl.

Um outro trabalho que se destaca é o de Schneider e Straub (1992), onde estuda-se o comportamento de fluidos sob os aspectos da convecção natural em um cilindro com diversas inclinações. Foram realizadas diversas análises sobre o ângulo de inclinação e velocidade máxima resultante em função do número de Nusselt para diferentes números de Rayleigh e Prandtl.

Conforme mencionado na introdução, o estudo realizado no presente trabalho, se propõe a avaliar, baseado no algoritmo *CBS* e na metodologia de elementos finitos, o comportamento de um fluido incompressível que se encontra numa cavidade cilíndrica, onde duas de sua faces estão a diferentes temperaturas e as demais são adiabáticas.

### 3 – METODOLOGIA

As duas principais formulações utilizadas neste trabalho tiveram como base os procedimentos descritos por Zienkiewicz e Taylor (2000) e por Nithiarasu (2003). O modelo semi-implícito, utilizado nas duas formulações, foi baseado no trabalho Liu e Nithiarasu (2006).

A geometria do problema a ser solucionado, como maneira de analisar os efeitos da convecção natural sobre um fluido incompressível, pode ser visto na Figura 1, ela consiste em uma cavidade cilíndrica, com duas paredes adiabáticas e as superfícies interna e externa a diferentes temperaturas que serão mantidas constantes durante todo o processo de solução. As equações que regem o problema serão resolvidas na sua forma adimensional.

Este problema será resolvido num domínio bidimensional, com coordenadas adimensionais  $r$  na direção radial e  $z$  na direção vertical. As componentes adimensionais da velocidade na direção de  $r$  serão representadas por  $u$ , na direção de  $z$  serão representado por  $v$  e a temperatura será representada por  $\Theta$ , como pode ser visto na Figura 3.

As equações que regem o problema são as de Navier-Stokes. Como citado anteriormente diversas metodologias são possíveis para a solução das mesmas, mas este trabalho vai utilizar um método de solução segregado, adaptando para coordenadas cilíndricas o método das características proposto por Zienkiewicz e Codina (1995). Para a atual análise, estuda-se uma solução da convecção natural em cavidades e portanto foram incluídos os termos de campo. De acordo com as equações de continuidade (em função da pressão), conservação da quantidade de movimento de Navier-Stokes nas direções  $r$  e  $z$  e conservação da energia, todas utilizadas na sua forma adimensional, como mostrado nas

equações (1) a (4):

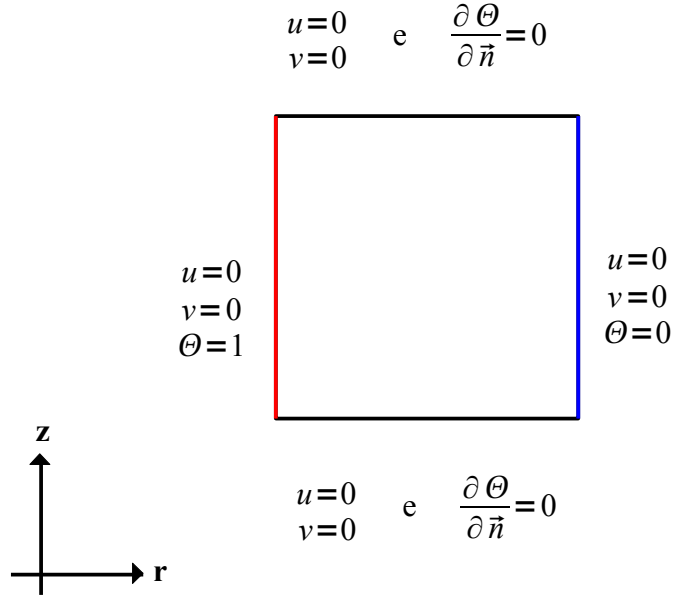


Figura 3: Condições de contorno para o problema proposto na Figura 1.

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(rU)}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial z} \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(uU)}{\partial r} + \frac{\partial(vU)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \text{Pr} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rU)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right] \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial(vU)}{\partial r} + \frac{\partial(vV)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \text{Pr} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] + \text{Ra} \cdot \text{Pr} \cdot \Theta \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\partial(u\Theta)}{\partial r} + \frac{\partial(v\Theta)}{\partial z} = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial(\Theta)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right] \quad (4)$$

onde os parâmetros adimensionais podem ser calculados pelas expressões:

$$r = \frac{r^*}{H}; \quad U = \frac{uH}{\alpha}; \quad V = \frac{vH}{\alpha}; \quad p = \frac{P - P_{ref}}{\rho} \left( \frac{H}{\alpha} \right)^2; \quad \Theta = \frac{T_q - T_f}{\delta T}; \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha};$$

$$Ra = \frac{g \beta (T_q - T_f) H^3}{\nu^2} Pr; \quad t = \frac{\alpha t^*}{H^2}$$
(5)

Pode-se escrever as equações de (1) a (4) utilizando uma variável geral  $\Phi$  apresentada na forma tensorial na equação escalar como:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial (U_i \Phi)}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) + Q$$
(6)

mas,

$$\frac{\partial (U_i \Phi)}{\partial x_i} = U_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \Phi \frac{\partial U_i}{\partial x_i}$$
(7)

assim:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \Phi \frac{\partial U_i}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) + Q = 0$$
(8)

Note que todos os termos da equação (8), exceto o segundo, termo convectivo, são auto-adjuntos. O terceiro termo desaparecerá se a divergência da velocidade é zero, conforme segue:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$$
(9)

Desta forma a equação (8) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) + Q = 0$$
(10)

### 3.1 – O método das características aplicado às equações de transporte

Uma forma de solucionar as equações deste tipo é realizar uma mudança de coordenadas de maneira a trabalhar sobre uma linha de corrente. Esse método foi primeiramente publicado por Zienkiewicz et al. (1984) e completamente descrito em numerosas publicações. Esta derivação inclui uma expansão local de Taylor e está ilustrada na Figura 4.

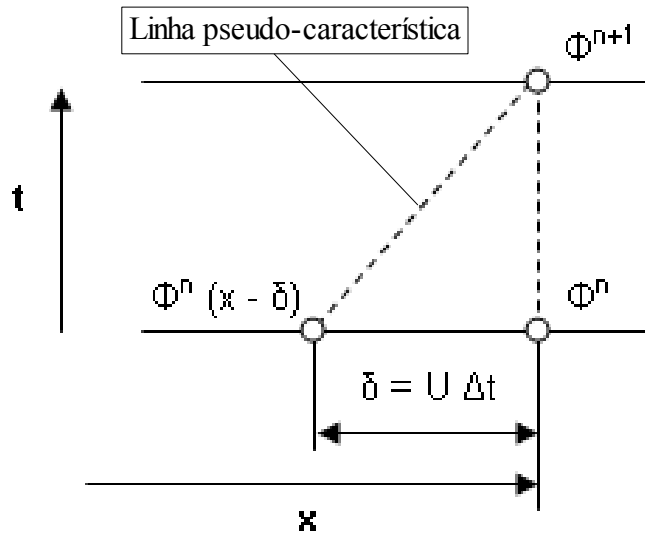


Figura 4: Procedimento de determinação da linha pseudo-característica de Galerkin.

O comportamento padrão da equação (10) pode ser determinado pela mudança da variável independente  $x$  para  $x'$  para trabalhar em coincidência com a linha corrente, tal que:

$$dx'_i = dx_i - U_i dt \quad (11)$$

Note que para  $\phi = \phi(x'_i, t)$  tem-se:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{x \text{ const}} = \frac{\partial \phi}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial t} + \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{x' \text{ const}} = -\bar{U}_i \frac{\partial \phi}{\partial x'_i} + \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{x' \text{ const}} \quad (12)$$

sendo  $\bar{U}_i$  a velocidade média do deslocamento ao longo da linha característica  $x'$ .

Substituindo a equação (12) em (10), tem-se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x'_i} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x'_i} \right) + Q(x'_i) = 0 \quad (13)$$

A equação (10) pode ser escrita ao longo da linha pseudo-característica como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x'(t), t) - \frac{\partial}{\partial x'_i} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x'_i} \right) + Q(x'_i) = 0 \quad (14)$$

e assim, na coordenada  $x'$ , o termo convectivo aparece apenas indiretamente e os termos fonte e difusão são quantidades médias ao longo da característica. Agora a equação é auto-adjunta e a aproximação espacial de Galerkin é utilizada. A discretização do tempo na equação (14) ao longo da característica, resulta em:

$$\frac{1}{\Delta t} (\phi^{n+1} - \phi^n |_{(x-\delta)}) \approx \theta \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - Q \right]^{n+1} + (1-\theta) \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - Q \right]_{(x-\delta)}^n \quad (15)$$

onde  $\theta$  é igual a zero para a forma explícita, entre zero e um para a forma semi-implícita e um para a forma completamente implícita.

### 3.1.1 – Estimativa da velocidade ao longo da linha de característica

A velocidade média ao longo da pseudo-característica pode ser dada por diversas aproximações. Uma alternativa comumente utilizada, descrita no trabalho de Zienkiewicz e Taylor (2000), é calculada conforme segue:

$$\bar{U} = \frac{U^{n+1} + U^n |_{x-\delta}}{2} \quad (16)$$

Aplicando a expansão de Taylor de primeira ordem em  $U^n |_{x-\delta}$ :

$$U^n |_{x-\delta} = U^n - \delta \frac{\partial U^n}{\partial x} = U^n - \Delta t U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \quad (17)$$

e portanto:

$$\bar{U} = \frac{U^{n+1}}{2} + \frac{1}{2} \left( U^n - \Delta t U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \right) = \frac{U^{n+1} + U^n}{2} - \frac{\Delta t}{2} U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} = U^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \quad (18)$$

A distância percorrida por uma partícula na direção do eixo  $x$  é dada por:

$$\delta = \bar{U} \Delta t \quad (19)$$

Substituindo (18) em (19), tem-se:

$$\delta = \Delta t \left( U^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \right) \quad (20)$$

### 3.1.2 – Aproximações das diversas grandezas no ponto característico

A solução da equação (15) na movimentação das coordenadas para atualização da grade apresenta algumas dificuldades, então é sugerida a expansão de Taylor em todos os seus termos. Para avaliar o valor de  $\delta$ , a expressão (20) é utilizada. Assim:

- Para  $\phi^n$ :

$$\phi_{(x-\delta)}^n = \phi^n - \delta \frac{\partial \phi^n}{\partial x} + \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x^2} + O(\Delta t^3) = \phi^n - \Delta t U^n \frac{\partial \phi^n}{\partial x} + \frac{\Delta t^2}{2} (U^n)^2 \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x^2} + O(\Delta t^3) \quad (21)$$

e fazendo uma aproximação de segunda ordem, tem-se:

$$\phi_{(x-\delta)}^n \approx \phi^n - \Delta t U^n \frac{\partial \phi^n}{\partial x} + \frac{\Delta t^2}{2} U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \frac{\partial \phi^n}{\partial x} + \frac{\Delta t^2}{2} (U^n)^2 \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x^2} \quad (22)$$

- Para o termo difusivo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{(x-\delta)}^n \approx \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n - \Delta t U^n \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n \right] + O(\Delta t^2) \quad (23)$$

e fazendo uma aproximação de segunda ordem, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{(x-\delta)}^n \approx \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n - \Delta t U^n \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n \right] \quad (24)$$

- Para o termo fonte  $Q^n$ :



$$Q_{(x-\delta)}^n = Q^n - \Delta t U^n \frac{\partial Q^n}{\partial x} + O(\Delta t^2) \quad (25)$$

e fazendo uma aproximação de segunda ordem, tem-se:

$$Q_{(x-\delta)}^n \approx Q^n - \Delta t U^n \frac{\partial Q^n}{\partial x} \quad (26)$$

Substituindo (22), (24) e (26) em (15), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left( \phi^{n+1} - \phi^n + \Delta t U^n \frac{\partial \phi^n}{\partial x} - \frac{\Delta t^2}{2} U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} \frac{\partial \phi^n}{\partial x} - \frac{\Delta t^2}{2} (U^n)^2 \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x^2} \right) \approx \\ \theta \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - Q \right]^{n+1} + (1-\theta) \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \Delta t U \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \left( Q + \Delta t U \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \right]^n \end{aligned} \quad (27)$$

que pode ser rearranjada a partir das definições:

$$Q^{n+\theta} = \theta \cdot Q^{n+1} + (1-\theta) \cdot Q^n \quad (28)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^{n+\theta} = \theta \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^{n+1} + (1-\theta) \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n \quad (29)$$

$$U^n \frac{\partial}{\partial x} \left[ U^n \frac{\partial \phi^n}{\partial x} \right] = \left[ U \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + U^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right]^n \quad (30)$$

resultando em:

$$\begin{aligned} \phi^{n+1} - \phi^n \approx -\Delta t \left\{ U^n \frac{\partial \phi^n}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^{n+\theta} + Q^{n+\theta} \right\} \\ + \frac{\Delta t^2}{2} \left\{ U \frac{\partial}{\partial x} \left( U \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - U \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + U \frac{\partial Q}{\partial x} \right\}^n \end{aligned} \quad (31)$$

### 3.2 – Aplicação do método das características para sistemas radiais

Este procedimento foi feito para as definições do sistema de coordenadas cilíndricas mostrado nas equações (1) a (4). Para avaliar a velocidade em cada uma das direções foi utilizada a expressão (19) e com a velocidade calculada para cada direção como similar à mostrada na equação (20). Assim, a velocidade média em cada direção é dada por:

$$\delta_r = \Delta t \left[ u^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} \left( u^n \frac{\partial u^n}{\partial r} + v^n \frac{\partial u^n}{\partial z} \right) \right] \quad e \quad \delta_z = \Delta t \left[ v^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} \left( v^n \frac{\partial v^n}{\partial z} + u^n \frac{\partial v^n}{\partial r} \right) \right] \quad (32)$$

Neste caso, partindo-se da equação (15), foram obtidas as expressões equivalentes às formas tensoriais apresentadas nas expressões (21) a (26) para os pontos  $(x-\delta)$ . Para auxiliar na obtenção destes resultados, um programa de manipulação simbólica foi utilizado. Desta forma, as expressões obtidas nos diversos pontos são mostradas a seguir:

- Para  $\phi^n$ :

$$\phi^n(r-\delta_r, z-\delta_z) = \phi^n_{(x-\delta)} = \phi^n - \delta_r \frac{\partial \phi^n}{\partial r} + \frac{\delta_r^2}{2} \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial r^2} - \delta_z \frac{\partial \phi^n}{\partial z} + \frac{\delta_z^2}{2} \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial z^2} + O(\Delta t^3) \quad (33)$$

e fazendo uma aproximação de segunda ordem, ou seja, desprezando-se todos os termos  $O(\Delta t^3)$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \phi^n_{(x-\delta)} \approx & \phi^n - \Delta t \left( u^n \frac{\partial \phi^n}{\partial r} + v^n \frac{\partial \phi^n}{\partial z} \right) \\ & + \frac{\Delta t^2}{2} \left\{ \left[ u^n \frac{\partial u^n}{\partial r} \frac{\partial \phi^n}{\partial r} + (u^n)^2 \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial r^2} \right] + \left[ v^n \frac{\partial v^n}{\partial z} \frac{\partial \phi^n}{\partial z} + (v^n)^2 \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial z^2} \right] \right\} \\ & + \frac{\Delta t^2}{2} \left[ u^n \frac{\partial v^n}{\partial r} \frac{\partial \phi^n}{\partial z} + v^n \frac{\partial u^n}{\partial z} \frac{\partial \phi^n}{\partial r} + 2 \cdot u^n \cdot v^n \cdot \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial r \partial z} \right] \end{aligned} \quad (34)$$

mas:

$$\left( u \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + u^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + v \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} + v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right)^n = \left[ u \frac{\partial}{\partial r} \left( u \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + v \frac{\partial}{\partial z} \left( v \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right]^n \quad (35)$$

e assim:

$$\begin{aligned} \phi_{(x-\delta)}^n \approx & \phi^n - \Delta t \left( u^n \frac{\partial \phi^n}{\partial r} + v^n \frac{\partial \phi^n}{\partial z} \right) + \frac{\Delta t^2}{2} \left[ u^n \frac{\partial}{\partial r} \left( u^n \frac{\partial \phi^n}{\partial r} \right) + v^n \frac{\partial}{\partial z} \left( v^n \frac{\partial \phi^n}{\partial z} \right) \right] \\ & + \frac{\Delta t^2}{2} \left[ u^n \frac{\partial v^n}{\partial r} \frac{\partial \phi^n}{\partial z} + v^n \frac{\partial u^n}{\partial z} \frac{\partial \phi^n}{\partial r} + 2 \cdot u^n \cdot v^n \cdot \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial r \partial z} \right] \end{aligned} \quad (36)$$

simplificando a expressão já que  $u$  e  $v$  são ortogonais e  $u \cdot v = 0$ :

$$\begin{aligned} \phi_{(x-\delta)}^n \approx & \phi^n - \Delta t \left( u^n \frac{\partial \phi^n}{\partial r} + v^n \frac{\partial \phi^n}{\partial z} \right) + \frac{\Delta t^2}{2} \left[ u^n \frac{\partial}{\partial r} \left( u^n \frac{\partial \phi^n}{\partial r} \right) + v^n \frac{\partial}{\partial z} \left( v^n \frac{\partial \phi^n}{\partial z} \right) \right] \\ & + \frac{\Delta t^2}{2} \left[ u^n \frac{\partial v^n}{\partial r} \frac{\partial \phi^n}{\partial z} + v^n \frac{\partial u^n}{\partial z} \frac{\partial \phi^n}{\partial r} \right] \end{aligned} \quad (37)$$

- Para o termo difusivo:

$$\nabla \cdot (k \cdot \vec{\nabla} \phi^n)_{(x-\delta)} \approx \nabla \cdot (k \cdot \vec{\nabla} \phi^n) - \frac{\partial}{\partial r} [\nabla \cdot (k \cdot \vec{\nabla} \phi^n)] \cdot \delta_r - \frac{\partial}{\partial z} [\nabla \cdot (k \cdot \vec{\nabla} \phi^n)] \cdot \delta_z + O(\Delta t^2) \quad (38)$$

e, da mesma forma, truncando a partir dos elementos de segunda ordem  $O(\Delta t^2)$ :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (k \cdot \vec{\nabla} \phi^n)_{(x-\delta)} \approx & k \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right]^n \\ & + k \cdot \Delta t \cdot \left\{ u^n \cdot \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial r \partial z^2} \right) - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) \right]^n \right. \\ & \left. - v^n \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} \right) + \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^2 \partial z} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} \right]^n \right\} \end{aligned} \quad (39)$$

Pelas hipóteses que permitem trabalhar com elementos lineares e, ainda, eliminando as derivadas cruzadas:

$$\nabla \cdot (k \cdot \vec{\nabla} \phi^n)_{(x-\delta)} \approx k \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right]^n - k \cdot \Delta t \cdot u^n \cdot \left[ -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) \right]^n \quad (40)$$

mas:

$$-\frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \quad (41)$$

assim:

$$\nabla \cdot (k \cdot \vec{\nabla} \phi^n)_{(x-\delta)} \approx k \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right]^n - k \cdot \Delta t \cdot u^n \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \right]^n \quad (42)$$

• Para o termo fonte  $Q^n$ :

$$Q^n_{(x-\delta)} = Q^n - \delta_r \frac{\partial Q^n}{\partial r} - \delta_z \frac{\partial Q^n}{\partial z} + O(\Delta t^2) \quad (43)$$

e fazendo uma aproximação de segunda ordem, tem-se:

$$Q^n_{(x-\delta)} \approx Q^n - \Delta t \cdot \left( u^n \cdot \frac{\partial Q^n}{\partial r} + v^n \cdot \frac{\partial Q^n}{\partial z} \right) \quad (44)$$

### 3.3 – Determinação da forma geral para a equação de transporte

Substituindo (37), (42) e (44) em (15), tem-se:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\Delta t} \right) \left\langle \phi^{n+1} - \left\{ \phi^n - \Delta t \left( u^n \frac{\partial \phi^n}{\partial r} + v^n \frac{\partial \phi^n}{\partial z} \right) + \frac{\Delta t^2}{2} \left[ u^n \frac{\partial}{\partial r} \left( u^n \frac{\partial \phi^n}{\partial r} \right) + v^n \frac{\partial}{\partial z} \left( v^n \frac{\partial \phi^n}{\partial z} \right) \right] \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\Delta t^2}{2} \left[ u^n \frac{\partial v^n}{\partial r} \frac{\partial \phi^n}{\partial z} + v^n \frac{\partial u^n}{\partial z} \frac{\partial \phi^n}{\partial r} \right] \right\} \right\rangle \approx \\ & \quad + \theta \left\{ k \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right]^{n+1} - Q^{n+1} \right\} \\ & \quad + (1-\theta) \cdot \left\{ k \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right]^n - k \cdot \Delta t \cdot \frac{u^n}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \right)^n \right\} \\ & \quad + (1-\theta) \cdot \left\{ -Q^n + \Delta t \cdot \left( u^n \cdot \frac{\partial Q^n}{\partial r} + v^n \cdot \frac{\partial Q^n}{\partial z} \right) \right\} \end{aligned} \quad (45)$$

e rearranjada esta expressão pode-se obter:

$$\begin{aligned}
\Delta\phi = \langle \phi^{n+1} - \phi^n \rangle = \Delta t & \left\{ k \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right]^{n+\theta} - Q^{n+\theta} - \left( u^n \frac{\partial \phi^n}{\partial r} + v^n \frac{\partial \phi^n}{\partial z} \right) \right\} \\
& + (1-\theta) \Delta t^2 \cdot \left[ \left( u^n \cdot \frac{\partial Q^n}{\partial r} + v^n \cdot \frac{\partial Q^n}{\partial z} \right) - k \cdot \frac{u^n}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \right)^n \right] \\
& + \frac{\Delta t^2}{2} \left[ u^n \frac{\partial}{\partial r} \left( u^n \frac{\partial \phi^n}{\partial r} \right) + v^n \frac{\partial}{\partial z} \left( v^n \frac{\partial \phi^n}{\partial z} \right) \right] \\
& + \frac{\Delta t^2}{2} \left[ u^n \frac{\partial v^n}{\partial r} \frac{\partial \phi^n}{\partial z} + v^n \frac{\partial u^n}{\partial z} \frac{\partial \phi^n}{\partial r} \right]
\end{aligned} \tag{46}$$

