

Efeitos de Torques Gravitacionais na Dinâmica de Asteróides Múltiplos

Luiz Augusto Guimarães Boldrin

Efeitos de Torques Gravitacionais na Dinâmica de Asteróides Múltiplos

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr Othon Cabo Winter
Co-orientador: Prof. Dr Rodney da Silva Gomes

Guaratinguetá
27/05/2011

B687e Boldrin, Luiz Augusto Guimarães
Efeitos de torques gravitacionais na dinâmica de asteróides múltiplos /
Luiz Augusto Guimarães Boldrin – Guaratinguetá : [s.n], 2011.
68 f. : il.
Bibliografia: f. 66-68

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de
Engenharia de Guaratinguetá, 2011.
Orientador: Prof. Dr. Othon Cabo Winter
Coorientador: Prof. Dr. Rodney da Silva Gomes

1. Asteróides - Órbitas 2. Mecânica celeste I. Título

CDU 523.44

LUIZ AUGUSTO GUIMARÃES BOLDRIN

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“MESTRE EM FÍSICA”

PROGRAMA: FÍSICA

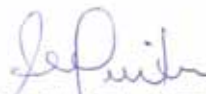
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Silvia Maria Giuliatti Winter
Coordenadora

BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. OTHON CABO WINTER
Orientador / Unesp-Feg



Prof. Dr. SILVA MARIA GIULIATTI WINTER
Unesp-Feg



Prof. Dr. NELSON CALLEGARI JUNIOR
Instituto de Geociências e Ciências Exatas – Unesp-Rio Claro

Maio de 2011

Dados Curriculares

LUIZ AUGUSTO GUIMARÃES BOLDRIN

NASCIMENTO 03.08.1984 - GUARULHOS / SP

FILIAÇÃO Luiz Cezar Soares Boldrin
Neusa Maria Guimarães Boldrin

2004 - 2009 Bacharelado em Física
Departamento de Física Química - FEG/UNESP

2009 - 2011 Mestrado em Física
Departamento de Física e Química - FEG/UNESP

Aos meus pais

Agradecimentos

Desejo expressar os meus sinceros agradecimentos:

Aos meus pais *Luiz Cezar Soares Boldrin* e *Neusa Maria Guimarães Boldrin* pelo apoio eterno e incondicional.

Ao meu orientador *Othon Cabo Winter*, *Rodney da Silva Gomes* e *Ernesto Vieira Neto* pela confiança, compreensão, paciência e trabalho e tempo dedicados.

Ao Grupo de Dinâmica Orbital & Planetologia da Unesp-Guaratinguetá.

Aos alunos da pós-graduação em física da Unesp-Guaratinguetá. Em especial aos alunos *Helton Gaspar* pela grande ajuda na parte computacional, e, a *Fernanda Lopes Sá* pela grande ajuda e apoio em todo o trabalho.

Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES.

Resumo

A compreensão do universo é um dos grandes desejos da humanidade desde o princípio, e o estudo do movimento dos corpos celestes é uma parte deste todo. Dentro deste contexto está nosso trabalho, que tem como meta o estudo da dinâmica de asteróides múltiplos do nosso sistema solar, sendo este composto pelo movimento de translação dos asteróides satélites (asteróides menores que orbitam um de maior porte) e o movimento de atitude do asteróide central (asteróide de maior porte). O estudo dos asteróides múltiplos é uma grande chave para o conhecimento do passado de nosso sistema solar, visto que os mesmos são remanescentes da formação dos planetas. Partindo dessa motivação, realizamos um trabalho sobre a dinâmica do sistema (87) Sylvia no qual estudamos por meio de simulações numéricas a dinâmica dos satélites de Sylvia perturbados por Sol e Júpiter (Winter et al, 2009). Neste estudo foi mostrado que Rômulo e Remo sofrem fortes perturbações seculares provenientes de Sol e Júpiter, que poderiam desestabilizá-los. Descobrimos também que o achatamento (J_2) do corpo central é de extrema importância na estabilidade dos satélites. Partindo desse resultado, para este trabalho, decidimos fazer uma análise mais minuciosa do problema em questão. Para isso, nós realizamos simulações considerando o movimento de atitude do asteróide central, algo até agora não considerado por nós. Este movimento de atitude é perturbado pelos torques causados por seus satélites, Sol e planetas. Apresentaremos neste trabalho uma sucinta abordagem teórica de nosso modelo juntamente com uma revisão bibliográfica de alguns modelos analítico aproximados encontrados na literatura, alguns testes de nossa ferramenta computacional e um estudo de dois sistemas triplos de asteróides conhecidos. Os sistemas estudados foram (87) Sylvia e (45) Eugenia. Os resultados nos mostrou que o movimento de atitude do corpo central sofre grande perturbação devido ao Sol e Júpiter, e tem mínima influência de seus satélites. Concluímos também que, ao contrário do que se pensava, Júpiter proporciona uma menor variação da inclinação do equador do corpo central desses sistemas, possuindo um caráter estabilizante para o mesmo. Por fim, foi observado, em ambos os sistemas, um acoplamento entre o plano orbital dos satélites e o plano do equador do corpo central, de modo que o plano orbital sempre acompanhe o plano do equador do corpo central, mesmo este sofrendo grandes variações.

Palavras-chave: Asteróides Múltiplos; Torques gravitacionais; Movimento de atitude

Abstract

The understanding of the universe is one of the greats desires of humanity since the beginning, and the study of movement of celestial bodies is a part of it. Inside this context lies our work, which has as goal the study of the dynamics of multiple asteroids from our solar system, being this one compound of the movement of translation of the satellite asteroids (smaller asteroids which orbit one of larger size) and the movement of attitude of the central asteroid (largest size asteroid). The study of multiple asteroids is a great key for knowledge of our solar system past, since they are remaining objects of the formation of planets. Starting from that motivation, we developed a work about the dynamics of the system (87) Sylvia, in which we studied through numerical simulations the dynamics of Sylvia's satellites perturbed by Sun and Jupiter (Winter et al, 2009). In this study, it has been shown that Romulus and Remus experience strong secular perturbations from Sun and Jupiter, which could destabilize them. We also found out that the flatness (J_2) of the central body is of extreme importance in the stability of the satellites. Based on this result, for this work, we decided to do a closer analysis of the problem concerned. To do so, we developed simulations considering the movement of attitude of the central asteroid, which, so far, has not been considered by us. This movement of attitude is perturbed by torques caused by their satellites, Sun and planets. We will present in this work a brief theoretical approach of our model along with a bibliographic review of some approximate analytical models found in the literature, some tests of our computational tool and a study of two familiar triple systems of asteroids. The studied systems was (87) Sylvia and (45) Eugenia. The results has shown us that the movement of attitude of the central body experience great perturbation due to the Sun and Jupiter, and has minimal influence of its satellites. We also concluded that, rather than thought, Jupiter provides a smaller variation of the equatorial inclination of the central body of these systems, possessing a stabilizing character for it. Finally, it has been observed, in both systems, a coupling between the orbital plane of the satellites and the equator plane of the central body, in such a way that the orbital plane always follows the equatorial plane of the central body, even with the latter experiencing great variations.

Keywords: Multiple asteroid; Gravitational torques; Attitude motion

Lista de Figuras

1.1	Primeiro sistema duplo de asteróides observado. Dactyl e seu satélite Ida (Chapman et al. 1995).	15
2.1	Mudança do sistema Inercial (x_1, x_2, x_3) para o sistema centrado no corpo (x, y, z)	18
2.2	Desenho ilustrativo mostrando os dois sistemas de coordenadas. O sistema Fixo no Corpo (x', y', z') e sistema Inercial de Rotação (x, y, z)	19
2.3	Rotação de ϕ em torno do eixo z . FONTE: Lemos (2007).	20
2.4	Rotação de θ em torno do eixo ξ . FONTE: Lemos (2007).	20
2.5	Rotação de ψ em torno do eixo ζ' . FONTE: Lemos (2007).	21
2.6	Desenho ilustrativo de um elipsóide com semi-eixos a, b e c	25
3.1	Figura ilustrativa das duas possíveis condições iniciais do polo (ou equador) do corpo central. A figura (a) mostra o caso quando o sistema IR é o equador médio da Terra (EMJ2000), e nesse caso o polo será determinado através dos ângulos declinação (δ) e ascensão reta (α) do mesmo. A figura (b) mostra para caso quando o sistema IR é a eclíptica (ECJ2000), e nesse caso o polo será determinado através da longitude (λ) e latitude (β).	28
3.2	Figura representativa do modelo. Problema de N-corpos, considerando um corpo central elipsoidal com movimento de atitude. O sistema vermelho é o Fixo no Corpo (x', y', z') e o sistema preto (x, y, z) é o sistema Inercial de Rotação. Note que os dois sistemas estão relacionados através dos ângulos de Euler (ϕ, θ, ψ)	30
5.1	Variação temporal do nodo do equador (ϕ) da Terra para o sistema Terra-Sol. Perceba que o período de precessão é 80.021 anos.	36
5.2	Variação temporal do nodo do equador (ϕ) da Terra para o sistema Terra-Sol-Lua. Perceba que o período de precessão é 26.402 anos.	37
5.3	Variação temporal do nodo do equador (ϕ) de Marte para o sistema Marte-Sol. Perceba que o período de precessão é aproximadamente 171.066 anos.	38

5.4	A figura extraída do trabalho de Girkin (2005) mostra a evolução temporal da obliquidade da Terra devido a cada planeta. A Lua não está presente nestas simulações. Os valores mínimo e máximo da obliquidade estão mostrados, em graus, no lado direito de cada curva.	39
5.5	A figura proveniente de nossas simulações mostra a variação da obliquidade da Terra simulados para 4 casos diferentes: sistema Sol-Terra-Vênus (azul), Sol-Terra-Marte (amarelo), Sol-Terra-Jupiter (preto) e Sol-Terra-Saturno (vermelho). Esses resultados são simulações sem a presença da Lua. Os valores mínimo e máximo de obliquidade estão apresentados, em graus, no lado direito de cada curva.	40
5.6	Comparação do resultado do nosso modelo (figura abaixo) com o resultado utilizando as equações (4.12) e (4.13)) (figura acima). Note que os resultados são muito parecidos.	41
5.7	Gráfico do nodo do equador para diferentes percentuais de J_2	42
5.8	Evolução temporal do semi-eixo orbital (a), da excentricidade (e), inclinação (i), longitude do nodo ascendente (Ω) e argumento do pericentro (ω) simulados nos dois programas diferentes. O vermelho é o resultado do programa que utiliza as equações no sistema IR e o verde é o resultado do programa que utiliza as equações no sistema FC. Optamos por utilizar menos pontos para o caso verde para que os dois gráficos não ficassem sobrepostos.	43
5.9	Evolução temporal do nodo do equador (ϕ) e inclinação do equador (θ) simulados nos dois programas diferentes. O vermelho é o resultado do programa que utiliza as equações no sistema IR e o verde é o resultado do programa que utiliza as equações no sistema FC. Optamos por utilizar menos pontos para o caso verde para que os dois gráficos não ficassem sobrepostos.	44
5.10	Obliquidade (curva superior) e inclinação orbital (curva inferior) de Marte em função do tempo. Figura extraída de Ward (1973).	44
5.11	Obliquidade e inclinação orbital de Marte em função do tempo. Figura obtida por simulação de 6 corpos (Marte-Sol-Júpiter-Terra-Saturno-Vênus), utilizando nosso programa.	45
6.1	Figura ilustrativa dos ângulos que serão estudados, onde (i) é a inclinação orbital referênte ao equador, (I) é a inclinação orbital referente ao plano inercial (ECJ2000 ou EMJ2000), (Ω) é a longitude do nodo ascendente orbital, (θ) é a inclinação do equador e (ϕ) é o nodo do equador. LNO é a linha dos nodos orbital (linha dada pela intersecção entre o plano orbital e o plano de referência) e LNE é a linha dos nodos equatorial (linha dada pela intersecção entre o plano equatorial e o plano de referência).	47

6.2	Sistema triplo (87) Sylvia (Sylvia no centro e seus satélites Rômulo e Remo). À esquerda uma imagem de observação feita da Terra e com utilização de óptica adaptativa (Marchis et al., 2005) e à direita uma concepção artística do sistema (ESO).	48
6.3	Evolução temporal inclinação (θ) e nodo (ϕ) do plano do equador de Sylvia de dois diferentes problemas de 2 corpos: Sylvia-Remo e Sylvia-Rômulo.	49
6.4	Evolução temporal inclinação (θ) e nodo (ϕ) do plano do equador de Sylvia para os problemas de 3, 4 e 5 corpos.	49
6.5	Evolução temporal do semi-eixo orbital (a), da excentricidade (e), inclinações orbital (i) e (I), e, longitude do nodo (Ω) (em duas escalas diferentes) de Rômulo para os problemas de 3, 4 e 5 corpos para o caso sem torque. Observe que por se tratar de resultados parecidos, as curvas estão sobrepostas.	52
6.6	Evolução temporal do semi-eixo orbital (a), da excentricidade (e), inclinações orbital (i) e (I), e, longitude do nodo (Ω) (em duas escalas diferentes) de Remo para os problemas de 3, 4 e 5 corpos para o caso sem torque. Observe que por se tratar de resultados parecidos, as curvas estão sobrepostas.	53
6.7	Evolução temporal do semi-eixo orbital (a), da excentricidade (e), inclinações orbital (i) e (I), e, longitude do nodo (Ω) de Rômulo para os problemas de 3, 4 e 5 corpos para o caso com torque. Observe que por se tratar de resultados parecidos, as curvas estão sobrepostas.	54
6.8	Evolução temporal do semi-eixo orbital (a), da excentricidade (e), inclinações orbital (i) e (I), e, longitude do nodo (Ω) de Remo para os problemas de 3, 4 e 5 corpos para o caso com torque. Observe por se tratar de resultados parecidos, as curvas estão sobrepostas.	55
6.9	Gráficos superiores são da da inclinação orbital (I) de Rômulo junto com a inclinação do equador (θ) de Sylvia. Abaixo estão os gráficos da longitude do nodo ascendente (Ω) Rômulo junto com o nodo do equador (ϕ) de Sylvia. As figuras da direita são do caso de 5 corpos e da esquerda são do caso de 4 corpos.	56
6.10	Gráficos superiores são da da inclinação orbital (I) de Remo junto com a inclinação do equador (θ) de Sylvia. Abaixo estão os gráficos da longitude do nodo ascendente (Ω) Remo junto com o nodo do equador (ϕ) de Sylvia. As figuras da direita são do caso de 5 corpos e da esquerda são do caso de 4 corpos.	57
6.11	Imagem do sistema (45) Eugênia. Eugênia é corpo central e seus satélites estão indicados com setas. (FONTE: Marchis et al., 2010).	57
6.12	Evolução temporal da inclinação (θ) e nodo (ϕ) do plano do equador de Eugênia de dois diferentes problemas de 2 corpos: Eugênia-P. Príncipe e Eugênia-P. Princesa.	58

6.13	Evolução temporal inclinação (θ) e nodo (ϕ) do plano do equador de Eugênia para os problemas de 3, 4 e 5 corpos.	58
6.14	Evolução temporal do semi-eixo orbital (a), da excentricidade (e), longitude do nodo (Ω), e, inclinações orbital (I) e (i) de Pequeno Príncipe para os problemas de 3, 4 e 5 corpos para o caso sem torque. Observe que por se tratar de resultados parecidos, as curvas estão sobrepostas.	59
6.15	Evolução temporal do semi-eixo orbital (a), da excentricidade (e), longitude do nodo (Ω), e, inclinações orbital (I) e (i) de Pequena Princesa para os problemas de 3, 4 e 5 corpos para o caso sem torque. Observe que por se tratar de resultados parecidos, as curvas estão sobrepostas.	60
6.16	Evolução temporal do semi-eixo orbital (a), da excentricidade (e), longitude do nodo (Ω), e, inclinações orbital (I) e (i) de Pequeno Príncipe para os problemas de 3, 4 e 5 corpos para o caso com torque. Observe que por se tratar de resultados parecidos, as curvas estão sobrepostas.	61
6.17	Evolução temporal do semi-eixo orbital (a), da excentricidade (e), longitude do nodo (Ω), e, inclinações orbital (I) e (i) de Pequena Princesa para os problemas de 3, 4 e 5 corpos para o caso com torque. Observe que por se tratar de resultados parecidos, as curvas estão sobrepostas.	62
6.18	Gráficos superiores são da inclinação orbital (I) de P. Príncipe junto com a inclinação do equador (θ) de Eugênia. Abaixo estão os gráficos da longitude do nodo ascendente (Ω) P. Príncipe junto com o nodo do equador (ϕ) de Eugênia. As figuras da direita são do caso de 5 corpos e da esquerda são do caso de 4 corpos.	63
6.19	Gráficos superiores são da inclinação orbital (I) de P. Princesa junto com a inclinação do equador (θ) de Eugênia. Abaixo estão os gráficos da longitude do nodo ascendente (Ω) P. Princesa junto com o nodo do equador (ϕ) de Eugênia. As figuras da direita são do caso de 5 corpos e da esquerda são do caso de 4 corpos.	64

Lista de Tabelas

5.1	Condições iniciais do corpo central genérico usados no teste.	37
5.2	Condições iniciais do satélite ge usados no teste.	37
6.1	Condições iniciais de Sylvia (Marchis et al., 2005). Época de referência JD 2453249.5	46
6.2	Condições iniciais (EMJ2000) utilizadas para sistema (87) Sylvia (Marchis et al., 2005; Giorgini et al., 1996). Época de referência JD 2453249.5 * <i>Elementos orbitais em relação ao Sol</i>	48
6.3	Condições iniciais de Eugênia (Marchis et al., 2010). Época de referência JD 2452980.0	50
6.4	Condições iniciais (ECJ2000) utilizadas para sistema (45) Eugênia (Marchis et al., 2010; Giorgini et al., 1996). Época de referência JD 2452980.0 * <i>Elementos orbitais em relação ao Sol</i>	50

Sumário

Lista de Figuras	11
Lista de Tabelas	12
1 Introdução	14
2 Equações do Movimento	17
2.1 Problema de N-corpos	17
2.2 Dinâmica de Rotação	19
2.2.1 Velocidade Angular em Termos dos Ângulos de Euler	22
2.2.2 Variação Temporal da Velocidade Angular: Equações de Euler	24
3 Ferramenta Computacional	26
4 Modelos Analíticos Aproximados	31
5 Testes do Programa	35
6 Resultados	46
6.1 Sistema Triplo (87) Sylvia	46
6.2 Sistema Triplo (45) Eugênia	50
7 Conclusões e Considerações Finais	65
8 Referências Bibliográficas	67

Capítulo 1

Introdução

O avanço tecnológico que vem ocorrendo nas últimas décadas nos proporcionou crescentes descobertas do nosso universo. Sondas espaciais, telescópios de grande porte e novas técnicas observacionais nos permitiu observar detalhes até então não observados do sistema solar. Uma dessas descobertas ocorreu por meio da sonda espacial Galileu que observou o primeiro sistema múltiplo de asteroide, sistema este composto pelo asteroide (243) Ida e seu satélite Dactyl (Chapman et al. 1995), vide figura 1. No ano de 2004, através de observações feitas da Terra, com utilização de óptica adaptativa, foi descoberto o primeiro sistema triplo de asteroides. Trata-se do sistema (87) Sylvia, que é composto pelo asteroide Sylvia e seus dois satélites Rômulo e Remo (Marchis et al., 2005). Até então, são conhecidos aproximadamente 192 sistemas múltiplos, sendo oito deles com mais de dois objetos. Desses oito sistemas triplos, cinco residem no cinturão principal, dois são NEO's (*Near-Earth Objects*. Objetos com órbita próxima da Terra) e um é TNO (*Trans-Neptunian Object*. Objetos com órbita posterior a Netuno). Os residentes no cinturão principal são os sistemas (87) Sylvia, (45) Eugênia (Marchis et al, 2008), (216) Kleopatra (Marchis et al, 2008), (93) Minerva (Marchis et al, 2009) e (3749) Balam (Marchis et al, 2005; Marchis et al, 2008; Marchis et al, 2008a, Marchis et al, 2008b); os sistemas NEO's são 1994CC e 2001 SN263 (Fang, 2010); e TNO é o trio Haumea, Hi'itaka e Namaka (Brown et al, 2005).

Asteróides múltiplos possuem particularidades de grande interesse científico, já que eles fornecem uma janela para a história colisional do sistema solar e são laboratórios naturais para o estudo de processos de evolução para asteroides com diferentes tamanhos, formas e densidades. Estudar esses sistemas é uma grande chave para o entendimento do passado do sistema solar, visto que os mesmos são remanescentes da formação dos planetas. Partindo dessa motivação, realizamos um estudo sobre a dinâmica do sistema triplo (87) Sylvia (Winter et al., 2009), que até aquele momento era o único sistema triplo conhecido. Este estudo teve como objetivo observar a evolução orbital dos satélites do sistema sendo perturbados por Sol e Júpiter. Através dos resultados, foi mostrado que Rômulo e Remo sofrem fortes perturbações secula-



Figura 1.1: Primeiro sistema duplo de asteróides observado. Dactyl e seu satélite Ida (Chapman et al. 1995).

res provenientes do Sol e de Júpiter que poderiam desestabilizá-los. Concluímos também que o achatamento (J_2) do corpo central é de extrema importância para a estabilidade de seus satélites. Conseqüentemente, as distâncias, juntamente com as variações das mesmas, entre os satélites e o bojo do corpo central têm grande importância na estabilidade do sistema. Partindo desse resultado, resolvemos fazer uma análise mais minuciosa do problema em questão. Para isso, decidimos realizar simulações considerando o movimento de atitude (movimento composto pela precessão, nutação e rotação do corpo) do asteróide central. Este movimento de atitude sofre variações devido aos torques causados por seus satélites, Sol e planetas.

Apesar dessa crescente descoberta de sistemas triplos, poucas informações se tem sobre eles, pois se tratam de corpos difíceis de se observar. Por esse motivo, infelizmente, não são todos os sistemas que possuem as informações necessárias para serem simulados. Para realizar as simulações, necessitamos dos elementos orbitais (ou posição e velocidade) dos três corpos, as coordenadas do polo e a dimensão (ou J_2) do corpo central. Até meados de 2010, só (87) Sylvia e (136108) Haumea possuíam esses dados disponíveis na literatura. No entanto, após a segunda metade de 2010 foram publicados os dados referêntes ao sistema (45) Eugênia (Marchis et al., 2010), (216) Kleopatra (Descamps et al., 2010) e os NEO's 1994CC e 2001 SN263 (Fang et al., 2010). Apesar de pretendermos estudar todos os triplos conhecidos, só realizamos até então o estudo de dois desses sistemas.

