

ROSANA APARECIDA NOGUEIRA DE ARAUJO

ENCONTROS PRÓXIMOS: CAPTURA GRAVITACIONAL  
TEMPORÁRIA E ESFERA DE INFLUÊNCIA

Dissertação apresentada à  
Faculdade de Engenharia do  
Campus de Guaratinguetá,  
Universidade Estadual Paulista,  
para a obtenção do título de  
Mestre em Física na área de  
Astronomia Dinâmica.

Orientador: Prof. Dr. Othon Cabo Winter

Co-orientador: Prof. Dr. Antônio F. Bertachini de A.Prado

Guaratinguetá  
2007

A663e Araujo, Rosana Aparecida Nogueira de  
Encontros próximos: captura gravitacional temporária e  
esfera de influência / Rosana Aparecida Nogueira de Araujo .  
– Guaratinguetá : [s.n.], 2007  
112 f. : il.  
Bibliografia: f. 78-80

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista,  
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2007  
Orientador: Prof. Dr. Othon Cabo Winter

1. Astronomia I. Título

CDU 52

## **DADOS CURRICULARES**

**ROSANA APARECIDA NOGUEIRA DE ARAUJO**

NASCIMENTO	27.04.1981 – GUARATINGUETÁ / SP
FILIAÇÃO	Francisco Ferraz de Araujo Benedicta Heronides Nogueira de Araujo
2000/2004	Curso de Graduação em Física, na Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista.
2005/2007	Curso de Pós-Graduação em Física, nível de Mestrado, na Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista.

Aos meus pais Francisco e Benedicta, pelo incentivo, pelo apoio,  
pela compreensão e pela dedicação.

## **AGRADECIMENTOS**

À minha família, por sempre me apoiar em minhas decisões e por sempre estar do meu lado torcendo pelo meu sucesso.

Aos meus orientadores Prof. Dr. Othon Cabo Winter e Prof. Dr. Antônio F. Bertachini de A.Prado pelo incentivo e por tanto terem me ensinado.

Aos meus amigos da pós, pelas horas de estudos, pela disposição em ajudar, e pela agradável companhia.

Este trabalho contou com apoio financeiro da seguinte entidade:

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

ARAUJO, R. A. N. **Encontros próximos: captura gravitacional temporária e esfera de influência.** 2007. 112f. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2007.

## RESUMO

Neste trabalho é feito o estudo do fenômeno da captura gravitacional temporária e do conceito de esfera de influência, considerando o papel da velocidade relativa. Este estudo foi feito através de simulações numéricas do problema circular restrito de três corpos e através do monitoramento da energia do problema de dois corpos. No caso da captura gravitacional temporária nós acompanhamos a variação de energia do problema de dois corpos (partícula-corpo secundário), de uma partícula que sofre um encontro próximo com um corpo massivo (um planeta, por exemplo). A evolução dessa energia mostra se a partícula foi capturada, ou não, para algumas condições iniciais específicas. Este procedimento resultou na obtenção de funções matemáticas que permitem o cálculo do chamado *raio de captura* em função da velocidade relativa. No estudo numérico da esfera de influencia, a variação da energia do problema de dois corpos no tempo também foi acompanhada, mas desta vez nós acompanhamos a energia do problema partícula-corpo central, para uma partícula que sofre um encontro próximo com o corpo secundário. A evolução desta energia mostra se a partícula foi afetada significativamente, ou não, pela influência gravitacional do corpo secundário, para condições iniciais específicas. Este procedimento resulta na obtenção de funções matemáticas que permitem o cálculo do *raio da esfera de influência* em função da velocidade relativa. Finalmente, a manobra de *swing-by* foi aplicada no estudo do caso dos asteróides Vesta e Magnya com o objetivo de explicar sua distante localização orbital em relação aos demais membros da família do asteróide Vesta. Este estudo mostrou que uma mudança na órbita do Magnya não seria proporcionada apenas pelo *swing-by*, e que ele deveria sofrer a ação de outros mecanismos para causar tal mudança.

**PALAVRAS-CHAVE:** Encontros próximos, captura gravitacional temporária, esfera de influência, *swing-by*.

ARAÚJO, R. A. N. **Close encounters: temporary gravitational capture and sphere of influence**. 2007. 112f. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2007.

### ABSTRACT

This work studies the phenomenon of the temporary gravitational capture and the concept of sphere of influence, taking into account the relative velocity. It has been done through numerical simulations of the restricted three-body problem, and through the analysis of the two-body energy. In the case of the temporary gravitational capture we followed the temporal variation of the two-body energy (particle-secondary body) of a particle that suffers a close encounter with a massive body (a planet, for instance). The evolution of such energy shows if the particle was captured or not, for some specific initial conditions. This procedure results in mathematical functions to calculate the so called *capture radius* as a function of the relative velocity. In the numerical study of the sphere of influence, we also followed the temporal variation of the two-body energy but, at this time, we followed the energy particle-central body of a particle that suffers a close encounter with a massive body (called secondary body). The evolution of such energy shows if the particle was significantly affected by the gravitational influence of the secondary body or not, for some specific initial conditions. This procedure results in mathematical functions to calculate the *sphere of influence* as a function of the relative velocity. Finally, the *swing-by* maneuver was applied in the study of the case of the asteroids Vesta and Magnya, in order to explain its distant orbital localization relative to the localization of the others members of the Vesta's family. This study showed that a change in the orbit of Magnya would not be proportioned only by the swing-by, and that the asteroid Magnya should suffer the action of others mechanisms to cause it.

**KEYWORDS:** close encounters, temporary gravitational capture, sphere of influence, swing-by.



## LISTA DE FIGURAS

2.1 - Condição Inicial.....	20
2.2 - Sistema de referência planetocêntrico.....	24
2.3 – Energia do problema de dois corpos partícula-corpo secundário, em um sistema com razão de massa $10^{-7}$ , para uma partícula com $V_{PS} = 0,0050$ e $d = 0,00287$ .....	26
2.4 - Trajetória da partícula no sistema planetocêntrico. ....	27
2.5 - Energia do problema de dois corpos (partícula-corpo central). ....	28
2.6 (a) - gráfico da trajetória da partícula no sistema planetocêntrico.....	29
2.6 (b) - variação da energia do problema de dois corpos (partícula-corpo secundário).....	29
2.7 – (a) gráfico da trajetória da partícula no sistema planetocêntrico.....	29
2.7 – (b) variação da energia do problema de dois corpos (partícula-corpo secundário)... ..	29
2.8 - Raio de captura em função da velocidade relativa (planeta-partícula), feito para razão de massa $10^{-6}$ .....	31
2.9 - Raio de Captura em função da velocidade relativa, feito para razões de massa de $10^{-1}$ a $10^{-6}$ .....	32
2.10 - Raio de Captura em função da velocidade relativa, feito para razões de massa de $10^{-7}$ a $10^{-12}$ . ....	32
2.11 – Gráfico do coeficiente B em função da razão de massa.....	34
2.12 – Gráfico comparativo entre os valores do coeficiente B em função da razão de massa obtidos numericamente e analiticamente.....	35
2.13 – Condição inicial considerando a posição angular da partícula.....	36
3.1 – Variação da energia da partícula em relação ao corpo central pelo tempo. Feito para diferentes parâmetros de aproximação $d$ .....	46
3.2 – Variação percentual da energia (partícula-corpo central) em função do parâmetro de aproximação $d$ para uma partícula com $V_{PS} = 0,0080$ .....	47

3.3 – Gráfico do raio da esfera de influência pela velocidade relativa (partícula-corpo secundário), considerando o critério $\Delta E\% = 0,5\%$ .....	48
3.4 – Gráfico do raio da esfera de influência pela velocidade relativa (partícula-corpo secundário), considerando o critério $\Delta E\% = 0,5\%$ .....	50
3.5 – Gráfico do raio da esfera de influência pela velocidade relativa (partícula-corpo secundário), considerando o critério $\Delta E\% = 1,0\%$ .....	50
3.6 – Gráfico do raio da esfera de influência pela velocidade relativa (partícula-corpo secundário), considerando o critério $\Delta E\% = 1,0\%$ .....	52
3.7 (a)- Energia do problema de dois corpos (partícula-corpo central) feitos para, $V_{PS} = 0,015$ $d = 0,00105$ (0,70 raios de Hill) e para a razão de massa $10^{-8}$ .....	53
3.7 (b)- Trajetória da partícula no sistema planetocêntrico. Feitos para $V_{PS} = 0,015$ $d = 0,00105$ (0,70 raios de Hill) e para a razão de massa $10^{-8}$ .....	54
3.8 (a) Energia do problema de dois corpos (partícula-corpo central) . Feito para a velocidade $V_{PS} = 0,370$ , $d = 0,104$ (0,70 raios de Hill) e para a razão de massa $10^{-2}$ ....	47
3.8 (b)- Trajetória da partícula no sistema planetocêntrico. Feito para a velocidade $V_{PS} = 0,370$ , $d = 0,104$ (0,70 raios de Hill) e para a razão de massa $10^{-2}$ .....	47
3.9 – Região de influência e de captura em função da velocidade relativa para um sistema com razão de massa $10^{-7}$ . .....	57
3.10 – Região de influência e de captura em função da velocidade relativa para um sistema com razão de massa $10^{-8}$ . .....	57
3.11 – Região de influência e de captura em função da velocidade relativa para um sistema com razão de massa $10^{-6}$ . .....	58
4.1 - Descrição geométrica da técnica swing-by e algumas de suas variáveis.....	61
4.2 - Vetores velocidade envolvidos no swing-by. ....	63
4.3 - Órbitas envolvidas na manobra e os possíveis pontos de encontro A e B.....	65
4.4 - Soma vetorial envolvida na manobra de swing-by.....	67
4.5 - Gráfico da variação de energia ( $\Delta E$ ) em função da velocidade do Magnya em relação ao Vesta ( $V_{\infty}$ ).....	73

A.1 - Esquema do problema de três corpos onde os sistemas de referência inercial ( $\xi, \eta$ ) e girante (X,Y) estão relacionados.....	82
B.1 - Mudança da origem do sistema de coordenadas de $M_1$ para $M_2$ .....	87
B.2 – Sistema considerado na determinação da esfera de Laplace.....	90
C.1 – Limite do raio de influência.....	95
C.2 (a) – Variação da energia da partícula em relação ao corpo central pelo tempo....	97
C.2 (b) - Variação da energia da partícula em relação ao corpo central pela distância da partícula ao planeta.....	97
C.3 (a) - Gráfico do raio da esfera de influência pela velocidade relativa da partícula em um sistema com razão de massa $10^{-6}$ para variação de 1%.....	98
C.3 (b)- Gráfico do raio da esfera de influência pela velocidade relativa da partícula em um sistema com razão de massa $10^{-6}$ para variação de 10%.....	99
C.4 (a) - Gráfico do raio da esfera de influência pela velocidade relativa da partícula em um sistema com razão de massa $10^{-5}$ para variação de 1%.....	99
C.4 (b)- Gráfico do raio da esfera de influência pela velocidade relativa da partícula em um sistema com razão de massa $10^{-5}$ para variação de 10%.....	99
C.5 (a) - Gráfico do raio da esfera de influência pela velocidade relativa da partícula em um sistema com razão de massa $10^{-4}$ para variação de 1%.....	99
C.5 (b)- Gráfico do raio da esfera de influência pela velocidade relativa da partícula em um sistema com razão de massa $10^{-4}$ para variação de 10%.....	99

## LISTA DE TABELAS

2.1 - Coeficientes da equação (2.17) para as diferentes razões de massa.....	31
2.2 – Coeficientes a e b da equação (2.18).....	34
2.3 – Raio de captura em função do ângulo $\theta$ .....	38
2.4 – Raio de captura em função do ângulo $\theta$ .....	39
3.1 – Máxima variação de energia em um sistema com razão de massa $10^{-7}$ .....	44
3.2 – Variação percentual de energia para diferentes valores de $d$ .....	46
3.3 – Coeficientes A e B da equação 3.2.....	51
4.1 - Dados físicos e orbitais dos asteróides Vesta e Magnya.....	70
4.2 – Valores de elementos orbitais para o asteróide Magnya na vizinhança de Vesta.....	72
B.1 – Raios das esferas de influência de alguns planetas em relação ao Sol.....	94
B.2- Valores calculados do raio de Hill para doze razões de massa.....	94
C.1 - Para razão de massa $10^{-6}$ , $V_{PC} = 0,130$ , $d = 0,00236$ , e variação de energia proporcionada pelo encontro= 1,000%.....	97
D.1 – Máxima variação percentual de energia. Razão de massa $10^{-6}$ .....	101
D.2 – Máxima variação percentual de energia. Razão de massa $10^{-8}$ .....	102
D.3 – Máxima variação percentual de energia. Razão de massa $10^{-9}$ .....	103
D.4 – Máxima variação percentual de energia. Razão de massa $10^{-10}$ .....	103
D.5 – Máxima variação percentual de energia. Razão de massa $10^{-11}$ .....	104
D.6 – Máxima variação percentual de energia. Razão de massa $10^{-12}$ .....	105
E.1 - Variação da energia para $r_p = 275,55$ km e $a = 3,59 \times 10^8$ km.....	106
E.2 - Variação da energia para $r_p = 275,55$ km e $a = 3,74 \times 10^8$ km.....	106

E.3 - Variação da energia para $r_p = 275,55 \text{ km}$ e $a = 3,89 \times 10^8 \text{ km}$ .....	106
E.4 - Variação da energia para $r_p = 275,55 \text{ km}$ e $a = 4,04 \times 10^8 \text{ km}$ .....	107
E.5 - Variação da energia para $r_p = 375,80 \text{ km}$ e $a = 3,59 \times 10^8 \text{ km}$ .....	107
E.6 - Variação da energia para $r_p = 375,80 \text{ km}$ e $a = 3,74 \times 10^8 \text{ km}$ .....	107
E.7 - Variação da energia para $r_p = 375,80 \text{ km}$ e $a = 3,89 \times 10^8 \text{ km}$ .....	108
E.8 - Variação da energia para $r_p = 375,80 \text{ km}$ e $a = 4,04 \times 10^8 \text{ km}$ .....	108
E.9 - Variação da energia para $r_p = 501,00 \text{ km}$ e $a = 3,59 \times 10^8 \text{ km}$ .....	108
E.10 - Variação da energia para $r_p = 501,00 \text{ km}$ e $a = 3,74 \times 10^8 \text{ km}$ .....	109
E.11 - Variação da energia para $r_p = 501,00 \text{ km}$ e $a = 3,89 \times 10^8 \text{ km}$ .....	109
E.12 - Variação da energia para $r_p = 501,00 \text{ km}$ e $a = 4,04 \times 10^8 \text{ km}$ .....	109
E.13 - Variação da energia para $r_p = 751,5 \text{ km}$ e $a = 3,59 \times 10^8 \text{ km}$ .....	110
E.14 - Variação da energia para $r_p = 751,5 \text{ km}$ e $a = 3,74 \times 10^8 \text{ km}$ .....	110
E.15 - Variação da energia para $r_p = 751,5 \text{ km}$ e $a = 3,74 \times 10^8 \text{ km}$ .....	110
E.16 - Variação da energia para $r_p = 751,5 \text{ km}$ e $a = 4,04 \times 10^8 \text{ km}$ .....	111
E.17 - Variação da energia para $r_p = 1002,0 \text{ km}$ e $a = 3,59 \times 10^8 \text{ km}$ .....	111
E.18 - Variação da energia para $r_p = 1002,0 \text{ km}$ e $a = 3,59 \times 10^8 \text{ km}$ .....	111
E.19 - Variação da energia para $r_p = 1002,0 \text{ km}$ e $a = 3,89 \times 10^8 \text{ km}$ .....	112
E.20 - Variação da energia para $r_p = 1002,0 \text{ km}$ e $a = 4,04 \times 10^8 \text{ km}$ .....	112

# SUMÁRIO

## LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE TABELAS

<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>15</b>
<b>2 A CAPTURA GRAVITACIONAL TEMPORÁRIA.....</b>	<b>18</b>
2.1 INTRODUÇÃO.....	18
2.2 O MECANISMO DE CAPTURA GRAVITACIONAL TEMPORÁRIA.....	18
2.3 ESTUDO NUMÉRICO DA CAPTURA GRAVITACIONAL TEMPORÁRIA..	19
2.3.1 Metodologia.....	19
2.3.1.1 Condições iniciais.....	19
2.3.1.2 Cálculo da energia do problema de dois corpos. ....	22
2.3.1.3 O método.....	24
2.3.1.4 Integrações Numéricas.....	25
2.3.2 Obtenção dos dados.....	28
2.3.3 Resultados.....	30
2.3.4 Dependência angular do raio de captura.....	36
2.3.4.1 Condições iniciais.....	36
2.3.4.2 Resultados.....	38
2.3.5 Comentários.....	39
<b>3 ABORDAGEM DINÂMICA DA ESFERA DE INFLUENCIA.....</b>	<b>41</b>
3.1 INTRODUÇÃO.....	41
3.2 METODOLOGIA.....	42
3.2.1 Condições Iniciais e a energia do problema de dois corpos.....	42
3.2.2. Integrações numéricas.....	42
3.2.3 Análise da variação percentual de energia do problema de dois corpos (partícula-corpo central).....	43
3.2.3.1 Escolha dos casos.....	44
3.2.3.2 Obtenção dos dados.....	45
3.3 RESULTADOS.....	47
3.3.1 Sistemas com razão de massa $10^{-8}$ .....	48
3.3.2 Sistemas com razão de massa $10^{-7}$ .....	49
3.3.3 Sistemas com razão de massa $10^{-6}$ .....	45
3.3.4 Considerações para sistemas com razão de massa maiores que $10^{-6}$ .....	53
3.4 REGIÕES DE CAPTURA E DE INFLUÊNCIA.....	56

3.5 COMENTÁRIOS.....	58
----------------------	----

## **4 A MANOBRA ASSISTIDA POR GRAVIDADE E O CASO DOS ASTERÓIDES VESTA E MAGNYA.....60**

4.1 INTRODUÇÃO.....	60
4.2 A MANOBRA ASSISTIDA POR GRAVIDADE.....	61
4.2.1 Descrição matemática do swing-by.....	61
4.2.2 Mudança de órbita devido ao swing-by.....	64
4.2.2.1 Cálculo da magnitude da velocidade de $M_3$ com relação a $M_1$ .....	65
4.2.2.2 Cálculo da anomalia verdadeira de $M_3$ no instante do encontro.....	66
4.2.2.3 Cálculo do ângulo entre a velocidade inercial de $M_3$ antes do encontro com $M_2$ e a velocidade $M_2$ .....	66
4.2.2.4 Cálculo da magnitude da velocidade de $M_3$ em relação a $M_2$ .....	66
4.2.2.5 Cálculo do ângulo entre a velocidade inercial de $M_3$ e a velocidade de $M_2$ ....	67
4.2.2.6 Cálculo do ângulo de deflexão.....	67
4.2.2.7 Cálculo do ângulo de aproximação.....	68
4.2.2.8 Obtenção das variações de energia, momento angular e velocidade.....	68
4.3 O CASO VESTA-MAGNYA.....	69
4.4 METODOLOGIA.....	70
4.5 RESULTADOS.....	71
4.5.1 Cálculo da energia antes do suposto encontro ( $E_{inicial}$ ).....	71
4.5.2 Cálculo da energia após o suposto encontro ( $E_{final}$ ).....	71
4.5.3 Cálculo da variação de energia.....	72
4.5.4 Cálculo da variação de energia através da técnica do swing-by .....	72
4.6 Comentários.....	74

## **5 CONCLUSÃO.....75**

REFERÊNCIAS.....	78
------------------	----

APÊNDICE A – O problema circular restrito de três corpos.....	81
---	----

APÊNDICE B – Esfera de influência.....	85
--	----

APÊNDICE C – Fixando a variação percentual da variação de energia do problema de dois corpos (partícula-corpo central).....	95
---	----

APÊNDICE D – Tabelas com a máxima variação de energia em função da velocidade e do raio de captura.....	101
---	-----

APÊNDICE E – Tabelas com as simulações do caso Vesta-Magnya.....	106
--	-----

## CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO

No sistema solar, o Sol possui uma massa muito superior aos demais corpos que o compõe, sendo, portanto, em termos gravitacionais, o corpo dominante. Assim sendo, o movimento de um corpo com massa muito pequena (como um cometa ou uma nave espacial) dentro do Sistema Solar é descrito pela equação do movimento Kepleriano deste corpo em torno do Sol, tratando os demais corpos como elementos perturbadores.

A situação muda se, durante a sua evolução orbital, este corpo se aproxima muito de um outro corpo de massa não desprezível (um planeta, por exemplo). Quando isto ocorre, a influência gravitacional deste corpo sobre a partícula passa temporariamente a predominar sobre a influência gravitacional do Sol.

Em tais problemas que envolvem a delimitação da influência gravitacional de dois corpos sobre um terceiro corpo, a determinação de suas esferas de influência se faz importante.

A esfera de influência pode ser definida como a região onde a atração gravitacional de um corpo sobre um outro corpo é predominante em relação à atração gravitacional de outros corpos. Nos modelos comumente adotados, as esferas de influência são determinadas em função da razão de massa (Corpo central – Corpo secundário), e da distância entre eles, resultando assim em uma esfera de tamanho fixo. São exemplos disto a esfera de Laplace e o raio de Hill (Apêndice B).

O efeito final na órbita da partícula, uma vez que esta entre na esfera de influência de um corpo, irá depender das condições iniciais com as quais o encontro ocorreu.

Com a passagem, a partícula pode sofrer uma variação de energia suficiente para resultar na mudança de sua órbita. Tal fenômeno é a base da técnica da manobra assistida por gravidade (também conhecida como manobra de *swing-by*) usada em um grande número de missões espaciais.

Um exemplo é o das missões Voyager, que voaram para os planetas exteriores do sistema solar, ganhando energia com o uso de *swing-bys* sucessivos nos planetas visitados (Kohlhase e Penzo, 1977), ou ainda, em uma viagem da Terra para Marte



fazendo uso do planeta Vênus (Szebehely, 1965; Hollister e Prussing, 1966; Striepe e Braun, 1991).

O mecanismo completo do *swing-by* foi entendido por Laplace, e posteriormente algumas equações analíticas para os efeitos do *swing-by* foram derivadas, produzindo resultados numéricos neste tópico, especialmente no problema de escape e captura de cometas por Júpiter (Broucke, 1988; Broucke e Prado, 1993).

A partícula pode ainda, com a passagem, ter sua velocidade relativa reduzida a tal ponto, que ela é temporariamente capturada pelo planeta. Este é o mecanismo da captura gravitacional temporária, que possui diversas aplicações na mecânica celeste.

Ele foi usado por exemplo, para justificar a existência dos satélites irregulares nos planetas gigantes (Peale, 1999), sendo que, posteriormente, mostrou-se que neste problema, o acréscimo de massa de Júpiter seria um dos possíveis responsáveis em fazer com que esta captura se tornasse permanente (satélites). (Vieira Neto, Winter e Yokoyama, 2004).

A captura gravitacional temporária também possui uma importante aplicação em técnicas de manobras com veículos espaciais, com o propósito de realizar transferências orbitais fazendo uso da interação gravitacional, resultando na redução do consumo de combustível, e conseqüentemente na diminuição do custo da missão (Belbruno (1987, 1990, 1992), Krish (1991), Krish et al. (1992), Miller e Belbruno (1991), Belbruno e Miller (1990,1993), Yamakawa et al. (1992,1993)).

O interesse nestes tipos de manobras se justifica pela economia de combustível proporcionada por elas, e conseqüentemente na redução dos custos financeiros de uma missão espacial.

Sendo assim, este trabalho é apresentado com o objetivo de aprimorar o entendimento a respeito destes mecanismos que fundamentalmente envolvem encontros próximos (esfera de influência, captura gravitacional temporária e a manobra assistida por gravidade).

Nele é apresentado um estudo numérico da captura gravitacional temporária e da esfera de influência, no qual foi feita uma análise da influência do valor da velocidade relativa em tais mecanismos.

Este estudo numérico consiste em integrações numéricas do problema circular restrito de três corpos e no monitoramento da energia do problema de dois corpos. Desta forma, é possível dizer se partículas com condições iniciais previamente fixadas serão influenciadas (isto é, se sofrem uma variação significativa de energia) ou se serão capturadas, e como a velocidade relativa influencia neste resultado.

Como resultados destas simulações são obtidas equações para o cálculo do raio da esfera de influência e do chamado raio de captura em função desta velocidade, para diferentes razões de massas.

A organização do trabalho é a seguinte:

No capítulo 2 é apresentado o estudo numérico da captura gravitacional temporária, onde foi definido o chamado raio de captura, dado em função da velocidade relativa.

No capítulo 3 é apresentado o estudo numérico da esfera de influência, onde o raio da esfera de influência também foi definido em função da velocidade relativa.

No capítulo 4 é apresentado um estudo mais específico, onde foi feita a aplicação da técnica do swing-by no estudo do caso dos asteróides Vesta e Magnya.

Por fim, no capítulo 5 é apresentada a conclusão do trabalho.

## **CAPÍTULO 2 A CAPTURA GRAVITACIONAL TEMPORÁRIA**

### **2.1 INTRODUÇÃO**

Neste capítulo é apresentado um estudo numérico da captura gravitacional temporária, em que foi analisado o papel da velocidade relativa neste mecanismo.

Através de integrações numéricas do problema circular restrito de três corpos, foi feito um acompanhamento da energia do problema de dois corpos, que permitiu dizer se partículas com condições iniciais previamente fixadas são capturadas, e como a velocidade relativa influenciou neste resultado.

Após um número significativo de tais integrações, foi mostrado como se dá essa relação, o raio de captura foi definido, e foram obtidas equações para o cálculo deste raio, as quais permitem a delimitação de uma região de captura em função da velocidade relativa para sistemas com diferentes razões de massa.

### **2.2 O MECANISMO DE CAPTURA GRAVITACIONAL TEMPORÁRIA.**

Pode-se encontrar na mecânica celeste diversos problemas que envolvem o fenômeno da captura gravitacional. Quando estes problemas são resolvidos pelo problema circular restrito de três corpos (Apêndice A), este fenômeno é necessariamente temporário (Fesenkov, 1946), sendo por este motivo chamado de captura gravitacional temporária.

Uma definição para a captura gravitacional temporária pode ser obtida relacionando este fenômeno com a energia do problema de dois corpos, já que há uma relação entre o sinal desta energia e o tipo de seção cônica que representa o movimento de um corpo.

Assim sendo, se a energia do problema de dois corpos de uma partícula relativa a um corpo celeste é inicialmente positiva (movimento hiperbólico) e depois passa a ser negativa (movimento elíptico) pode-se considerar que houve uma captura (Yamakawa 1992).

Outra definição pode ser encontrada em Heppenheimer (1975) que associa o caso de captura com a passagem da partícula pelo ponto Lagrangiano interior ( $L_1$ ).

Como o mecanismo de captura gravitacional temporária possui aplicações em diversos ramos da mecânica celeste, e em especial, por sua importante aplicação em técnicas de manobras com veículos espaciais com o propósito de realizar transferências orbitais fazendo uso da interação gravitacional, (Belbruno (1987,1990,1992), Krish et al. (1992), Miller e Belbruno (1991), Belbruno e Miller (1990,1993), Yamakawa et al. (1992,1993)), justifica-se o interesse em um entendimento cada vez maior deste fenômeno. Diante disto, o presente estudo é apresentado.

### 2.3 ESTUDO NUMÉRICO DA CAPTURA GRAVITACIONAL TEMPORÁRIA.

A seguir é apresentado o estudo numérico da captura gravitacional temporária, feito através de integrações numéricas do problema circular restrito de três corpos, com o objetivo de analisar a influência da variação do valor da velocidade relativa neste mecanismo, e em delimitar as regiões de captura em função desta velocidade para sistemas com diferentes razões de massa.

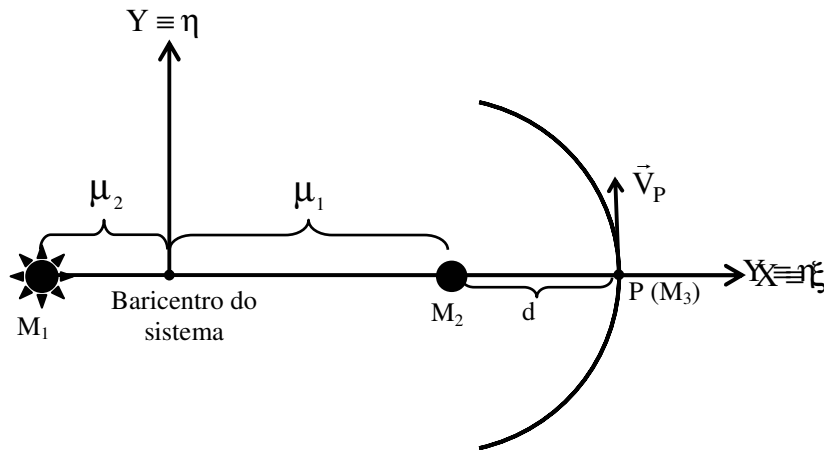
#### 2.3.1 Metodologia

##### 2.3.1.1 Condições iniciais

Considera-se um sistema formado por três corpos,  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ , sendo,  $M_1$  o corpo mais massivo, que aqui será chamado de corpo central,  $M_2$  um corpo menos massivo que  $M_1$ , que será chamado de corpo secundário, e  $M_3$  uma partícula (P) cuja massa é desprezível em relação às outras duas massas e que assim como  $M_2$  orbita ao redor de  $M_1$ , sendo que  $M_2$  possui uma órbita circular.