### 3.4 – Aplicação às equações de balanço de quantidade de movimento

As equações de balanço da quantidade de movimento, equações (2) e (3), podem ser adequadas de maneira a enquadrar-se na equação geral de transporte (46). Desta forma, a equação para cada uma das direções ( $U$  e  $V$ ) pode ser reescrita na forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial t} &= -\frac{\partial(uU)}{\partial r} - \frac{\partial(vU)}{\partial z} + \text{Pr} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rU)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right] - Q_x \\
\frac{\partial V}{\partial t} &= -\frac{\partial(vU)}{\partial r} - \frac{\partial(vV)}{\partial z} + \text{Pr} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] - Q_y
\end{aligned} \tag{47}$$

e a forma adaptada para as equações das características destas expressões, equivalente à expressão (46), considerando o esquema totalmente explícito para as derivadas das velocidades, podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
\Delta \tilde{U} = \langle \tilde{U}^{n+1} - \tilde{U}^n \rangle = \Delta t & \left\{ \text{Pr} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial z^2} \right]^n - Q_r^n - \left( u^n \frac{\partial \tilde{U}^n}{\partial r} + v^n \frac{\partial \tilde{U}^n}{\partial z} \right) \right\} \\
& + (1-\theta) \cdot \Delta t^2 \cdot \left[ \left( u^n \cdot \frac{\partial Q_r^n}{\partial r} + v^n \cdot \frac{\partial Q_r^n}{\partial z} \right) - \text{Pr} \cdot \frac{u^n}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} \right) \right)^n \right] \\
& + \frac{\Delta t^2}{2} \left[ u^n \frac{\partial}{\partial r} \left( u^n \frac{\partial \tilde{U}^n}{\partial r} \right) + v^n \frac{\partial}{\partial z} \left( v^n \frac{\partial \tilde{U}^n}{\partial z} \right) \right] \\
& + \frac{\Delta t^2}{2} \left[ u^n \frac{\partial v^n}{\partial r} \frac{\partial \tilde{U}^n}{\partial z} + v^n \frac{\partial u^n}{\partial z} \frac{\partial \tilde{U}^n}{\partial r} \right]
\end{aligned} \tag{48}$$

que representa a direção radial. A expressão para a velocidade na direção  $z$ , utilizando parâmetros equivalentes  $\tilde{V}$  e  $Q_z$ , utiliza-se de expressões semelhantes e, portanto, não será demonstrada.

A discretização por elementos finitos, utilizando-se o método de Galerkin, destes diversos termos, resulta num sistema linear de forma que:

$$[M] \Delta \tilde{U} = \Delta t \left( \text{Pr}[H] \cdot \tilde{U}^n - [M] Q_r^n - [C] \cdot \tilde{U}^n \right) + (1-\theta) \cdot \Delta t^2 \cdot \left( [C] \cdot Q_r^n - \text{Pr} \cdot [K_k] \cdot \tilde{U}^n \right) + \frac{\Delta t^2}{2} [K_u] \cdot \tilde{U}^n + [F_s] \quad (49)$$

que pode ainda ser rearranjado como:

$$[M] \Delta \tilde{U} = \Delta t \left[ \text{Pr}[H] - [C] + \Delta t \left( \frac{1}{2} [K_u] - \text{Pr} \cdot (1-\theta) \cdot [K_k] \right) \right] \cdot \tilde{U}^n + \Delta t \left( \Delta t (1-\theta) \cdot [C] - [M] \right) Q_r^n + [F_s] \quad (50)$$

sendo que as matrizes são calculadas de forma independente, como mostrado na seção posterior.

### 3.4.1 – Cálculo das matrizes elementares

De acordo com a discretização de Galerkin, cada uma das matrizes anteriores pode ser avaliada. O processo de discretização que gera cada uma das matrizes será detalhado a seguir.

- Matriz  $[M_u]$ :

$$[M_u] \Delta \tilde{U} = \int_{\Omega} N_{u,i} \cdot \Delta U^* d\Omega = \int_{\Omega} N_{u,i} \cdot N_{u,j} d\Omega \cdot \Delta U_j^* \rightarrow [M_u] = \int_{\Omega} N_{u,i} \cdot N_{u,j} d\Omega \quad (51)$$

- Matriz  $[H]$ :

Para este caso é necessário, antes, converter a expressão para sua forma fraca:

$$\int_{\Omega} N_u \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial z^2} \right] d\Omega = - \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{N_{u,i}}{r} \right) \left( r \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} \right) + \frac{\partial N_{u,i}}{\partial z} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} \right] d\Omega + \int_{\Gamma} N_{u,i} \cdot \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \vec{n}} \cdot d\Gamma \quad (52)$$

e depois disto, o cálculo da matriz  $[H]$  resulta em:

$$\begin{aligned} [H] &= - \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{N_{u,i}}{r} \right) \left( r \frac{\partial N_{u,j}}{\partial r} \right) + \frac{\partial N_{u,i}}{\partial z} \frac{\partial N_{u,j}}{\partial z} \right] d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial N_{u,i}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} N_{u,i} \right) \left( r \frac{\partial N_{u,j}}{\partial r} \right) + \frac{\partial N_{u,i}}{\partial z} \frac{\partial N_{u,j}}{\partial z} \right] d\Omega \end{aligned} \quad (53)$$

e o termo de superfície:

$$[f_H] = \int_{\Gamma} N_{u,i} \cdot \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \vec{n}} \cdot d\Gamma \quad (54)$$

• Matriz  $[C]$ :

$$[C] = \int_{\Omega} \left[ N_{u,i} \cdot u_n \cdot \frac{\partial N_{u,j}}{\partial r} + N_{u,i} \cdot v_n \cdot \frac{\partial N_{u,j}}{\partial z} \right] d\Omega \quad (55)$$

• Matriz  $[K_k]$ :

Também precisa ser convertida para a forma fraca e portanto:

$$\int_{\Omega} N_u u^n \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} \right) \cdot d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial (u^n N_u)}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} \right) \cdot d\Omega + \int_{\Gamma} u^n N_u \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} \cdot d\Gamma \quad (56)$$

e as matrizes relacionadas:

$$[K_k] = - \int_{\Omega} \frac{1}{r} \left( u^n \frac{\partial N_{u,i}}{\partial r} + N_{u,i} \frac{\partial u^n}{\partial r} \right) \cdot \left( \frac{\partial N_{u,j}}{\partial r} \right) \cdot d\Omega \quad (57)$$

e o termo de superfície:

$$[f_k] = \int_{\Gamma} \frac{u^n}{r} N_{u,i} \cdot \frac{\partial N_{u,j}}{\partial r} \cdot d\Gamma \quad (58)$$

• Matriz  $[K_u]$ :

Também precisa ser convertida para a forma fraca e, por simplificação apenas com o componente  $r$ :

$$\int_{\Omega} N_u \cdot \left[ u \frac{\partial}{\partial r} \left( u \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} \right) + u \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} \right] d\Omega = \int_{\Omega} \left[ N_u \cdot u \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} + N_u \cdot u^2 \cdot \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial r^2} + N_u u \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} \right] \cdot d\Omega \quad (59)$$

ou ainda

$$\int_{\Omega} \left[ N_u \cdot u \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} + N_u u \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} + N_u \cdot u^2 \cdot \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial r^2} \right] \cdot d\Omega = \int_{\Omega} N_u \cdot u \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} d\Omega + \int_{\Omega} N_u u \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} d\Omega + \int_{\Omega} N_u \cdot u^2 \cdot \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial r^2} d\Omega \quad (60)$$

mas apenas o último termo da expressão anterior precisa ser convertido para a sua forma fraca:

$$\int_{\Omega} N_u \cdot u^2 \cdot \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial r^2} d\Omega = - \int_{\Omega} \left[ u^2 \cdot \frac{\partial N_u}{\partial r} \cdot \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} + 2 \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \cdot N_u \cdot \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} \right] d\Omega + \int_{\Gamma} N_u \cdot u^2 \cdot \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} \cdot d\Gamma \quad (61)$$

Assim, utilizando a aproximação nodal, a expressão para o  $[K_u]$  na direção radial é:

$$[K_{ur}] = \int_{\Omega} u \frac{\partial u}{\partial r} \cdot N_{u,i} \cdot \frac{\partial N_{u,j}}{\partial r} d\Omega + \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial r} \cdot N_{u,i} \cdot \frac{\partial N_{u,j}}{\partial z} d\Omega - \int_{\Omega} \left[ u^2 \cdot \frac{\partial N_{u,i}}{\partial r} \cdot \frac{\partial N_{u,j}}{\partial r} + 2 \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \cdot N_{u,i} \cdot \frac{\partial N_{u,j}}{\partial r} \right] d\Omega \quad (62)$$

e o termo de superfície:

$$[f_{kr}] = \int_{\Gamma} u^2 \cdot N_{u,i} \cdot \frac{\partial U}{\partial r} \cdot d\Gamma \quad (63)$$

Por analogia, o componente na direção  $z$  é dado por:

$$[K_{uz}] = \int_{\Omega} v \frac{\partial v}{\partial z} \cdot N_{u,i} \cdot \frac{\partial N_{u,j}}{\partial z} d\Omega + \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial z} \cdot N_{u,i} \cdot \frac{\partial N_{u,j}}{\partial r} d\Omega - \int_{\Omega} \left[ v^2 \cdot \frac{\partial N_{u,i}}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_{u,j}}{\partial z} + 2 \cdot v \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \cdot N_{u,i} \cdot \frac{\partial N_{u,j}}{\partial z} \right] d\Omega \quad (64)$$

e o termo de superfície:



$$[f_{kz}] = \int_{\Gamma} v^2 \cdot N_{u,i} \cdot \frac{\partial V}{\partial z} \cdot d\Gamma \quad (65)$$

Desta forma, as matrizes completas são resultado da soma de suas componentes:

$$[K_u] = [K_{ur}] + [K_{uz}] \quad \text{e} \quad [f_u] = [f_{kr}] + [f_{kz}] = \int_{\Gamma} \vec{u}_n^2 \cdot N_{u,i} \cdot \frac{\partial \vec{U}_n}{\partial \vec{n}} \cdot d\Gamma \quad (66)$$

Assim todas as matrizes que aparecem na equação (50) foram definidas, exceto pela matriz dos termos de superfície  $[F_S]$ , que é o resultado da composição dos diversos componentes definidos anteriormente:

$$[F_S] = [f_u] + \text{Pr} \cdot ([f_H] - [f_k]) \quad (67)$$

### 3.4.2 – Tratamento do termo fonte $Q$

O termo fonte  $Q$  é normalmente utilizado para representar todos os termos que aparecem na expressão a ser resolvida, mas não na equação geral de transporte para a variável de interesse. Este termo pode representar diferentes grandezas como forças de pressão e campo, termos de geração de energia, além de uma série de outros.

Paras as equações de transporte da quantidade de movimento usando o termo fonte pode-se representar as forças de pressão, de empuxo e relacionados à turbulência dentre outros. Com relação ao termo de forças de pressão, existem diferentes abordagens de acordo com o método trabalhado, como pode ser visto nos diversos trabalhos que tratam do tema. Para um tratamento geral, o termo de pressão pode-se estabelecer uma discretização que vai de explícita a implícita na pressão como uma função de uma variável  $Q^{n+\theta_2}$ , sendo tratado como conhecido no instante  $t = t^n + \theta_2 \Delta t$ . Considerando o tratamento somente para a pressão tem-se que:

$$Q^{n+\theta_2} = \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} \quad (68)$$

sendo que para  $\Delta p = p^{n+1} - p^n$ :

$$\frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} = \theta_2 \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + (1-\theta_2) \frac{\partial p^n}{\partial x_i} = \frac{\partial p^n}{\partial x_i} + \theta_2 \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} \quad (69)$$

Embora este procedimento seja possível, por questões de estabilidade do método é usual não incluir o termo de pressão no primeiro passo da solução como sugerido no método definido como “Split A” no trabalho de Zienkiewicz e Taylor (2000). Segundo este modelo a velocidade pode ser estimada por:

$$\begin{aligned} U_i^{*,n+\theta} &= U^n + \theta \left( \Delta \tilde{U} - \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial r} \cdot \Delta t \right) \\ V_i^{*,n+\theta} &= V^n + \theta \left( \Delta \tilde{V} - \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial z} \cdot \Delta t \right) \end{aligned} \quad (70)$$

Para o caso de convecção natural, os termos fonte da equação da energia ficam igual ao das forças de empuxo na direção oposta a  $z$ . Assim sendo para uma cavidade vertical:

$$Q_r^{*,n+\theta} = \frac{u}{r^2} \cdot \text{Pr} \quad \text{e} \quad Q_z^{*,n+\theta} = \text{Ra} \cdot \text{Pr} \Theta^{n+\theta} \quad (71)$$

### 3.5 – A equação da pressão

A solução do campo de pressão, no caso do método considerado, utiliza-se da solução do campo de pressões em função da compressibilidade  $\epsilon$ , no caso do escoamento incompressível, utiliza-se a mesma solução com um coeficiente de compressibilidade determinado. Esta técnica recebe o nome de pseudo-compressibilidade. Ela se baseia na equação (1), utilizando um coeficiente de compressibilidade artificial  $\beta$  em substituição à velocidade do som  $c$ :

$$\Delta p = \left( \frac{1}{\beta^2} \right) \Delta p = -\Delta t \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u^{n+\theta}) + \frac{\partial v^{n+\theta}}{\partial z} \right] \quad (72)$$

Fazendo uma estimativa da velocidade de acordo com a expressão (70), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\Delta p &= \left(\frac{1}{\beta^2}\right) \Delta p = -\Delta t \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left[ U^n + \theta \left( \Delta \tilde{U} - \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial r} \Delta t \right) \right] \\
&\quad - \Delta t \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left[ V^n + \theta \left( \Delta \tilde{V} - \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial z} \Delta t \right) \right] \\
&= -\Delta t \cdot \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \cdot (U^n + \theta \Delta \tilde{U}) + \frac{\partial}{\partial z} (V^n + \theta \Delta \tilde{V}) \right] \\
&\quad + \Delta t^2 \cdot \theta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial z} \right) \right]
\end{aligned} \tag{73}$$

e utilizando o valor de  $\partial p^{n+\theta_2} / \partial x_i$ , de acordo com a equação (69), a expressão para a variação de pressão fica:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\beta^2}\right) \Delta p &= -\Delta t \cdot \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \cdot (U^n + \theta \Delta \tilde{U}) + \frac{\partial}{\partial z} (V^n + \theta \Delta \tilde{V}) \right] \\
&\quad + \Delta t^2 \cdot \theta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\partial p^n}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p^n}{\partial z^2} \right] + \Delta t^2 \cdot \theta \cdot \theta_2 \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\partial \Delta p^n}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Delta p^n}{\partial z^2} \right]
\end{aligned} \tag{74}$$

onde  $\Delta \tilde{U}_i$  é estimado pela equação (50). É importante observar que caso se utilize da formulação onde o termo de pressão for incluído no cálculo do  $Q$  da equação (50), este procedimento deve ser adaptado.

A equação (74) também pode ser discretizada de acordo com as aproximações de Galerkin e aproximação nodal, sendo a expressão resultante:

$$\begin{aligned}
([M_p] - \Delta t^2 \cdot \theta \cdot \theta_2 \cdot [H]) \Delta p^* &= -\Delta t \cdot \{ [G_r] \cdot (U^n + \theta \Delta \tilde{U}) + [G_z] \cdot (V^n + \theta \Delta \tilde{V}) \} \\
&\quad + \Delta t^2 \cdot \theta \cdot [H] \cdot P^n
\end{aligned} \tag{75}$$

onde as matrizes podem ser calculadas pela aplicação do método dos resíduos ponderados associados com discretização de Galerkin, como demonstrado a seguir. No procedimento original, optava-se por utilizar a forma fraca desta equação. Entretanto, neste caso optou-se por trabalhar com ela na sua forma original.

- Matriz  $[M_p]$ :

$$[M_p] = \int_{\Omega} N_{p,i} \cdot \frac{1}{\beta^2} \cdot N_{p,j} d\Omega \tag{76}$$

- Matriz  $[H_p]$ :

Para este caso é necessário, antes, converter a expressão para sua forma fraca:

$$[H_p] = \int_{\Omega} N_u \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial z^2} \right] d\Omega = - \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{N_{u,i}}{r} \right) \left( r \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} \right) + \frac{\partial N_{u,i}}{\partial z} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} \right] d\Omega + \int_{\Gamma} N_{u,i} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \vec{n}} \cdot d\Gamma \quad (77)$$

e depois disto, o cálculo da matriz  $[H_p]$  resulta em:

$$[H_p] = - \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{N_{p,i}}{r} \right) \left( r \frac{\partial N_{p,j}}{\partial r} \right) + \frac{\partial N_{p,i}}{\partial z} \frac{\partial N_{p,j}}{\partial z} \right] d\Omega = - \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial N_{p,i}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} N_{p,i} \right) \left( r \frac{\partial N_{p,j}}{\partial r} \right) + \frac{\partial N_{p,i}}{\partial z} \frac{\partial N_{p,j}}{\partial z} \right] d\Omega \quad (78)$$

e o termo de superfície:

$$[f_H] = \int_{\Gamma} N_{p,i} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \vec{n}} \cdot d\Gamma \quad (79)$$

- Matriz  $[G_r]$ :

Expandindo a derivada do produto para a coordenada radial, tem-se que:

$$\int_{\Omega} \frac{N_{u,i}}{r} \frac{\partial (r U^n)}{\partial r} d\Omega = \int_{\Omega} N_{u,i} \frac{\partial U^n}{\partial r} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{N_{u,i}}{r} \cdot U^n d\Omega \quad (80)$$

que por sua vez pode ser discretizada na forma:

$$[G_r] = \int_{\Omega} N_{u,i} \frac{\partial N_{u,j}}{\partial r} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{N_{u,i}}{r} \cdot N_{u,j} d\Omega \quad (81)$$

- Matriz  $[G_z]$ :

$$[G_z] = \int_{\Omega} N_{u,i} \frac{\partial N_{u,j}}{\partial z} d\Omega \quad (82)$$

### 3.6 – A equação da correção das velocidades

A equação de correção de velocidades é utilizada para que a partir do campo de pressões e correções de velocidade se calcule a velocidade no instante posterior. Esta equação é uma generalização da equação (46), considerando a inclusão do gradiente de pressão no termo  $Q$  (equação (68)):

$$\begin{aligned}\Delta U_i^* &= \Delta \tilde{U} - \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial r} \cdot \Delta t + (1-\theta) \left( u^n \cdot \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial p^n}{\partial r} + v^n \cdot \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p^n}{\partial r} \right) \cdot \Delta t^2 \\ \Delta V_i^* &= \Delta \tilde{V} - \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial z} \cdot \Delta t + (1-\theta) \left( u^n \cdot \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial p^n}{\partial z} + v^n \cdot \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p^n}{\partial z} \right) \cdot \Delta t^2\end{aligned}\quad (83)$$

que pode ser simplificado ainda substituindo a equação (69) em (83) :

$$\begin{aligned}\Delta U_i^* &= \Delta \tilde{U} - \Delta t \cdot \left( \frac{\partial p^n}{\partial r} + \theta_2 \cdot \frac{\partial \Delta p^n}{\partial r} \right) + (1-\theta) \cdot \left( u^n \cdot \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial p^n}{\partial r} + v^n \cdot \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p^n}{\partial r} \right) \cdot \Delta t^2 \\ \Delta V_i^* &= \Delta \tilde{V} - \Delta t \cdot \left( \frac{\partial p^n}{\partial z} + \theta_2 \cdot \frac{\partial \Delta p^n}{\partial z} \right) + (1-\theta) \cdot \left( u^n \cdot \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial p^n}{\partial z} + v^n \cdot \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p^n}{\partial z} \right) \cdot \Delta t^2\end{aligned}\quad (84)$$

Novamente, será preciso aplicar o método de resíduos ponderados associado à discretização por Galerkin, que pode ser representado por:

$$\begin{aligned}[M_u] \cdot \Delta U_i^* &= [M_u] \cdot \Delta \tilde{U} - \Delta t \cdot [G_{pr}] \cdot (P^n + \theta_2 \cdot \Delta p) + (1-\theta) \cdot \Delta t^2 [P_r] \cdot P^n + [F_{cvr}] \\ [M_u] \cdot \Delta V_i^* &= [M_u] \cdot \Delta \tilde{V} - \Delta t \cdot [G_{pz}] \cdot (P^n + \theta_2 \cdot \Delta p) + (1-\theta) \cdot \Delta t^2 [P_z] \cdot P^n + [F_{cvz}]\end{aligned}\quad (85)$$

onde a matriz  $[M_u]$  foi definida anteriormente e as demais matrizes serão definidas a seguir.

