

***“Captura, Difusão e Acreção  
Num Sistema Coorbital  
Imerso em um Meio Gasoso”***

***THIERRY GREGORY GIL CHANUT***

**CAPTURA, DIFUSÃO E ACREÇÃO  
NUM SISTEMA COORBITAL  
IMERSO EM UM MEIO GASOSO**

**THIERRY GREGORY GIL CHANUT**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientadores: Prof. Dr. Othon Cabo Winter  
Prof. Dr. Masayoshi Tsuchida

Guaratinguetá  
2005

**DADOS CURRICULARES**  
**THIERRY GREGORY GIL CHANUT**

NASCIMENTO      01.04.1967 – MONTPELLIER / FRANÇA

FILIAÇÃO            Jacqueline Chanut

1999/2002          Curso de Graduação em Matemática Aplicada  
Ibilce-Unesp – Campus de São Jose do Rio Preto

2003/2005          Curso de Pós-Graduação em Física, nível de Mestrado,  
Feg- Unesp – Campus de Guaratinguetá

À memória de meus avós,  
Emile e Marie Francine, pelo  
amor que me deram e fez de  
mim o homem que sou hoje.

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus, fonte da vida e da graça. Agradeço pela minha vida, minha inteligência, minha família e meus amigos,

ao meu orientador, *Prof. Dr. Othon Cabo Winter*, que jamais deixou de me incentivar. Sem a sua orientação, dedicação e auxílio, o estudo aqui apresentado seria praticamente impossível,

ao meu orientador, *Prof. Dr. Masayoshi Tsuchida* que teve uma participação essencial para o término deste trabalho, contribuindo com sua vasta experiência na área para sanar minhas dúvidas,

ao *Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto* pelo auxílio na parte computacional utilizada neste trabalho,

às funcionárias da Biblioteca do Campus de Guaratinguetá pela dedicação, presteza e principalmente pela vontade de ajudar,

às secretárias da pós-graduação Regina e Elisa pela dedicação e alegria no atendimento,

e principalmente à minha mulher *Maria Emilia P. Chanut* que eu amo muito, por toda ajuda e apoio nos momentos difíceis deste período.

Este trabalho contou com apoio financeiro da **CAPES / PROPP-UNESP**

“A religião ameaça, com seus raios, o audacioso que ousa atribuir à ação única da natureza uma obra na qual ela vê, com razão, a intervenção imediata do ser supremo, e ela teme encontrar, na curiosidade indiscreta de tal tentativa, uma apologia do ateísmo.”

**Immanuel Kant**

**CHANUT, T. G. G. Captura, Difusão e Acreção num Sistema Coorbital Imerso em Meio Gasoso.** Guaratinguetá, 2005, 79 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista.

## **RESUMO**

Neste trabalho estudamos as trajetórias de planetesimais, onde as órbitas decaem devido ao efeito de arrasto gasoso e são perturbadas pela gravidade de um satélite planetário cuja órbita é excêntrica. Cada planetesimal sofre basicamente uma dessas três possibilidades: (1) captura em ressonância com o satélite, (2) colisão com o satélite, acrescentando a massa do satélite, ou (3) difusão, passagem pelo satélite continuando a decair. Para algumas combinações da constante de arrasto e da excentricidade do satélite, mais de 10% dos planetesimais que encontram o satélite são capturados numa ressonância 1/1 com o satélite. Na maioria dos casos, essa captura ocorre devido à máxima aproximação desses planetesimais em relação ao satélite. Neste estudo, as condições iniciais são tais que não existe mais o ponto L4, porém, para altas excentricidades (0.05), ele acaba reaparecendo. A contribuição para a acreção de massa do satélite é de cerca de 30% do total das simulações. Na maioria dos casos, essa acreção planetária ocorre para pequenos valores da constante de arrasto e da excentricidade do satélite. Finalmente, as difusões representam o maior número das simulações e estão diretamente ligadas ao valor da constante de arrasto gasoso.

**PALAVRAS-CHAVE:** Ressonância; Captura; Arrasto Gasoso; Difusão; Acreção



CHANUT, T. G. G. **Trapping, Diffusion e Accretion on a Coorbital System Immersed in a Gaseous Cloud**. Guaratinguetá, 2005. 79 f. Dissertação (Mestrado em Física ) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista.

### **ABSTRACT**

In this work, we study trajectories of planetesimals whose orbits decay due to gas drag and are perturbed by the gravity of a planetary satellite on an eccentric orbit. Each planetesimal ultimately suffers one of the three possible fates: (1) trapping in a mean motion resonance with the satellite, (2) collision with the satellite increasing the satellite mass, or (3) diffusion, crossing the orbit of the satellite. For some combinations of drag rate and planetary eccentricity, over 10% of the planetesimals, which encounter the satellite, are trapped in the 1/1 resonance. In most of the cases, this trapping occurs due to a close approach between the planetesimal and the satellite. In this study, the initial conditions are such, that in theory, L4 does not exist anymore, but to a large satellite eccentricity (0.05), it reappears. The contribution for the mass accretion of the satellite is about 30% of the whole simulations. In most of the cases, this satellite accretion occurs for a low gas drag and satellite eccentricity. Finally, the diffusions represent the larger part of the simulations and are directly connected to the value of the drag rate.

**KEYWORDS:** Resonance; Trapping; Gas Drag; Diffusion; Accretion;

## LISTA DE FIGURAS

- Figura A: Esquema mostrando no plano a trajetória de uma partícula sofrendo o efeito do arrasto devido à uma nuvem de gás.....22
- Figura B: Esquema mostrando as três possibilidades de trajetória de uma partícula quando ela se aproxima da zona coorbital com o satélite.....22
- Figura C: Esquema mostrando os pontos de equilíbrio Lagrangianos e as regiões críticas das curvas de velocidades zero. O sistema de coordenadas é centrado no Sol e gira com o planeta.....24
- Figura D: Sistema inercial centrado em  $O$  .....25
- Figura E: Diagrama esquemático mostrando a evolução dos pontos de equilíbrio Lagrangianos, para o caso de  $m_2 \ll 1$ , sendo  $k < 0$  (linhas sólidas) e para um hipotético  $k > 0$  (linhas tracejadas) (Murray 1994).....31
- Figura F: Relação entre o parâmetro  $\gamma$  e o deslocamento angular dos pontos de equilíbrio  $L_3$ ,  $L_4$  e  $L_5$ , no caso de pequenas razões de massas para uma força de arrasto inercial (Murray 1994).....33
- Figura 1: Gráfico mostrando o comportamento do semi-eixo maior de uma partícula no processo de captura em ressonância 1/1 com o corpo secundário (satélite). A massa do satélite é  $10^{-6} M_0$  e as condições iniciais neste caso são  $r_0 = 1.16$  para a partícula,  $e = 0.056$  para o satélite e  $k = 0.075$  para a constante do gás.....42
- Figura 2: Gráficos mostrando o comportamento a) do semi-eixo maior da partícula b) da excentricidade de sua órbita e c) da variação de sua longitude com o satélite, no processo de captura em ressonância 1/1. A massa do satélite é  $10^{-6} M_0$  e as condições iniciais neste caso são  $r_0 = 1.16$  para a partícula,  $e = 0.056$  para o satélite e  $k = 0.075$  para a constante do gás.....43
- Figura 3: Gráficos mostrando o comportamento a) do semi-eixo maior da partícula b) da excentricidade de sua órbita e c) da variação de sua longitude com o satélite, no processo de captura em ressonância 1/1. A massa do satélite é  $10^{-6} M_0$  e as condições iniciais neste caso são  $r_0 = 1.19$  para a partícula,  $e = 0.07$  para o satélite e  $k = 0.025$  para a constante do gás.....44

Figura 4: Gráficos mostrando o comportamento a) do semi-eixo maior da partícula b) da excentricidade de sua órbita e c) da variação de sua longitude com o satélite, no processo de captura em ressonância 1/1. A massa do satélite é  $10^{-6} M_0$  e as condições iniciais neste caso são  $r_0=1.16$  para a partícula,  $e = 0.07$  para o satélite e  $k = 0.225$  para a constante do gás.....45

Figura 5: Histogramas da distribuição geral do ângulo  $q$  entre a partícula e o satélite na hora de sua entrada na região coorbital, antes de ser capturada em ressonância 1/1, para todos os valores de  $0.025 < k < 1.0$  e  $0.007 < e < 0.07$ .....47

Figura 6: Histogramas da distribuição do ângulo  $q$  entre a partícula e o satélite na hora de sua entrada na região coorbital, antes de ser capturada em ressonância 1/1, para todos os valores de  $0.025 < k < 1.0$  e para as excentricidades da órbita do satélite seguintes: a)  $e = 0.007$ , b)  $e = 0.014$ , c)  $e = 0.021$  e d)  $e = 0.028$ .....48

Figura 7: Histogramas da distribuição do ângulo  $q$  entre a partícula e o satélite na hora de sua entrada na região coorbital, antes de ser capturada em ressonância 1/1, para todos os valores de  $0.025 < k < 1.0$  e para as excentricidades da órbita do satélite seguintes: a)  $e = 0.035$ , b)  $e = 0.042$ , c)  $e = 0.049$  e d)  $e = 0.056$ .....49

Figura 8: Histogramas da distribuição do ângulo  $q$  entre a partícula e o satélite na hora de sua entrada na região coorbital, antes de ser capturada em ressonância 1/1, para todos os valores de  $0.025 < k < 1.0$  e para as excentricidades da órbita do satélite seguintes: a)  $e = 0.063$ , b)  $e = 0.07$ .....50

Figura 9: Histogramas da distribuição do ângulo  $q$  entre a partícula e o satélite na hora de sua entrada na região coorbital, antes de ser capturada em ressonância 1/1, para todos os valores de  $0.007 < e < 0.07$  e para a)  $0.025 < k < 0.125$  e b)  $0.9 < k < 1.0$ .....50

Figura 10: Histograma da media geral da longitude  $\langle \Delta \lambda \rangle$  entre o satélite e a partícula durante a captura em ressonância 1/1, para todos os valores de  $0.025 < k < 1.0$  e  $0.007 < e < 0.07$ .....52

Figura 11: Histogramas da media da longitude  $\langle \Delta \lambda \rangle$  entre o satélite e a partícula durante a captura em ressonância 1/1, para todos os valores de  $0.025 < k < 1.0$  e para as excentricidades da órbita do satélite seguintes: a)  $e = 0.007$  e b)  $e = 0.014$ .....52

Figura 12: Histogramas da media da longitude  $\langle \Delta \lambda \rangle$  entre o satélite e a partícula durante a captura em ressonância 1/1, para todos os valores de  $0.025 < k < 1.0$  e para as excentricidades da órbita do satélite seguintes: a)  $e = 0.021$ , b)  $e = 0.028$ , c)  $e = 0.035$  e d)  $e = 0.042$ .....53

Figura 13: Histogramas da media da longitude  $\langle \Delta \lambda \rangle$  entre o satélite e a partícula durante a captura em ressonância 1/1, para todos os valores de  $0.025 < k < 1.0$  e para as excentricidades da órbita do satélite seguintes:

a)  $e = 0.049$ , b)  $e = 0.056$ , c)  $e = 0.063$  e d)  $e = 0.07$ .....54

Figura 14: Histograma da distribuição das capturas em relação à excentricidade  $e$  do satélite.....55

Figura 15: Histograma da distribuição das capturas em relação à constante da força de arrasto  $k$ .....55

Figura 16: Gráfico mostrando o comportamento da excentricidade da partícula durante seu processo de aproximação antes da colisão com o satélite.

A massa do satélite é  $10^{-6} M_0$  e as condições iniciais neste caso são  $r_0 = 1.20$  para a partícula,  $e = 0$  para o satélite e  $k = 0.05$  para a constante do gás.....57

Figura 17: Gráficos mostrando o comportamento da excentricidade da partícula durante seu processo de aproximação antes da colisão com o satélite.

A massa do satélite é  $10^{-6} M_0$  e as condições iniciais neste caso são  $r_0 = 1.20$  para a partícula,  $e = 0$  para o satélite. A constante do gás é: a)  $k = 0.05$ , b)  $k = 0.1$ , c)  $k = 0.2$  e e)  $k = 0.3$ .....58

Figura 18: Gráficos mostrando o comportamento da excentricidade da partícula durante seu processo de aproximação antes da colisão com o satélite.

A massa do satélite é  $10^{-6} M_0$  e as condições iniciais neste caso são  $r_0 = 1.08$  para a partícula, e  $k = 0.050$  para a constante do gás. A excentricidade do satélite é: a)  $e = 0$  e b)  $e = 0.042$ .....59

Figura 19: Histograma da distribuição da anomalia verdadeira  $f$  do satélite na hora da colisão para todas as condições iniciais.....61

Figura 20: Histogramas da distribuição da anomalia verdadeira  $f$  do satélite na hora da colisão para todos os valores de  $0.025 < k < 1.0$  e para as excentricidades da órbita do satélite seguintes: a)  $e = 0.007$ , b)  $e = 0.014$ , c)  $e = 0.021$ , d)  $e = 0.028$  e e)  $e = 0.035$ .....62

Figura 21: Histogramas da distribuição da anomalia verdadeira  $f$  do satélite na hora da colisão para todos os valores de  $0.025 < k < 1.0$  e para as excentricidades da órbita do satélite seguintes: a)  $e = 0.042$ , b)  $e = 0.049$ , c)  $e = 0.056$ , d)  $e = 0.063$  e e)  $e = 0.07$ .....63

Figura 22: Histogramas da distribuição das colisões em relação à constante da força de arrasto  $k$ , para as excentricidades da órbita do satélite seguintes:

a)  $e = 0$ , b)  $e = 0.028$ , c)  $e = 0.049$  e d)  $e = 0.07$ .....65

Figura 23: Histograma da distribuição das colisões em relação à excentricidade $e$ do satélite.....	66
Figura 24: Histograma da distribuição das colisões em relação à constante da força de arrasto $k$ .....	66
Figura 25: Histogramas da distribuição das difusões em relação à constante da força de arrasto $k$ , para as excentricidades da órbita do satélite seguintes: a) $e = 0$ , b) $e = 0.028$ , c) $e = 0.049$ e d) $e = 0.07$ .....	67
Figura 26: Histograma da distribuição das difusões em relação à excentricidade $e$ do satélite.....	68
Figura 27: Histograma da distribuição das difusões em relação à constante da força de arrasto $k$ .....	68
Figura 28: Histograma da distribuição geral das colisões, capturas em ressonância 1/1, difusões e outros eventos relacionados à dinâmica de uma partícula submetida ao efeito de arrasto gasoso.....	70
Figura 29: Histogramas da distribuição das colisões, capturas em ressonância 1/1, difusões e outros eventos relacionados à dinâmica de uma partícula submetida ao efeito de arrasto gasoso com $0.025 < k < 1.0$ . As excentricidades da órbita do satélite são as seguintes: a) $e = 0$ , b) $e = 0.007$ .....	70
Figura 30: Histogramas da distribuição das colisões, capturas em ressonância 1/1, difusões e outros eventos relacionados à dinâmica de uma partícula submetida ao efeito de arrasto gasoso com $0.025 < k < 1.0$ . As excentricidades da órbita do satélite são as seguintes: a) $e = 0.014$ , b) $e = 0.021$ , c) $e = 0.028$ e d) $e = 0.035$ .....	71
Figura 31: Histogramas da distribuição das colisões, capturas em ressonância 1/1, difusões e outros eventos relacionados à dinâmica de uma partícula submetida ao efeito de arrasto gasoso com $0.025 < k < 1.0$ . As excentricidades da órbita do satélite são as seguintes: a) $e = 0.042$ , b) $e = 0.049$ , c) $e = 0.056$ , d) $e = 0.063$ e e) $e = 0.07$ .....	72
Figura 32: Histogramas da distribuição das colisões, capturas em ressonância 1/1, difusões e outros eventos relacionados à dinâmica de uma partícula submetida ao efeito de arrasto gasoso para todas as excentricidades da órbita do satélite e nos casos $0.025 < k < 0.1$ , b) $0.325 < k < 0.4$ , c) $0.625 < k < 0.7$ e d) $0.925 < k < 1.0$ .....	73

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$	-	Semi- eixo maior
$e$	-	Excentricidade
$n$	-	Movimento médio
$m$	-	Massa relativa
$m_1$	-	Massa relativa do corpo central
$m_2$	-	Massa relativa do corpo secundário
$M_0$	-	Massa do corpo central (primário)
$O$	-	Centro de massa do sistema
$O_{xh}$	-	Sistema de coordenadas planar inercial
$O_{xy}$	-	Sistema de coordenadas planar girante
$r$	-	Distância planetocêntrica
$\dot{r}$	-	Velocidade
$\ddot{r}$	-	Aceleração
$t$	-	Tempo
$F_x, F_h$	-	Componentes da força de arrasto no sistema inercial
$F_x, F_y$	-	Componentes da força de arrasto no sistema girante
$k$	-	Constante da força de arrasto
$C_J$	-	Constante de Jacobi
$y$	-	Parâmetro representando a razão de $k$ por $m_2$
$r$	-	Densidade do gás

$\mathbf{r}_{mp}$	-	Densidade do gás no plano mediano
$\Phi$	-	Potencial gravitacional por unidade de massa
$P$	-	Pressão do gás
$P_{mp}$	-	Pressão do gás no plano mediano
$T$	-	Temperatura do gás
$T_{mp}$	-	Temperatura do gás no plano mediano
$\Sigma(r)$	-	Densidade superficial de massa
$M_{\odot}$	-	Massa do proto-sol
$M_T$	-	Massa da Terra
$\mathbf{g}$	-	Relação entre calores específicos
$c_d$	-	Coefficiente de arrasto
$v_{rel}$	-	Velocidade relativa do planetesimal em relação ao gás
$\Omega$	-	Velocidade angular do gás
$\Delta\lambda$	-	Longitude entre o satélite e o planetesimal
$R_H$	-	Raio de Hill

# SUMÁRIO

**Resumo**

**Abstract**

**LISTA DE FIGURAS**

**LISTA DE SÍMBOLOS**

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	17
<b>1 Revisão de literatura e objetivo da pesquisa</b> .....	20
1.1 Trabalhos já realizados.....	20
1.2 Objetivos da pesquisa.....	21
<b>2 Problema restrito de três corpos em caso circular - planar</b> .....	23
<b>3 O efeito de arrasto gasoso</b> .....	25
3.1 Equações do movimento .....	25
3.2 Análise da constante de Jacobi.....	28
3.3 Evolução dos pontos de equilíbrio devido à força de arrasto .....	30
3.4 Caso da força de arrasto inercial .....	32
<b>4 Modelo de Nebulosa</b> .....	34
4.1 Abordagem de arrasto nebular descrito por Peale .....	37
4.2 Abordagem de arrasto nebular descrito por Murray .....	39
<b>5 Simulações e análise dos resultados</b> .....	40
5.1 Simulações Numéricas .....	40
5.2 Resultados e análise .....	42
<b>6 Conclusão</b> .....	75
REFERÊNCIAS .....	77
BIBLIOGRAFIA CONSULTADA .....	79



## INTRODUÇÃO

O problema circular restrito de três-Corpos planar apresenta cinco pontos de equilíbrio chamados pontos Lagrangianos. Três destes são os pontos colineares ( $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ ) e estão sobre a linha que une o corpo principal e secundário ( $m_1$  e  $m_2$ ), os outros dois pontos de equilíbrio ( $L_4$  e  $L_5$ ) são os pontos triangulares e estão sobre os vértices dos triângulos equiláteros formados juntamente com os dois corpos. Órbitas estáveis do tipo girino podem existir a partir de oscilações ao redor dos pontos  $L_4$  ou  $L_5$ , enquanto que órbitas estáveis do tipo ferradura podem existir a partir de oscilações ao redor dos pontos  $L_4$ ,  $L_3$  e  $L_5$  (Brown & Shook, 1964).

Confirmando a demonstração teórica da existência desses tipos de órbitas estáveis, em 1906 ocorreu a observação do asteróide 588 Achilles, librando ao redor do ponto  $L_4$  do sistema Sol-Júpiter. Atualmente, aproximadamente duas centenas desses asteróides, denominados Troianos, já foram descobertos librando ao redor dos pontos  $L_4$  e  $L_5$  do sistema Sol-Júpiter.

Em 1980, foram observados objetos orbitando ao redor dos pontos de equilíbrio triangulares de sistemas que envolvem o planeta Saturno e um de seus satélites. O sistema Saturno-Tétis tem dois satélites, de massa muito menor do que Tétis, oscilando ao redor dos pontos triangulares. Um deles, chamado Telesto, oscila ao redor de  $L_4$  e tem uma amplitude de libração de  $\pm 2$  graus; o outro, denominado Calipso, oscila ao redor do ponto  $L_5$  com uma amplitude de libração de  $\pm 4$  graus. O sistema Saturno-Dione apresenta um satélite de massa muito menor do que Dione, denominado Helene, orbitando ao redor do ponto  $L_4$  com amplitude de libração de  $-13$  a  $+17$  graus.

Também em 1980 foi descoberto um par de satélites coorbitais no sistema de Saturno, denominados Jano e Epimeteu, o qual apresenta uma evolução orbital peculiar em função de suas massas serem comparáveis (a massa de Jano é aproximadamente quatro vezes o valor da massa de Epimeteu). Yoder et al. (1983) estudaram a dinâmica deste sistema de satélites coorbitais mostrando a existência de novos pontos de equilíbrio. A evolução da localização dos pontos de equilíbrio em função de diferentes razões de massa entre os satélites coorbitais foi estudada por

Mourão (2001). Mourão também monitorou as mínimas aproximações angulares entre as órbitas para as diferentes razões de massa.