Grandes trabalhos envolvendo o estudo sobre a atitude dos corpos do sistema solar foram publicados nas últimas décadas. Entre eles, destaca-se o trabalho realizado por Laskar e Robutel em 1993, que mostra efeito estabilizante que a Lua tem no movimento de nutação (analisado através da variação da obliquidade (ângulo entre os planos orbital e equatorial de um corpo celeste)) da Terra de modo a proporcionar pequenas variações de temperatura terrestre e, con-

sequente, condições para o desenvolvimento de vida humana no planeta. Foram investigados diferentes condições iniciais de obliquidade e observado uma região caótica estendida entre 60° e 90° . Outro famoso trabalho foi desenvolvido por Wisdom e Peale publicado em 1984, no qual é mostrado o comportamento caótico no movimento de atitude de Hyperion.

Para realizar nosso estudo, primeiramente teríamos que implementar um modelo mais completo que pudesse, concomitantemente, levar em conta o movimento orbital dos corpos orbitantes e o movimento de atitude do corpo central. O modelo que utilizamos no estudo do sistema (87) Sylvia foi um modelo numérico no qual n-corpos orbitam um corpo central fixo de forma elipsoidal. Portanto, para obtermos nosso modelo mais completo desejado, teríamos somente que incluir no modelo anterior o movimento de atitude do corpo central. Assim, teremos um modelo de n-corpos orbitando um corpo central de forma elipsoidal (oblato) com movimento de atitude. Vale ressaltar que o movimento de atitude do corpo central sofre variações decorridas dos torques causados pelos n-corpos que o orbitam.

É importante deixar claro que o modelo numérico adotado por nós não é o único modo de se trabalhar a dinâmica de corpos orbitando um corpo central oblato. Na literatura encontra-se diferentes ferramentas para tratar desse tipo de problema. Um exemplo, é estudar esse sistema através das equações da variação dos ângulos que posicionam o equador do corpo central (equações de Euler (Lemos, 2007)) em função dos elementos orbitais do corpo perturbador, juntamente com as equações da variação dos elementos orbitais do corpo perturbador em função dos ângulos de Euler (equações de Lagrange (Murray e Dermott, 1999)). Porém, obter e resolver essas equações acopladas não é algo trivial, e, se formos levar em consideração mais corpos em questão, o problema se estende ainda mais. Assim, esses modelos são utilizados sempre de forma simplificada. Em capítulos posteriores, estudaremos alguns desses modelos e utilizaremos-os a fim de provar a validade da ferramenta numérica desenvolvida por nós.

Este presente trabalho foi organizado e desenvolvido, basicamente, segundo três frentes:

- desenvolvimento conceitual e teórico do modelo e implementação numérica computacional do mesmo;
- testes a fim de comprovar a validade da ferramenta computacional;
- estudo da dinâmica dos sistemas triplos de asteróides (45) Eugênia e (87) Sylvia;

Estudamos os sistemas triplos por meio da variação temporal dos ângulos que posicionam o equador do corpo central e os elementos orbitais osculadores dos satélites.

Capítulo 2

Equações do Movimento

Em geral, um corpo rígido de forma arbitrária possui seis graus de liberdade, dos quais três são de rotação (também conhecido como movimento de atitude do corpo) e três de translação, onde ambos os movimentos são em relação a um sistema fixo no espaço.

Em nosso trabalho, consideraremos um sistema no qual $N = n + 1$ corpos interagem gravitacionalmente entre si, onde o referencial é centrado em um dos corpos denominado corpo central. Este corpo central será o único que possuirá forma não pontual (elipsóide) e movimento de atitude, sofrendo assim torques dos demais corpos que o orbitam, ou seja, nosso sistema é composto por n corpos pontuais que orbitam em torno de um outro central de forma elipsoidal, que possui movimento de atitude (momento angular de spin juntamente com a variação do mesmo).

Apresentaremos as equações do movimento em duas partes, a primeira que tratará o movimento de translação dos n corpos em torno do corpo central de forma elipsoidal (*Problema de N-Corpos*) e a segunda apresentaremos as equações que descrevem o movimento de atitude do corpo central (*Dinâmica de Rotação*).

2.1 Problema de N-corpos

De acordo com a segunda Lei de Newton e a Lei da Gravitação Universal, podemos escrever a equação do movimento, em um sistema inercial, para n pontos de massa (Beutler, 2005):

$$\frac{d(m_i \dot{\vec{x}}_i)}{dt} = -k^2 m_i \sum_{j=0, j \neq i}^n m_j \frac{\vec{x}_i - \vec{x}_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|^3} \quad (2.1)$$

$$\ddot{\vec{x}}_i = -k^2 \sum_{j=0, j \neq i}^n m_j \frac{\vec{x}_i - \vec{x}_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|^3} \quad (2.2)$$

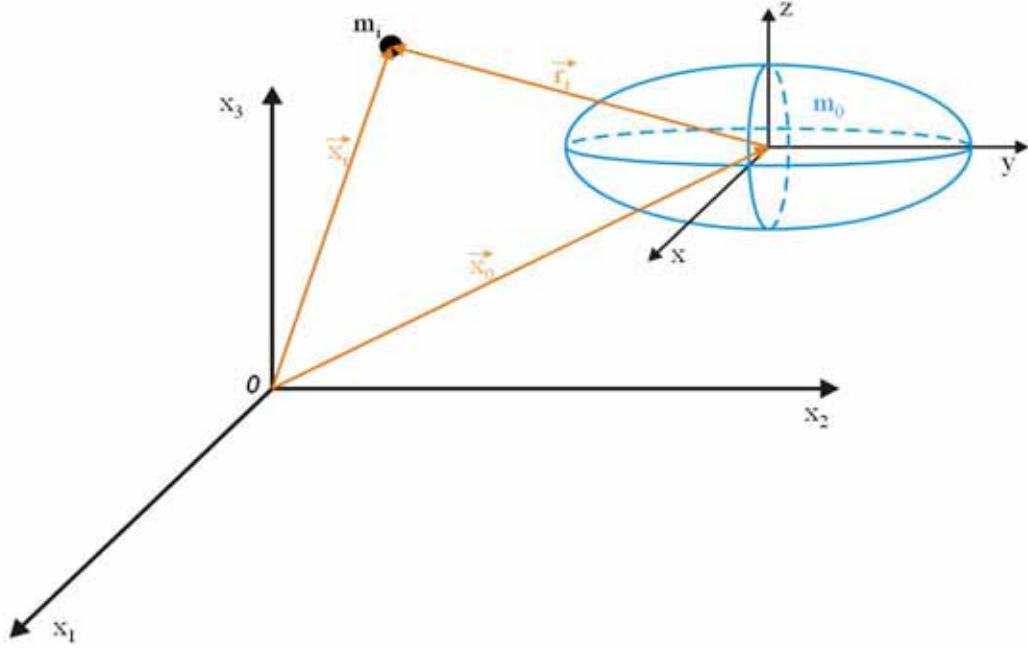


Figura 2.1: Mudança do sistema Inercial (x_1, x_2, x_3) para o sistema centrado no corpo (x, y, z) .

onde m_i é a massa do i -ésimo corpo, \vec{x}_i é o vetor posição do i -ésimo corpo no referencial inercial (x_1, x_2, x_3) e k^2 é a constante gravitacional.

Mudando para um referencial central a um corpo de forma elipsoidal, como mostra a figura 2.1, a equação (2.2) fica da forma (Beutler, 2005; Marchis et al., 2010; Lainey et al., 2007):

$$\vec{r}_i \stackrel{def}{=} \vec{x}_i - \vec{x}_0 \quad (2.3)$$

$$\ddot{\vec{r}}_i \stackrel{def}{=} \ddot{\vec{x}}_i - \ddot{\vec{x}}_0 \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_i = & -k^2 (m_0 + m_i) \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} - k^2 \sum_{j=1, j \neq i}^n m_j \left(\frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} + \frac{\vec{r}_i}{r_j^3} - T^T \nabla' U_2^{(j)} \right) \\ & + k^2 (m_0 + m_i) T^T \nabla' U_2^{(i)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde

$$U_2^{(k)} = -\frac{J_2}{2} \left(\frac{R_0}{r_k} \right)^2 \left(\frac{3z_k'^2}{r_k^2} - 1 \right) \quad (2.6)$$

onde J_2 é o coeficiente de achatamento do corpo central, R_0 é o raio equatorial do corpo central, T é a matriz de rotação entre o sistema Inercial (x, y, z) e o sistema fixo no corpo (x', y', z') e T^T é matriz transposta de T . Esta matriz será detalhadamente explicada no próximo tópico.

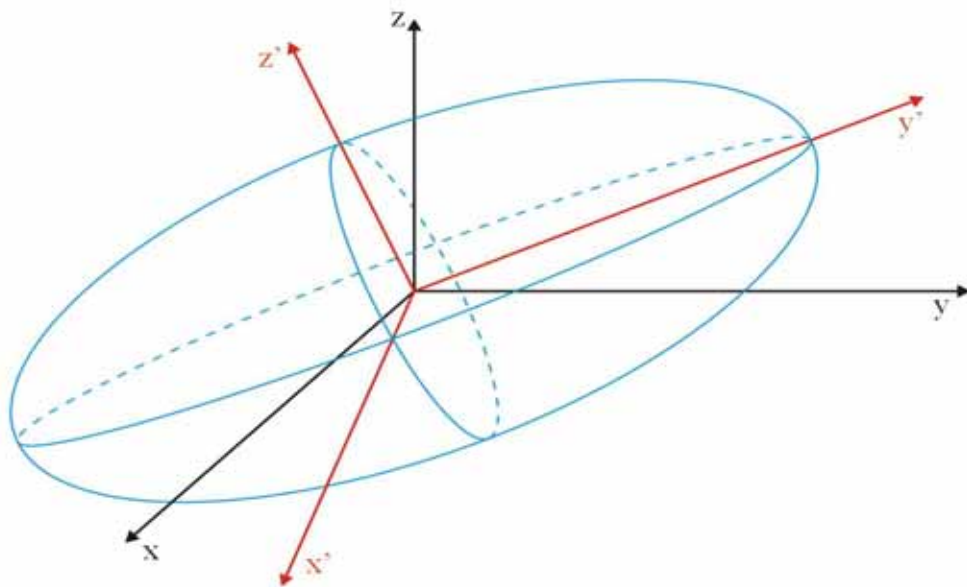


Figura 2.2: Desenho ilustrativo mostrando os dois sistemas de coordenadas. O sistema Fixo no Corpo (x', y', z') e sistema Inercial de Rotação (x, y, z) .

2.2 Dinâmica de Rotação

Como foi dito anteriormente, um corpo rígido possui movimento de atitude e translação. Neste tópico trataremos somente do movimento de atitude. Para isso, o primeiro passo é orientar o movimento de atitude, composto por três graus de liberdade, em um sistema fixo no qual chamaremos de *sistema Inercial de Rotação* (Sistema IR). Um modo simples de especificar essa orientação, consiste em estabelecer um *sistema Fixo no Corpo* (Sistema FC), isto é, um sistema que acompanhe o seu movimento, e considerar os ângulos que os eixos atados ao corpo formam com eixos paralelos aos que permanecem fixo no espaço (sistema IR), esses ângulos são denominados na literatura como ângulos de Euler (ϕ, θ, ψ) . A figura 2.2 ilustra esses dois sistemas de coordenadas, onde o sistema IR é representado (x, y, z) e o sistema FC representado (x', y', z') . Vale ressaltar que o sistema que denominamos Inercial de Rotação está centrado em um dos corpos, e como o baricentro do sistema não coincide com o centro desse corpo, seria errado afirmar que esse sistema se trata de um referencial inercial. Alguns autores costumam chamar esse sistema de pseudo-Inercial. O termo pseudo-Inercial vem do fato de apesar desse sistema não ser inercial do ponto de vista translacional, ele é inercial do ponto de vista rotacional, ou seja, ele não sofre nenhum tipo de rotação. Assim, os eixos desse sistema de coordenadas estão sempre na mesma direção. Portanto, podemos muito bem utilizar esse sistema para orientar posições angulares. O sistema Inercial de Rotação utilizado será o equador médio da Terra (EMJ2000) ou a eclíptica (ECJ2000), onde ambos são relacionados à uma data específica.

Para relacionarmos um sistema com o outro, faremos uma transformação composta por três

rotações consecutivas.

A primeira rotação será de um ângulo ϕ em torno do eixo z (figura 2.3). Rotação que leva do sistema (x, y, z) para o sistema (ξ, η, ζ) .

$$\begin{pmatrix} \text{rotao}\xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

onde

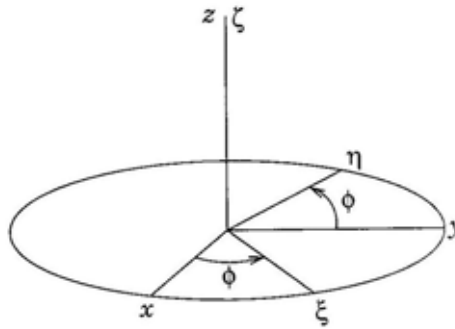


Figura 2.3: Rotação de ϕ em torno do eixo z . FONTE: Lemos (2007).

$$T_1 = \begin{pmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi & 0 \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Posteriormente rotacionamos de θ o eixo ξ (figura 2.4). Rotação que leva do sistema (ξ, η, ζ) para o sistema (ξ', η', ζ') .

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix} = T_2 \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

onde

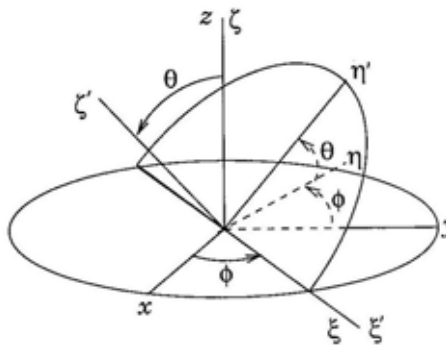


Figura 2.4: Rotação de θ em torno do eixo ξ . FONTE: Lemos (2007).

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Por último, rotacionamos de ψ o eixo ζ' (figura 2.5). Rotação que leva do sistema (ξ, η, ζ) para o sistema (x', y', z') .

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = T_3 \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

sendo

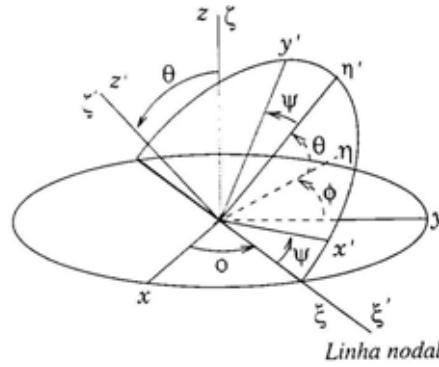


Figura 2.5: Rotação de ψ em torno do eixo ζ' . FONTE: Lemos (2007).

$$T_3 = \begin{pmatrix} \cos \psi & \text{sen } \psi & 0 \\ -\text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Portanto a rotação total será

$$T = T_3 T_2 T_1 \quad (2.13)$$

Desenvolvendo a equação 2.13, temos

$$T = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \text{sen } \phi \text{sen } \psi & \cos \psi \text{sen } \phi + \cos \theta \cos \phi \text{sen } \psi & \text{sen } \psi \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \psi \cos \phi - \cos \theta \text{sen } \phi \cos \psi & -\text{sen } \psi \text{sen } \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \cos \psi \text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta \text{sen } \phi & -\text{sen } \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Como vimos, estas rotações foram feitas para relacionar o sistema (x, y, z) com o sistema (x', y', z') , portanto:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Também podemos fazer a transformação inversa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

e como a matriz T é ortogonal, temos $T^{-1} = T^T$. Assim

$$T^T = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \psi & -\operatorname{sen} \psi \cos \phi - \cos \theta \operatorname{sen} \phi \cos \psi & \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\ \cos \psi \operatorname{sen} \phi + \cos \theta \cos \phi \operatorname{sen} \psi & -\operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & -\operatorname{sen} \theta \cos \phi \\ \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta & \cos \psi \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Em virtude de sua definição, o domínio dos ângulos de Euler é dado por:

$$0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi \quad (2.18)$$

O próximo passo agora será relacionar o momento angular com a variação temporal dos Ângulos de Euler e, posteriormente, obter as equações que dão a variação temporal do momento angular (torque).

2.2.1 Velocidade Angular em Termos dos Ângulos de Euler

Como em vários outros problemas da dinâmica do corpo rígido, teremos que exprimir o vetor velocidade angular em termos dos ângulos de Euler. Assim, por meio de rotações infinitesimais, temos (Lemos, 2007):

$$\begin{pmatrix} \omega'_x \\ \omega'_y \\ \omega'_z \end{pmatrix} = X' \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

onde

$$X' = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ \operatorname{sen} \theta \cos \psi & -\operatorname{sen} \psi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

ou

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{cosec} \theta \operatorname{sen} \psi & \cos \psi \operatorname{cosec} \theta & 0 \\ \cos \psi & -\operatorname{sen} \psi & 0 \\ -\operatorname{cotg} \theta \operatorname{sen} \psi & -\cos \psi \operatorname{cotg} \theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega'_x \\ \omega'_y \\ \omega'_z \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

onde $\vec{\omega}' = (\omega'_x, \omega'_y, \omega'_z)$ é o vetor velocidade angular no sistema FC. Perceba que a equação (2.21) está expressa em termos do sistema FC (x', y', z') . Para o sistema IR (x, y, z) as equações

ficam da forma,

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

onde

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \cos \phi & \text{sen } \theta \text{ sen } \phi \\ 0 & \text{sen } \phi & -\text{sen } \theta \cos \phi \\ 1 & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Obtendo a relação inversa, temos

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = X^{-1} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

onde

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} -\text{cotg} \theta \text{ sen } \phi & \cos \phi \text{cotg} \theta & 1 \\ \cos \phi & \text{sen } \phi & 0 \\ \text{cosec} \theta \text{ sen } \phi & -\cos \phi \text{cosec} \theta & 0 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

portanto

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{cotg} \theta \text{ sen } \phi & \cos \phi \text{cotg} \theta & 1 \\ \cos \phi & \text{sen } \phi & 0 \\ \text{cosec} \theta \text{ sen } \phi & -\cos \phi \text{cosec} \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Pode-se utilizar a equação que relaciona a variação dos ângulos de Euler com a velocidade angular, dada pela equação (2.26), ou, trabalhar em termos do momento angular (\vec{h}). É importante lembrar que as grandezas com linha (') são em relação ao referencial FC (x', y', z') e as sem linha são em relação ao referencial IR (x, y, z).

Partindo da definição de momento angular,

$$\vec{h} = I\vec{\omega} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

onde I é o tensor de inércia do corpo central. Obtendo a relação inversa, temos

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = I^{-1} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

Substituindo (2.28) em (2.24), temos

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = X^{-1} I^{-1} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = X^{-1} T^T I'^{-1} T \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Assumindo que o sistema FC coincide com os eixos principais de inércia do corpo central, o tensor de inércia no sistema fixo fica:

$$I' = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

e sua inversa é dada por

$$I'^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{A} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{B} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

onde A , B e C são chamados *momentos principais de inércia* do corpo. Simplificando, a equação (2.30) fica na forma

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = Y \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

onde

$$Y \stackrel{def}{=} X^{-1} T^T I'^{-1} T \quad (2.34)$$

2.2.2 Variação Temporal da Velocidade Angular: Equações de Euler

Apesar das equações de Euler serem bem conhecidas na literatura, desenvolvê-las com determinados torques não é tão simples. Os torques num corpo elipsoidal devido a n-corpos é um bom exemplo. Por esse motivo, as Equações de Euler com os torques de n-corpos serão somente apresentadas, não sendo assim desenvolvidas detalhadamente. Assim, segundo Beutler (2005),

as equações de Euler são da forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}'_x \\ \dot{\omega}'_y \\ \dot{\omega}'_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 \omega'_y \omega'_z \\ \gamma_2 \omega'_z \omega'_x \\ \gamma_3 \omega'_x \omega'_y \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{3k^2 m_i}{r_i^5} \begin{pmatrix} \gamma_1 y'_i z'_i \\ \gamma_2 z'_i x'_i \\ \gamma_3 x'_i y'_i \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

onde

$$\gamma_1 \stackrel{def}{=} \frac{C - B}{A}; \quad \gamma_2 \stackrel{def}{=} \frac{A - C}{B}; \quad \gamma_3 \stackrel{def}{=} \frac{B - A}{C}$$

Note que a equação (2.35) está em relação ao sistema FC. Pode-se também trabalhar no sistema IR através da variação temporal do momento angular (Beutler, 2005).

$$\begin{pmatrix} \dot{h}_x \\ \dot{h}_y \\ \dot{h}_z \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \frac{3k^2 m_i}{r_i^5} T^T \begin{pmatrix} (C - B) y'_i z'_i \\ (A - C) z'_i x'_i \\ (B - A) x'_i y'_i \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Como consideramos o corpo central de forma elipsoidal e homogêneo, seus momentos principais de inércia são dados pela relação (Murray e Dermott, 1999):

$$A = \frac{1}{5} m_0 (b^2 + c^2) \quad (2.37)$$

$$B = \frac{1}{5} m_0 (a^2 + c^2) \quad (2.38)$$

$$C = \frac{1}{5} m_0 (a^2 + b^2) \quad (2.39)$$

onde a, b e c são os semi-eixos do elipsóide, vide figura 2.6. Após serem obtidas as equa-

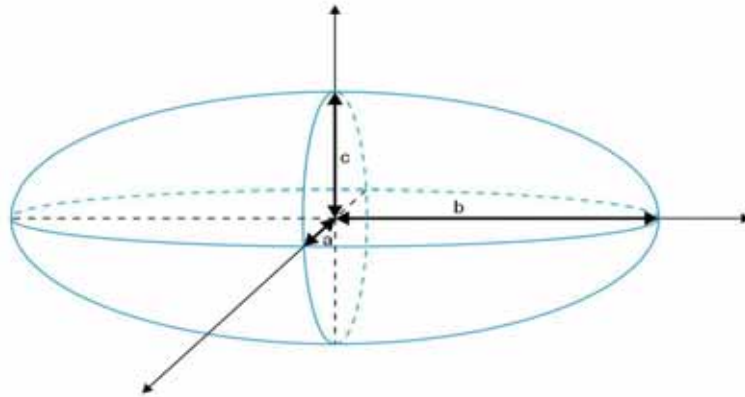


Figura 2.6: Desenho ilustrativo de um elipsóide com semi-eixos a, b e c

ções do modelo, iremos, no próximo capítulo, apresentar e discutir a ferramenta computacional desenvolvida para implementar o mesmo.