- Matriz  $[G_{pr}]$ :

$$[G_{pr}] = \int_{\Omega} N_{u,i} \frac{\partial N_{p,j}}{\partial r} d\Omega \quad (86)$$

- Matriz  $[G_{pz}]$  (se  $N_u = N_p$  então  $[G_{pz}] = [G_z]$ ):

$$[G_{pz}] = \int_{\Omega} N_{u,i} \frac{\partial N_{p,j}}{\partial z} d\Omega \quad (87)$$

- Matriz  $[P_r]$  :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} N_{u,i} \left( u^n \cdot \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial p^n}{\partial r} + v^n \cdot \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p^n}{\partial r} \right) d\Omega = & - \int_{\Omega} u^n \cdot \frac{\partial N_{u,i}}{\partial r} \frac{\partial p^n}{\partial r} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\partial u^n}{\partial r} \cdot N_{u,i} \cdot \frac{\partial p^n}{\partial r} d\Omega - \int_{\Omega} v^n \cdot \frac{\partial N_{u,i}}{\partial z} \frac{\partial p^n}{\partial r} d\Omega \quad (88) \\
& - \int_{\Omega} \frac{\partial v^n}{\partial z} \cdot N_{u,i} \cdot \frac{\partial p^n}{\partial r} d\Omega + \int_{\Gamma} (u+v) N_{u,i} \frac{\partial p}{\partial r} d\Gamma
\end{aligned}$$

que feita a aproximação nodal da pressão, resulta em:

$$\begin{aligned}
[P_r] = & - \int_{\Omega} u^n \cdot \frac{\partial N_{u,i}}{\partial r} \frac{\partial N_{u,j}}{\partial r} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial u^n}{\partial r} \cdot N_{u,i} \cdot \frac{\partial N_{p,j}}{\partial r} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} v^n \cdot \frac{\partial N_{u,i}}{\partial z} \frac{\partial N_{p,j}}{\partial r} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial v^n}{\partial z} \cdot N_{u,i} \cdot \frac{\partial N_{p,j}}{\partial r} d\Omega \quad (89)
\end{aligned}$$

e o termo de superfície:

$$[F_{cvr}] = \int_{\Gamma} \vec{u}_n N_{u,i} \frac{\partial N_{p,j}}{\partial r} d\Gamma \quad (90)$$

- Matriz  $[P_z]$  : de forma análoga:

$$\begin{aligned}
[P_z] = & - \int_{\Omega} u^n \cdot \frac{\partial N_{u,i}}{\partial r} \frac{\partial N_{p,j}}{\partial z} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial u^n}{\partial r} \cdot N_{u,i} \cdot \frac{\partial N_{p,j}}{\partial z} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} v^n \cdot \frac{\partial N_{u,i}}{\partial z} \frac{\partial N_{p,j}}{\partial z} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial v^n}{\partial z} \cdot N_{u,i} \cdot \frac{\partial N_{p,j}}{\partial z} d\Omega \quad (91)
\end{aligned}$$

e o termo de superfície:

$$[F_{cvz}] = \int_{\Gamma} \vec{u}_n N_{u,i} \frac{\partial N_{p,j}}{\partial z} d\Gamma \quad (92)$$

### 3.7 – Compressibilidade artificial

O valor do fator da velocidade do som utilizado na equação (1) pode acarretar restrições na escolha do incremento de tempo. Deste modo, normalmente é utilizado um parâmetro  $\beta$  como um fator de compressibilidade artificial, que, sem comprometer os resultados, ameniza os efeitos impostos ao incremento de tempo. Este fator, não está associado às propriedades físicas do fluido, mas aos diferentes números de Prandtl e também

aos diferentes regimes (denominados convecção e difusão).

Segundo Nithiarasu (2003), o valor utilizado para a compressibilidade artificial pode ser calculado conforme segue:

$$\beta_{\tau} = \max(\varepsilon, v_{conv}, v_{diff}) \quad (93)$$

onde  $\varepsilon = 0,5$  é uma constante,  $v_{conv}$  é a velocidade convectiva e  $v_{diff}$  é a velocidade de difusão, que podem ser calculadas conforme segue:

$$v_{conv} = (u_i u_i)^{1/2} \quad (94)$$

$$v_{diff} = \frac{2}{h \cdot Pr} \quad (95)$$

sendo  $h$  o valor da menor dimensão do elemento considerado.

### 3.8 – Incremento de tempo

O incremento de tempo é um parâmetro muito importante em soluções, pois deve ser o maior possível de forma que não comprometa a estabilidade da solução e, também, diminua a quantidade de passos a serem utilizados para atingir a solução em regime permanente.

O incremento de tempo, segundo Zienkiewicz e Taylor (2000), é calculado através da seguinte fórmula:

$$\Delta t_c = \frac{h}{u + \beta_{\tau}} \quad (96)$$

Ao valor obtido, deve-se aplicar um fator de segurança que deve ser estimado de forma iterativa, ou seja, considera-se o valor encontrado na execução da solução e verifica-se a ocorrência da estabilidade da solução, em caso negativo deve-se multiplicar o valor por um percentual deste número até que a estabilidade seja mantida. Neste trabalho, o valor utilizado foi de 0,7, pois foi o máximo valor testado ao qual o programa executou o código sem gerar divergência. Assim:

$$\Delta t = FS * \Delta t_c \quad (97)$$

onde  $FS$  é o fator de segurança utilizado.

### 3.9 – Método semi-implícito

O uso do método semi-implícito implica em diferentes esquemas de aproximação no tempo. Neste caso, o procedimento é análogo ao anteriormente descrito alterando-se apenas os parâmetros:

- Manter apenas a solução da velocidade de forma explícita e nas demais equações considerar  $\theta_1 = 1$  e  $\theta_2 = 1$ ;
- Estabelecer um ponto de pressão referencial inicial para rodar a rotina de solução;
- Não calcular a compressibilidade artificial e estabelecer um valor tendendo a infinito para o valor de  $\beta^2$ , no caso o valor adotado foi de  $1 \times 10^{20}$ .

### 3.10 – Ausência do termo característico

No desenvolvimento do trabalho, optou-se por testar o uso e a omissão dos termos característicos nas expressões utilizadas por Zienkiewicz e Taylor (2000) e Nithiarasu (2003) em seus trabalhos para verificar a influência no desenvolvimento da solução. Este fato representa, neste caso, a eliminação das matrizes:

- $[K_u]$ ,  $[K_k]$  e  $[C] \cdot Q_r^n$  da equação (50). Podendo ser reescrita da seguinte forma:

$$[M] \Delta \tilde{U} = \Delta t (\text{Pr}[H] - [C]) \cdot \tilde{U}^n - \Delta t [M] Q_r^n + [F_s] \quad (98)$$

- $[P_r]$  e  $[P_z]$  da equação (85). Podendo ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} [M_u] \cdot \Delta U_i^* &= [M_u] \cdot \Delta \tilde{U} - \Delta t \cdot [G_{pr}] \cdot (P^n + \theta_2 \cdot \Delta p) \\ [M_u] \cdot \Delta V_i^* &= [M_u] \cdot \Delta \tilde{V} - \Delta t \cdot [G_{pz}] \cdot (P^n + \theta_2 \cdot \Delta p) \end{aligned} \quad (99)$$



### 3.11 – A equação de conservação de energia

Pela solução da equação de conservação de energia ser similar à da equação de conservação quantidade de movimento tem-se, neste ítem, uma descrição resumidamente de sua solução.

A equação de conservação de energia, equação (4), pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\frac{\partial(u\Theta)}{\partial r} - \frac{\partial(v\Theta)}{\partial z} + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial(\Theta)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right] \quad (100)$$

Aplicando-se o método das características à equação (100) obtém-se uma equação semelhante à equação (48), que após discretizá-la, utilizando o método dos elementos finitos juntamente com o método de Galerkin, tem-se como resultante o seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned} [M] \Delta \tilde{\Theta} = \Delta t \left[ [H] - [C] + \Delta t \left( \frac{1}{2} [K_u] - \text{Pr} \cdot (1 - \theta) \cdot [K_k] \right) \right] \cdot \tilde{\Theta}^n \\ + \Delta t (\Delta t (1 - \theta) \cdot [C] - [M]) Q_r^n + [F_s] \end{aligned} \quad (101)$$

onde as matrizes  $[M]$ ,  $[H]$ ,  $[C]$ ,  $[K_k]$ ,  $[K_u]$  e  $[F_s]$  podem ser calculadas através das equações (51)a (67).

A solução desta equação permite calcular o valor da “desvio da temperatura” que se somado ao valor conhecido resultará na temperatura do próximo passo. O procedimento é similar ao descrito para as equações de velocidade e pressão.

### 3.12 – Procedimento geral de solução

O procedimento geral de solução usando um modelo transiente é utilizado com base nos parâmetros calculados neste capítulo. O fluxograma desse procedimento pode ser observado na Figura 5 e seu resumo consiste nas seguintes etapas:

- (a) É calculada a variação da velocidade nodal auxiliar ( $\Delta \tilde{U}$  e  $\Delta \tilde{V}$ ) através da equação (50);

- (b) É calculada a variação da pressão nodal ( $\Delta p^*$ ) através da equação (75) utilizando os valores das velocidades nodais auxiliares calculadas no item “a”;

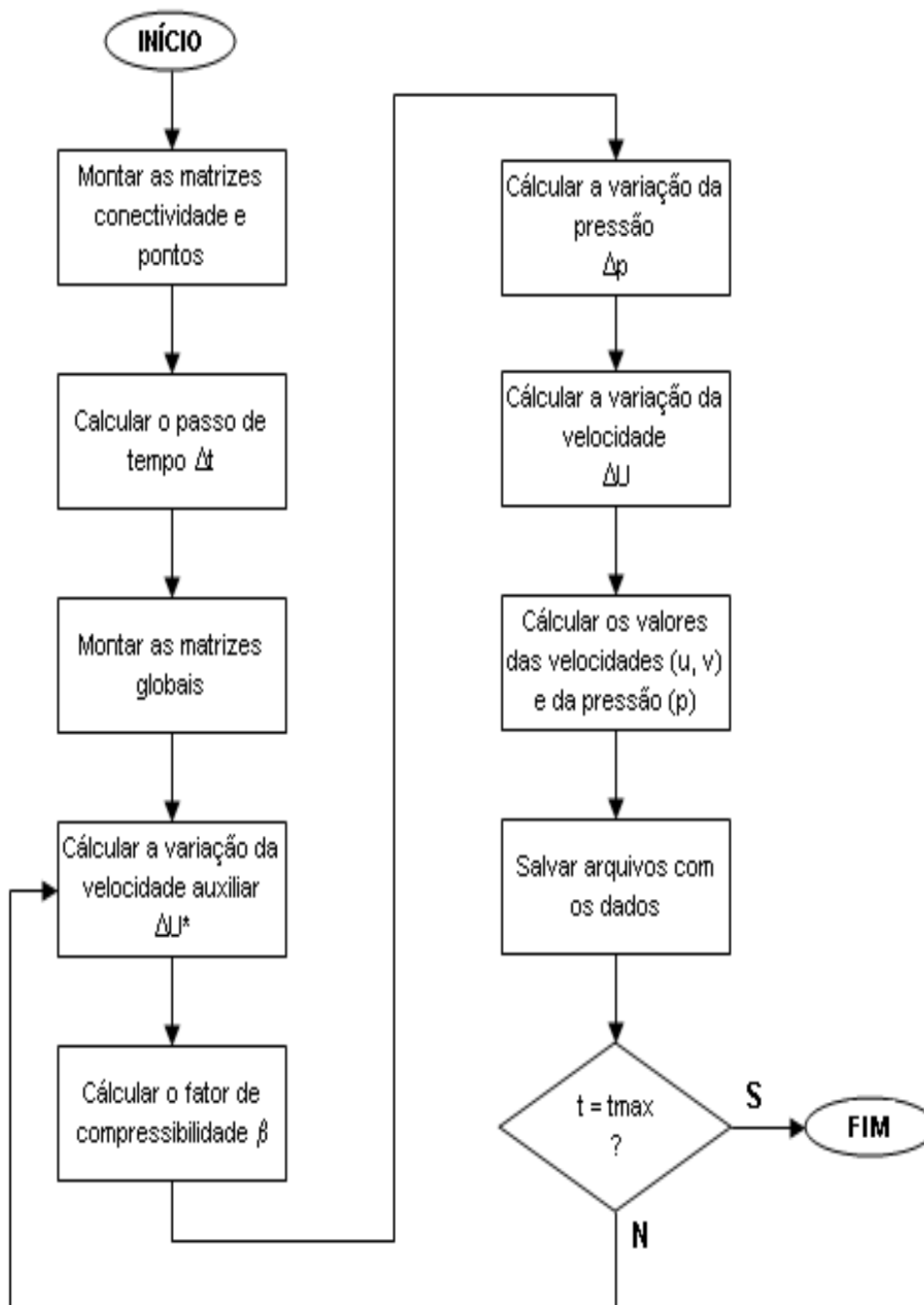


Figura 5: Fluxograma geral do processo de solução.

- (c) É calculada a variação da velocidade nodal ( $\Delta U^*$ ) através da equação (85) utilizando os valores das velocidades nodais auxiliares calculado no item “a” e a variação da pressão nodal calculado no item “b”;
- (d) Esta sequência de procedimento se repete até que a variável de tempo ( $t=t+\Delta t$ ) seja igual ao valor de ( $t_{\text{máx}}$ ). Ou seja, o processo continua até o número de iterações estipulado, pode-se também convencionar um grau de convergência, onde o processo deve parar ao atingí-lo.

## **4 – RESULTADOS E DISCUSSÕES**

O presente trabalho utiliza os esquemas explícito e semi-implícito, apresentando, ainda, resultados para as diversas condições com e sem o uso do termo característico. O código computacional utilizado para as rotinas, como comentado anteriormente, foi implementado sobre uma plataforma matemática: o GNU-Octave (2008), similar ao MATLAB. Todas as sub-rotinas foram escritas na forma de funções que eram chamadas a partir do programa principal.

A montagem da malha foi feita através de splines para gerar uma malha de comportamento suave e evitando alterações bruscas no tamanho dos elementos. A malha, foi ajustada de maneira a se apresentar mais refinada nas proximidades da parede onde se encontram as variações mais acentuadas de velocidades e temperaturas. Um exemplo da malha utilizada na razão de curvatura 0.5 pode ser visto na Figura 6. As demais malhas apenas estariam deslocadas em função do raio inicial, mas apresentariam a mesma estrutura.

Com esta malha, foram resolvidos alguns problemas testes para a validação do modelo e, depois disto, resolvidos os casos para diversas razões de curvatura e métodos de solução, também foram resolvidos alguns casos para diferentes números de Rayleigh.

### **4.1 – Validação do modelo**

#### **4.1.1 – Analisando um problema no plano cartesiano**

A validação do modelo foi feita com base em uma solução tomada no plano e normalmente usada como referência quando se trata de solução de convecção natural. A

solução original foi feita por Vahl Davis (1983) apud Ismail e Scalon (2000) e outros autores, onde foram obtidas soluções em diversas malhas e a solução referencial foi apresentada depois através do uso de Extrapolação de Richardson. No caso deste trabalho, tomou-se como base Ismail e Scalon (2000), que cita o artigo original, como padrão, por adicionar outros valores de comparação.

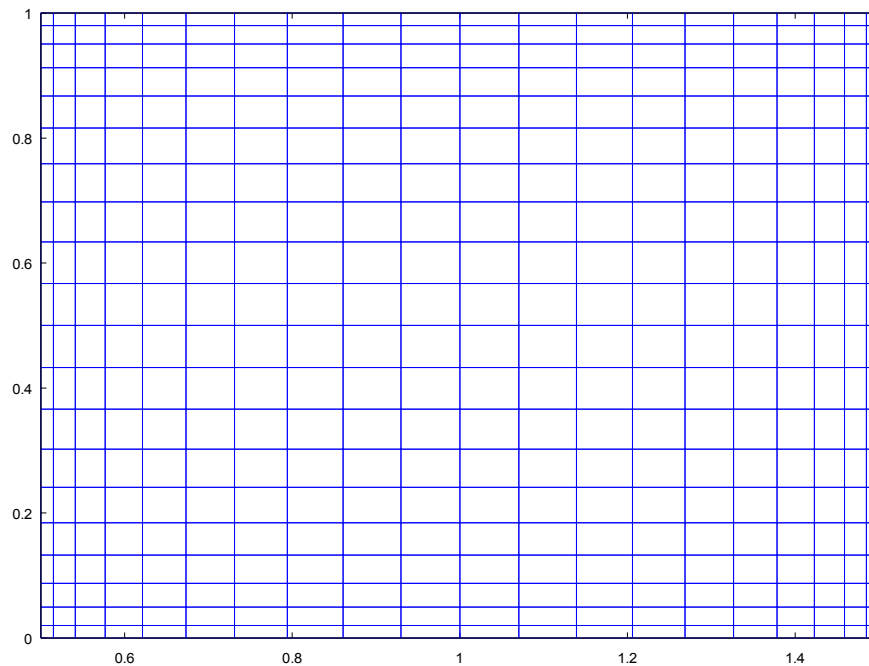


Figura 6: Malha utilizada na solução do problema.

Para efeitos de comparação foi tomado o valor de  $Ra = 10^6$ . Por se tratar de um problema de geometria plana, o efeito circunferencial será minorado trabalhando-se com uma razão de curvatura muito pequena. Para o caso estudado foi utilizado uma razão de curvatura de 1/100. Neste caso, as paredes laterais são aquecidas de um lado e resfriadas de outro, de modo a coincidirem com as condições do trabalho de referência. Uma comparação dos valores obtidos pode ser vista na Tabela 1. Cabe ressaltar que, como os resultados foram obtidos em coordenadas cilíndricas e a solução referencial foi tomada no plano cartesiano, admiti-se, para poder compará-los, o eixo  $z$  correspondente ao  $y$  e o eixo  $r$  correspondente ao  $x$ .

A análise da Tabela 1 mostra que os resultados obtidos a partir desta metodologia apresentam-se próximos dos da solução referencial, obtida por Vahl Davis (1983) apud Ismail e Scalon (2000). Inclusive, pode-se destacar que os valores do número de

Nusselt são os que apresentam a melhor coincidência dentre todos os analisados. Essa concordância de resultados, indica que a formulação está adequada e, portanto, pode ser utilizada para obter resultados da geometria proposta.

Tabela 1: Comparação de alguns resultados, utilizando malha 21x21, com outros disponíveis na literatura.

Referência	$V_{n,max}$	$Nu_{max}$	$Nu_{med}$
Vahl Davis (Solução Referencial)	219,36 ( $y=0,0379$ )	17,925 ( $y=0,0378$ )	8,8
Este Trabalho	231,65 ( $y=0,041$ )	16,81 ( $y=0,06$ )	8,74
Vahl Davis	195,44 ( $y=0,0447$ )	14,22 ( $y=0,124$ )	9,03
Ismail & Scalon	220,48 ( $y=0,04454$ )	15,2 ( $y=0,09$ )	8,93

#### 4.1.2 – Análise dos perfis de velocidades

Um outro teste foi realizado comparando-se o perfil de velocidades no interior da cavidade. Embora resultados para convecção natural em cavidades cilíndricas não sejam comuns, encontrou-se uma solução apresentada por Schneider e Straub (1992). Neste estudo, o perfil de velocidades resultantes numa cavidade cilíndrica aquecida pela superfície inferior, com  $Ra=5 \times 10^3$  e  $Pr=0,71$ , é investigado, como pode ser observado na Figura 7, Cabe ressaltar que no teste, optou-se por utilizar uma razão geométrica igual a 1, devido à simetria existente no problema.

Os perfis de velocidades apresentados na Figura 9, para este caso, não apresentaram grandes diferenças do resultado que foi obtido por Schneider e Straub (1992), ver Figura 8 . Uma análise quantitativa não foi possível de se realizar, mas nota-se que as velocidades maiores são encontradas no eixo de simetria ( $r=0$ ), a direção da circulação é a mesma e, além disso, houve o desenvolvimento de apenas uma célula recirculante em torno do ponto  $z=0,4$  e  $r=0,6$ .

Devido à semelhança encontrada nos perfis de velocidades resultantes e levando-se em consideração a comparação quantitativa realizada anteriormente. Assim sendo,

entende-se que o método de solução é eficaz para a análise de situações envolvendo geometrias cilíndricas.