Estudos indicam que as órbitas do tipo girino e ferradura são estáveis quando sujeitas a perturbação devido ao achatamento do corpo central. A única alteração observada diz respeito a um incremento na excentricidade orbital (Borelli, 2001; Mourão, 2001).

A estabilidade da órbita de asteróides Troianos quando sujeitos a forças dissipativas como um arrasto devido ao gás da nebulosa solar primitiva tem sido um foco de divergências encontrado na literatura (Peale, 1993). Como os pontos de equilíbrio Lagrangianos correspondem a pontos de máximo no potencial do sistema girante, vários autores interpretaram que qualquer dissipação da energia orbital levaria à desestabilização e conseqüente escape desta região (por ex., Colombo et al., 1966). Todavia, Yoder et al. (1983) afirmam que o simples argumento da energia não é suficiente para inferir a desestabilização devido a forças dissipativas. Afirmam que cada processo dissipativo deve ser analisado em detalhe para saber se a amplitude de libração aumenta ou diminui.

Murray (1994) analisou a estabilidade para pequenas librações mostrando que certas classes de forças de arrasto levam à estabilidade assintótica. Em particular, Murray demonstrou que isto ocorre para o caso de uma força proporcional à velocidade no sistema inercial. Considerando este mesmo tipo de força dissipativa, Borelli (2001) estudou a evolução de partículas coorbitais para diferentes valores da constante de proporcionalidade. Seus resultados mostraram que as amplitudes de oscilação radial e angular das órbitas decrescem assintoticamente, convergindo para um dos pontos de equilíbrio estável existentes. A escala de tempo para este decaimento está diretamente relacionada com o valor da constante de proporcionalidade da força dissipativa.

A possibilidade de captura de corpos num sistema coorbital devido a este tipo de força dissipativa parece depender sensivelmente da excentricidade orbital do corpo secundário. No caso circular, a captura mostrou-se improvável (Borelli, 2001), enquanto que, no caso de excentricidades de moderadas a altas, a captura se mostrou factível (Kary e Lissauer, 1995).

No próximo capítulo faremos uma revisão bibliográfica, apresentando o que já foi feito na literatura sobre captura, acreção, estabilidade de sistemas coorbitais e os efeitos do arrasto de uma nebulosa na formação desses sistemas. Os objetivos do presente estudo serão também apresentados neste capítulo.

No capítulo 2, mostraremos o problema restrito de três corpos no caso circular-planar desenvolvido por Murray e Dermott (1999) e os pontos de equilíbrio Lagrangianos.

No capítulo 3, será feito o estudo do efeito de arrasto gasoso, apresentando as equações do movimento no sistema inercial e suas correspondentes no sistema girante. Para algumas forças de arrasto, a análise da constante de Jacobi não pode ser usada para determinar a estabilidade dos pontos de equilíbrio. Um método alternativo é achar a localização dos pontos de equilíbrio deslocados pela força de arrasto.

No capítulo 4, apresentaremos o modelo de arrasto nebuloso descrito por Peale (1993) e o modelo de arrasto nebuloso descrito por Murray (1994)

No capítulo 5, uma análise detalhada das simulações numéricas e dos resultados obtidos será feita visando à conclusão de nosso trabalho.

## Capítulo 1

### Revisão de literatura e objetivo da pesquisa

#### 1.1 Trabalhos já realizados

Peale, em **The effect of the Nebula on the Trojan Precursors** (1993), estudou a estabilidade dos pontos Lagrangianos no modelo de gás de uma nebulosa, como visto anteriormente nesta pesquisa. Ele considerou a massa de Júpiter como sendo 13 massas terrestres. Nesse caso, Júpiter não afeta a nebulosa.

A excentricidade da órbita de Júpiter tende a fazer crescer, no caso de arrasto gasoso, a estabilidade do ponto  $L_5$ , enquanto a estabilidade do ponto  $L_4$  decresce. Assim, Peale mostrou que o limite mínimo de tamanho de um planetesimal, para permanecer um certo tempo estável na sua órbita, é de 14 metros no ponto  $L_5$ , enquanto ele é de 30 metros no ponto  $L_4$ . Se Júpiter afeta a nebulosa criando uma separação, o tamanho do planetesimal, neste caso, tem que ser maior que 3 *km* para permanecer estável na órbita.

Kary e Lissauer, em **Nebular Gas Drag and Planetary Accretion** (1995), estudaram a probabilidade de capturas em ressonância de planetesimais sofrendo o efeito de arrasto nebuloso. As relações de massa  $m_2$  foram da ordem de  $10^{-6}$  a  $10^{-8}$  para o corpo secundário. Utilizando o modelo de arrasto nebuloso similar ao de Malhotra (1993), eles conseguiram provar que, com uma pequena excentricidade da órbita do planeta, é possível uma captura em ressonância 1/1 para planetesimais decaindo de uma distância de 10 a 25 esferas de Hill da órbita do planeta.

Ainda Pollack et al., em **Formation of the Giant Planets by Concurrent Accretion of Solids and Gás** (1996), propuseram um modelo de gás nebuloso com uma densidade diretamente proporcional à distância do planeta em relação ao Sol. Para Júpiter, a densidade considerada foi de  $5 \times 10^{-11} \text{ g/cm}^3$ ; para Saturno,  $2.5 \times 10^{-11} \text{ g/cm}^3$ ; para Urano,  $1 \times 10^{-11} \text{ g/cm}^3$ .

Mazzari e Sholl, em **Capture of Trojans by a Growing Proto-Jupiter** (1997), trabalharam com um modelo de gás nebuloso similar ao de Malhotra, simulando órbitas de planetesimais de raio com tamanho compreendido entre 70 m e 200 km. Eles

mostraram, como no caso de Peale (1993), que existe uma assimetria entre as capturas em  $L_4$  e  $L_5$  para uma órbita do proto-Júpiter com pequena excentricidade. Se o arrasto é forte, neste caso o ponto  $L_4$  tende a desaparecer. Eles também mostraram que isso favorece um alto grau de colisões em  $L_5$  na medida em que a variação angular entre os planetesimais e o proto-planeta é maior devido a seus pequenos tamanhos.

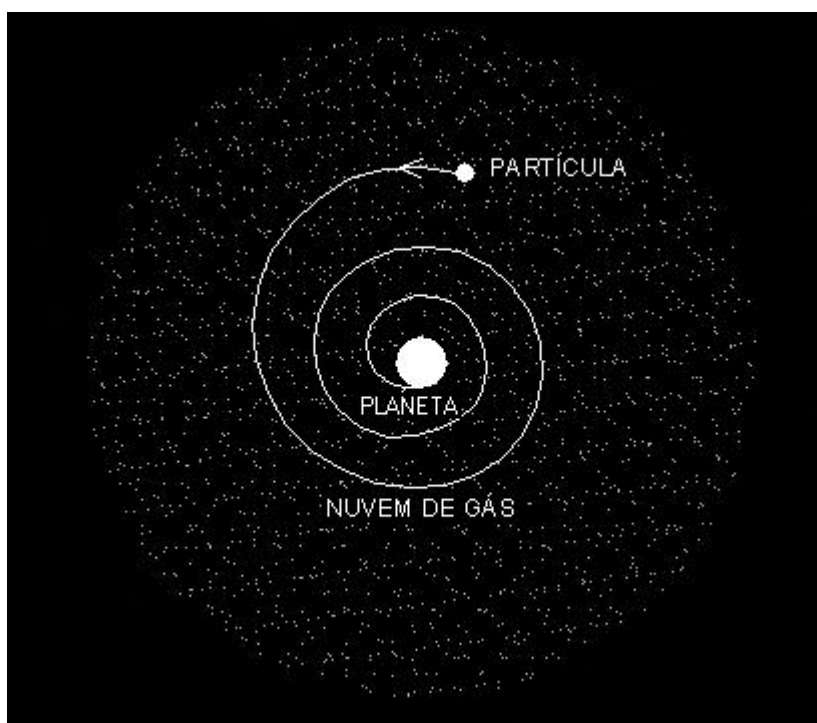
Namouni e Murray, em **The effect of Eccentricity and Inclination on the motion near the Lagrangian Points  $L_4$  and  $L_5$**  (2000), mostraram que a presença da excentricidade e inclinação no problema restrito de três corpos desloca  $L_4$  e  $L_5$  de sua configuração equilateral.

Borelli, na sua tese de mestrado **Um estudo numérico do Efeito Dinâmico do Achatamento e do Arrasto na Estrutura e Estabilidade de Sistemas Coorbitais** (2001), estudou a estabilidade das órbitas do tipo ferradura e girino com modelo de arrasto inercial apresentado por Murray (1994). Nesse modelo, no sistema girante circular planar, ele testou a possibilidade de captura em ressonância de pequenos corpos numa razão de massa entre o corpo primário e o secundário  $m_2$  da ordem de  $10^{-3}$  e  $10^{-6}$ . Como resultado, ele mostrou que não há possibilidade de captura em ressonância 1/1 no sistema onde o corpo secundário tem uma órbita circular.

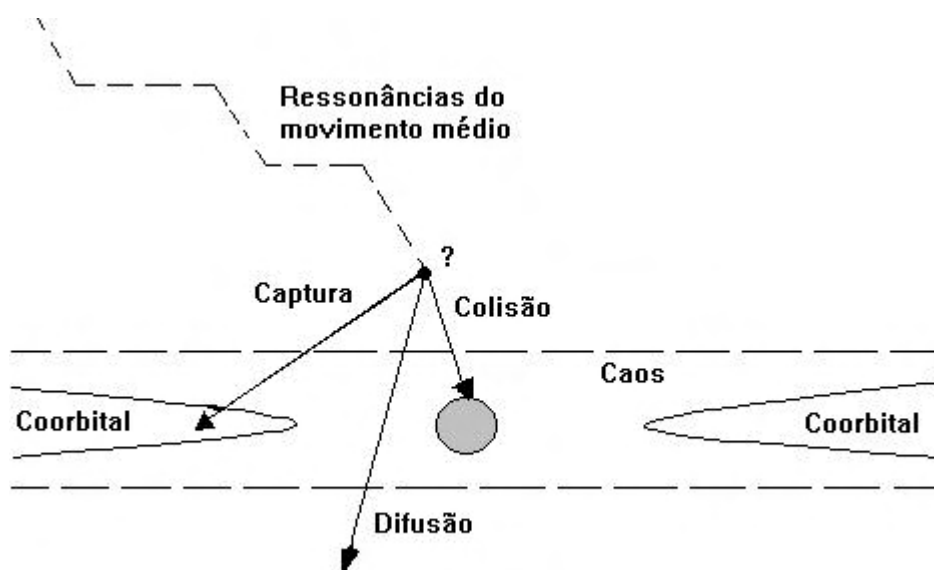
## 1.2 Objetivos da pesquisa

- Explorar o processo dinâmico de planetesimais que se aproximam da órbita de um corpo secundário ( $M_2$ , onde  $M_2 \ll M_1$ ). Esses planetesimais sofrem um decaimento orbital devido ao arrasto de uma nebulosa.
- Investigar as possibilidades de captura temporária em ressonâncias. Ressonâncias que podem ser externas do tipo  $j / (j+1)$  ou 1/1 quando o planetesimal é coorbital ao corpo secundário. No caso da ressonância 1/1, são investigadas as condições que favorecem este tipo de captura. Como por exemplo, os valores limites de excentricidades do corpo secundário, assim como os valores limites da constante de arrasto para que isso ocorra.

- Estabelecer estatísticas da taxa de colisão que implica em um aumento da massa do corpo secundário. Essas estatísticas estabelecem as condições que favorecem este tipo de aumento.
- Estabelecer estatísticas da taxa de difusão que represente a passagem para uma órbita interior à do corpo secundário sem que haja captura.



**Figura A:** Esquema mostrando no plano a trajetória de uma partícula sofrendo o efeito do arrasto devido à uma nuvem de gás.



**Figura B:** Esquema mostrando as três possibilidades de trajetória de uma partícula quando ela se aproxima da zona coorbital com o satélite.

## Capítulo 2

### Problema restrito de três corpos em caso circular - planar

Consideremos um sistema de três corpos: o Sol de massa  $M$ , um planeta de massa  $m_1$  e um asteróide de massa  $m_2$ , onde  $M \gg m_1 \gg m_2$ .

O Sol e o planeta se movem em órbitas circulares em torno do centro de massa, e o asteróide se move sob a influência gravitacional dos dois primeiros, mas sem perturbá-los. Temos aí um problema restrito de três corpos circular-planar.

Como o Sol e o planeta se movem com uma velocidade angular constante, é conveniente neste caso considerar o movimento do asteróide num sistema girante centrado no sol e com o eixo  $x$  passando nos centros do Sol e do planeta.

$$\text{Daí } n^2 = \frac{\mathbf{m}}{a^3} = \frac{G(M + m_1)}{a^3}$$

Se tomarmos  $G = 1$ ,  $M$  como unidade de massa e a separação entre o Sol e o planeta como unidade de distância, então o movimento médio  $n$  do planeta fica

$$n^2 = 1 + m_1 \quad (2.1)$$

As equações do movimento do asteróide são

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \partial\Omega/\partial x \quad (2.2)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = \partial\Omega/\partial y \quad (2.3)$$

com a integral

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = V^2 = 2\Omega - C_J \quad (2.4)$$

onde

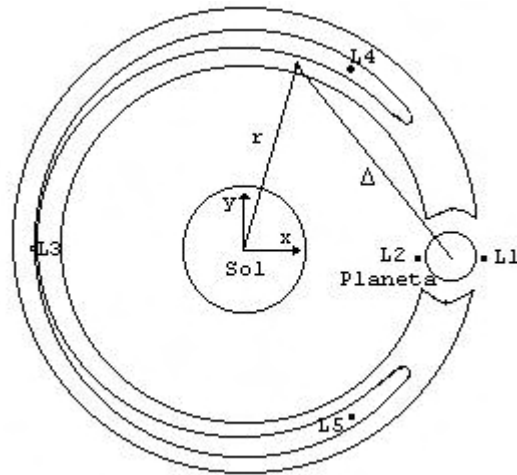
$$2\Omega = 2/r + r^2 + m_1(2/\Delta + \Delta^2) \quad (2.5)$$

e  $C_J$  é a constante de Jacobi. Ainda,

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (2.6)$$

e  $\Delta$  é a distância planeta-asteróide.

Substituindo  $\ddot{x} = \ddot{y} = \dot{x} = \dot{y} = 0$  nas equações (2.2) e (2.3) e resolvendo em  $r$  e  $\Delta$ , obtemos os pontos de equilíbrio Lagrangianos colineares  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ , e os pontos de equilíbrio triangulares  $L_4$  e  $L_5$  (Fig.C).



**Figura C:** Esquema mostrando os pontos de equilíbrio Lagrangianos e as regiões críticas das curvas de velocidades zero. O sistema de coordenadas é centrado no Sol e gira com o planeta.

Os pontos  $L_4$  e  $L_5$  correspondem às soluções quando  $r = \Delta$  e, aplicando uma análise de perturbação de primeira ordem para os objetos na vizinhanças desses pontos, pode-se mostrar que as subseqüentes librações são estáveis quando  $m_1 < 0.040$ .

Essas são as chamadas soluções girino do problema restrito de três corpos, e representam oscilações estáveis em torno dos pontos Lagrangianos  $60^\circ$  à frente e  $60^\circ$  atrás do planeta. Os asteróides chamados Troianos são conhecidos por se moverem em órbitas do tipo girino em torno dos pontos  $L_4$  e  $L_5$  de Júpiter.



## Capítulo 3

### O efeito de arrasto gasoso

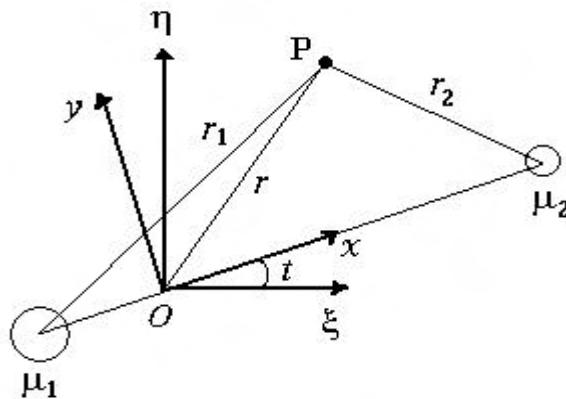
O asteróide no problema restrito de três corpos raramente pode ser considerado isolado. Na realidade, cada pequena partícula é sujeita a um número de forças externas de diferentes magnitudes que se adicionam às perturbações gravitacionais. Vários estudos foram conduzidos sobre o efeito da pressão de radiação no problema de três corpos (ver e.g. Colombo et al 1966, Schuerman 1980 e Simmons et al 1985). Vamos considerar o efeito dinâmico das forças de arrasto numa partícula feito por Murray (1994) no seu estudo dos efeitos do arrasto gasoso no problema restrito circular de três corpos.

#### 3.1 Equações do movimento

Consideremos duas massas  $m_1$  e  $m_2$  ( $m_1 > m_2$ ) que se movem em órbitas circulares em torno do centro de massa e definimos

$$\mathbf{m}_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{m}_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.1)$$

Consideremos um sistema inercial com os eixos  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{h}$  centrado em  $O$ .



**Figura D:** Sistema inercial centrado em  $O$

Fazendo o eixo  $\mathbf{x}$  encostar na linha que une as massas  $\mathbf{m}_1$  e  $\mathbf{m}_2$  no tempo  $t = 0$  com o eixo  $\mathbf{h}$  perpendicular a ele. Sendo que as coordenadas das duas massas no sistema de referência são  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{h}_1)$  e  $(\mathbf{x}_2, \mathbf{h}_2)$ , e fazendo a distância que separa as duas massas como sendo a unidade de distância. Neste caso o movimento médio do sistema dos dois corpos será a unidade.

As equações do movimento de uma partícula com o vetor posição  $(\mathbf{x}, \mathbf{h})$  são

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{m}_1 \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}}{r_1^3} + \mathbf{m}_2 \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}}{r_2^3} + F_x(\mathbf{x}, \mathbf{h}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{h}}) \quad (3.2)$$

$$\ddot{\mathbf{h}} = \mathbf{m}_1 \frac{\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}}{r_1^3} + \mathbf{m}_2 \frac{\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}}{r_2^3} + F_h(\mathbf{x}, \mathbf{h}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{h}}) \quad (3.3)$$

onde da Fig D,

$$r_1^2 = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x})^2 + (\mathbf{h}_1 - \mathbf{h})^2 \quad (3.4)$$

$$r_2^2 = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x})^2 + (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h})^2 \quad (3.5)$$

e  $F_x$  e  $F_h$  são as componentes  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{h}$  da força de arrasto que pode ser expressa como função das componentes de posição e velocidade no sistema inercial.

Agora consideremos um sistema girante de coordenadas que tem a mesma origem que o sistema  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{h}$  mas que está girando uniformemente, com uma taxa de variação positiva, no sentido anti-horário (Fig. D). A direção do eixo  $x$  é escolhida de tal modo que as duas massas sempre encostam nela com as coordenadas  $(x_1, y_1) = (-\mathbf{m}_1, 0)$  e  $(x_2, y_2) = (\mathbf{m}_1, 0)$ . Assim, da Fig.D temos

$$r_1^2 = (x + \mathbf{m}_2)^2 + y^2 \quad (3.6)$$

$$r_2^2 = (x - \mathbf{m}_1)^2 + y^2 \quad (3.7)$$

onde  $(x, y)$  são as coordenadas da partícula que se refere ao sistema girante. Essas coordenadas estão relacionadas com as coordenadas do sistema inercial pela simples rotação,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Tomando a primeira e a segunda derivadas no tempo de cada equação na Eq. (3.8) temos

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{h}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} - y \\ \dot{y} + x \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

e

$$\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \ddot{\mathbf{h}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} - 2\dot{y} - x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Agora, fazendo as devidas substituições e operações na Eq.(3.2) e (3.3) as equações do movimento da partícula no sistema girante são:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} - x = -\mathbf{m}_1 \frac{x + \mathbf{m}_2}{r_1^3} - \mathbf{m}_2 \frac{x - \mathbf{m}_1}{r_2^3} + F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \quad (3.11)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} - y = -\left(\frac{\mathbf{m}_1}{r_1^3} + \frac{\mathbf{m}_2}{r_2^3}\right)y + F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \quad (3.12)$$

onde

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_x \\ F_h \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

e  $r_1, r_2, F_x$  e  $F_h$  são expressos como funções de  $x, y, \dot{x}$  e  $\dot{y}$  usando as Eq.(3.6-3.9).