A figura (2.1) ilustra o sistema considerado.

O instante inicial ( $t = 0$ ) é aquele no qual  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  estão alinhados. Neste instante os eixos dos sistemas inercial  $(\xi, \eta)$  e girante  $(X, Y)$  coincidem, e  $d$  (chamado de *parâmetro de aproximação*) é distância na qual a partícula com velocidade  $V_P$  (dada no sistema inercial) passa do corpo secundário.



**Figura 2.1** - Condição Inicial

Como no instante inicial a partícula está no eixo X, sua posição inicial não terá componente em Y. Assim, a posição inicial da partícula no sistema girante é dada por:

$$X = \mu_1 + d \quad Y = 0 \quad (2.1)$$

A relação da velocidade da partícula no sistema girante com a velocidade no sistema inercial é dada pela equação (A.6) do Apêndice A, de modo que:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (\dot{X} - nY) \cos(nt) - (\dot{Y} + nX) \sin(nt) \\ \dot{\eta} &= (\dot{X} - nY) \sin(nt) + (\dot{Y} + nX) \cos(nt) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Quando  $t = 0$ , as equações (2.2) tornam-se:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \dot{X} - nY \\ \dot{\eta} &= \dot{Y} + nX \end{aligned} \quad (2.3)$$

Mas em  $t=0$ ,  $\dot{\eta} = V_p$  e  $\dot{\xi} = \dot{X} = 0$  e  $Y = 0$ , então:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= 0 \\ \dot{Y} &= V_p - nX\end{aligned}\tag{2.4}$$

Das equações (2.1) e (2.4), tem-se que as condições iniciais da partícula no sistema girante serão então, dadas por:

$$\begin{aligned}X &= \mu_1 + d & \dot{X} &= 0 \\ Y &= 0 & \dot{Y} &= V_p - n(\mu_1 + d)\end{aligned}\tag{2.5}$$

Sabe-se que a velocidade relativa partícula-corpo secundário ( $V_{PS}$ ) é a diferença entre a velocidade da partícula ( $V_p$ ) e a velocidade do corpo secundário ( $V_S$ ), isto é:

$$V_{PS} = V_p - V_S\tag{2.6}$$

Mas, a velocidade linear do corpo secundário é dada por:

$$V_S = \omega r$$

onde, em termos orbitais:  $\omega = n$ , e  $r$  é a distância que o corpo se encontra do ponto de rotação, sendo portanto  $r = \mu_1$  e  $n=1$  para o corpo considerado, de modo que:

$$V_S = \mu_1$$

Substituindo esses valores em 2.6 e reescrevendo para  $V_p$ :

$$V_p = V_{PS} + \mu_1\tag{2.7}$$

Finalmente, as condições iniciais da partícula no sistema girante dadas em (2.5) tornam-se, para  $n=1$  :

$$\begin{aligned}
 X &= \mu_1 + d & \dot{X} &= 0 \\
 Y &= 0 & \dot{Y} &= V_{PS} - d
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

### 2.3.1.2 Cálculo da energia do problema de dois corpos.

Como dito anteriormente, uma definição para a captura gravitacional temporária diz que se a energia do problema de dois corpos de uma partícula relativa a um corpo celeste é inicialmente positiva (movimento hiperbólico) e depois passa a ser negativa (movimento elíptico) pode-se considerar que houve uma captura (Yamakawa 1992).

Neste trabalho esta definição será adotada, sendo portanto para isso necessário o cálculo da energia do problema de dois corpos.

A energia do problema partícula-corpo secundário será então:

$$E_{PS} = \frac{1}{2} V_{PS}^2 - \frac{\mu_2}{r_2} \tag{2.9}$$

onde:

$V_{PS}$ : é a velocidade da partícula em relação ao corpo secundário.

$r_2$ : é a distância da partícula ao corpo secundário.

$\mu_2$ : é a razão de massa do corpo secundário

A velocidade da partícula em relação ao corpo secundário ( $V_{PS}$ ) em termo de suas componentes por:

$$V_{PS} = \sqrt{(\dot{\xi} - \dot{\xi}_S)^2 + (\dot{\eta} - \dot{\eta}_S)^2} \tag{2.10}$$

As componentes  $(\dot{\xi}, \dot{\eta})$  são calculadas através da equação (2.2). Para o cálculo das componentes  $(\dot{\xi}_S, \dot{\eta}_S)$  são feitas as seguintes considerações:

No sistema girante, o corpo secundário permanece parado, já que este sistema de referência foi definido de modo a acompanhar o movimento dos dois corpos principais. Assim sendo, neste sistema o corpo secundário terá as seguintes coordenadas:  $X_S = \mu_1$  e  $Y_S = 0$ , e as componentes de sua velocidade neste

sistema ( $\dot{X}_S$  e  $\dot{Y}_S$ ) serão nulas. Usando estas condições em (2.2) obtém-se as componentes da velocidade do corpo secundário no sistema de referência inercial:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_S &= -\mu_1 \text{sen}(nt) \\ \dot{\eta}_S &= \mu_1 \text{cos}(nt)\end{aligned}\tag{2.11}$$

Com o cálculo dessas componentes da velocidade através de (2.2) e (2.11), é possível obter a velocidade da partícula em relação ao corpo secundário ( $V_{PS}$ ), e conseqüentemente a energia do problema de dois corpos ( $E_{PS}$ ) através da equação (2.9).

O mesmo procedimento aplicado ao corpo central leva à energia de dois corpos partícula-corpo central, sendo:

$$E_{PC} = \frac{1}{2} V_{PC}^2 - \frac{\mu_1}{r_1}\tag{2.12}$$

onde:

$V_{PC}$ : é a velocidade da partícula em relação ao corpo central.

$r_1$ : é a distância da partícula ao corpo central.

$\mu_1$ : é a massa específica do corpo central.

Neste caso, a velocidade da partícula em relação ao corpo central ( $V_{PC}$ ) é dada em termos de suas componentes por:

$$V_{PC} = \sqrt{(\dot{\xi} - \dot{\xi}_C)^2 + (\dot{\eta} - \dot{\eta}_C)^2}\tag{2.13}$$

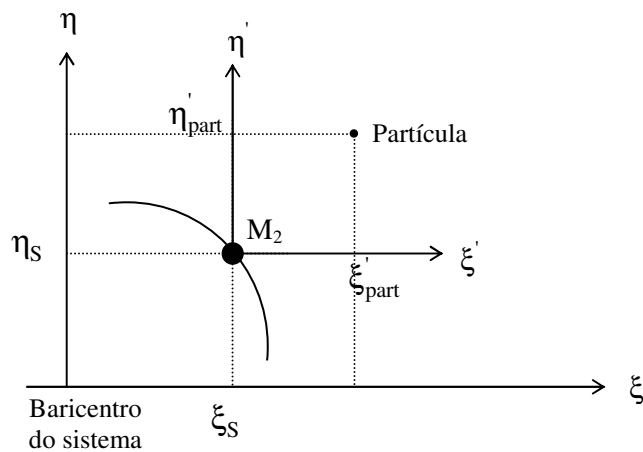
onde novamente, as componentes  $(\dot{\xi}, \dot{\eta})$  são dadas por (2.2) e o cálculo das componentes  $(\dot{\xi}_C, \dot{\eta}_C)$  é similar ao feito para a obtenção das equações (2.11). Mas lembrando que para o corpo central,  $X = -\mu_2$ :

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_C &= \mu_2 \text{sen}(nt) \\ \dot{\eta}_C &= -\mu_2 \text{cos}(nt)\end{aligned}\tag{2.14}$$



### 2.3.1.3 O método

Inicialmente, para a aplicação do método fez-se necessária a introdução de um novo sistema de referência fixo centrado no corpo secundário, chamado de sistema de referência planetocêntrico. A figura (2.2) é uma ilustração deste sistema, e mostra como ele se relaciona com o sistema de referência centrado no baricentro de um sistema de massa, usado na descrição do problema circular restrito de três corpos (Apêndice A).



**Figura 2.2** – Sistema de referência planetocêntrico

As coordenadas da partícula neste novo sistema relacionam-se com as coordenadas do sistema  $(\xi, \eta)$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\xi'_{part} &= \xi - \xi_S \\ \eta'_{part} &= \eta - \eta_S\end{aligned}\tag{2.15}$$

Com estas condições bem definidas, o próximo passo é aplicar o método, que consiste em:

- Fixar a razão de massa do sistema.
- Fixar a velocidade relativa (partícula-corpo secundário).
- Variar o parâmetro de aproximação ( $d$ ).

- Para cada valor de  $d$  analisar graficamente, através da variação da energia do problema de dois corpos e da trajetória da partícula no sistema planetocêntrico, se houve captura (no sistema planetocêntrico, a captura é caracterizada pela trajetória da partícula. Se ela está capturada, o que se vê neste sistema é a partícula dando voltas ao redor do corpo secundário).
- O menor valor de  $d$  para o qual a partícula não está mais capturada é considerado o raio de captura para partículas com a velocidade fixada anteriormente.

#### 2.3.1.4 Integrações Numéricas

Utilizando a linguagem de programação FORTRAN e o integrador Gauss-Radau (Everhart, 1985), foi redigida uma rotina para realizar integrações numéricas que forneçam o valor da energia do problema de dois corpos, em uma dinâmica de três corpos ao longo do período de integração.

Neste programa entra-se com as condições iniciais dadas pela equação (2.8), com a razão de massa do sistema, com a velocidade da partícula em relação ao corpo secundário ( $V_{PS}$ ), e com valor do parâmetro de aproximação  $d$ .

Os valores numéricos das grandezas que entram nas integrações, como o parâmetro de aproximação, a velocidade relativa, as razões de massa e o tempo de integração, são dados em um sistema de unidades adimensionais, definido de forma que a distância entre o corpo primário e secundário seja igual a 1, e de que o sistema gire com período  $2\pi$ .

Desta forma,  $G(M_1+M_2)=1$ , e  $n=1$  (terceira lei de Kepler).

Assim sendo, o sistema de unidades usado neste trabalho é composto por:

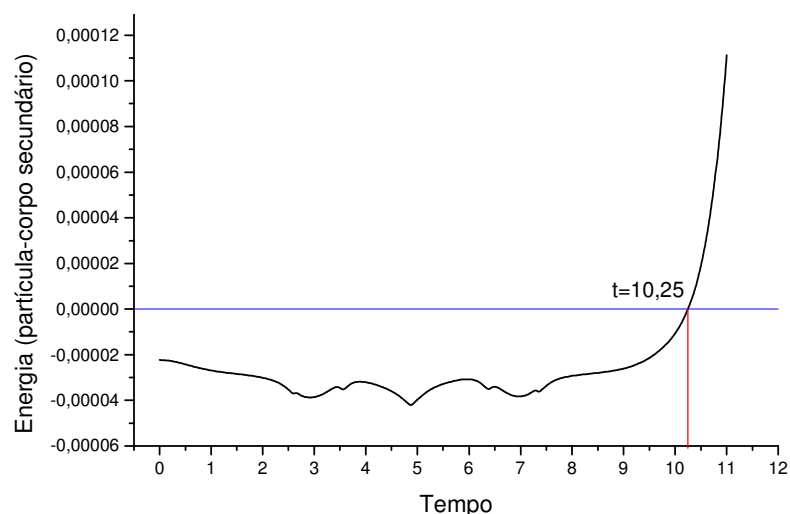
- Unidade de distância: é a distância entre os corpos  $M_1$  e  $M_2$  (tomada como uma unidade de distância).
- Unidade de massa: é a soma da massa do sistema, isto é,  $\mu = \mu_1 + \mu_2 = 1$
- Unidade de tempo: definida de modo que a velocidade angular do sistema seja unitária ( $n=1$ ), e que o período do movimento dos dois corpos seja  $2\pi$ .

- **Teste das integrações numéricas.**

Com o objetivo de verificar se as integrações numéricas estão de acordo com a definição da captura gravitacional temporária (Yamakawa 1992), e se a trajetória no sistema planetocêntrico corresponde ao esperado, foram realizados alguns testes. Um deles é mostrado a seguir.

Foi considerada uma partícula com velocidade relativa ao corpo secundário  $V_{PS}=0,0050$ . O parâmetro de aproximação foi  $d=0,00287$ , em um sistema com uma razão de massa de  $10^{-7}$ , e o tempo de integração  $t=11$  períodos orbitais do corpo secundário. Neste exemplo constatou-se que para estas condições, a partícula inicialmente está capturada, mas que em  $t=10,25$  acontece o escape, como pode ser constatado nas figuras: (2.3), que mostra a variação da energia do problema de dois corpos (partícula-corpo secundário), (2.4) que mostra a trajetória da partícula no sistema planetocêntrico e (2.5), que mostra o gráfico da energia do problema de dois corpos da partícula em relação ao corpo central.

Na figura 2.3 o que se vê é que para a velocidade relativa ( $V_{PS}$ ) e para o parâmetro de aproximação ( $d$ ) dados, a partícula está inicialmente capturada pelo corpo secundário (energia negativa), e assim permanece até que em  $t=10,25$  a energia torna-se positiva, indicando que ela escapou da influência gravitacional.

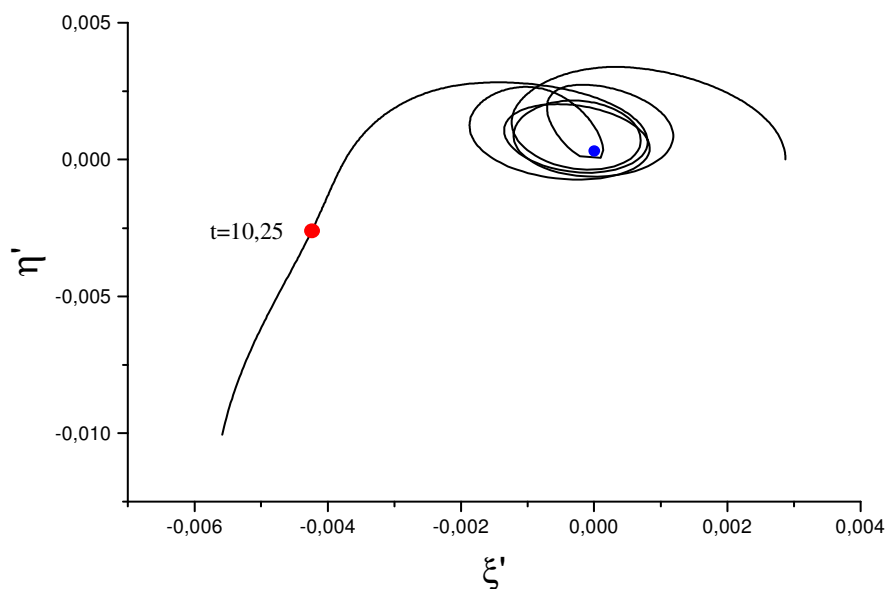


**Figura 2.3** – Energia do problema de dois corpos partícula-corpo secundário, em um sistema com razão de massa  $10^{-7}$ , para uma partícula com  $V_{PS}=0,0050$  e  $d=0,00287$ . A linha azul demarca a energia igual a zero e a linha vermelha o instante a partir do qual o sinal da energia muda.

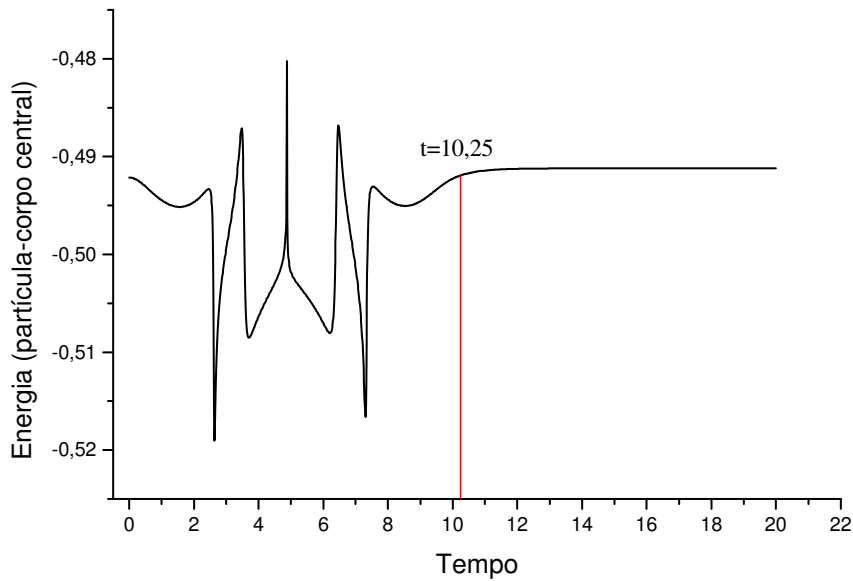
Na figura 2.4 está o gráfico com a trajetória da partícula no sistema planetocêntrico. Percebe-se que ela está de acordo com a informação obtida anteriormente através do gráfico da energia, já que inicialmente ela permanece em órbita do corpo secundário, localizado na origem do sistema, estando portanto capturada, mas depois ela se afasta, indicando que escapou.

O gráfico da figura 2.5 mostra um comportamento interessante da energia do problema de dois corpos (partícula-corpo central), que vem concordar com o que foi dito acima.

Nele, vê-se que enquanto a partícula permaneceu capturada a energia variou bastante, devido ao movimento de aproximação e afastamento da partícula com o corpo secundário neste período. Um pouco depois do momento que foi demarcado como o ponto que a partícula escapou, a energia torna-se constante, indicando que de fato o corpo secundário deixou de influenciar a partícula e o problema tornou-se essencialmente um problema de dois corpos (partícula-corpo central).



**Figura 2.4** – Trajetória da partícula no sistema planetocêntrico. O ponto azul representa a localização do planeta. O ponto vermelho demarca o ponto a partir do qual a partícula escapa, de acordo com a energia do problema de dois corpos (figura (2.3))



**Figura 2.5** - Energia do problema de dois corpos (partícula-corpo central). O tempo de integração foi aumentado para  $t = 20$  períodos orbitais do corpo secundário, com o objetivo de mostrar que a energia torna-se constante pouco tempo depois do escape da partícula (a linha vermelha demarca este instante).

Neste exemplo, percebe-se que a integração revela comportamentos que estão de acordo com o esperado teoricamente, indicando que ela pode ser aplicada ao método proposto.

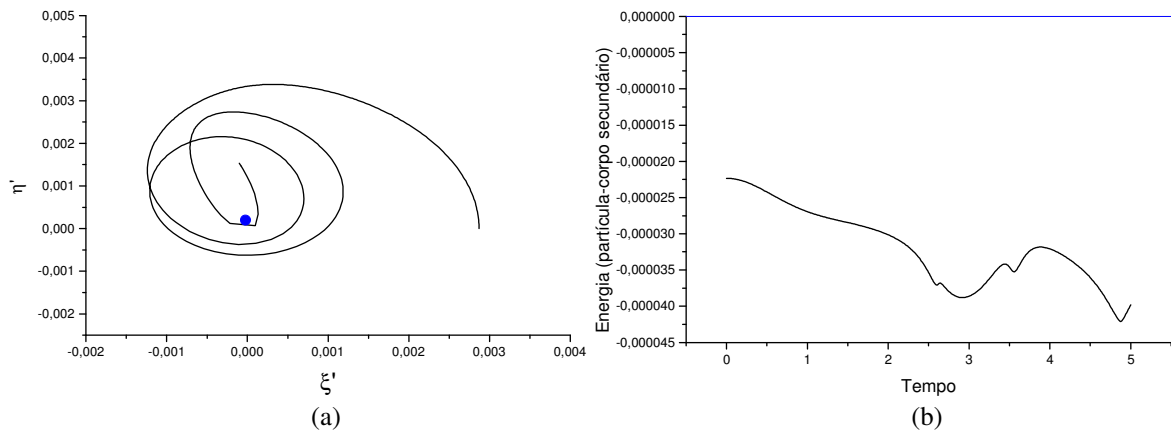
### 2.3.2 Obtenção dos dados

Como explicado no item (2.3.1.3), o método consiste em fixar a razão de massa e a velocidade relativa, e em variar o parâmetro de aproximação ( $d$ ). Então, para cada valor de  $d$  é analisado graficamente através da trajetória da partícula em um sistema planetocêntrico, se nestas condições a partícula está capturada.

O critério adotado consiste em considerar a partícula capturada, se ela der no mínimo uma volta ao redor do corpo secundário. Conforme o valor do parâmetro de aproximação  $d$  é aumentado, este comportamento não é mais observado. O que se vê no sistema planetocêntrico é a partícula “passando” pelo corpo, e então é considerado que ela não está capturada.

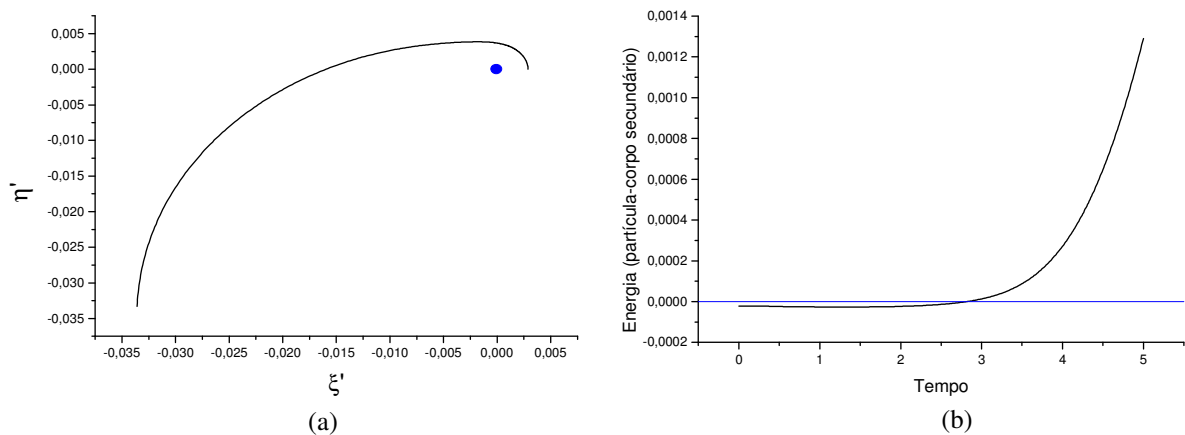
O exemplo a seguir feito para uma partícula com  $V_{PS}=0,0050$  e para um sistema com razão de massa  $10^{-7}$ , ajuda a entender melhor estas considerações e como se dá a obtenção dos dados. Nele o tempo de integração é  $t=5$  períodos orbitais do corpo secundário.

O problema começa com um valor de  $d$  que resulta em uma partícula inicialmente capturada, como mostrado na figura (2.6), onde  $d=0,00287$ .



**Figura 2.6** – (a) gráfico da trajetória da partícula no sistema planetocêntrico. O ponto azul representa a localização do planeta neste sistema. (b) variação da energia do problema de dois corpos (partícula-corpo secundário). Feitos para a velocidade relativa  $V_{PS}=0,0050$ , para o parâmetro de aproximação  $d=0,00287$  e para um sistema com razão de massa  $10^{-7}$ .

Toma-se então valores cada vez maiores para  $d$ , até que é encontrado um valor com o qual a partícula não está mais capturada, como mostra a figura (2.7), feita para  $d=0,00288$ .



**Figura 2.7** – (a) gráfico da trajetória da partícula no sistema planetocêntrico. O ponto azul representa a localização do planeta neste sistema. (b) variação da energia do problema de dois corpos (partícula-corpo secundário). Feitos para a velocidade relativa  $V_{PS}=0,0050$ , para o parâmetro de aproximação  $d=0,00288$  e para um sistema com razão de massa  $10^{-7}$ .

O valor de  $d$  no qual ocorre a transição, de captura para não captura, passa a ser chamado de raio de captura ( $R_C$ ) para partículas com a velocidade relativa fixada.

Deste exemplo concluí-se que, o raio de captura para partículas com velocidade relativa ao corpo secundário igual a  $V_{PS} = 0,0050$ , em um sistema cuja razão de massa é  $10^{-7}$ , será  $R_C = 0,00288$ .

### 2.3.3 Resultados

O procedimento descrito em detalhes no item (2.3.2) pode em princípio ser aplicado para um número indeterminado de condições iniciais (diferentes razões de massa, velocidades relativas e  $d$ ).

Neste trabalho foram adotados dois limitantes: na velocidade e no valor de  $d$ , de modo que os resultados que serão apresentados a seguir são válidos para velocidades relativas sempre positivas, para  $d$  maiores que 0,5 raio de Hill, e para o tempo de integração igual a 5 períodos orbitais do corpo secundário.

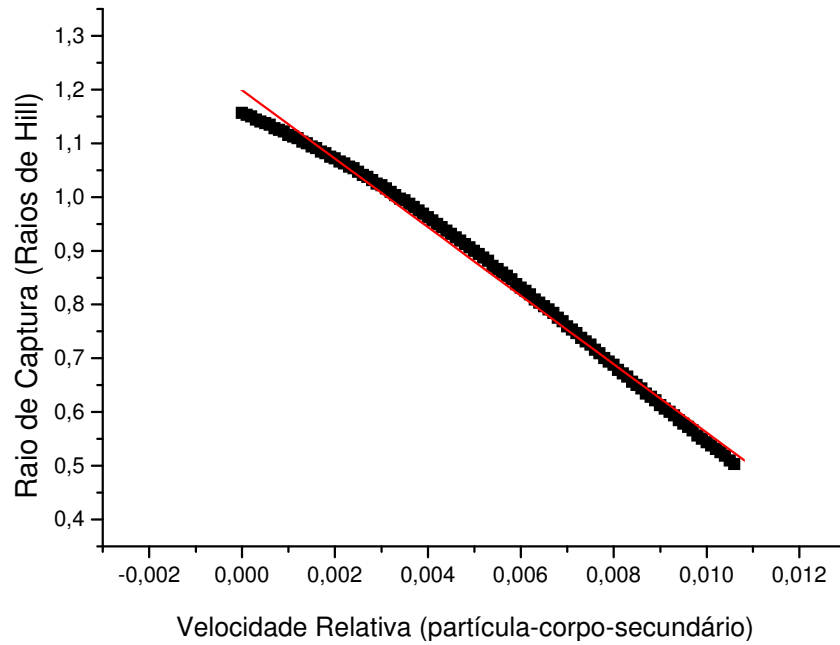
Foram feitas simulações para doze razões de massa ( $10^{-1}$  a  $10^{-12}$ ), valores estes que abrangem as razões de massas que podem ser encontradas no Sistema Solar, como no sistema Plutão-Caronte em que a razão de massa é da ordem de  $10^{-1}$ , passando pelas razões de massa Sol-Planetas, e indo até razões de massa extremamente pequenas, da ordem de  $10^{-12}$ , como as que podem ser encontradas no sistema formado entre Saturno e seus satélites menores.

Para cada uma dessas razões de massa, após um grande número de simulações, obteve-se uma curva como a exemplificada na figura (2.8) feita para a razão de massa  $10^{-6}$ . Cada ponto deste gráfico foi obtido seguindo os passos apresentados nos itens 2.3.1.3 e 2.3.2.

Um ajuste linear nesta curva (linha vermelha), permite a obtenção do raio de captura ( $R_C$ ) em função velocidade relativa (equação 2.16), o qual é dado em raios de Hill. Os respectivos valores de raio de Hill para as doze razões de massa foram calculados, e encontram-se na tabela B.2 no Apêndice B.