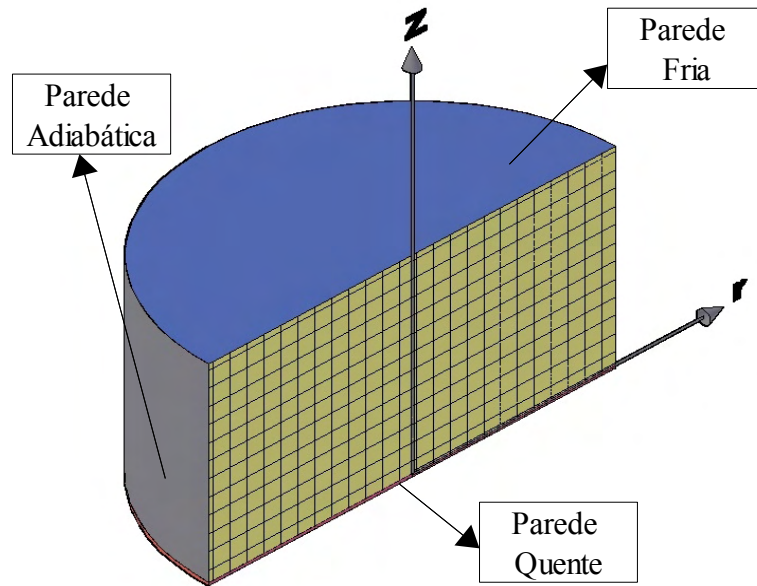


Figura 7: Geometria do problema proposto por Schneider e Straub (1992).

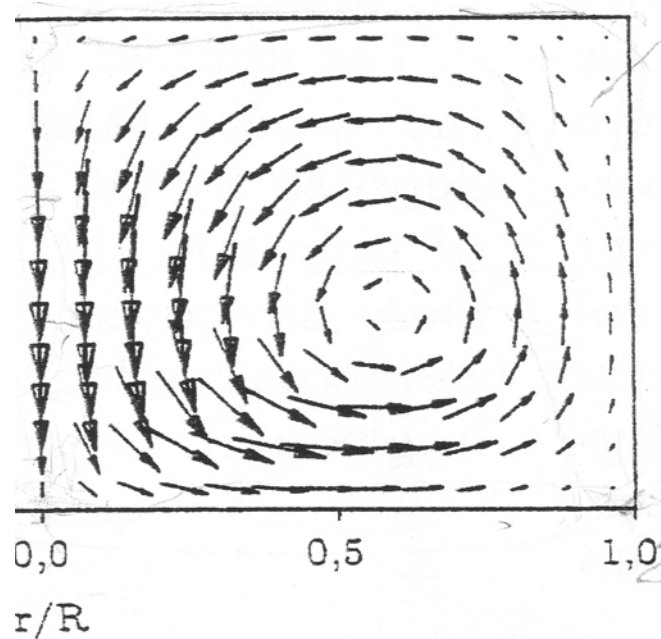


Figura 8: Resultado para o perfil de velocidades obtido por Schneider e Straub (1992).

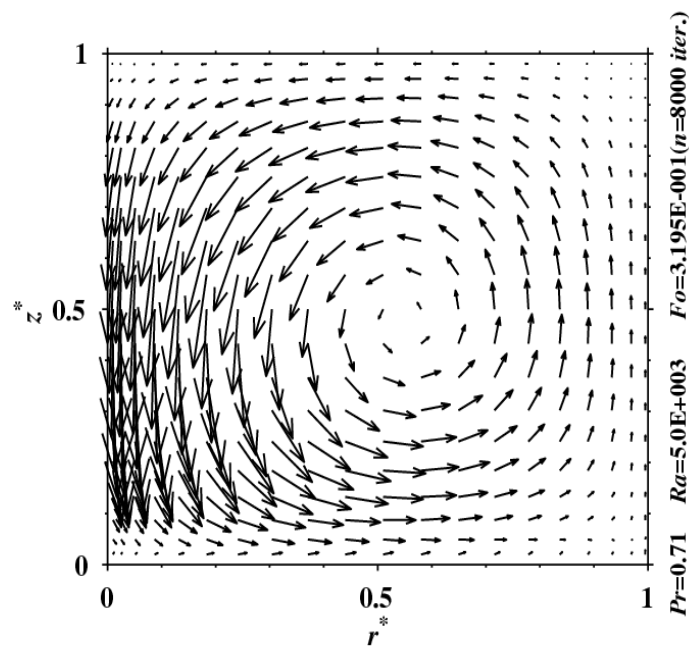


Figura 9: Resultado para o perfil de velocidades obtido neste trabalho.

#### 4.2 – Análise do problema para os esquemas explícito, semi-implícito, com e sem o uso dos termos característicos

Após a validação dos resultados, com a finalidade de analisar os diferentes métodos de solução e suas respectivas diferenças, serão utilizados, em conjunto com outros gráficos, as distribuições das velocidades  $u$  e  $v$  ao longo dos eixos centrais. Estes resultados são largamente utilizados na literatura e, normalmente, o perfil de velocidades  $u$  é tomado no eixo central vertical enquanto o de velocidade  $v$ , é tomado no eixo central horizontal, conforme pode ser observado na Figura 10. Para a elaboração dos gráficos, como citado anteriormente, foi utilizada a ferramenta GRI, desenvolvida por Kelley e Galbraith, GRI (2008).

Pensando-se numa melhor avaliação dos métodos de solução e tendo em vista verificar se o número de Rayleigh seria um fator influente na decisão do método de solução utilizado, os testes foram realizados para dois diferentes números de Rayleigh,  $Ra = 10^3$  e  $Ra = 10^6$ . Estes valores restringem a solução ao regime laminar, já que



termos de turbulência não foram considerados. Para ambos os casos, a parede aquecida foi a interna, a razão de curvatura utilizada foi mantida igual a 2 e a razão geométrica igual a 1, o número de Prandtl permaneceu fixo e igual a 0,7 e o número de iterações realizadas foi de 5.000 passos, utilizando um incremento de tempo correspondente a 70% do máximo incremento possível, segundo critério estabelecido pela equação (97), para Rayleigh igual a  $10^3$  e de 60% para Rayleigh igual a  $10^6$ .

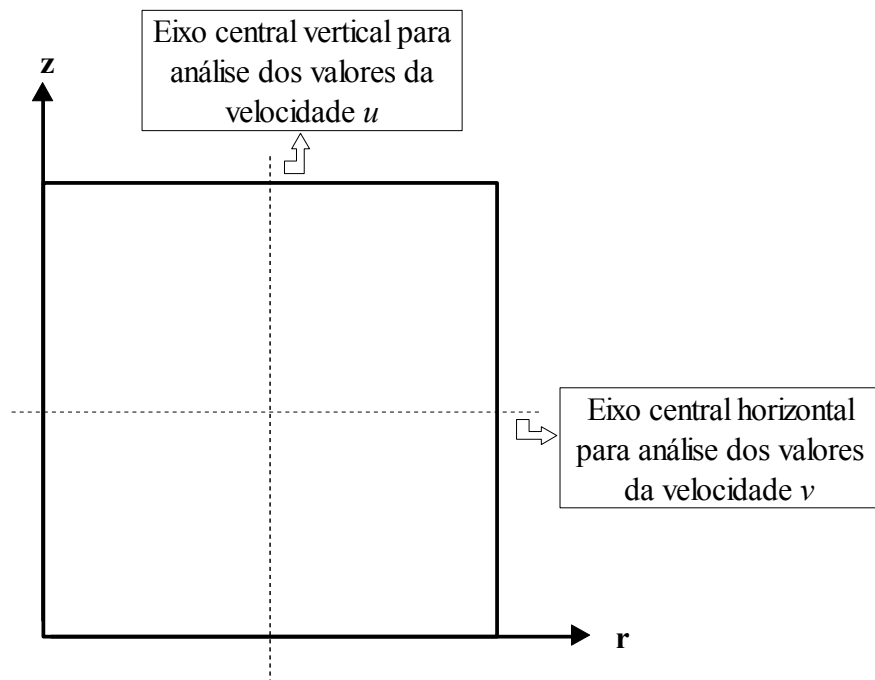
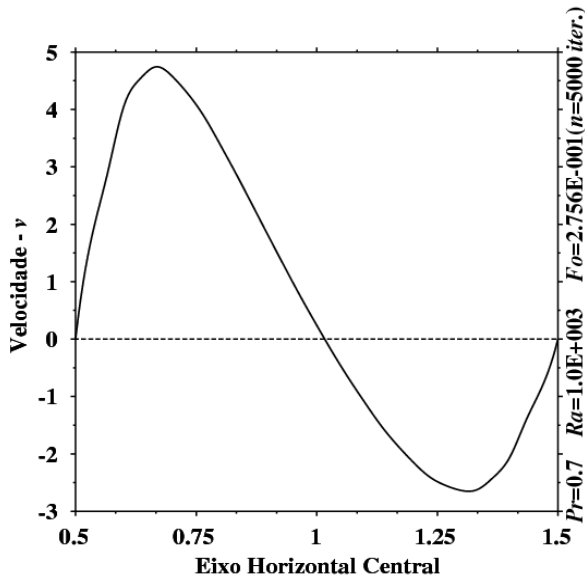


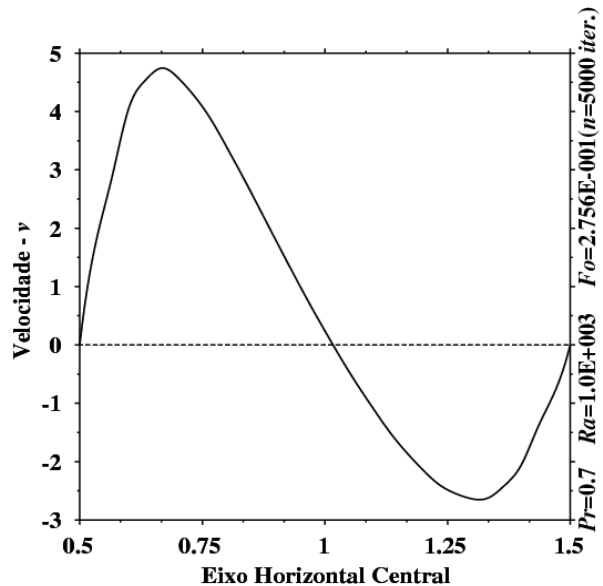
Figura 10: Esquema mostrando as linhas onde estão localizados os resultados para a montagem dos gráficos comparativos.

A Figura 11 exhibe o comportamento das velocidades  $v$  (na direção  $z$ ) em relação ao seu eixo central para  $Ra = 10^3$ , obtidas através dos variados métodos de solução. Neste caso, pode-se notar que houve pequenas variações entre si, sendo as discrepâncias mais acentuadas quando se utiliza o esquema explícito sem o uso dos termos característicos. O mesmo pode ser verificado quando se analisa o comportamento das velocidades  $u$  (na direção radial) em relação ao seu eixo central, mostrado na Figura 12. Observa-se que houve uma similaridade em tais comportamentos, sendo que o maior desvio se apresenta quando se utiliza o esquema explícito sem o uso dos termos característicos. Essa

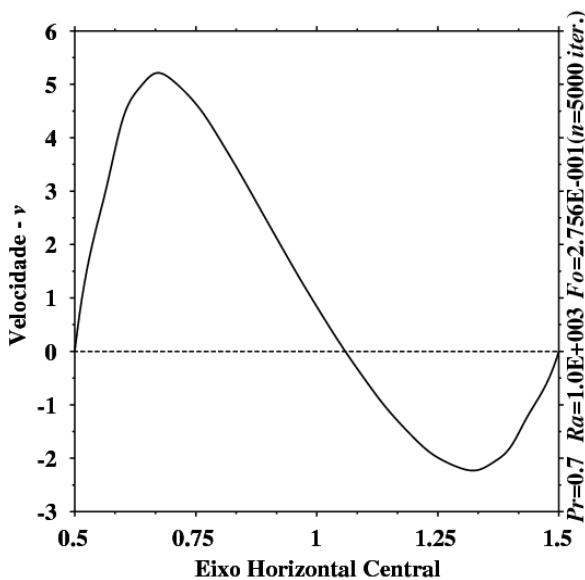
situação indica que este método de solução apresenta menor velocidade de convergência. Entretanto, se utilizados um maior número de iterações, possivelmente haveria uma convergência de todos os modelos.



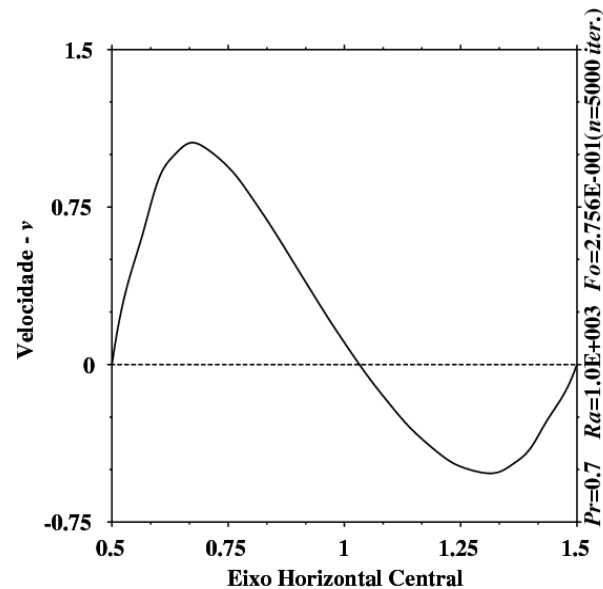
a) Semi-implícito com os termos característicos



b) Semi-implícito sem os termos característicos



c) Explícito com os termos característicos

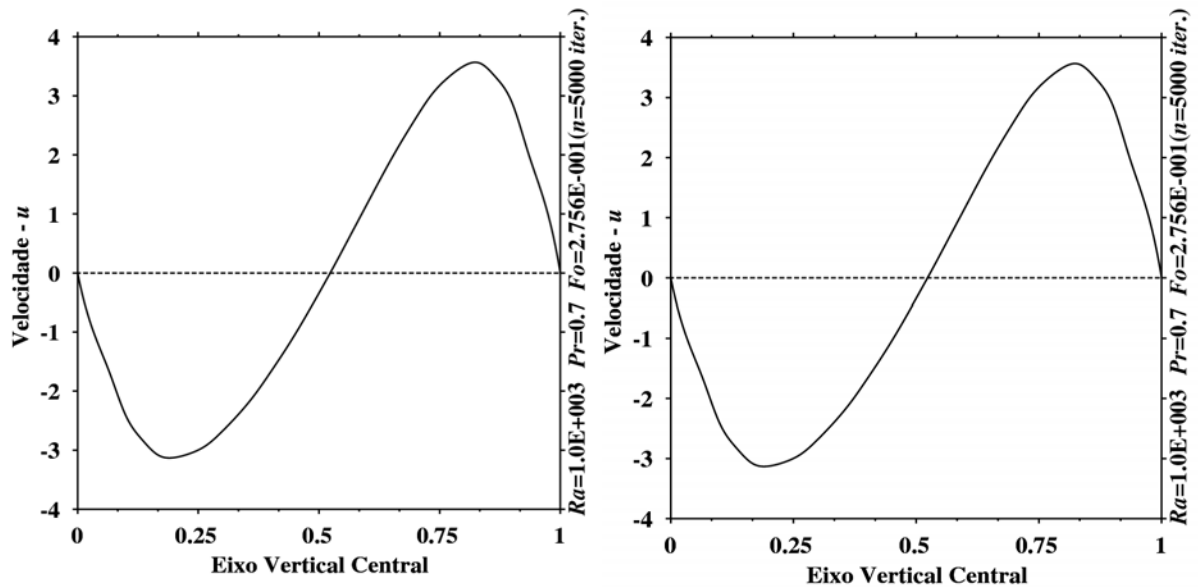


d) Explícito sem os termos característicos

Figura 11: Comportamento da velocidade  $v$  em relação ao seu eixo central para  $Ra=10^3$ .

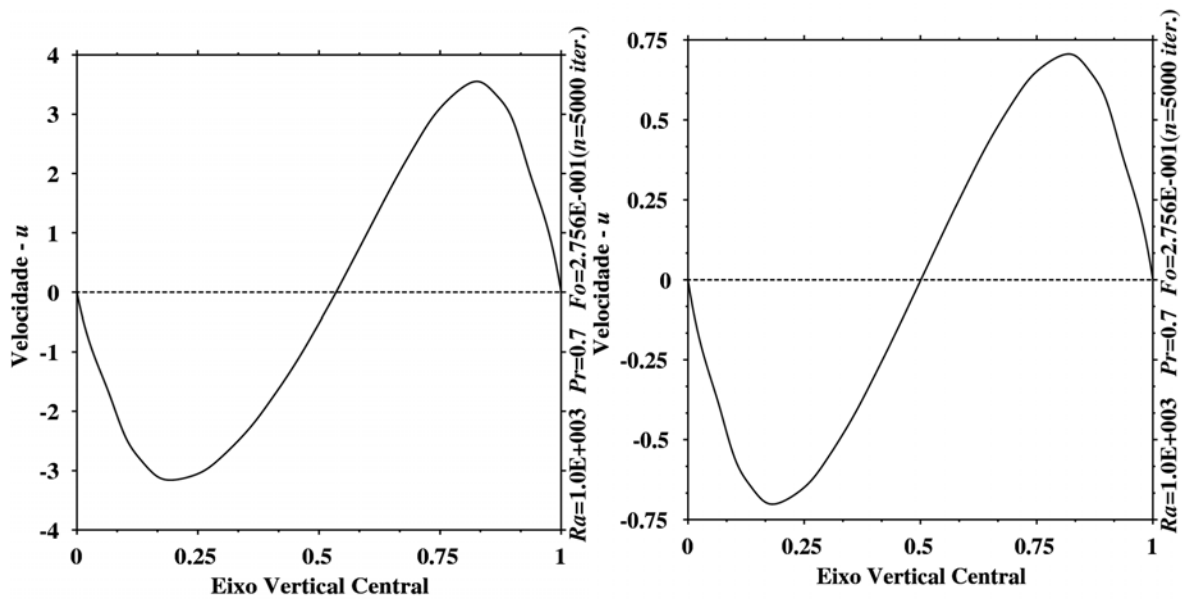
A hipótese desta convergência mais lenta do esquema explícito em relação ao implícito, pôde ser verificada em diferentes instantes de tempos intermediários, obtidos

durante a análise dos resultados. Notou-se que, para o mesmo instante de tempo, o esquema semi-implícito apresentava frequentemente uma melhor convergência.



a) Semi-implícito com os termos característicos

b) Semi-implícito sem os termos característicos



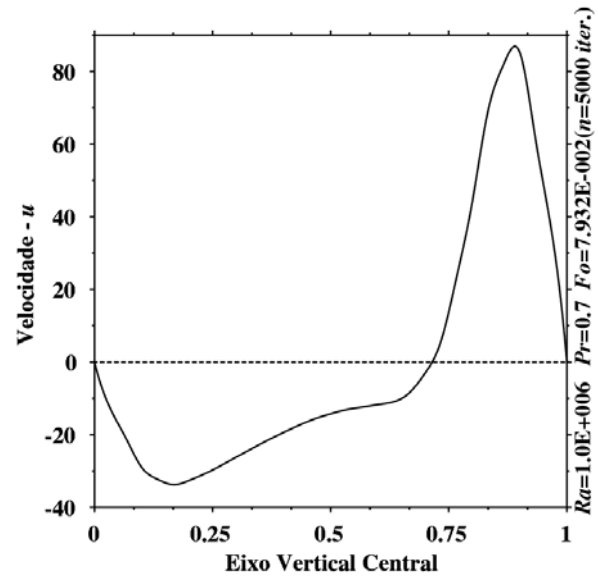
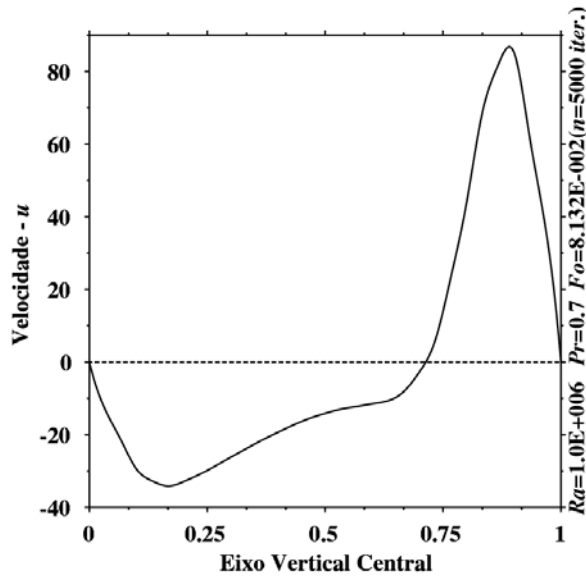
c) Explícito com os termos característicos

d) Explícito sem os termos característicos

Figura 12: Comportamento da velocidade  $u$  em relação ao seu eixo central para  $Ra=10^3$ .