Observe-se que as Eq (3.11) e (3.12) são independentes do tempo com exceção de uma possível dependência nos componentes de arrasto. No entanto, das definições de  $F_x$  e  $F_y$  dadas na Eq.(3.13), e o fato de que as transformações dadas pelas Eq.(3.8) e (3.9) são rotações, as magnitudes dos vetores posição e velocidade no sistema inercial definidas por

$$r = \sqrt{\mathbf{x}^2 + \mathbf{h}^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.14)$$

e

$$V = \sqrt{\dot{\mathbf{x}}^2 + \dot{\mathbf{h}}^2} = \sqrt{(\dot{x} - y)^2 + (\dot{y} + x)^2} \quad (3.15)$$

são independentes do tempo. Além do mais, das Eq.(3.9) e (3.15) está claro que qualquer força de arrasto que tem as componentes  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{h}$  da forma

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_h \end{pmatrix} = g(r, V) \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{h}} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

onde  $g$  é uma função escalar de  $r$  e  $V$ , terá as componentes  $x$  e  $y$  dadas por

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = g(r, V) \begin{pmatrix} \dot{x} - y \\ \dot{y} + x \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Portanto, as forças de arrasto nesta forma sempre resultarão em equações do movimento no sistema girante independentes do tempo. Na pratica, isso quer dizer que podemos adotar as Eq.(3.8 - 3.10) com  $t = 0$  para todas as transformações entre os dois sistemas de referência, sendo que estamos interessados em coordenadas angulares em relação à uma posição fixada; efetivamente redefinimos continuamente a direção de referência como sendo a linha que une o corpo primário e o secundário.

### 3.2 Análise da constante de Jacobi

O asteróide se move sob a atração gravitacional de  $m_1$  e  $m_2$ , e de uma força arbitrária,  $F = (F_x, F_y)$ , que representa uma função da posição e velocidade da partícula.

Assumimos que  $|F| = O(k)$  onde  $k$  é geralmente uma quantidade pequena. Daí, as equações do movimento da partícula no sistema girante são

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} + F_x \quad (3.18)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} + F_y \quad (3.19)$$

onde  $U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}$ , e  $r_i$  as distâncias entre a partícula e  $m_i$  ( $i = 1, 2$ )

Se multiplicarmos a Eq (3.18) por  $\dot{x}$  a Eq (3.19) por  $\dot{y}$ , e somando as duas temos

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} - \left( \dot{x} \frac{\partial U}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \dot{x}F_x + \dot{y}F_y \quad (3.20)$$

Como a constante de Jacobi no problema padrão pode ser escrita como  $C_J = 2U - \dot{x}^2 - \dot{y}^2$  temos

$$\frac{dC_J}{dt} = -2(\dot{x}F_x + \dot{y}F_y) \quad (3.21)$$

Desde que  $k < 0$  para uma força que se oponha ao movimento, o sinal de  $\dot{C}_J$  é oposto ao sinal de  $\dot{x}F_x + \dot{y}F_y$ . Do estudo das curvas de velocidade no problema restrito de três corpos, sabemos que aumentar o valor de  $C_J$  implica o aumento das áreas de exclusão, e o movimento se afasta dos pontos  $L_4$  e  $L_5$ .

Jeffrey (1929) usou essa técnica para investigar uma força de arrasto proporcional à velocidade da partícula no sistema girante, neste caso  $F = kv = k(\dot{x}, \dot{y})$  e

$$\dot{C}_J = -2k(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) > 0 \quad (3.22)$$

Daí, essa força de arrasto, causa movimento longe dos pontos  $L_4$  e  $L_5$ , independentemente da trajetória da partícula. Por extensão, as órbitas do tipo ferradura são todas instáveis nesta força de arrasto.

Entretanto, se a força de arrasto é proporcional à velocidade do asteróide no sistema inercial, então a situação não é tão simples. Por exemplo, tomando  $F_x = k\dot{x}$  e  $F_y = k\dot{y}$

$$F = k(\dot{x} - y, \dot{y} + x) \quad (3.23)$$

e obtemos

$$\dot{C}_J = -2k(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + 2k(\dot{x}y - \dot{y}x) \quad (3.24)$$

Para determinar o sinal dessa expressão, temos que conhecer a trajetória da partícula e como o problema restrito é não integrável, esta não pode ser determinada por condições iniciais arbitrárias. Portanto, para algumas forças de arrasto, a análise da constante de Jacobi não pode ser usada para determinar a estabilidade. Um método alternativo é achar a localização dos pontos de equilíbrio deslocados e usar uma análise linear de estabilidade para estabelecer seus comportamentos locais.

### 3.3 Evolução dos pontos de equilíbrio devido à força de arrasto

A força de arrasto produz uma modificação na estrutura do problema restrito de três corpos, deslocando os pontos de equilíbrio Lagrangianos.

Consideremos uma força geral de arrasto da forma

$$F_i = kVg(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \quad (3.25)$$

onde  $V = (\dot{x} - y, \dot{y} + x)$  é a velocidade da partícula no sistema inercial (subentendendo que  $\dot{\mathbf{x}} = \dot{x} - y$  e  $\dot{\mathbf{h}} = \dot{y} + x$ ) e  $g(x, y, \dot{x}, \dot{y})$  que é função da posição e velocidade. Assumimos que o tempo não aparece explicitamente nas componentes do arrasto. Assim  $F_i$  representa a força que é função das posição e velocidades da partícula no sistema inercial. Essa força é chamada de força de arrasto inercial.

Para estudar a evolução dos pontos de equilíbrio, chamamos  $g^* = g(x, y, 0, 0)$ , que representa a função  $g$  avaliada nos pontos de equilíbrio. Assim fazendo  $\ddot{x} = \ddot{y} = \dot{x} = \dot{y} = 0$  nas Eq. (3.11) e (3.12) temos

$$-m_1 \frac{x+m_2}{r_1^3} - m_2 \frac{x-m_1}{r_2^3} + x - kyg^* = 0 \quad (3.26)$$

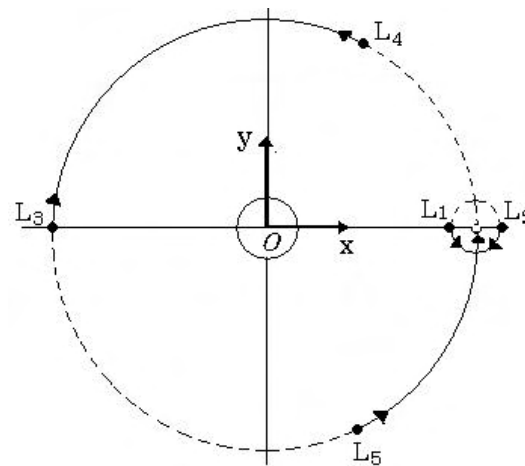
$$-\left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3} - 1\right)y + kxg^* = 0 \quad (3.27)$$

Eliminando  $k$  das equações (3.26) e (3.27) temos

$$r^2 r_1^3 r_2^3 + m_2 r_1^3 (m_1 x - r^2) - m_1 r_2^3 (m_2 x + r^2) = 0 \quad (3.28)$$

com  $r_1 \neq 0$  e  $r_2 \neq 0$

A figura E ilustra este deslocamento dado pela Eq (3.28).



**Figura E:** Diagrama esquemático mostrando a evolução dos pontos de equilíbrio Lagrangianos, para o caso de  $m_2 \ll 1$ , sendo  $k < 0$  (linhas sólidas) e para um hipotético  $k > 0$  (linhas tracejadas) (Murray, 1994)

Na Figura E, o ponto  $L_4$  caminha em direção ao ponto  $L_3$  e para um determinado valor de  $k$  deixará de existir, já o ponto  $L_5$  caminha em direção oposto para uma junção com os pontos  $L_1$  e  $L_2$ .

### 3.4 Caso da força de arrasto inercial

Como  $k$  não aparece na Eq (3.28), a Figura E não dá informação sobre a localização dos pontos de equilíbrio para valores específicos de  $k$ . Assim podemos rescrever as equações (3.26) e (3.27) da seguinte forma

$$\frac{k}{\mathbf{m}_2} = \frac{y}{r^2 g^*} \left( \frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3} \right) \quad (3.29)$$

Não é possível fazer generalizações sobre a mudança de comportamento sem fazer algumas considerações sobre a forma da função  $g^*$ . Para uma maioria de força de arrasto, a função  $g^*$  tem a forma

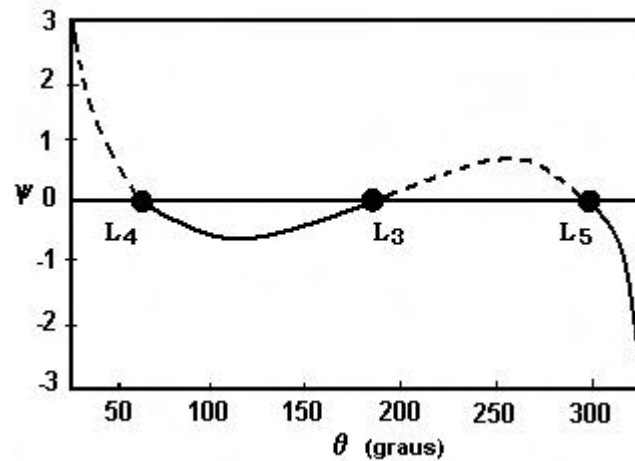
$$g^* = g_r(r) \quad (3.30)$$

onde  $g_r$  é puramente uma função de  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Como  $r \approx 1$  para  $L_3, L_4$  e  $L_5$  e fazendo  $g_1 = g_r(1)$  temos

$$r_1^3 \approx 1 \quad r_2^3 \approx (2-x)^{3/2} \quad (3.31)$$

A figura F é gerada pela expressão  $\mathbf{y} = \frac{\bar{k}}{\mathbf{m}_2} = \text{sen} \mathbf{q} \left( \frac{1}{(2-2\cos \mathbf{q})^{3/2}} - 1 \right)$  que foi derivada da Eq. (3.29) e transformada em coordenadas polares com o raio unitário onde  $\bar{k} = g_1 k$ .





**Figura F:** Relação entre o parâmetro  $\Psi$  e o deslocamento angular dos pontos de equilíbrio  $L_3$ ,  $L_4$  e  $L_5$ , no caso de pequenas razões de massas para uma força de arrasto inercial (Murray, 1994).

Essa função foi plotada para  $30^\circ \leq \mathbf{q} \leq 330^\circ$  e descreve a mudança para qualquer ponto de equilíbrio que se situe perto do círculo unitário. Note-se que em todos os casos onde  $g_r(r) = r^n$ , sendo  $n$  um número real, temos  $g_1 = 1$ , neste caso  $\bar{k} = k$ .

O mínimo da função ocorre quando  $\mathbf{q} = 108^\circ.4$  para  $\bar{k}/\mathbf{m}_2 = -0.7265$  e o máximo é quando  $\mathbf{q} = 251^\circ.6$  para  $\bar{k}/\mathbf{m}_2 = +0.7265$ . Assim, sobre o efeito desta força de arrasto os pontos Lagrangianos  $L_3$  e  $L_4$  podem sair de suas posições para uma posição comum de  $\mathbf{q} = 108^\circ.4$  antes de desaparecer para valores de  $\bar{k}/\mathbf{m}_2 < -0.7265$ . Este comportamento é independente da forma de  $g_r$ .

Se  $g_1 < 1$  então  $\bar{k} < k$  e  $L_3$  e  $L_4$  podem sobreviver de uma força de arrasto maior que no sistema  $g_1 = 1$ . Esses resultados mostram que podem existir órbitas ao redor do ponto  $L_5$  mesmo quando  $L_4$  deixa de existir.

## Capítulo 4

### Modelo de Nebulosa

Peale (1993) escolheu um modelo nebular (Weidenschiling, 1977) para investigar os efeitos do arrasto nebular sobre planetesimais perto dos pontos Lagrangianos L4 e L5.

Num estado estável da nebulosa onde todo gás está se movendo em órbita circular, a densidade  $\rho$  é constante a cada distância radial  $r$  com o movimento sendo governado por

$$\mathbf{r} \frac{dv}{dt} = -\mathbf{r} \nabla \Phi - \nabla P \quad (4.1)$$

onde  $v$  é a velocidade,  $\Phi$  é o potencial gravitacional por unidade de massa,  $P$  é a pressão onde os efeitos da viscosidade são desprezados.

Como  $\ddot{r}, \ddot{z}, \dot{\mathbf{f}}, \dot{r}$  e  $\dot{z}$  são todos nulos num estado estável, a Eq (4.1) em coordenadas cilíndricas  $r, \mathbf{f}, z$  fica

$$\begin{aligned} -r r \dot{\mathbf{f}}^2 &= -r \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial P}{\partial r} \\ 0 &= -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \mathbf{f}} \\ 0 &= -r \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.2)$$

com  $P(r,z) = \rho(r,z) k T_{mp}(r) / m$  para uma temperatura  $T = T_{mp}$  (plano mediano), constante na direção  $z$ , onde  $m$  é a massa molecular média ( $\cong 3,8 \times 10^{-24}$  g) e  $k$  é a constante de Boltzman ou com  $P = P_{mp}(r) [\rho(r,z) / \rho_{mp}(r)]^g$  para um gradiente de temperatura adiabático na direção  $z$ , e com  $\Phi = -GM_{\odot} / (r^2 + z^2)^{1/2}$  para uma massa do disco desprezível, onde  $G$  é a constante gravitacional e  $M_{\odot}$  é a massa do proto-sol.

Assim, a solução da equação (4.2) fica

$$\mathbf{r}(r, z) = \mathbf{r}_{mp}(r) e^{-\frac{z^2}{H^2}} \quad (4.3)$$

ou

$$\mathbf{r}(r, z) = \mathbf{r}_{mp}(r) \left( 1 - \frac{\mathbf{g} - 1}{\mathbf{g}} \frac{z^2}{H^2} \right)^{\frac{1}{\mathbf{g} - 1}} \quad (4.4)$$

para os dois gradientes de temperatura na direção  $z$ .

É provável que o gradiente vertical da temperatura possa estar entre o caso isothermal e adiabático. Aqui  $\mathbf{g}$  é a relação entre calores específicos e  $H$  é a dimensão da escala dada por

$$H = \sqrt{\frac{2kT_{mp}r^3}{GM_{\odot}m}} \quad (4.5)$$

Finalmente as formas das equações (4.3) e (4.4) se simplificam se  $z \ll r$

As densidades superficiais de massa  $\Sigma(r)$  para os dois casos seguem da integração das equações (4.3) e (4.4) sobre  $z$ .

$$\begin{aligned} \Sigma(r) &= \sqrt{\mathbf{p}r_{mp}} H \quad (\text{isothermal}), \\ \Sigma(r) &= \frac{5\mathbf{p}}{6} \sqrt{\frac{7}{2}} r_{mp} H \quad (\text{adiabático}), \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde  $\mathbf{g} = 7/5$  e  $H$  é a dimensão da escala avaliada para temperatura no plano mediano.

A densidade superficial de massa da nebulosa e a temperatura no plano mediano foram definidas por Weidenschilling (1977) e Beckwith et al. (1990).

Assim, Peale assume que  $\Sigma = \Sigma_0 (a/r)^p$  e  $T = T_0 (a/r)^q$ , onde  $\Sigma_0$  e  $T_0$  são os valores da densidade superficial de massa e da temperatura no plano mediano a uma distância  $a$  entre Júpiter e o Sol. Weidenschilling (1977) mostrou alguns modelos com  $0.5 \leq q \leq 1.0$ . Observações de discos em torno das estrelas T-Tauri implicam uma distribuição de temperatura na superfície com  $q \approx 1/2$  a  $3/4$  (Beckwith et al., 1990).

A densidade superficial de massa não pode ser descrita por meio de observação, mas valores teóricos de  $p$  são limitados entre 1/2 e 2 (Kusaka, Nakano e Hayashi, 1970; Cussen e Moosman, 1981; Lissauer, 1987). Se a massa total da nebulosa é fixada a  $0,04 M_0$  para uma massa da nebulosa mínima confinada entre 0,05 e 50 UA,  $\Sigma_0$  a 5,2 UA é uma função do valor assumido  $p$  com um máximo de  $364 \text{ g/cm}^2$  e  $\Sigma_0 = 105 \text{ g/cm}^2$  para  $p = 0,5$ . Peale fixa de maneira usual  $\Sigma_0$  a  $145 \text{ g/cm}^2$  e assume  $p$  e  $q$  aplicados somente a uma região de interesse local.

Como Júpiter provavelmente cria uma larga e simétrica redução axial na densidade nebular quando ele se aproxima de sua massa atual (Lin e Papaloizou, 1980), e assumindo-se que até  $13 M_T$  ele não perturba a distribuição da massa da nebulosa, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{mp}(r) &= \frac{\Sigma(r)}{\sqrt{p} H(r)} \\ &= \frac{\Sigma_0}{\sqrt{p} H_0} \left( \frac{a}{r} \right)^{\frac{3}{2} + p - \frac{q}{2}} \left( 1 - b e^{-\left( \frac{r-a}{H_0} \right)^2} \right), \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$P_{mp}(r) = \frac{kT_0}{m} \left( \frac{a}{r} \right)^q \mathbf{r}_{mp}(r), \quad (4.8)$$

onde  $0 < b < 1$ . Como  $p = 0$  não é realista para a nebulosa inteira, deste modo uma falha na distribuição de densidade deveria persistir em torno da região onde os precursores dos troianos foram confinados.

Com  $\Omega \equiv \hat{f}$ , substituindo as equações (4.7) e (4.8) na primeira da Eq. (4.2) nos dá

$$\left( \frac{\Omega}{n_0} \right)^2 = \left( \frac{a}{r} \right)^3 - \frac{1}{2} \left( \frac{H_0}{a} \right)^2 \left( \frac{3}{2} + p + \frac{q}{2} \right) \left( \frac{a}{r} \right)^{q+2} + \frac{b \frac{a}{r} \left( 1 - \frac{a}{r} \right) e^{-\left( \frac{r-a}{H_0} \right)^2}}{1 - b e^{-\left( \frac{r-a}{H_0} \right)^2}} \quad (4.9)$$

para uma velocidade angular do gás nebuloso onde  $n_0 = \sqrt{GM_0/a^3}$  é o movimento médio de um planetesimal a uma distância de Júpiter até o sol. O período não dimensional de uma massa infinitesimal é  $2p$ .

Na Eq. (4.7), vemos que  $r_{mp}$  depende do parâmetro  $p$  como da densidade superficial de massa  $\Sigma_0$ . Essa densidade no plano mediano diminui mais lentamente com  $g$  para valores maiores do parâmetro  $q$  porque um gradiente radial de temperatura mais inclinado significa que a dimensão da escala aumenta mais lentamente com  $r$ .

Na falta de uma falha ( $b = 0$ ), a Eq.(4.9) mostra que o gradiente radial de pressão conduz a uma redução na velocidade angular do gás nebuloso em relação ao valor kepleriano para todos os raios. A presença de intervalo significa que o gradiente radial de pressão negativo é acentuado dentro do intervalo reduzindo ainda mais a velocidade angular do gás nebuloso, mas o gradiente de pressão é revertido fora do intervalo levando a uma velocidade angular que excede o valor kepleriano.

#### 4.1 Abordagem de arrasto Nebular descrito por Peale

Como o gás nebuloso gira em torno do sol a uma velocidade angular menor que o valor kepleriano, um planetesimal orbitando a uma velocidade kepleriana sofrerá um vento frontal que reduzirá continuamente sua energia orbital e momento angular (Weidenschilling, 1977).

A resistência ao movimento do corpo devido ao gás é produzida por diferenças de pressão e fricção. Quando as velocidades relativas  $v_{rel}$  são grandes, as diferenças de pressão dominam, assim a resistência é proporcional à pressão dinâmica ( $\rho v_{rel}^2 / 2$ ) ou à força de arrasto  $F_d \propto \rho v_{rel}^2 S$ , onde  $S$  é a seção de corte. Em baixa velocidade, a fricção domina, então a resistência é proporcional a  $v_{rel}$ . É habitual adotar a representação  $v^2$  e usar um coeficiente de arrasto, variável, para acomodar todas as velocidades relativas.

Assim, podemos escrever para uma partícula esférica (Prandtl, 1952)

$$\frac{F_d}{m_p} = -\frac{c_d \rho R^2 \mathbf{r}}{2m_p} v_{rel} V_{rel} = -\frac{3c_d \mathbf{r}}{8r_p R} v_{rel} V_{rel} \quad (4.10)$$

onde  $m_p$  e  $r_p$  são a massa e densidade do planetesimal,  $R$  é o raio do planetesimal,  $\rho$  é a densidade do gás e  $c_d$  é o coeficiente de arrasto.

Para uma  $v_{rel}$  pequena, temos que  $c_d = cte$  e  $F_d \propto v^2$ .

O coeficiente de arrasto  $c_d$  é uma função do número de Reynolds  $\Re$  onde

$$\Re = \frac{2v_{rel} R \rho}{\mathbf{h}} \quad (4.11)$$

com  $\mathbf{h}$  sendo a viscosidade molecular. A dependência empírica de  $\log c_d$  com  $\log \Re$  de Prandtl (1952) para um corpo esférico é aproximada por um polinômio de sexta ordem em  $\log \Re$ . Esta dependência leva à  $c_d \sim 20 / \Re$  para  $\Re = 0,05$  e  $c_d \sim 0,43$  para  $\Re = 500$ . Weidenschilling (1977) determinou o arrasto nebular sobre um corpo sólido e esférico para valores extremos do número de Reynolds para valores típicos dos parâmetros nebulares a uma distância de Júpiter ao Sol ( $\rho_{pm} \approx 10^{-11} \text{ g/cm}^3$ ),  $R \approx 5\text{m}$  para  $\Re = 1$ , embora para planetesimais de 2 metros ou menos um modelo de arrasto viscoso torne-se questionável. Finalmente,

$$V_{rel} = V - V_{gas} = (\dot{x} + y\Omega)\hat{e}_x + (\dot{y} - x\Omega)\hat{e}_y \quad (4.12)$$

onde  $V$  é a velocidade do planetesimal com as componentes  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  nas direções ortogonais denotadas pelos vetores  $\hat{e}_x$  e  $\hat{e}_y$  no plano mediano da nebulosa e  $\Omega$  é a velocidade angular do gás dada pela Eq(4.9). Todos os movimentos são confinados no plano mediano da nebulosa.