Capítulo 3

Ferramenta Computacional

Na realidade, trabalharemos com duas ferramentas computacionais diferentes. A primeira seria um programa mais simples que foi utilizado no nosso trabalho anterior (Winter et al, 2009) que simula um sistema de n-corpos orbitando um corpo fixo de forma elipsoidal oblato. Esse programa utiliza como integrador o Gauss-Radau (Everhart, 1985) e integra a equação (2.5), porém sem o termo indireto devido ao achatamento. Essa perturbação indireta pode ser interpretada como a perturbação que o achatamento do corpo central causa no corpo j que perturba, de forma indireta, o corpo i . Esse programa foi utilizado para simular os casos sem toques. Eliminamos esse termo indireto pois se trata de uma perturbação muito pequena a ponto de poder ser desprezada, e também pelo fato desse termo aumentar de forma significativa o “tempo de máquina” (tempo necessário para o computador realizar a simulação). Eliminando esse termo indireto, a equação (2.5) fica da forma:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_i = & -k^2 (m_0 + m_i) \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} - k^2 \sum_{j=1, j \neq i}^n m_j \left(\frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} + \frac{\vec{r}_i}{r_j^3} \right) \\ & + k^2 (m_0 + m_i) T^T \nabla' U_2^{(i)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

O outro programa é equivalente ao primeiro, porém com o acréscimo do movimento de atitude do corpo central. Optamos por trabalhar com as equações em relação ao referencial Inercial. As equações que descrevem o movimento de atitude do corpo central no referencial Inercial são as equações (2.33) e (2.36). No entanto, consideraremos o corpo central com simetria equatorial, ou seja, $a = b$, assim, consequentemente, $A = B$. Portanto, a equação (2.36) fica:

$$\begin{pmatrix} \dot{h}_x \\ \dot{h}_y \\ \dot{h}_z \end{pmatrix} = 3J_2 m_0 R_0^2 k^2 \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{r_i^5} T^T \begin{pmatrix} y'_i z'_i \\ -z'_i x'_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

onde J_2 é dado pela fórmula (Murray e Dermott, 1999):

$$J_2 = \frac{1}{m_0 R_0^2} (C - A), \quad (3.3)$$

e R_0 é o raio equatorial do corpo central. Assim, para simularmos um sistema de n-corpos orbitando um corpo central de forma elipsoidal, com simetria equatorial, precisamos integrar simultaneamente as equações (3.1), (2.33) e (3.2). Note que as equações são acopladas, ou seja, a equação (3.2) é função das posições que são calculadas pela equação (3.1), e a equação (3.1) depende da posição do equador do corpo central (por meio da matriz de rotação T) que é calculada através das equações (2.33) e (3.2). Neste segundo programa foi utilizado o integrador Burlish-Stoer (Press et al., 2007).

Ambos programas foram implementados em linguagem C. Os passos iniciais de integração foram da ordem de um décimo do menor período orbital. A precisões utilizadas em cada integrador foram de 10^{-13} e 10^{-15} para Burlish-Stoer e Radau, respectivamente.

Para solucionarmos essas equações, além dos parâmetros físicos de cada corpo (massa dos N-corpos e dimensões do corpo central), necessitamos das seguintes condições iniciais:

$$\vec{r}_n(t_0), \quad \dot{\vec{r}}_n(t_0), \quad \phi(t_0), \theta(t_0), \psi(t_0) \quad e \quad \vec{h}_n(t_0)$$

Obtemos as posições e velocidades através dos elementos orbitais iniciais de cada corpo (Murray e Dermott, 1999). A posição e velocidade iniciais do corpo central são assumidas nulas. Veja o esquema abaixo.

$$\begin{bmatrix} a(t_0) \\ e(t_0) \\ I(t_0) \\ \Omega(t_0) \\ \omega(t_0) \\ f(t_0) \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0) \\ v_x(t_0) \\ v_y(t_0) \\ v_z(t_0) \end{bmatrix}$$

Caso for escolhido utilizar os elementos orbitais iniciais em relação ao equador do corpo central, basta fazer uma rotação inversa nas coordenadas para obter a posição e velocidade iniciais (veja

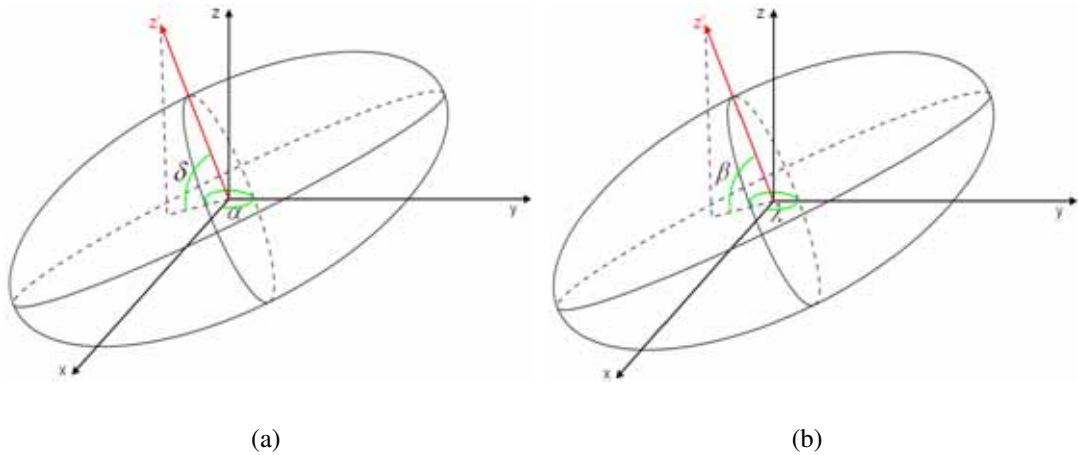


Figura 3.1: Figura ilustrativa das duas possíveis condições iniciais do polo (ou equador) do corpo central. A figura (a) mostra o caso quando o sistema IR é o equador médio da Terra (EMJ2000), e nesse caso o polo será determinado através dos ângulos declinação (δ) e ascensão reta (α) do mesmo. A figura (b) mostra para caso quando o sistema IR é a eclíptica (ECJ2000), e nesse caso o polo será determinado através da longitude (λ) e latitude (β).

o esquema abaixo):

$$\begin{bmatrix} a(t_0) \\ e(t_0) \\ i(t_0) \\ \Omega'(t_0) \\ \omega'(t_0) \\ f'(t_0) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ z'(t_0) \\ v'_x(t_0) \\ v'_y(t_0) \\ v'_z(t_0) \end{bmatrix} \Rightarrow T^T \Rightarrow \begin{bmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0) \\ v_x(t_0) \\ v_y(t_0) \\ v_z(t_0) \end{bmatrix}$$

As condições iniciais dos ângulos de Euler podem ser obtidas pela longitude (λ) e latitude (β), ou, declinação (δ) e ascensão reta (α) do polo do corpo central. É de grande importância atentarmos que se utilizarmos a longitude e latitude como condição inicial do polo, o plano de referência será a eclíptica, e, se usarmos a declinação e ascensão reta, o plano de referência será o equador médio da Terra (vide figura 3.1), assim, todos os elementos orbitais iniciais serão dados em relação ao plano de referência inercial adotado ou em relação ao equador do corpo central. As coordenadas do polo possuem as seguintes relações:

$$\phi = \lambda - 270^\circ, \quad \theta = 90^\circ - \beta$$

ou

$$\phi = \alpha - 270^\circ, \quad \theta = 90^\circ - \delta$$

O ângulo ψ , por ser o ângulo que fornece o movimento de rotação, será sempre inicializado

em zero ($\psi(t_0) = 0^\circ$). Por fim, obtemos o vetor momento angular inicial pelo período (D) de rotação do corpo central. Assim:

$$\begin{pmatrix} \omega'_x(t_0) \\ \omega'_y(t_0) \\ \omega'_z(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2\pi}{D} \end{pmatrix}$$

lembrando que:

$$\vec{h}' = I' \vec{\omega}'$$

Assim

$$\begin{pmatrix} h'_x(t_0) \\ h'_y(t_0) \\ h'_z(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2\pi C}{D} \end{pmatrix}$$

Como

$$\vec{h} = T^T \vec{h}',$$

temos a condição inicial dada pela relação

$$\begin{pmatrix} h_x(t_0) \\ h_y(t_0) \\ h_z(t_0) \end{pmatrix} = \frac{2\pi C}{D} \begin{pmatrix} \text{sen } \theta \text{ sen } \phi \\ -\text{sen } \theta \text{ cos } \phi \\ \text{cos } \theta \end{pmatrix}$$

Para melhor entendimento, ilustramos o modelo utilizado através da figura 3.2. Após ser compreendido o funcionamento da ferramenta computacional utilizada no trabalho, discutiremos no próximo capítulo alguns modelos analíticos aproximados encontrados na literatura.

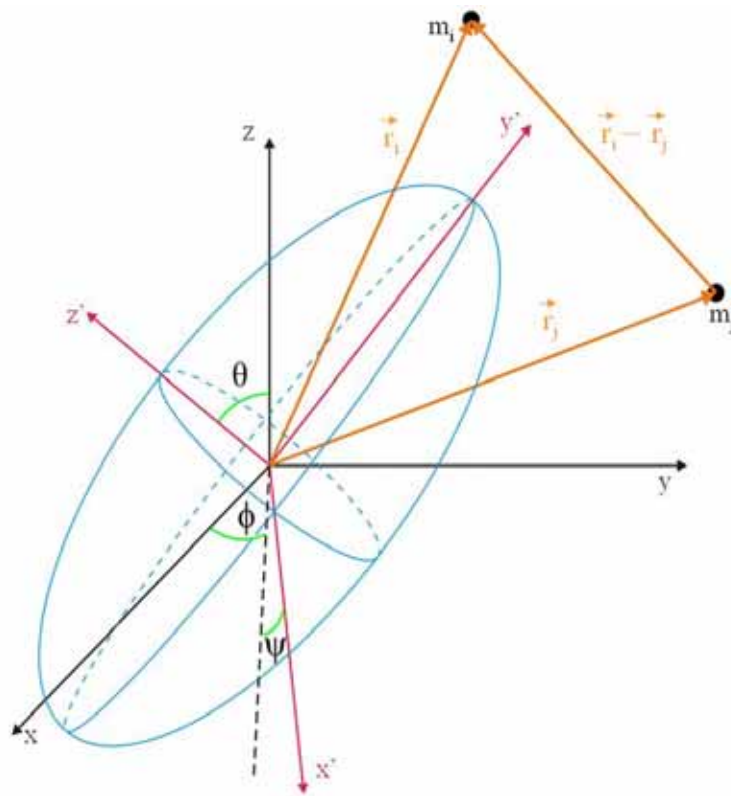


Figura 3.2: Figura representativa do modelo. Problema de N-corpos, considerando um corpo central elipsoidal com movimento de atitude. O sistema vermelho é o Fixo no Corpo (x', y', z') e o sistema preto (x, y, z) é o sistema Inercial de Rotação. Note que os dois sistemas estão relacionados através dos ângulos de Euler (ϕ, θ, ψ).

Capítulo 4

Modelos Analíticos Aproximados

Apresentaremos neste capítulo dois modelos analíticos aproximados que utilizaremos para comparar com nossos resultados.

As primeiras tentativas de descrever o movimento de satélites em torno de um corpo com movimento de nutação e precessão foram feitas por Brouwer (1959), Proskurin e Batrakov (1960), e, Kozai (1960). Em 1965, Goldreich, de forma inovadora, realizou um trabalho nesse assunto com o objetivo de estudar o movimento orbital dos satélites de Marte. Goldreich tratou o movimento de atitude do corpo central sendo perturbado por um corpo com pequena inclinação. Dessa forma o movimento de translação varia uniformemente e o movimento de nutação é nulo. As equações utilizadas por ele são da seguinte forma:

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = -\kappa \cos \theta, \quad (4.2)$$

onde

$$\kappa \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi D}{P^2} \frac{1}{(1 - e_p^2)^{3/2}} \frac{3}{2} J_2 \frac{mR^2}{C}.$$

e D é o período de rotação do corpo central e P o período orbital do corpo perturbador (corpo responsável pelo movimento de translação do corpo central). A excentricidade e_p se refere ao corpo perturbador. As constantes m , R e C são a massa, o raio equatorial e o momento principal de inércia polar do corpo central, respectivamente. No estudo de Goldreich (1965) o corpo central era Marte e o corpo perturbador era o Sol.

Também podemos escrever κ em função do movimento médio orbital do corpo perturbador (n), e, da velocidade angular média (spin) (s) e dos momentos principais de inércia do corpo central.

$$\kappa = \frac{3n^2}{2s(1 - e^2)^{3/2}} \frac{C - \frac{A+B}{2}}{C}$$

Lembrando que $P = 2\pi/n$ e $D = 2\pi/s$.

Para estudar a dinâmica do corpo orbitante (satélites de Marte, por exemplo), Goldreich (1965) o considerou o semi-eixo maior e a excentricidade constantes. Assim, as equações da variação temporal dos elementos orbitais são escritas da forma:

$$\frac{da}{dt} = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{de}{dt} = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{di}{dt} = -\dot{\phi} \sin \theta \sin \Omega \quad (4.5)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2}nJ_2 \left(\frac{R}{a}\right)^2 \frac{\cos i}{(1-e^2)^2} \quad (4.6)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{4}nJ_2 \left(\frac{R}{a}\right)^2 \frac{5\cos^2 i - 1}{(1-e^2)^2} - \dot{\phi} \cos \theta \quad (4.7)$$

Essas simplificações são conhecidas na literatura como aproximações de Goldreich. Note que possuindo somente três simples parâmetros do corpo central (momentos principais de inércia, massa e período de rotação) e dois parâmetros do corpo perturbador (excentricidade e período orbital de corpo perturbador) podemos obter o período de precessão do corpo central. Infelizmente essa simplificação produz uma certa limitação no modelo, visto que o mesmo só pode ser utilizado para estudar corpos com pequena inclinação orbital e baixa variação de excentricidade e semi-eixo maior. Vale enfatizar que as equações (4.3)-(4.7) estão em relação ao sistema FC (equador do corpo central).

O conhecido livro de Goldstein (*Classical Mechanics*, 1980) apresenta o movimento de precessão da Terra com uma equação equivalente à equação (4.2). Por meio de formalismo lagrangiano, o autor obtêm a equação (4.2) (para excentricidade igual a zero) e adquire os períodos de precessão da Terra para os sistemas Terra-Sol (≈ 81.000 anos) e Terra-Sol-Lua (≈ 26.000 anos).

Outro modelo que discutiremos aqui foi desenvolvido para estudar os satélites de Netuno (Nascimento e Yokoyama, 2009). Mais completo que o modelo anterior, este trabalho trata o movimento de atitude sendo perturbado por um corpo com inclinação diferente de zero. Nascimento e Yokoyama (2009) desenvolveram seu trabalho através das equações de Euler para um torque genérico $\vec{\Gamma} = (\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$.

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}'_x \\ \dot{\omega}'_y \\ \dot{\omega}'_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 \omega'_y \omega'_z \\ \gamma_2 \omega'_z \omega'_x \\ \gamma_3 \omega'_x \omega'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Gamma_1}{A} \\ \frac{\Gamma_2}{B} \\ \frac{\Gamma_3}{C} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Se considerarmos o corpo com simetria equatorial ($A = B$ e $\Gamma_3 = 0$), teremos:

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}'_x \\ \dot{\omega}'_y \\ \dot{\omega}'_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 \omega'_y \omega'_z \\ -\gamma_1 \omega'_z \omega'_x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Gamma_1}{A} \\ \frac{\Gamma_2}{A} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

onde o torque é dado por,

$$\vec{\Gamma} = (\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) = -\vec{r} \times \vec{\nabla} U, \quad (4.10)$$

e U é o potencial para o sistema Netuno-Tritão e é escrito da forma

$$U = -\frac{GM_N m_T J_2 R_N^2}{r_T^3} \left(\frac{3 \sin^2 \beta}{2} - \frac{1}{2} \right). \quad (4.11)$$

Os índices N e T se referem à Netuno e Tritão, respectivamente, e o ângulo β é a latitude de Tritão. A partir das equações (4.9), (4.10) e (2.19), e, com algumas manipulações algébricas e simplificações (o autor assume que a velocidade de rotação é dominante, podendo assim negligenciar os termos $\dot{\theta}\dot{\Omega}$, $\ddot{\theta}$, $\ddot{\Omega}$ e $\dot{\Omega}^2$), as equações que descrevem o movimento de nutação e translação de Netuno sendo perturbado por Tritão ficam da forma:

$$\dot{\theta} = \frac{3Gm_T M_N R_N J_2}{4a_T^3 C_{S_N} (1 - e_T^2)^{3/2}} \left[\sin \theta \sin^2 I_T \sin (2\phi - 2\Omega_T) + \cos \theta \sin 2I_T \sin (\phi - \Omega_T) \right] \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi} = \frac{3Gm_T M_N R_N J_2}{4a_T^3 C_{S_N} (1 - e_T^2)^{3/2}} & \left[(1 - 3 \cos^2 I_T) \cos \theta + \frac{2 \sin I_T \cos I_T \cos 2\theta \cos (\phi - \Omega_T)}{\sin \theta} \right. \\ & \left. + \sin^2 I_T \cos \theta \cos (2\phi - 2\Omega_T) \right] \quad (4.13) \end{aligned}$$

Nesse modelo com inclinação diferente de zero, para estudar a dinâmica do sistema, os autores optaram por trabalhar com os ângulos em relação à um plano denominado *plano invariante*. Esse plano invariante é definido como sendo o plano perpendicular ao vetor momento angular total do sistema (momento angular de rotação do corpo central mais o momento angular orbital do outro corpo). Portanto, partindo do pressuposto que o momento angular total se conserva, esse plano é considerado imutável. O autor optou por trabalhar nesse plano pois este possibilita achar uma relação entre os ângulos inclinação do equador (θ) e inclinação orbital (I). Veja a relação abaixo.

$$\sin \theta = \frac{m_T n_T a_T^2}{C_{S_n}} \sin I_T \quad (4.14)$$

O objetivo deste trabalho de Nascimento e Yokoyama (2009), mais especificamente, é estudar a dinâmica de um satélite interno de Netuno sofrendo influência do movimento de atitude de Netuno. O movimento de atitude de Netuno sofre perturbações devido a Tritão. Para estudar a dinâmica desse satélite interno, os autores utilizam equações do tipo Lagrange de grande

complexidade, sendo assim não trivial a implementação das mesmas. Por fim, utilizaremos somente as equações (4.12) e (4.13) à fim de testarmos nosso programa. É óbvio que apesar dessas equações terem sido desenvolvidas para estudar o sistema Netuno-Tritão, elas podem ser aplicadas à qualquer outro sistema. Note que os dois modelos são provenientes das mesmas equações, ou seja, ambos partem das equações de Euler e equações das velocidades angulares em termos dos ângulos de Euler para estudar a atitude do corpo central. Outro ponto importante é que os elementos orbitais do corpo perturbador nas equações (4.12) e (4.13) são em relação ao referencial Inercial. Note que se considerarmos a inclinação (I) igual a zero, as equações (4.12) e (4.13) se igualam as equações mais simples (4.2) e (4.1).

Capítulo 5

Testes do Programa

Por se tratar de um modelo implementado por nós, é de extrema necessidade fazermos testes para verificar sua validade. O primeiro passo foi simular sistemas nos quais seus resultados são bem conhecidos na literatura. Os primeiros casos a serem estudados foram os sistemas Terra-Sol e Terra-Sol-Lua de modo a verificar se nosso programa reproduz os períodos de precessão da Terra nesses dois casos. As figuras 5.1 e 5.2 mostram o nodo do equador em função do tempo para os sistemas Terra-Sol e Terra-Sol-Lua, respectivamente. Podemos determinar o período de precessão do corpo central por observação direta das figuras 5.1 e 5.2, ou através da taxa de variação do nodo ($\dot{\phi}$). Assim obtemos o período de precessão da Terra para o sistema Terra-Sol é de 80.021 anos ($\dot{\phi} \approx 16,3''/ano$) (figura 5.1) e o período de precessão da Terra para o sistema Terra-Sol-Lua é aproximadamente 26.402 anos ($\dot{\phi} \approx -50,25''/ano$) (figura 5.2). Esses períodos de precessão são, de forma aproximada, equivalentes aos valores encontrados utilizando a equação (4.2) (Goldstein, 1965).

Outro dado conhecido na literatura é o período de precessão de Marte que é aproximadamente 171.066 anos ($\dot{\phi} \approx -7,576''/ano$) (Folkner, 1997). Simulamos o sistema Marte-Sol e obtivemos o mesmo valor aproximado (vide figura 5.3).