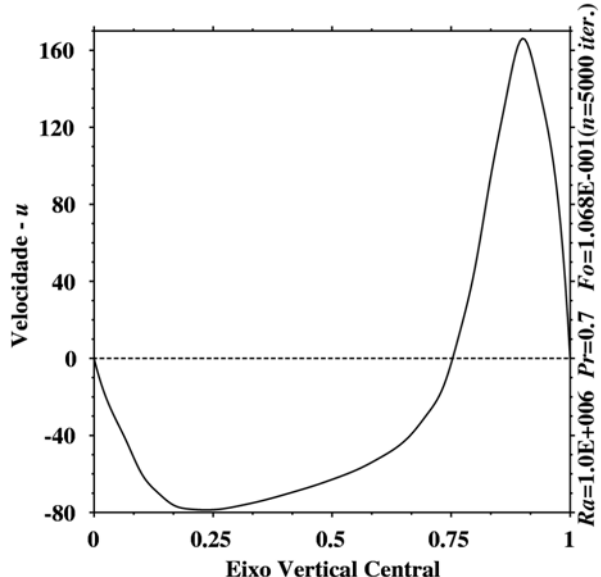
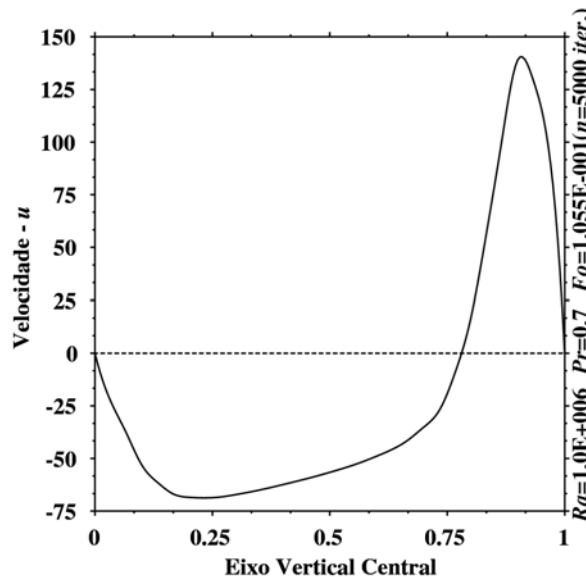
Os perfis de velocidades  $u$  e  $v$  para  $Ra=10^6$  em relação aos seus eixos centrais estão mostrados respectivamente nas Figura 13 e Figura 14. Neste caso, a diferença encontrada foi em relação ao método de solução utilizado, novamente nota-se que as

maiores distinções estão relacionadas ao tipo de esquema utilizado, o esquema semi-implícito apresentou velocidade de convergência maior que o explícito. Tal situação se evidencia ao se comparar as velocidades  $v$  em relação ao seu eixo central. Observa-se também, que em relação ao uso dos termos característicos, não foram encontradas diferenças significativas para nenhum dos casos.



a) Semi-implícito com os termos característicos

b) Semi-implícito sem o os termos característicos



c) Explícito com os termos característicos

d) Explícito sem os termos característicos

Figura 13: Comportamento da velocidade  $u$  em relação ao seu eixo central para  $Ra=10^6$ .

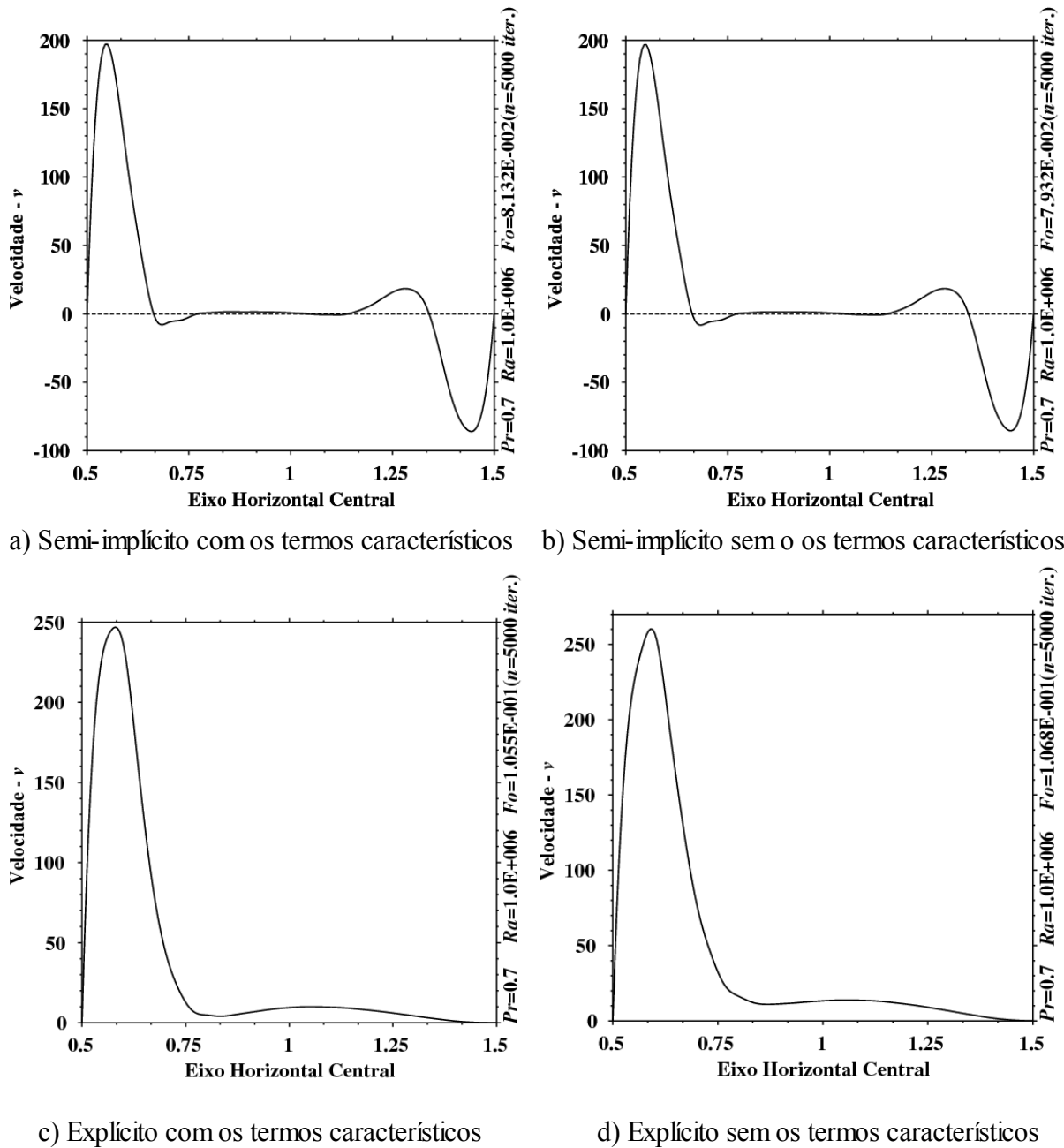
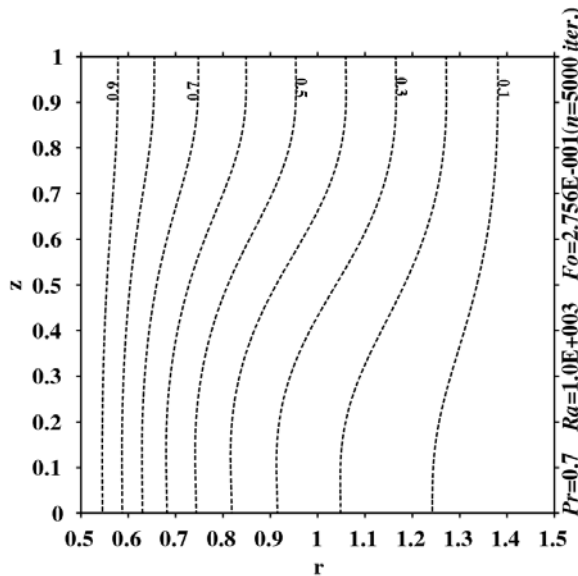


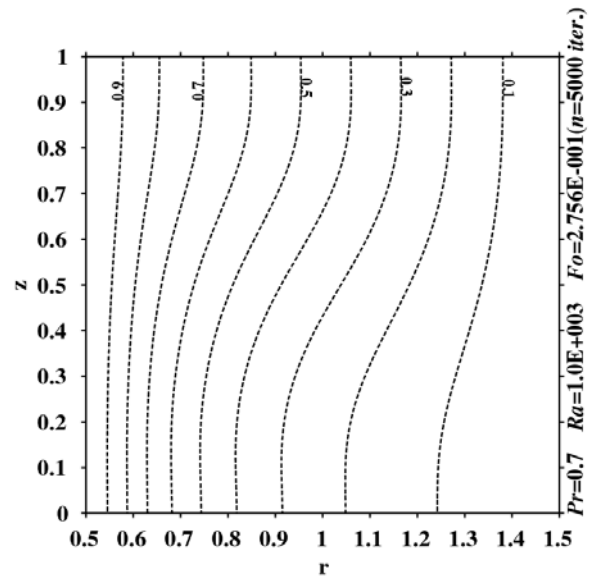
Figura 14: Comportamento da velocidade  $v$  em relação ao seu eixo central para  $Ra=10^6$ .

Analisando-se agora os perfis de temperaturas resultantes, observa-se um comportamento similar ao verificado para os campos de velocidades discutidos anteriormente. Neste caso, as diferenças entre os esquemas se acentuam ainda mais comprovando as observações anteriormente realizadas. pode-se notar que para  $Ra=10^3$  a maior diferença encontrada foi a resultante do método explícito sem o uso dos termos característico, ver Figura 15, observa-se também, que em tal esquema de solução os isothermas encontram-se

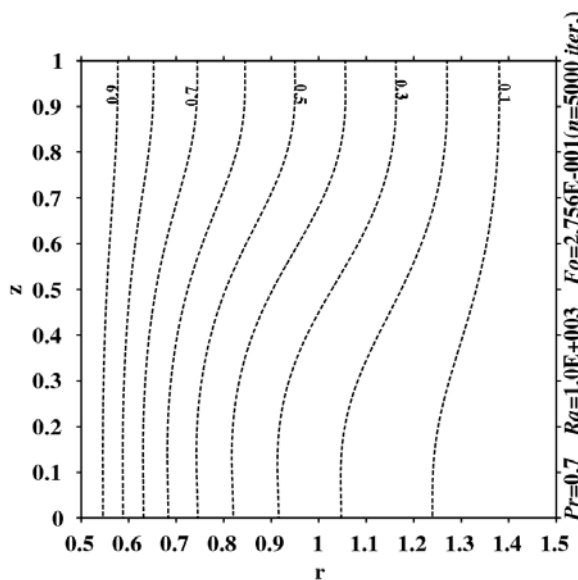
praticamente alinhados, comportamento similar ao de um problema difusivo. Nos demais casos, entretanto, é possível verificar pequenas inclinações nas linhas, principalmente na sua parte superior, que caracterizam alterações provocadas pela movimentação natural do fluido.



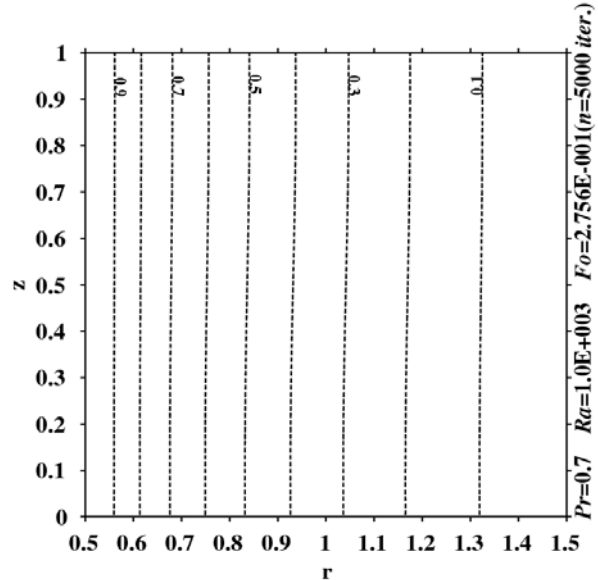
a) Semi-implícito com os termos característicos



b) Semi-implícito sem o os termos característicos



c) Explícito com os termos característicos

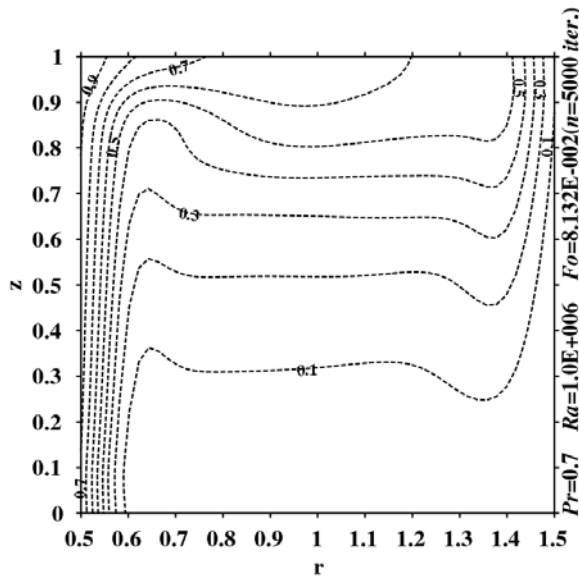


d) Explícito sem os termos característicos

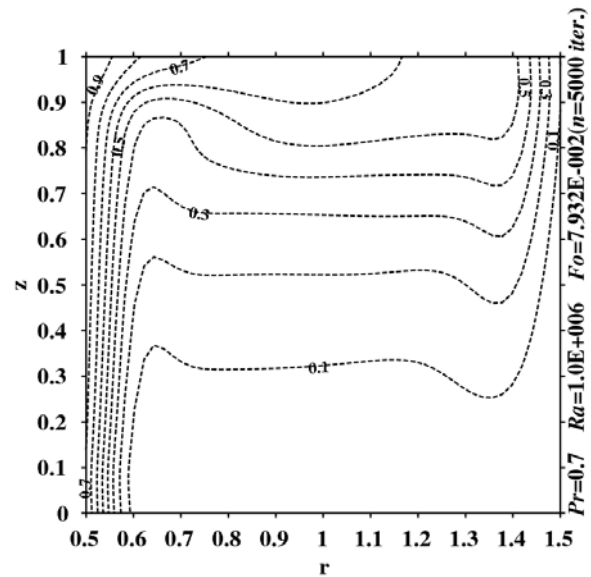
Figura 15: Perfil de temperatura para  $Ra=10^3$ .

Para  $Ra=10^6$ , observar na Figura 16, tais inclinações se evidenciam, principalmente ao se utilizar o esquema semi-implícito de solução, dando uma idéia de maior

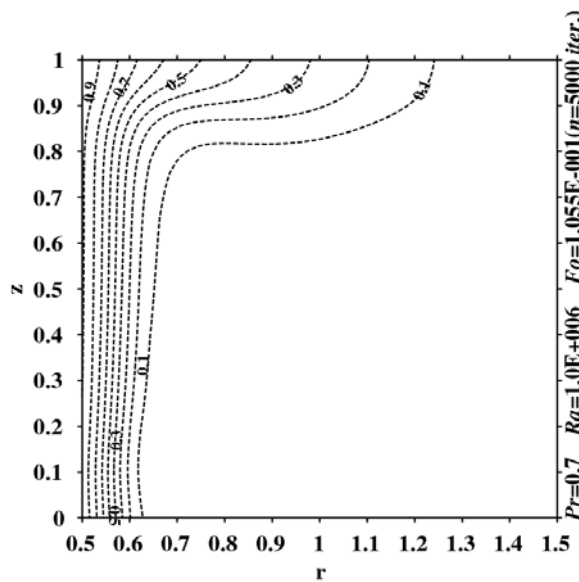
convergência de tal esquema e comprovando as observações anteriormente realizadas. Quanto à distinção encontrada para  $Ra=10^6$ , está na escolha do método de solução a ser utilizado.



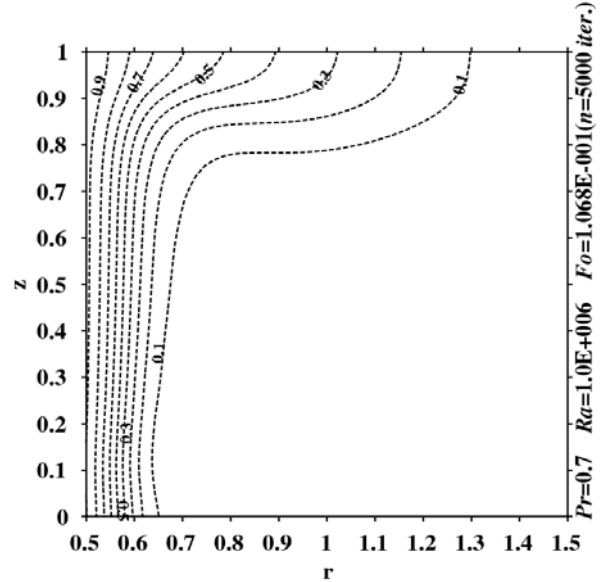
a) Semi-implícito com os termos característicos



b) Semi-implícito sem o os termos característicos



c) Explícito com os termos característicos



d) Explícito sem os termos característicos

Figura 16: Perfil de temperatura para  $Ra=10^6$ .

A análise dos perfis de velocidade e função corrente mostrou pequenas diferenças entre os modelos para o caso de  $Ra=10^3$ , observar Figura 17. Porém, estas

diferenças se acentuam bastante no caso em que  $Ra=10^6$ , como pode ser observado na Figura 18.

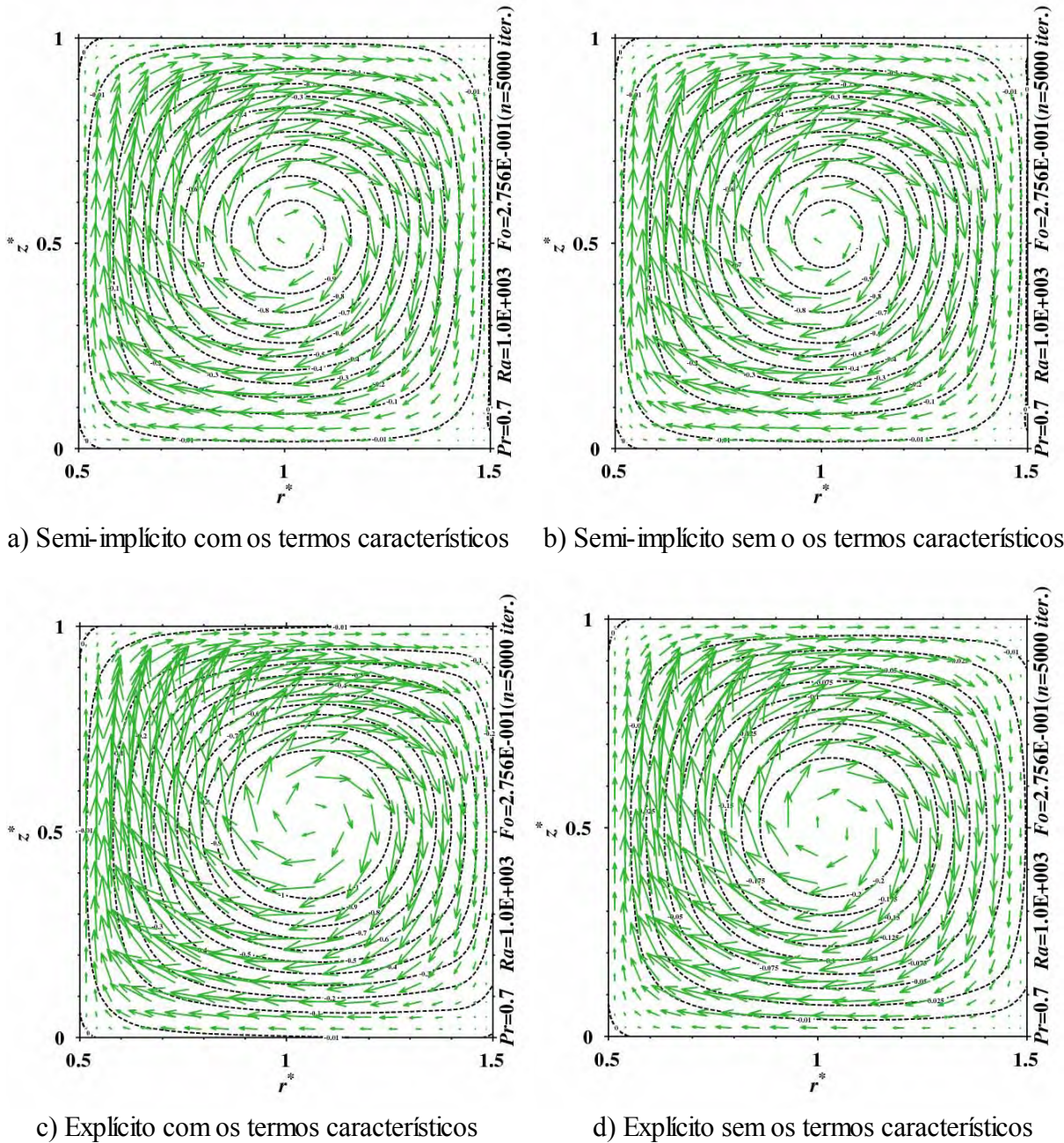


Figura 17: Perfil de velocidade e função corrente para  $Ra=10^3$ .