## 4.2 Abordagem de arrasto Nebular descrito por Murray

Murray (1994) utiliza uma forma simplificada da força de arrasto de Peale descrita por Malhotra (1993), onde  $c_d = 0.5$  é constante e a velocidade angular do gás é dada por  $\Omega = (1 - n^*)n$ , onde  $n = r^{-3/2}$  é o movimento médio do planetesimal e  $n^* \approx 0.005$  é uma constante que mede a diferença entre a velocidade do gás e a velocidade circular local. Malhotra utilizou os valores fixados de  $\mathbf{r} = 10^{-10} \text{g cm}^{-3}$ ,  $\mathbf{r}_p = 2 \text{g cm}^{-3}$ . Nessas unidades o valor numérico da constante  $k = -(3/8)c_d(\mathbf{r}_{gas} / \mathbf{r}) / R_p$  é  $-0.014/UA$  para  $R_p = 100m$ .

Com a notação de Murray, as componentes da força de arrasto no sistema girante são dadas por

$$F_x = -kV_{rel}(\dot{x} - y + (1 - n^*)ny) \quad F_y = +kV_{rel}(\dot{y} + x - (1 - n^*)nx)$$

onde

$$V_{rel} = \left[ (\dot{x} - y + (1 - n^*)ny)^2 + (\dot{y} + x - (1 - n^*)nx)^2 \right]^{1/2}$$

Dessa definição temos

$$F_x^* = -k(1 - (1 - n^*)n)^2 ry \quad F_y^* = +k(1 - (1 - n^*)n)^2 rx$$

e para resolver as equações da localização dos pontos Lagrangianos, teremos  $g^*$  da forma  $g^* = g_r(r)$ . Sendo que  $n = r^{-3/2}$ , os pontos Lagrangianos se deslocarão na mesma trajetória que os do arrasto inercial. Todavia, fazendo  $r = 1$  teremos  $g_1 = \mathbf{h}^{*2}$  e assim  $\bar{k} = k\mathbf{h}^{*2}$ .

## Capítulo 5

### Simulações e análise dos resultados

#### 5.1 Simulações Numéricas

Neste trabalho temos como objetivo estudar o sistema de Saturno e seus satélites. Assumimos que a partícula e o satélite têm suas órbitas no plano médio do disco nebuloso. Foi escolhido o modelo de Nebulosa descrito por Peale (1993), com a diferença de que a densidade do gás, neste caso, é aplicada somente a uma região local de nosso interesse. Como na maioria dos casos,  $\rho = 10^{-10} \text{ g/cm}^3$  ( Malhotra, 1993; Lissauer e Kary, 1995; Marzari e Scholl, 1997). A dinâmica é estudada através do problema elíptico restrito de três corpos no sistema inercial com o semi eixo maior  $a = 1 \text{ UD}$  (distância Planeta –satélite) e uma razão de massa  $m_2 = 10^{-6}$ . Para a dinâmica do gás foi escolhido o modelo de Malhotra (1993) com  $\Omega = (1 - 0.005)n$  sendo que  $\Omega$  é a velocidade angular do gás. O integrador numérico para as simulações é o Burlirsh-Stoer e as condições iniciais para cada partícula foram dadas de tal forma que as posições iniciais, onde a partícula é colocada de  $30^\circ$  em  $30^\circ$ , vão de 10 a 30 esferas de Hill em relação à órbita do satélite. Sendo que se  $a = 1$ , temos  $h = 0.007$  para  $m_2 = 10^{-6}$ . Consideramos que o gás não tem efeito sobre a órbita do satélite e que a órbita da partícula é circularizada por causa do gás. Em todos os casos que estudamos, teoricamente não existe mais L4, pois segundo Murray para o caso de um satélite com uma órbita circular L4 e L3 migram e desaparecem quando  $k > 0.7265 \frac{v_K^2}{v_g^2} m_2$ .

Por exemplo, se  $v_g/v_K = 0.005$ , todos os valores da constante de arrasto maiores que  $k \approx 0.029$  satisfazem essa condição. Para cada posição inicial das partículas fazemos variar  $k$  de 0.025 a 1.0 e a excentricidade do satélite  $e$  de 0 a 0.7, dando um total de mais ou menos 80.000 condições iniciais.

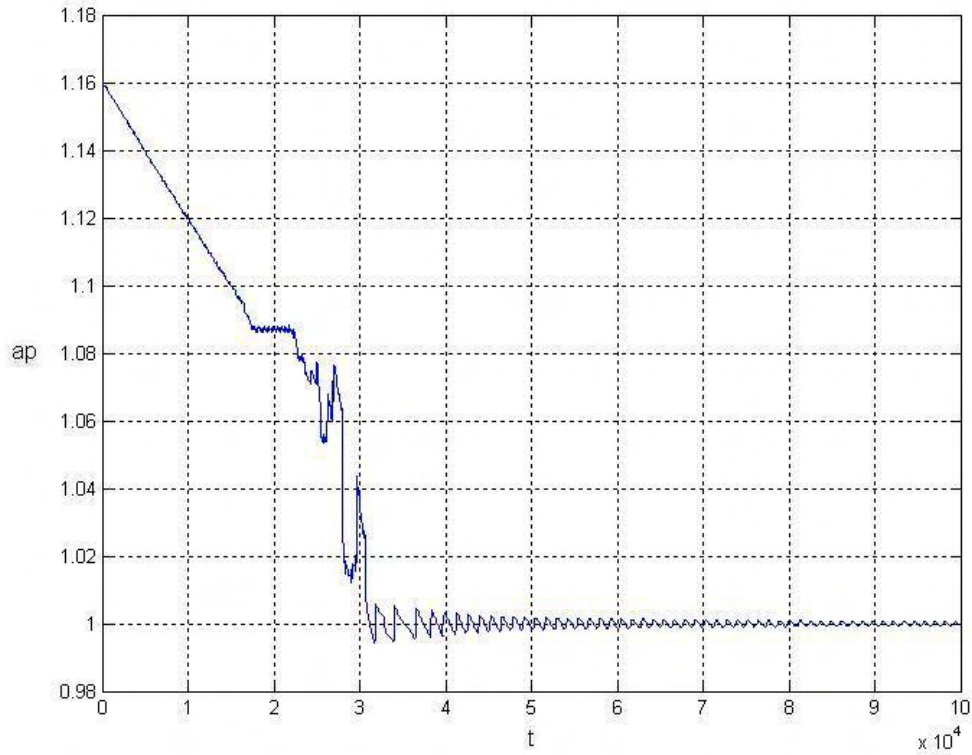
Se a distância entre a partícula e o satélite for menor que  $R_H = 0.05h$  a integração será interrompida. O tempo de integração é de  $10^5$  unidades de tempo, então sabendo que o período do satélite é de  $2p$ , teremos  $\approx 16000$  períodos.



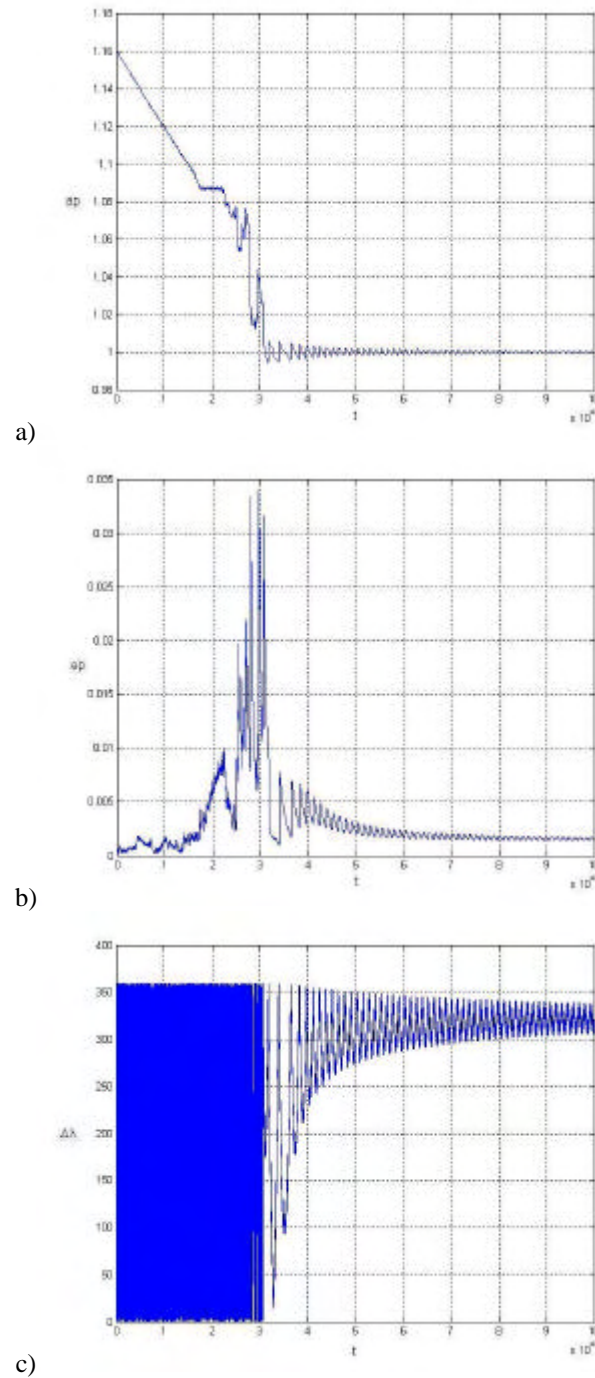
Se a partícula fica numa órbita em torno do planeta com seu semi-eixo maior dentro de uma faixa de  $1h$  de distância em relação à órbita do satélite, então podemos assumir que ela foi capturada numa ressonância 1/1. Consideramos as difusões se o semi-eixo maior da partícula fica menor que 0.9.

Os dados são armazenados em quatro arquivos, um para as colisões, um para as capturas em ressonância 1/1, um para as difusões e o último para os outros casos, os que não se enquadram nos três primeiros. Os gráficos e as figuras foram gerados com o auxílio do MATLAB.

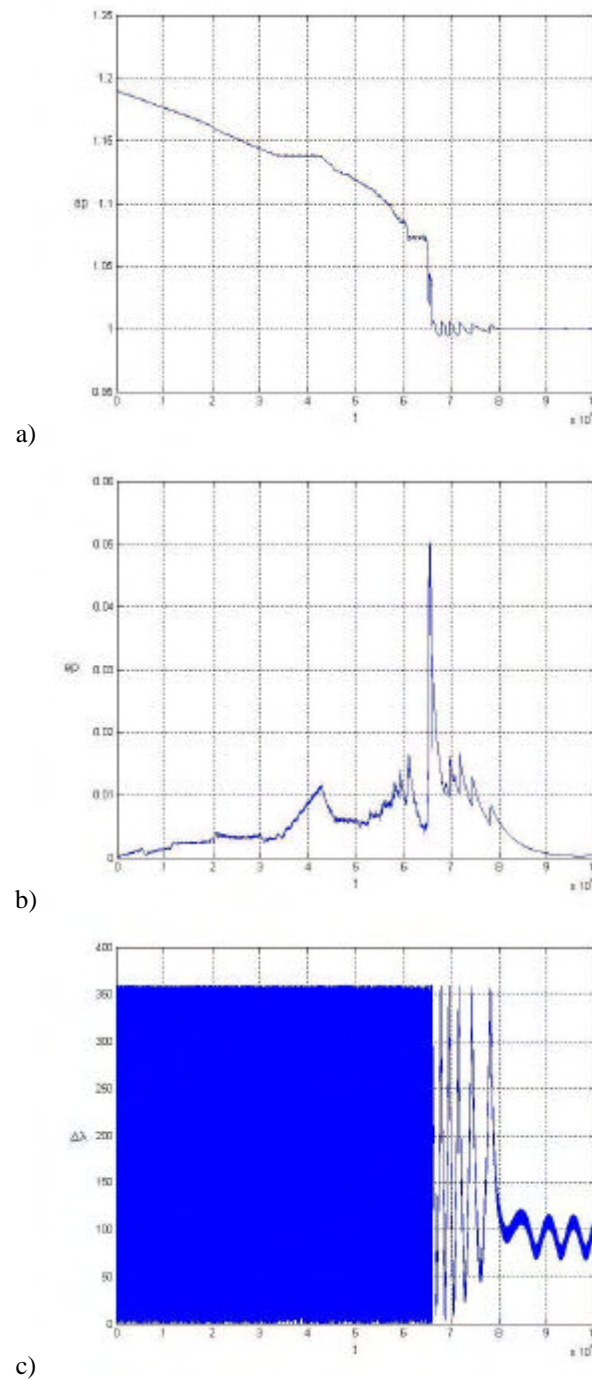
## 5.2 Resultados e análise



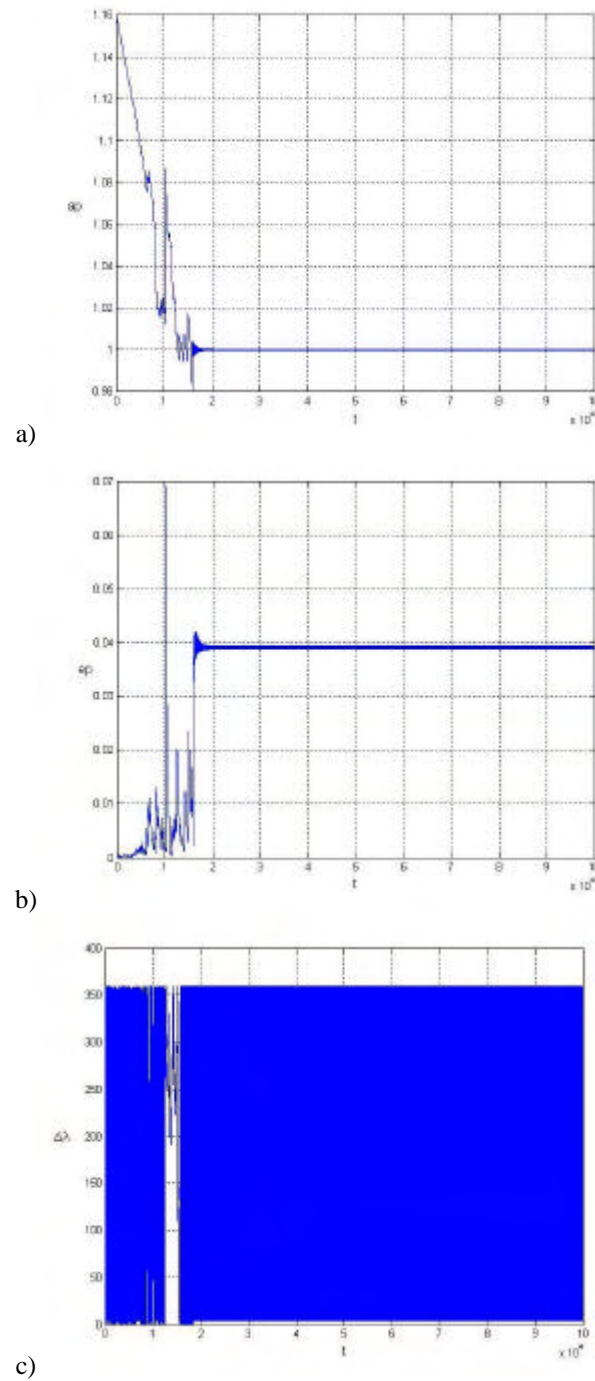
**Figura 1:** Gráfico mostrando o comportamento do semi-eixo maior de uma partícula no processo de captura em ressonância 1/1 com o corpo secundário (satélite). A massa do satélite é  $10^{-6} M_0$  e as condições iniciais neste caso são  $r_0 = 1.16$  para a partícula,  $e = 0.056$  para o satélite e  $k = 0.075$  para a constante do gás.



**Figura 2:** Gráficos mostrando o comportamento a) do semi-eixo maior da partícula b) da excentricidade de sua órbita e c) da variação de sua longitude com o satélite, no processo de captura em ressonância 1/1. A massa do satélite é  $10^{-6} M_0$  e as condições iniciais neste caso são  $r_0 = 1.16$  para a partícula,  $e = 0.056$  para o satélite e  $k = 0.075$  para a constante do gás.

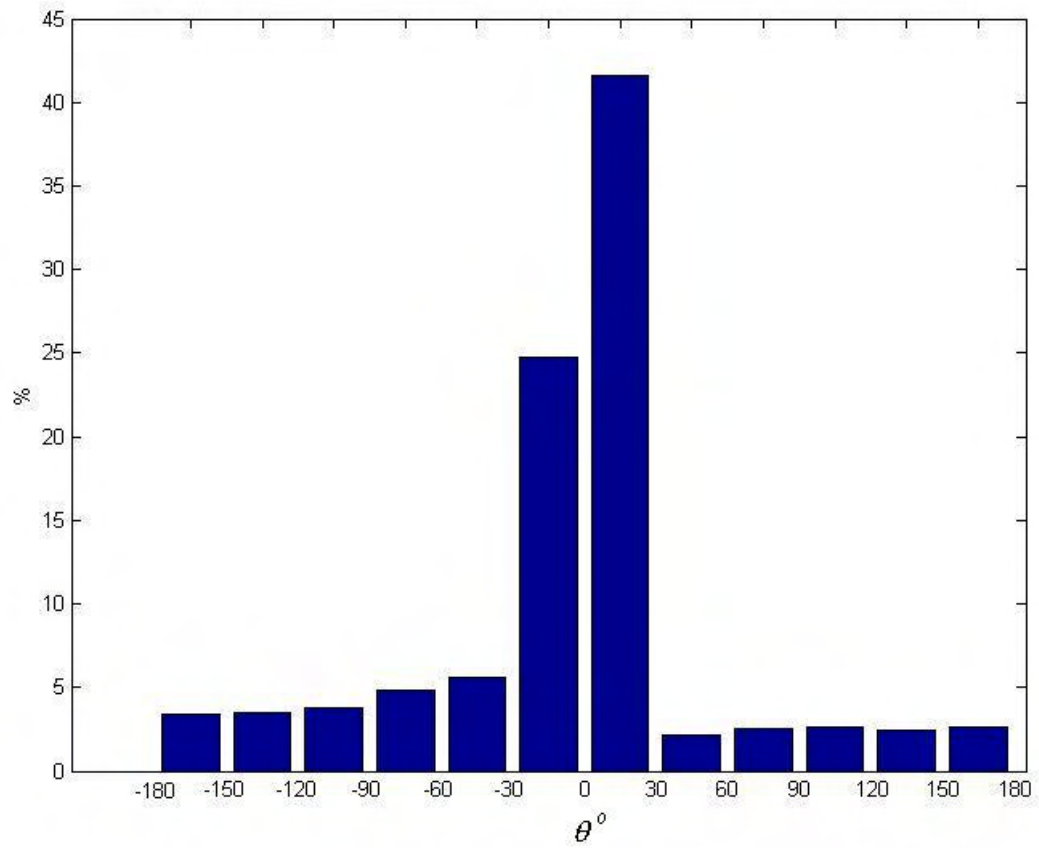


**Figura 3:** Gráficos mostrando o comportamento a) do semi-eixo maior da partícula b) da excentricidade de sua órbita e c) da variação de sua longitude com o satélite, no processo de captura em ressonância 1/1. A massa do satélite é  $10^{-6} M_0$  e as condições iniciais neste caso são  $r_0 = 1.19$  para a partícula,  $e = 0.07$  para o satélite e  $k = 0.025$  para a constante do gás.