Outro trabalho que utilizamos como teste foi uma dissertação de mestrado intitulado *A computational study on the evolution of the dynamics of the obliquity of the Earth* (Girkin, 2005) que trata de um estudo, por meio de simulações numéricas, da variação temporal da obliquidade da Terra perturbada separadamente pelos outros planetas do sistema solar. Para realizar esse trabalho, o autor expressa seus resultados por meio de gráficos da obliquidade em função do tempo da Terra sendo perturbada por cada planeta separadamente. Esses resultados estão apresentados na figura 5.4. Optamos por tentar reproduzir somente os casos de maior importância, que são os problemas Terra-Sol-Marte, Terra-Sol-Vênus, Terra-Sol-Saturno e Terra-Sol-Júpiter. Os nossos resultados estão apresentados na figura 5.5. Ao compararmos os dois resultados (figuras 5.4 e 5.5), percebe-se que nossos resultados possuem comportamentos muito parecidos com os resultados do trabalho de Girkin, porém com uma pequena discrepância nas amplitudes de

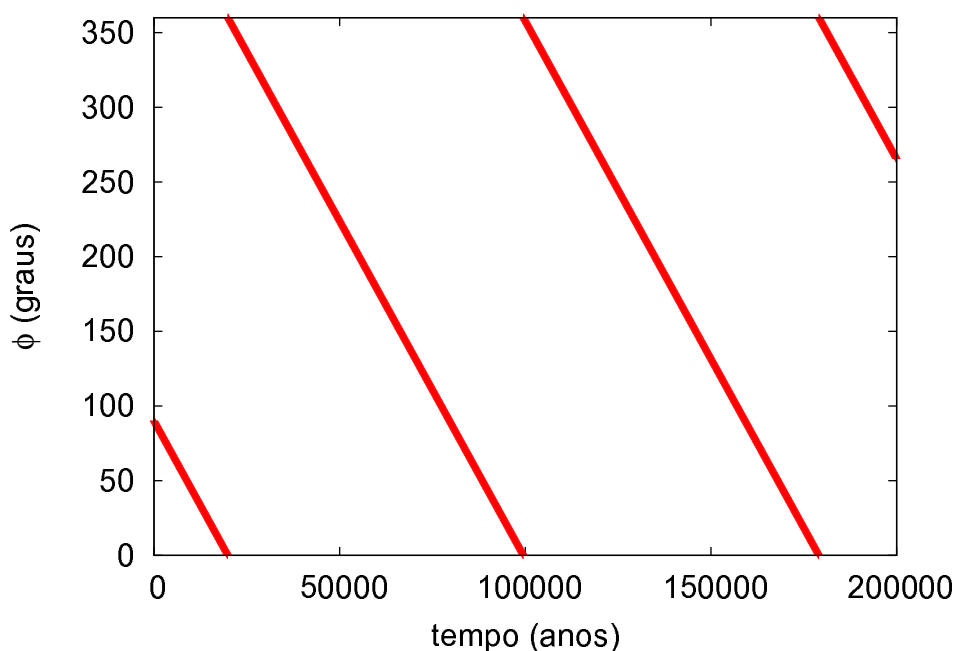


Figura 5.1: Variação temporal do nodo do equador (ϕ) da Terra para o sistema Terra-Sol. Perceba que o período de precessão é 80.021 anos.

oscilação. Acreditamos que essa discrepância seja devido a diferentes condições iniciais entre os resultados, pois no trabalho dele não há especificações de quais condições iniciais foram utilizadas.

Após estudarmos o trabalho sobre a obliquidade da Terra, decidimos tentar comparar nossos resultados utilizando as equações de precessão e nutação apresentado no trabalho de Nascimento e Yokoyama (2009) (equações (4.12) e (4.13)). No entanto, para estudarmos o sistema completo, composto pelo movimento de atitude do corpo central e o movimento orbital do corpo perturbador, teríamos que ter além das equações de nutação e precessão, as equações da variação temporal dos elementos orbitais do corpo perturbador. Uma possibilidade seria utilizar as equações de Goldreich ((4.3)-(4.7)), mas teríamos que trabalhar dentro das limitações do modelo (corpo com baixa inclinação, semi-eixo maior e excentricidade constantes), algo que não é de nosso interesse, visto que nosso programa não possui nenhuma restrição. Modelos mais completos são encontrados na literatura, porém tratam de longos equacionamentos de modo a serem inviáveis de implementar nesse momento (Efroimsky, 2006), mas serão certamente utilizados para testes posteriores. Portanto, decidimos trabalhar somente com as equações (4.12) e (4.13) para um caso no qual os elementos orbitais sejam constantes. Para isso, não podendo ser de outra maneira, simulamos um problema de dois corpos com J_2 igual a zero. É bom deixar claro que usaremos J_2 igual a zero só no cálculo da órbita (equação (3.1)) e que no restante dos cálculos (equações (2.33) e (3.2)) o valor do J_2 será um valor escolhido diferente de zero. O resultado dessa simulação será comparado com os resultados obtidos através as equações (4.12)

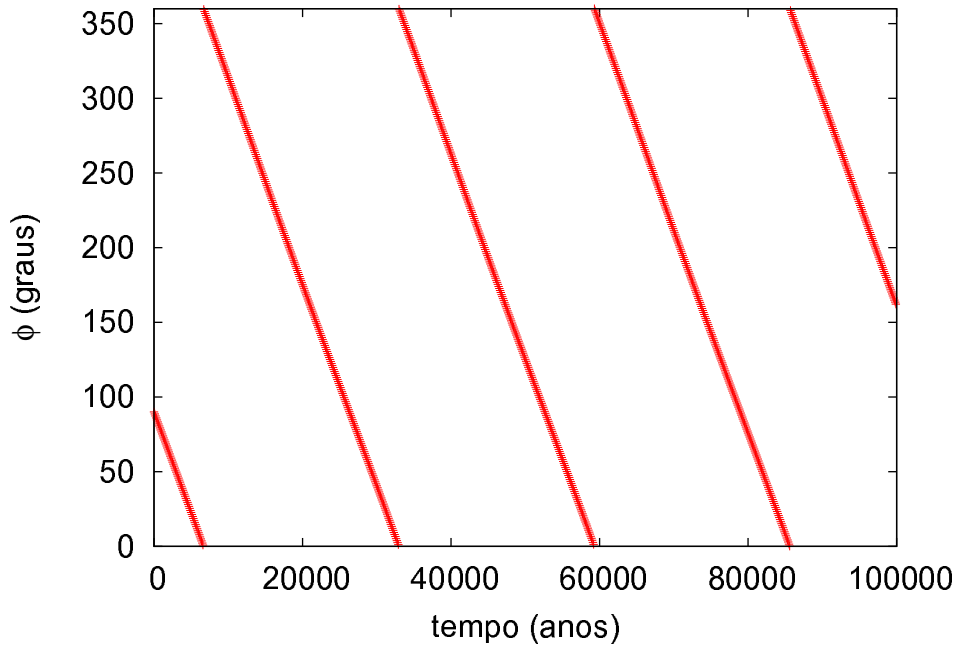


Figura 5.2: Variação temporal do nodo do equador (ϕ) da Terra para o sistema Terra-Sol-Lua. Perceba que o período de precessão é 26.402 anos.

e (4.13). A figura 5.6 mostra os resultados para os dois modelos, e, de forma clara, percebe-se que os resultados coincidem. As condições iniciais utilizadas nesse teste estão expressos nas tabelas 5.1 e 5.2.

Tabela 5.1: Condições iniciais do corpo central genérico usados no teste.

Massa (kg)	Dimensões ($a \times b \times c$) (km)	ϕ	θ	Período de Rotação
$5,8 \times 10^{18}$	$100 \times 100 \times 50$	135°	45°	0,24 dia

Tabela 5.2: Condições iniciais do satélite ge usados no teste.

Massa (kg)	a_s	e	$i(^{\circ})$	$\Omega(^{\circ})$	$\omega(^{\circ})$	$f(^{\circ})$
$1,0 \times 10^{16}$	1000 km	0	90	135	0	0

Observando os resultados do teste anterior, tivemos a idéia de realizar um estudo para verificar como o resultado do nosso modelo divergiria do resultado obtido através das equações (4.12) e (4.13) se considerássemos o J_2 diferente de zero. Realizamos simulações para diferentes percentuais de J_2 . A figura 5.7, comparando com a 5.6, mostra que quanto maior for o J_2 , mais discrepante são os modelos, como esperado. Esse resultado de certa forma é óbvio, pois quanto maior for o achatamento do corpo central, maior será a variação dos elementos orbitais do corpo orbitante. Assim, as equações (4.12) e (4.13) se tornam inadequadas pois as mesmas consideram os elementos orbitais constantes.

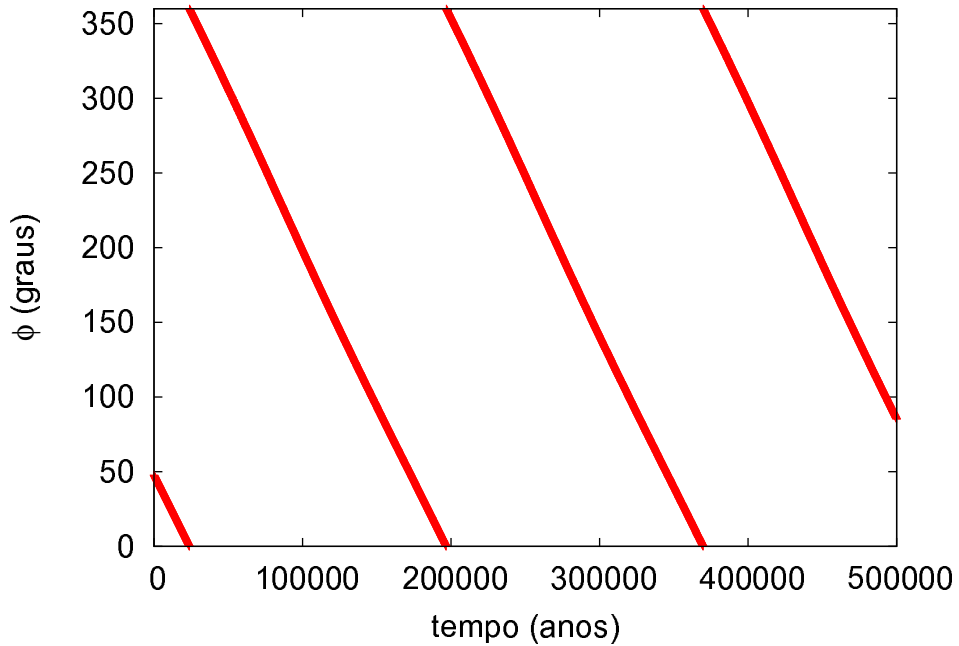


Figura 5.3: Variação temporal do nodo do equador (ϕ) de Marte para o sistema Marte-Sol. Perceba que o período de precessão é aproximadamente 171.066 anos.

No capítulo 3 foi dito que optamos por trabalhar com as equações que descrevem o movimento de atitude no sistema IR (equações (2.33) e (3.2)). Perceba que as equações nesse sistema são muito mais complicadas que no sistema Fixo no Corpo (equações 2.19 e 2.35). Por esse motivo, poucas pessoas na literatura trabalham com as equações no sistema IR. Partindo dessa análise, decidimos fazer outro programa que, diferente do primeiro trabalhe no sistema Fixo no Corpo. E com esse programa pronto, decidimos utilizá-lo como parâmetro de teste, pois mesmo sendo em referenciais diferentes os dois programas têm que gerar o mesmo resultado. Este teste está mostrado por meio da variação temporal dos elementos orbitais do corpo orbitante e a inclinação e nodo do equador do corpo central de um sistema duplo genérico (figuras 5.8 e 5.9). As curvas em vermelho são os resultados obtidos do programa que utiliza as equações no sistema IR e as em verde são os resultados obtidos do programa que utiliza as equações no sistema Fixo no Corpo. As figuras mostram claramente que os dois programas reproduzem o mesmo resultado. Note que tivemos que fazer as curvas de um dos casos com menos pontos, pois caso contrário as curvas ficariam sobrepostas, impossibilitando assim a leitura.

Nosso último teste foi tentar reproduzir o trabalho de Ward (1973), no qual foi estudada a obliquidade de Marte. Para fazer esse estudo, Ward analisou o movimento orbital de Marte levando em conta a perturbação secular (Brower e Clemence, 1961) de todos os planetas (exceto Plutão) e estudou o movimento de atitude de Marte sofrendo torques provenientes do Sol. A figura 5.10 mostra a variação temporal da obliquidade de Marte (curva superior) e a variação temporal da inclinação de Marte (curva inferior) resultante do trabalho de Ward. Nós,

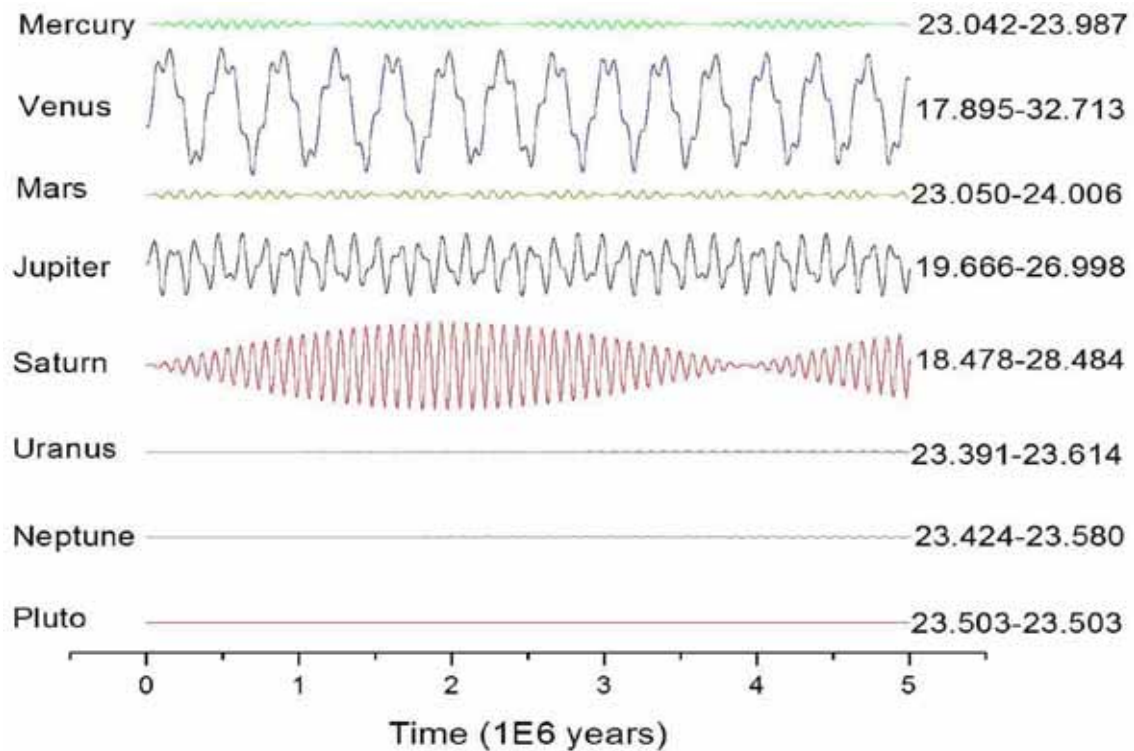


Figura 5.4: A figura extraída do trabalho de Girkin (2005) mostra a evolução temporal da obliquidade da Terra devido a cada planeta. A Lua não está presente nestas simulações. Os valores mínimo e máximo da obliquidade estão mostrados, em graus, no lado direito de cada curva.

para comparar com o resultado de Ward, simulamos utilizando nosso programa um caso de 6 corpos (Marte-Sol-Júpiter-Terra-Saturno-Vênus) e fizemos um gráfico das mesmas variáveis da figura 5.10, porém em menor escala de tempo (vide figura 5.11). Comparando as figuras 5.10 e 5.11, percebemos uma diferença entre os resultados se tratando das amplitudes da obliquidade e inclinação. Por outro lado, o comportamento periódico dos dois são equivalentes, contudo acreditamos ser esperada essa discrepância nos resultados, pois em nossa simulação são levados em conta os torques de todos os corpos, diferente de Ward que só considera o movimento de atitude perturbado por Sol e as perturbação secular dos outros corpos.

Testes ainda estão sendo feitos, entretando, acreditamos que estes já sejam suficientes para validar nosso programa.

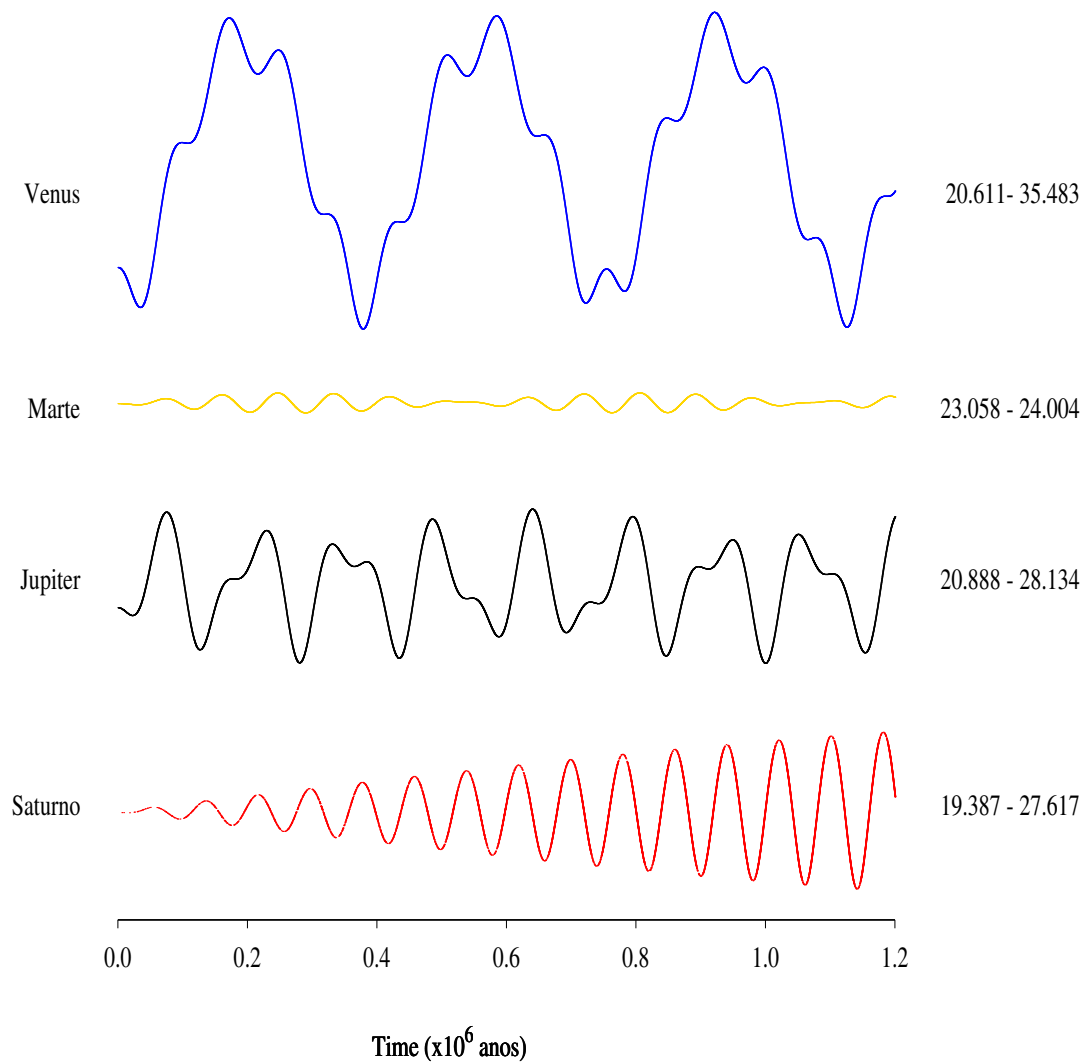


Figura 5.5: A figura proveniente de nossas simulações mostra a variação da obliquidade da Terra simulados para 4 casos diferentes: sistema Sol-Terra-Vênus (azul), Sol-Terra-Marte (amarelo), Sol-Terra-Jupiter (preto) e Sol-Terra-Saturno (vermelho). Esses resultados são simulações sem a presença da Lua. Os valores mínimo e máximo de obliquidade estão apresentados, em graus, no lado direito de cada curva.

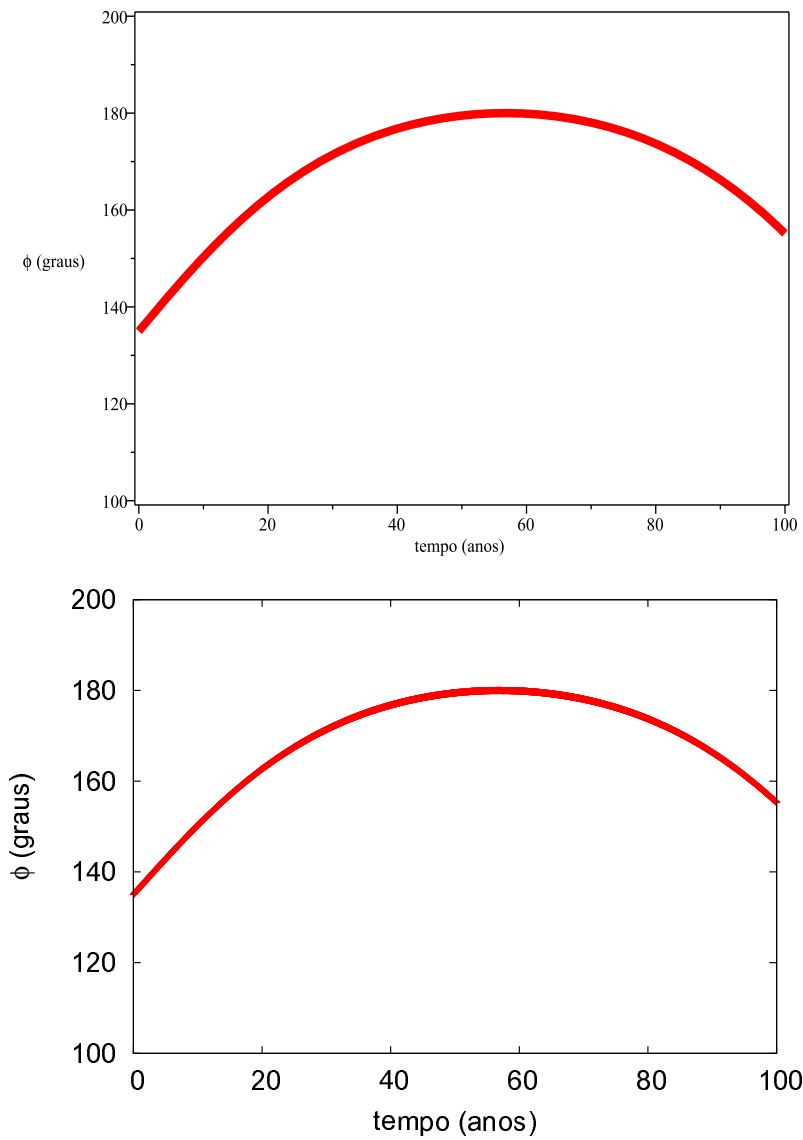


Figura 5.6: Comparação do resultado do nosso modelo (figura abaixo) com o resultado utilizando as equações (4.12) e (4.13)) (figura acima). Note que os resultados são muito parecidos.