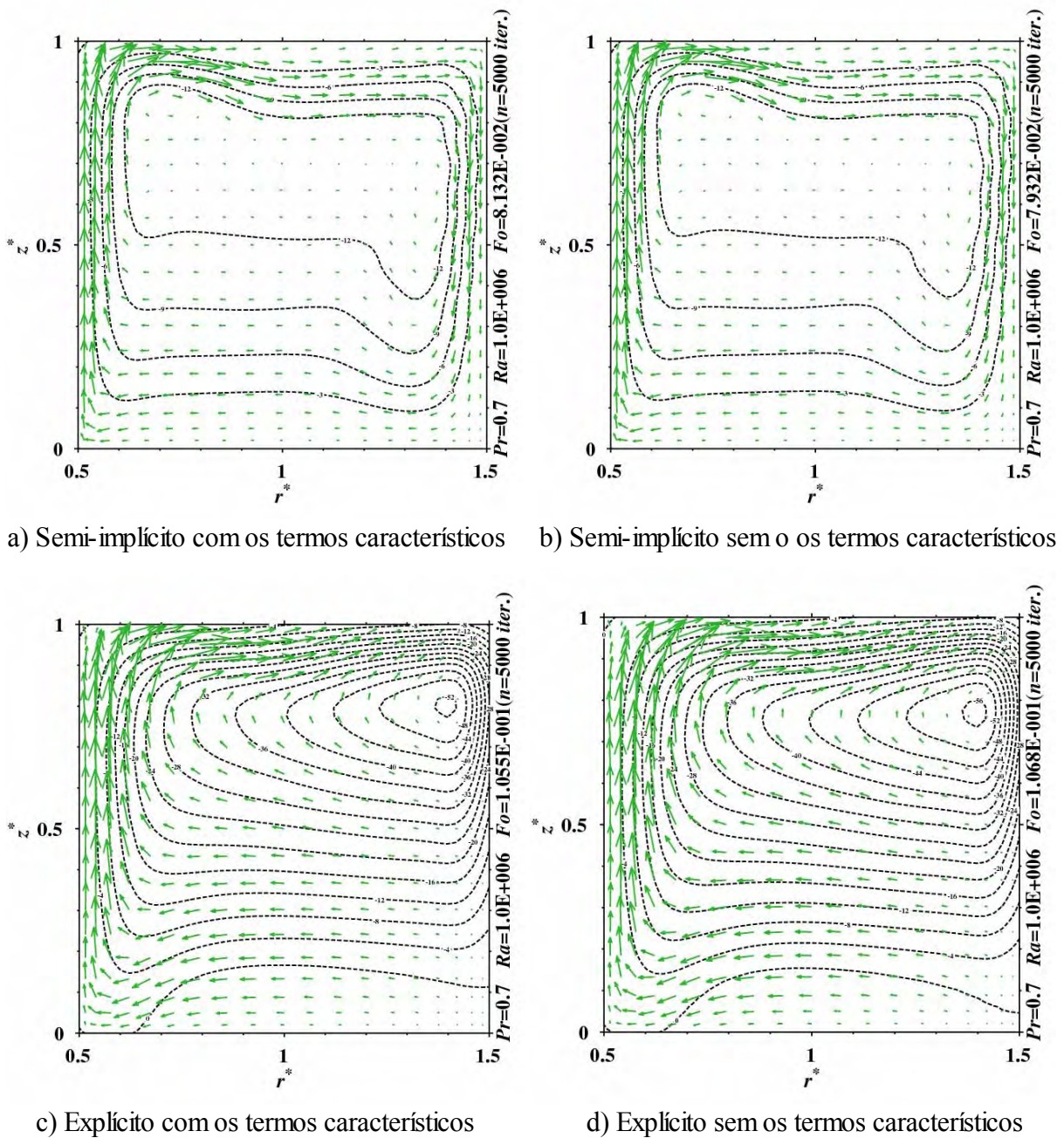


Figura 18: Perfil de velocidade e função corrente para  $Ra=10^6$ .

Para confirmar as afirmações feitas anteriormente, de que o método semi-implícito tem convergência mais rápida que o explícito, a Figura 19 e a Figura 20 mostram o desvio de pressão em relação ao número de iterações para  $Ra=10^3$  e  $Ra=10^6$ , respectivamente, calculado através da norma dois do vetor do desvio da pressão, dividido pelo

termo de compressibilidade artificial  $\beta^2$ . Os resultados dão uma idéia da velocidade de convergência de cada modelo e mostram a acentuada velocidade de convergência do esquema semi-implícito. Pode-se notar claramente, que para  $Ra=10^6$ , tal esquema, independentemente do uso ou não dos termos característicos, tem uma velocidade de convergência maior do que o esquema explícito, este fato pode ser verificado pelo próprio número de passos necessários para atingir um erro de  $10^2$ , para o esquema semi-implícito são necessários 5.000 passos, enquanto para o explícito seriam necessários um maior número de passos, tendo em vista que com 5.000 passos atingiu um erro de  $10^5$ . Já para  $Ra=10^3$ , cabe ressaltar que apesar do esquema explícito sem a utilização do termo característico mostrar-se mais convergente, não se pode afirmar que o realmente seja, pois nota-se que tal método estava oscilando na convergência ao resultado e ainda, considerando os resultados obtidos nos gráficos apresentados anteriormente, tal esquema foi o qual mais divergiu dos demais, logo, pode-se admitir que para  $Ra=10^3$  a utilização do esquema semi-implícito também obteve resultados mais convergentes.

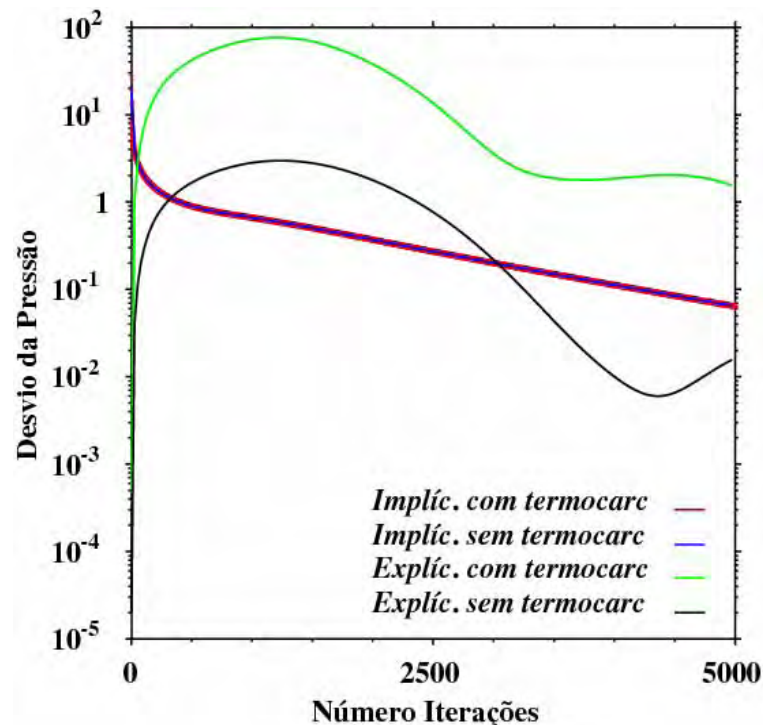


Figura 19: Desvio da pressão em função do número de iterações para  $Ra=10^3$ .

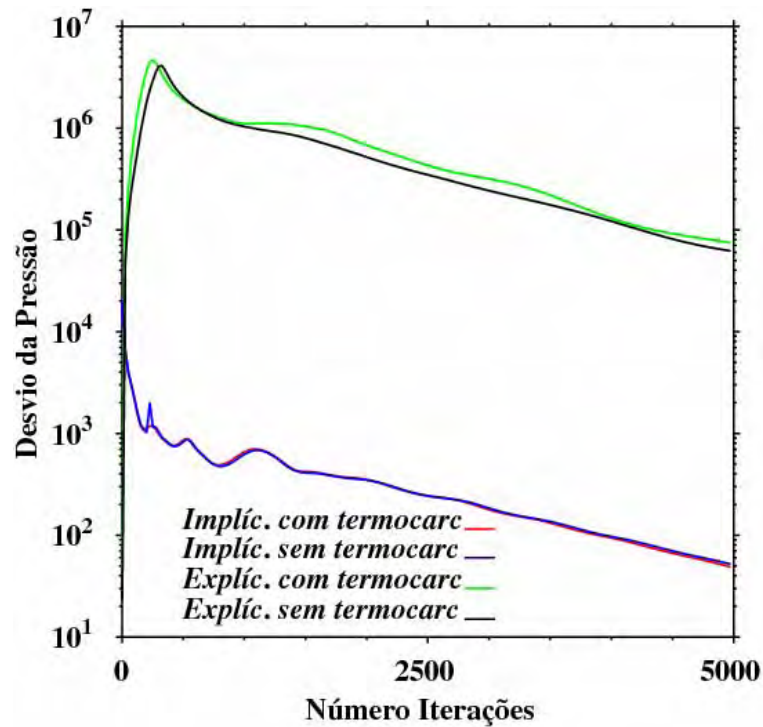


Figura 20: Desvio da pressão em função do número de iterações para  $Ra=10^6$ .

As Figura 21 e Figura 22 revelam a relação entre o tempo computacional utilizado no processo de solução e o número de iterações, para  $Ra=10^3$  e  $Ra=10^6$ . Pode-se observar que em ambos os casos, a utilização dos termos característicos foi quem influenciou no tempo computacional gasto, ou seja, a não utilização de tais termos resulta num tempo computacional menor, bem como, a utilização dos mesmos ocasiona um maior tempo computacional gasto para o processo. Convém destacar, que o tempo computacional resultante, em todos os casos, está em segundos e o computador utilizado para executar o código do programa tem as seguintes características: Processador: Intel(R) Core(TM)2 Duo CPU T5550 1,83GHz; Memória Ram: 2GB; Sistema Operacional: Windows Vista, 32Bits; HD: 150GB.

Também é importante ressaltar que o algoritmo usado para a solução de sistemas de equações lineares pelo GNU-Octave é bastante eficiente e não implica em aumentos perceptíveis no tempo necessário para a solução quando se usa o esquema semi-implícito no lugar do explícito. Entretanto, a presença de termos característicos na solução altera significativamente o tempo necessário para a solução do problema. Isto se deve à

necessidade de montagem de uma matriz adicional e este, por sua vez, é um dos maiores responsáveis pelo consumo de tempo na implementação realizada .

Devido as análises feitas anteriormente, poderia-se concluir, que o melhor método de solução a ser utilizado, pensando num menor tempo computacional gasto, numa melhor convergência do processo e consequentemente num melhor resultado, para ambos números de Rayleigh, o processo semi-implícito sem a utilização dos termos característicos seria o ideal, porém, uma última análise realizada, demonstra que o número de Rayleigh influencia na decisão do método de solução a se utilizar.

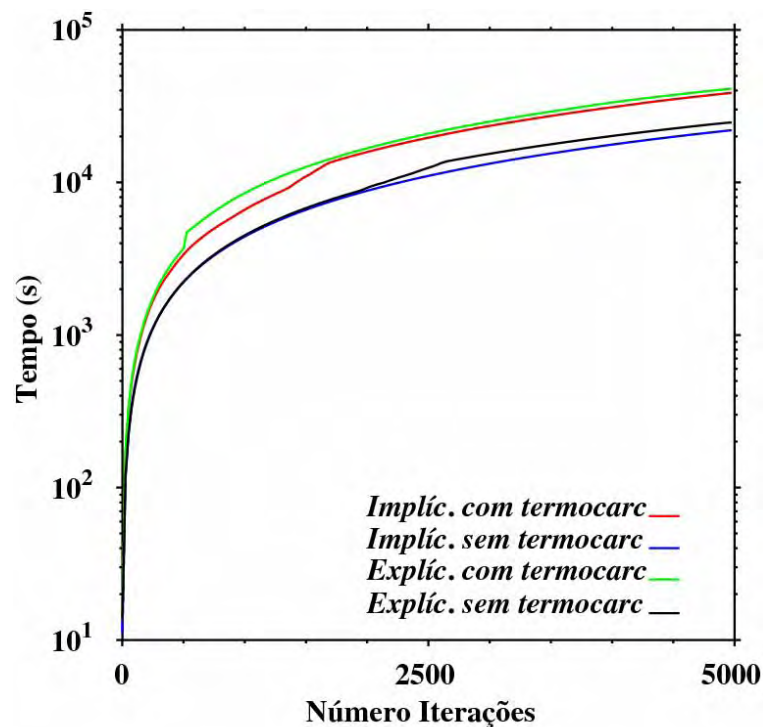


Figura 21: Tempo computacional gasto em função do número de iterações para  $Ra=10^3$ .

A Figura 23 revela o comportamento do número de Nusselt na parede interna para  $Ra=10^3$ , observa-se que o esquema semi-implícito de solução, seja com ou sem o uso dos termos característicos, gerou um comportamento do Nu semelhante. No entanto, para  $Ra=10^6$ , tal semelhança não se aplica, nota-se pela Figura 24 uma grande diferença entre os valores de Nu resultantes. Para o esquema semi-implícito com uso do termo característico obteve-se maiores valores de Nu, isso acontece pois os termos característicos estão relacionados às matrizes de temperaturas.

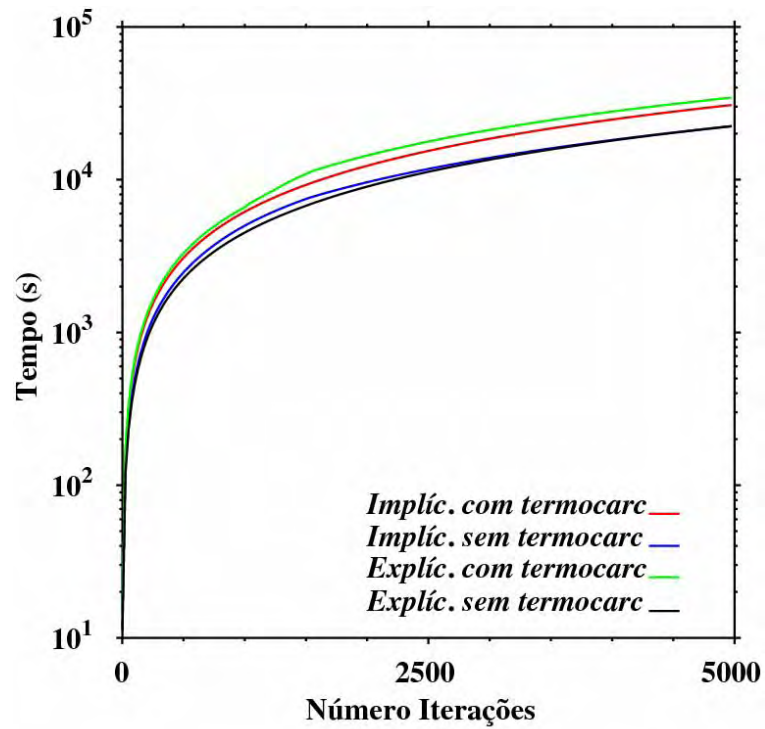


Figura 22: Tempo computacional gasto em função do número de iterações para  $Ra=10^6$ .

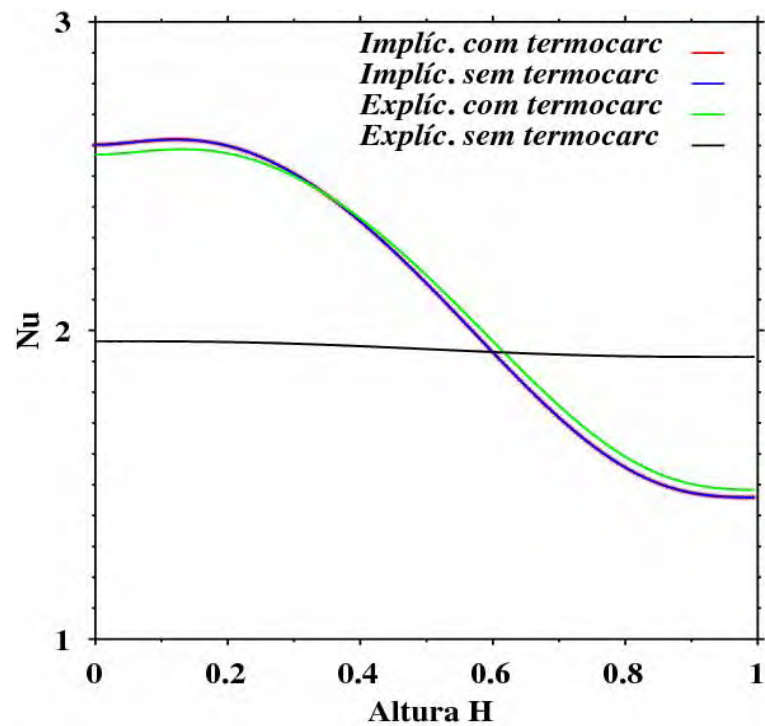


Figura 23: Comportamento do número de Nusselt em função da parede aquecida para os diversos esquemas de solução para  $Ra=10^3$ .

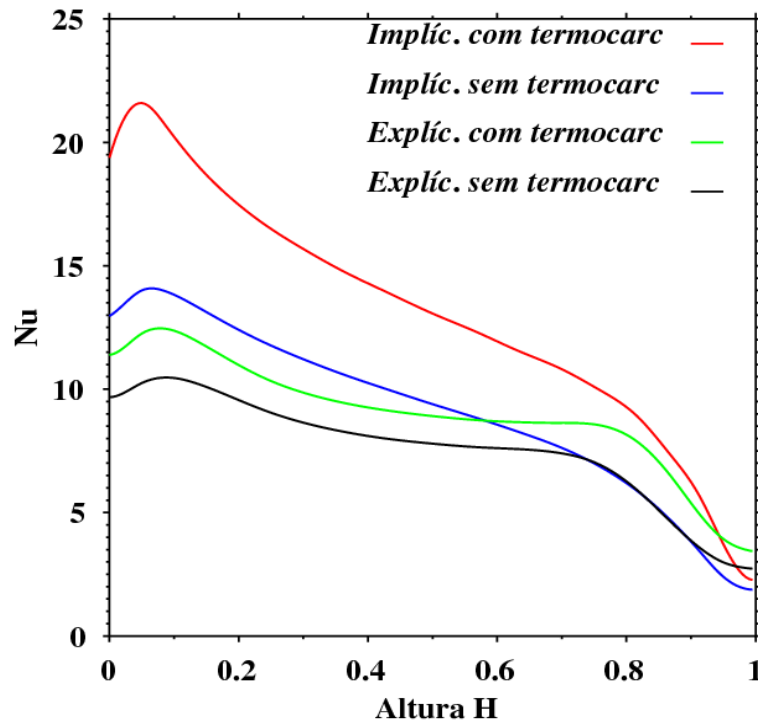


Figura 24: Comportamento do número de Nusselt em função da parede aquecida para os diversos esquemas de solução para  $Ra=10^6$ .

Portanto, para o menor valor do número de Rayleigh utilizado, os termos característicos não influem no comportamento do número de Nusselt mas são os fatores determinantes para um maior tempo computacional gasto, no entanto, podem ser omitidos na solução. Todavia, para o valor mais alto do  $Ra$ , tais termos são essenciais para se obter uma melhor solução, ou seja, para o uso de baixos  $Ra$  o melhor esquema a ser utilizado é o semi-implícito sem a utilização dos termos característicos, já para Rayleigh altos o ideal é o método semi-implícito com o uso dos termos característicos.

### 4.3 – Resultados para cavidades cilíndricas anulares com diferentes razões de curvatura

Neste ítem, será analisada a mudança provocada no desenvolvimento da convecção natural pela alteração da razão de curvatura. Foram testadas as razões de curvatura

2, 1 e 0.01, em todos os casos foi utilizado Rayleigh igual a  $10^6$ . A razão geométrica para todos os casos foi mantida igual a 1. Um dos aspectos importantes para a convecção natural em geometrias deste tipo é o comportamento do coeficiente de troca de calor na superfície, representado pelo número de Nusselt.

A Figura 25, mostra o comportamento do Nu em função de sua altura na face interna da cavidade (face quente). Com estes resultados é possível notar claramente que o aumento da razão de curvatura é acompanhado de um aumento nos valores de Nu. Desta forma, deve necessariamente se acentuar o gradiente de temperaturas nesta parede.