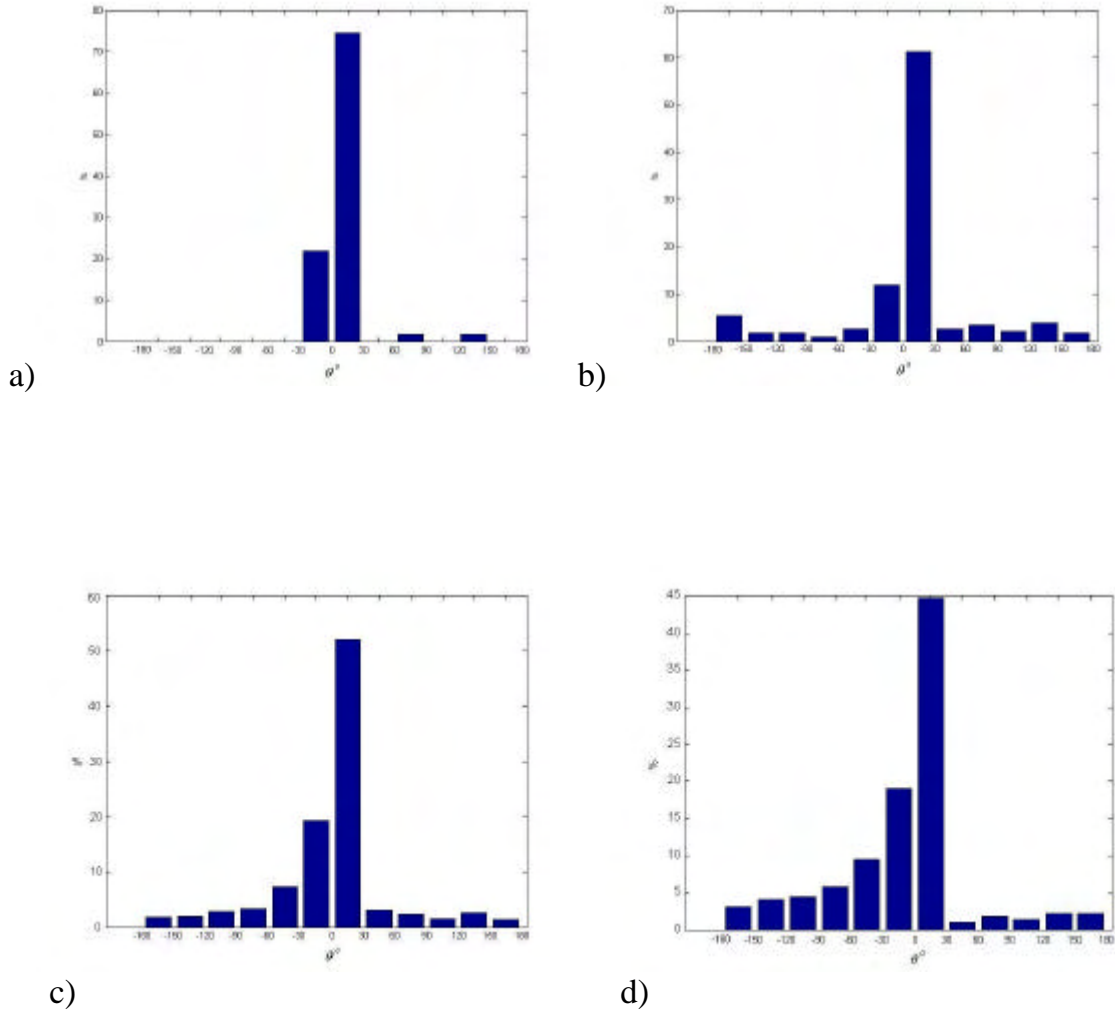


**Figura 4:** Gráficos mostrando o comportamento a) do semi-eixo maior da partícula b) da excentricidade de sua órbita e c) da variação de sua longitude com o satélite, no processo de captura em ressonância 1/1. A massa do satélite é  $10^{-6} M_0$  e as condições iniciais neste caso são  $r_0 = 1.16$  para a partícula,  $e = 0.07$  para o satélite e  $k = 0.225$  para a constante do gás.

Sabemos que a simetria entre L4 e L5 é quebrada na presença de arrasto gasoso com o corpo secundário numa órbita não circular (Peale, 93). Assim como Kary e Lissauer (1995), escolhemos valores da constante de arrasto gasoso que são suficientemente grandes para fazer migrar L4 e L3 além dos  $108^\circ$ . Porém, nosso objetivo aqui é mostrar o que acontece na hora da captura em ressonância 1/1 quando a partícula, decaindo na sua órbita, encontra o satélite. Assim a Figura 1 mostra o comportamento do semi-eixo maior de uma partícula. Durante sua descida até o encontro com o satélite, podemos ver que ela foi capturada em algumas ressonâncias externas. A Figura 2 nos permite um melhor entendimento sobre este processo comparando as variações do seu semi-eixo, excentricidade e longitude. Como Borelli (2001) mostrou, a captura em ressonância externa provoca um aumento da excentricidade até um certo limite onde ela acaba saindo. Este processo faz que, suponhamos, a partícula perca energia. Continuando na sua descida, ela acaba cruzando a órbita do satélite. Naquele momento, podemos perceber uma explosão da excentricidade que pode ser explicada pela troca de momento com o satélite. Em seguida, as oscilações tanto do semi-eixo maior da partícula quanto da sua excentricidade diminuem, estabilizando a órbita. Temos ali uma captura em ressonância 1/1 e, observando a longitude, podemos ver que ela ocorreu no ponto L5. Como já foi visto anteriormente, escolhemos valores da constante de arrasto gasoso que teoricamente excluem o ponto L4 de nosso estudo, porém Namouni e Murray (2000) mostraram que a excentricidade provoca um deslocamento à direita do ponto L4 e um deslocamento à esquerda do ponto L5. Maior será a excentricidade, maior será este deslocamento. A Figura 3 mostra que, no caso de uma excentricidade de 0.07, o ponto L4 acaba reaparecendo para um valor da constante de arrasto perto do limite estabelecido por Murray (94). Observando a Figura 3, podemos ver que as oscilações durante e depois do processo da captura são muito menores que no caso da captura em L5. Isso pode ser explicado pelo fato de que a fricção devido ao arrasto é bem menor ( $K = 0.025$ ), caracterizando um tamanho maior para a partícula (Mazzari e Sholl, 1997). Se aumentarmos em aproximadamente 10 vezes o valor de  $k$ , obtemos a Figura 4 que caracteriza uma órbita de tipo ferradura. Essas órbitas aparecem neste trabalho para valores de  $e > 0.05$ .

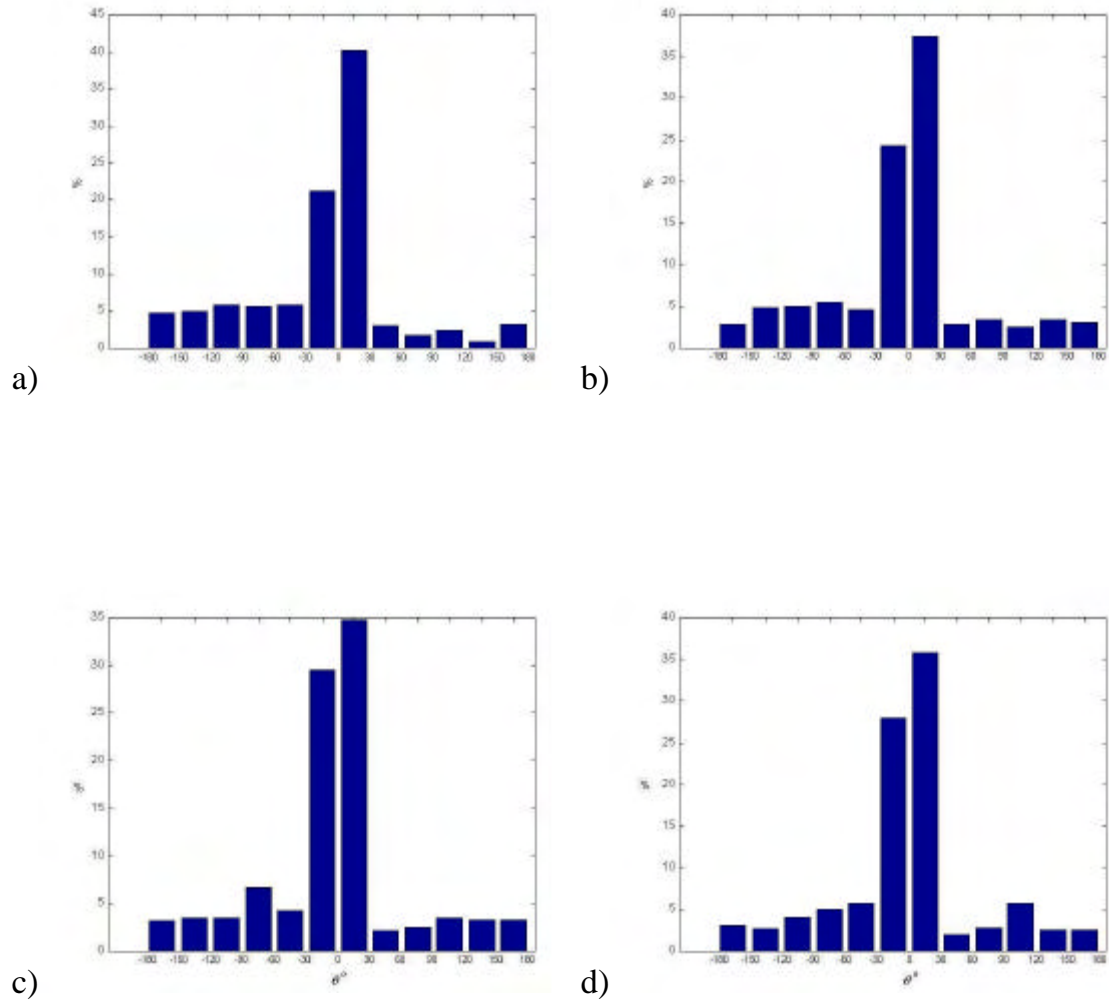


**Figura 5:** Histogramas da distribuição geral do ângulo  $q$  entre a partícula e o satélite na hora de sua entrada na região coorbital, antes de ser capturada em ressonância 1/1, para todos os valores de  $0.025 < k < 1.0$  e  $0.007 < e < 0.07$

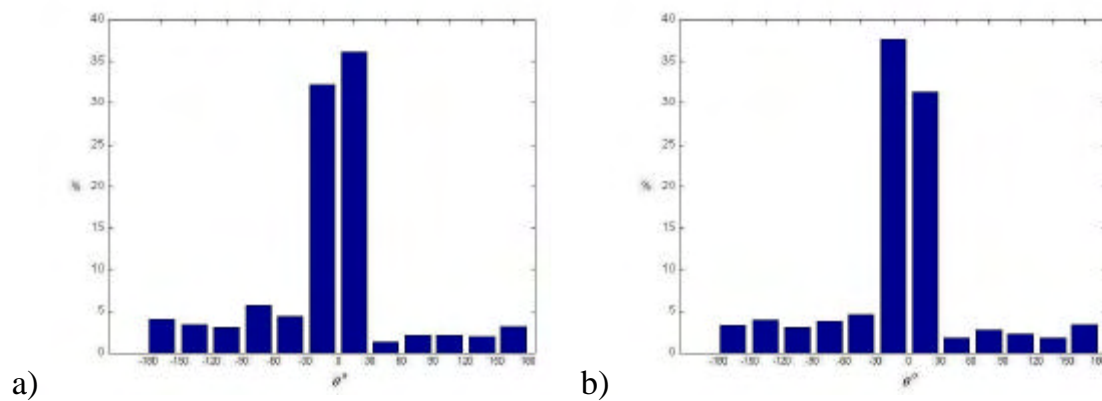


**Figura 6:** Histogramas da distribuição do ângulo  $q$  entre a partícula e o satélite na hora de sua entrada na região coorbital, antes de ser capturada em ressonância 1/1, para todos os valores de  $0.025 < k < 1.0$  e para as excentricidades da órbita do satélite seguintes:  
a)  $e = 0.007$ , b)  $e = 0.014$ , c)  $e = 0.021$  e d)  $e = 0.028$ .

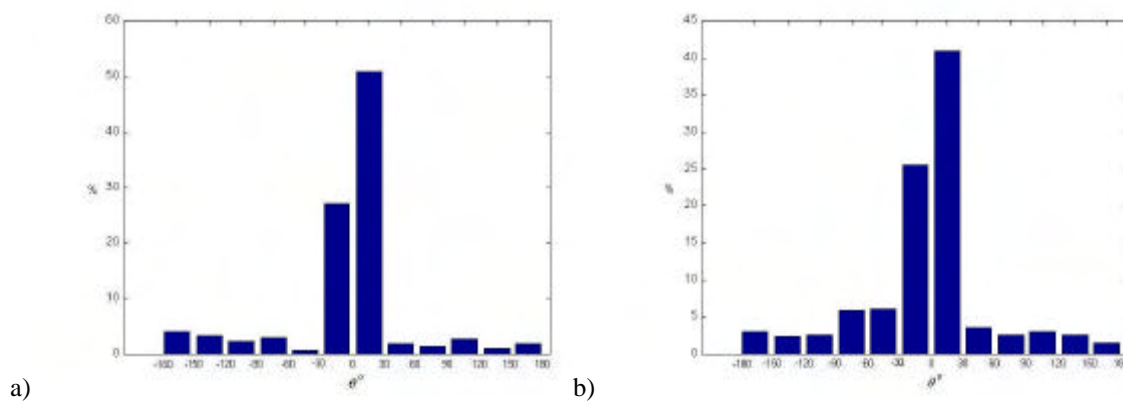




**Figura 7:** Histogramas da distribuição do ângulo  $q$  entre a partícula e o satélite na hora de sua entrada na região coorbital, antes de ser capturada em ressonância 1/1, para todos os valores de  $0.025 < k < 1.0$  e para as excentricidades da órbita do satélite seguintes:  
a)  $e = 0.035$ , b)  $e = 0.042$ , c)  $e = 0.049$  e d)  $e = 0.056$ .



**Figura 8:** Histogramas da distribuição do ângulo  $q$  entre a partícula e o satélite na hora de sua entrada na região coorbital, antes de ser capturada em ressonância 1/1, para todos os valores de  $0.025 < k < 1.0$  e para as excentricidades da órbita do satélite seguintes: a)  $e = 0.063$ , b)  $e = 0.07$ .

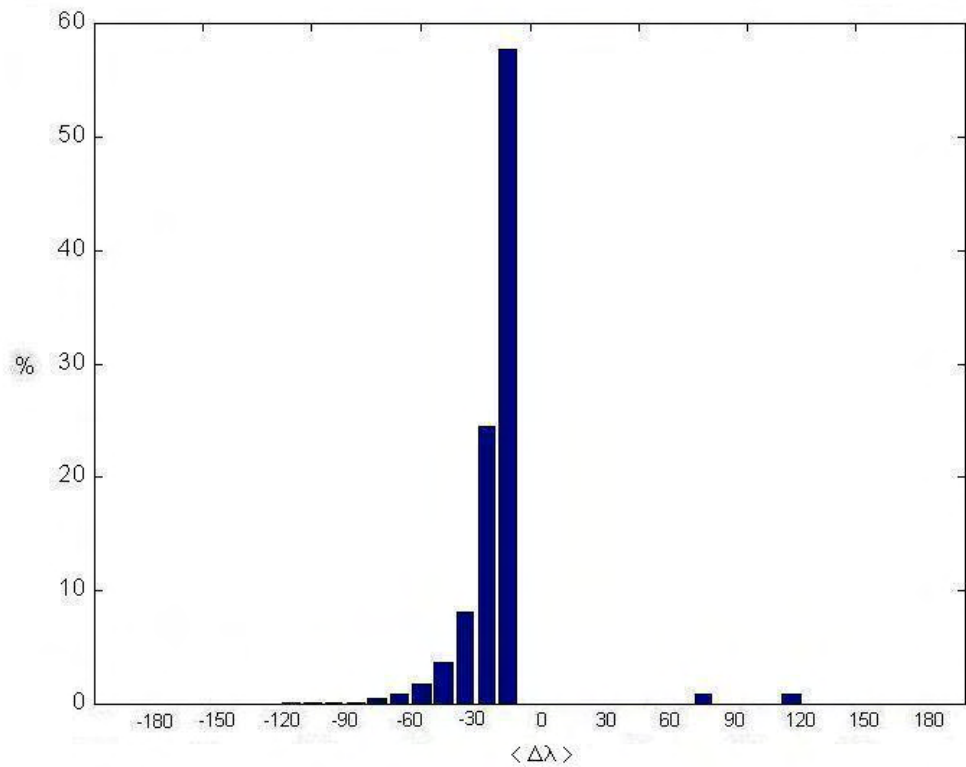


**Figura 9:** Histogramas da distribuição do ângulo  $q$  entre a partícula e o satélite na hora de sua entrada na região coorbital, antes de ser capturada em ressonância 1/1, para todos os valores de  $0.007 < e < 0.07$  e para a)  $0.025 < k < 0.125$  e b)  $0.9 < k < 1.0$ .

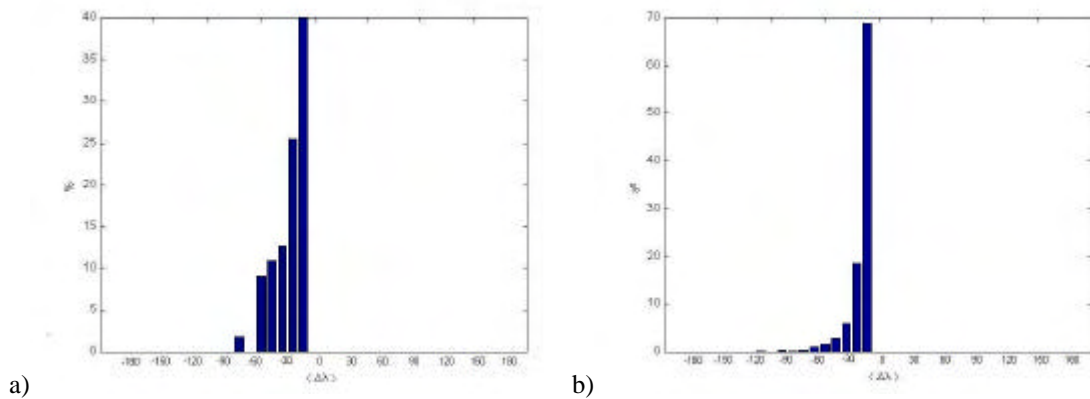
Queremos saber agora quais são os ângulos entre a partícula e o satélite que favorecem as capturas em ressonância 1/1 na hora do encontro. A Figura 5 mostra essa distribuição geral dos ângulos na hora da captura para todas as condições iniciais.

Uma primeira análise mostra que, na maioria dos casos, a passagem da partícula pela região coorbital ocorre perto do satélite em 70% dos casos. A preferência dessas passagens, olhando o plano da órbita, é por cima do satélite na região entre  $0^\circ$  e  $30^\circ$ . Parece também que a região atratora é maior no caso geral do lado do ponto L5, representando 20 % dos casos. Qual é o efeito da excentricidade em relação à região atratora?

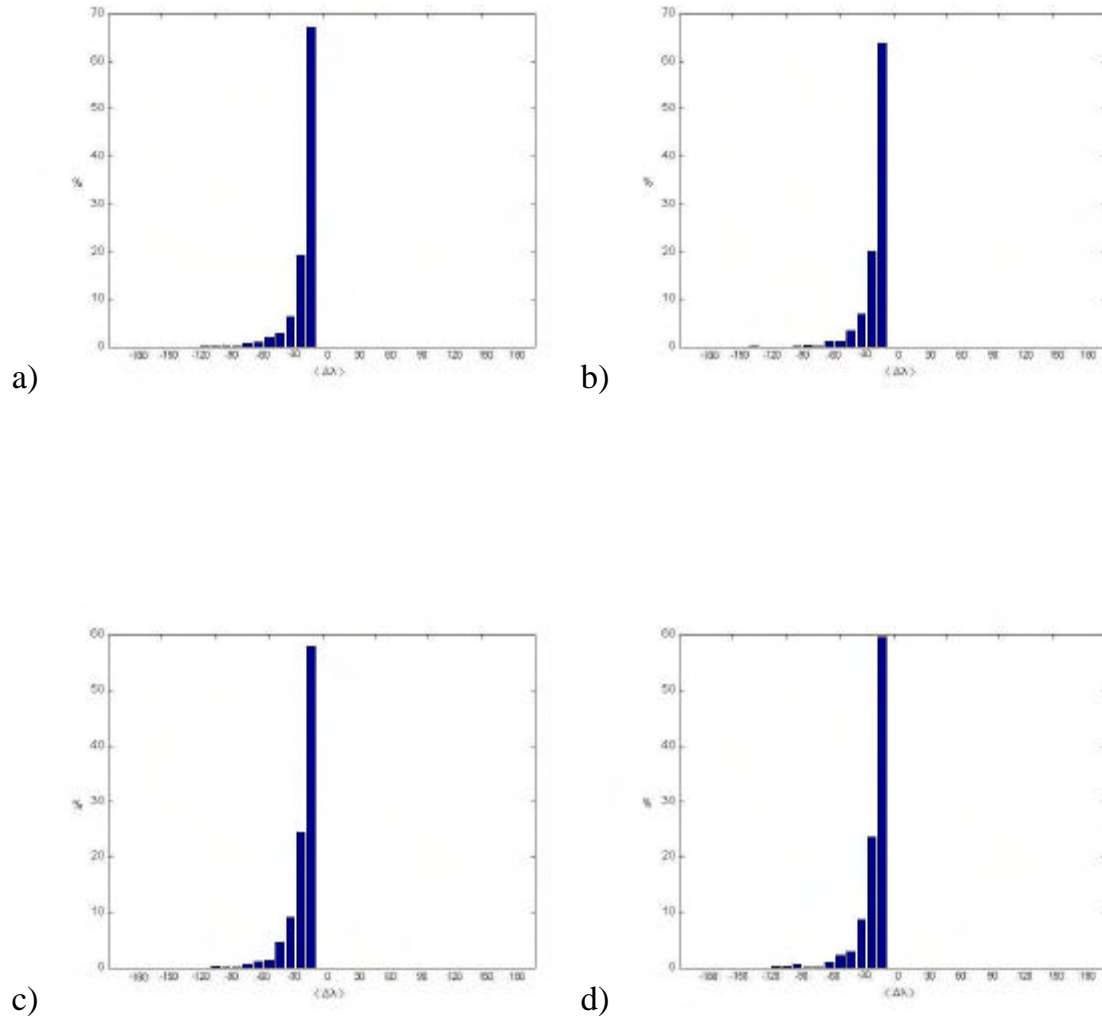
As Figuras 6-8 dão alguns elementos de resposta a esta pergunta. Quando a excentricidade do satélite é pequena (até 0.021), olhando para a Figura 6, a maioria das passagens se situa na faixa compreendida entre  $0^\circ$  e  $30^\circ$ . Aumentando a excentricidade para 0.028, a região em torno do ponto L5 começa a se destacar. A Figura 7 mostra que esta região em torno do ponto L5 começa a se deslocar em direção ao satélite. Quando a excentricidade atinge seu máximo (0.07), a faixa onde o maior número de partículas faz a sua passagem, pela região coorbital, se inverte do outro lado do satélite entre  $-30^\circ$  e  $0^\circ$  (Figura8), representando 45% do total contra 25% no caso geral. O aumento do arrasto não é suficiente para mudar a configuração, porém ele mostra um aumento da região atratora perto da faixa onde se situa o ponto L5 (figura 9). Segundo Kary e Lissauer (1995), o movimento epicloidal do satélite, devido a sua excentricidade, aumenta a velocidade relativa entre a partícula e o satélite e amplia o tamanho da região atratora. Quando aumenta o tamanho da região atratora, a partícula tem mais chance de ter uma aproximação máxima com o satélite, aumentando suas chances de ser capturada. Como já foi visto, o aumento da excentricidade do satélite e do arrasto gasoso aumenta a região atratora em torno do ponto L5, que se desloca em direção ao satélite.