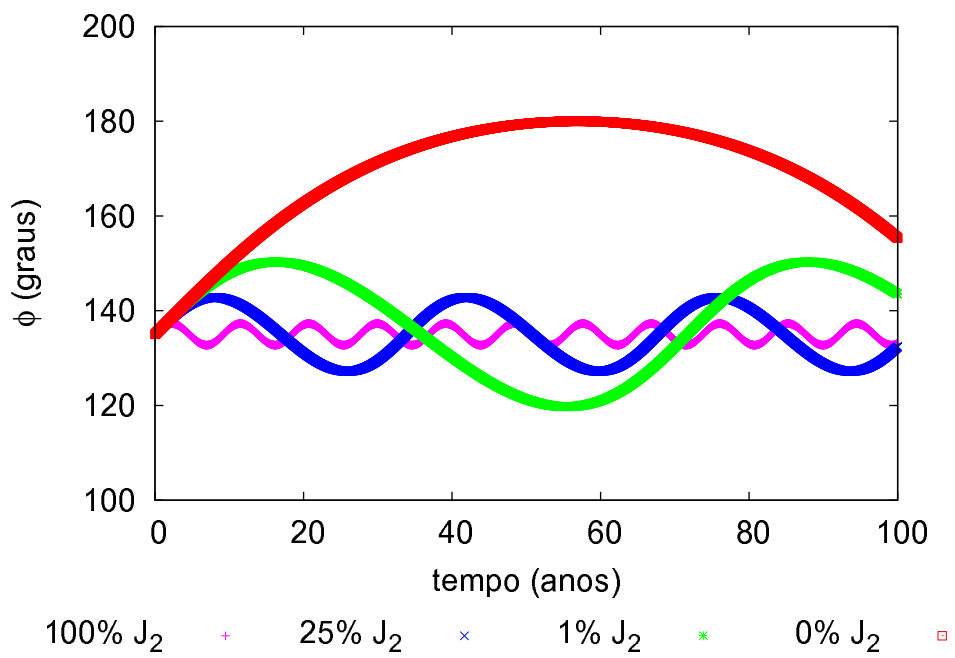


Figura 5.7: Gráfico do nodo do equador para diferentes percentuais de J_2 .

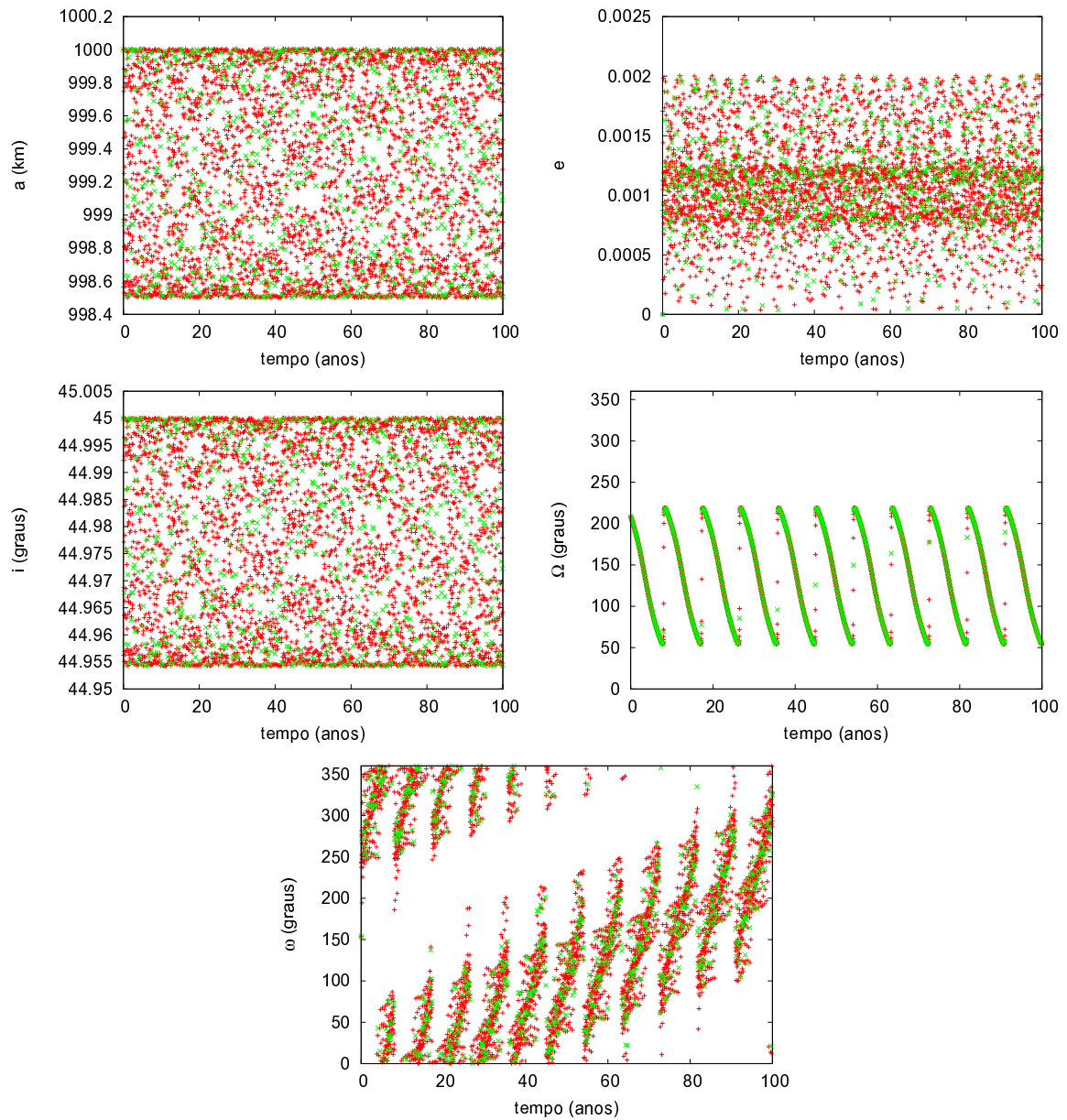


Figura 5.8: Evolução temporal do semi-eixo orbital (a), da excentricidade (e), inclinação (i), longitude do nodo ascendente (Ω) e argumento do pericentro (ω) simulados nos dois programas diferentes. O vermelho é o resultado do programa que utiliza as equações no sistema IR e o verde é o resultado do programa que utiliza as equações no sistema FC. Optamos por utilizar menos pontos para o caso verde para que os dois gráficos não ficassem sobrepostos.

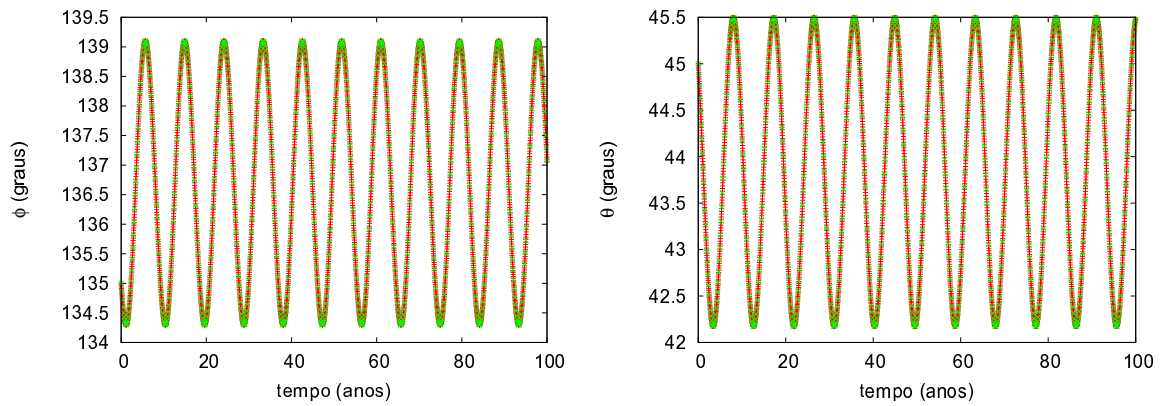


Figura 5.9: Evolução temporal do nodo do equador (ϕ) e inclinação do equador (θ) simulados nos dois programas diferentes. O vermelho é o resultado do programa que utiliza as equações no sistema IR e o verde é o resultado do programa que utiliza as equações no sistema FC. Optamos por utilizar menos pontos para o caso verde para que os dois gráficos não ficassem sobrepostos.

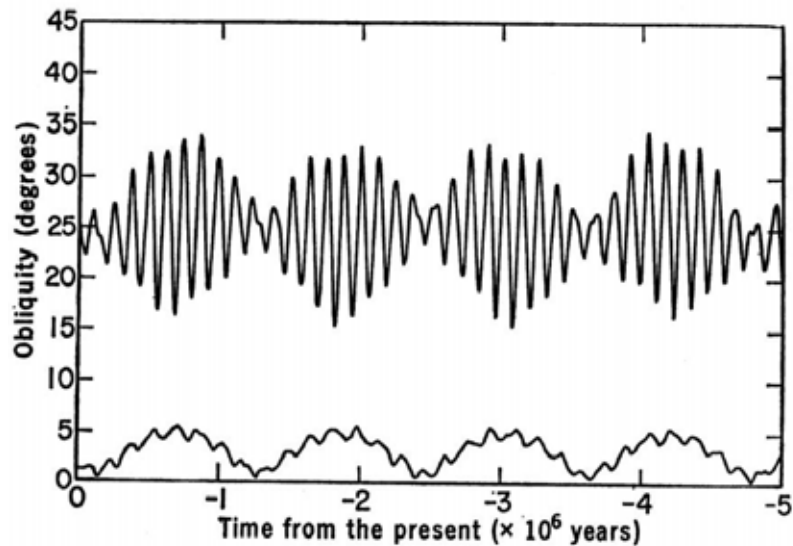


Figura 5.10: Obliquidade (curva superior) e inclinação orbital (curva inferior) de Marte em função do tempo. Figura extraída de Ward (1973).

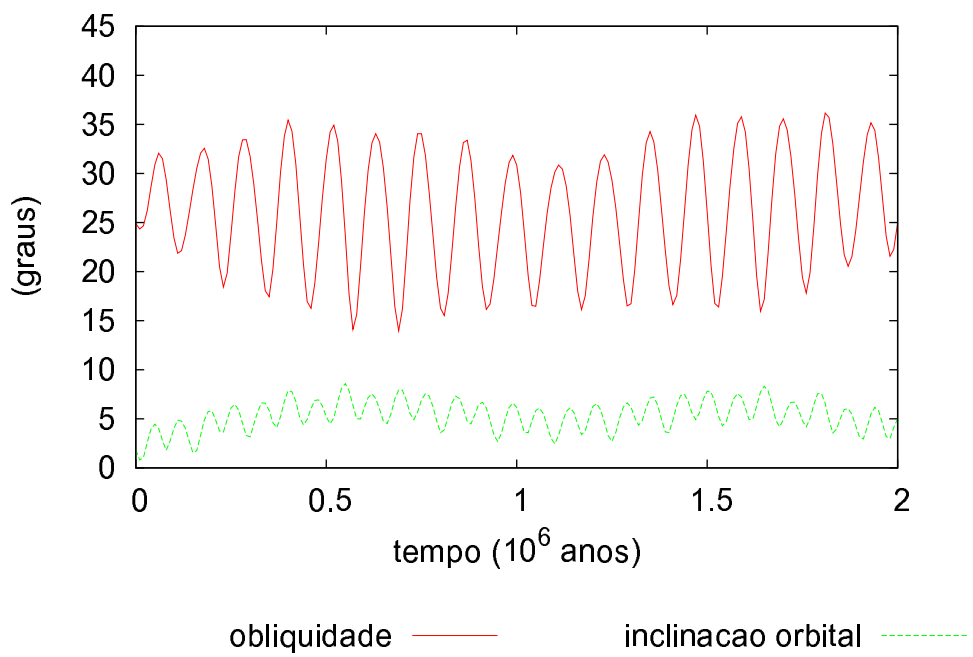


Figura 5.11: Obliquidade e inclinação orbital de Marte em função do tempo. Figura obtida por simulação de 6 corpos (Marte-Sol-Júpiter-Terra-Saturno-Vênus), utilizando nosso programa.

Capítulo 6

Resultados

Apresentaremos um estudo sobre dois sistemas triplos de asteróides. São eles o sistema (87) Sylvia e o sistema (45) Eugênia. Utilizamos para análise dos resultados, gráficos da evolução temporal do semi-eixo orbital (a), da excentricidade (e), inclinação referente ao equador (i), inclinação referente ao plano inercial (ECJ2000 ou EMJ2000) (I) e longitude do nodo ascendente (Ω) dos dois satélites, e, inclinação (θ) e nodo (ϕ) do plano do equador do asteróide central (vide figura 6.1). Estudaremos, com e sem torques, os seguintes casos: 3 corpos (sistema triplo); 4 corpos (sistema triplo e Sol); 5 corpos (sistema triplo, Sol e Júpiter).

6.1 Sistema Triplo (87) Sylvia

Residente no cinturão principal, Sylvia, o asteróide maior, foi descoberto em 1866 por Pogson (Pogson, 1866). Mais de um século depois, foi observado que na realidade se tratava de um sistema triplo (Marchis et al. (2005)) (vide figura 6.2). Por ter sido o primeiro triplo a ser descoberto, o sistema (87) Sylvia foi o primeiro a ser estudado por nós. As condições iniciais estão apresentadas nas tabelas 6.1 e 6.2. Observe que, para esse caso, nosso plano de referência será EMJ2000. Lembre-se que Sylvia é o corpo central, portanto o Sol possui elementos orbitais relativos à Sylvia.

Tabela 6.1: Condições iniciais de Sylvia (Marchis et al., 2005). Época de referência JD 2453249.5

Massa (kg)	Dimensões ($a \times b \times c$) (km)	α	δ	Período de rotação
$1,478 \times 10^{19}$	$192 \times 192 \times 116$	$19,51^\circ$	$81,51^\circ$	0,21 dia

Os primeiros resultados obtidos foram para observar o quanto cada satélite perturba o movimento de atitude de Sylvia. Para isso simulamos Sylvia separadamente com cada satélite, ou seja, Sylvia e Rômulo, e, Sylvia e Remo, verificando como a posição do polo se comporta nestas simulações. A figura 6.3 mostra que Rômulo provoca maior oscilação no polo que Remo.

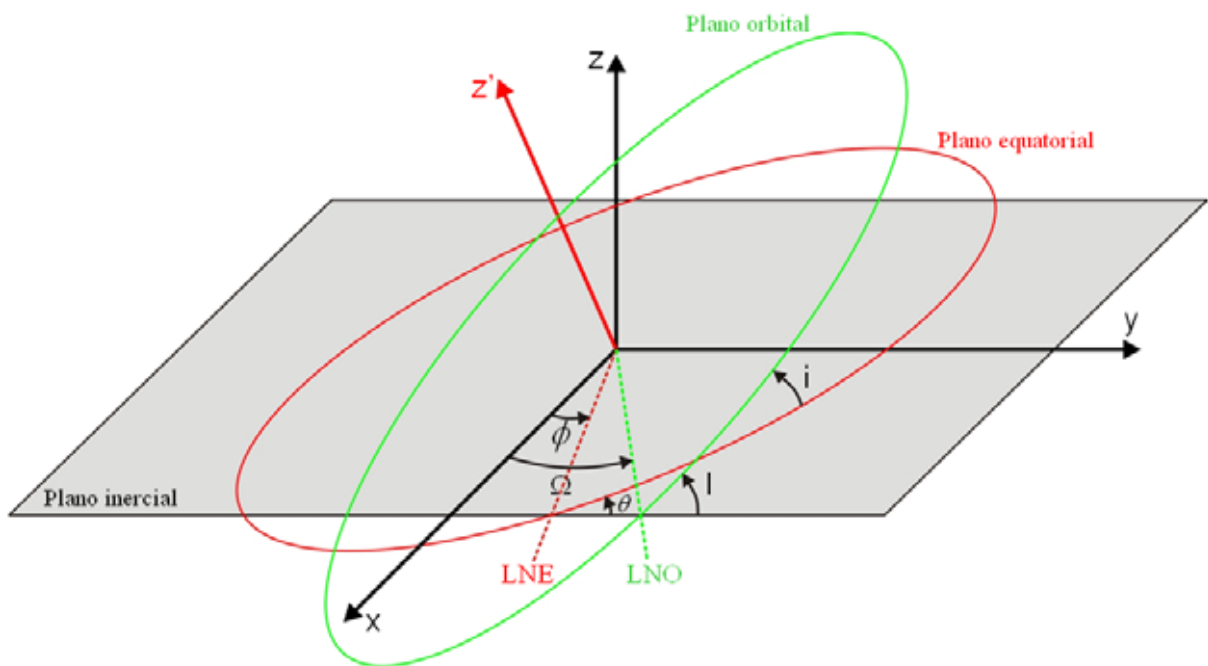


Figura 6.1: Figura ilustrativa dos ângulos que serão estudados, onde (i) é a inclinação orbital referênte ao equador, (I) é a inclinação orbital referente ao plano inercial (ECJ2000 ou EMJ2000), (Ω) é a longitude do nodo ascendente orbital, (θ) é a inclinação do equador e (ϕ) é o nodo do equador. LNO é a linha dos nodos orbital (linha dada pela intersecção entre o plano orbital e o plano de referência) e LNE é a linha dos nodos equatorial (linha dada pela intersecção entre o plano equatorial e o plano de referência).

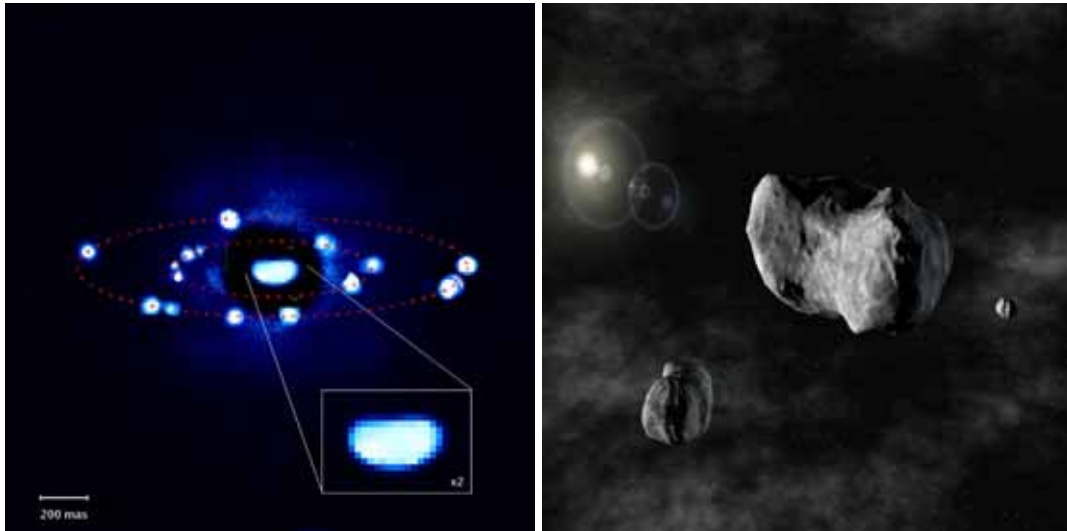


Figura 6.2: Sistema triplo (87) Sylvia (Sylvia no centro e seus satélites Rômulo e Remo). À esquerda uma imagem de observação feita da Terra e com utilização de óptica adaptativa (Marchis et al., 2005) e à direita uma concepção artística do sistema (ESO).

Tabela 6.2: Condições iniciais (EMJ2000) utilizadas para sistema (87) Sylvia (Marchis et al., 2005; Giorgini et al., 1996). Época de referência JD 2453249.5 *Elementos orbitais em relação ao Sol.

	Mass (kg)	a_s	e	$I(^{\circ})$	$\Omega(^{\circ})$	$\omega(^{\circ})$	$f(^{\circ})$
Rômulo	$3,66 \times 10^{15}$	1356 km	0,001	7	101,0	273,0	81,8
Remo	$2,15 \times 10^{14}$	706 km	0,016	7	97,0	314,0	12,69
Júpiter	$1,89 \times 10^{27}$	5,2* UA	0,049*	23,23	3,25	11,77	162,91
Sol	$1,98 \times 10^{30}$	3,49 UA	0,079	28,40	22,28	139,41	0,2

Porém em ambos os casos a amplitude de oscilação é muito pequena (da ordem de 10^{-2} graus).

Outro caso relevante foi observar a influência de Júpiter e Sol na atitude de Sylvia, e, como esse movimento de atitude tem influência no movimento orbital de seus satélites. Fizemos isso através de simulações, considerando e não os torques no corpo central, de problemas de 3, 4 e 5 corpos.

A figura 6.4 mostra a variação temporal, durante um período de 50 mil anos, das coordenadas do equador para os três casos estudados. Ao observá-la, percebemos que para o caso de 3 corpos não há grande variação da posição do equador. No entanto, os resultados da simulação do sistema triplo mais o Sol (4 corpos), nos mostrou que o Sol provoca grande variação na inclinação (θ) do equador de Sylvia (aproximadamente 8 graus). Porém, ao adicionarmos Júpiter em nossa simulação (5 corpos), essa variação de θ diminui, ou seja, Júpiter apesar de provocar um efeito oscilante, tem um efeito estabilizante no movimento de nutação de Sylvia. Ao analisarmos o nodo do equador, concluímos que Sol provoca precessão em Sylvia e Júpiter provoca um efeito oscilante e potencializa esse efeito de precessão.