Para a razão de massa  $10^{-6}$ ,  $R_C$  é dado por:

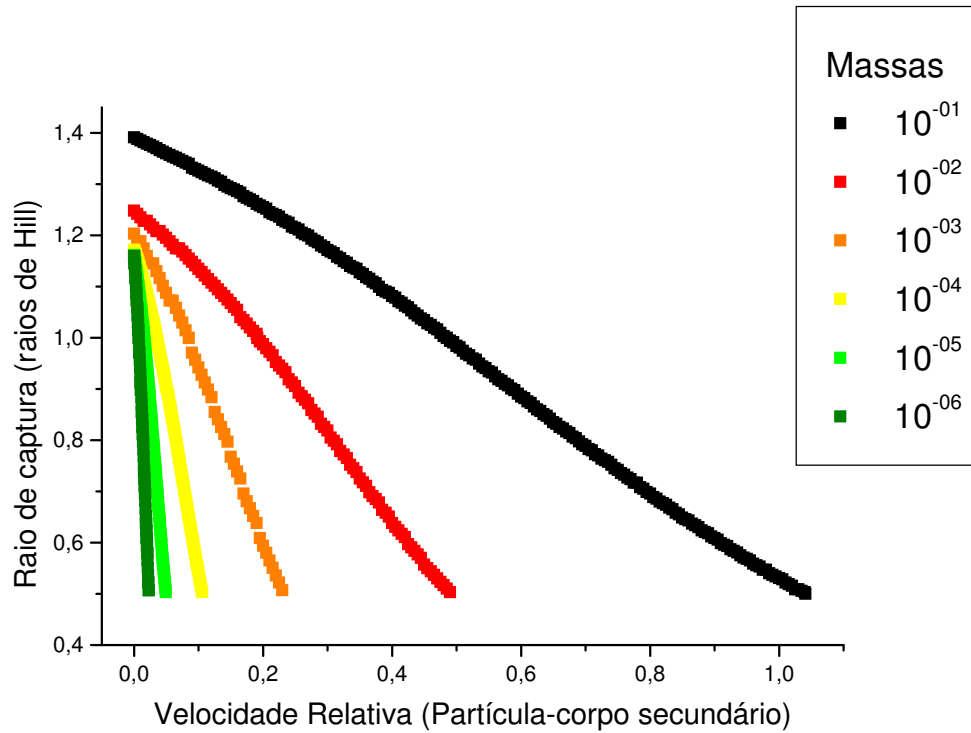
$$R_C(V_{PS}) = 1,208 - 29,847(V_{PS}) \quad (2.16)$$



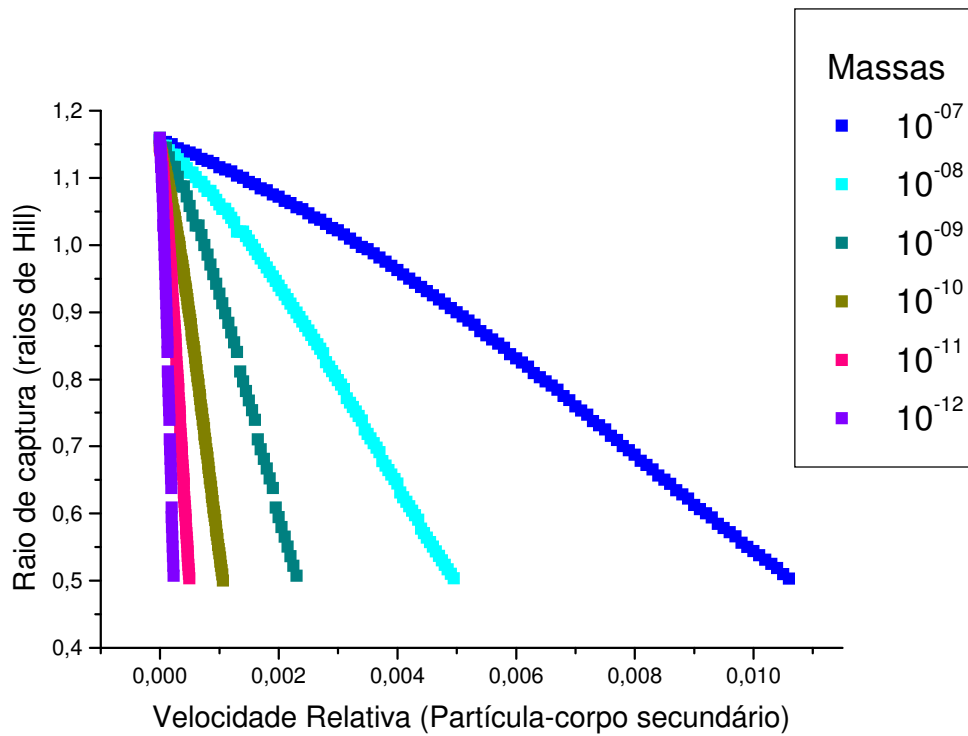
**Figura 2.8** - Raio de captura em função da velocidade relativa (planeta-partícula), feito para razão de massa  $10^{-6}$ .

As curvas para todas as razões de massa são mostradas nas figuras (2.9) e (2.10).





**Figura 2.9** - Raio de Captura em função da velocidade relativa, feito para razões de massa de  $10^{-1}$  a  $10^{-6}$ .



**Figura 2.10** - Raio de Captura em função da velocidade relativa, feito para razões de massa de  $10^{-7}$  a  $10^{-12}$ .

Cada uma dessas curvas fornece através de um ajuste linear, uma equação do tipo:

$$R_C(V_{PS}) = A - B(V_{PS}) \quad (2.17)$$

com os seus respectivos coeficientes A e B dados na tabela (2.1).

**Tabela 2.1** - Coeficientes da equação (2.17) para as diferentes razões de massa

<b>Razão de Massa</b>	<b>A</b>	<b>B</b>
$10^{-1}$	1,301	0,897
$10^{-2}$	1,282	1,573
$10^{-3}$	1,232	3,099
$10^{-4}$	1,216	6,572
$10^{-5}$	1,209	14,042
$10^{-6}$	1,208	29,847
$10^{-7}$	1,199	63,688
$10^{-8}$	1,195	136,532
$10^{-9}$	1,201	295,063
$10^{-10}$	1,190	630,978
$10^{-11}$	1,195	1363,655
$10^{-12}$	1,201	2942,123

Com os resultados apresentados nesta tabela, é obtida uma única função, que permite calcular o raio de captura dado não só em função da velocidade relativa ( $V_{PS}$ ), mas também da razão de massa do sistema ( $\mu$ ), que é o objetivo deste estudo.

Isto é feito, primeiramente, observando-se nesta tabela que o coeficiente A varia muito pouco em função da razão de massa, sendo portanto aproximadamente constante, em torno do valor 1,2.

Nesta mesma tabela, percebe-se que o coeficiente B varia consideravelmente, praticamente dobrando, conforme a razão de massa diminui. Sendo assim, torna-se necessário expressar este coeficiente em função da razão de massa, para que o objetivo seja atingido.

Para isso foi considerado o gráfico mostrado na figura 2.11, feito com os dados das colunas 1 e 3 da tabela 2.1, onde foi adotada uma escala logarítmica nos dois eixos, resultando em uma reta. Tal comportamento da curva sugere uma relação do tipo:

$$B(\mu) = a \mu^b \quad (2.18)$$

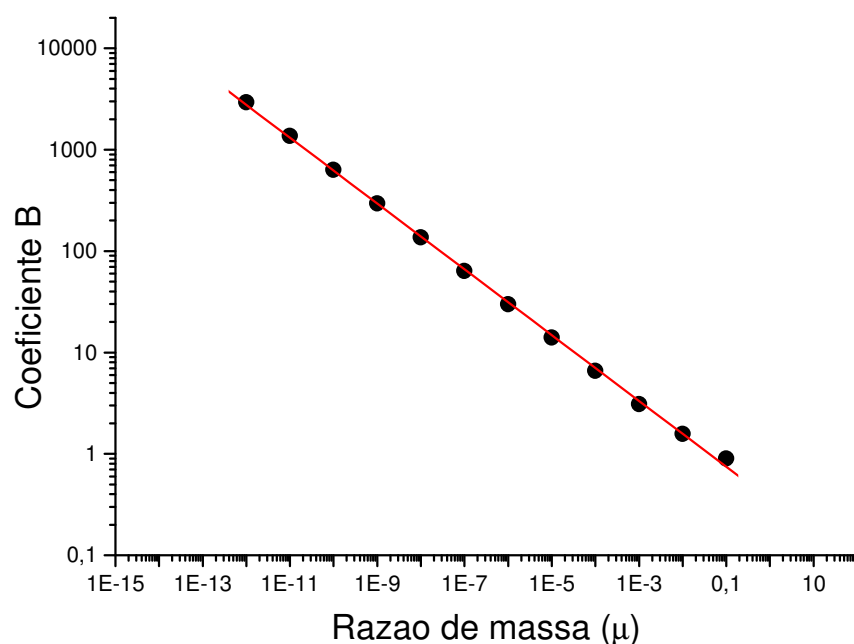
Os coeficientes a e b são obtidos através de um ajuste linear (linha vermelha) nesta curva, sendo eles:

**Tabela 2.2** – Coeficientes a e b da equação (2.18)

Coeficientes	Valores
<b>a</b>	0,353160332
<b>b</b>	-0,324585816

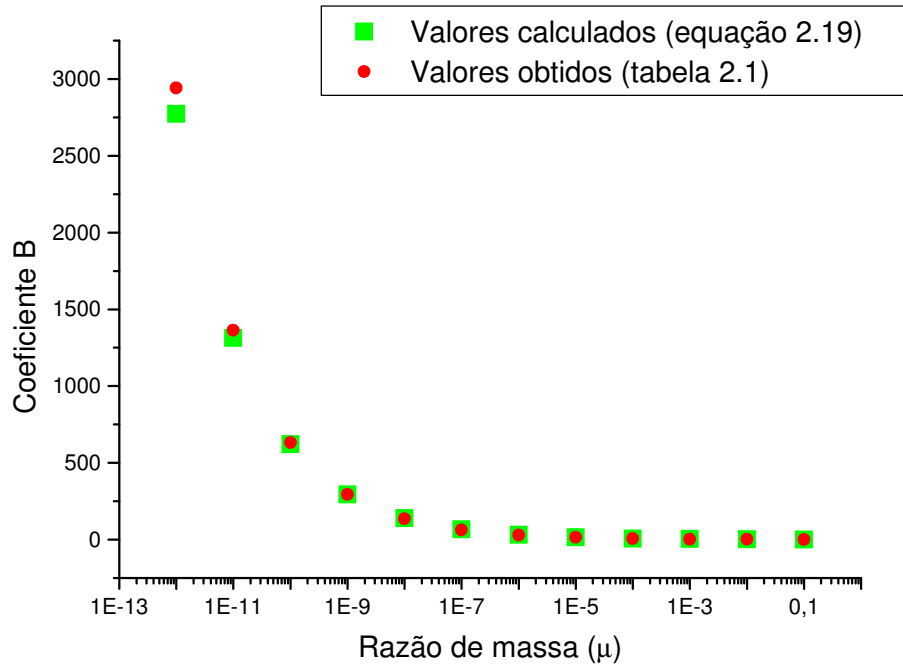
Assim sendo, o coeficiente B dado em função da razão de massa  $\mu$  (equação (2.18)) será:

$$B(\mu) \approx 0,35\mu^{-0,32} \quad (2.19)$$



**Figura 2.11** – Gráfico do coeficiente B em função da razão de massa  $\mu$ , dados em uma escala logarítmica.

O gráfico da figura 2.12 permite que uma comparação entre os valores obtidos para o coeficiente (apresentados na tabela 2.1) com os valores obtidos analiticamente através da equação 2.19 seja feita.



**Figura 2.12** – Gráfico comparativo entre os valores do coeficiente B em função da razão de massa  $\mu$ , obtidos numericamente e analiticamente.

Percebe-se que os valores para os coeficientes B, calculados através da equação (2.19), são bastante próximos dos valores obtidos numericamente, e que portanto esta equação representa bem o comportamento do sistema.

Feitas estas considerações, é finalmente obtida a função matemática que exprime o raio de captura em função da razão de massa e da velocidade relativa, que será então aproximadamente dado por:

$$R_C(V_{PS}) \approx 1,2 - 0,35\mu^{-0,32}(V_{PS}) \quad (2.20)$$

### 2.3.4 Dependência angular do raio de captura

Aqui é apresentado um teste, que foi realizado com o propósito de verificar se existe uma dependência angular do raio de captura. Isto foi feito considerando que a partícula, como anteriormente, se encontra inicialmente a uma distância  $d$  do corpo secundário, no entanto, agora com uma posição angular  $\theta$  em relação à linha que une os corpos de massa  $M_1$  e  $M_2$ .

#### 2.3.4.1 Condições iniciais.

A figura 2.13 mostra a nova configuração considerada.

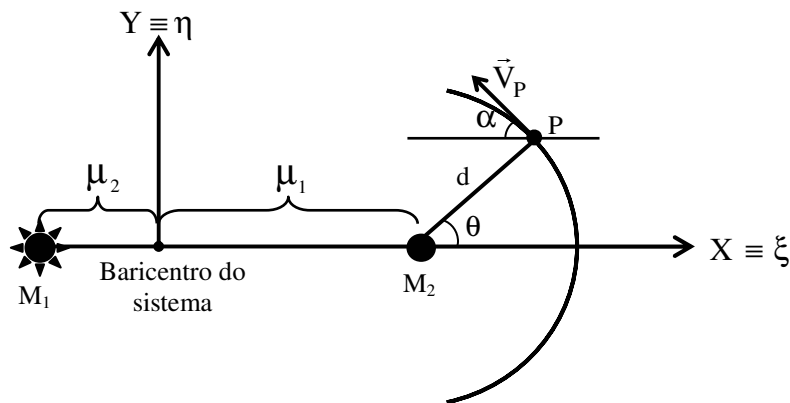


Figura 2.13 – Condição inicial considerando a posição angular da partícula.  
Nesta figura,  $\alpha = 90^\circ - \theta$ .

A posição da partícula no sistema girante, em função do ângulo  $\theta$  será:

$$X = \mu_1 + d \cos \theta \qquad Y = d \sin \theta \qquad (2.21)$$

e as componentes da velocidade no sistema inercial serão:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -V_P \cos(90^\circ - \theta) & \rightarrow & \quad \dot{\xi} = -V_P \sin \theta \\ \dot{\eta} &= V_P \sin(90^\circ - \theta) & \rightarrow & \quad \dot{\eta} = V_P \cos \theta \end{aligned} \qquad (2.22)$$

de modo que:

$$\vec{V}_P = \dot{\xi}\hat{i} + \dot{\eta}\hat{j} \quad \rightarrow \quad \vec{V}_P = (-V_P \sin \theta)\hat{i} + (V_P \cos \theta)\hat{j} \quad (2.23)$$

Através das equações (2.4), e substituindo X e Y dados pelas equações (2.21), obtém-se que:

$$\dot{X} = -V_P \sin \theta + d \sin \theta \quad \text{e} \quad \dot{Y} = V_P \cos \theta - \mu_1 - d \cos \theta \quad (2.24)$$

Sabendo que:

$$\vec{V}_{PS} = \vec{V}_P - \vec{V}_S \quad (2.25)$$

onde:

$$\vec{V}_{PS} = (V_{PS} \sin \theta)\hat{i} + (V_{PS} \cos \theta)\hat{j} \quad (2.26)$$

e,

$$\vec{V}_S = (0)\hat{i} + (\mu_1)\hat{j} \quad (2.27)$$

então, de (2.25) têm-se que:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_{PS} + \vec{V}_S \quad (2.28)$$

onde substituindo por (2.26) e (2.27):

$$\vec{V}_P = (V_{PS} \sin \theta)\hat{i} + (V_{PS} \cos \theta + \mu_1)\hat{j} \quad (2.29)$$

Comparando (2.29) com (2.23), obtém-se que:

$$-V_P \sin \theta = V_{PS} \sin \theta \quad \text{e} \quad V_P \cos \theta = V_{PS} \cos \theta + \mu_1 \quad (2.30)$$

Substituindo esses valores em (2.24), chega-se em:

$$\dot{X} = V_{PS} \sin \theta + d \sin \theta \quad \text{e} \quad \dot{Y} = V_{PS} \cos \theta + \mu_1 - d \cos \theta - \mu_1 \quad (2.31)$$

Assim, as condições iniciais da partícula no sistema girante, considerando a sua posição angular será:

$$\begin{aligned} X &= \mu_1 + d \cos \theta & \dot{X} &= (V_{PS} + d) \sin \theta \\ Y &= d \sin \theta & \dot{Y} &= (V_{PS} - d) \cos \theta \end{aligned} \quad (2.32)$$

#### 2.3.4.2 Resultados

Foram escolhidas duas partículas com velocidades  $V_{PS} = 0,0070$  e  $V_{PS} = 0,0090$ , em um sistema com razão de massa  $10^{-7}$ . O tempo de integração foi  $t = 5$  períodos orbitais do corpo secundário, e o ângulo foi variado de  $0^\circ$  a  $360^\circ$  em intervalos de  $45^\circ$ .

Para estas condições, o método apresentado na seção 2.3.1.3 foi aplicado, e os dados foram obtidos como exemplificado na seção 2.3.2. Com isso, o raio de captura foi obtido, para diferentes posições angulares da partícula. Os resultados são mostrados nas tabelas 2.3 e 2.4.

**Tabela 2.3** – Raio de captura  $R_C$  em função do ângulo  $\theta$ .  
Foi considerada uma partícula com  $V_{PS} = 0,0070$  em um sistema com razão de massa  $10^{-7}$ .

$\theta$	Raio captura	Raio de captura (raios de Hill)
$0^\circ$	0,00243	0,7594
$45^\circ$	0,00233	0,7281
$90^\circ$	0,00192	0,6000
$135^\circ$	0,00199	0,6219
$180^\circ$	0,00243	0,7594
$225^\circ$	0,00233	0,7281
$270^\circ$	0,00192	0,6000
$315^\circ$	0,00199	0,6219

Tabela 2.4 – Raio de captura  $R_C$  em função do ângulo  $\theta$ .  
 Foi considerada uma partícula com  $V_{PS} = 0,0090$  em um sistema com razão de massa  $10^{-7}$ .

$\theta$	Raio captura	Raio de captura (raios de Hill)
$0^\circ$	0,00196	0,7594
$45^\circ$	0,00146	0,7281
$90^\circ$	0,00145	0,6000
$135^\circ$	0,00157	0,6219
$180^\circ$	0,00196	0,7594
$225^\circ$	0,00146	0,7281
$270^\circ$	0,00145	0,6000
$315^\circ$	0,00157	0,6219

Percebe-se que há uma dependência angular no raio de captura, sendo que seus valores máximos ocorrem quando  $\theta = 0^\circ$  e  $\theta = 180^\circ$ , e seus valores mínimos ocorrem para  $\theta = 90^\circ$  e  $\theta = 270^\circ$ .

Assim sendo, o raio de captura obtido na seção 2.3.3, que é dado em função da velocidade relativa e da razão de massa do sistema, que foi feito para  $\theta = 0^\circ$ , o qual é calculado através da equação (2.20), pode ser entendido como um limitante superior de captura, enquanto que os valores para  $\theta = 90^\circ$  e  $\theta = 270^\circ$  seriam limitantes inferiores.

### 2.3.5 Comentários

Percebe-se que de fato a velocidade relativa entre os corpos é um fator importante a ser considerado no mecanismo da captura gravitacional temporária.

Foi mostrado que para um sistema com uma determinada razão de massa, pode-se delimitar uma região em função da velocidade na qual a partícula se aproxima do corpo secundário, que resulta em sua captura.

Neste trabalho foram obtidas as funções matemáticas para o cálculo do chamado raio de captura, dado em função da velocidade relativa, e definido de modo a delimitar a distância a partir da qual uma partícula com determinada velocidade relativa, está ou não capturada.



A partir destas funções, foi obtida uma única função para o cálculo do raio de captura em função da velocidade relativa e também da razão de massa do sistema.

Este raio de captura diminui conforme a velocidade aumenta, isto é, quanto maior a velocidade, mais próxima do corpo secundário a partícula tem que estar para estar capturada. E ainda, vê-se que este raio diminui conforme a razão de massa diminui, isto porque, quanto menor for a massa do corpo secundário, mais próxima a partícula com uma dada velocidade relativa tem que estar deste corpo para estar capturada, e vice-versa.

Foi mostrado através de um teste, que este raio depende da posição angular da partícula em relação à linha que une os dois corpos principais, sendo que os valores máximos para este raio ocorrem quando a partícula está exatamente sobre esta linha ( $\theta = 0^\circ$  ou  $\theta = 180^\circ$ ), e os valores mínimos ocorrem quando ela está em uma posição perpendicular à esta linha  $\theta = 90^\circ$  ou  $\theta = 270^\circ$ . Assim sendo, o raio de captura calculado através da equação (2.20) corresponde a um limitante superior de captura dado em função da velocidade relativa e da razão de massa do sistema.

## CAPÍTULO 3 A ESFERA DE INFLUÊNCIA

### 3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, os efeitos ocasionados pelo encontro entre dois corpos são levados em consideração na determinação da esfera de influência gravitacional. Isso é feito considerando as velocidades relativas entre os corpos envolvidos, e através do monitoramento da energia do problema de dois corpos (partícula-corpo central).

Neste estudo é mostrado que a influência gravitacional de um corpo sobre um outro corpo está relacionada com a velocidade relativa entre estes corpos. Assim sendo, foi possível obter uma formulação matemática para o cálculo do raio da esfera de influência em função desta velocidade.

Este método resulta em uma esfera de influência de tamanho variável para um sistema com razão de massa fixa, sendo essa variação determinada pela velocidade relativa. Este modelo se opõe às esferas de influência normalmente usadas que são de tamanhos fixos (Apêndice B).

Para que este objetivo fosse atingido, dois diferentes métodos foram adotados para o estudo do problema proposto. Um destes métodos (apresentado no Apêndice C) se mostrou ineficaz, não correspondendo ao resultado esperado. Diante disto, foi desenvolvido um outro, que será apresentado neste capítulo.

A idéia inicial era aplicá-lo para doze sistemas, com razões de massa de  $10^{-1}$  a  $10^{-12}$ . No entanto, como é mostrado no item 3.3.4, para razões de massa maiores que  $10^{-6}$  apareceram alguns efeitos que inviabilizaram a aplicação do método adotado. Além disso, para razões de massa menores que  $10^{-9}$ , a partícula precisa se aproximar muito do planeta, estando a uma distância menor que 0,5 raio de Hill, valor este adotado como sendo a mínima aproximação permitida entre a partícula e o corpo secundário.

Diante disso, o método adotado, explicado no item 3.2, foi aplicado para três razões de massa ( $10^{-6}$ ,  $10^{-7}$  e  $10^{-8}$ ). Estes resultados são apresentados no item 3.3.

## 3.2 METODOLOGIA

### 3.2.1 Condições iniciais e a energia do problema de dois corpos.

As condições iniciais consideradas neste problema são idênticas às do estudo da captura gravitacional temporária, tendo sua obtenção sido explicada em detalhes no capítulo 2 (item 2.3.1.1).

Sabe-se que a passagem de uma partícula pela esfera de influência de um corpo pode causar variação de energia suficiente para resultar na mudança de sua órbita em relação ao corpo central. Do mesmo modo, se a partícula não passa pela esfera de influência, tem-se essencialmente um problema de dois corpos (partícula-corpo central), com a energia de sua órbita em relação a este corpo permanecendo constante.

Diante disto, neste problema é monitorada a energia do problema de dois corpos partícula-corpo central. No item 2.3.1.2. é mostrado com se faz o cálculo dessa energia.

### 3.2.2 Integrações numéricas

Fez-se o uso da mesma rotina utilizada para realizar as integrações numéricas no estudo apresentado no capítulo 2 (comentado no item 2.3.1.4).

Similar ao feito anteriormente, neste programa entra-se com as condições iniciais dadas pelas equações (2.8) e com a razão de massa do sistema. A velocidade da partícula em relação ao planeta é fixada, e o parâmetro de aproximação  $d$  é variado.

Após a integração é criado um arquivo que mostra como as variáveis envolvidas, bem como as energias do problema de dois corpos (partícula-corpo central, e partícula-corpo secundário), variam no tempo.

O ponto chave neste estudo é a determinação das condições para as quais considera-se que a partícula passou, e quando deixou a esfera de influência, baseado na informação da variação de energia do problema de dois corpos (partícula-corpo central).

Na tentativa de encontrar esse limitante, duas abordagens foram desenvolvidas. A primeira delas se mostrou ineficaz. Os detalhes desta abordagem, os resultados obtidos através dela, e a justificativa para ela ter sido abandonada encontram-se no Apêndice C. A segunda abordagem é apresentada a seguir.

### **3.2.3 Análise da variação percentual da energia do problema de dois corpos (partícula-corpo central)**

Aqui a velocidade da partícula em relação ao corpo secundário e o tempo de integração são fixados, e o parâmetro de aproximação  $d$  é variado. Para cada valor de  $d$ , a variação percentual da energia proporcionada pelo encontro é calculada. Essa variação percentual consiste na diferença entre as energias inicial da partícula (para  $t = 0$ ) e a energia final da partícula ( $t = t_f$ ), sendo  $\Delta E\% = (E_{\text{inicial}}/E_{\text{final}})100\%$ .

O parâmetro de aproximação é tomado desde valores que resultam em significativas variações de energia (partícula mais próxima do planeta), até valores para os quais a energia é praticamente constante (partícula mais distante do planeta).

Foram estipulados dois valores para os quais considera-se que a partícula entrou na esfera de influência. Se a variação de energia proporcionada pelo encontro for maior que 1% num primeiro caso, ou maior que 0,5% em outro, considera-se que a partícula passou pela esfera de influência. Se a variação for menor, considera-se que a partícula não entrou na esfera de influência do corpo secundário.

O valor de parâmetro de aproximação que delimita esta condição (isto é, o valor exato do parâmetro para o qual essa variação é exatamente 1% ou 0,5%) passa a ser considerado o raio da esfera de influência para a partícula com a velocidade previamente fixada.

A seguir está um exemplo que mostra como os dados são obtidos através do método descrito acima.

### 3.2.3.1 Escolha dos casos

No capítulo 2 foi introduzido o conceito de raio de captura, onde ele foi determinado em função da velocidade relativa para sistemas com diferentes razões de massa. Nele foi mostrado que para uma partícula com uma determinada velocidade, existe uma certa distância limite da qual ela pode se aproximar do planeta sem ser capturada. Assim sendo, a variação percentual de energia para este valor de  $d$  (raio de captura) será a máxima variação de energia possível proporcionada pelo encontro com o corpo secundário, já que valores menores de  $d$  resultam em captura, e valores maiores proporcionam menores variações de energia.

A tabela (3.1) mostra essa relação entre a velocidade relativa, o raio de captura e a máxima variação de energia em um sistema com razão de massa  $10^{-7}$ . Ela também trás uma classificação do movimento (retrógrado ou prógrado). O tempo de integração foi  $t = 2$  períodos orbitais do corpo secundário.

**Tabela 3.1** – Máxima variação de energia possível em um sistema com razão de massa  $10^{-7}$

Velocidade relativa ( $V_{ps}$ )	Raio de captura (Raios de Hill)	Varição percentual de energia ( $\Delta E\%$ )	Movimento	Velocidade relativa ( $v_{ps}$ )	Raio de captura (Raios de Hill)	Varição percentual de energia ( $\Delta E\%$ )	Movimento
<b>0,0000</b>	1,16	0,87	retrógrado	<b>0,0055</b>	0,87	0,63	prógrado
<b>0,0005</b>	1,14	0,76	retrógrado	<b>0,0060</b>	0,84	0,78	prógrado
<b>0,0010</b>	1,12	0,57	retrógrado	<b>0,0065</b>	0,80	0,92	prógrado
<b>0,0015</b>	1,09	0,44	retrógrado	<b>0,0070</b>	0,77	1,08	prógrado
<b>0,0020</b>	1,07	0,37	retrógrado	<b>0,0075</b>	0,73	1,22	prógrado
<b>0,0025</b>	1,05	0,24	retrógrado	<b>0,0080</b>	0,70	1,38	prógrado
<b>0,0030</b>	1,03	0,13	retrógrado	<b>0,0085</b>	0,66	1,54	prógrado
<b>0,0035</b>	1,00	0,01	retrógrado	<b>0,0090</b>	0,62	1,71	prógrado
<b>0,0040</b>	0,97	0,19	prógrado	<b>0,0095</b>	0,58	1,85	prógrado
<b>0,0045</b>	0,94	0,34	prógrado	<b>0,0100</b>	0,55	2,00	prógrado
<b>0,0050</b>	0,91	0,47	prógrado				

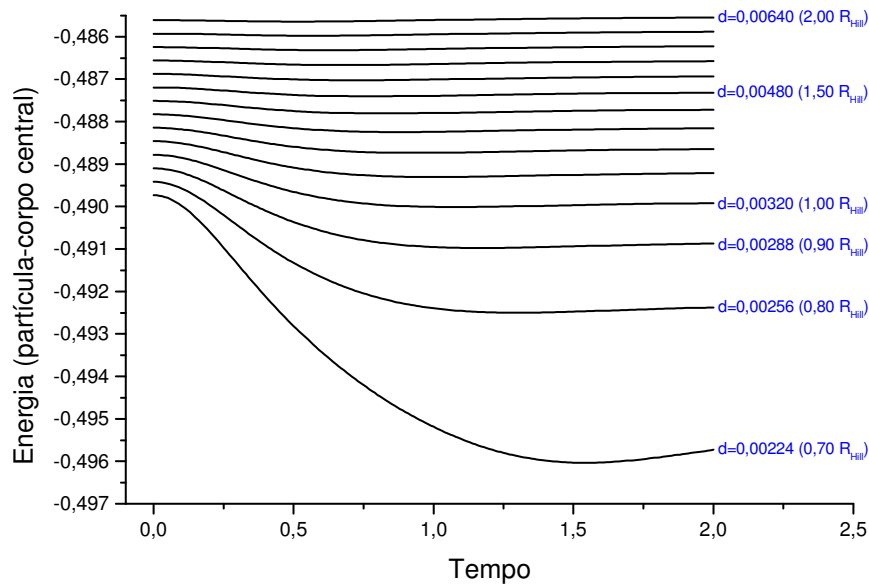
Analisando os dados desta tabela, concluí-se que para velocidades relativas ao corpo secundário ( $V_{ps}$ ) menores ou igual a 0,0050, considerando apenas os casos de movimento prógrado, a variação de energia percentual nunca será maior que 0,5%, e

que portanto, para estes valores o método não pode ser aplicado quando toma-se o critério de  $\Delta E\% = 0,5\%$ . Ele então só será aplicado para  $V_{PS} > 0,0050$ . Da mesma forma, percebe-se que apenas para  $V_{PS} \geq 0,0070$  a variação de 1% é possível, e portanto, que somente a partir desta velocidade o método poderá ser aplicado (tomando o critério de  $\Delta E\% = 1,0\%$ ). Aqui foi apresentada a análise para a razão de massa  $10^{-7}$ , mas o mesmo tipo de análise foi feito para outras razões de massas antes do método ser aplicado, e encontram-se nas tabelas do Apêndice D.