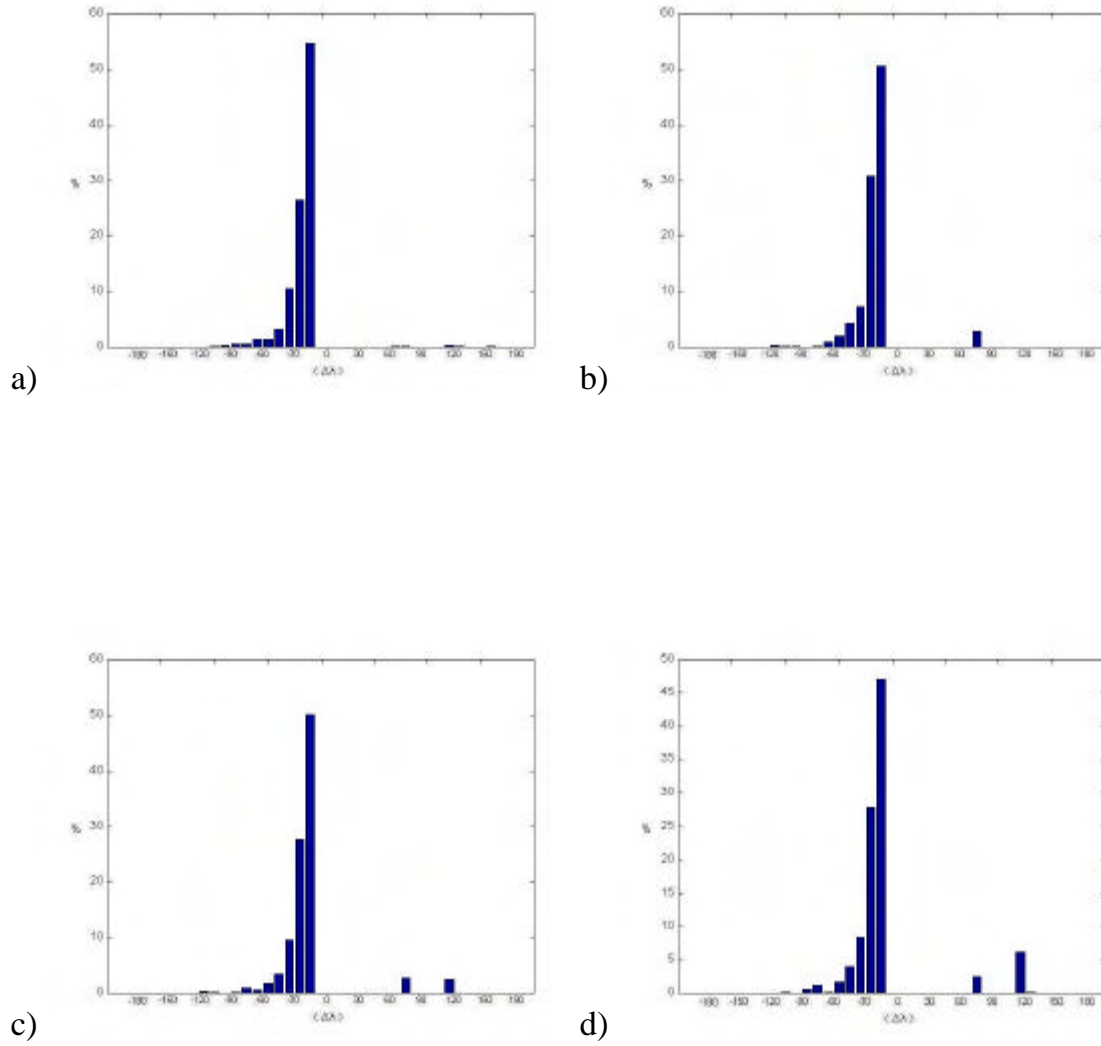
**Figura 10:** Histograma da média geral da longitude  $\langle \Delta\lambda \rangle$  entre o satélite e a partícula durante a captura em ressonância 1/1, para todos os valores de  $0.025 < k < 1.0$  e  $0.007 < e < 0.07$ .



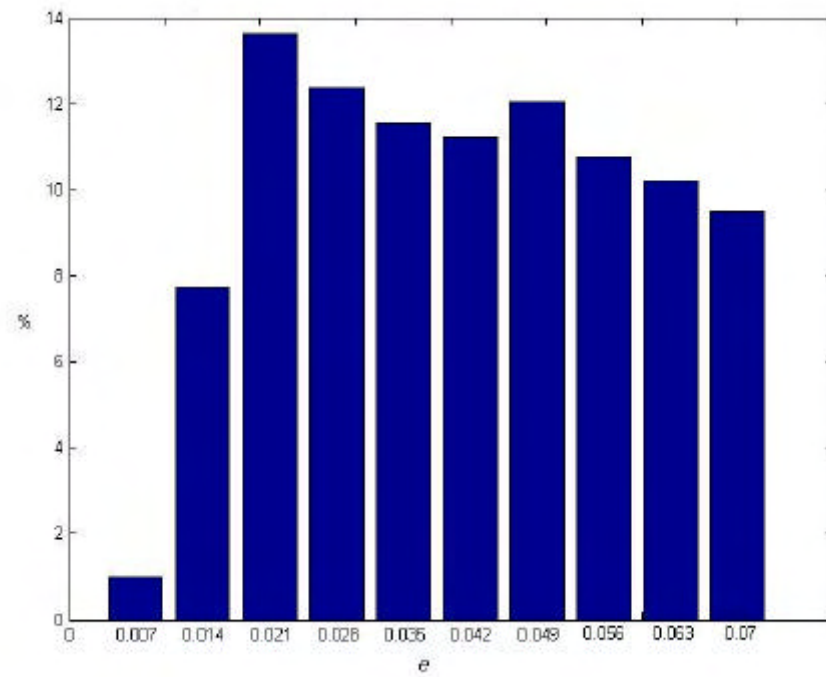
**Figura 11:** Histogramas da media da longitude  $\langle \Delta\lambda \rangle$  entre o satélite e a partícula durante a captura em ressonância 1/1, para todos os valores de  $0.025 < k < 1.0$  e para as excentricidades da órbita do satélite seguintes: a)  $e = 0.007$  e b)  $e = 0.014$ .



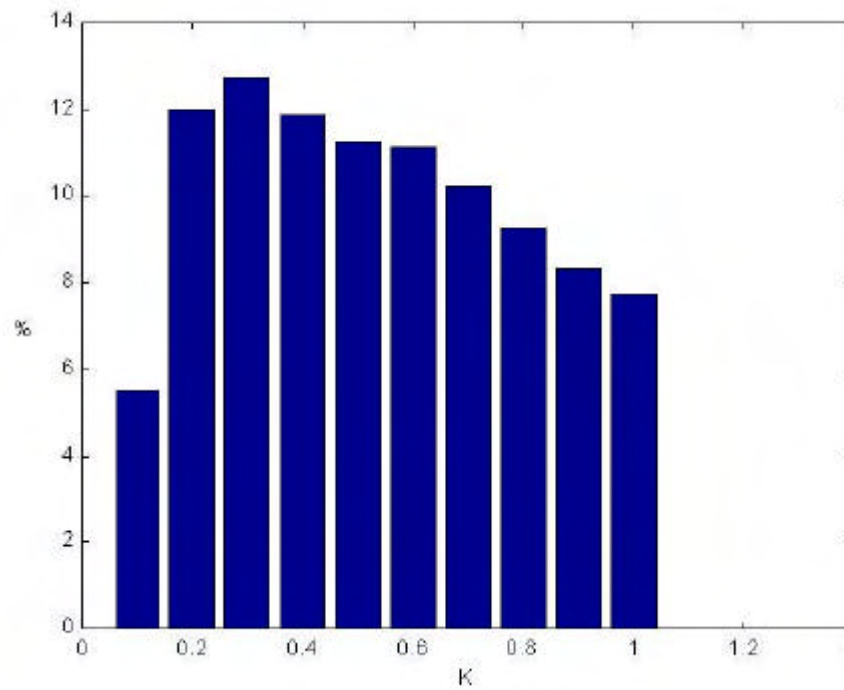
**Figura 12:** Histogramas da media da longitude  $\langle \Delta\lambda \rangle$  entre o satélite e a partícula durante a captura em ressonância 1/1, para todos os valores de  $0.025 < k < 1.0$  e para as excentricidades da órbita do satélite seguintes: a)  $e = 0.021$ , b)  $e = 0.028$ , c)  $e = 0.035$  e d)  $e = 0.042$ .



**Figura 13:** Histogramas da media da longitude  $\langle \Delta \lambda \rangle$  entre o satélite e a partícula durante a captura em ressonância 1/1, para todos os valores de  $0.025 < k < 1.0$  e para as excentricidades da órbita do satélite seguintes: a)  $e = 0.049$ , b)  $e = 0.056$ , c)  $e = 0.063$  e d)  $e = 0.07$ .



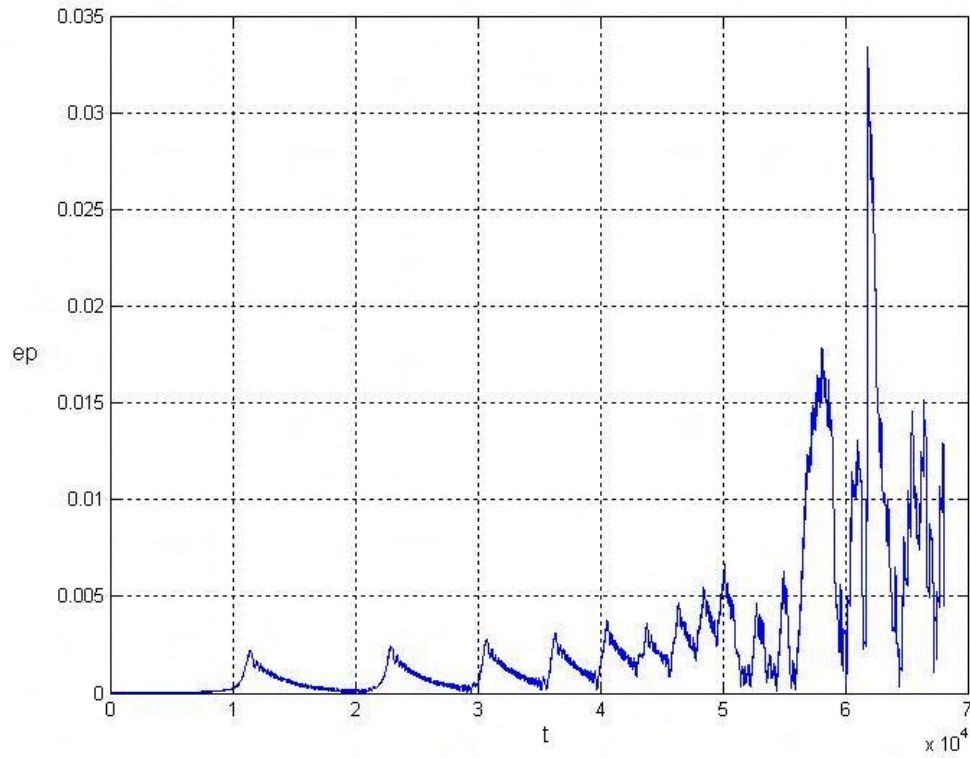
**Figura 14:** Histograma da distribuição das capturas em relação à excentricidade  $e$  do satélite.



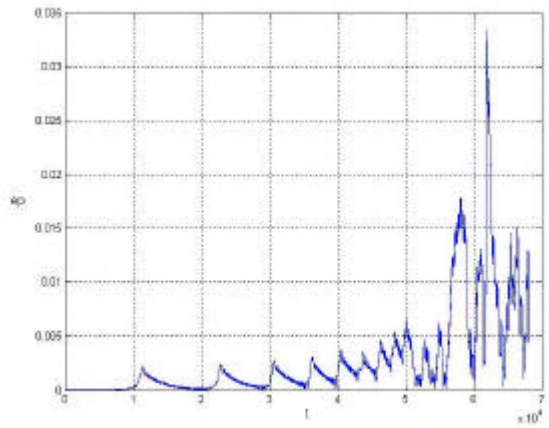
**Figura 15:** Histograma da distribuição das capturas em relação à constante da força de arrasto  $k$ .

O estudo da média da longitude entre a partícula e o satélite durante a captura mostra o tipo de órbita e se a partícula foi capturada pelo ponto L5 ou L4. Como já foi visto, teoricamente, segundo Murray (94) e Lissaeur (95), nossas condições para a constante  $k$  de arrasto são grandes o suficiente para que o ponto L4 deixe de existir. Olhando para a Figura 10, podemos ver que a maioria das capturas é em torno do ponto L5, porém algumas médias da longitude estão entre  $60^\circ$  e  $90^\circ$ , caracterizando uma captura em torno do ponto L4 e em torno de  $120^\circ$  caracterizando uma órbita de ferradura. Se observarmos as Figuras 11-13, percebemos que essas órbitas aparecem quando a excentricidade é da ordem de 0.05. Namouni e Murray (2000) mostraram que a excentricidade provoca um deslocamento à direita do ponto L4 e um deslocamento à esquerda do ponto L5. Fica evidente que a partir de uma excentricidade de 0.05 este deslocamento é suficiente, nas condições que estamos trabalhando em relação à  $k$ , para o reaparecimento dos pontos L4 e L3. Finalmente, a distribuição das capturas em relação à excentricidade (Figura 14) e à constante  $k$  (Figura 15) mostra um máximo para  $e = 0.021$  e  $k = 0.3$ , decrescendo linearmente com o aumento dos mesmos.

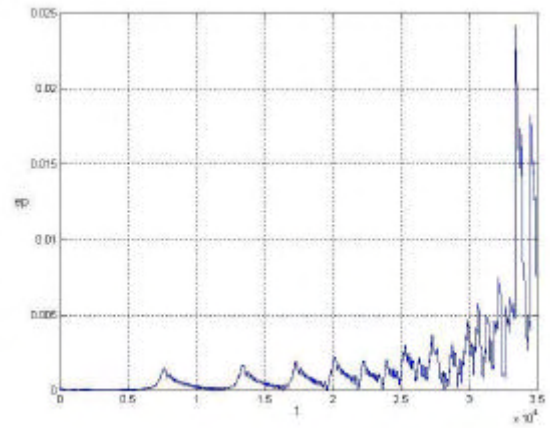




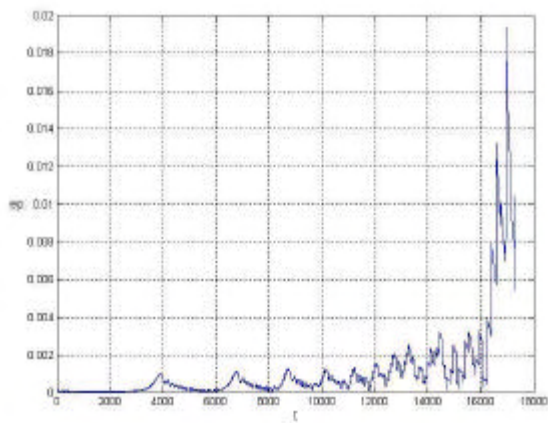
**Figura 16:** Gráfico mostrando o comportamento da excentricidade da partícula durante seu processo de aproximação antes da colisão com o satélite. A massa do satélite é  $10^{-6} M_0$  e as condições iniciais neste caso são  $r_0 = 1.20$  para a partícula,  $e = 0$  para o satélite e  $k = 0.05$  para a constante do gás.



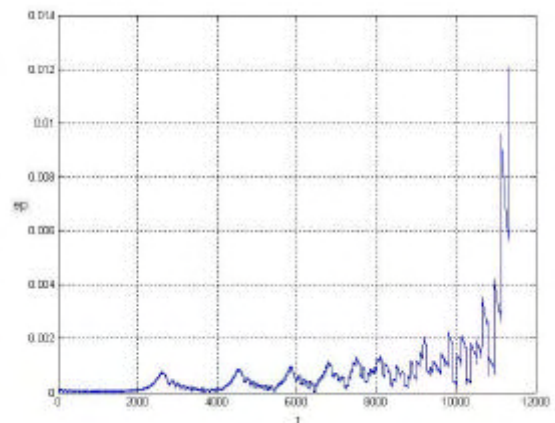
a)



b)

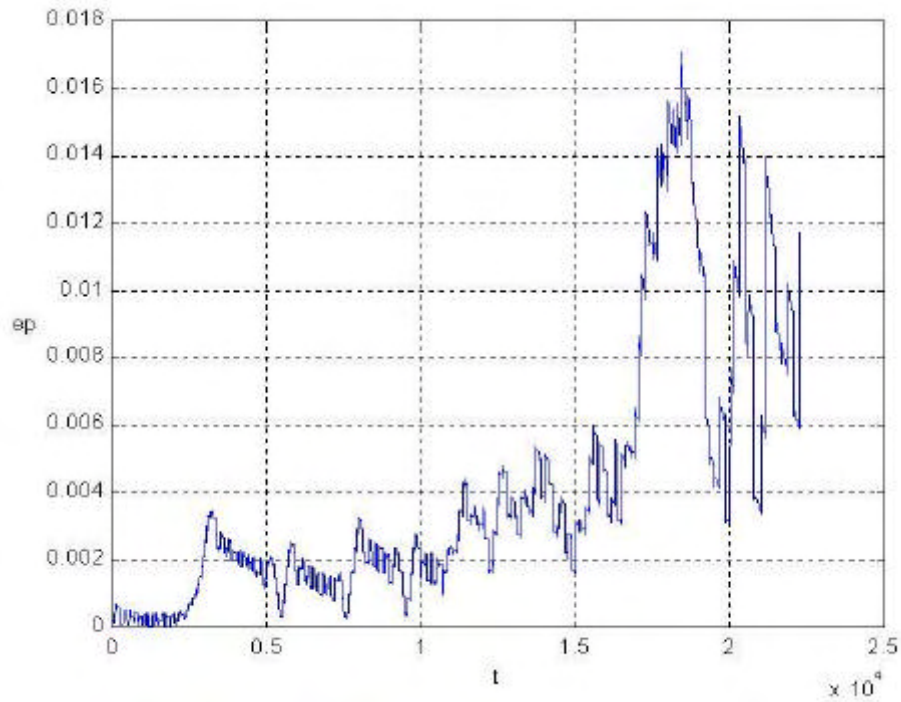


c)

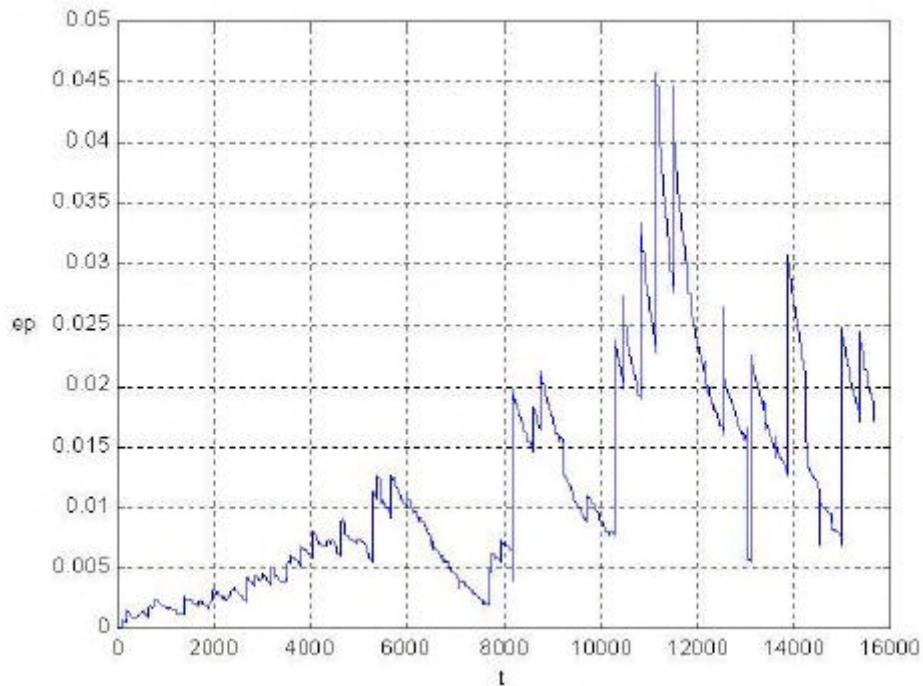


d)

**Figura 17:** Gráficos mostrando o comportamento da excentricidade da partícula durante seu processo de aproximação antes da colisão com o satélite. A massa do satélite é  $10^{-6} M_0$  e as condições iniciais neste caso são  $r_0=1.20$  para a partícula,  $e=0$  para o satélite. A constante do gás é: a)  $k=0.05$ , b)  $k=0.1$ , c)  $k=0.2$  e e)  $k=0.3$ .