Como já foi dito anteriormente, estudamos o movimento orbital de Rômulo e Remo por

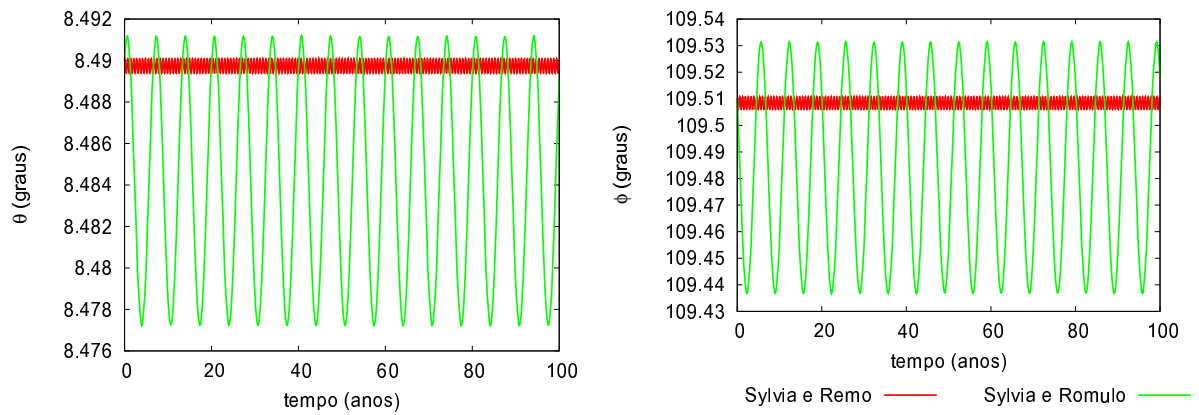


Figura 6.3: Evolução temporal inclinação (θ) e nodo (ϕ) do plano do equador de Sylvania de dois diferentes problemas de 2 corpos: Sylvia-Remo e Sylvia-Rômulo.

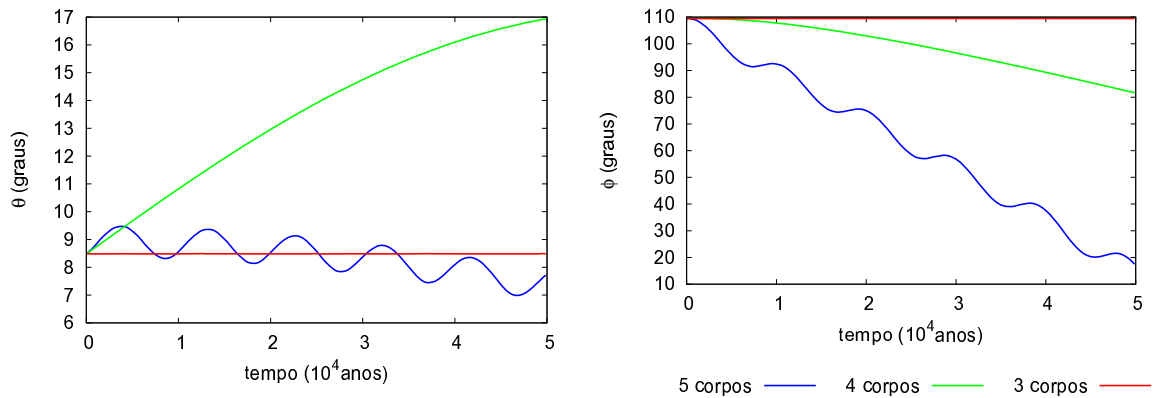


Figura 6.4: Evolução temporal inclinação (θ) e nodo (ϕ) do plano do equador de Sylvania para os problemas de 3, 4 e 5 corpos.

meio da variação temporal de seus elementos orbitais. As figuras 6.7, 6.8, 6.7 e 6.8 mostram a evolução temporal do semi-eixo orbital (a), da excentricidade (e), longitude do nodo (Ω), e, inclinações orbital (I) e (i) de Rômulo e Remo para os problemas de 3, 4 e 5 corpos para os casos sem e com torque, respectivamente. Analisando nossos resultados, observamos que os satélites Rômulo e Remo se comportam de forma estável para os todos os casos (3, 4 e 5 corpos), com e sem toques. No entanto, nota-se algumas diferenças entre os resultados com (figuras 6.7 e 6.8) e sem os torques (figuras 6.5 e 6.6). Essa diferença é encontrada nos gráficos da inclinação I e da longitude do nodo Ω de ambos os satélites. Essa variação de I e Ω que aparece nos resultados dos casos com torques, ocorre devido ao movimento de atitude de Sylvania, ou seja, Sol e Júpiter causam toques que fazem o plano do equador de Sylvania variar de posição, e por consequência disso o plano da órbita dos satélites varia também. Portanto, podemos dizer que o plano orbital dos satélites e o plano do equador de Sylvania se movimentam de forma acoplada. Para ficar mais claro de observar esse acoplamento, decidimos fazer gráficos da inclinação orbital I junto com a inclinação do equador θ , e, gráficos da longitude do nodo ascendente Ω junto com o

nodo do equador ϕ (vide figuras 6.10 e 6.9). Esse acoplamento pode ser observado também se analisarmos a inclinação orbital em relação ao equador do corpo central (inclinação i), pois, quando há esse acoplamento, i se mantém constante enquanto I varia. É interessante destacar que ambos os satélites têm comportamentos parecidos.

6.2 Sistema Triplo (45) Eugênia

Em 1857, o astrônomo Goldschmidt descobre o asteróide que posteriormente seria o segundo sistema triplo de asteróides descoberto (Goldschmidt, 1857). Nomeado de (45) Eugênia, trata-se de um asteróide do tipo F e, assim como o sistema (87) Sylvia, está localizado entre as órbitas de Marte e Júpiter. Seus satélites foram denominados Pequeno Príncipe (P. Príncipe) e Pequena Princesa (P. Princesa). Detalhes sobre esse sistema foram publicados somente em 2010 por Marchis (Marchis et al, 2010) (vide figura 6.11).

O sistema (45) Eugênia foi estudado exatamente do mesmo modo que estudamos o sistema (87) Sylvia, porém, por problemas de *tempo de máquina*, decidimos realizar um tempo menor de integração (25 mil anos). As condições iniciais estão apresentadas nas tabelas 6.3 e 6.4. Observe que nosso plano de referência para este caso será ECJ2000.

É interessante destacar que, diferente de Sylvia, Eugênia possui rotação (spin) retrógrada ($\beta < 0$), e, seus satélites possuem inclinação razoavelmente alta em relação ao equador de Eugênia (i de P. Príncipe é aproximadamente igual à 9 graus e i de P. Princesa é aproximadamente igual à 18 graus).

Tabela 6.3: Condições iniciais de Eugênia (Marchis et al., 2010). Época de referência JD 2452980.0

Massa (kg)	Dimensões ($a \times b \times c$) (km)	λ	β	Período de Rotação
$5,8 \times 10^{18}$	$115 \times 115 \times 60$	$122,0^\circ$	$-19,2^\circ$	0,23 dia

Tabela 6.4: Condições iniciais (ECJ2000) utilizadas para sistema (45) Eugênia (Marchis et al., 2010; Giorgini et al., 1996). Época de referência JD 2452980.0 **Elementos orbitais em relação ao Sol.*

	Massa (kg)	a_s	e	$I(^\circ)$	$\Omega(^\circ)$	$\omega(^\circ)$	$f(^\circ)$
Pequeno Príncipe	$1,02 \times 10^{16}$	1164.51 km	0,006	107,6	202,5	138	5
Pequena Princesa	$1,25 \times 10^{14}$	610.8 km	0,069	127,0	210,0	95	174
Júpiter	$1,89 \times 10^{27}$	5,2* UA	0,049*	1,3	100,52	274,2	142,2
Sol	$1,98 \times 10^{30}$	2,72 UA	0,08	6,6	147,96	265,56	238,14

Ao estudarmos a evolução temporal das coordenadas do polo de Eugênia, vide figuras 6.12 e , obtivemos a mesma conclusão que no sistema (87) Sylvia, portanto, o asteróide central sofre grande perturbação do Sol, porém Júpiter diminui a amplitude de variação e aumenta a

frequência de oscilação do equador de Eugênia. Também concluímos que os satélites P. Príncipe e P. Princesa perturbam muito pouco o movimento de atitude de Eugênia.

Analisando o movimento orbital de P. Príncipe e P. Princesa, podemos concluir que o sistema é estável tanto para o caso de 4 corpos quanto para o de 5 corpos, e, assim como o sistema (87) Sylvia, o plano orbital dos satélites variam de forma síncrona com o equador do asteroide central. Essas conclusões são tiradas, do mesmo modo que fizemos com o sistema anterior, observando as figuras 6.14, 6.15, 6.16, 6.17, 6.18 e 6.19.

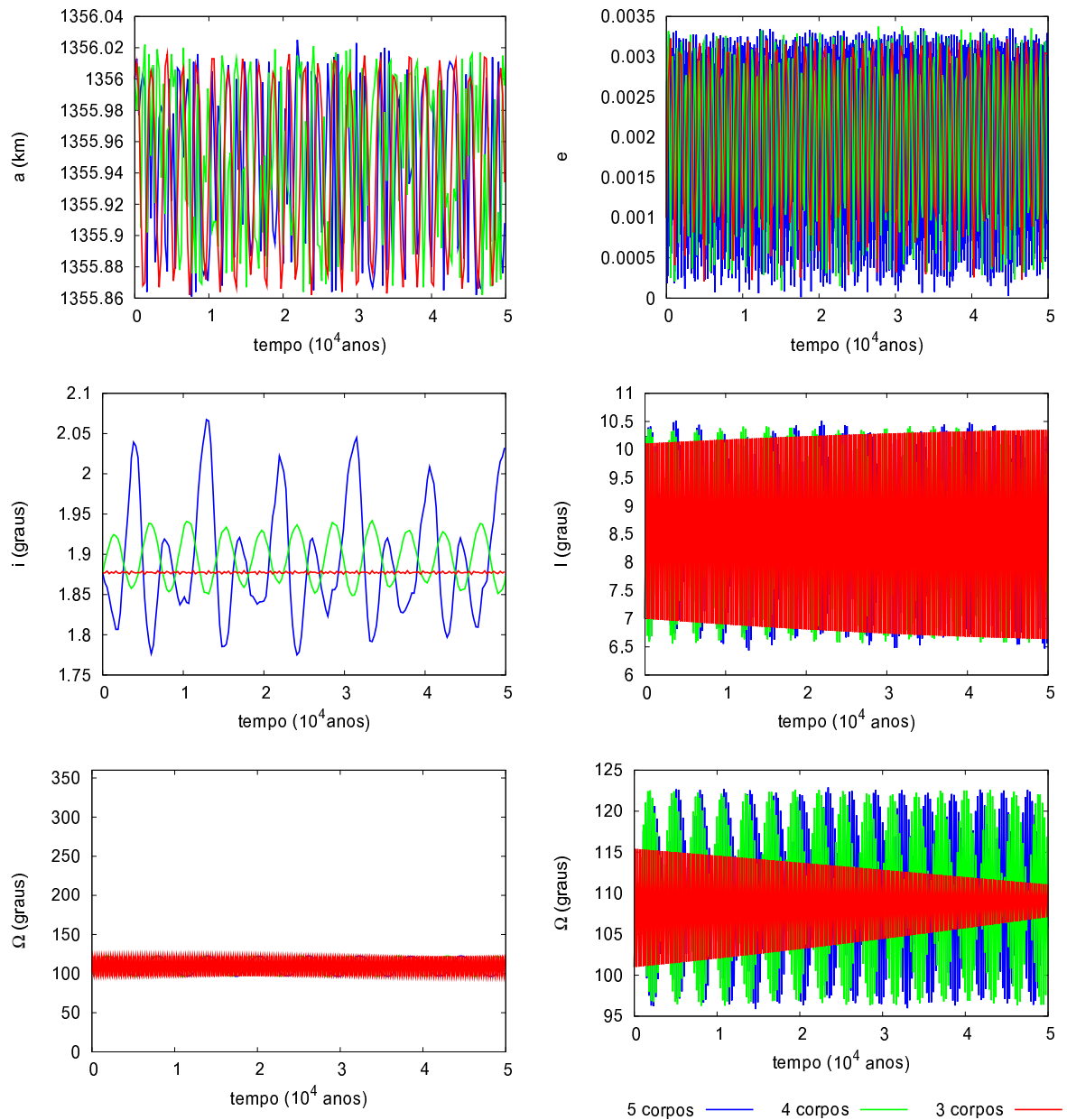


Figura 6.5: Evolução temporal do semi-eixo orbital (a), da excentricidade (e), inclinações orbital (i) e (I), e, longitude do nodo (Ω) (em duas escalas diferentes) de Rômulo para os problemas de 3, 4 e 5 corpos para o caso sem torque. Observe que por se tratar de resultados parecidos, as curvas estão sobrepostas.

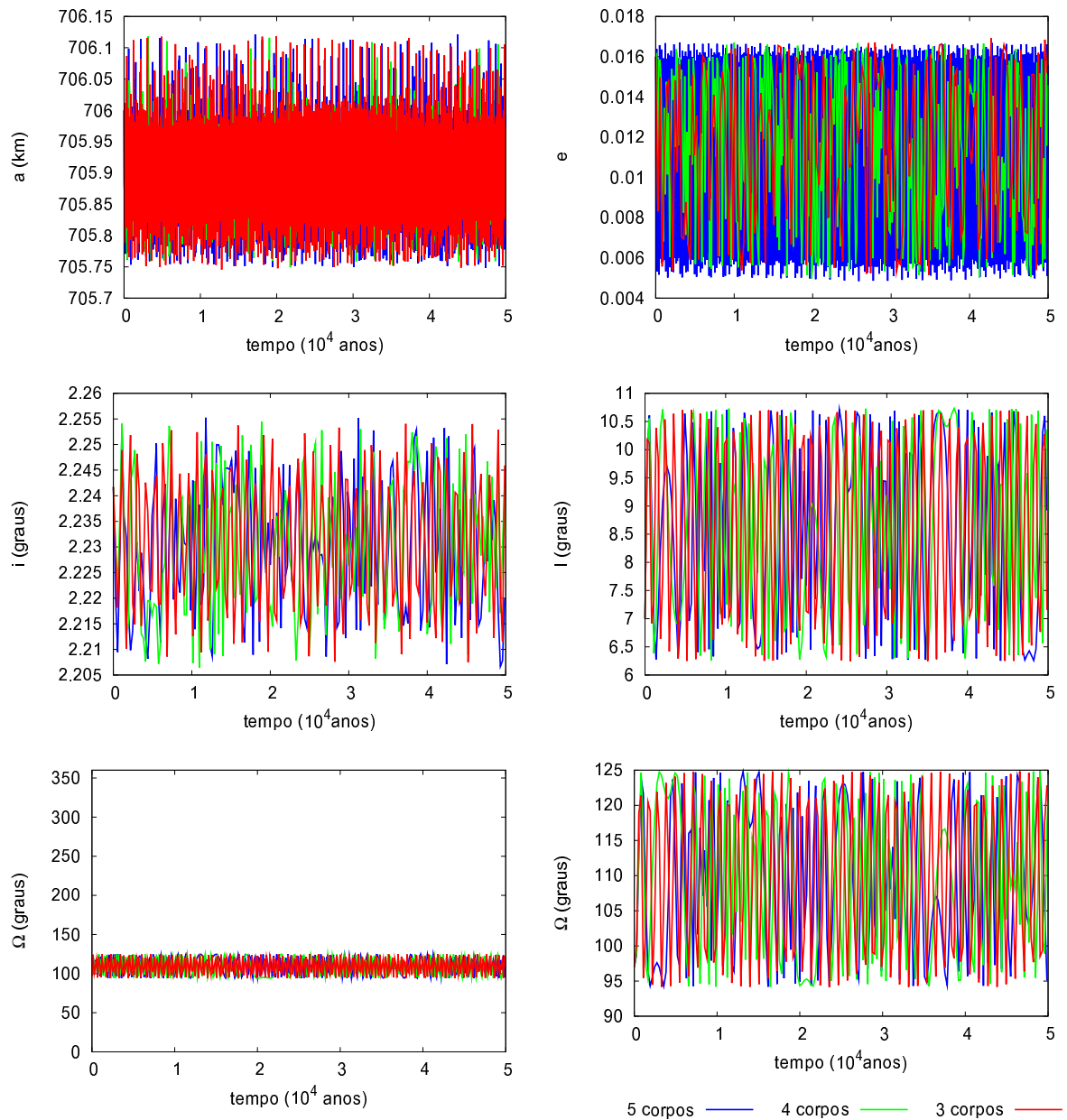


Figura 6.6: Evolução temporal do semi-eixo orbital (a), da excentricidade (e), inclinações orbital (i) e (I), e, longitude do nodo (Ω) (em duas escalas diferentes) de Remo para os problemas de 3, 4 e 5 corpos para o caso sem torque. Observe que por se tratar de resultados parecidos, as curvas estão sobrepostas.

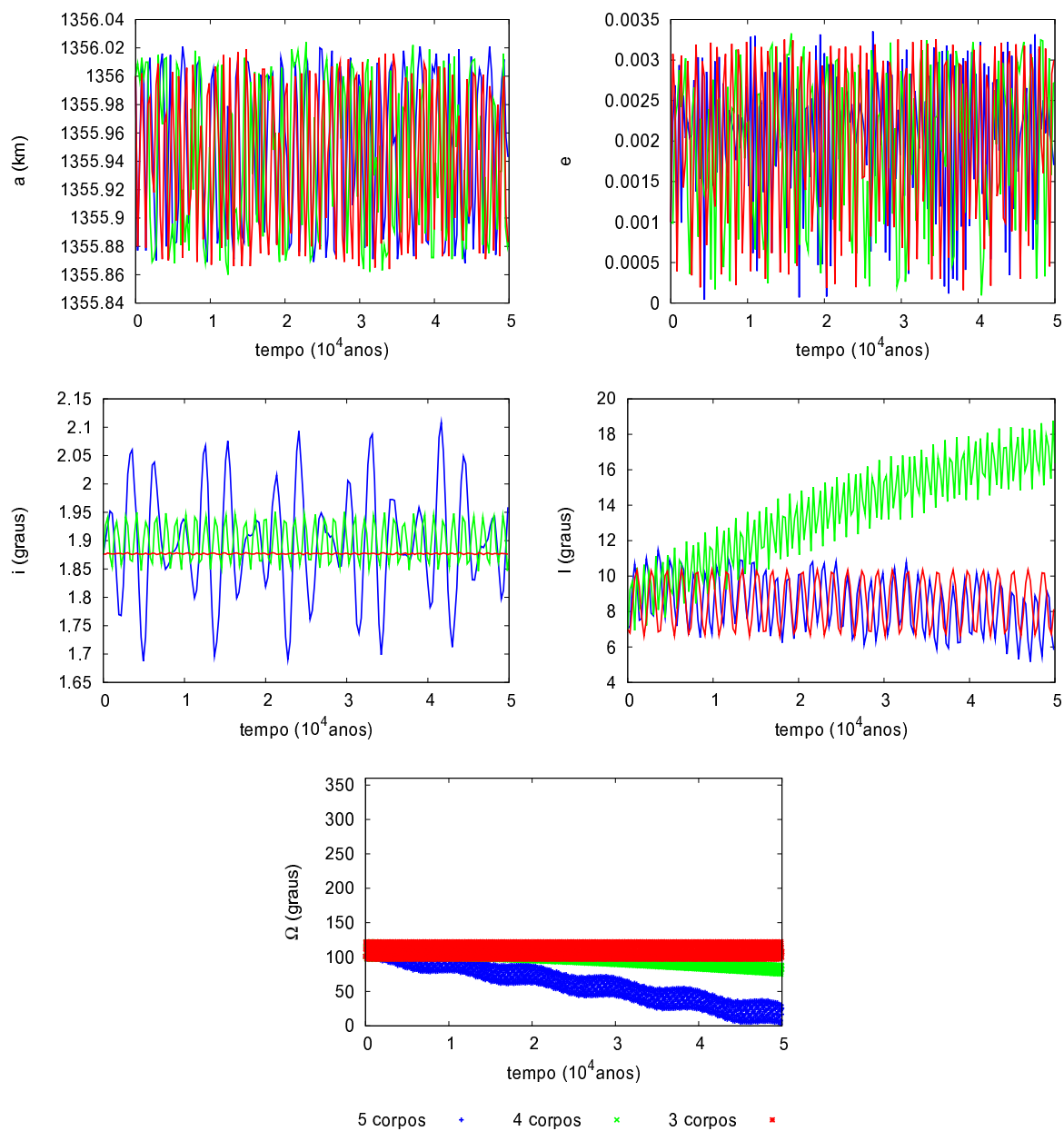


Figura 6.7: Evolução temporal do semi-eixo orbital (a), da excentricidade (e), inclinações orbital (i) e (I), e, longitude do nodo (Ω) de Rômulo para os problemas de 3, 4 e 5 corpos para o caso com torque. Observe que por se tratar de resultados parecidos, as curvas estão sobrepostas.