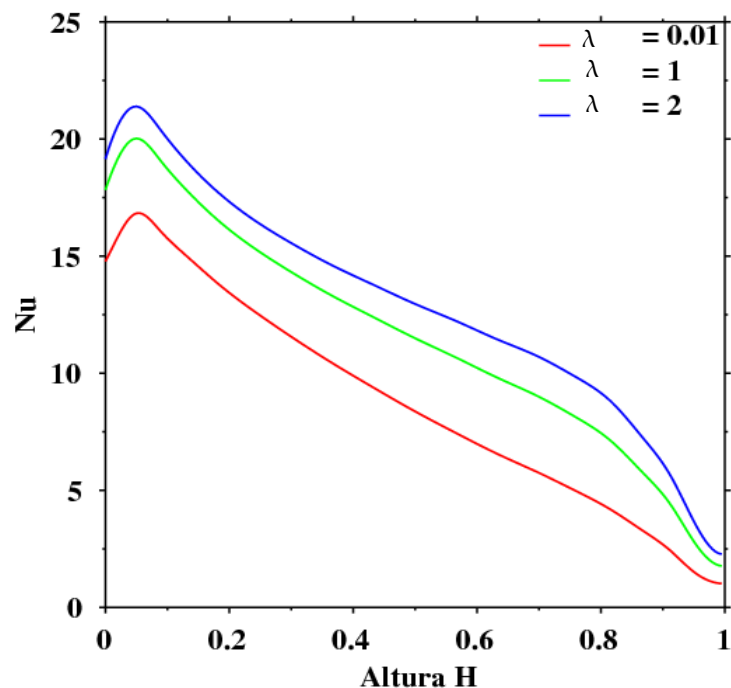


Figura 25: Comportamento do Nu na superfície quente em função da altura para as diferentes razões de curvatura.

Para confirmar tal situação, sobre o gradiente de temperaturas, discutido anteriormente, estão apresentados, na Figura 26, os perfis de temperatura para a condição de regime estacionário nos 3 valores de razão de curvatura analisados. Nota-se, nestes casos, que o efeito previsto pela variação do Nu se confirma e os isotermais próximos à parede quente (face interna) vão se aproximando a medida que a razão de curvatura aumenta. Apesar de não ter sido feita a análise da superfície externa (face fria), nota-se pelas figuras que o seu comportamento é inverso ao observado na face interna. Em função da variação de área significativa nota-se que para esta face quanto maior for a razão de curvatura, mais afastadas

estão os isotermais e, conseqüentemente, menor deve ser o número de Nusselt. Embora essa observação seja possível através dos isotermais, ela é explicável pelo comportamento dos perfis de velocidade em cada caso.

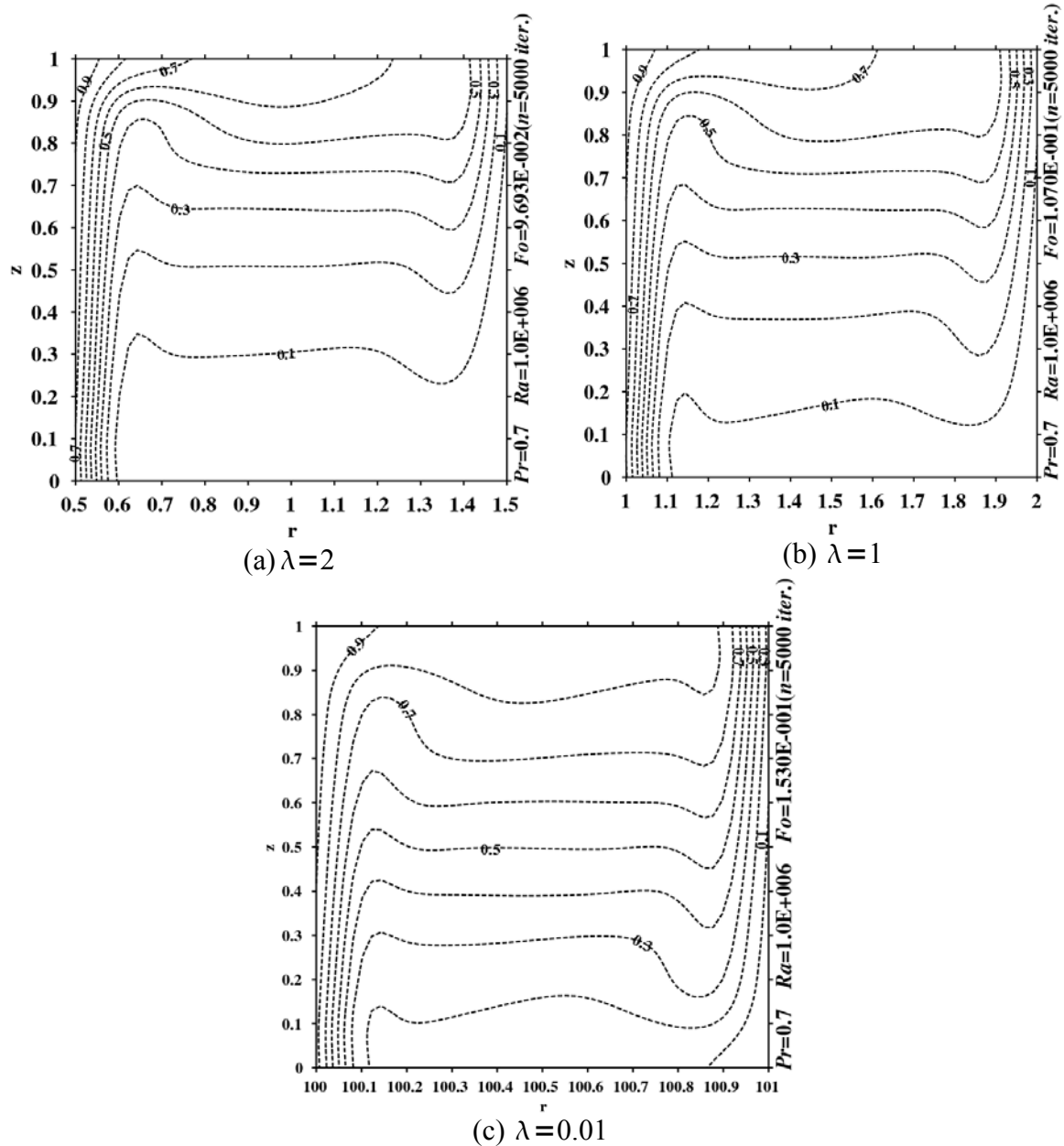


Figura 26: Comportamento do perfil de temperaturas em função da razão de curvatura.

A Figura 27, apresentada vetores de velocidade nas diversas posições e as isolinhas de função corrente para os casos analisados. Pela figura é possível notar a mudança do padrão do comportamento da função corrente. Para o caso de razão de curvatura baixa, o



efeito de variação de área é pequena e o perfil de função corrente é anti-simétrico em relação ao seu centro. A medida que a razão de curvatura aumenta, a velocidade próxima da parede interna tende a ficar cada vez maior. A velocidade na parede externa, por sua vez, tende a diminuir. Essa assimetria gera, também, um comportamento análogo para a função corrente. Por outro lado, o aumento da velocidade próxima à parede, aumenta a taxa de remoção de energia que resultará em maiores valores de Nu.

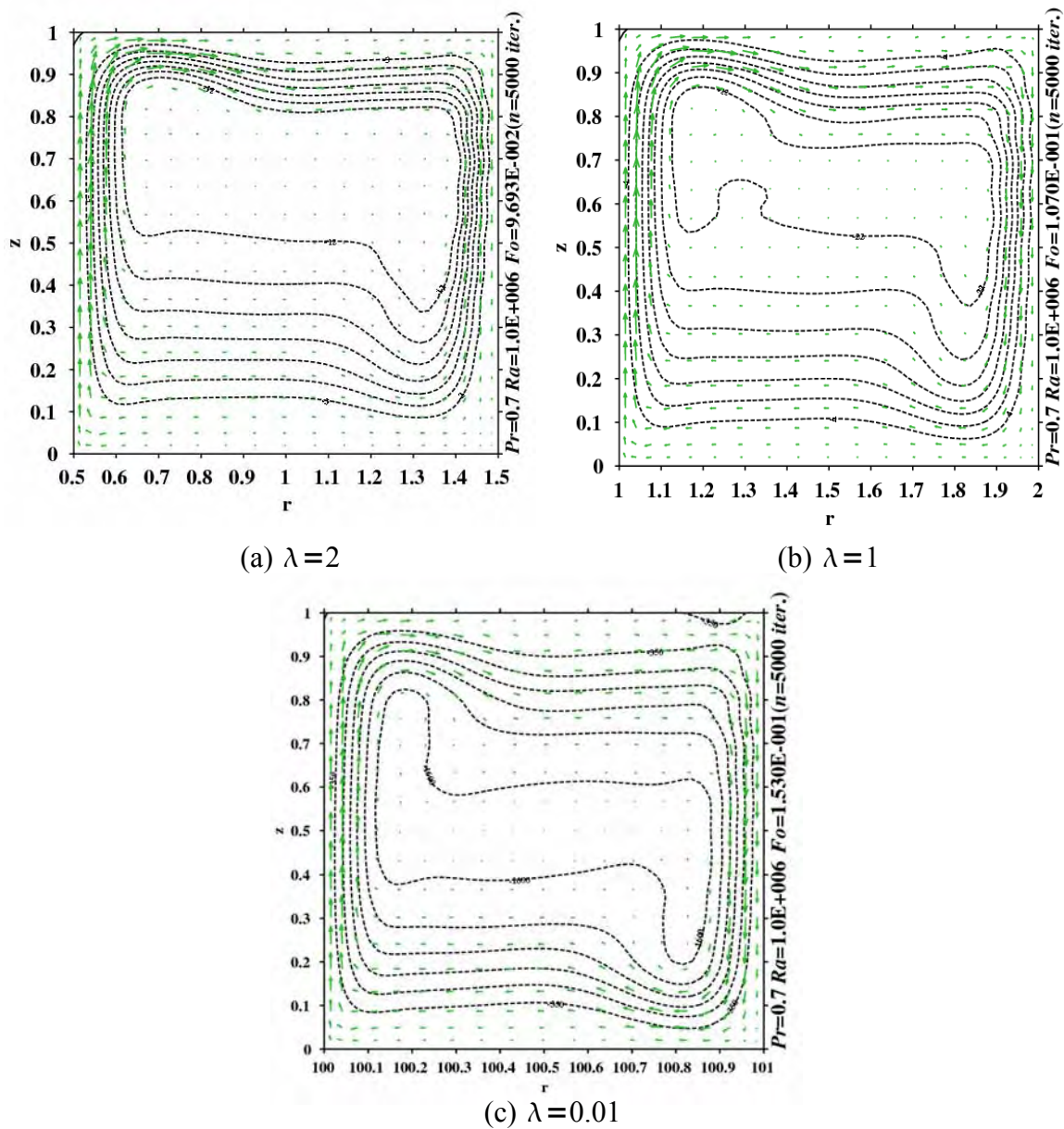


Figura 27: Comportamento do perfil de velocidades e função corrente em função da razão de curvatura.

#### 4.4 – Resultados para cavidades cilíndricas com diferentes números de Rayleigh

Para melhor compreender as mudanças ocasionadas no desenvolvimento da convecção natural em relação ao número de Rayleigh, foram realizados diferentes testes de comparações variando-o de  $10^3$  a  $10^8$ . Em todos os casos, a parede aquecida foi a interna (lateral esquerda), a razão de curvatura utilizada foi mantida igual a 2 e a razão geométrica igual a 1, o número de Prandtl permaneceu fixo e igual a 0,7 e o esquema utilizado para a solução foi o semi-implícito com o uso dos termos característicos. Para a maioria dos casos, o programa foi processado para um número de iterações equivalente a 5.000 passos e um incremento de tempo correspondente a 70% do máximo incremento de tempo possível, a única distinção foi para Rayleigh igual a  $10^8$ , neste caso, visando uma melhor convergência do processo, foi utilizado um número de iterações maior,  $n=10.000$ , e um  $\Delta t$  fixo e igual a  $9 \times 10^{-6}$ .

A Figura 28 exibe o comportamento das velocidades radiais  $u$  em relação ao seu eixo central para os diferentes números de Rayleigh. Nota-se através da figura, que a utilização de maiores números de Rayleigh implica em maiores intensidades de velocidade, sendo as mais altas encontradas próximas à superfície superior esquerda, já para menores Rayleigh, as maiores velocidades estão localizadas ao longo desta superfície. As velocidades próximas ao centro da cavidade permanecem em torno de zero. Para valores mais altos deste parâmetro, nota-se uma ampliação da região de velocidades baixas no centro da cavidade. Embora, não se tenham resultados comparáveis em cavidades cilíndricas, um fenômeno similar a este pode ser observado em cavidades planas.

A variação da velocidade axial  $v$  em função do eixo vertical central pode ser vista na Figura 29. Seu comportamento é similar ao da distribuição de velocidades radiais, mostrado na Figura 28, diferindo apenas pela forte influência do efeito circunferencial associado às mudanças na coordenada radial. Devido a este fato, é possível observar nesta figura que a velocidade próxima da parede interna é muito maior do que nas proximidades da parede externa. Com relação ao comportamento da velocidade na região central do gráfico em função da variação do número de Rayleigh, o comportamento é similar

ao já descrito para o perfil de velocidades radiais.

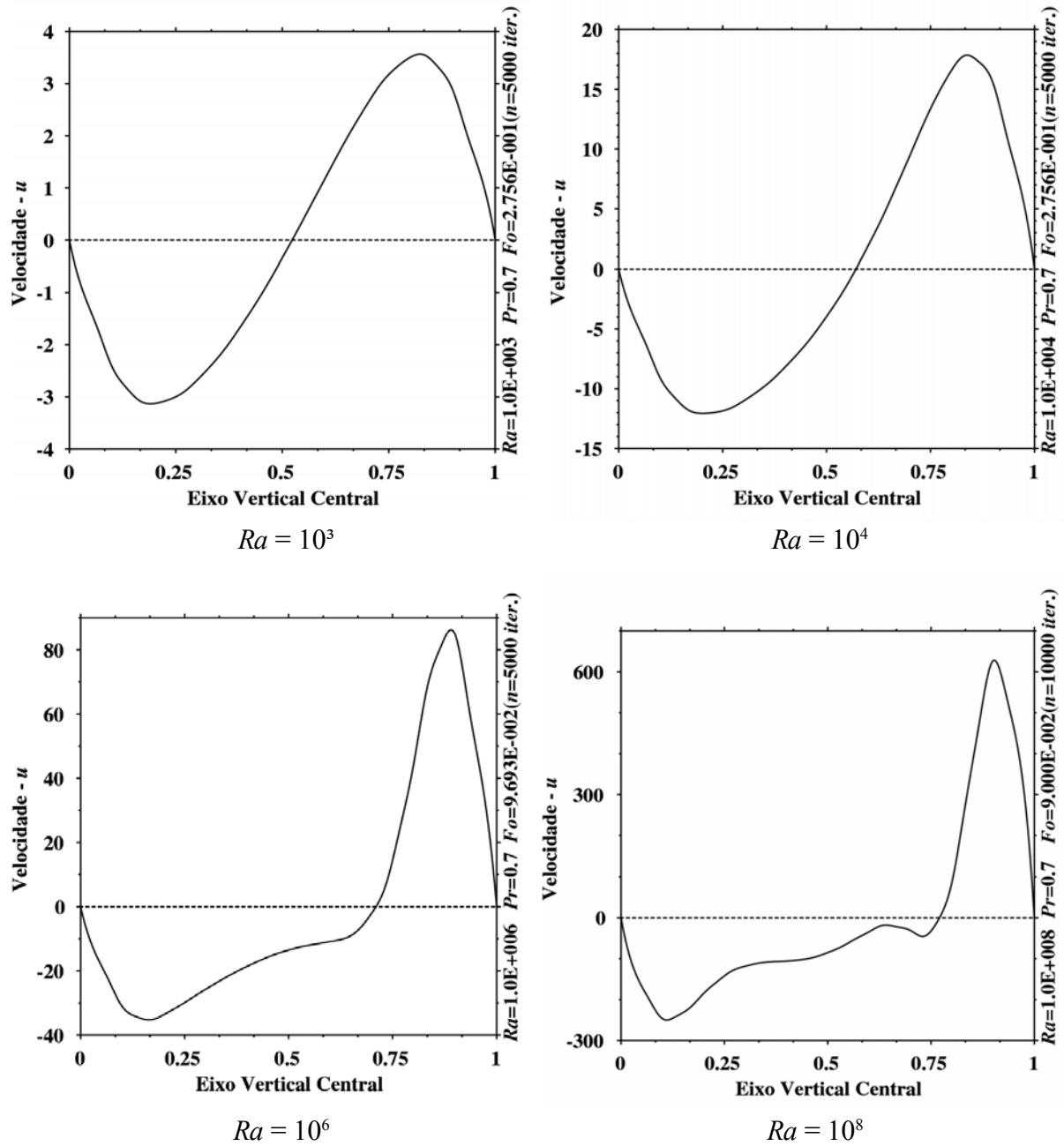


Figura 28: Comportamento da velocidade  $u$  em relação ao seu eixo central para os números de Rayleigh considerados.

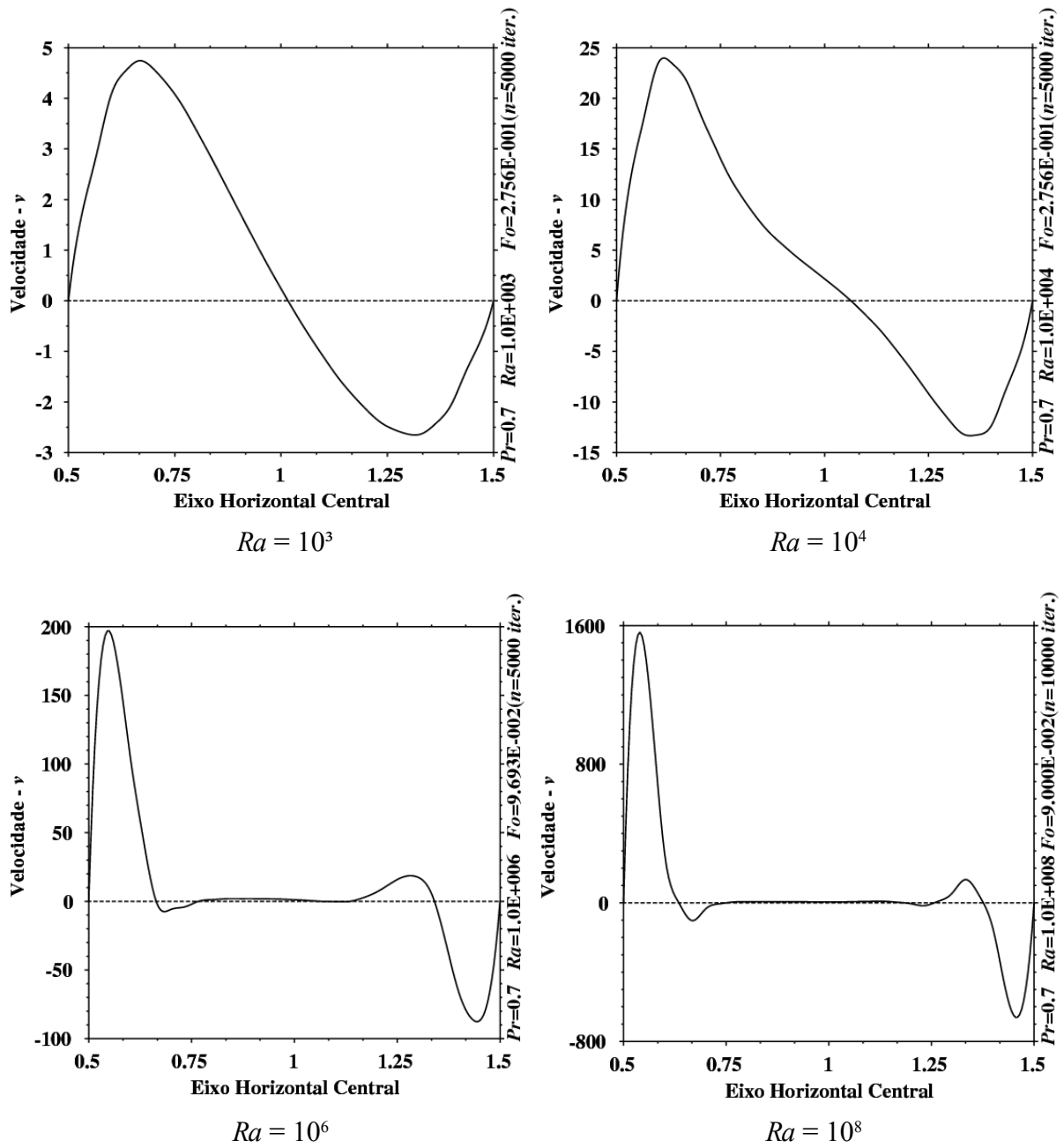


Figura 29: Comportamento da velocidade  $v$  em relação ao seu eixo central para os números de Rayleigh considerados.

Cabe destacar, que em ambos os casos, um outro aspecto pode ser observado há uma semelhança no comportamento das velocidades entre baixos Rayleigh,  $Ra=10^3$  e  $Ra=10^4$ , e o mesmo acontece entre altos Rayleigh,  $Ra=10^6$  e  $Ra=10^8$ .