a)

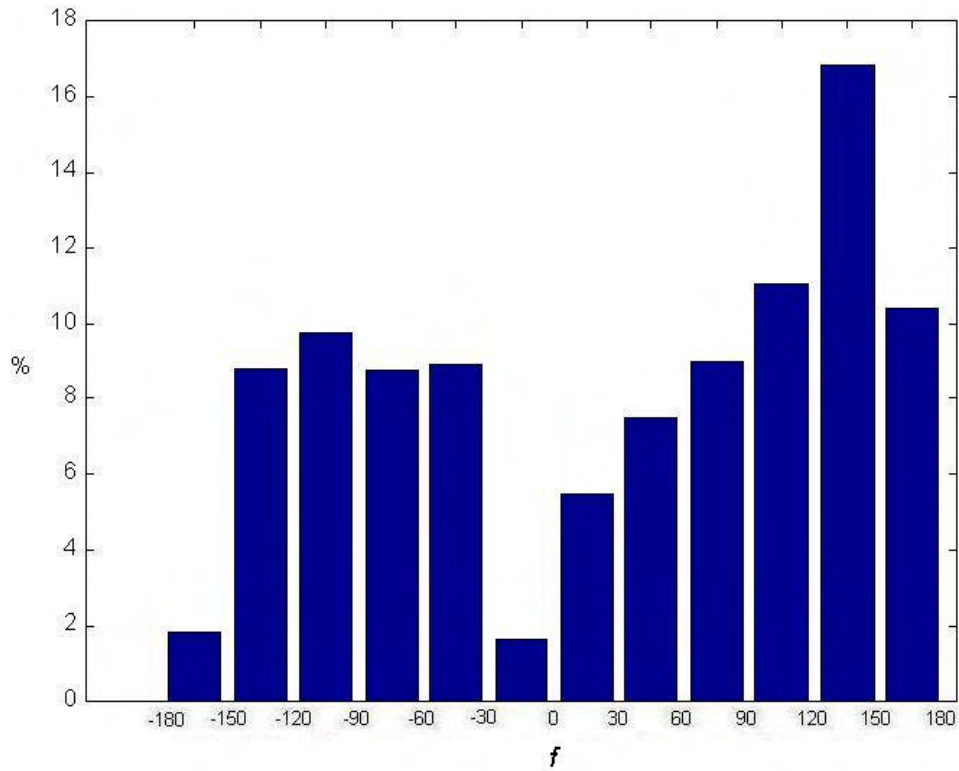


b)

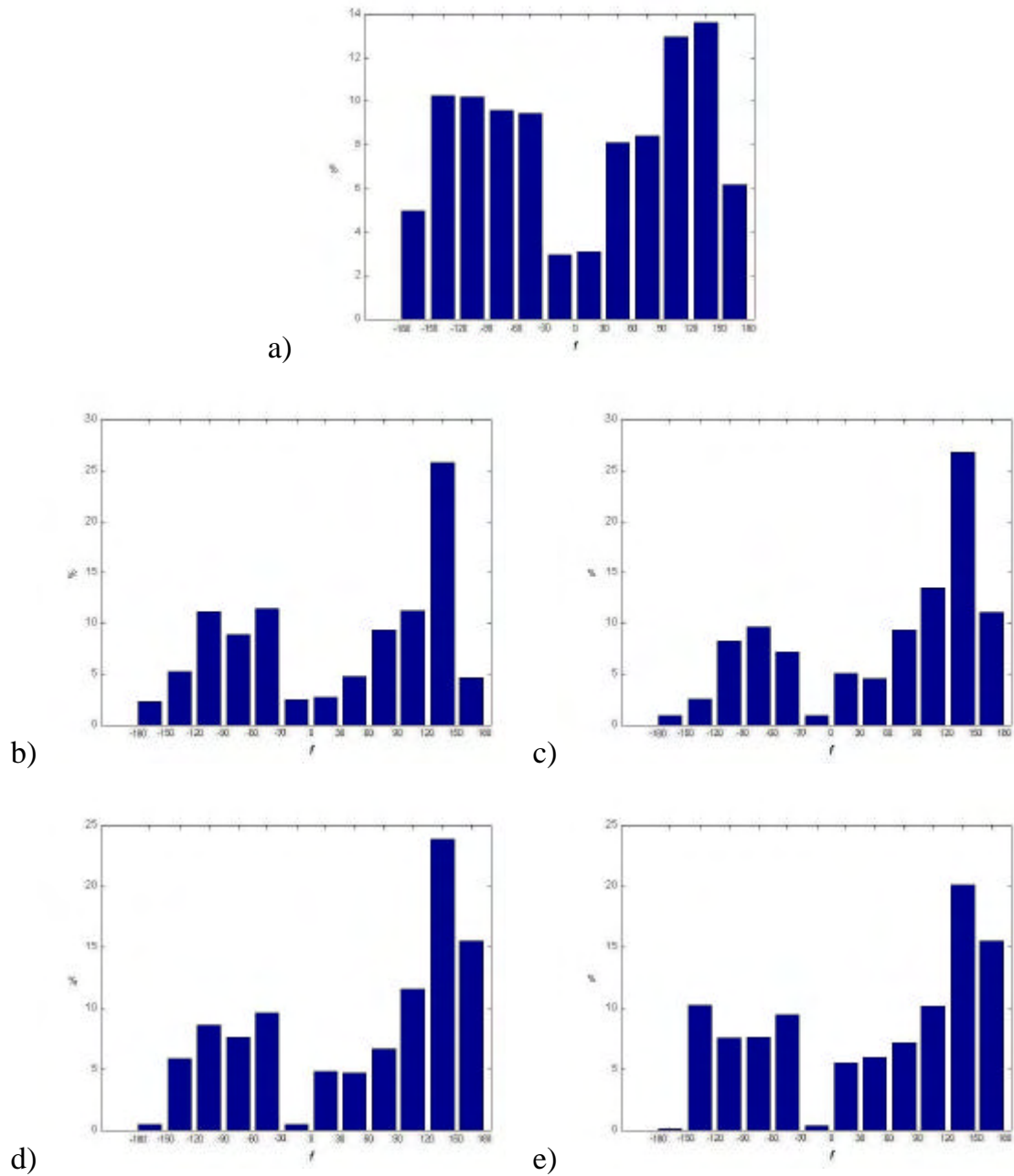
**Figura 18:** Gráficos mostrando o comportamento da excentricidade da partícula durante seu processo de aproximação antes da colisão com o satélite. A massa do satélite é  $10^{-6} M_0$  e as condições iniciais neste caso são  $r_0 = 1.08$  para a partícula, e  $k = 0.050$  para a constante do gás. A excentricidade do satélite é: a)  $e = 0$  e b)  $e = 0.042$ .

Agora vamos visualizar um registro muito importante na formação dos corpos do sistema solar que é a acreção de massa dos corpos celestes devido às colisões. Kary e Lissauer (1995), estudaram de maneira analítica a probabilidade de impacto para um planetesimal se aproximando em dois limites idealizados: (1) a força de gravidade do satélite pode ser desprezada (aproximação com 1corpo) e (2) a força de gravidade do satélite afeta somente o planetesimal quando os dois são suficientemente próximos para que o efeito do planeta sobre o movimento do planetesimal em relação ao satélite possa ser desprezado (aproximação com 2+2corpos). Esses limites analíticos nos permitem testar o nosso modelo numérico e obter informações sobre os fatores físicos que influenciam os resultados numéricos. Geralmente, a probabilidade de impacto para um planetesimal migrando em direção a um satélite pode ser tratada como a probabilidade média para uma única conjunção  $P_c$ , modificada pelo número de conjunções que os corpos têm durante a migração do planetesimal através da região atratora. No caso circular bidimensional temos  $P = 1 - (1 - P_c)^{N_c} \approx N_c P_c$ , onde  $N_c = 3v_K \Delta a_0^2 / 4pa_s^2 |\dot{a}|$ , sendo que  $\Delta a_0 = 2\sqrt{3}h$  e  $\dot{a} \approx -2Kv_g^2 / v_K$ . Assim, uma excentricidade não nula do planetesimal aumentará a magnitude de  $\dot{a}$  diminuindo  $N_c$ . No caso da aproximação com 1corpo, o planetesimal pode ser tratado como tendo uma órbita circular instantânea. Na realidade o efeito dos três corpos vem a dominar o comportamento da acreção e os modelos numéricos tornam-se importantes. Assim, a Figura 16 ilustra bem este comportamento quando o planetesimal se aproxima do satélite aumentando sua excentricidade de uma maneira significativa, diminuindo a probabilidade de impacto por conjunção. Fisicamente, esperamos que a excentricidade diminua quando  $k$  aumente. Como o arrasto abaixa a excentricidade do planetesimal entre as conjunções, maior será o arrasto mais rapidamente a excentricidade diminuirá. A Figura 17 mostra o efeito do arrasto sobre a excentricidade do planetesimal para diferentes valores de  $k$ . Isso significa que o arrasto diminua o efeito das perturbações do satélite, necessitando um tratamento com o efeito dos três corpos. No caso de um satélite com uma órbita excêntrica, temos uma velocidade relativa suficientemente grande para aumentar o efeito perturbador do satélite sobre a excentricidade do planetesimal, permitindo um desenvolvimento através da aproximação com 2+2corpos

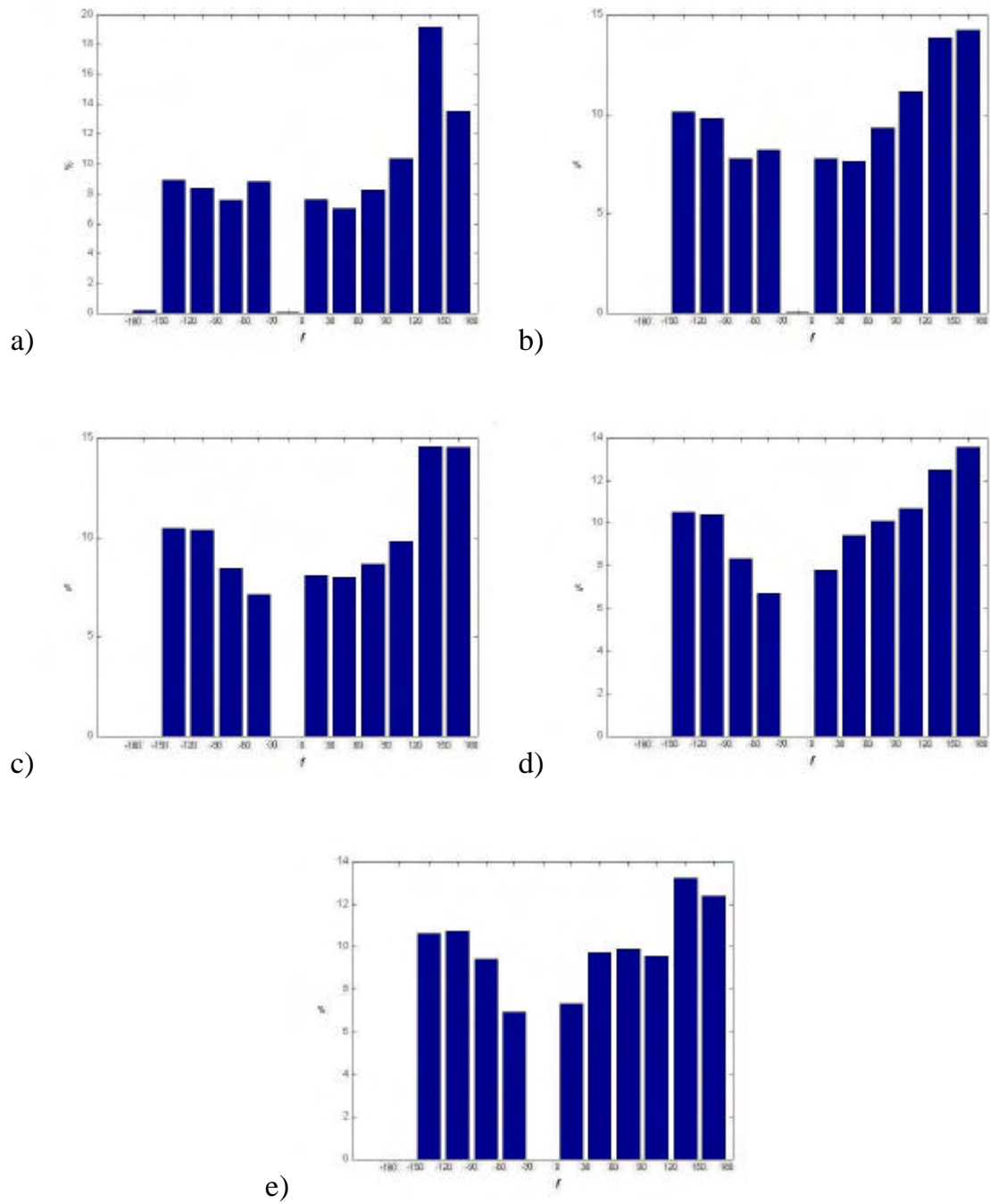
(Kary e Lissauer) ,1995. Sendo que neste caso o planetesimal não tem mais uma órbita circular instantânea, como mostra a Figura 18b.



**Figura 19:** Histograma da distribuição da anomalia verdadeira  $f$  do satélite na hora da colisão para todas as condições iniciais.



**Figura 20:** Histogramas da distribuição da anomalia verdadeira  $f$  do satélite na hora da colisão para todos os valores de  $0.025 < k < 1.0$  e para as excentricidades da órbita do satélite seguintes: a)  $e = 0.007$ , b)  $e = 0.014$ , c)  $e = 0.021$ , d)  $e = 0.028$  e e)  $e = 0.035$ .

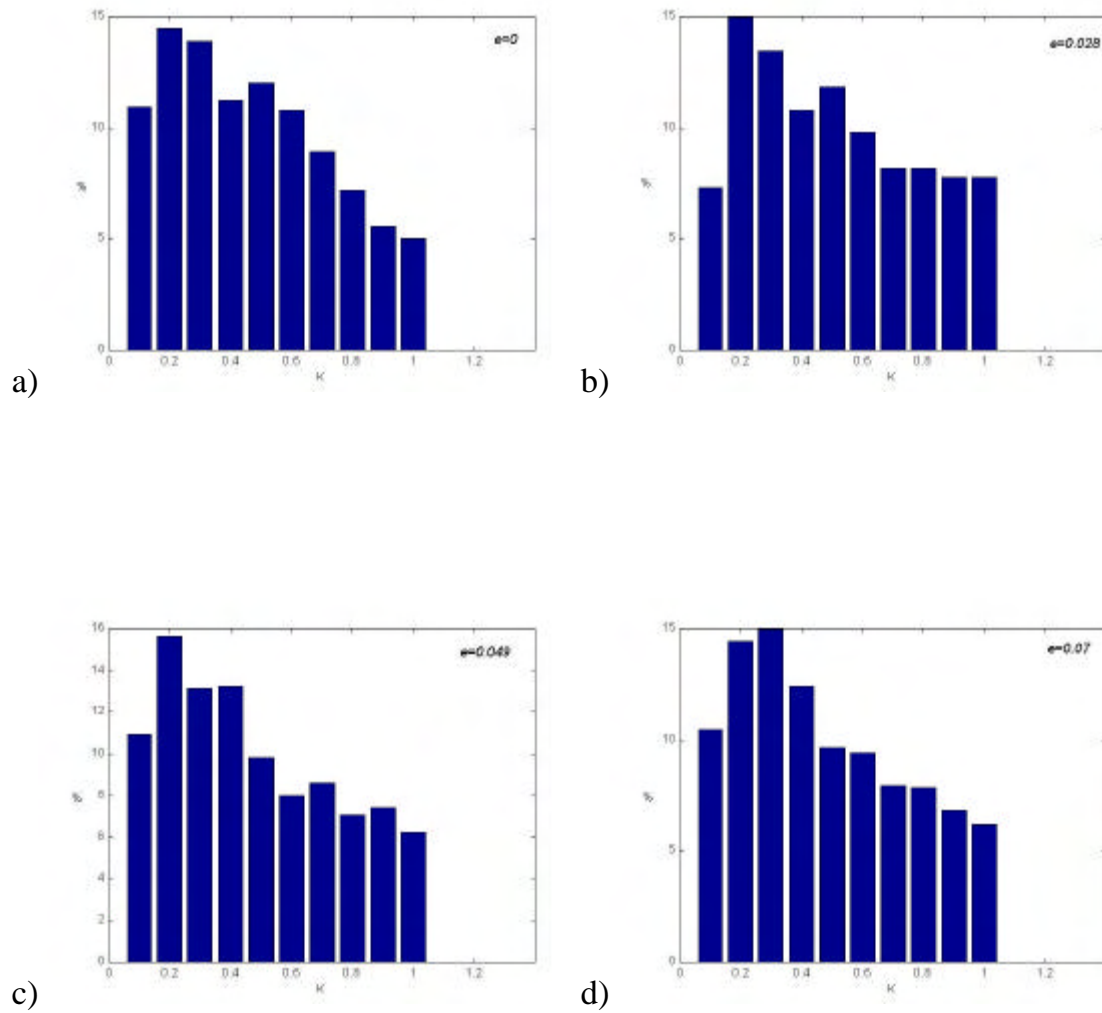


**Figura 21:** Histogramas da distribuição da anomalia verdadeira  $f$  do satélite na hora da colisão para todos os valores de  $0.025 < k < 1.0$  e para as excentricidades da órbita do satélite seguintes: a)  $e = 0.042$ , b)  $e = 0.049$ , c)  $e = 0.056$ , d)  $e = 0.063$  e e)  $e = 0.07$

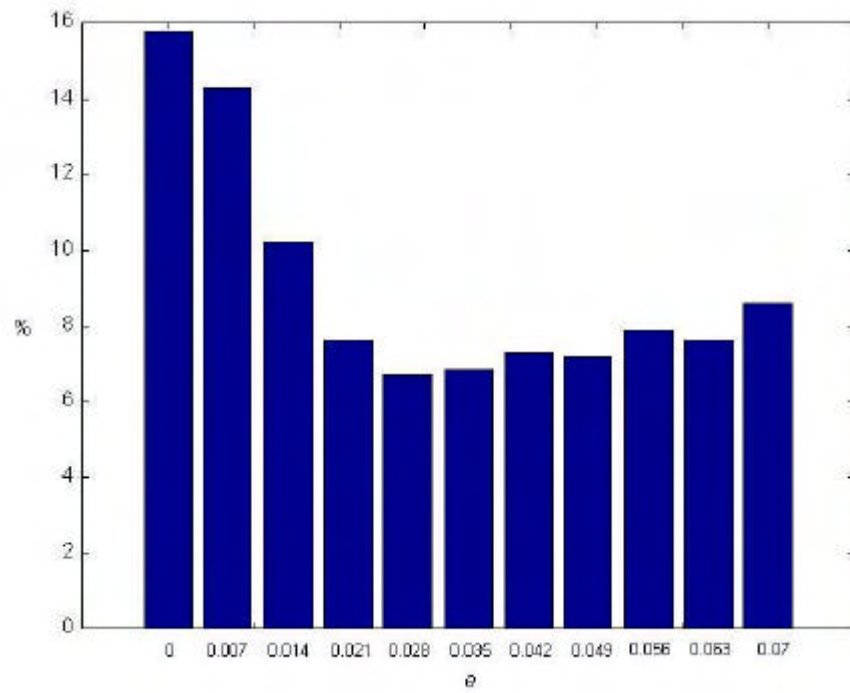
Por mais preciso que seja o programa para nossas simulações numéricas e apesar de todos os cuidados tomados, constatamos que no caso circular aparece um lixo computacional da ordem de  $10^{-11}$ . Esse lixo computacional, porém não tem efeito para os outros casos devido a sua ordem de grandeza infinitesimal. A Figura 19 nos mostra a distribuição geral das colisões com o satélite em relação a sua anomalia verdadeira. Olhando para a Figura 19, percebemos que a distribuição não é uniforme e que, em regiões perto do pericentro e apocentro do satélite, essa distribuição tem algumas falhas.

As Figuras 20-21 mostram o efeito da excentricidade sobre esta distribuição. Quanto maior é essa excentricidade, maior é a falha nas regiões vistas no caso geral da Figura 19. As velocidades no pericentro e apocentro do satélite são diferentes quando sua órbita se torna excêntrica. Consideramos que o gás não tem efeito sobre a órbita do satélite e que a órbita da partícula é circularizada por causa do gás. Assim, a velocidade angular do satélite desacelera do pericentro até o apocentro e acelera no caso contrário. Isso tem como consequência aumentar ou diminuir a velocidade relativa entre a partícula e o satélite, criando essas falhas na distribuição das colisões em relação à anomalia verdadeira do satélite.