### 3.2.3.2 Obtenção dos dados

No exemplo apresentado a seguir, foi considerada uma partícula com velocidade relativa ao corpo secundário  $V_{PS} = 0,0080$ , em um sistema com razão de massa  $10^{-7}$ . O primeiro valor para o parâmetro de aproximação considerado é o primeiro valor que não resulta na captura da partícula com esta velocidade (ver tabela 3.1). A partir daí, o valor de  $d$  é aumentado. Para cada um destes valores de  $d$ , o sistema foi integrado no tempo ( $t = 2$  períodos orbitais do corpo secundário).

O gráfico da figura (3.1) mostra a variação de energia que a partícula sofreu para os diferentes valores de  $d$  assumidos. Percebe-se que, para os valores menores de  $d$ , a variação de energia é maior. Conforme  $d$  vai aumentando, a variação vai se tornando cada vez menor, até que se torna praticamente constante, indicando que a partícula deixou a esfera de influência do corpo secundário.



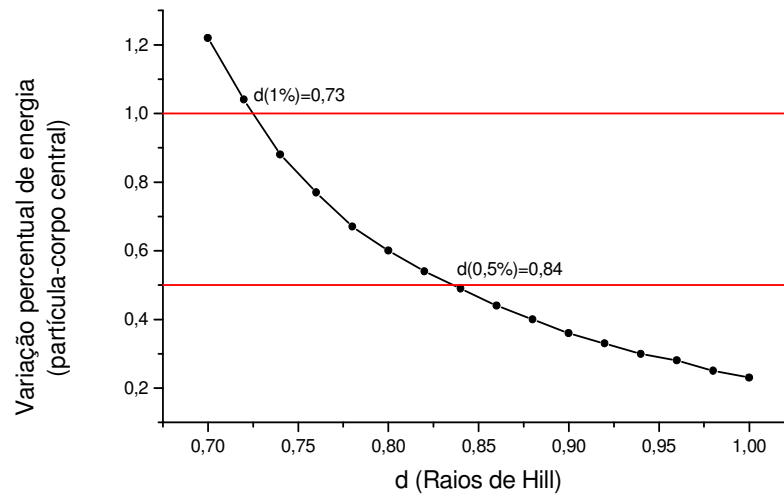
**Figura 3.1** – Variação da energia da partícula em relação ao corpo central em função do tempo. Feito para diferentes parâmetros de aproximação  $d$ . Valores menores para  $d$  resultam em captura.

O próximo passo, de acordo com o método adotado, é calcular a variação percentual de energia para cada um destes valores de  $d$ , o que é apresentado na tabela 3.2.

**Tabela 3.2** – Variação percentual de energia para diferentes valores do parâmetro de aproximação  $d$  ( $0,70 \leq d \leq 1,00$ ) raios de Hill. Em azul estão destacados os valores que aparecem no gráfico da figura 3.1 neste intervalo

<b>d</b>	<b>d (<math>R_{Hill}</math>)</b>	<b><math>\Delta E(\%)</math></b>	<b>d</b>	<b>d (<math>R_{Hill}</math>)</b>	<b><math>\Delta E(\%)</math></b>
<b>0,00224</b>	0,70	1,38	<b>0,00275</b>	0,86	0,44
<b>0,00230</b>	0,72	1,04	<b>0,00282</b>	0,88	0,40
<b>0,00237</b>	0,74	0,88	<b>0,00288</b>	0,90	0,36
<b>0,00243</b>	0,76	0,77	<b>0,00294</b>	0,92	0,33
<b>0,00250</b>	0,78	0,67	<b>0,00301</b>	0,94	0,30
<b>0,00256</b>	0,80	0,60	<b>0,00307</b>	0,96	0,28
<b>0,00262</b>	0,82	0,54	<b>0,00314</b>	0,98	0,25
<b>0,00269</b>	0,84	0,49	<b>0,00320</b>	1,00	0,23

Com os dados da tabela 3.2 obtém-se um gráfico como o mostrado na figura 3.2.



**Figura 3.2** – Variação percentual da energia (partícula-corpo central) em função do parâmetro de aproximação  $d$  para uma partícula com  $V_{PS}=0,0080$ . As linhas vermelhas indicam quando a variação é de 1% e 0,5%.

A partir deste gráfico, é possível obter os valores de  $d$  para os quais a variação de energia foram as anteriormente adotadas para delimitar as regiões de influência (1% e 0,5%).

Deste exemplo, chega-se à conclusão de que em um sistema com razão de massa  $10^{-7}$ , uma partícula com velocidade relativa ao corpo secundário -  $V_{PS}=0,0080$ , será influenciada se passar a uma distância  $d=0,73 R_{Hill}$  (considerando o critério de  $\Delta E\% = 1\%$ ), ou se  $d=0,84 R_{Hill}$  (considerando o critério de  $\Delta E\% = 0,5\%$ ). Estes valores de  $d$  passam a ser considerado o raio da esfera de influência dentro dos critérios para a variação percentual de energia adotado.

O passo seguinte então é aplicar este método a um grande número de condições iniciais (razões de massa, velocidades e  $d$ ), de modo que o objetivo, que é de delimitar a região de influência em função da velocidade, seja atingido.

### 3.3 RESULTADOS

O método foi aplicado seguindo os seguintes critérios:

- Foram considerados apenas os casos de movimento prógrados.



- O parâmetro de aproximação sempre será maior que 0,5 raio de Hill.

A seguir são apresentados os resultados para três razões de massa ( $10^{-8}$ ,  $10^{-7}$ ,  $10^{-6}$ ), onde se obteve a função matemática que permite o cálculo do raio da esfera de influência em função da velocidade relativa.

### 3.3.1 Sistema com razão de massa $10^{-8}$ .

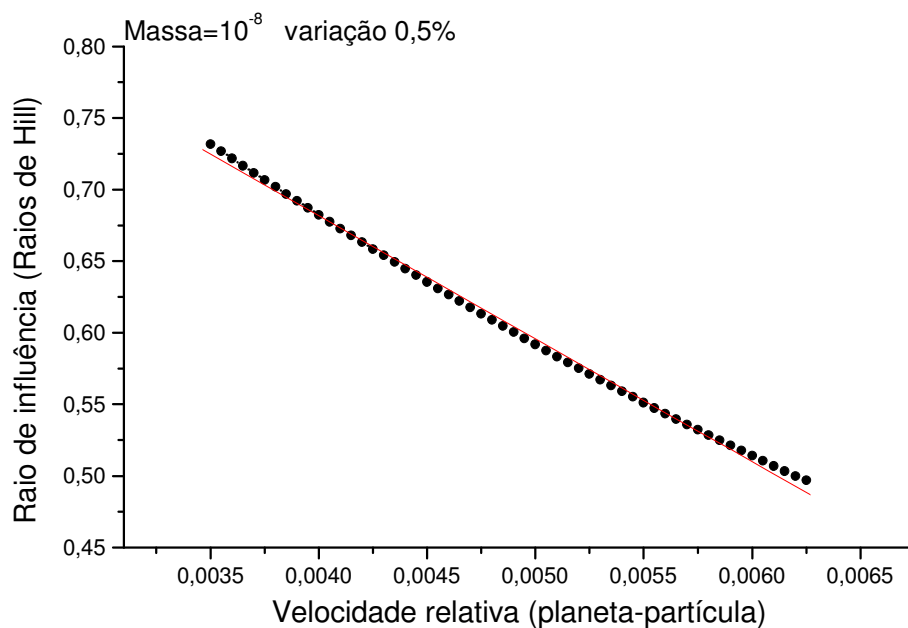
- Critério  $\Delta E\% = 0,5\%$

O gráfico da figura 3.3 mostra como o raio da esfera de influência varia com a velocidade da partícula em relação ao corpo secundário.

Cada ponto deste gráfico é obtido da forma exemplificada no item 3.2.3.2

Um ajuste linear nesta curva (linha em vermelho) fornece o raio da esfera de influência dado em função da velocidade relativa, e é dado por:

$$R(V_{PS}) = 0,01193 - 0,01167(V_{PS}) \quad (3.1)$$



**Figura 3.3** – Gráfico do raio da esfera de influência pela velocidade relativa (partícula-corpo secundário), considerando o critério  $\Delta E\% = 0,5\%$

- Critério  $\Delta E\% = 1,0\%$

A tabela D.2 no Apêndice D, é similar à tabela 3.1. Nela percebe-se que em um sistema com razão de massa  $10^{-8}$ , variações iguais ou maiores que 1% só serão possíveis quando  $d \leq 0,46$  raios de Hill.

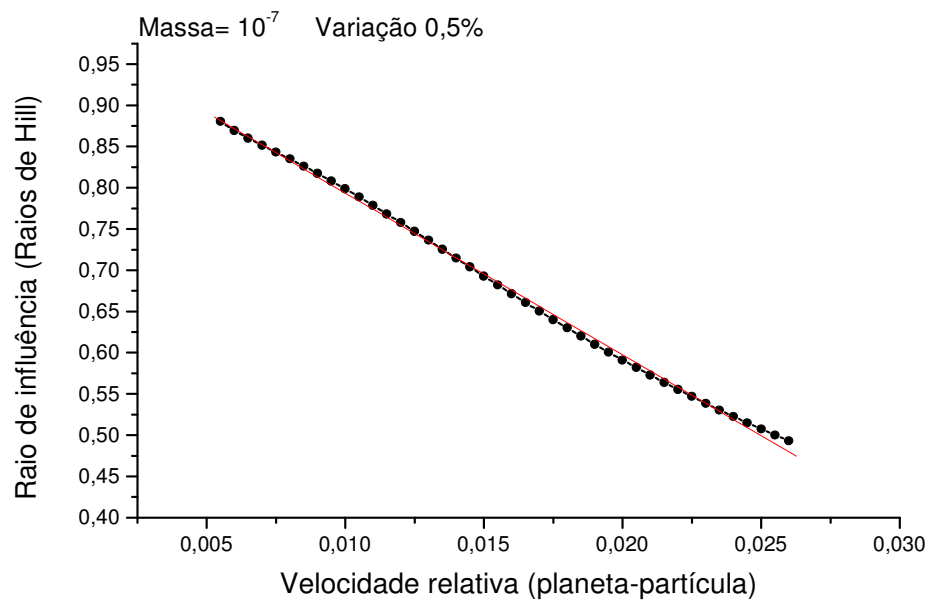
De acordo com o método adotado,  $d$  deve se sempre maior que 0,5 raio de Hill. Por essa razão não foi possível obter a função para o cálculo do raio da esfera de influência em função da velocidade relativa, usando como critério a variação de energia percentual igual a 1%, para a razão de massa  $10^{-8}$ .

As tabelas do Apêndice D mostram que o mesmo acontece para as razões de massa menores (de  $10^{-9}$  a  $10^{-12}$ ), não sendo portanto possível aplicar o método mesmo quando considera-se o critério de  $\Delta E\% = 0,5\%$ .

### 3.3.2 Sistema com razão de massa $10^{-7}$ .

- Critério  $\Delta E\% = 0,5\%$

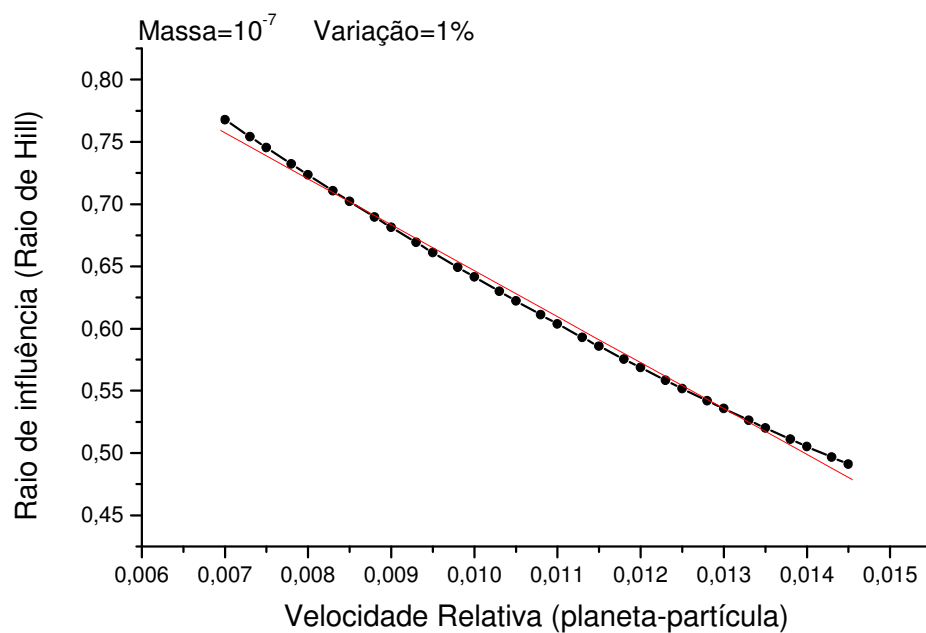
O gráfico da figura 3.4 foi feito considerando um sistema com razão de massa  $10^{-7}$  e o critério da variação percentual de energia igual a 0,5%.



**Figura 3.4** – Gráfico do raio da esfera de influência pela velocidade relativa (partícula-corpo secundário), considerando o critério  $\Delta E\% = 0,5\%$

- Critério  $\Delta E\% = 1,0\%$

O gráfico da figura 3.5 foi feito considerando um sistema com razão de massa  $10^{-7}$  e o critério da variação percentual de energia igual a 1,0%.



**Figura 3.5** – Gráfico do raio da esfera de influência pela velocidade relativa (partícula-corpo secundário), considerando o critério  $\Delta E\% = 1,0\%$

Através de um ajuste linear nestas curvas (linhas em vermelho), obtêm-se o raio da esfera dado em função da velocidade relativa ao corpo secundário, para um sistema com razão de massa  $10^{-7}$ , sendo dado em uma função da forma:

$$R(V_{PS}) = A + B(V_{PS}) \quad (3.2)$$

com os respectivos coeficientes A e B dados na tabela 3.2.

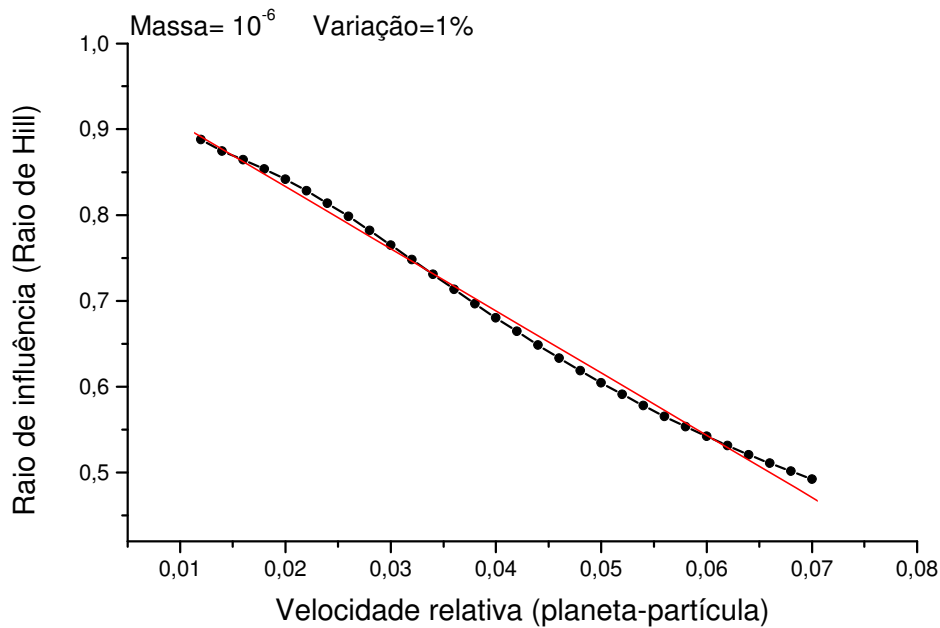
Tabela 3.3 – Coeficientes A e B da equação (3.2)

Critério	A	B
$\Delta E\% = 0,5\%$	0,9894	-19,6013
$\Delta E\% = 1,0\%$	1,0158	-36,9246

### 3.3.3 Sistema com razão de massa $10^{-6}$ .

- Critério  $\Delta E\% = 1,0\%$

O gráfico da figura 3.6 foi feito considerando um sistema com razão de massa  $10^{-6}$  e o critério da variação percentual de energia igual a 1,0%.



**Figura 3.6** – Gráfico do raio da esfera de influência pela velocidade relativa (partícula-corpo secundário), considerando o critério  $\Delta E\% = 1,0\%$

Através de um ajuste linear nesta curva (linha em vermelho), obtêm-se o raio da esfera dado em função da velocidade relativa ao corpo secundário, dado por:

$$R(V_{PS}) = 0,9781 - 7,2441(V_{PS}) \quad (3.3)$$

- Critério  $\Delta E\% = 0,5\%$

Para que a variação seja de  $0,5\%$  a partícula tem que estar mais distante do corpo secundário do que para variar  $1\%$ .

Percebeu-se que para esta razão de massa, a partir de certas distâncias começam a aparecer alguns efeitos que comprometem a aplicação do método.

O mesmo problema é encontrado para razões de massas maiores (de  $10^{-5}$  a  $10^{-1}$ ).

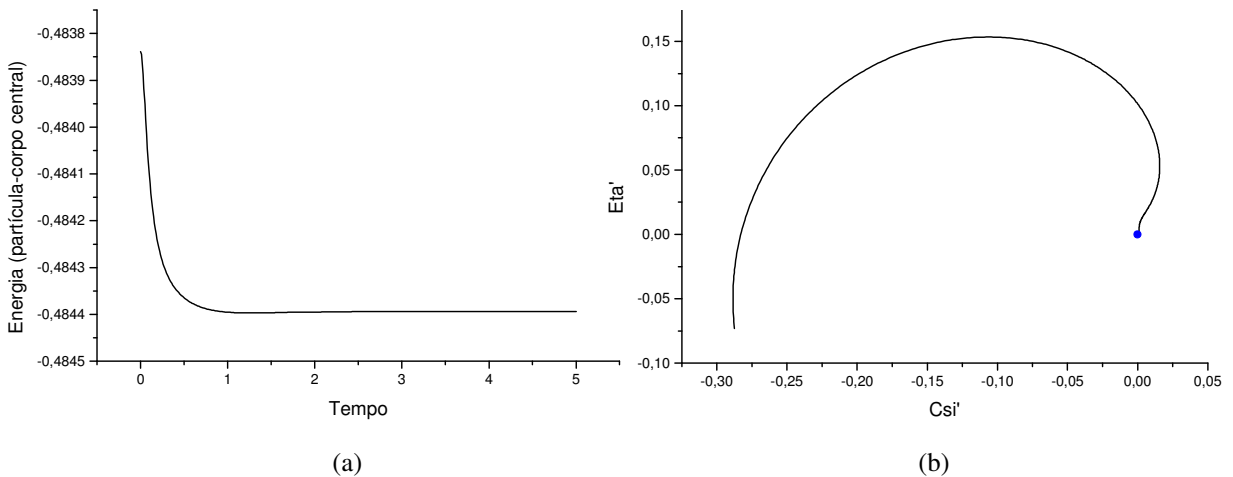
O problema encontrado, bem como as discussões a seu respeito são apresentadas a seguir.

### 3.3.4 Considerações para sistemas com razões de massa maiores que $10^{-6}$ .

Como descrito no item 3.2, o método adotado consiste no monitoramento da energia do problema de dois corpos (partícula-corpo central).

Neste estudo, o que determina se a partícula passou pela esfera de influência do corpo secundário é a variação de energia, isto é, é considerado que a partícula passou pela esfera de influência se a variação de energia proporcionada pelo encontro for uma porcentagem pré-estabelecida. Para que o cálculo dessa porcentagem seja válido, é essencial que a energia após o encontro permaneça constante, o que pode ser observado no gráfico da figura 3.7.

Neste gráfico, a velocidade da partícula em relação ao corpo secundário é  $V_{PS} = 0,015$ , o parâmetro de aproximação  $d = 0,00105$  (0,70 raios de Hill), e a razão de massa do sistema é  $10^{-8}$ , e o tempo de integração é  $t = 5$  períodos orbitais do corpo secundário.



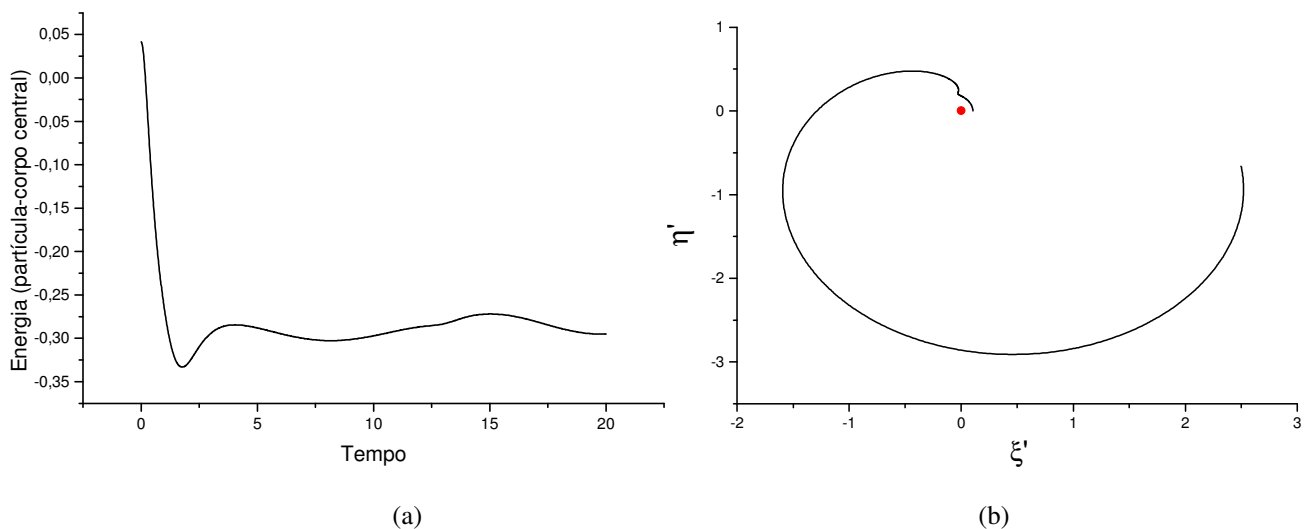
**Figura 3.7-** (a) Energia do problema de dois corpos (partícula-corpo central). (b) Trajetória da partícula no sistema planetocêntrico. O ponto azul representa a localização do corpo secundário neste sistema. Feitos para  $V_{PS} = 0,015$ ,  $d = 0,00105$  (0,70 raios de Hill) e para a razão de massa  $10^{-8}$ .

Observa-se que inicialmente a energia do problema de dois corpos está variando, indicando a presença do corpo secundário (isto é, a partícula está dentro da esfera de influência deste corpo), mas que após um determinado tempo a energia torna-se praticamente constante, indicando que o corpo secundário não exerce mais

influência significativa sobre a partícula, e têm-se então essencialmente um problema de dois corpos (partícula-corpo central).

Os resultados apresentados nos itens (3.3.1), (3.3.2) e (3.3.3) obedecem este comportamento, no entanto, para razões de massa maiores que  $10^{-6}$  foi percebido que não é possível atingir esta condição.

O gráfico da figura 3.8 ajuda a entender o problema. Ele foi feito para  $V_{PS}=0,370$ ,  $d=0,104$  (0,70 raios de Hill), para a razão de massa  $10^{-2}$ , e  $t=20$  períodos orbitais do corpo secundário. O tempo de integração foi aumentado para mostrar que de fato a energia do problema de dois corpos não se torna constante.



**Figura 3.8-** (a) Energia do problema de dois corpos (partícula-corpo central). (b) Trajetória da partícula no sistema planetocêntrico. O ponto azul representa a localização do corpo secundário. Feito para a velocidade  $V_{PS}= 0,370$ ,  $d=0,104$  (0,70 raios de Hill) e para a razão de massa  $10^{-2}$ .

Percebe-se que a energia do problema de dois corpos permanece variando ao longo do período de integração, mesmo quando a partícula está bastante distante do corpo secundário, como pode ser visto no gráfico (b) da figura 3.8 que mostra a trajetória da partícula no sistema planetocêntrico.

Tal comportamento pode ser justificado se for lembrado que apesar de no trabalho ser feito um monitoramento da energia do problema de dois corpos, na verdade têm-se um problema circular restrito de três corpos.

No problema de dois corpos é feita a aproximação de que não existem forças externas atuantes, e sim, somente a força gravitacional de um corpo sobre o outro.

Já no problema circular restrito de três corpos, composto por três corpos de massas  $M_1$  (corpo central),  $M_2$  (corpo secundário) e  $M_3$  (partícula), esta aproximação só será válida se  $M_1 \gg M_2$  (sendo então considerado um problema de dois corpos partícula-corpo central). Nesta condição, a energia do problema de dois corpos (partícula-corpo central) será constante, só sofrendo variação quando o corpo secundário estiver perturbando o sistema, o que só irá ocorrer se a partícula estiver próxima dele.

No entanto, conforme a razão de massa cresce, também aumenta a perturbação do corpo secundário, de modo que ele passa a perturbar tanto o movimento da partícula quanto o movimento do corpo central. Assim sendo, a aproximação do problema de dois corpos (partícula- corpo central), não pode ser considerada, mesmo quando  $M_3$  está distante de  $M_2$ , de modo que a energia da partícula em relação ao corpo central permanece variando, mesmo quando a partícula está distante do corpo secundário. Isto leva à conclusão de que a partir de um certo valor de razão de massa o problema deverá ser sempre considerado um problema de três corpos.

Como discutido no Apêndice B, o conceito de esfera de influência consiste em considerar que a influência gravitacional de um corpo é dominante em relação à atração gravitacional de outros corpos, e que enquanto há esse domínio, têm-se essencialmente um problema de dois corpos entre o corpo dominante e o corpo que sofre a influência.

No entanto, como dito anteriormente, constatou-se que a partir de um certo valor de razão de massa não é possível atingir essa aproximação do problema ser puramente de dois corpos, e que o problema deve ser considerado um problema de três corpos. Sendo assim, o conceito de esfera de influência deixa de existir.

Por esta razão, neste trabalho, o método foi aplicado somente para razões de massa menores que  $10^{-5}$ .



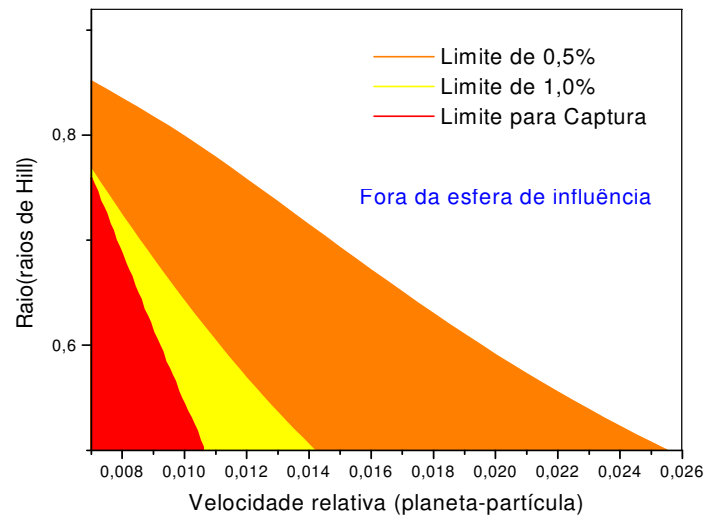
### 3.4 REGIÕES DE CAPTURA E DE INFLUÊNCIA.