A análise do comportamento do campo de temperaturas, complementa as análises realizadas anteriormente, pode ser observado na Figura 30, que ao se aumentar o número de Rayleigh, mais próximas da parede aquecida encontram-se os isothermas e maiores são as temperaturas no topo esquerdo da cavidade, já para menores valores do número de Rayleigh, as maiores temperaturas encontram-se ao longo da parede interna. Cabe ressaltar, que o comportamento das curvas de temperaturas concorda com os disponíveis na literatura

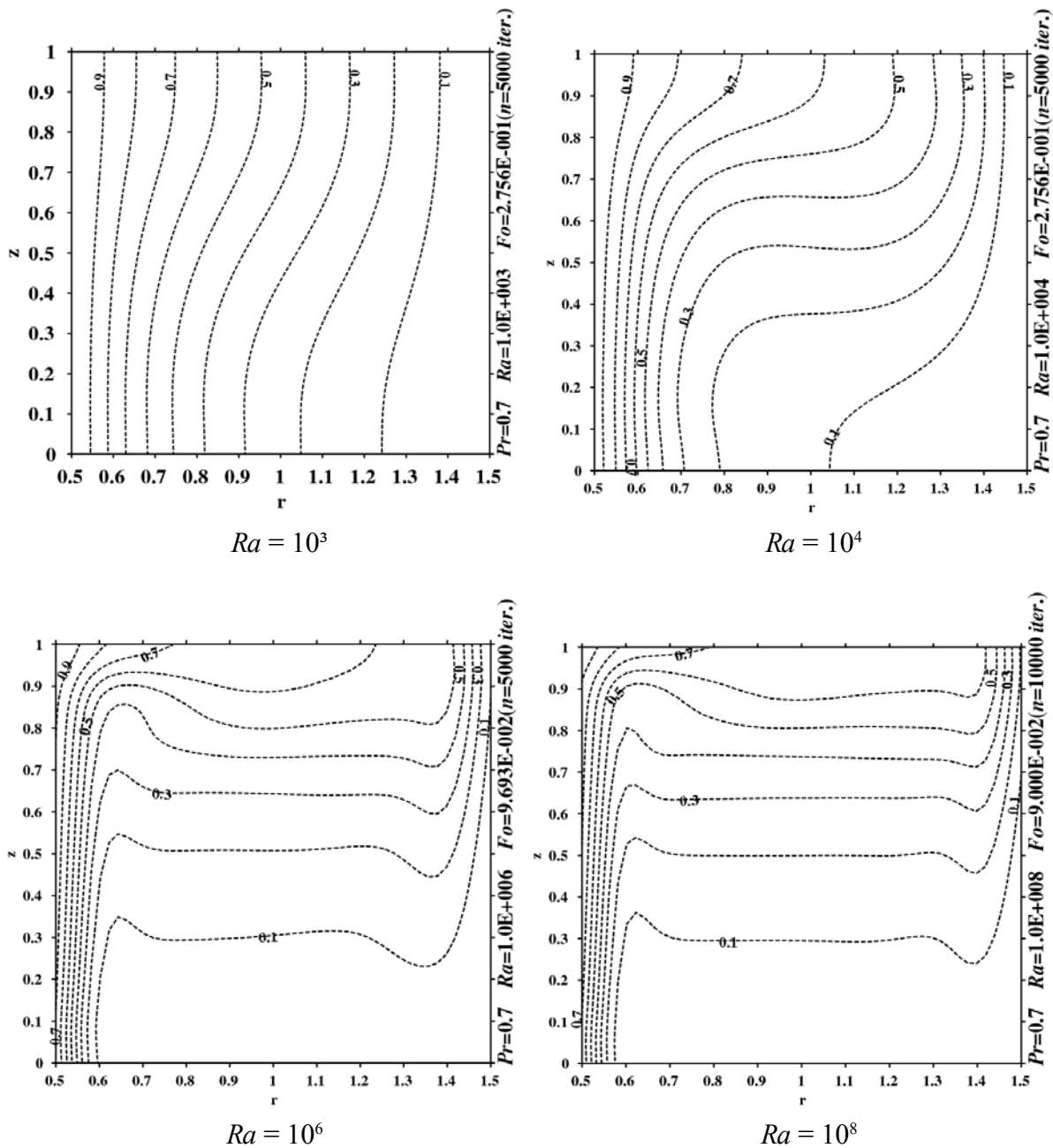


Figura 30: Perfil de temperatura em função do número de Rayleigh.

para cavidades planas em relação à mudança das características dos isothermas de um problema predominantemente difusivo, para baixos valores de  $Ra$ , para problemas predominantemente convectivos, quando o valor de  $Ra$  aumenta. Nota-se, apenas, que o perfil de temperatura, neste caso, não apresenta a simetria verificada em geometrias planas. Este fato, se deve, fundamentalmente às mudanças geométricas causadas pelos efeitos circunferenciais. Outro aspecto a ser observado é que a medida que se aumenta o  $Ra$  a deformação dos isothermas na parte superior da cavidade se amplifica, isso é ocasionado pelo aumento das velocidades, pois quanto maior o número de Rayleigh utilizados maiores velocidades resultantes.

O comportamento do campo de velocidades e função corrente para os casos analisados pode ser observado na Figura 31. Através desta figura, pode-se notar as mudanças ocorridas na região central da cavidade e a concentração dos gradientes de velocidade nas proximidades da parede, concordando com as considerações realizadas anteriormente. Para o caso de  $Ra = 10^8$ , nota-se uma pequena alteração na simetria em relação aos eixos centrais. Este fato, pode ser provocado tanto por erros numéricos quanto pode ser ocasionado pelos efeitos circunferenciais presentes no problema. Como não foram encontradas outras referências sobre o tema, somente a realização de estudos adicionais poderiam levar a uma conclusão objetiva sobre a sua verdadeira causa. É importante ressaltar também que no comportamento da função corrente, observa-se em suas isolinhas que, para altos números de Rayleigh elas são parecidas, sendo notória a mesma condição para baixos números de Rayleigh.

Um outro parâmetro analisado, foi o comportamento do número de Nusselt na parede aquecida para os diversos números de Rayleigh. Observando a Figura 32, pode-se notar, novamente, que o aumento do número de Rayleigh é acompanhado pelo aumento do número de Nusselt, principalmente na parte superior da cavidade. Tal comportamento está diretamente relacionado aos resultados obtidos anteriormente, pois quanto maior a intensidade das velocidades na superfície aquecida, maior será a troca de calor e, conseqüentemente, maior será o número de Nusselt. Além disto, a uniformidade do número de Nusselt para baixos valores do número de Rayleigh, está ligada às características predominantemente difusivas do problema. A medida que prevalecem os efeitos convectivos, o número de Nusselt médio tende a aumentar e seus valores locais tendem a se diferenciar de acordo com a posição

na parede, como verificado na figura.

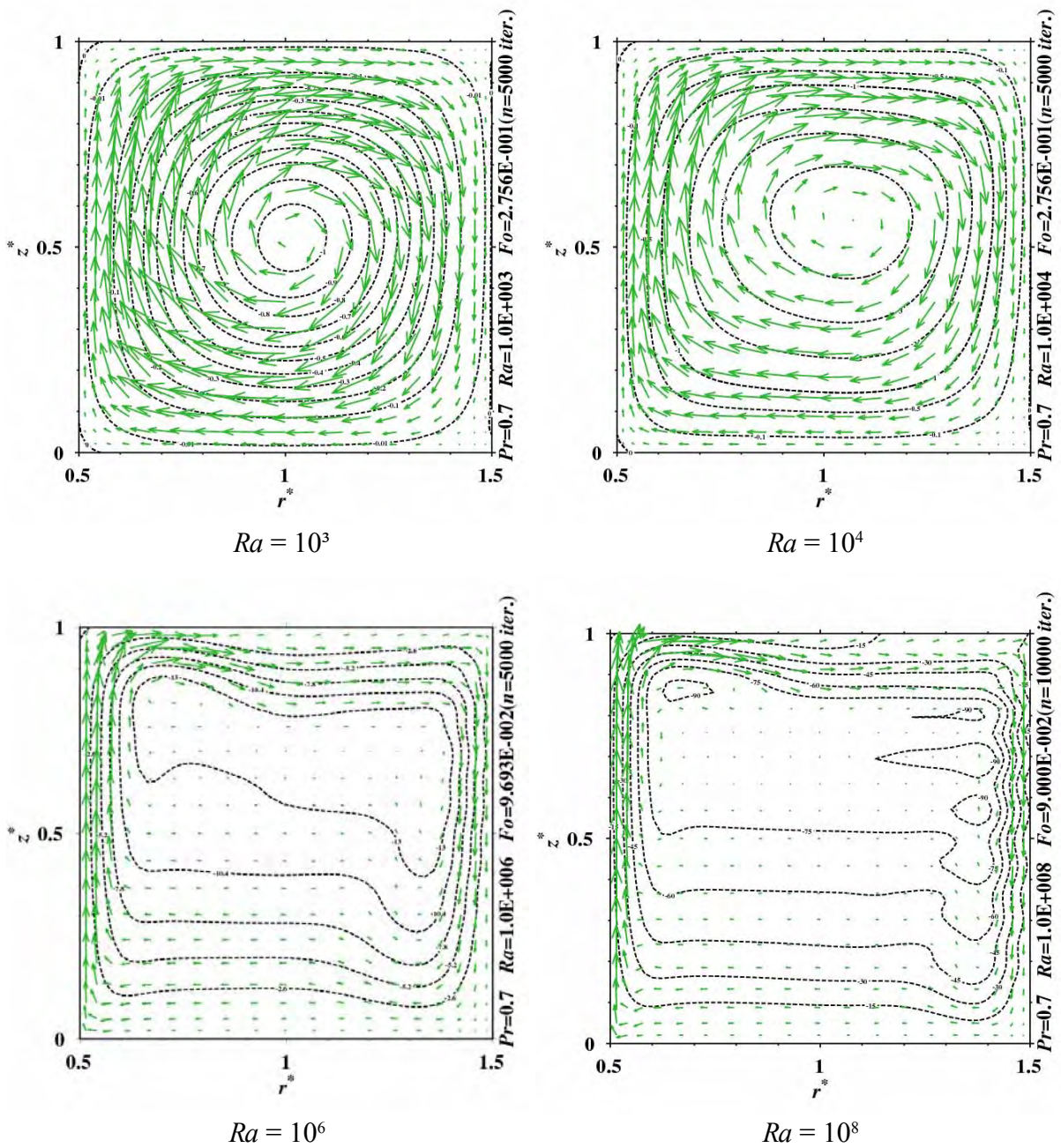


Figura 31: Perfil de velocidade e função corrente em função do número de Rayleigh.

Pensando agora analisar a convergência do processo para cada número de Rayleigh, a Figura 33 exibe o desvio da pressão em função do número de iterações realizadas. Pode-se notar que quanto menor o valor do número de Rayleigh utilizado, mais convergente foi o processo de solução, sendo que, para se obter a mesma convergência quando se utiliza

altos valores de  $Ra$  seria necessário um maior número de iterações.

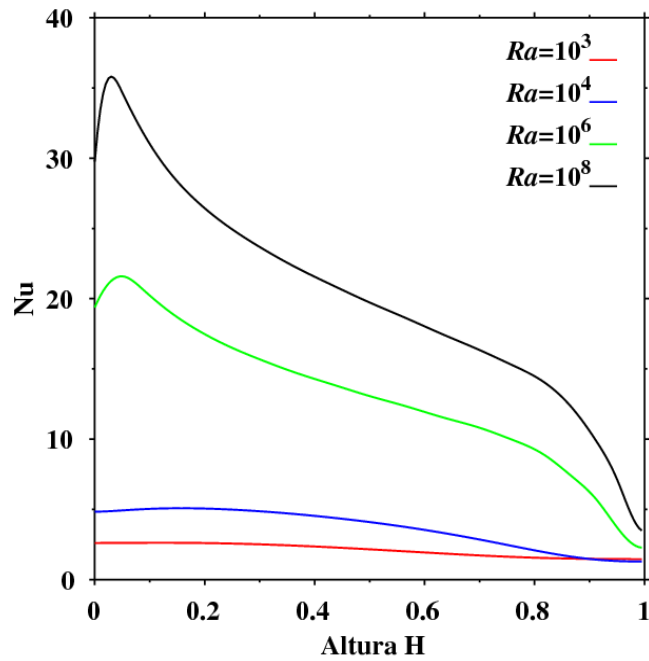


Figura 32: Comportamento do Nu na superfície quente em função da altura para os números de Rayleigh considerados.

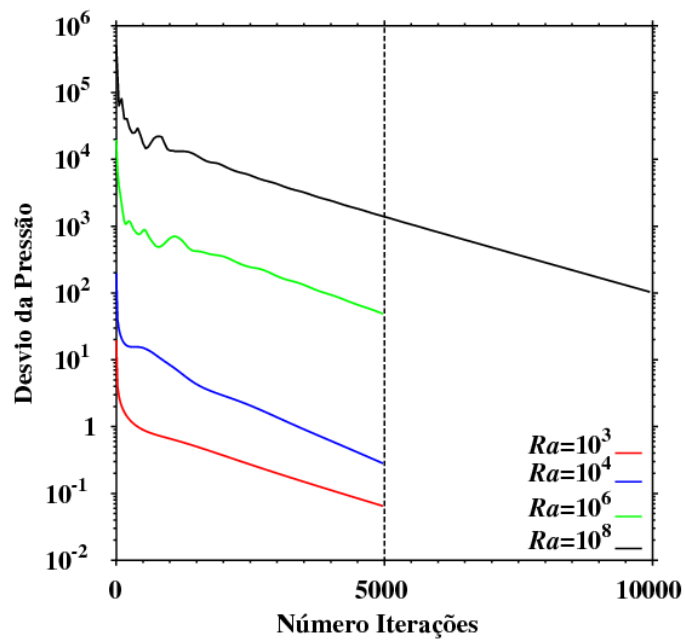


Figura 33: Desvio da pressão em função do número de iterações para os números de Rayleigh considerados.



## **5 – CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS**

O desenvolvimento do modelo numérico, montagem das sub-rotinas, implementação de diversos casos juntamente com a análise dos resultados, permitiram concluir que:

- Os resultados mostram pelos parâmetros avaliados, que a formulação empregada, ou seja, o esquema utilizado é adequado para o tratamento do problema. Ou seja, a metodologia utilizada apresenta-se satisfatória podendo ser utilizada para análise de diversos casos solucionados;
- Através da técnica empregada foi possível avaliar os valores do  $Nu$  para diversas geometrias da cavidade e verificar a sua inter-relação.
- A utilização do esquema semi-implícito permite uma convergência mais rápida para a solução que o uso do esquema explícito;
- O tempo computacional gasto está fundamentalmente relacionado com a utilização ou não do termo característico, isto é, o uso do termo característico implica num maior tempo computacional gasto;
- Os termos característicos podem ser omitidos quando se utiliza baixos números de Rayleigh, porém para altos números de Rayleigh a utilização dos termos característicos, visando uma melhor solução, deve ser mantida;
- A utilização dos termos característicos implica numa maior precisão do número de Nusselt, para maiores números de Rayleigh;
- Quanto maior a razão de curvatura maiores serão os valores de  $Nu$ ,

devido ao aumento de velocidades próximas a parede aquecida;

- Quanto maior o número de Rayleigh maiores são as velocidades próximas à parede aquecida e consequentemente maiores são os números de Nusselt resultantes;
- Para maiores números de Rayleigh as maiores velocidades e temperaturas encontram-se no topo da superfície aquecida, já para menores valores dos números de Rayleigh, as mesmas localizam-se ao longo desta superfície;
- Há uma semelhança no comportamento das velocidades e função corrente entre baixos Rayleigh,  $Ra=10^3$  e  $Ra=10^4$ , sendo que a mesma ocorre entre altos Rayleigh,  $Ra=10^6$  e  $Ra=10^8$ ;
- A utilização de menores Rayleigh implica em soluções mais convergentes, ou seja, para se obter o mesmo grau de convergência quando se utiliza altos Rayleigh seriam necessários um maior número de iterações.

Através da experiência adquirida ao longo da realização deste trabalho, surgiram alguns assuntos que embora não tenham sido abordados, podem trazer avaliações importantes para o mesmo. Para tanto, fica sugerido como trabalhos futuros, os seguintes tópicos:

- Maiores estudos sobre a influência de outros parâmetros, tais como turbulência e mudança do fluido, sobre o desenvolvimento da convecção natural e verificação de pequenas oscilações apresentadas na solução atual;
- Estudar a diferença no processo de solução e resultados, utilizando-se de malhas formadas por elementos triangulares, enfatizando o estudo no tempo computacional gasto;
- Testar a metodologia utilizada em outras geometrias;
- Resolver o problema proposto utilizando outra metodologia, como por exemplo, o Método Petrov-Galerkin.

## 6 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CODINA, R. COPPOLA-OWEN, H. NITHIARASU, P. LIU, C.B., Numerical comparison of CBS and SGS as stabilization techniques for the incompressible Navier–Stokes equations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 66, 1672 - 1689, 2006.

ERTURK, E., Lid Driven Cavity Flow. Disponível em <<http://www.cavityflow.com>>. Acesso em junho de 2008.

GHIA, U. GHIA, K.N. SHIN, C.T., High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method, *Journal of Computational Physics*, Vol. 48, 387 - 411, 1982.

GNU-OCTAVE, Octave. Disponível em <<http://www.gnu.org/software/octave/>>. Acesso em 5 de agosto de 2008.

ISMAIL, K.A.R. E SCALON, V.L., A finite element free convection model for the side wall heated cavity, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 43, 1373 - 1389, 2000.

IVANCIC, A. OLIVA, A. SEGARRA, C. D.S. E COSTA, M., Heat transfer simulation in vertical cylindrical enclosures for supercritical Rayleigh number and arbitrary side wall conductivity, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 42, 212 - 232, 1999.

KELLEY, D. E GALBRAITH, P., GRI. Disponível em <<http://gri.sourceforge.net/>>. Acesso em 5 agosto de 2008.

KULKARNI, V. M. SEETHARAMU, K. N. AZID, I. A. NARAYANA, P.A.A. QUADIR,

G.A., Numerical simulation of underfill encapsulation process based on characteristic split method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 66, 1658 - 1671, 2006.

KURIAN, A. VARMA, M.N. E KANNAN, A., Numerical studies on laminar natural convection inside inclined cylinders of unity aspect ratio, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 52, 822 - 838, 2009.

LIU, C.B. NITHIARASU, P., Explicit and semi-implicit characteristic based split (CBS) schemes for viscoelastic flow calculations, *Proc. of European Conference on Computational Fluid Dynamics (ECCOMAS CFD)*, 2006.

MASSAROTTI, N. ARPINO, F. LEWIS, R.W. NITHIARASU, P., Explicit and semi-implicit CBS procedures for incompressible viscous flows, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 66, 1618 - 1640, 2006.

NITHIARASU, P., An efficient artificial compressibility (AC) scheme based on the characteristic based split (CBS) method for incompressible flows, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 56, 1815 - 1845, 2003.

NITHIARASU, P. CODINA, R. ZIENKIEWICZ, O.C., The Characterist-Based Split (CBS) scheme - a unified approach to fluid dynamics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 66, 1514 - 1546, 2006.

NITHIARASU, P. E LIU, C. B., Steady and unsteady incompressible flow in a double driven cavity using the artificial compressibility (AC)-based characteristic-based split (CBS) scheme, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 63, 380 - 397, 2005.

NITHIARASU, P. LIU, C.B., An artificial compressibility based characteristic based split (CBS) scheme for steady and unsteady turbulent incompressible flows, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 195, 2961 - 2982, 2006.

NITHIARASU, P. ZIENKIEWICZ, O.C., On stabilization of the CBS algorithm: Internal and external time steps, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 48,

875 - 880, 2000.

NITHIARASU, P. ZIENKIEWICZ, O.C., Analysis of an explicit and matrix free fractional step method for incompressible flows, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 195, 5537 - 5551, 2006.

ROJEK, J. OÑATE, E. E TAYLOR, R.L., CBS-based stabilization in explicit solid dynamics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 66, 1547 - 1568, 2006.

SCHNEIDER, S. E STRAUB, J., Laminar natural convection in a cylindrical enclosure with different end temperatures, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 35, 545 - 557, 1992.

SOONG, C. Y. TZENG, P. Y. CHIANG, D. C E SHEU, T. S., Numerical study on mode-transition of natural convection in differentially heated inclined enclosures, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 39, 2869 - 2882, 1996.

THOMAS, C. G. E NITHIARASU, P., An element-wise, locally conservative Galerkin (LCG) method solving diffusion and convection–diffusion problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 73, 642 - 664, 2007.

THOMAS, C. G. NITHIARASU, P. E BEVAN, R. L. T., The locally conservative Galerkin (LCG) method for solving the incompressible Navier–Stokes equations, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 57, 1771 – 1792, 2007.

THOMAS, C.G. NITHIARASU, P., Influences of element size and variable smoothing on inviscid compressible flow solution, *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, Vol. 15, 420 - 428, 2005.

VAHL DAVIS, Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 3, 249 - 264, 1983.

ZIENKIEWICZ, O.C. CODINA, R., A general algorithm for compressible and incompressible flow - Part I. The split, characteristic based scheme., *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, Vol. 20, 869 - 885, 1995.

ZIENKIEWICZ, O.C. LÖHNER, R. MORGAN, K. NAKAZAWA, S., *Finite Elements in Fluids*, Chichester: R.H.Gallagher et al., 1984.

ZIENKIEWICZ, O.C. TAYLOR, R.L, *The Finite Element Method*, Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.