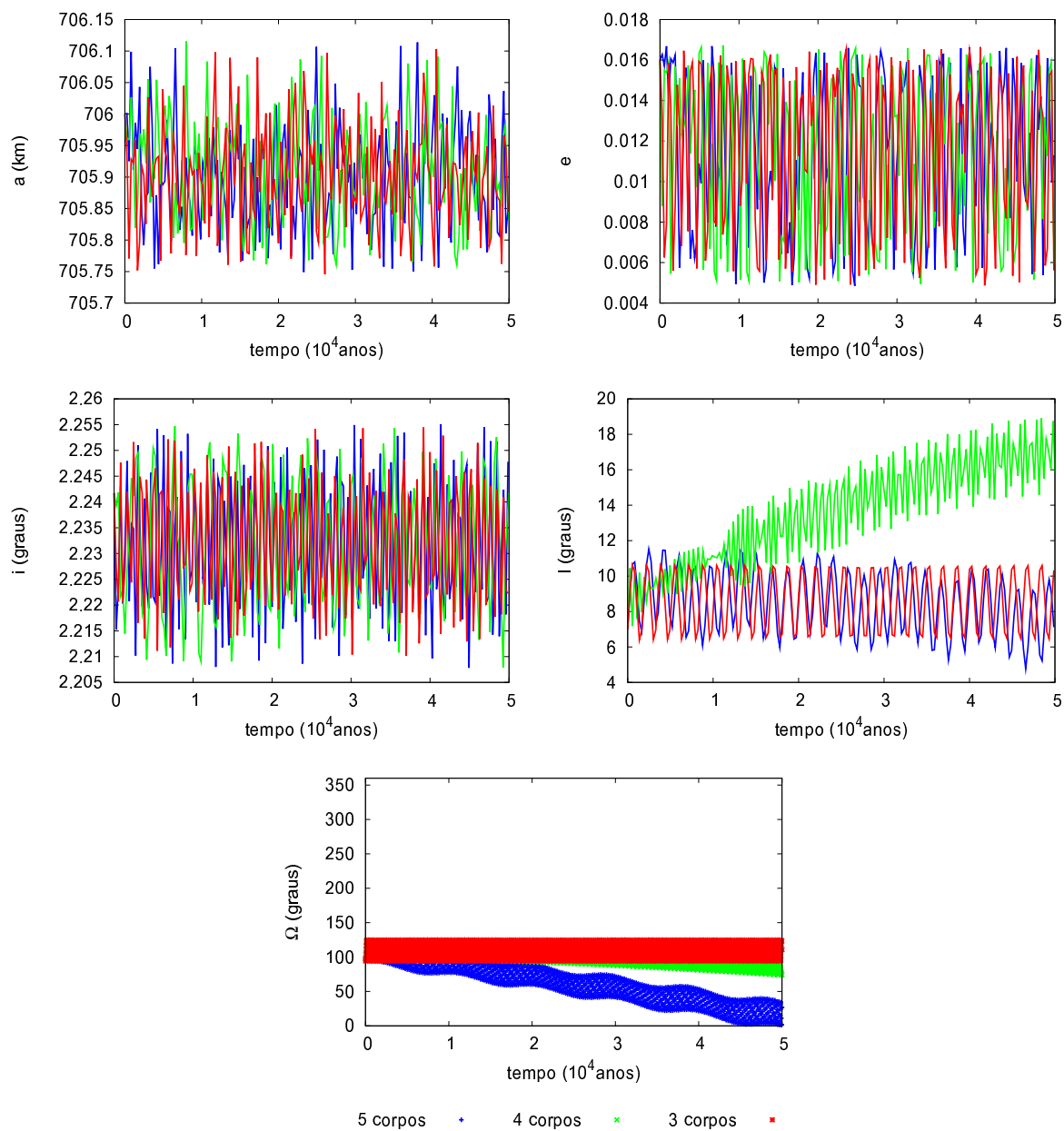


Figura 6.8: Evolução temporal do semi-eixo orbital (a), da excentricidade (e), inclinações orbital (i) e (I), e, longitude do nodo (Ω) de Remo para os problemas de 3, 4 e 5 corpos para o caso com torque. Observe por se tratar de resultados parecidos, as curvas estão sobrepostas.

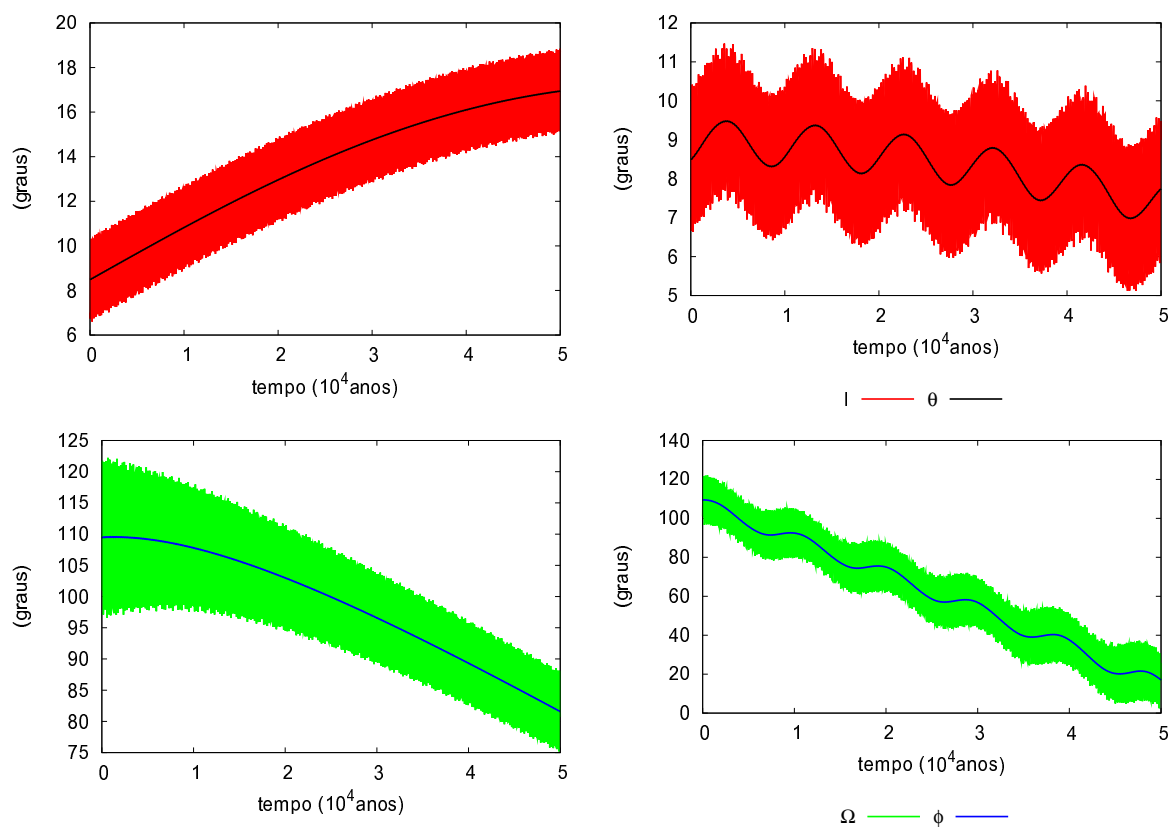


Figura 6.9: Gráficos superiores são da da inclinação orbital (I) de Rômulo junto com a inclinação do equador (θ) de Sylvia. Abaixo estão os gráficos da longitude do nodo ascendente (Ω) Rômulo junto com o nodo do equador (ϕ) de Sylvia. As figuras da direita são do caso de 5 corpos e da esquerda são do caso de 4 corpos.

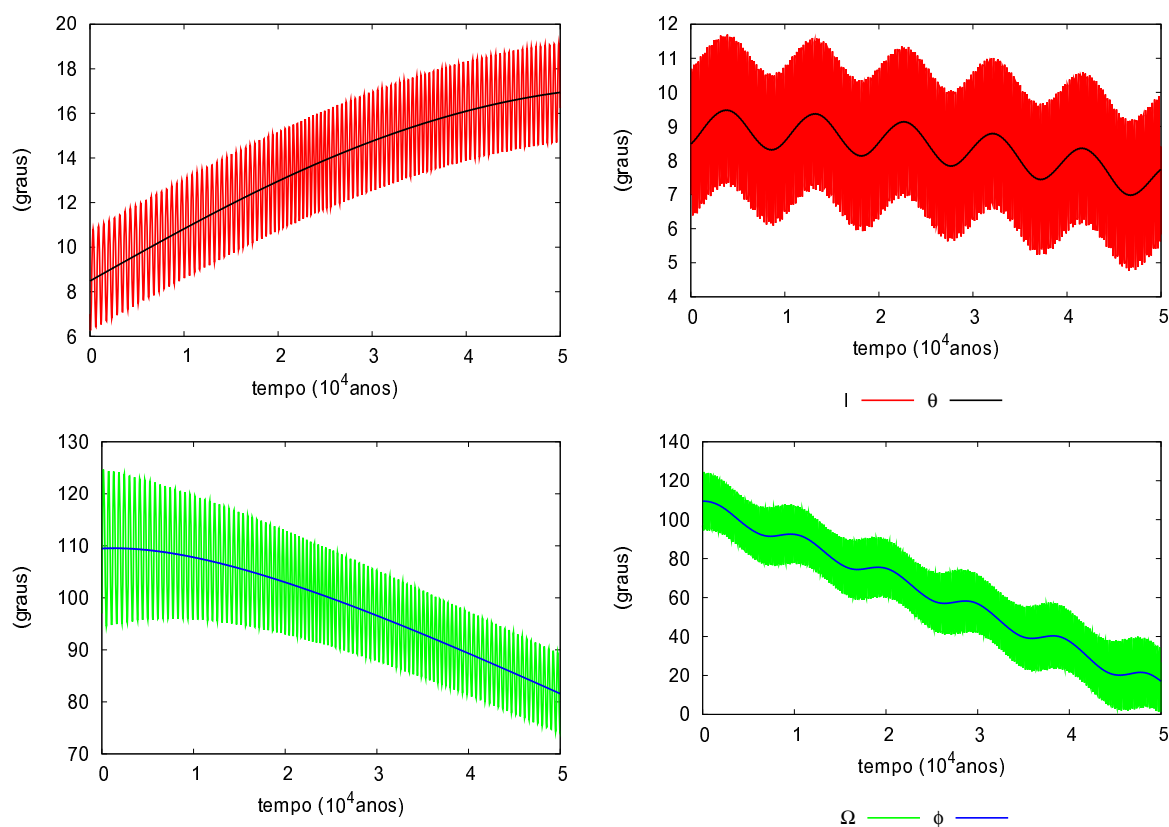


Figura 6.10: Gráficos superiores são da da inclinação orbital (I) de Remo junto com a inclinação do equador (θ) de Sylvia. Abaixo estão os gráficos da longitude do nodo ascendente (Ω) Remo junto com o nodo do equador (ϕ) de Sylvia. As figuras da direita são do caso de 5 corpos e da esquerda são do caso de 4 corpos.

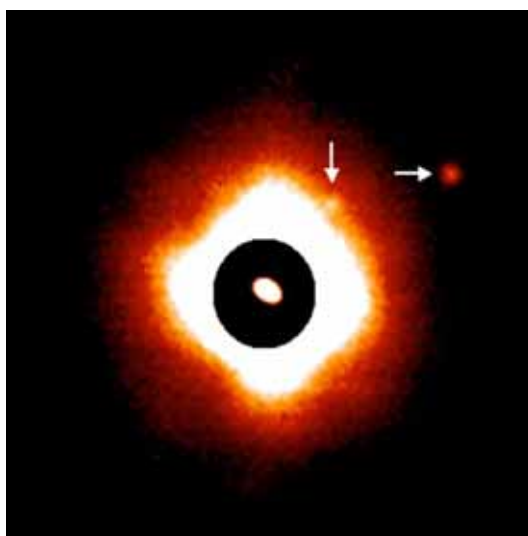


Figura 6.11: Imagem do sistema (45) Eugênia. Eugênia é corpo central e seus satélites estão indicados com setas. (FONTE: Marchis et al., 2010).

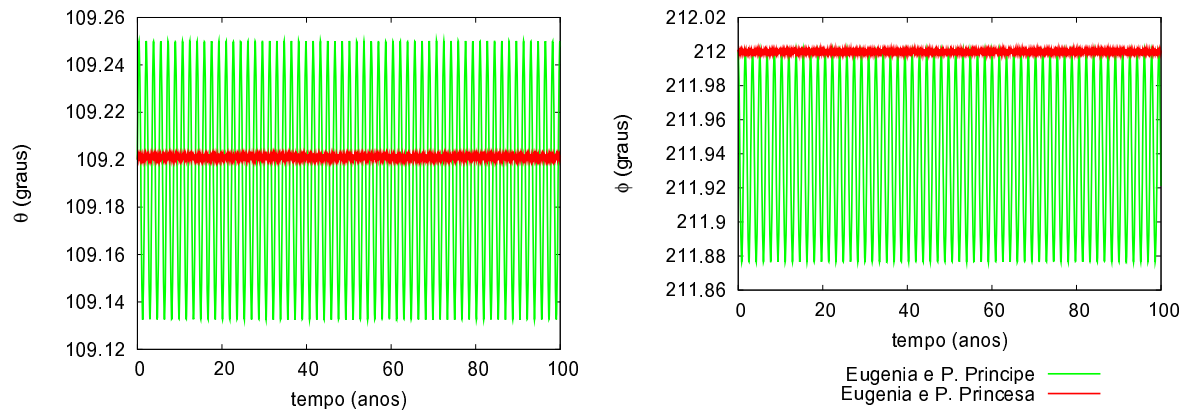


Figura 6.12: Evolução temporal da inclinação (θ) e nodo (ϕ) do plano do equador de Eugênia de dois diferentes problemas de 2 corpos: Eugênia-P. Príncipe e Eugênia-P. Princesa.

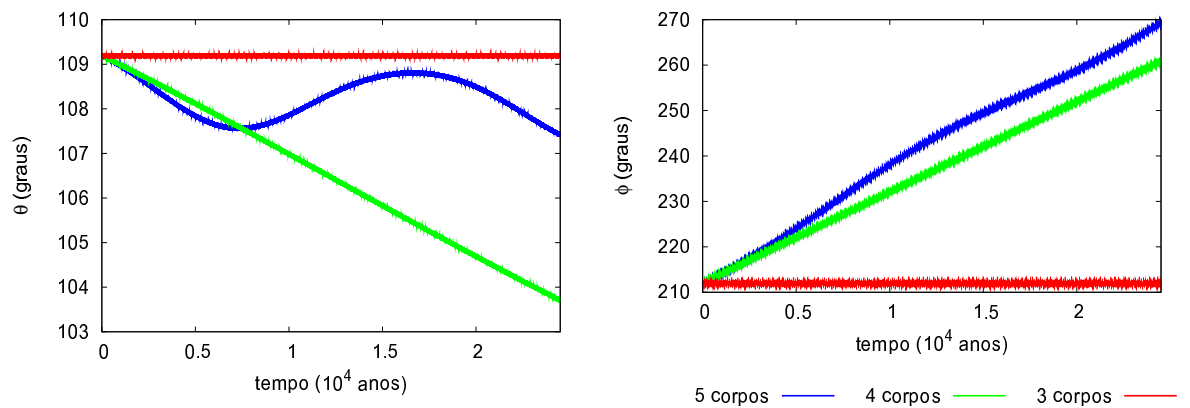


Figura 6.13: Evolução temporal inclinação (θ) e nodo (ϕ) do plano do equador de Eugênia para os problemas de 3, 4 e 5 corpos.

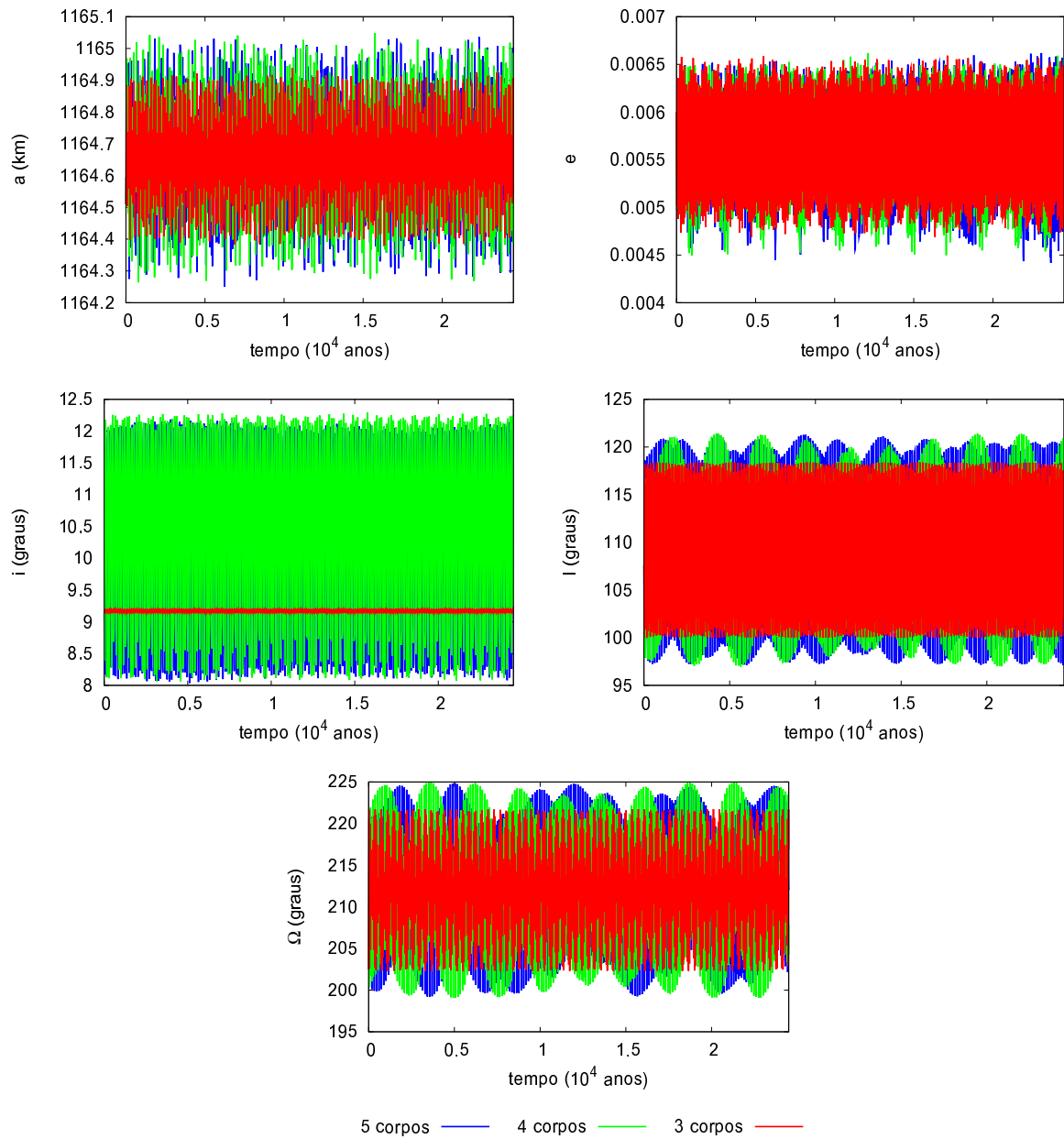


Figura 6.14: Evolução temporal do semi-eixo orbital (a), da excentricidade (e), longitude do nodo (Ω), e , inclinações orbital (I) e (i) de Pequeno Príncipe para os problemas de 3, 4 e 5 corpos para o caso sem torque. Observe que por se tratar de resultados parecidos, as curvas estão sobrepostas.

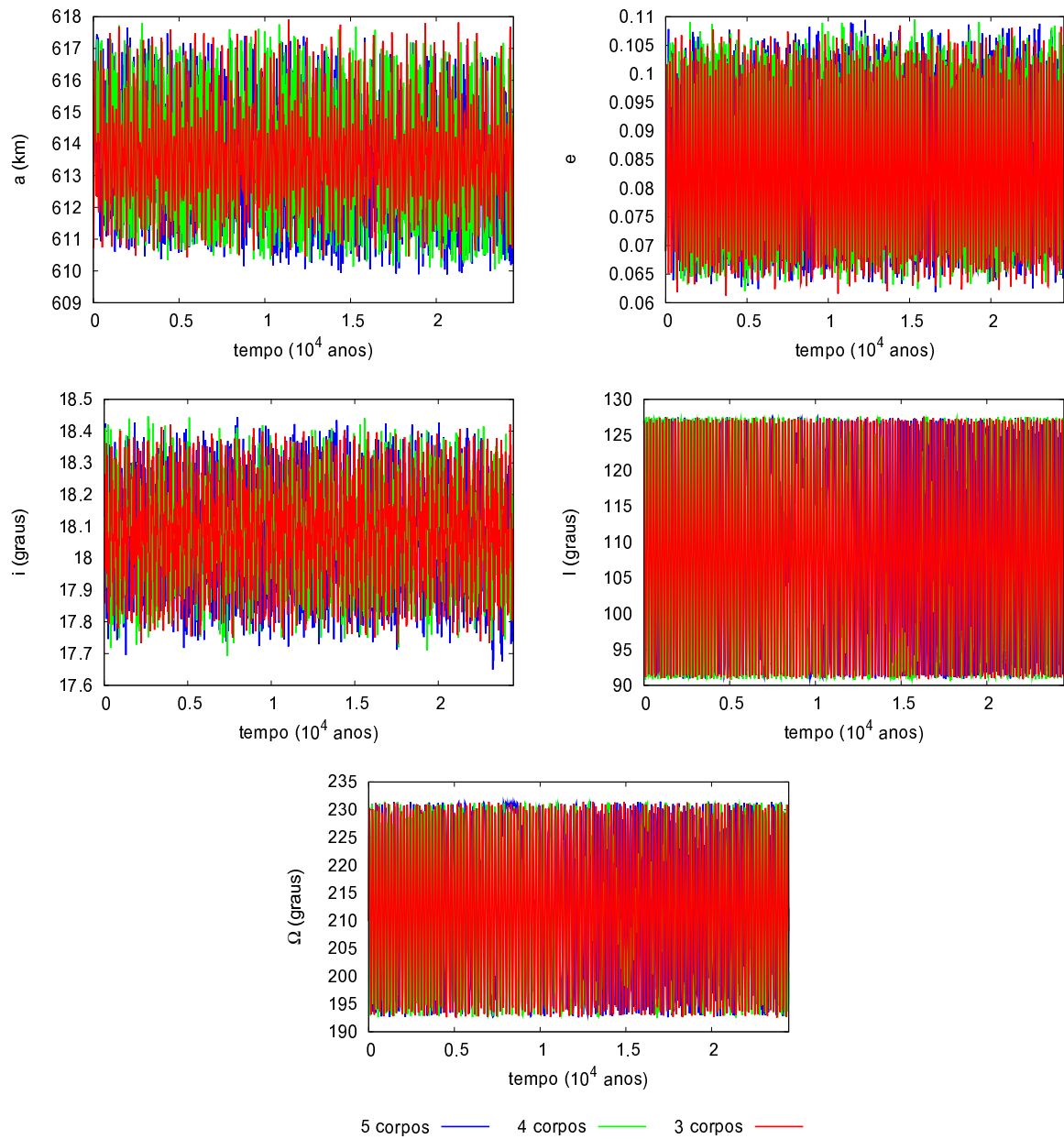


Figura 6.15: Evolução temporal do semi-eixo orbital (a), da excentricidade (e), longitude do nodo (Ω), e , inclinações orbital (I) e (i) de Pequena Princesa para os problemas de 3, 4 e 5 corpos para o caso sem torque. Observe que por se tratar de resultados parecidos, as curvas estão sobrepostas.