No capítulo 2, o raio de captura foi definido como sendo uma espécie de fronteira a partir da qual uma partícula com uma dada velocidade relativa está capturada ou não. Também foram obtidas as funções matemáticas para o cálculo destes raios em função da velocidade relativa (partícula-corpo secundário).

Neste capítulo a mesma idéia foi aplicada com o intuito de obter esta delimitação para regiões de influência. Isto foi feito para três razões de massa ( $10^{-6}$ ,  $10^{-7}$  e  $10^{-8}$ ) seguindo dois critérios, onde foi considerado que a partícula foi influenciada pelo corpo secundário se ela sofresse uma variação de energia de 1% em um primeiro critério, e de 0,5% em outro. Para as demais razões de massa o método não pode ser aplicado, como justificado nos itens (3.3.1) e (3.3.4).

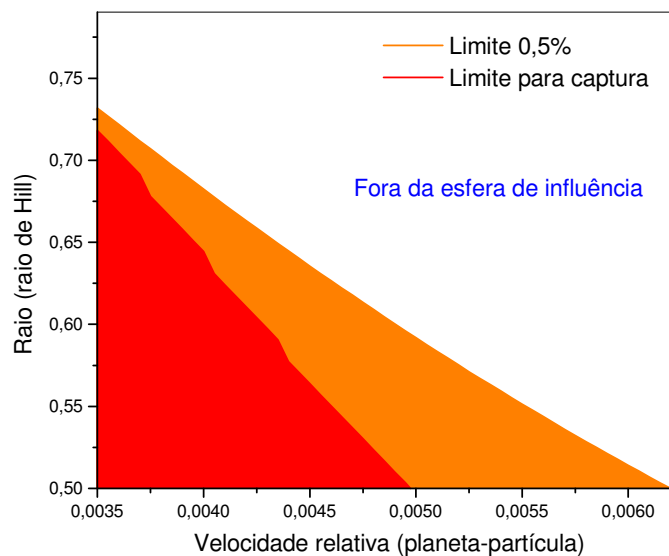
Se os resultados obtidos nestes dois capítulos forem unificados, torna-se possível o mapeamento de regiões de captura e de influência (de acordo com os critérios adotados) dados em função da velocidade relativa. Isto foi feito, e o resultado desta união é mostrado nas figuras (3.9), (3.10) e (3.11).

A figura 3.9 mostra a delimitação das regiões de captura e de influência para um sistema com razão de massa  $10^{-7}$ . Os limites destas regiões são as curvas mostradas nas figuras 3.4 e 3.5 e a curva para  $10^{-7}$  da figura 2.10 (para captura), e podem ser aproximadamente calculados através das equações (3.2) e (2.17) com o auxílio das tabelas 3.2 e 2.1.



**Figura 3.9** – Região de influência e de captura em função da velocidade relativa para um sistema com razão de massa  $10^{-7}$ .

O mesmo procedimento pode ser aplicado às razões de massa  $10^{-6}$  e  $10^{-8}$ . Para  $10^{-8}$  tem-se:

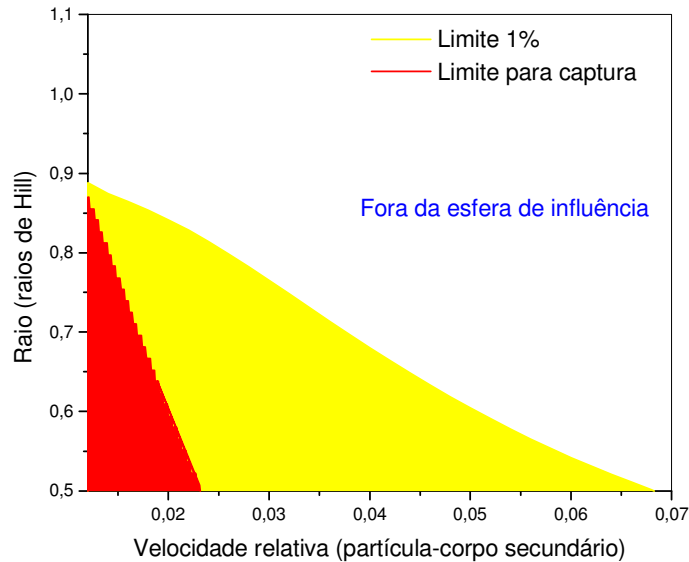


**Figura 3.10** – Região de influência e de captura em função da velocidade relativa para um sistema com razão de massa  $10^{-8}$ .

Os limites destas regiões são, a curva mostrada na figura 3.3, e a curva para  $10^{-8}$  da figura 2.10 (para captura), e podem ser aproximadamente calculados através das equação (3.1), e da equação (2.17) com o auxílio da tabela 2.1. Para esta razão de massa, usando o critério  $\Delta E\% = 1,0\%$ , o limite de influência não pode ser obtido, como

explicado no item (3.3.1).

Para a razão de massa  $10^{-6}$ :



**Figura 3.11** – Região de influência e de captura em função da velocidade relativa para um sistema com razão de massa  $10^{-6}$ .

Sendo que para esta razão de massa, usando o critério  $\Delta E\% = 0,5\%$ , o limite de influência não pode ser obtido, como explicado no item (3.3.4). Novamente, os limites destas regiões são, a curva mostrada na figura 3.6, e a curva para  $10^{-6}$  da figura 2.9 (para captura), e podem ser aproximadamente calculados através da equação (3.3) e da equação (2.17) com o auxílio da tabela 2.1

### 3.5 COMENTÁRIOS

O objetivo do trabalho apresentado neste capítulo era a obtenção de uma função matemática para o cálculo do raio de uma esfera de influência dado em função da velocidade relativa (partícula-corpo secundário) e da razão de massa do sistema.

Para que esse objetivo fosse atingido, foi adotado como método o monitoramento da energia do problema de dois corpos. Com o desenvolvimento do trabalho, este critério se mostrou bastante complicado, tendo sido necessária a adoção

de duas diferentes abordagens para resolver o problema.

A primeira abordagem (apresentada no Apêndice C) não se adequou ao objetivo proposto e por isso foi abandonada, e uma nova abordagem teve de ser adotada (item 3.2.3).

Esta nova abordagem funcionou bem para determinadas razões de massa ( $10^{-8}$ ,  $10^{-7}$ ,  $10^{-6}$ ), tendo o objetivo sido atingido para estes casos.

Para razões de massa menores, a partícula teria de se aproximar demais do corpo secundário (indo além de 0,5 raio de Hill, valor estipulado como limite de aproximação entre estes dois corpos), e portanto, o método não foi aplicado para estes casos. Para razões de massa maiores surgiram alguns efeitos que inviabilizaram sua aplicação, e portanto, o resultado esperado não pode ser obtido.

Os resultados dos capítulos 2 e 3 foram unidos e resultaram em uma delimitação de regiões de influência e captura para sistemas com razões de massa  $10^{-8}$ ,  $10^{-7}$ ,  $10^{-6}$  dada em função da velocidade relativa.

## **CAPÍTULO 4 A MANOBRA ASSISTIDA POR GRAVIDADE E O CASO DOS ASTERÓIDES VESTA E MAGNYA**

### **4.1 INTRODUÇÃO**

Este trabalho envolve fundamentalmente o estudo a respeito de mecanismos que envolvem encontros próximos entre corpos celestes.

Com este objetivo, nos capítulos 2 e 3 foram feitos estudos numéricos mais gerais, que tratam da captura gravitacional temporária e do conceito de esfera de influência.

Neste capítulo é apresentado um estudo de um problema mais específico, onde o conceito da manobra assistida por gravidade (ou manobra de swing-by) foi aplicado.

Foi verificado que o asteroide Magnya (1459) tem características físico-químicas similares aos corpos da família do asteroide Vesta (4) (Lázzaro et al. 2000), porém, ocupando uma localização orbital (semi-eixo maior, excentricidade, inclinação) muito distante em comparação com os outros membros desta família.

Neste trabalho é assumido que Magnya (1459) originou-se de Vesta (4), e os efeitos de uma possível aproximação do asteroide Magnya (1459) com o asteroide Vesta (4) é levado em consideração para justificar a sua distante localização orbital em relação aos demais membros desta família.

A metodologia abordada envolveu uma abordagem numérica considerando a técnica da manobra assistida por gravidade (manobra de swing-by), que consiste no fenômeno da mudança da órbita de um corpo ocasionada por sua passagem por um outro corpo mais massivo (encontro próximo).

Neste capítulo é feita uma introdução à técnica da manobra assistida por gravidade. Depois o caso dos asteroides Vesta (4) e Magnya (1459) é discutido, e então o estudo proposto é apresentado.

## 4.2 A MANOBRA ASSISTIDA POR GRAVIDADE (MANOBRA DE SWING-BY).

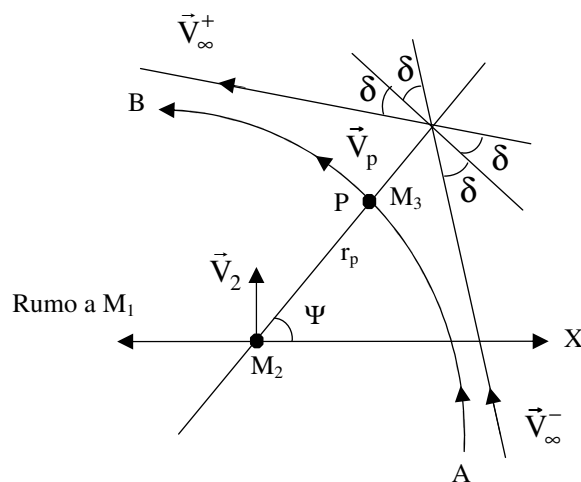
A seguir, será mostrada toda a parte matemática, bem como os parâmetros envolvidos na manobra de swing-by. Será adotado o mesmo procedimento de Prado (2001).

### 4.2.1 Descrição Matemática do Swing-by

É considerado um sistema formado por três corpos, sendo eles:  $M_1$ , um corpo massivo no centro de um sistema cartesiano;  $M_2$ , um corpo menor em uma órbita Kepleriana em torno de  $M_1$ ; e  $M_3$ , um corpo com massa infinitesimal ou uma partícula, que está viajando em uma órbita ao redor de  $M_1$ .

Durante sua evolução orbital  $M_3$  realiza um encontro com  $M_2$ , alterando assim a sua órbita inicial. Esse fenômeno da mudança de órbita proporcionado pela passagem por um corpo massivo, é chamado de manobra de swing-by.

A figura 4.1 ilustra essa configuração e algumas das variáveis envolvidas na manobra:



**Figura 4.1** - Descrição geométrica da técnica swing-by e algumas de suas variáveis.  
Prado (2001)

Onde:

$\vec{V}_2$  - velocidade do corpo  $M_2$  em relação ao corpo  $M_1$ .

$\vec{V}_\infty^-, \vec{V}_\infty^+$  - vetores velocidade do corpo  $M_3$  relativa a  $M_2$ , antes e depois do encontro, respectivamente

$\vec{V}_i, \vec{V}_0$  - vetores velocidade do corpo  $M_3$  relativa a  $M_1$ , antes e depois do encontro, respectivamente.

$\delta$  - metade do ângulo de curvatura (o ângulo entre  $\vec{V}_\infty^-$  e  $\vec{V}_\infty^+$ )

$r_p$  = a distância de máxima aproximação durante o encontro entre  $M_2$  e  $M_3$ ;

$\Psi$  = o ângulo entre a linha do periapse e a linha  $M_1$  e  $M_2$ .

O método aproximado conhecido na literatura como “patched conics” (método da aproximação por cônicas conjugadas) tem então as seguintes etapas para uma manobra de swing-by completa:

**i)** Na primeira etapa, o efeito gravitacional de  $M_2$  é desconsiderado, e o movimento de  $M_3$  em torno de  $M_1$  é tomado como sendo uma órbita Kepleriana;

**ii)** Na segunda etapa supõe-se que  $M_3$  entra na esfera de influência de  $M_2$ . A velocidade  $\vec{V}_\infty^-$  é :

$$\vec{V}_\infty^- = \vec{V}_i - \vec{V}_2 \quad (4.1)$$

A velocidade  $\vec{V}_\infty^+$ , que é a velocidade de  $M_3$  no instante que ele cruza a esfera de influência de  $M_2$  e a abandona para retornar a uma órbita em torno de  $M_1$ , é dada por:

$$\vec{V}_\infty^+ = \vec{V}_0 - \vec{V}_2 \quad (4.2)$$

**iii)** O swing-by está completo quando o corpo  $M_3$  atinge uma nova órbita ao redor de  $M_1$ .

Esta nova órbita apresenta diferenças em relação à sua órbita anterior.

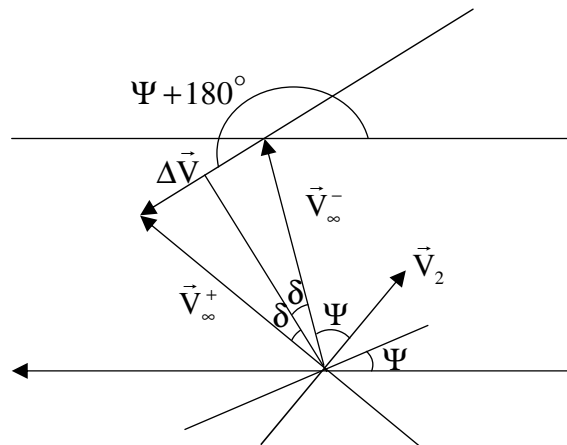
A primeira delas é a variação de velocidade proporcionada (que representa as diferenças entre as velocidades antes e depois do swing-by), dada por:

$$\Delta\vec{V} = \vec{V}_0 - \vec{V}_i \quad (4.3)$$

A partir de um diagrama de vetores de velocidades envolvidas no swing-by, é possível demonstrar que tal variação é dada por (Broucke, 1988):

$$\Delta V = |\Delta \vec{V}| = 2|\vec{V}_\infty| \sin(\delta) = 2V_\infty \sin(\delta) \quad (4.4)$$

e que  $\Delta \vec{V}$  faz um ângulo  $\Psi + 180^\circ$  com a linha que une  $M_1$  e  $M_2$  (figura 4.2)



**Figura 4.2** - Vetores velocidade envolvidos no swing-by.

As componentes para o incremento de velocidades podem ser obtidas a partir dessa geometria; são elas:

$$\Delta \dot{X} = -2V_\infty \sin(\delta) \cos(\Psi) \quad (4.5)$$

$$\Delta \dot{Y} = -2V_\infty \sin(\delta) \sin(\Psi) \quad (4.6)$$

A segunda quantidade a ser obtida é a variação do momento angular  $C$ . Partindo de sua definição, é possível obter a expressão  $C = X\dot{Y} - Y\dot{X}$ . Combinando esse resultado com a expressão de  $\Delta \dot{Y}$  têm-se:

$$\omega \Delta C = -2V_2 V_\infty \sin(\delta) \sin(\Psi) \quad (4.7)$$

A terceira e última quantidade derivada é a variação de energia, o que pode ser feito subtraindo-se a energia após e antes do encontro, sendo:



$$E_+ = \frac{1}{2} \left[ (\dot{X} + \Delta\dot{X})^2 - (\dot{Y} + \Delta\dot{Y})^2 \right] \quad (4.8)$$

$$E_- = \frac{1}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2)$$

Realizando a subtração, tem-se:

$$\Delta E = E_+ - E_- = 2V_\infty \sin(\delta) [V_\infty \sin(\delta) - (\dot{X} \cos(\Psi) - \dot{Y} \sin(\Psi))] \quad (4.9)$$

Simplificando a equação acima, obtém-se a função para o cálculo da variação final de energia, que é dada por (Broucke, 1988):

$$\Delta E = -2V_2 V_\infty \sin(\delta) \sin(\Psi) \quad (4.10)$$

Observando a equação para a variação da energia, chega-se a algumas conclusões importantes. Os parâmetros  $|\vec{V}_\infty|$  e  $|\vec{V}_2|$  são magnitudes de vetores e portanto são quantidades positivas. Da mesma forma,  $\sin(\delta)$  também é positivo, isto porque  $0^\circ < \delta < 90^\circ$ . Assim, o sinal de  $\Delta E$  só será afetado por  $\sin(\Psi)$ .

Então, para valores de  $\Psi$  entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$ , a variação de energia é negativa (decrece em energia) e, para valores de  $\Psi$  entre  $180^\circ$  e  $360^\circ$ , a variação de energia é positiva (aumenta em energia). Sendo assim:

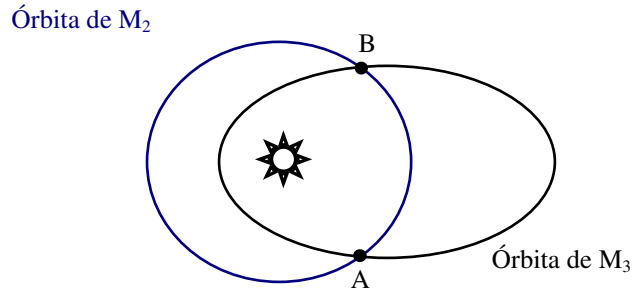
- Para  $0^\circ < \Psi < 180^\circ$  (o swing-by ocorre na frente de  $M_2$ ), há um decréscimo na energia de  $M_3$  com uma perda máxima quando  $\Psi$  for igual a  $90^\circ$  ( $\Delta\vec{V}$  oposto a  $\vec{V}_2$ ).
- Para  $180^\circ < \Psi < 360^\circ$  (o swing-by ocorre atrás de  $M_2$ ), há um aumento na energia de  $M_3$ , com um ganho máximo quando  $\Psi$  for igual a  $270^\circ$  ( $\Delta\vec{V}$  na direção de  $\vec{V}_2$ ).

#### 4.2.2 Mudança de órbita devido ao swing-by.

Como dito anteriormente, o swing-by é uma manobra que acontece quando um corpo  $M_3$  (veículo espacial, asteróide, etc...) passa próximo a um corpo de massa maior

$M_2$  (planeta, por exemplo), o qual orbita o corpo principal  $M_1$  (ex: Sol), e tem assim sua trajetória alterada em relação a este corpo.

O objetivo aqui será o de calcular a nova trajetória, a partir da órbita anterior e dos parâmetros que descrevem o swing-by. A figura 4.3 mostra as órbitas dos corpos envolvidos, assim como os possíveis pontos de encontro.



**Figura 4.3** - Órbitas envolvidas na manobra e os possíveis pontos de encontro A e B.

Será suposto que o encontro ocorre no ponto A, que a distância  $r_p$  pode ser controlada, mas que os parâmetros  $\Psi$  e  $|\vec{V}_\infty|$  são obtidos a partir da órbita inicial e da órbita do planeta (tomada como circular).

Para estudar a mudança de órbita devido ao swing-by é necessário que se conheça os parâmetros que descrevem a manobra. Para isso, deve-se seguir os passos mostrados a seguir.

#### 4.2.2.1 Cálculo da magnitude da velocidade de $M_3$ com relação a $M_1$ ( $V_i$ ).

Nesse instante, a distância entre  $M_3$  e  $M_1$  é aproximadamente a distância entre o  $M_1$  e  $M_2$  (tomada como constante). Assim, desconsiderando o efeito gravitacional de  $M_2$ , têm-se:

$$|\vec{V}_i| = \sqrt{\mu_s \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} \quad (4.11)$$

onde  $r$  é a distância entre  $M_1$  e  $M_2$ ,  $a$  é o semi-eixo maior,  $\mu_s$  é a massa específica de  $M_2$

#### 4.2.2.2 Cálculo da anomalia verdadeira de $M_3$ no instante do encontro.

Para calcular a anomalia verdadeira de  $M_3$ , utiliza-se a expressão:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

então:

$$\cos\theta = \frac{1}{e} \left( \frac{a(1-e^2)}{r} - 1 \right) \quad (4.12)$$

$r$  é a distância entre  $M_1$  e  $M_2$ ,  $e$  é a excentricidade e  $a$  é o semi-eixo maior.

Essa expressão fornece duas possíveis soluções (valor positivo e negativo), isso por que o encontro pode acontecer tanto no ponto A quanto no ponto B da figura 4.3.

#### 4.2.2.3 Cálculo do ângulo entre a velocidade inercial de $M_3$ antes do encontro com $M_2$ e a velocidade $M_2(\gamma)$ .

Como foi suposto que a órbita de  $M_2$  é circular, esse ângulo corresponde ao chamado *flight path angle*, que é dado por:

$$\tan\gamma = \frac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta} \quad (4.13)$$

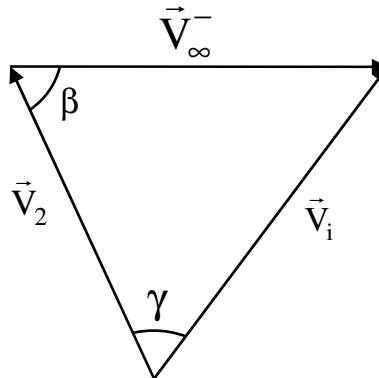
Esse ângulo  $\gamma$  pode assumir dois valores defasados de  $180^\circ$ , isto por que a órbita pode ser tanto horária quanto anti-horária.

#### 4.2.2.4 Cálculo da magnitude da velocidade de $M_3$ em relação a $M_2$ ( $V_\infty^-$ )

A figura 4.4 ajuda a entender a soma vetorial envolvida. Conhecendo-se a velocidade de  $M_2$  ( $V_2$ ) e a magnitude de  $|\vec{V}_i^-|$ , pode-se aplicar a lei dos cossenos para obter a grandeza procurada.

Assim :

$$|\vec{V}_\infty^-| = \sqrt{V_i^2 + V_2^2 - 2V_i V_2 \cos \gamma} \quad (4.14)$$



**Figura 4.4** - Soma vetorial envolvida na manobra de swing-by

#### 4.2.2.5 Cálculo do ângulo entre a velocidade inercial de $M_3$ e a velocidade de $M_2$ ( $\beta$ )

Aplicando a lei dos cossenos com os lados  $V_2$  e  $V_\infty^-$ , a partir da figura 4.4, o ângulo procurado é obtido.

$$V_i^2 = V_2^2 + V_\infty^{-2} - 2V_2 V_\infty^- \cos \beta$$

então:

$$\cos \beta = -\frac{V_i^2 - V_2^2 - V_\infty^{-2}}{2V_2 V_\infty^-} \quad (4.15)$$

Existem duas possibilidades para o sinal de  $\beta$ . Essas possibilidades estão relacionadas com a posição relativa entre  $\vec{V}_2$  e  $\vec{V}_i$  (encontro ocorrido no ponto A ou B da figura 4.3).

#### 4.2.2.6 Cálculo do ângulo de deflexão ( $\delta$ )

Esse valor representa metade da rotação do vetor velocidade devido ao swing-by e isso faz com que ele esteja limitado ao primeiro quadrante (a máxima rotação é de

$180^\circ$ ) e não será necessária a análise dos quadrantes para esse valor. Porém, essa rotação pode ser horária ou anti-horária. O ângulo de deflexão é dado por:

$$\text{sen}(\delta) = \frac{1}{1 + \frac{r_p V_\infty^2}{\mu_2}} \quad (4.16)$$

#### 4.2.2.7 Cálculo do ângulo de aproximação ( $\Psi$ )

O ângulo de aproximação é o ângulo entre os vetores  $\vec{V}_2$  e  $\vec{V}_p$ , no caso de uma rotação anti-horária, e entre o vetor  $\vec{V}_2$  e o vetor  $-\vec{V}_p$ , no caso de uma rotação horária (onde  $\vec{V}_p$  é a velocidade no perigeu, e a rotação é sempre medida no sentido anti-horário a partir de  $\vec{V}_2$ ).

Os possíveis valores para o ângulo de aproximação são  $\Psi_1 = 180^\circ + \beta + \delta$  e  $\Psi_2 = 360^\circ + \beta - \delta$ .

#### 4.2.2.8 Obtenção das variações de energia, momento angular e velocidade.

Para o cálculo da variação de energia  $\Delta E$ , do momento angular  $\Delta C$ , e de velocidade  $\Delta V$ , são utilizadas as seguintes equações, já citadas anteriormente:

$$\begin{aligned} \Delta E &= -2V_2 V_\infty \text{sen}(\delta) \text{sen}(\Psi) \\ \Delta C &= \frac{\Delta E}{\omega} \\ \Delta V &= 2V_\infty \text{sen}\delta \end{aligned} \quad (4.17)$$

O cálculo dessas grandezas fica imediato, com as equações obtidas acima.

### 4.3 O CASO VESTA-MAGNYA

No Sistema Solar, existe uma grande concentração de asteróides, localizada entre as órbitas dos planetas Marte e Júpiter, a qual é conhecida como cinturão de asteróides.

Acredita-se que as diversas colisões entre esses asteróides geram as famílias de asteróides, assim chamadas por apresentarem elementos orbitais próprios similares, assim como perfis espectrais muito próximos entre si, reforçando a idéia de que a formação de uma família ocorre por disrupção de um corpo maior.

O asteróide Vesta (4), é o único asteróide no cinturão principal de asteróides a apresentar uma superfície de rocha basáltica (McCord et al. 1970), originária de antigas erupções vulcânicas. Estudos feitos através da análise de imagens feitas pelo telescópio espacial Hubble indicam a presença de cálcio, magnésio e olivina (Binzel et al., 1997). Há também uma gigantesca bacia de impacto, o qual provavelmente gerou todos os pequenos corpos que compõe a chamada família de Vesta (Williams, 1989), (Thomas, et al., 1997).

Recentemente foi verificado que o asteróide Magnya (1459) tem características similares aos corpos da família do asteróide Vesta (4) (Lázzaro et al. 2000), isto é, ele também possui formação basáltica, o que deixa a possibilidade dele também ter se originado a partir deste asteróide.

No entanto, o que se verificou é que o asteróide Magnya (1459) possui uma localização orbital (semi-eixo maior, excentricidade, inclinação) muito distante em comparação com os outros membros que compõe a chamada família de Vesta (4). Diante disso, acredita-se que ele deve ter sofrido a ação de algum mecanismo que o retirou de sua órbita inicialmente próxima à de Vesta (4).

Na tabela 4.1 estão alguns dados físicos e orbitais do asteróide Vesta (4) e também do asteróide Magnya (1459).

**Tabela 4.1** - Dados físicos e orbitais dos asteróides Vesta e Magnya

<b>Asteróide</b>	<b>Vesta</b>	<b>Magnya</b>
a (U.A)	2,36	3,14
e	0,0904	0,237
I	7,13°	17,0°
Diâmetro (km)	501	30
Massa (Kg)	2,71x10 <sup>20</sup>	—

Neste trabalho é proposto considerar os efeitos de uma grande aproximação entre esses asteróides, para justificar a sua localização orbital. Para isso, a técnica da manobra assistida por gravidade será utilizada.

#### 4.4 METODOLOGIA

Neste estudo o corpo central é o Sol,  $M_2$  é Vesta e  $M_3$  é Magnya.

O método usado neste estudo consiste primeiramente em calcular a energia da órbita do Magnya antes e depois do suposto encontro, e em calcular qual a variação de energia necessária para ocasionar a mudança de órbita.

Isto é feito usando os dados apresentados na tabela (4.1). Para o cálculo da energia inicial consideramos que o Magnya possui elementos orbitais próximos ao do Vesta, e para o cálculo da energia final usamos os dados atuais do Magnya.

O cálculo desta energia é feito através de:

$$E = -\frac{\mu_c}{2a} \quad (4.18)$$

onde  $\mu_c = GM_c$ , sendo  $G$  a constante Gravitacional e  $M_c$  a massa do corpo central, e  $a$  é o semi eixo maior.

Utilizando as equações que descrevem o swing-by (item 4.2.2) e varrendo uma região próxima a Vesta, isto é, assumindo possíveis valores para os elementos orbitais

iniciais do Magnya próximos aos de Vesta, verificamos se tal variação de energia poderia ser provocada por um encontro próximo entre os dois asteróides.

Para estas simulações foi desenvolvido um programa no software MATHEMATICA que permitiu o cálculo dos parâmetros que descrevem o swing-by, bem como da máxima variação de energia obtida através dessa manobra.

## 4.5 RESULTADOS

### 4.5.1 Cálculo da energia por unidade de massa antes do suposto encontro ( $E_{\text{inicial}}$ )

A órbita do Magnya deve ser muito próxima à órbita do Vesta antes do encontro, por isso foi assumido em uma primeira aproximação, que o asteróide Magnya possui o mesmo valor de semi-eixo maior que Vesta. Utilizando esse valor na equação (4.18), obtém-se que:

$$E_{\text{inicial}} = -188,3 \text{ Km}^2/\text{s}^2 \quad (4.19)$$

### 4.5.2 Cálculo da energia por unidade de massa após o suposto encontro ( $E_{\text{final}}$ )

Após o encontro com Vesta, o Magnya passou para uma órbita final cujo semi-eixo maior é igual a 3,14 U.A ou  $4,69 \times 10^8$  km (tabela 4.1). Usando esse valor na equação (4.18):

$$E_{\text{final}} = -141,8 \text{ Km}^2/\text{s}^2 \quad (4.20)$$



### 4.5.3 Cálculo da variação de energia por unidade de massa.

$$\Delta E = E_{\text{final}} - E_{\text{inicial}} \quad (4.21)$$

$$\Delta E = 46,5 \text{ Km}^2 / \text{s}^2$$

Esta seria a variação de energia necessária para retirar o Magnya de uma órbita próxima de Vesta e colocá-lo na órbita atual.

O próximo passo é calcular a variação de energia devido ao swing-by e verificar se tal variação seria possível através desta manobra.

### 4.5.4 Cálculo da variação de energia através da técnica do swing-by.

Por pertencer à família de Vesta, os elementos orbitais do Magnya (semi-eixo maior, excentricidade, inclinação) antes do encontro têm que ser tomados de tal forma que ele esteja na vizinhança de Vesta.

Por isso as simulações foram feitas para cinco valores de semi-eixo e excentricidade, e assumindo quatro diferentes valores para  $r_p$ , tomado o mais próximo de Vesta possível e depois aumentado. Estes valores são apresentados na tabela 4.2 e foram escolhidos de modo a potencializar a obtenção da máxima variação de energia.

Para cada uma dessas aproximações foram calculadas as possíveis variações que teriam ocorrido na eventualidade de um encontro próximo através da equação (4.10).

**Tabela 4.2** – Valores de elementos orbitais para o asteroide Magnya tomados na vizinhança de Vesta

$r_p$ (raios de Vesta)	1,1	1,5	2,0	3,0	4,0
$e$	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
$a$ (km)	$3,59 \cdot 10^8$	$3,74 \cdot 10^8$	$3,89 \cdot 10^8$	$4,04 \cdot 10^8$	
$a$ (U.A)	2,4	2,5	2,6	2,7	

Os resultados das simulações feitas supondo um encontro entre os dois asteróides estão nas tabelas do Apêndice E.

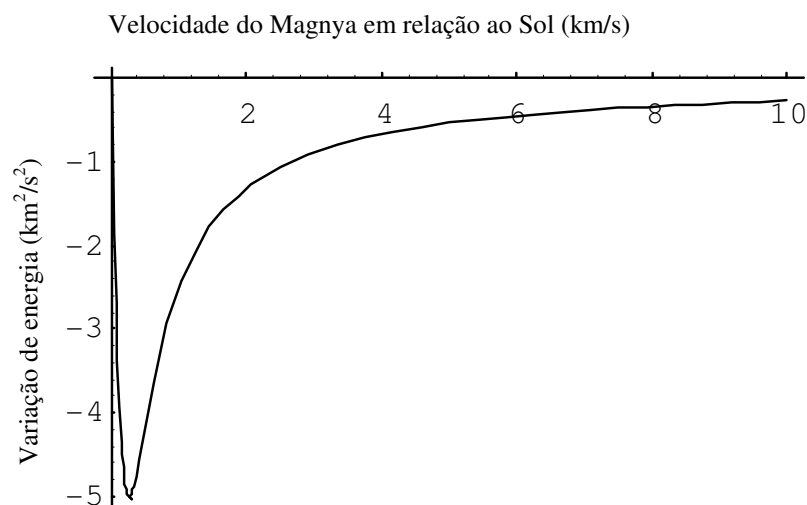
Nelas percebe-se que nas melhores combinações de semi-eixo maior, excentricidade, e  $r_p$ , a variação de energia por unidade de massa proporcionada pelo swing-by não seria maior em módulo que  $5,0 \text{ km}^2/\text{s}^2$ . (Conforme discutido anteriormente o sinal da variação de energia irá depender do ângulo de aproximação  $\Psi$ ).

O gráfico da figura 4.5 ajuda a entender os resultados obtidos. Ele mostra a variação de energia em função da velocidade do Magnya em relação à Vesta.

Neste gráfico, foi levado em consideração que na melhor das possibilidades  $\Psi = 90^\circ$  e portanto  $\text{sen}(\Psi) = 1$ . Assim, de (4.10) e (4.16):

$$\Delta E = -2V_2 V_\infty \frac{1}{1 + \frac{r_p V_\infty^2}{\mu_2}}$$

onde  $V_2 = 18,1 \text{ km/s}$  é a velocidade de Vesta em relação ao Sol e  $r_p$  é a distância que ocorreu o swing-by, que foi adotado como sendo  $r_p = 251 \text{ km}$  (aproximadamente o raio de Vesta, que é  $250,5 \text{ km}$ ).



**Figura 4.5** - Gráfico da variação de energia ( $\Delta E$ ) em função da velocidade do Magnya em relação ao Vesta ( $V_\infty$ ).

Este gráfico leva à conclusão de que, para grandes velocidades, a variação de energia tende à zero, e que os maiores valores para a variação de energia são obtidos quando a velocidade esta próxima de 1km/s, mas mesmo assim, comparando com a variação que seria necessária ( $\approx 47 \text{ Km}^2 / \text{s}^2$ ) calculada anteriormente, ainda são muito pequenos.

#### 4.6 COMENTÁRIOS

Observando os valores obtidos para a variação de energia da órbita do Magnya, utilizando a técnica do swing-by, encontrados nas tabelas do Apêndice E, percebe-se que elas são muito pequenas comparadas à variação que aconteceria se tivesse ocorrido um encontro próximo.

O gráfico da figura (4.5) confirma os resultados encontrados. Nele é possível constatar que a máxima variação da energia da órbita do Magnya devido ao swing-by estaria entre  $4,0 \text{ km}^2/\text{s}^2$  e  $5,0 \text{ km}^2/\text{s}^2$ .

Esses resultados levam à conclusão de que uma possível mudança de órbita ocorrida com o Magnya, que o levaria a uma posição orbital muito distante dos demais asteróides da família de Vesta, não seria ocasionada por uma passagem muito próxima com Vesta. Ou seja, essa mudança de órbita não seria ocasionada apenas pelo swing-by, e, portanto o Magnya teria de sofrer outras influências que proporcionariam tal variação de energia. Uma dessas possibilidades seria a realização de múltiplos swing-bys com o asteróide Vesta, a qual poderá ser objeto de estudo em um trabalho futuro.

## CAPÍTULO 5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foram estudados mecanismos que fundamentalmente envolvem encontros próximos entre corpos celestes (captura gravitacional temporária, esfera de influência e a manobra assistida por gravidade (swing-by)).

Este estudo foi focado na análise da influência da variação das condições iniciais em tais mecanismos, em especial na análise do papel da velocidade relativa e da distância com a qual o encontro ocorre.

Com este objetivo, foram realizadas integrações numéricas do problema circular restrito de três corpos, e foi feito o monitoramento da energia do problema de dois corpos durante um processo de passagem próxima de uma partícula por um corpo mais massivo.

Essa metodologia foi aplicada no estudo do mecanismo de captura gravitacional temporária e do conceito de esfera de influência, e com isso foi mostrado que a dependência destes com a velocidade relativa não só existe, como também pode ser considerado um fator importante em suas definições.

O estudo foi dividido em capítulos.

No capítulo 2 foi estudado o mecanismo da captura gravitacional temporária. Nele foi efetuado um estudo numérico que resultou na definição do chamado raio de captura, determinado em função da velocidade relativa para sistemas com doze razões de massas. Este estudo resultou em uma equação geral para o cálculo do raio de captura dado em função dessa velocidade relativa e da razão de massa.

Este raio de captura foi definido de modo a delimitar a distância a partir da qual uma partícula com determinada velocidade relativa está capturada, ou não. Foi mostrado que este raio diminui conforme a velocidade relativa aumenta, e que diminui conforme a razão de massa diminui, e vice-versa.

Além disso, foi mostrado que existe uma dependência angular deste raio, sendo que os valores máximos ocorrem quando a partícula está exatamente a  $\theta = 0^\circ$  ou  $\theta = 180^\circ$  em relação à linha que une os corpos  $M_1$  e  $M_2$ , e os valores mínimos

ocorrem quando ela está em uma posição perpendicular à esta linha ( $\theta = 90^\circ$  ou  $\theta = 270^\circ$ ).

Os resultados obtidos neste estudo vêm contribuir para o melhor entendimento da captura gravitacional temporária e, conseqüentemente, no aprimoramento de suas aplicações.

Um trabalho futuro pode ser feito aplicando este mesmo método na determinação da variação de energia pelo tempo de captura em função da velocidade relativa, que auxiliaria no planejamento de uma missão espacial visando à diminuição do consumo de combustível.

No capítulo 3 foi feito o estudo do conceito de esfera de influência.

A mesma metodologia adotada no estudo do problema da captura gravitacional temporária foi aplicada, agora com o objetivo de determinar o raio da esfera de influência em função da velocidade relativa e das razões de massa.

Este estudo apresentou uma grande dificuldade, que é a delimitação de quando é considerado que a partícula está sobre a influência de um corpo e a partir de que momento é considerado que ela deixou essa região, baseados na informação da energia do problema de dois corpos,

Diante desta dificuldade foi necessária a adoção de duas abordagens, já que a primeira se mostrou ineficaz (Apêndice C).

Com a aplicação da segunda abordagem o resultado desejado foi obtido para determinadas razões de massa (menores que  $10^{-6}$ ). Para razões de massa maiores, o resultado não pode ser obtido, conforme discutido na seção 3.3.4.

Foram obtidas as funções matemáticas para o cálculo do raio da esfera de influência em função das velocidades relativas para as razões de massa nas quais o método se aplicou.

Com os resultados dos capítulos 2 e 3, foram obtidas as delimitações das chamadas regiões de captura e influência (dentro dos critérios adotados), determinadas pelas velocidades relativas para sistemas com razões de massa  $10^{-6}$ ,  $10^{-7}$  e  $10^{-8}$ .

Por fim, no capítulo 4 foi feito um estudo da técnica da manobra assistida por gravidade, com a sua aplicação no estudo do caso dos asteróides Vesta e Magnya.

Foi mostrado que a hipótese da mudança de órbita sofrida pelo asteroide Magnya ser causada por uma passagem próxima pelo asteroide Vesta não se confirma e que, portanto, o problema permanece sem solução.

Pode ser considerada a possibilidade da realização de múltiplos swing-bys entre Vesta e Magnya ter gerado tal mudança de órbita. Tal possibilidade será objeto de estudo para um trabalho futuro.

## REFERÊNCIAS

BELBRUNO, E.A., Lunar capture orbits, a method of constructing Earth-Moon trajectories and the lunar gas mission. AIAA/DGLR/JSASS International Electric Propulsion Conference, 19., Colorado Springs, 1987. (AIAA-87-1054) 10 p.

BELBRUNO, E.A, Examples of the nonlinear dynamics of ballistic capture and escape in the Earth-Moon system. AIAA Astrodynamics Conference , Portland, 1990. (AIAA-90-2896).

BELBRUNO, E.A. Ballistic Lunar Capture Transfer Using the Fuzzy Boundary and Solar Perturbations: a Survey. In International Congress of SETI Sail and Astrodynamics. Turin, Italy, 1992

BELBRUNO, E.A.; J.K.MILLER, A ballistic lunar capture trajectory for the Lunar Observer mission. 1990b, (JPL IOM-904-1752)

BELBRUNO, E.A.; MILLER, J.K., Sun-Perturbed Earth-to-Moon Transfers With Ballistic Capture. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v.16, p. 770-775, 1993.

BINZEL, R.P. et.al. Geologic mapping of Vesta from 1994 Hubble Space Telescope images. **Icarus**, v.128, n.1, p.95-103, julho, 1997.

BROUCKE, R.A. The celestial mechanics of gravity assist. AIAA/AAS Astrodynamics Conference, Minneapolis, MN, August, 1988. (AIAA paper 88-4220).

BROUCKE, R.A.; PRADO, A. F. B. A. On the scattering of comets by a planet. Meeting of the AAS, 181, Phoenix, AZ, January, 1993.

EVERHART, E. An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings. In Dynamics of comets: Their origin and evolution, Eds. A. Carusi Carusi and G. B. Valsecchi, D. Reidel Publishing Company (Holanda), p. 185-202, 1985.

FESENKOV, V.G. On the possibility of capture at close passages of attracting bodies. **Astronomicheskii zhurnal (Astronomical Journal of the Soviet Union)**, Moscou, v.23, n.1, p.45-48, 1946.

HEPPENHEIMER, T.A. On the presumed capture origin of Jupiter's outer satellites. **Icarus**, v. 24, n.2, p. 172-180, 1975.

HILL, G.W. Researches in the lunar theory. **American Journal of Mathematics**, v. 1, n.1, p. 5-26, 1878.

HOLLISTER , W. M.; Prussing, J.E. Optimum transfer to Mars via Venus. *Astronautica Acta*, v.12, n.2, p.169-179,1966.

KOHLHASE, C.E.; PENZO, P.A. Voyager mission description. **Space Science Reviews**, v. 21, n. 2, p. 77-101, 1977.

KRISH, V. **An investigation into critical aspects of a new form of low energy lunar transfer, the Belbruno-Miller trajectories**. 1991. Dissertação - Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1991.

AIAA/AAS ASTRODYNAMICS CONFERENCE, 1992, Hilton Head Island . **An investigation into critical aspects of a new form of low energy lunar transfer, the Belbruno-Miller trajectories**. Washington, AIAA, 1992, p. 439-444.

LAZZARO, D.; MICHTCHENKO, T.; CARVANO, J. M; BINZEL, R. P.; BUS, S. J.; BURBINE, T. H.; MOTHÉ-DINIZ, T.; FLORCZAK, M.; ANGELI, C. A.; HARRIS, A. W. Discovery of a Basaltic Asteroid in the Outer Main Belt. **Science**, v. 288, n. 5473, pp. 2033-2035, 2000.

MCCORD, T. B.; ADAMS, J. B.; JOHNSON, T. V. Asteroid Vesta: Spectral Reflectivity and Compositional Implications. **Science**, v.168, n. 1445, 1970.

AAS/AIAA SPACE FLIGHT MECHANICS MEETING, 1991, Houston. **A method for the construction of a lunar transfer trajectory using ballistic capture**. Proceedings. San Diego, Univelt, 1991.

MURRAY, C.D.; DERMOTT S.F. **Solar System Dynamics**. 1ed. Londres: ambridge University Press,1999. 592p.

PRADO, A.F.B.A. **Trajelórias Espaciais e Manobras Assistidas por Gravidade**. São José dos Campos: INPE, 2001. 162p.

PEALE, S.J. Origin and evolution of the natural satellites. **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**. v. 37, p. 533-602, 1999.

ROY, A.E. **Orbital Motion**. 3ed. Londres:, 1988.

STRIEPE, S. A.; BRAUN, R. D. Effects of a Venus swing-by periapsis burn during an Earth-Mars trajectory. **Journal of the Astronautical Science**, v.39, n.3, p.229-312,1991.



SZEBEHELY, V. G. Special orbits for the exploration of Mars and Venus. In: AFCRL-NASA-VPI. Conference on the exploration of Mars and Venus, Virginia Polytechnic Institute, Blacksburg, VA, 1965.

THOMAS, P.C.; BINZEL, R.P.; GAFFEY, M. J.; STORRS, A.D.; WELLS, E. N.; ZELLNER, B.H. Impact Excavation on Asteroid 4 Vesta: Hubble Space Telescope Results. **Science**, v. 277, n.5331, pp 1492-1495, 1997.

VIEIRA NETO, E.; WINTER, O.C.; YOKOYAMA, T. The effect of Jupiter's mass growth on satellite capture-retrograde case. **Astronomy and Astrophysics**. v. 414, p.727-734, 2004.

WILLIAMS, I.P. The Roche limit. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**. v.1, n.87, p.13-25, 2003.

WILLIAMS, J. G.; BINZEL, R. P.; GEHRELS, T.; MATTHEWS, M. S. in Asteroids II. (Univ. of Arizona Press, Tucson, AZ, 1989), pp. 1034-1072.

YAMAKAWA, H. **On Earth-Moon transfer trajectory with gravitational capture**. 1992. Tese - Universidade de Tóquio, Tóquio, 1992.

YAMAKAWA, H.; KAWAGUCHI, J.; ISHII, N.; MATSUO, H. On Earth-Moon transfer trajectory with gravitational capture. In: AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Vitoria, August, 1993. Proceedingd. Hampton, NASA, 1993.

## APÊNDICE A

### O PROBLEMA CIRCULAR RESTRITO DE TRÊS CORPOS.

No problema circular restrito de três corpos, é estudado o movimento de uma partícula  $M_3$  de massa desprezível, que sofre a ação gravitacional de dois outros corpos  $M_1$  e  $M_2$ .

Como  $M_3$  possui massa muito pequena em relação aos outros dois corpos, podemos dizer que ela não perturba o movimento destes, e por isso o problema é chamado de restrito.

#### A.1 AS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO.

A descrição a seguir é baseada em Murray & Dermott (1999).

Considera-se um sistema de referência inercial de coordenadas  $(\xi, \eta)$  centrado no centro de massa do sistema (ponto O), como mostra a figura A.1.

O eixo  $\xi$  é o eixo ao longo da linha que une  $M_1$  a  $M_2$  no tempo  $t = 0$ , com o eixo  $\eta$  perpendicular a eles e ao plano orbital das duas massas. As coordenadas de  $M_1$  e  $M_2$  neste sistema de referência são  $(\xi_1, \eta_1)$  e  $(\xi_2, \eta_2)$ , respectivamente.

Como  $M_2$  está em órbita circular ao redor de  $M_1$  é conveniente introduzir um sistema de unidades de medida de forma que a distância de separação entre eles, que é constante, seja igual a 1, e que as unidades de tempo e massa sejam escolhidas de forma que  $\mu = G(M_1 + M_2) = 1$ . Nesse sistema de unidades a terceira Lei de Kepler leva à  $n=1$ .

Como  $M_1 > M_2$ , será definido que:

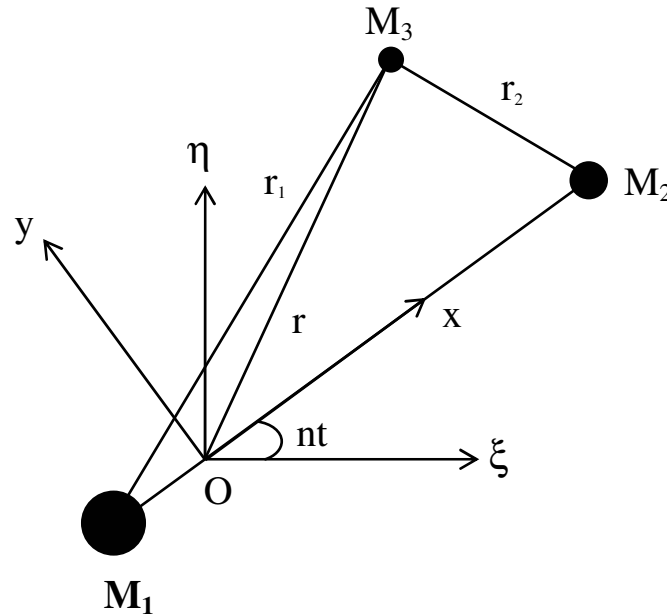
$$\bar{\mu} = \frac{M_2}{M_1 + M_2} \quad (\text{A.1})$$

de forma que:

$$\mu_1 = GM_1 = 1 - \bar{\mu} \quad \text{e} \quad \mu_2 = GM_2 = \bar{\mu} \quad (\text{A.2})$$

logo:

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 = 1$$



**Figura A.1** - Esquema do problema de três corpos onde os sistemas de referência inercial  $(\xi, \eta)$  e girante  $(X, Y)$  estão relacionados. A origem  $O$  está localizada no centro de massa dos corpos  $M_1$  e  $M_2$

As equações do movimento da partícula, no sistema inercial são:

$$\ddot{\xi}_3 = \mu_1 \frac{\xi_1 - \xi_3}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\xi_2 - \xi_3}{r_2^3} \quad (\text{A.3})$$

$$\ddot{\eta}_3 = \mu_1 \frac{\eta_1 - \eta_3}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\eta_2 - \eta_3}{r_2^3}$$

onde:  $r_1^2 = (\xi_1 - \xi_3)^2 + (\eta_1 - \eta_3)^2$  e  $r_2^2 = (\xi_2 - \xi_3)^2 + (\eta_2 - \eta_3)^2$

e  $(\xi_3, \eta_3)$  são as coordenadas da partícula no sistema inercial.

Como as massas principais estão se movendo em órbitas circulares ao redor do centro de massa, a distância entre elas é constante. Isto significa que elas se movem

com velocidade angular também constante. Portanto, o movimento da partícula pode ser considerado em um sistema de referência que gira junto com as massas principais.

Este é o sistema de coordenadas girantes  $(X,Y)$  com origem no centro de massa. Nele, a direção do eixo  $X$  é escolhida de forma que os corpos principais estejam sempre situados nesse eixo. O eixo  $Y$  é perpendicular ao eixo  $X$ , como é mostrado na figura A.1.

As coordenadas de  $M_1$  e  $M_2$  neste sistema são  $(X_1, Y_1) = (-\mu_2, 0)$  e  $(X_2, Y_2) = (\mu_1, 0)$ , de modo que:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (X+\mu_2)^2 + Y^2 \\ r_2^2 &= (X-\mu_1)^2 + Y^2 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Onde  $(X,Y)$  são as coordenadas da partícula no sistema girante.

Estas coordenadas relacionam-se com as coordenadas do sistema inercial através de uma rotação simples, dada pela seguinte matriz de rotação:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \varsigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\text{sen } nt & 0 \\ \text{sen } nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Diferenciando cada componente dessa matriz duas vezes:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\varsigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\text{sen } nt & 0 \\ \text{sen } nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X} - nY \\ \dot{Y} + nX \\ \dot{Z} \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\varsigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\text{sen } nt & 0 \\ \text{sen } nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{X} - 2n\dot{Y} - n^2X \\ \ddot{Y} + 2n\dot{X} - n^2Y \\ \ddot{Z} \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

que leva à:

$$(\ddot{X} - 2n \dot{Y} - n^2 X) = -\mu_1 \frac{X + \mu_2}{r_1^3} - \mu_2 \frac{X - \mu_1}{r_2^3} \quad (\text{A.8})$$

$$(\ddot{Y} + 2n \dot{X} - n^2 Y) = -\left( \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right) Y \quad (\text{A.9})$$

que são as equações do movimento da partícula no sistema de referência girante.

As equações (A.8) e (A.9) podem ser reescritas na forma:

$$\ddot{X} - 2n \dot{Y} = \frac{\partial U}{\partial X} \quad \text{e} \quad \ddot{Y} + 2n \dot{X} = \frac{\partial U}{\partial Y} \quad (\text{A.10})$$

com:

$$U = \frac{n^2}{2} (X^2 + Y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \quad (\text{A.11})$$

sendo U chamado de “pseudopotencial”.

## APÊNDICE B

### ESFERA DE INFLUÊNCIA

Em um sistema em que a massa do corpo central é muito maior que as massas dos demais corpos que o compõe (como no Sistema Solar), pode-se considerar, em um modelo simplificado, que uma partícula dentro deste sistema estará se movendo essencialmente numa seção cônica Kepleriana governada pelo corpo central. Trata-se, portanto, de um problema de dois corpos (partícula-corpo central) fracamente modificado pelos demais corpos distantes que serão tratados como elementos perturbadores.

No entanto, a influência destes corpos distantes passa a ser significativa durante um encontro próximo (*close approach*). Neste caso, para pequenas distâncias dentro da chamada “esfera de influência”, o corpo secundário é dominante, de modo que a órbita da partícula pode novamente ser descrita, essencialmente, pelo problema de dois corpos (partícula-corpo secundário).

A esfera de influência pode então ser pensada como uma superfície esférica centrada no corpo com o qual a partícula realiza um encontro próximo, sendo que sua influência gravitacional passa a ser predominante em relação à do corpo central dentro desta esfera.

A transição de um regime para outro, isto é, a delimitação da esfera de influência, não é bem definida, podendo ser encontrados na literatura alguns modelos como o *Raio de Hill* e a *Esfera de Laplace*, que podem ser usados como parâmetros para esta delimitação.

A seguir é feita uma discussão sobre estes dois modelos, onde cada um é apresentado separadamente e depois comparado.

## B.1 RAIIO DE HILL

Se no problema circular restrito de três corpos a massa  $M_1$  é muito maior que a massa do corpo  $M_2$  ( $M_1 \gg M_2$ ), o movimento do corpo  $M_3$  é descrito pelo problema circular restrito de três corpos apenas quando ele se aproxima de  $M_2$ . A maior parte do movimento de  $M_3$  é um movimento Kepleriano ao redor do corpo primário  $M_1$ . Assim, as equações do problema circular restrito de três corpos podem ser utilizadas apenas quando  $M_3$  está na vizinhança de  $M_2$ .

Devido a este fato, algumas simplificações podem ser feitas nas equações do movimento de  $M_3$ . Este sistema foi originalmente deduzido por Hill (1878) em sua teoria lunar.

### B.1.1 Equações do movimento

A descrição a seguir é baseada em Murray & Dermott (1999).

Se no problema circular restrito de três corpos,  $M_2 \ll M_1$ , o movimento de  $M_3$  na proximidade de  $M_2$  pode ser simplificado transferindo a origem do sistema para  $M_2$  e assumindo:

$$\mu_1 \approx 1 \quad \text{e} \quad \mu_2 \approx 0$$

As equações (A.8) e (A.9) do Apêndice A, tornam-se:

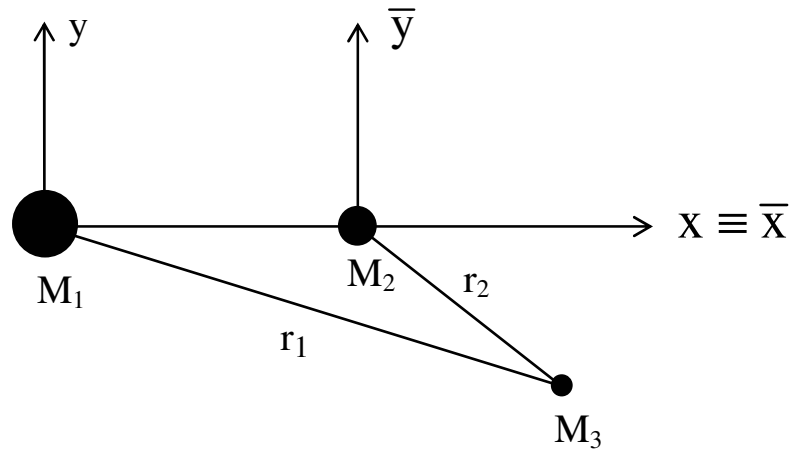
$$(\ddot{x} - 2\dot{y} - x) = -\frac{x}{r_1^3} - \mu_2 \frac{x-1}{r_2^3} \quad (\text{B.1})$$

$$(\ddot{y} + 2\dot{x} - y) = -\frac{y}{r_1^3} - \mu_2 \frac{y}{r_2^3} \quad (\text{B.2})$$

Transferindo a origem do sistema para  $M_2$ , como mostra a figura B.1, mantendo o eixo  $Oy$  inalterado, tem-se que:

$$x = 1 + \bar{x}$$

$$\dot{x} = \dot{\bar{x}} \quad \text{e} \quad \ddot{x} = \ddot{\bar{x}}.$$



**Figura B.1** - Mudança da origem do sistema de coordenadas de  $M_1$  para  $M_2$

Substituindo  $x, \dot{x}, \ddot{x}$  nas equações (B.1) e (B.2), e excluindo a barra em  $\bar{x}$ , obtém-se:

$$(\ddot{x} - 2\dot{y} - 1 - x) = -\frac{(1+x)}{r_1^3} - \mu_2 \frac{x}{r_2^3} \quad (\text{B.3})$$

$$(\ddot{y} + 2\dot{x} - y) = -\frac{y}{r_1^3} - \mu_2 \frac{y}{r_2^3} \quad (\text{B.4})$$

com:

$$r_1^2 = (x+1)^2 + y^2 \quad \text{e} \quad r_2^2 = (x-1)^2 + y^2 \quad (\text{B.5})$$

Chamando  $r_2 = \Delta$  e considerando que o movimento está ocorrendo nas proximidades de  $M_2$ , pode-se assumir que  $x, y$ , e  $\Delta$  são pequenas quantidades. Assim, reescrevendo a equação (B.5) para  $r_1$  e expandindo em série:



$$\begin{aligned}
r_1 &\simeq (1+2x)^{1/2} \\
r_1^{-1} &\simeq 1-x \\
r_1^{-3} &\simeq 1-3x
\end{aligned}
\tag{B.6}$$

onde os termos da ordem 2 forma desprezados, já que  $x$ ,  $y$  são muito pequenos.