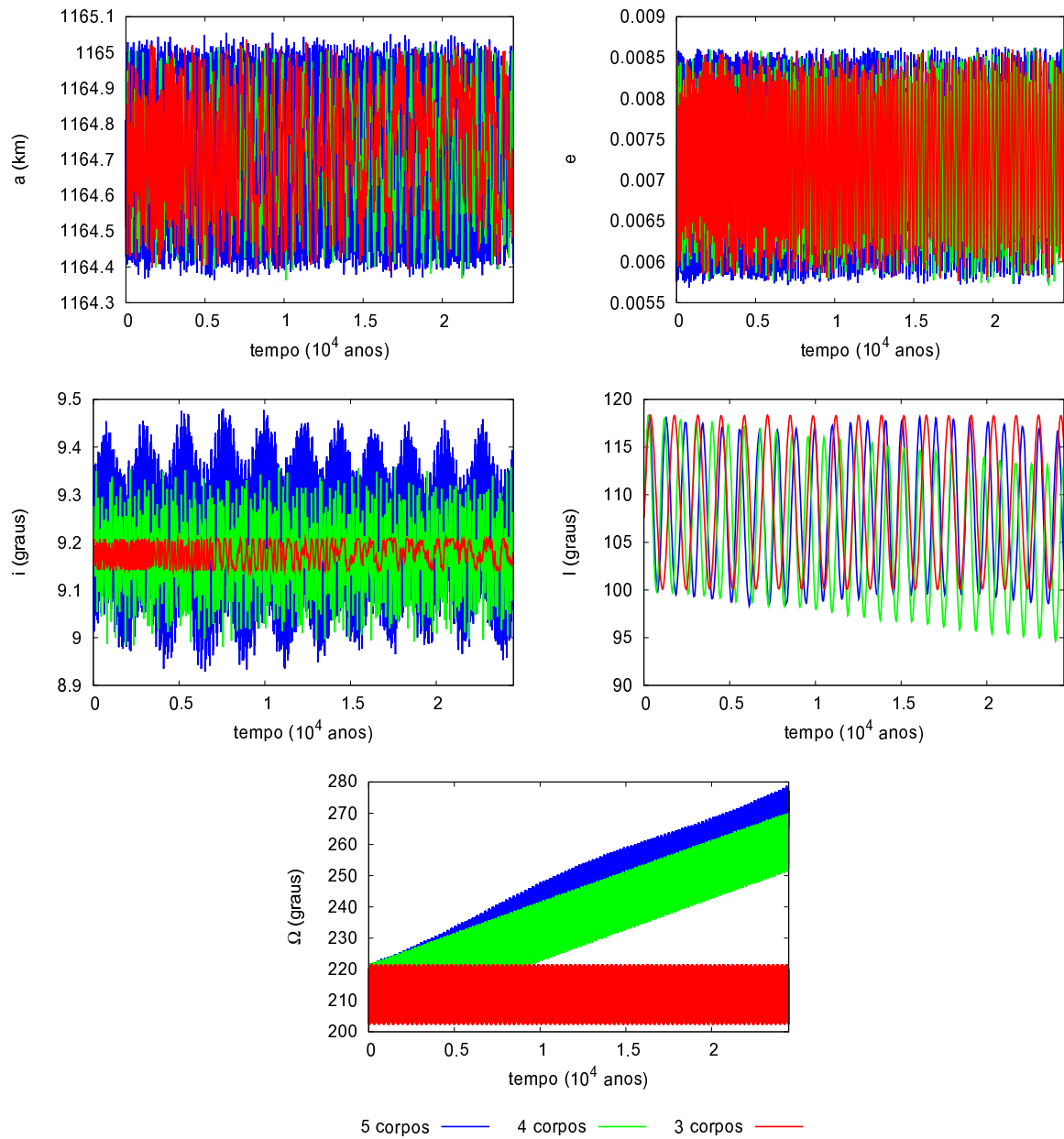


Figura 6.16: Evolução temporal do semi-eixo orbital (a), da excentricidade (e), longitude do nodo (Ω), e , inclinações orbital (I) e (i) de Pequeno Príncipe para os problemas de 3, 4 e 5 corpos para o caso com torque. Observe que por se tratar de resultados parecidos, as curvas estão sobrepostas.

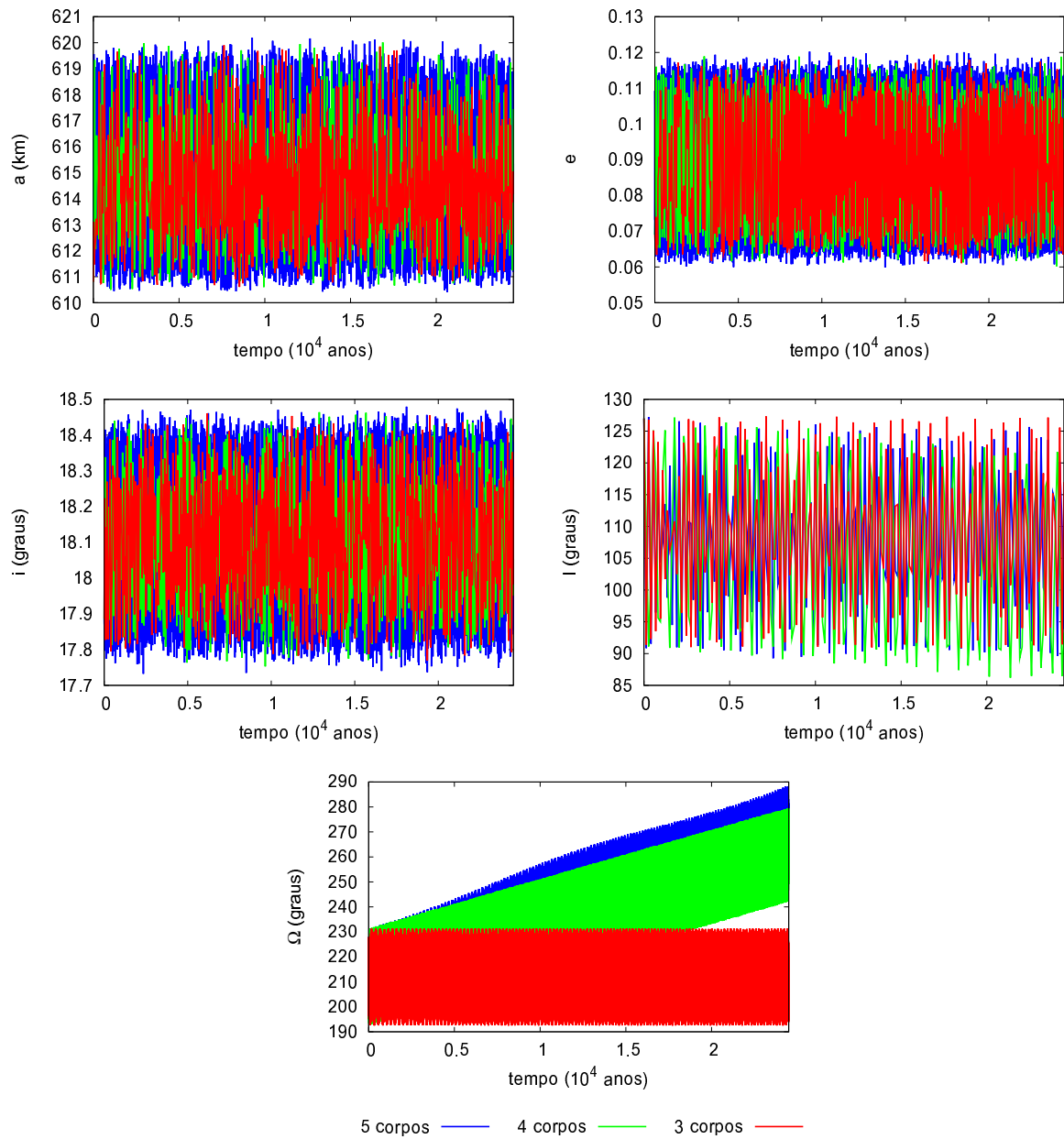


Figura 6.17: Evolução temporal do semi-eixo orbital (a), da excentricidade (e), longitude do nodo (Ω), e , inclinações orbital (I) e (i) de Pequena Princesa para os problemas de 3, 4 e 5 corpos para o caso com torque. Observe que por se tratar de resultados parecidos, as curvas estão sobrepostas.

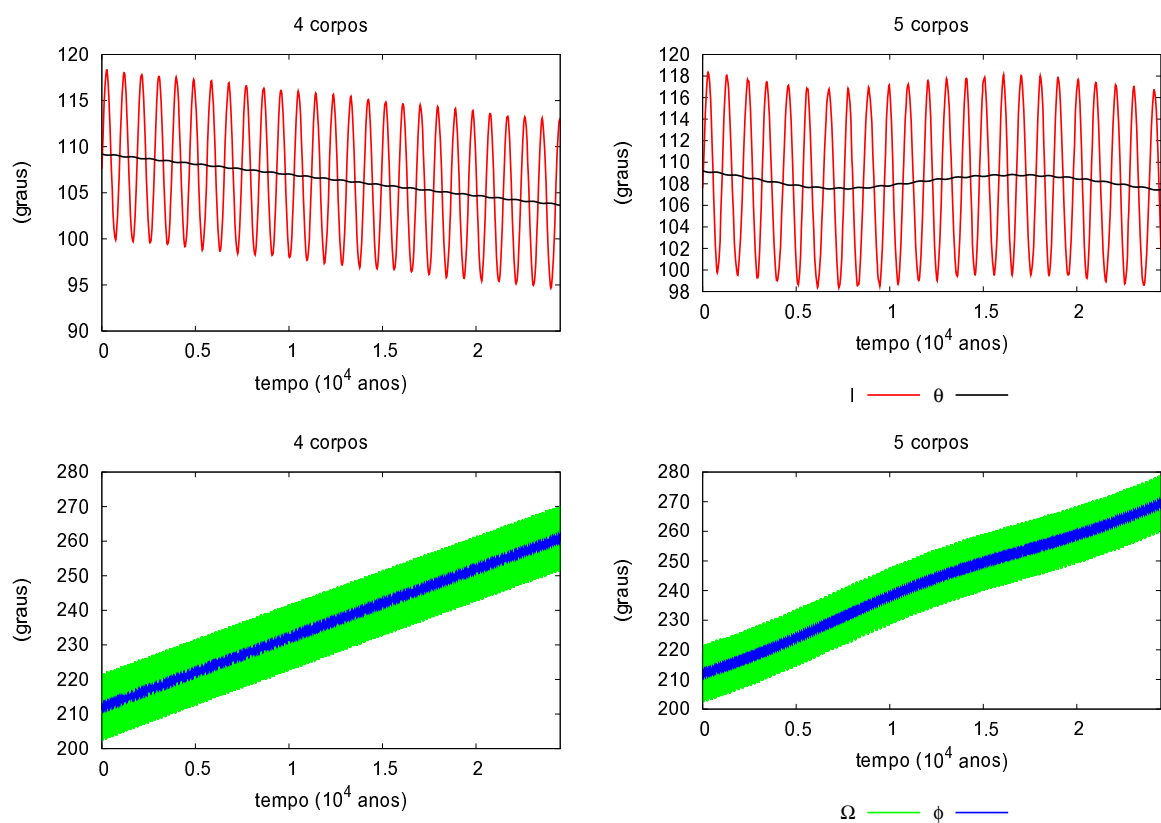


Figura 6.18: Gráficos superiores são da inclinação orbital (I) de P. Príncipe junto com a inclinação do equador (θ) de Eugênia. Abaixo estão os gráficos da longitude do nodo ascendente (Ω) P. Príncipe junto com o nodo do equador (ϕ) de Eugênia. As figuras da direita são do caso de 5 corpos e da esquerda são do caso de 4 corpos.

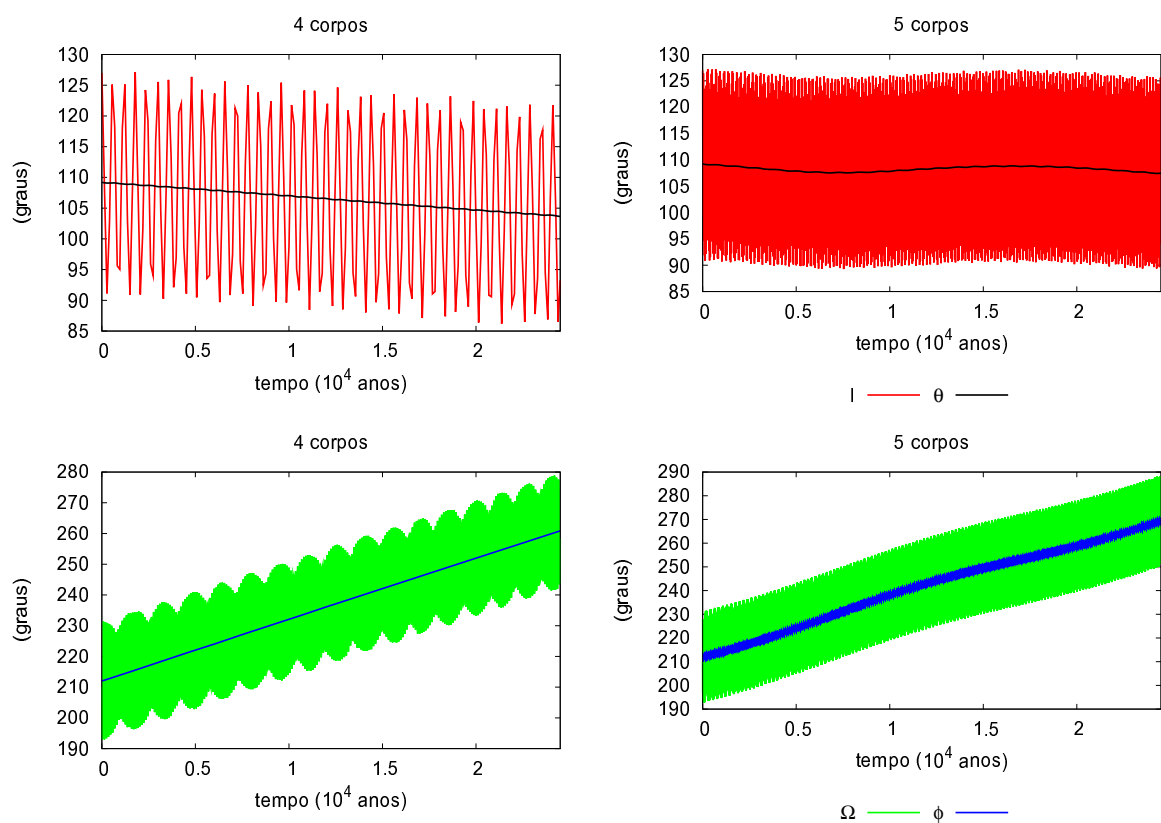


Figura 6.19: Gráficos superiores são da inclinação orbital (I) de P. Princesa junto com a inclinação do equador (θ) de Eugênia. Abaixo estão os gráficos da longitude do nodo ascendente (Ω) P. Princesa junto com o nodo do equador (ϕ) de Eugênia. As figuras da direita são do caso de 5 corpos e da esquerda são do caso de 4 corpos.

Capítulo 7

Conclusões e Considerações Finais

Neste trabalho foi estudado a dinâmica de dois sistemas triplos conhecidos ((45) Eugênia e (87) Sylvia), considerando a influência mútua entre os movimento de translação dos satélites, Sol e Júpiter, e o movimento de atitude do asteróide central.

Em uma pré-abordagem, na qual realizamos testes de nossa ferramenta computacional, nos deparamos com resultados satisfatórios. Concluímos isso pois: 1) obtivemos os períodos de precessão de Terra e Marte aproximadamente iguais aos os encontrados na literatura; 2) comparamos nosso programa com modelos analíticos aproximados aplicados à casos particulares e obtivemos igualdade nos resultados; 3) acreditamos que nosso resultado, apesar de diferente, condiz com o resultado obtido por Ward em seu estudo sobre a obliquidade de Marte (Ward, 1973). No entanto, vale ressaltar que, mesmo crendo em sua validade, ainda estamos fazendo testes do modelo.

Após os testes do programa, aplicamos-o aos sistemas em questão. Em ambos os sistemas triplos nossas conclusões foram as mesmas. Concluímos que os satélites não causam grandes variações no movimento de atitude do asteróide central, sendo este perturbado fortemente somente pelo Sol e Júpiter. Observamos também que, ao contrário que imaginávamos, Júpiter possui um caráter estabilizante no movimento de nutação do asteróide central, mas, por outro lado, Júpiter potencializa o movimento de translação do mesmo. Portanto, podemos dizer que Júpiter, em relação ao asteróide central, tem um comportamento análogo a Lua em relação à Terra (Laskar e Robutel, 1993). Outro resultado interessante foi que em todos os casos estudados identificamos um sincronismo entre o movimento do equador do asteróide central e movimento do plano da orbital dos asteróides satélites. Assim podemos dizer que há um acoplamento entre o movimento de atitude do asteróide central e o movimento orbital dos asteróides satélites. É importante dizer que esse tipo de acoplamento é observado em outros corpos do sistema solar, como por exemplo Marte e seu satélite Deimos, e, se trata de uma tendência natural de sistemas que possuem corpos com baixa inclinação orbital i (Goldreich, 1964).

Como próxima etapa, pretendemos estudar esses mesmos sistemas triplos em maior escala

de tempo, estudar os outros sistemas triplos conhecidos e, futuramente, ampliar nosso modelo numérico de modo a acrescentar efeitos de radiação solar e de maré.

Capítulo 8

Referências Bibliográficas

- BROUWER, D.: **Solution of the problem of artificial satellite theory without drag.** The Astronomical Journal, 64, 378-397. 1959.
- BROWN, M. E. et al.: "Satellites of the largest Kuiper belt objects". *Astrophysical Journal* 639 (1): 43–46. 2005.
- BEUTLER, G. and MERVART, L. e VERDUN, A., **Methods of Celestial Mechanics .I:Physical, Mathematical, and Numerical Principles.** Astronomy and astrophysics library, Springer. 2005.
- CHAPMAN, C.R., **Discovery and physical properties of Dactyl, a satellite of asteroid (243) Ida,** *Nature*, 374,783-785.
- DESCAMPS et al.:- **Triplicity and Physical Characteristics of Asteroid (216) Kleopatra.** In press to *Icarus*.
- EFROIMSKY, M.: **Long-term evolution of orbits about a precessing oblate planet. 2. The case of variable precession.** *Celestial Mech. Dyn. Astr.*96-259-288. 2006.
- EVERHART, E.:**An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings. Dynamics of Comets: Their Origin and, Edited by Andrea Carusi and Giovanni B. Valsecchi. Dordrecht: Reidel.** *Astrophysics and Space Science Library.* 115, 185. 1985.
- FANG, J. et al. **Orbits of near-earth asteroid triples 2001 SN263 and 1994 CC: Properties. origin and evolution.** *Astronomical Journal.* 141-154. 2010.
- FOLKNER, W. M. et al. **Interior Structure and Seasonal Mass Redistribution of Mars from Radio Tracking of Mars Pathfinder.** *Science.*Vol. 278 no. 5344 pp. 1749-1752. 1997.

- GOLDREICH, P.: **Inclination of satellite orbits about an oblate precessing planet.** Astron. J. 70, 5-9. 1965. Addison Wesley. 1965.
- GOLDSTEIN, H.: **Classical Mechamics.** 2nd ed.. Addison-Wesley, Reading, 1980. Addison Wesley. 1965.
- GIORGINI, J.D. et al., **BAAS**, (28). 1996.
- GIRKIN, A. N.; **A computational study on the Evolution of dynamics of the obliquity of the Earth.** Thesis. Miami University. 2005.
- KOZAY, Y.: **Effect of precession and nutation on the orbital elements of a close earth satellite.** The Astronomical Journal J., 65, 621-623. 1960.
- LAINEY et al.**First numerical ephemerides of the Martian moons.** Astronomy and Astrophysics , 165, 1075 - 1084. 2007.
- LASKAR, J; ROBUTEL,J.**The chaotic obliquity of the planets,** Nature, 361, 608-612. 1993.
- LASKAR, J; JOUTEL, F.; ROBUTEL,J. **Stabilization of the earth's obliquity by the moon.**, Nature, 361, 615-617. 1993.
- LEMOS, N. A., **Mecanica Analítica.** Editora livraria da Física, 2007.
- MARCHIS, F et al. **Discovery of Triple Asteroidal System (87) Sylvia.** Nature, 436 (7052),822-4. 2005.
- MARCHIS, F et al. **S/2008 (216)1 and S/2008(216)2.** IAU Circ., 8980(1). 2008a.
- MARCHIS, F et al. **Main belt binary asteroidal systems with circular mutual orbits.** 196, 97-118. 2008b.
- MARCHIS, F et al. **S/2009 (93)1 and S/2009 (93)2 .** IAU Circ., 9069(1). 2009.
- MARCHIS, F et al. **A Dynamical Solution of the Triple Asteroid System (45) Eugenia.** Icarus. 2010.
- MURRAY, C. D. ; DERMOTT. S. F.; **Solar System Dynamics.** Cambridge University Press. 1999.
- NASCIMENTO, C., YOKOYAMA, T.;**Variation of the Equator due to Highly Inclined Eccentric Disturber.** Mathematical Problems in Engineering.10 2009.

- POGSON, N.; **Minor Planet 87 Sylvia**. Monthly Notices of Royal Astronomical Society, 26, 311. 1866.
- PRESS, W. H. ;TEUKOLSKY, S. A., William T. VETTERLING, W. T, FLANNERY, B. P.: **Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing**. Cambridge university press. 2007.
- PROSKURIN, V. F.; BATRAKOV, Y. F.: Perturbation of the Motion of Artificial Satellites, caused by the Earth Oblateness. The Bulletin of Institute of Theoretical Astronomy, 7, 537-548. 1960.
- WARD, W.: **Large-scale variations in the obliquity of Mars**. Science. 181, 260-262. 1973.
- WINTER, O. C.; BOLDRIN, L.A.G.; VIEIRA NETO,E.; VIEIRA MARTINS, R; GIULIATTI WINTER, S.M., GOMES, R S.; et al. **On the stability of the satellites of asteroid (87) Sylvia**. Monthly Notices of Royal Astronomical Society, 395(1), 218-227. 2009.
- WISDOM, J.; PEALE, S. J.; MIGNARD, F.: **The chaotic rotation of Hyperion**. Icarus, 58, 137-152. 1984.