As equações (B.3) e (B.4) podem ser então reescritas levando a:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = 3x - \frac{\mu_2}{\Delta^3}x = \left(3 - \frac{\mu_2}{\Delta^3}\right)x \tag{B.7}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = 3xy - \mu_2 \frac{y}{\Delta^3} = -\mu_2 \frac{y}{\Delta^3} \tag{B.8}$$

onde  $(3xy) \rightarrow 0$ , pois como dito anteriormente,  $x$  e  $y$  são quantidades muito pequenas.

Desta maneira as equações (B.7) e (B.8) ficarão da seguinte forma:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \left(3 - \frac{\mu_2}{\Delta^3}\right)x = \frac{\partial U_H}{\partial x} \tag{B.9}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = -\mu_2 \frac{y}{\Delta^3} = \frac{\partial U_H}{\partial y} \tag{B.10}$$

onde:

$$U_H = \frac{3}{2}x^2 + \frac{\mu_2}{\Delta} \tag{B.11}$$

sendo  $U_H$  conhecido como potencial de Hill, com:

$$\Delta^2 = x^2 + y^2$$

As equações (B.9) e (B.10) são chamadas de *Equações de Hill* e foram deduzidas pela primeira vez na Teoria Lunar de Hill (Hill, 1878).

A constante de Jacobi no caso da aproximação de Hill ( $C_H$ ) é então obtida a partir de:

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = \frac{\partial U_H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U_H}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{dU_H}{dt}$$

integrando a equação acima obteremos:

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = U_H - \frac{C_H}{2}$$

então: 
$$C_H = 2U_H - \dot{x}^2 - \dot{y}^2$$

Substituindo  $U_H$  em  $C_H$  teremos:

$$C_H = 3x^2 + 2\frac{\mu_2}{\Delta} - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 \quad (\text{B.12})$$

Analisando a equação (B.9) verifica-se que a parcela de força na direção radial do movimento de  $M_2$  e  $M_1$  anula-se para:

$$\frac{\mu_2}{\Delta^3} = 3$$

Esta expressão leva à definição da esfera de Hill como a esfera de raio:

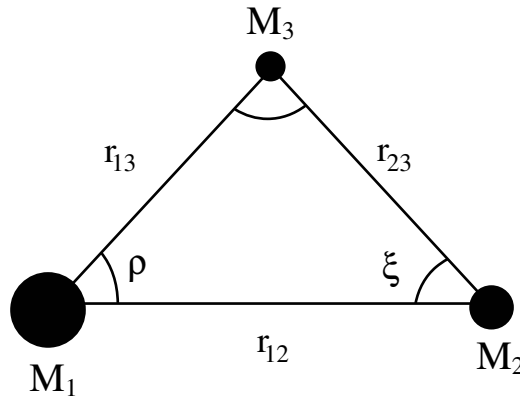
$$\Delta_H = \left( \frac{\mu_2}{3} \right)^{1/3} \quad (\text{B.13})$$

isto é,  $r_2 = \Delta_H$  representa o ponto a partir do qual  $M_2$  passa a influenciar o movimento de  $M_3$ , com o seu movimento passando a ser descrito pelo problema circular restrito de três corpos.

## B.2 ESFERA DE LAPLACE

A descrição a seguir é baseada em Roy (1988).

Considera-se a situação apresentada na figura B.2.



**Figura B.2** – Sistema considerado na determinação da esfera de Laplace

As equações do movimento de  $M_3$  (terceiro corpo), em relação a  $M_1$  e a  $M_2$  são dadas por:

$$\ddot{\vec{r}}_{13} + G \left( \frac{M_1 + M_3}{r_{13}^3} \right) \vec{r}_{13} = -GM_2 \left( \frac{\vec{r}_{23}}{r_{23}^3} + \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right) \quad (\text{B.14})$$

$$\ddot{\vec{r}}_{23} + G \left( \frac{M_2 + M_3}{r_{23}^3} \right) \vec{r}_{23} = -GM_1 \left( \frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}^3} - \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right) \quad (\text{B.15})$$

A definição para esfera de influência aqui adotada diz que ela depende das razões entre as forças perturbativas e as atrações gravitacionais referentes a cada uma das equações de movimento do terceiro corpo, ou seja, a esfera de influência é a superfície ao longo da qual a razão entre a perturbação devido a  $M_1$  e a aceleração devido a  $M_2$  é igual a razão da perturbação de  $M_2$  pela aceleração devido a  $M_1$ , isto é:

$$\frac{|\vec{P}_1|}{|\vec{A}_2|} = \frac{|\vec{P}_2|}{|\vec{A}_1|} \quad (\text{B.16})$$

sendo que as razões  $|\vec{P}_1|/|\vec{A}_2|$  e  $|\vec{P}_2|/|\vec{A}_1|$  fornecem a ordem de magnitude da perturbação sofrida pelo corpo devido a  $M_1$  (sistema de referência solar) e a razão da perturbação de  $M_2$  (sistema de referência do planeta), respectivamente

De uma maneira mais simplificada, as forças podem ser escritas de maneira mais compacta, sendo  $\vec{A}_2$  e  $\vec{A}_1$  as acelerações gravitacionais devido a  $M_2$  e a  $M_1$  e ,  $\vec{P}_1$  e  $\vec{P}_2$  as perturbações devido a  $M_1$  e a  $M_2$ . Considerando  $M_3 \ll M_2$  e  $M_1 \gg M_2$ , a razão entre a perturbação de  $M_2$  e a aceleração gravitacional devido a  $M_1$  é dada por:

$$\frac{|\vec{P}_2|}{|\vec{A}_1|} = \frac{M_2 \left[ \left( \frac{\vec{r}_{23}}{r_{23}^3} + \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right) \cdot \left( \frac{\vec{r}_{23}}{r_{23}^3} + \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}{\left( \frac{M_1}{r_{13}^2} \right)} \quad (\text{B.17})$$

onde foi introduzido que:

$$\vec{A}_1 = GM_1 \left( \frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}^3} \right) \quad (\text{B.18})$$

$$\vec{A}_2 = GM_2 \left( \frac{\vec{r}_{23}}{r_{23}^3} \right) \quad (\text{B.19})$$

$$\vec{P}_1 = -GM_1 \left( \frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}^3} - \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right) \quad (\text{B.20})$$

$$\vec{P}_2 = -GM_2 \left( \frac{\vec{r}_{23}}{r_{23}^3} + \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right) \quad (\text{B.21})$$

A razão entre a perturbação de  $M_1$  e a aceleração gravitacional devido a  $M_2$  é dada por:

$$\frac{|\vec{P}_1|}{|\vec{A}_2|} = \frac{M_1 \left[ \left( \frac{\tilde{r}_{13}}{r_{13}^3} - \frac{\tilde{r}_{12}}{r_{12}^3} \right) \cdot \left( \frac{\tilde{r}_{13}}{r_{13}^3} - \frac{\tilde{r}_{12}}{r_{12}^3} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}{\left( \frac{M_2}{r_{23}^2} \right)} \quad (\text{B.22})$$

Usando a trigonometria na figura B.2 têm-se

$$r_{13}^2 = r_{12}^2 + r_{23}^2 - 2r_{23}r_{12} \cos \xi \quad (\text{B.23})$$

reescrevendo:

$$\frac{r_{13}}{r_{12}} = \left[ 1 - 2 \frac{r_{23}}{r_{12}} \cos \xi + \left( \frac{r_{23}}{r_{12}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.24})$$

Da mesma figura têm-se também que:

$$\cos \rho = \frac{r_{12}}{r_{13}} - \frac{r_{23}}{r_{13}} \cos \xi \quad (\text{B.25})$$

Substituindo as equações (B.24) e (B.25) em (B.17) e (B.22) obtêm-se:

$$\frac{|\vec{P}_2|}{|\vec{A}_1|} = \frac{M_2}{M_1} \left( \frac{r_{13}/r_{12}}{r_{23}/r_{12}} \right)^2 \left[ 1 + 2 \left( \frac{r_{23}}{r_{12}} \right) \left( 1 - \frac{r_{13}}{r_{12}} \cos \xi \right) + \left( \frac{r_{13}}{r_{12}} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.26})$$

$$\frac{|\vec{P}_1|}{|\vec{A}_2|} = \frac{M_1}{M_2} \left( \frac{r_{23}}{r_{12}} \right)^{-2} \left[ 1 - 2 \left( \frac{r_{23}}{r_{12}} \right) \cos \xi + \left( \frac{r_{23}}{r_{12}} \right)^2 \right] + \left[ 1 - 2 \left( \frac{r_{23}}{r_{12}} \right) \cos \xi + \left( \frac{r_{13}}{r_{12}} \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.27})$$

Neste caso tem-se:

$$\left(\frac{r_{23}}{r_{12}}\right)^4 = \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2 \left(\frac{r_{13}}{r_{12}}\right)^4 \left[ \frac{1 - 2\left(\frac{r_{23}}{r_{12}}\right)^2 \cos\xi + \left(\frac{r_{23}}{r_{12}}\right)^4}{1 + 2\left(\frac{r_{23}}{r_{12}}\right)\left(1 - \frac{r_{23}}{r_{12}} \cos\xi\right) + \left(\frac{r_{13}}{r_{12}}\right)^4} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.28})$$

Resolvendo a equação (B.28) para  $r_{23}/r_{12}$  considerando  $M_3 \ll M_2$  e  $M_1 \gg M_2$ , o que implica em  $r_{23} \ll r_{13}$  e  $r_{23} \ll r_{12}$ , Tisserand mostrou que a superfície é circular (Roy, 1988) e de raio:

$$r_{23} \cong \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\frac{2}{5}} r_{12} = R_{\text{lap}} \quad (\text{B.29})$$

que é por definição o raio da esfera de Laplace.

### B.3 O RAIOS DE HILL E A ESFERA DE LAPLACE

Tanto a dedução da equação (B.13) para o raio de Hill, quanto a da equação (B.29) para a esfera de Laplace foram feitas considerando o caso em que  $M_1 \gg M_2$ .

No caso do raio de Hill, a dedução leva à definição de uma superfície esférica ao redor da massa secundária, cujo raio é dado pela equação (B.13), a qual representa o equilíbrio entre as forças devido aos dois corpos principais.

Para a esfera de Laplace, percebe-se que a equação (B.29), não define uma superfície de equilíbrio, e sim uma fronteira entre regiões onde um corpo é mais predominante que outro corpo (Williams, 2003).

Na tabela B.1 são apresentados os raios das esferas de influência calculados para alguns planetas em relação ao Sol através das definições de Hill e Laplace .

Na tabela B.2 são apresentados os raios de Hill calculados para doze razões de massa (de  $10^{-1}$  a  $10^{-12}$ ), calculados através de B.13

**Tabela B.1** – Raios das esferas de influência de alguns planetas em relação ao Sol.

<b>Planeta</b>	<b>Massa (massas solares)</b>	<b>Distância Sol-Planeta (UA)</b>	<b><math>R_{Lap}</math> (Raios do planeta)</b>	<b><math>R_{Hill}</math> (Raios do planeta)</b>
Mercúrio	$1,660 \cdot 10^{-7}$	0,387	45	89
Vênus	$2,448 \cdot 10^{-6}$	0,723	100	164
Terra	$3,003 \cdot 10^{-6}$	1,000	145	236
Marte	$3,228 \cdot 10^{-7}$	1,524	170	323
Júpiter	$9,545 \cdot 10^{-4}$	5,203	675	746
Saturno	$2,858 \cdot 10^{-4}$	9,539	903	1078
Urano	$4,365 \cdot 10^{-5}$	19,182	2197	2975
Netuno	$5,150 \cdot 10^{-5}$	30,058	3882	5198

**Tabela B.2-** Valores calculados do raio de Hill para doze razões de massa.

<b>Razão de Massa</b>	<b>Raio de Hill*</b>	<b>Razão de Massa</b>	<b>Raio de Hill*</b>
$10^{-1}$	0,32183	$10^{-7}$	0,00322
$10^{-2}$	0,14938	$10^{-8}$	0,00149
$10^{-3}$	0,06933	$10^{-9}$	0,00069
$10^{-4}$	0,03218	$10^{-10}$	0,00032
$10^{-5}$	0,01494	$10^{-11}$	0,00015
$10^{-6}$	0,00693	$10^{-12}$	0,00007

\* a unidade de comprimento do raio da esfera de influência é a distância entre os dois primários.

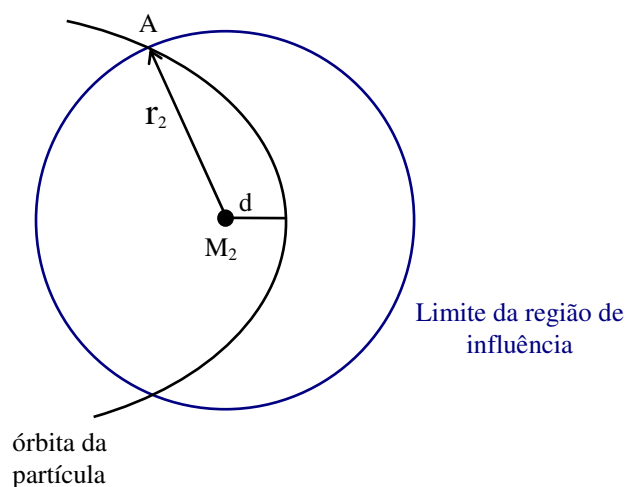
## APÊNDICE C

### FIXANDO A VARIAÇÃO PERCENTUAL DA ENERGIA DO PROBLEMA DE DOIS CORPOS (PARTÍCULA-CORPO CENTRAL)

Neste método entra-se com as condições iniciais dadas pela equação (2.8), com a velocidade da partícula em relação ao corpo secundário ( $V_{PS}$ ) e com o *parâmetro de aproximação*  $d$ .

O método consiste em fixar a velocidade relativa  $V_{PS}$  e variar  $d$  até um valor para o qual a energia varie uma porcentagem pré-estabelecida. Quando isso acontecer, é possível obter através dos dados gerados na integração, o instante em que a energia deixou de variar, ficando daí em diante praticamente constante (dentro do critério adotado).

É possível também obter a distância  $r_2$  e a velocidade da partícula exatamente nesse instante em que a energia varia menos do que o valor pré-estabelecido. Como esse valor de  $r_2$  corresponde exatamente ao ponto em que a partícula deixa de sentir a influência do planeta, assume-se que ele corresponde ao limite do raio de influência do corpo secundário, como mostra a figura C.1.



**Figura C.1** – Limite do raio de influência. No ponto A a partícula está a uma distância  $r_2$  do planeta. A partir desse ponto a sua energia passa a ser constante. Por isso esse valor de  $r_2$  passa a ser considerado o limite do raio de influência do planeta



Foram estabelecidos dois parâmetros que determinam se a partícula está ou não sob a influência do corpo secundário.

Consideramos que a partícula está sob a influência do corpo secundário se a variação de sua energia for de 1% e em outro caso se a variação for de 10%

Quando a variação se torna menor que estes valores estipulados, assume-se que a partícula deixou de sentir a presença do corpo secundário.

Construindo um gráfico com vários valores desse raio da esfera de influência em função da velocidade relativa nesse ponto, é possível observar o seu comportamento, possibilitando a posterior formulação matemática desejada, que fornecerá o raio de influência em função da velocidade da partícula.

### C.1 OBTENÇÃO DOS DADOS

Na Tabela (C.1) é demonstrado como os dados são organizados após a integração, como é feita a seleção de  $r_2$  e da velocidade correspondente para esse ponto.

Nele foi considerada uma partícula com a velocidade  $V_{PS}=0,130$  em relação ao corpo secundário em um sistema com razão de massa  $10^{-6}$ .

O *parâmetro de aproximação d* foi variado até que se atingisse uma variação na energia de 1% em relação à energia inicial. O resultado da integração para esse  $d$  e para essa velocidade está na tabela C.1.

Nesta tabela,  $\sigma$  é a razão entre a energia inicial e final, isto é:

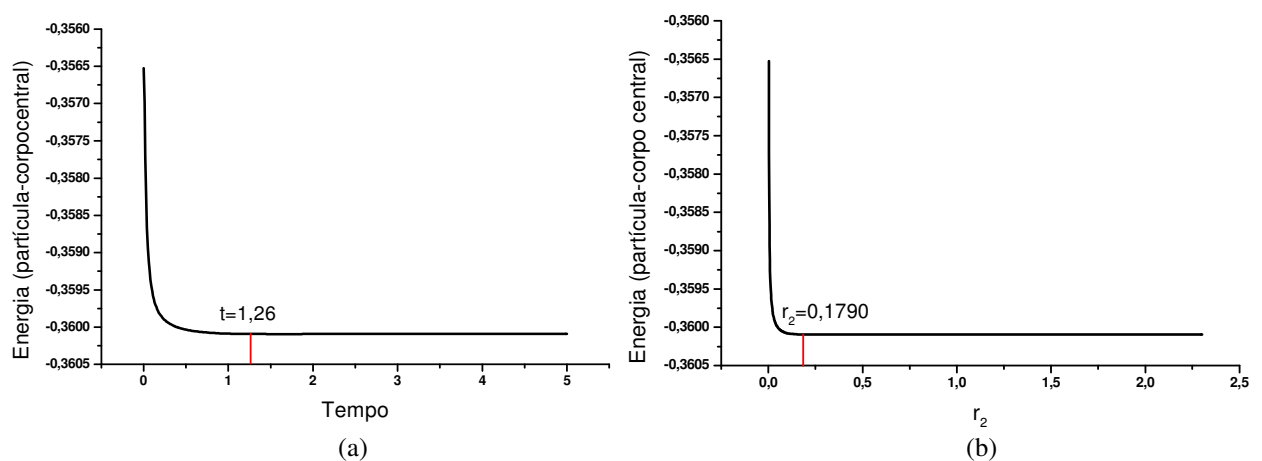
$$\sigma = \frac{E_{\text{inicial}}}{E_{\text{final}}}$$

Ficou definida uma precisão para a variação de três casas decimais. Acompanhando na tabela C.1 a coluna “variação” é possível perceber quando a precisão passou a ser menor do que a estipulada (linha em vermelho). Nesse ponto assume-se que a partícula deixou de sentir a presença do planeta, e obtêm-se na mesma linha de dados o valor  $r_2$  para o qual isso aconteceu e qual a velocidade que a partícula possuía nesse momento. Esses são os valores que serão usados nos gráficos que após o ajuste da curva irá fornecer o raio da esfera de influência em função da velocidade.

**Tabela C.1:** Para razão de massa  $10^{-6}$ ,  $V_{PC} = 0,130$ ,  $d = 0,00236$ , e variação de energia proporcionada pelo encontro de 1,000%

Tempo	Velocidade e ( $V_{PS}$ )	$r_2$	$\sigma$
0	0,1300000	0,0023600	1,0000000
0,010000	0,1295913	0,0026980	0,9987212
0,050000	0,1278461	0,0069310	0,9933037
-	-	-	-
-	-	-	-
-	-	-	-
1,200000	0,3001125	0,1660451	0,9901018
1,250000	0,3166506	0,1768340	0,9901002
1,260000	0,3199964	0,1790776	0,9900998
1,300000	0,3334918	0,1883474	0,9900990
-	-	-	-
-	-	-	-
-	-	-	-
4,950000	1,1345297	2,2764814	0,9900997
5,000000	1,1355257	2,3007734	0,9900996

É importante perceber também nesta tabela que após esse ponto, a energia da partícula em relação ao corpo central permaneceu constante (dentro do limite de três casas de precisão), o que também pode ser percebido nos gráficos da figura (C.2) indicando que de fato a partícula saiu da esfera de influência do planeta

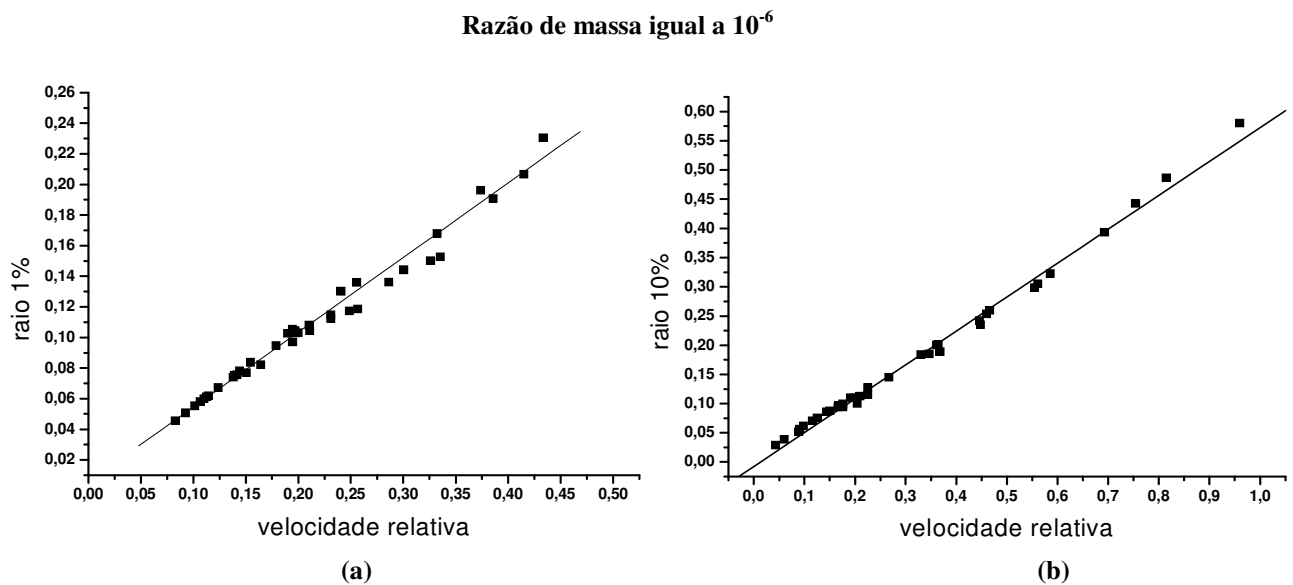


**Figura C.2** – (a) Variação da energia da partícula em relação ao corpo central em função do tempo. A partir de  $t = 1,26$  essa energia passa a ser constante dentro da precisão considerada, o que indica que o corpo secundário não mais exerce influência significativa. (b) - Variação da energia da partícula em relação ao corpo central pela distância da partícula ao planeta. Após o ponto  $r_2 = 0,1790$  no instante  $t = 1,26$  (gráfico 1) a energia passa a ser constante ao longo da orbita da partícula, indicando que o corpo secundário deixou de influenciá-la significativamente.

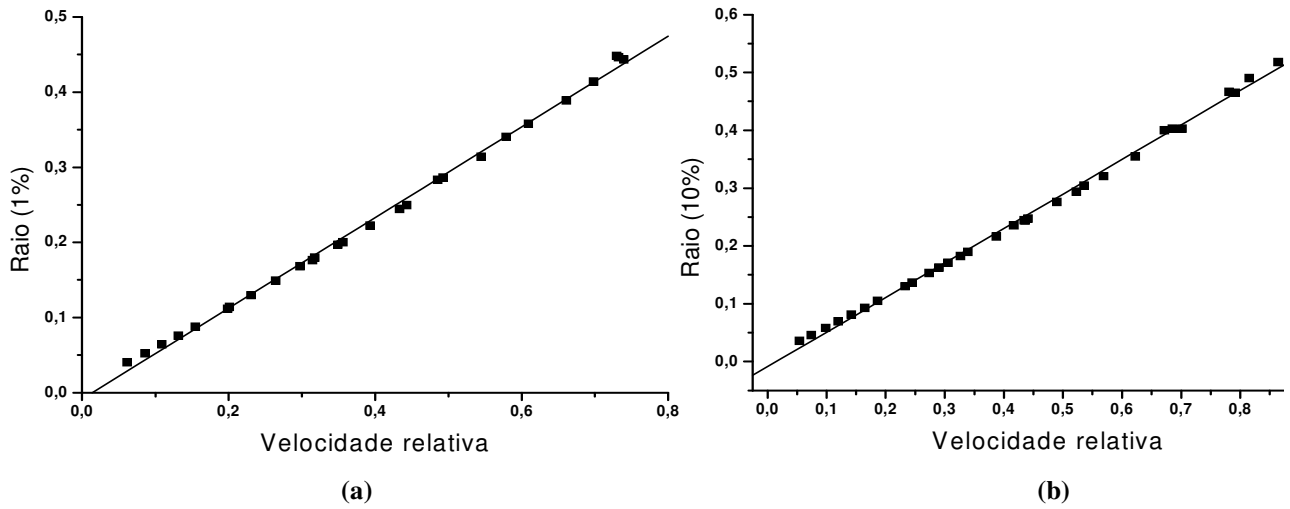
## C.2 RESULTADOS

Utilizando o procedimento descrito acima, foram feitas simulações com o objetivo de analisar como partículas com diferentes velocidades podem influenciar na determinação da esfera de influência. Essas simulações foram feitas, considerando três diferentes razões de massa e para variações da energia da partícula em relação ao corpo central da ordem de 1% e 10 %.

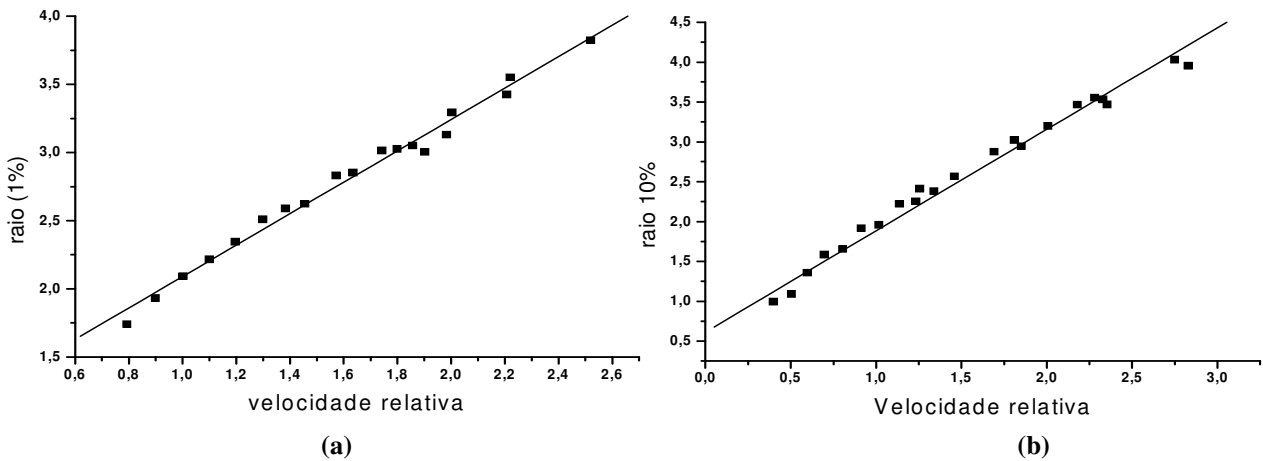
Os resultados dessas simulações se encontram nos gráficos das figuras (C.3), (C.4) e (C.5) .



**Figura C.3** - Gráfico do raio da esfera de influência pela velocidade relativa da partícula em um sistema com razão de massa  $10^{-6}$  (a) para variação de 1% (b) para variação de 10%.

Razão de massa igual a  $10^{-5}$ 

**Figura C.4** - Gráfico do raio da esfera de influência pela velocidade relativa da partícula em um sistema com razão de massa  $10^{-5}$  (a) para variação de 1% (b) para variação de 10%.

Razão de massa igual a  $10^{-4}$ 

**Figura C.5** - Gráfico do raio da esfera de influência pela velocidade relativa da partícula em um sistema com razão de massa  $10^{-4}$  (a) para variação de 1% (b) para variação de 10%.

## C.3 COMENTÁRIOS

Os gráficos das figuras (C.3), (C.4), (C.5) mostram que o raio da esfera de influência está sendo diretamente proporcional à velocidade, isto é, quanto maior a velocidade, maior o raio.

Este resultado é o oposto do esperado, já que intuitivamente temos que partículas com grandes velocidades teriam que passar mais próximas do corpo secundário para sofrerem a mesma influência que uma partícula com velocidade baixa.

O problema deste método está em se fixar a variação de energia desejada. Fazendo isso, força-se a esfera de influência a aumentar com a velocidade, pois quanto maior a velocidade, mais distante o corpo secundário tem que começar a influenciar a partícula para resultar na mesma variação de energia proporcionada para uma partícula com velocidade menor.

Diante deste resultado não satisfatório, foi adotado o método descrito no capítulo 3.

## APÊNDICE D

## TABELAS COM A MÁXIMA VARIAÇÃO DE ENERGIA EM FUNÇÃO DA VELOCIDADE E DO RAIOS DE CAPTURA.

D.1 RAZÃO DE MASSA  $10^{-6}$ .Tabela D.1 – Máxima variação percentual de energia. Razão de massa  $10^{-6}$ 

Velocidade relativa (partícula-corpo secundário)	Raio de Captura (Raios de Hill)	Variação percentual de energia ( $\Delta E\%$ )	Movimento
<b>0,0000</b>	1,16	2,07	retrógrado
<b>0,0010</b>	1,15	1,98	retrógrado
<b>0,0020</b>	1,13	1,80	retrógrado
<b>0,0030</b>	1,10	1,20	retrógrado
<b>0,0040</b>	1,09	1,18	retrógrado
<b>0,0050</b>	1,06	0,69	retrógrado
<b>0,0060</b>	1,04	0,62	retrógrado
<b>0,0070</b>	1,01	0,27	retrógrado
<b>0,0080</b>	0,99	0,08	prógrado
<b>0,0090</b>	0,96	0,40	prógrado
<b>0,0100</b>	0,93	0,71	prógrado
<b>0,0110</b>	0,90	0,99	prógrado
<b>0,0120</b>	0,87	1,26	prógrado
<b>0,0130</b>	0,84	1,51	prógrado
<b>0,0140</b>	0,80	2,03	prógrado
<b>0,0150</b>	0,77	2,24	prógrado
<b>0,0160</b>	0,74	2,43	prógrado
<b>0,0170</b>	0,70	2,97	prógrado
<b>0,0180</b>	0,67	3,13	prógrado
<b>0,0190</b>	0,64	3,28	prógrado
<b>0,0200</b>	0,59	3,32	prógrado
<b>0,0210</b>	0,57	3,43	prógrado
<b>0,0220</b>	0,53	3,54	prógrado
<b>0,0230</b>	0,50	3,83	prógrado

D.2 RAZÃO DE MASSA  $10^{-8}$ **Tabela D.2** – Máxima variação percentual de energia. Razão de massa  $10^{-8}$ 

<b>Velocidade relativa (partícula-corpo secundário)</b>	<b>Raio de Captura (Raios de Hill)</b>	<b>Varição percentual de energia (<math>\Delta E\%</math>)</b>	<b>Movimento</b>
<b>0,0000</b>	1,15	0,45	retrógrado
<b>0,00025</b>	1,13	0,39	retrógrado
<b>0,00050</b>	1,11	0,24	retrógrado
<b>0,00075</b>	1,09	0,24	retrógrado
<b>0,0010</b>	1,06	0,16	retrógrado
<b>0,00125</b>	1,03	0,09	retrógrado
<b>0,00150</b>	1,01	0,04	retrógrado
<b>0,00175</b>	0,97	0,05	retrógrado
<b>0,00200</b>	0,94	0,13	prógrado
<b>0,00225</b>	0,91	0,20	prógrado
<b>0,00250</b>	0,87	0,26	prógrado
<b>0,00275</b>	0,84	0,32	prógrado
<b>0,00300</b>	0,80	0,41	prógrado
<b>0,00325</b>	0,76	0,49	prógrado
<b>0,00350</b>	0,72	0,57	prógrado
<b>0,00375</b>	0,68	0,65	prógrado
<b>0,00400</b>	0,64	0,69	prógrado
<b>0,00425</b>	0,60	0,77	prógrado
<b>0,00450</b>	0,56	0,86	prógrado
<b>0,00475</b>	0,53	0,91	prógrado
<b>0,00500</b>	0,50	0,96	prógrado
<b>0,00525</b>	0,46	1,03	prógrado

D.3 RAZÃO DE MASSA  $10^{-9}$ Tabela D.3 – Máxima variação percentual de energia. Razão de massa  $10^{-9}$ 

Velocidade relativa (partícula-corpo secundário)	Raio de Captura (Raios de Hill)	Variação percentual de energia ( $\Delta E\%$ )	Movimento
<b>0,0000</b>	1,15	0,22	retrógrado
<b>0,0005</b>	1,06	0,08	retrógrado
<b>0,0010</b>	0,93	0,06	retrógrado
<b>0,0015</b>	0,77	0,21	prógrado
<b>0,0020</b>	0,59	0,37	prógrado
<b>0,0025</b>	0,44	0,48	prógrado
<b>0,0026</b>	0,30	0,84	prógrado
<b>0,0030</b>	0,26	0,99	prógrado
<b>0,0031</b>	0,23	1,01	prógrado

D.4 RAZÃO DE MASSA  $10^{-10}$ Tabela D.4 – Máxima variação percentual de energia. Razão de massa  $10^{-10}$ 

Velocidade relativa (partícula-corpo secundário)	Raio de Captura (Raios de Hill)	Variação percentual de energia ( $\Delta E\%$ )	Movimento
<b>0,0000</b>	1,15	0,078	retrógrado
<b>0,0001</b>	1,11	0,063	retrógrado
<b>0,0002</b>	1,06	0,030	retrógrado
<b>0,0003</b>	1,01	0,0086	retrógrado
<b>0,0004</b>	0,96	0,017	prógrado
<b>0,0005</b>	0,90	0,045	prógrado
<b>0,0006</b>	0,83	0,076	prógrado
<b>0,0007</b>	0,75	0,106	prógrado
<b>0,0008</b>	0,68	0,134	prógrado
<b>0,0009</b>	0,61	0,167	prógrado
<b>0,0010</b>	0,54	0,195	prógrado
<b>0,0011</b>	0,47	0,233	prógrado
<b>0,0015</b>	0,29	0,308	prógrado
<b>0,0016</b>	0,25	0,319	prógrado



<b>0,0017</b>	0,23	0,323	prógrado
<b>0,0018</b>	0,20	0,343	prógrado
<b>0,0019</b>	0,15	0,555	prógrado
<b>0,0020</b>	0,13	0,572	prógrado
<b>0,0025</b>	0,09	0,657	prógrado
<b>0,0035</b>	0,05	0,769	prógrado
<b>0,0045</b>	0,03	1,0234	prógrado

D.5 RAZÃO DE MASSA  $10^{-11}$ **Tabela D.5** – Máxima variação percentual de energia. Razão de massa  $10^{-11}$ 

<b>Velocidade relativa (partícula-corpo secundário)</b>	<b>Raio de Captura (Raios de Hill)</b>	<b>Variação percentual de energia (<math>\Delta E\%</math>)</b>	<b>Movimento</b>
<b>0,000</b>	1,15	0,030	retrógrado
<b>0,0001</b>	1,06	0,016	retrógrado
<b>0,0002</b>	0,94	0,013	retrógrado
<b>0,0003</b>	0,80	0,040	prógrado
<b>0,0004</b>	0,64	0,068	prógrado
<b>0,0005</b>	0,50	0,095	prógrado
<b>0,0010</b>	0,12	0,263	prógrado
<b>0,0015</b>	0,060	0,305	prógrado
<b>0,0020</b>	0,027	0,561	prógrado
<b>0,0030</b>	0,013	0,726	prógrado
<b>0,0040</b>	0,0087	0,755	prógrado
<b>0,0050</b>	0,0053	1,031	prógrado

D.6 RAZÃO DE MASSA  $10^{-12}$ **Tabela D.6** – Máxima variação percentual de energia. Razão de massa  $10^{-12}$ 

<b>Velocidade relativa (partícula-corpo secundário)</b>	<b>Raio de Captura (Raios de Hill)</b>	<b>Variação percentual de energia (<math>\Delta E\%</math>)</b>	<b>Movimento</b>
<b>0,00000</b>	1,16	0,0224	retrógrado
<b>0,00005</b>	1,06	0,0079	retrógrado
<b>0,00010</b>	0,93	0,0064	retrógrado
<b>0,00015</b>	0,77	0,0211	prógrado
<b>0,00020</b>	0,59	0,0369	prógrado
<b>0,00023</b>	0,52	0,0421	prógrado
<b>0,00024</b>	0,50	0,0432	prógrado
<b>0,00030</b>	0,33	0,0580	prógrado
<b>0,00040</b>	0,16	0,1059	prógrado
<b>0,00050</b>	0,12	0,1096	prógrado
<b>0,0010</b>	0,029	0,2072	prógrado
<b>0,0015</b>	0,0130	0,2992	prógrado
<b>0,0020</b>	0,0072	0,4103	prógrado
<b>0,0025</b>	0,0046	0,5117	prógrado
<b>0,0040</b>	0,0019	0,7496	prógrado
<b>0,0050</b>	0,0012	1,0220	prógrado

## D.7 COMENTÁRIOS

A tabela correspondente à razão de massa  $10^{-7}$  pode ser encontrada no capítulo 3 (página 45). Ela foi usada para exemplificar a aplicação do método adotado e por isso não foi posta neste apêndice.

## APÊNDICE E

### TABELAS COM AS SIMULAÇÕES DO CASO VESTA-MAGNYA

#### Variação da energia para $r_p = 275,6$ km (1,1 raios de Vesta)

Tabela E.1 - Variação da energia para  $r_p = 275,6$  km (1,1 raios de Vesta) e  $a = 3,59 \times 10^8$  km

$a$ (km)	$V_i$ (km/s)	$V_2$ (km/s)	$e$	$\gamma$ (rad)	$V_\infty$ (km/s)	$\beta$ (rad)	$\delta$ (rad)	$\Psi_1$ (rad)	$\Psi_2$ (rad)	$\Delta E_1$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$\Delta E_2$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
$3,59 \times 10^8$	17,9	18,6	0,01	0,00782	0,700	0,980	0,155	4,23	7,38	3,56	-3,56
			0,02	0,0155	0,742	0,384	0,102	3,64	6,79	1,36	-1,36
			0,03	0,0232	0,806	0,541	0,0895	3,80	6,94	1,65	-1,65
			0,04	0,0307	0,886	0,670	0,0750	3,92	7,07	1,75	-1,75
			0,05	0,0382	0,977	0,774	0,0628	4,03	7,17	1,77	-1,77

Tabela E.2 - Variação da energia para  $r_p = 275,6$  km (1,1 raios de Vesta) e  $a = 3,74 \times 10^8$  km

$a$ (km)	$V_i$ (km/s)	$V_2$ (km/s)	$e$	$\gamma$ (rad)	$V_\infty$ (km/s)	$\beta$ (rad)	$\delta$ (rad)	$\Psi_1$ (rad)	$\Psi_2$ (rad)	$\Delta E_1$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$\Delta E_2$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
$3,74 \times 10^8$	18,3	18,6	0,01	0,00782	0,311	0,479	0,386	3,74	6,88	2,44	-2,44
			0,02	0,0155	0,398	0,798	0,284	4,06	7,20	3,33	-3,33
			0,03	0,0232	0,509	0,987	0,190	4,25	7,39	3,20	-3,20
			0,04	0,0307	0,630	1,103	0,138	4,36	7,50	3,02	-3,02
			0,05	0,0382	0,756	1,179	0,0995	4,44	7,58	2,70	-2,70

Tabela E.3 - Variação da energia para  $r_p = 275,6$  km (1,1 raios de Vesta) e  $a = 3,89 \times 10^8$  km

$a$ (km)	$V_i$ (km/s)	$V_2$ (km/s)	$e$	$\gamma$ (rad)	$V_\infty$ (km/s)	$\beta$ (rad)	$\delta$ (rad)	$\Psi_1$ (rad)	$\Psi_2$ (rad)	$\Delta E_1$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$\Delta E_2$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
$3,89 \times 10^8$	18,7	18,6	0,01	0,00782	0,171	2,146	0,731	5,41	8,55	3,24	-3,24
			0,02	0,0155	0,312	1,89	0,419	4,42	7,41	4,24	-4,24
			0,03	0,0232	0,442	1,78	0,248	5,04	8,18	3,81	-3,81
			0,04	0,0307	0,580	1,72	0,164	4,98	8,12	3,40	-3,40
			0,05	0,0382	0,717	1,68	0,112	4,94	8,08	2,92	-2,92

Tabela E.4 - Variação da energia para  $r_p = 275,6$  km (1,1 raios de Vesta) e  $a = 4,04 \times 10^8$  km

$a$ (km)	$V_i$ (km/s)	$V_2$ (km/s)	$e$	$\gamma$ (rad)	$V_\infty$ (km/s)	$\beta$ (rad)	$\delta$ (rad)	$\Psi_1$ (rad)	$\Psi_2$ (rad)	$\Delta E_1$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$\Delta E_2$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
$4,04 \times 10^8$	19,0	18,6	0,01	0,00782	0,456	2,81	0,264	6,07	9,21	0,952	-0,952
			0,02	0,0155	0,522	2,53	0,208	5,80	8,94	1,86	-1,86
			0,03	0,0232	0,614	2,34	0,159	5,60	8,74	2,27	-2,27
			0,04	0,0307	0,721	2,20	0,115	5,46	8,60	2,26	-2,26
			0,05	0,0382	0,838	2,09	0,0871	5,35	8,50	2,17	-2,17
			0,06	0,456	0,953	1,98	0,0671	5,19	8,20	2,23	-2,23

### Variação da energia para $r_p = 375,8$ km (1,5 raios de Vesta)

Tabela E.5 - Variação da energia para  $r_p = 375,8$  km (1,5 raios de Vesta) e  $a = 3,59 \times 10^8$  km

$a$ (km)	$V_i$ (km/s)	$V_2$ (km/s)	$e$	$\gamma$ (rad)	$V_\infty$ (km/s)	$\beta$ (rad)	$\delta$ (rad)	$\Psi_1$ (rad)	$\Psi_2$ (rad)	$\Delta E_1$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$\Delta E_2$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
$3,59 \times 10^8$	17,9	18,6	0,01	0,00782	0,700	0,201	0,0874	3,43	6,57	0,641	-0,641
			0,02	0,0155	0,742	0,384	0,0771	3,62	6,75	0,954	-0,954
			0,03	0,0232	0,806	0,541	0,0670	3,77	6,91	1,18	-1,18
			0,04	0,0307	0,886	0,670	0,562	3,90	7,04	1,21	-1,21
			0,05	0,0382	0,977	0,774	0,0469	4,01	7,15	1,25	-1,25

Tabela E.6 - Variação da energia para  $r_p = 375,8$  km (1,5 raios de Vesta) e  $a = 3,74 \times 10^8$  km

$a$ (km)	$V_i$ (km/s)	$V_2$ (km/s)	$e$	$\gamma$ (rad)	$V_\infty$ (km/s)	$\beta$ (rad)	$\delta$ (rad)	$\Psi_1$ (rad)	$\Psi_2$ (rad)	$\Delta E_1$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$\Delta E_2$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
$3,74 \times 10^8$	18,3	18,6	0,01	0,00782	0,311	0,479	0,312	3,71	6,85	1,90	-1,90
			0,02	0,0155	0,398	0,798	0,225	4,03	7,17	2,57	-2,57
			0,03	0,0232	0,509	0,987	0,147	4,22	7,36	2,45	-2,45
			0,04	0,0307	0,630	1,10	0,105	4,33	7,48	2,29	-2,29
			0,05	0,0382	0,756	1,17	0,0752	4,41	7,55	2,03	-2,03

Tabela E.7 - Variação da energia para  $r_p = 375,8$  km (1,5 raios de Vesta ) e  $a = 3,89 \times 10^8$  km

$a$ (km)	$V_i$ (km/s)	$V_2$ (km/s)	$e$	$\gamma$ (rad)	$V_\infty$ (km/s)	$\beta$ (rad)	$\delta$ (rad)	$\Psi_1$ (rad)	$\Psi_2$ (rad)	$\Delta E_1$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$\Delta E_2$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
$3,89 \times 10^8$	18,7	18,6	0,01	0,00782	0,174	2,15	0,640	5,3	8,52	2,97	-2,97
			0,02	0,0155	0,305	1,88	0,340	5,11	8,25	3,55	-3,55
			0,03	0,0232	0,442	1,78	0,193	5,01	8,15	3,00	-3,00
			0,04	0,0307	0,580	1,72	0,126	4,95	8,09	2,64	-2,64
			0,05	0,0382	0,720	1,69	0,0852	4,94	8,08	2,22	-2,22

Tabela E.8 - Variação da energia para  $r_p = 375,8$  km (1,5 raios de Vesta ) e  $a = 4,04 \times 10^8$  km

km)	$V_i$ (km/s)	$V_2$ (km/s)	$e$	$\gamma$ (rad)	$V_\infty$ (km/s)	$\beta$ (rad)	$\delta$ (rad)	$\Psi_1$ (rad)	$\Psi_2$ (rad)	$\Delta E_1$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$\Delta E_2$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
$4,04 \times 10^8$	19,0	18,6	0,01	0,00782	0,174	2,15	0,208	5,38	8,52	1,03	-1,03
			0,02	0,0155	0,522	2,54	0,162	5,77	8,91	1,54	-1,54
			0,03	0,0232	0,613	2,34	0,122	5,57	8,71	1,81	-1,81
			0,04	0,0307	0,721	2,20	0,0874	5,43	8,57	1,76	-1,76
			0,05	0,0382	0,837	2,09	0,0654	5,32	8,47	1,67	-1,67

### Variação da energia para $r_p = 501,0$ km (2 raios de Vesta)

Tabela E.9 - Variação da energia para  $r_p = 501,0$  km (2 raios de Vesta ) e  $a = 3,59 \times 10^8$  km

$a$ (km)	$V_i$ (km/s)	$V_2$ (km/s)	$e$	$\gamma$ (rad)	$V_\infty$ (km/s)	$\beta$ (rad)	$\delta$ (rad)	$\Psi_1$ (rad)	$\Psi_2$ (rad)	$\Delta E_1$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$\Delta E_2$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
$3,59 \times 10^8$	17,9	18,6	0,01	0,00782	0,700	0,201	0,0670	3,41	6,55	0,460	-0,460
			0,02	0,0155	0,742	0,384	0,0590	3,59	6,73	0,701	-0,701
			0,03	0,0232	0,806	0,541	0,0511	3,75	6,89	0,878	-0,878
			0,04	0,0307	0,886	0,670	0,0428	3,88	7,02	0,952	-0,952
			0,05	0,0382	0,977	0,774	0,0356	3,98	7,12	0,963	-0,963

Tabela E.10 - Variação da energia para  $r_p = 501,0$  km (2 raios de Vesta ) e  $a = 3,74 \times 10^8$  km

$a$ (km)	$V_i$ (km/s)	$V_2$ (km/s)	$e$	$\gamma$ (rad)	$V_\infty$ (km/s)	$\beta$ (rad)	$\delta$ (rad)	$\Psi_1$ (rad)	$\Psi_2$ (rad)	$\Delta E_1$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$\Delta E_2$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
$3,74 \times 10^8$	18,3	18,6	0,01	0,00782	0,311	0,479	0,251	3,69	6,83	1,49	-1,49
			0,02	0,0155	0,398	0,798	0,178	4,01	7,15	2,01	-2,01
			0,03	0,0232	0,509	0,987	0,114	4,20	7,34	1,88	-1,88
			0,04	0,0307	0,630	1,10	0,0813	4,31	7,46	1,76	-1,76
			0,05	0,0382	0,756	1,18	0,0574	4,39	7,53	1,54	-1,54

Tabela E.11 - Variação da energia para  $r_p = 501,0$  km (2 raios de Vesta ) e  $a = 3,89 \times 10^8$  km

$a$ (km)	$V_i$ (km/s)	$V_2$ (km/s)	$e$	$\gamma$ (rad)	$V_\infty$ (km/s)	$\beta$ (rad)	$\delta$ (rad)	$\Psi_1$ (rad)	$\Psi_2$ (rad)	$\Delta E_1$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$\Delta E_2$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
$3,89 \times 10^8$	18,7	18,6	0,01	0,00782	0,174	2,15	0,544	5,36	8,49	2,63	-2,63
			0,02	0,0155	0,305	1,88	0,277	5,09	8,23	2,93	-2,93
			0,03	0,0232	0,442	1,78	0,152	4,99	8,13	2,38	-2,38
			0,04	0,0307	0,508	1,72	0,0972	4,93	8,07	1,80	-1,80
			0,05	0,0382	0,717	1,68	0,0652	4,90	8,04	1,71	-1,71

Tabela E.12 - Variação da energia para  $r_p = 501,0$  km (2 raios de Vesta ) e  $a = 4,04 \times 10^8$  km

$a$ (km)	$V_i$ (km/s)	$V_2$ (km/s)	$e$	$\gamma$ (rad)	$V_\infty$ (km/s)	$\beta$ (rad)	$\delta$ (rad)	$\Psi_1$ (rad)	$\Psi_2$ (rad)	$\Delta E_1$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$\Delta E_2$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
$4,04 \times 10^8$	19,0	18,6	0,01	0,00782	0,434	2,15	0,164	6,03	8,88	1,35	-1,35
			0,02	0,0155	0,502	2,54	0,127	5,53	8,49	1,90	-1,90
			0,03	0,0232	0,593	2,34	0,0942	5,17	8,22	1,92	-1,92
			0,04	0,0307	0,711	2,20	0,0668	5,34	8,55	1,35	-1,35
			0,05	0,0382	0,837	2,09	0,0499	5,30	8,44	1,25	-1,25

### Variação da energia para $r_p = 751,5$ km. (3 raios de Vesta)

Tabela E.13 - Variação da energia para  $r_p = 751,5$  km (3 raios de Vesta) e  $a = 3,59 \times 10^8$  km

$a$ (km)	$V_i$ (km/s)	$V_2$ (km/s)	$e$	$\gamma$ (rad)	$V_\infty$ (km/s)	$\beta$ (rad)	$\delta$ (rad)	$\Psi_1$ (rad)	$\Psi_2$ (rad)	$\Delta E_1$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$\Delta E_2$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
$3,59 \times 10^8$	17,9	18,6	0,01	0,00782	0,700	0,201	0,0456	3,39	6,53	0,291	-0,291
			0,02	0,0155	0,742	0,385	0,0400	3,57	6,71	0,456	-0,456
			0,03	0,0232	0,806	0,541	0,0346	3,73	6,87	0,577	-0,577
			0,04	0,0307	0,886	0,670	0,0288	3,86	6,70	0,386	-0,386
			0,05	0,0382	0,977	0,774	0,0239	3,96	7,10	0,635	-0,635

Tabela E.14 - Variação da energia para  $r_p = 751,5$  km (3 raios de Vesta) e  $a = 3,74 \times 10^8$  km

$a$ (km)	$V_i$ (km/s)	$V_2$ (km/s)	$e$	$\gamma$ (rad)	$V_\infty$ (km/s)	$\beta$ (rad)	$\delta$ (rad)	$\Psi_1$ (rad)	$\Psi_2$ (rad)	$\Delta E_1$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$\Delta E_2$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
$3,74 \times 10^8$	18,3	18,6	0,01	0,00782	0,311	0,479	0,182	3,67	6,81	1,05	-1,05
			0,02	0,0155	0,397	0,798	0,126	3,99	7,13	1,40	-1,40
			0,03	0,0232	0,509	0,987	0,0791	4,18	7,32	1,29	-1,29
			0,04	0,0307	0,603	1,10	0,0555	4,29	7,43	1,13	-1,13
			0,05	0,0382	0,756	1,18	0,0389	4,37	7,51	1,04	-1,04

Tabela E.15 - Variação da energia para  $r_p = 751,5$  km (3 raios de Vesta) e  $a = 3,74 \times 10^8$  km

$a$ (km)	$V_i$ (km/s)	$V_2$ (km/s)	$e$	$\gamma$ (rad)	$V_\infty$ (km/s)	$\beta$ (rad)	$\delta$ (rad)	$\Psi_1$ (rad)	$\Psi_2$ (rad)	$\Delta E_1$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$\Delta E_2$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
$3,89 \times 10^8$	18,7	18,6	0,01	0,00782	0,174	2,15	0,440	5,33	8,48	2,18	-2,18
			0,02	0,0155	0,305	1,88	0,202	5,07	8,21	2,17	-2,17
			0,03	0,0232	0,442	1,78	0,106	4,96	8,11	1,68	-1,68
			0,04	0,0307	0,580	1,72	0,0668	4,91	8,05	1,41	-1,41
			0,05	0,0382	0,717	1,68	0,0443	4,87	8,01	1,17	-1,17

Tabela E.16 - Variação da energia para  $r_p = 751,5$  km (3 raios de Vesta) e  $a = 4,04 \times 10^8$  km

$a$ (km)	$V_i$ (km/s)	$V_2$ (km/s)	$e$	$\gamma$ (rad)	$V_\infty$ (km/s)	$\beta$ (rad)	$\delta$ (rad)	$\Psi_1$ (rad)	$\Psi_2$ (rad)	$\Delta E_1$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$\Delta E_2$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
$4,04 \times 10^8$	19,0	18,6	0,01	0,00782	0,456	2,81	0,116	6,00	9,14	0,551	-0,551
			0,02	0,0155	0,522	2,54	0,0880	5,73	8,87	0,896	-0,896
			0,03	0,0232	0,614	2,34	0,0648	5,53	8,67	1,01	-1,01
			0,04	0,0307	0,721	2,20	0,0456	5,38	8,53	0,952	-0,952
			0,05	0,0382	0,837	2,08	0,0337	5,2	8,41	0,884	-0,884

### Variação da energia para $r_p = 1002,0$ km (4 raios de Vesta)

Tabela E.17 - Variação da energia para  $r_p = 1002,0$  km (4 raios de Vesta) e  $a = 3,59 \times 10^8$  km

$a$ (km)	$V_i$ (km/s)	$V_2$ (km/s)	$e$	$\gamma$ (rad)	$V_\infty$ (km/s)	$\beta$ (rad)	$\delta$ (rad)	$\Psi_1$ (rad)	$\Psi_2$ (rad)	$\Delta E_1$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$\Delta E_2$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
$3,59 \times 10^8$	17,9	18,6	0,01	0,00782	0,700	0,201	0,0346	3,38	6,52	0,211	-0,211
			0,02	0,0155	0,742	0,385	0,0304	3,56	6,70	0,339	-0,339
			0,03	0,0232	0,806	0,541	0,0262	3,72	6,86	0,430	-0,430
			0,04	0,0307	0,886	0,670	0,0218	3,85	6,99	0,460	-0,460
			0,05	0,0382	0,977	0,774	0,0182	3,95	7,09	0,479	-0,479

Tabela E.18 - Variação da energia para  $r_p = 1002,0$  km (4 raios de Vesta) e  $a = 3,74 \times 10^8$  km

$a$ (km)	$V_i$ (km/s)	$V_2$ (km/s)	$e$	$\gamma$ (rad)	$V_\infty$ (km/s)	$\beta$ (rad)	$\delta$ (rad)	$\Psi_1$ (rad)	$\Psi_2$ (rad)	$\Delta E_1$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$\Delta E_2$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
$3,74 \times 10^8$	18,3	18,6	0,01	0,00782	0,311	0,479	0,143	3,66	6,79	0,798	-0,798
			0,02	0,0155	0,398	0,798	0,0972	3,98	7,12	1,07	-1,07
			0,03	0,0232	0,509	0,987	0,0607	4,16	7,31	0,985	-0,985
			0,04	0,0307	0,630	1,06	0,0422	4,28	7,42	0,897	-0,897
			0,05	0,0382	0,756	1,15	0,0295	4,36	7,50	0,782	-0,782



Tabela E.19 - Variação da energia para  $r_p = 1002,0$  km (4 raios de Vesta) e  $a = 3,89 \times 10^8$  km

$a$ (km)	$V_i$ (km/s)	$V_2$ (km/s)	$e$	$\gamma$ (rad)	$V_\infty$ (km/s)	$\beta$ (rad)	$\delta$ (rad)	$\Psi_1$ (rad)	$\Psi_2$ (rad)	$\Delta E_1$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$\Delta E_2$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
$3,89 \times 10^8$	18,7	18,6	0,01	0,00782	0,174	2,15	0,367	5,32	8,46	1,87	-1,87
			0,02	0,0155	0,305	1,88	0,159	5,06	8,20	1,72	-1,72
			0,03	0,0232	0,442	1,77	0,0820	4,95	8,10	1,30	-1,30
			0,04	0,0307	0,580	1,72	0,0510	4,90	8,04	1,08	-1,08
			0,05	0,0382	0,717	1,68	0,0337	4,86	8,00	0,893	-0,893

Tabela E.20 - Variação da energia para  $r_p = 1002,0$  km (4 raios de Vesta) e  $a = 4,04 \times 10^8$  km

$a$ (km)	$V_i$ (km/s)	$V_2$ (km/s)	$e$	$\gamma$ (rad)	$V_\infty$ (km/s)	$\beta$ (rad)	$\delta$ (rad)	$\Psi_1$ (rad)	$\Psi_2$ (rad)	$\Delta E_1$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$\Delta E_2$ (km <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
$4,04 \times 10^8$	19,0	18,6	0,01	0,00782	0,456	2,81	0,0892	5,99	9,13	0,443	-0,443
			0,02	0,0155	0,521	2,54	0,0674	5,72	8,86	0,697	-0,697
			0,03	0,0232	0,614	2,34	0,0494	5,52	8,66	0,776	-0,776
			0,04	0,0307	0,721	2,20	0,0346	5,37	8,52	0,729	-0,729
			0,05	0,0382	0,838	2,09	0,0255	5,27	8,41	0,677	-0,677