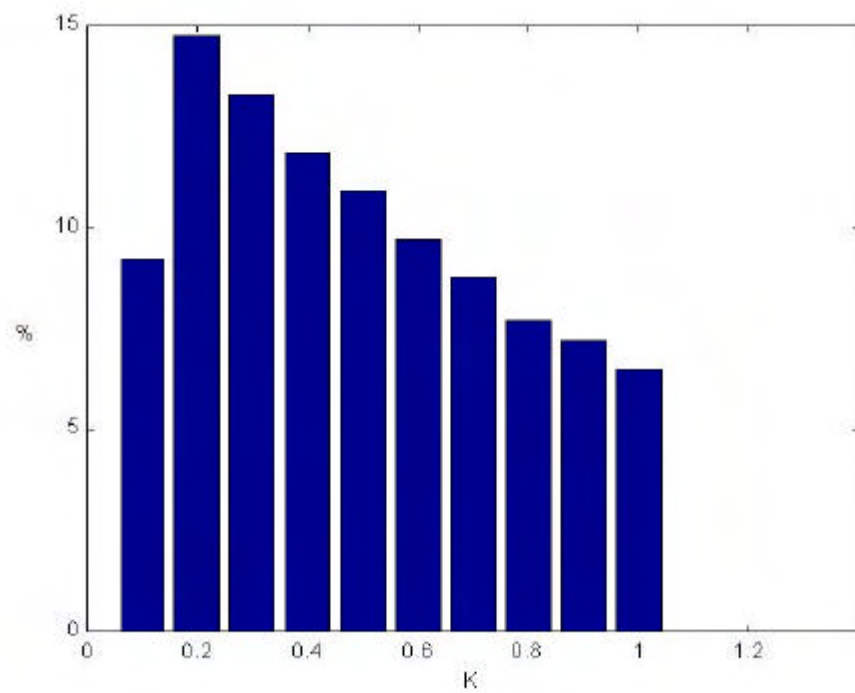




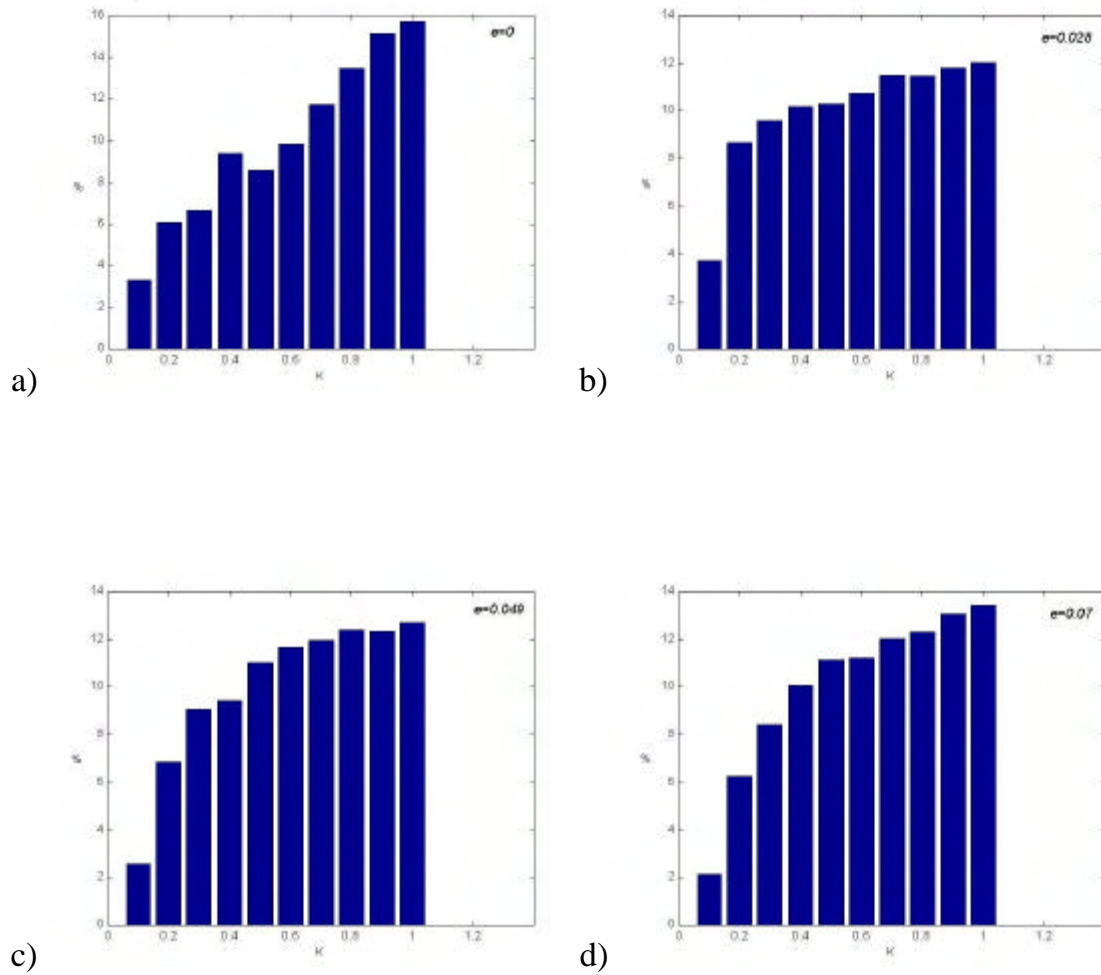
**Figura 22:** Histogramas da distribuição das colisões em relação à constante da força de arrasto  $k$ , para as excentricidades da órbita do satélite seguintes:  
a)  $e = 0$ , b)  $e = 0.028$ , c)  $e = 0.049$  e d)  $e = 0.07$ .



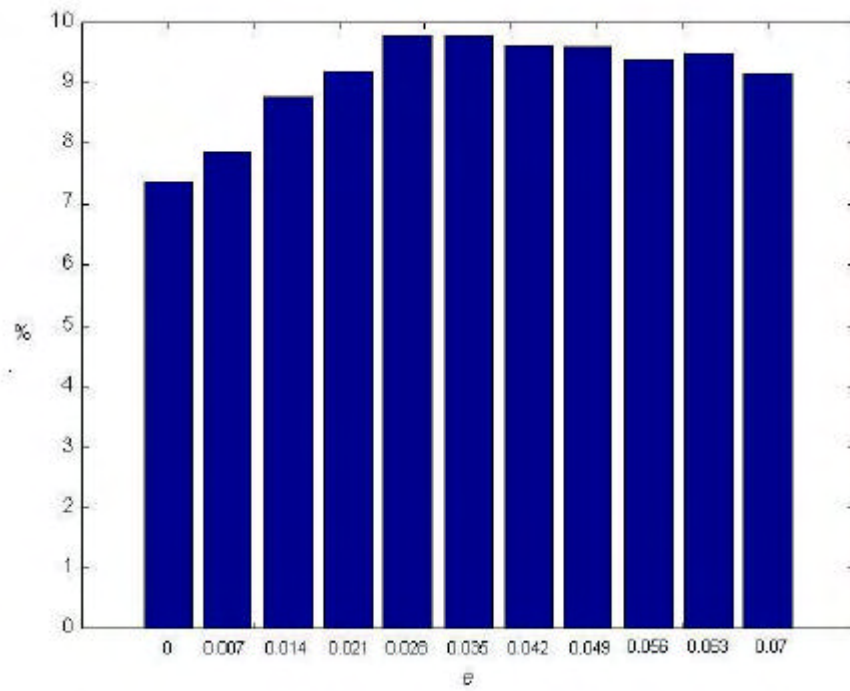
**Figura 23:** Histograma da distribuição das colisões em relação à excentricidade  $e$  do satélite.



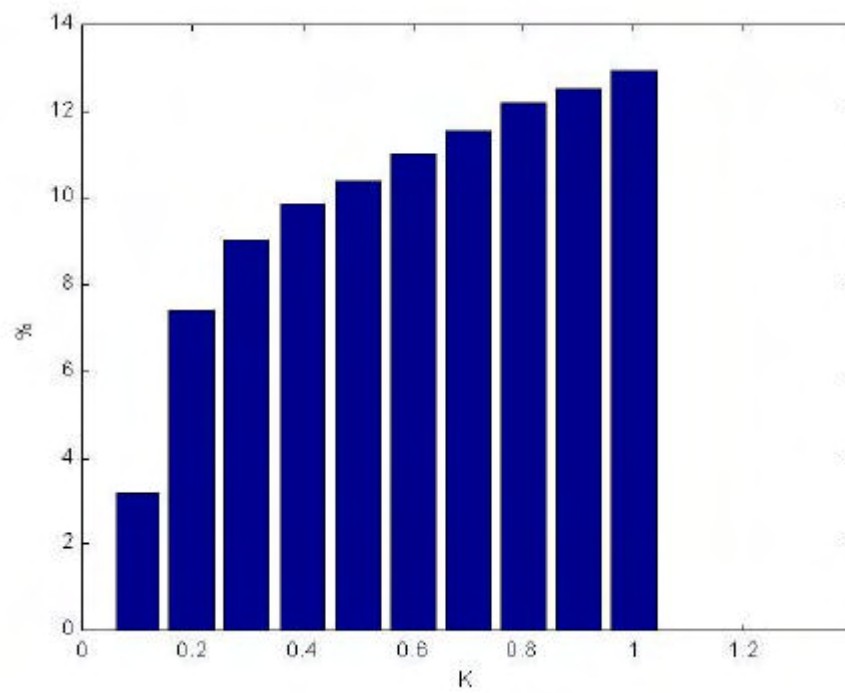
**Figura 24:** Histograma da distribuição das colisões em relação à constante da força de arrasto  $k$ .



**Figura 25:** Histogramas da distribuição das difusões em relação à constante da força de arrasto  $k$ , para as excentricidades da órbita do satélite seguintes:  
a)  $e = 0$ , b)  $e = 0.028$ , c)  $e = 0.049$  e d)  $e = 0.07$ .



**Figura 26:** Histograma da distribuição das difusões em relação à excentricidade  $e$  do satélite.

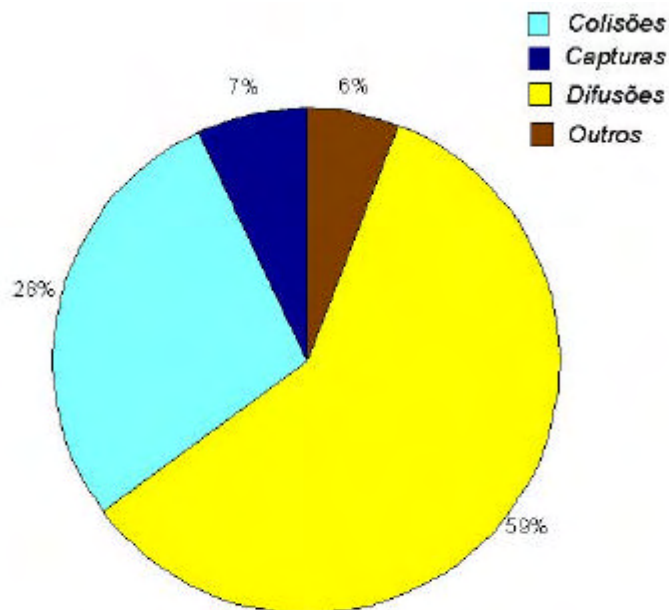


**Figura 27:** Histograma da distribuição das difusões em relação à constante da força de arrasto  $k$ .

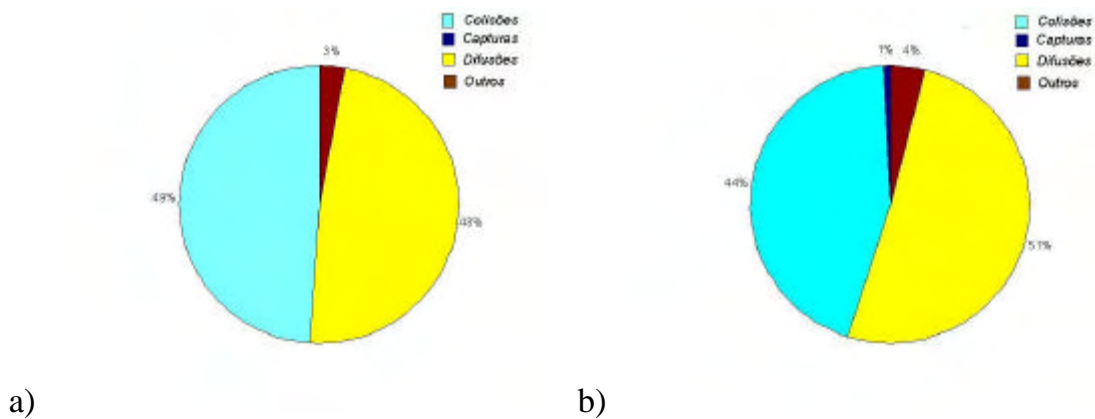
Se compararmos a distribuições das colisões em relação à constante de arrasto  $k$  para alguns valores da excentricidade  $e$  do satélite, poderemos ver que essa distribuição é mais ou menos comparável, qualquer que seja a excentricidade  $e$  do satélite com um máximo (15% dos casos) quando  $k = 0.2$  e um decrescimento linear a partir deste valor (Figura 22).

Este comportamento pode ser verificado na Figura 24, que representa a distribuição das colisões em relação à constante de arrasto  $k$ . Observando a Figura 23, nota-se que a taxa de colisão é maior (30% dos casos) quando  $e = 0$  até  $e = 0.007$ . Para os outros valores de  $e$ , essa distribuição é mais ou menos igual, em torno de 8%. Isso corrobora o trabalho de Kary e Lissauer (1995) que diz que a excentricidade aumenta a velocidade relativa entre o satélite e a partícula e reduz a taxa de acreção por contato.

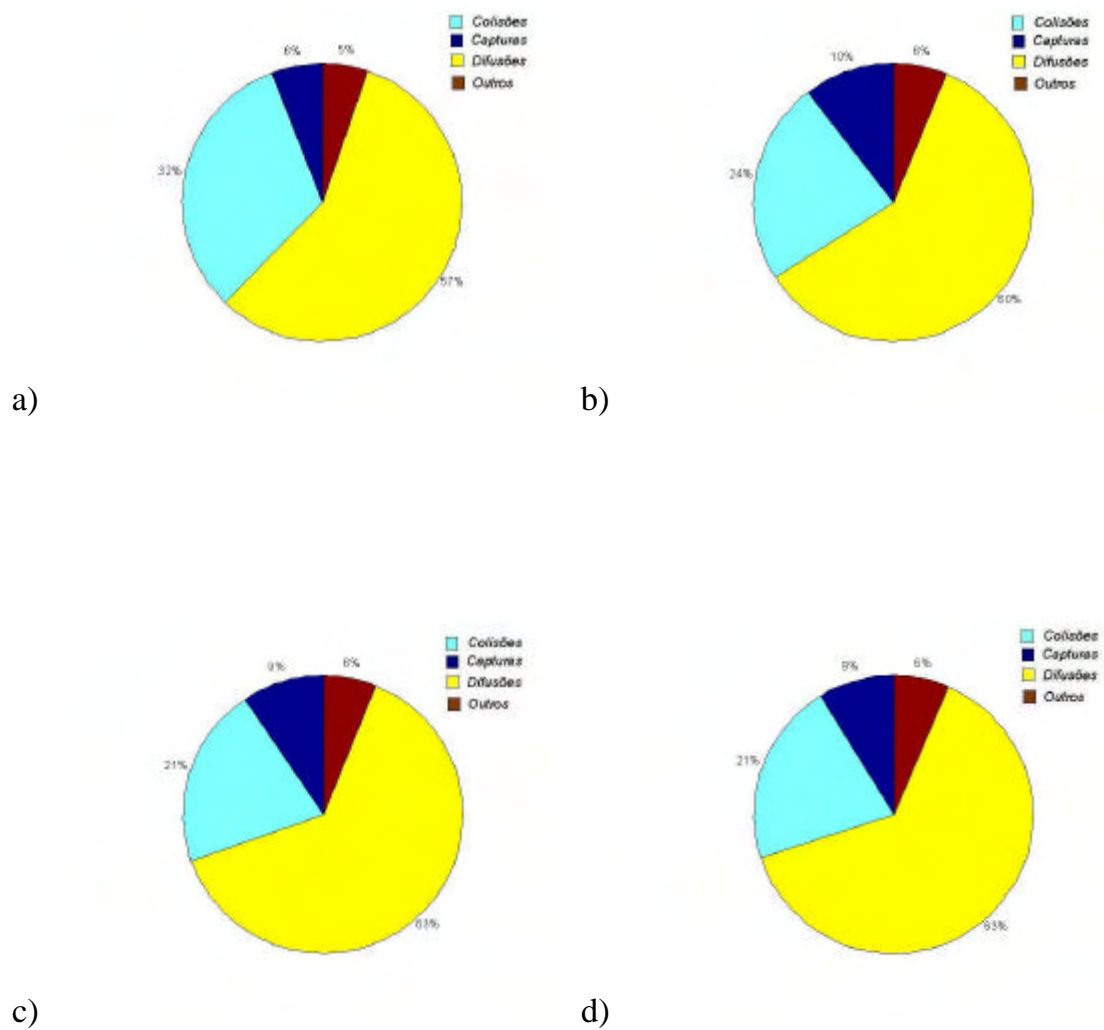
A distribuição das difusões é bem diferente em relação às colisões. Essa distribuição aumenta junto com o aumento do valor de  $k$ . Temos um máximo para  $k = 1.0$  de mais ou menos 13% na distribuição geral (figura 27). No caso circular, este crescimento é maior até o valor de 16%, como mostra a Figura 25.a. Em relação ao valor de  $e$  mostrado na Figura 26, podemos falar que as difusões crescem linearmente até o valor de 10% para um  $e$  igual a 0.028 e depois se estabilizam em torno deste valor. A taxa de difusão é diretamente ligada ao valor da constante de arrasto e é máxima para altos valores de  $k$  no caso circular.



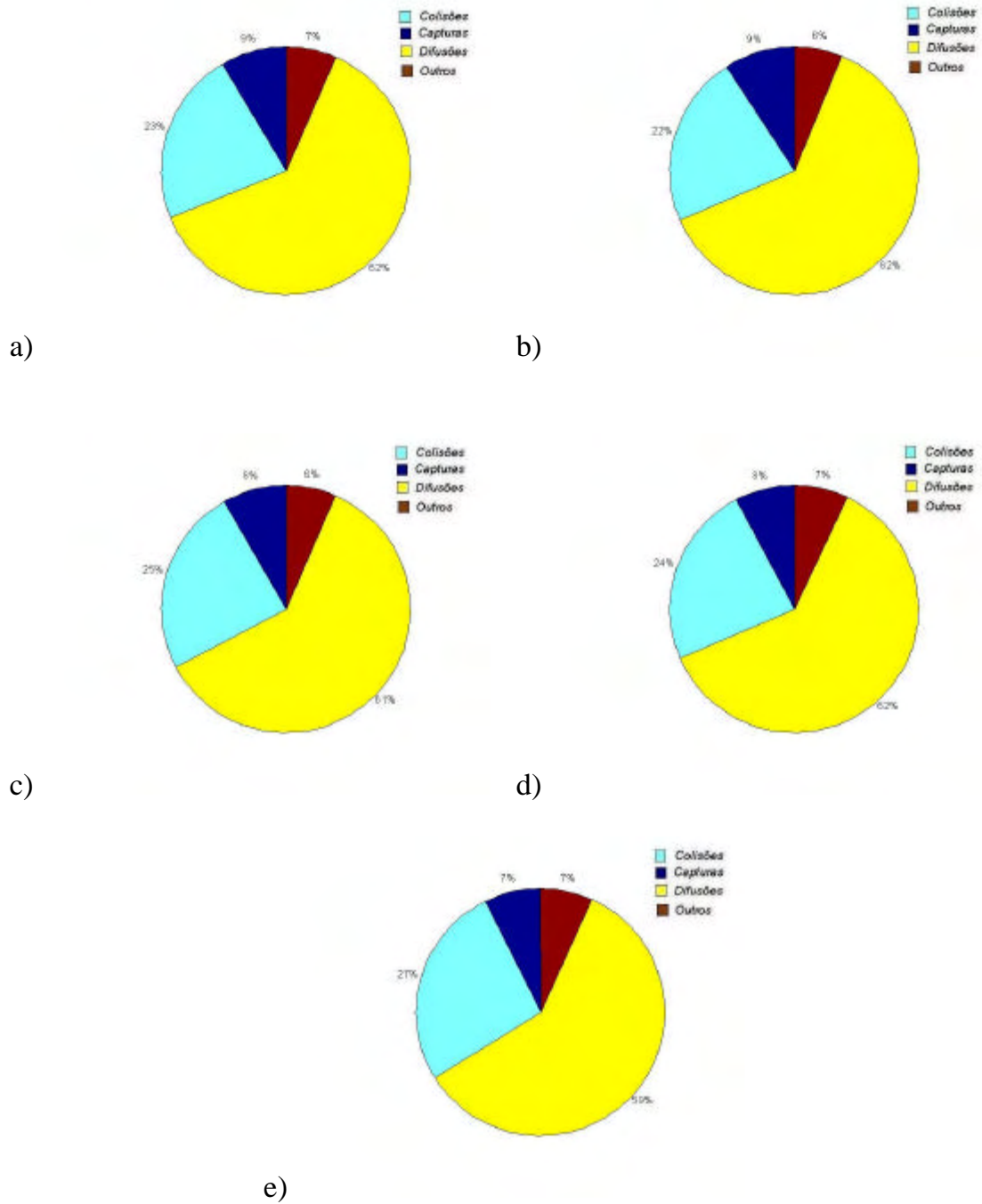
**Figura 28:** Histograma da distribuição geral das colisões, capturas em ressonância 1/1, difusões e outros eventos relacionados à dinâmica de uma partícula submetida ao efeito de arrasto gasoso.



**Figura 29:** Histogramas da distribuição das colisões, capturas em ressonância 1/1, difusões e outros eventos relacionados à dinâmica de uma partícula submetida ao efeito de arrasto gasoso com  $0.025 < k < 1.0$ . As excentricidades da órbita do satélite são as seguintes: a)  $e = 0$ , b)  $e = 0.007$ .

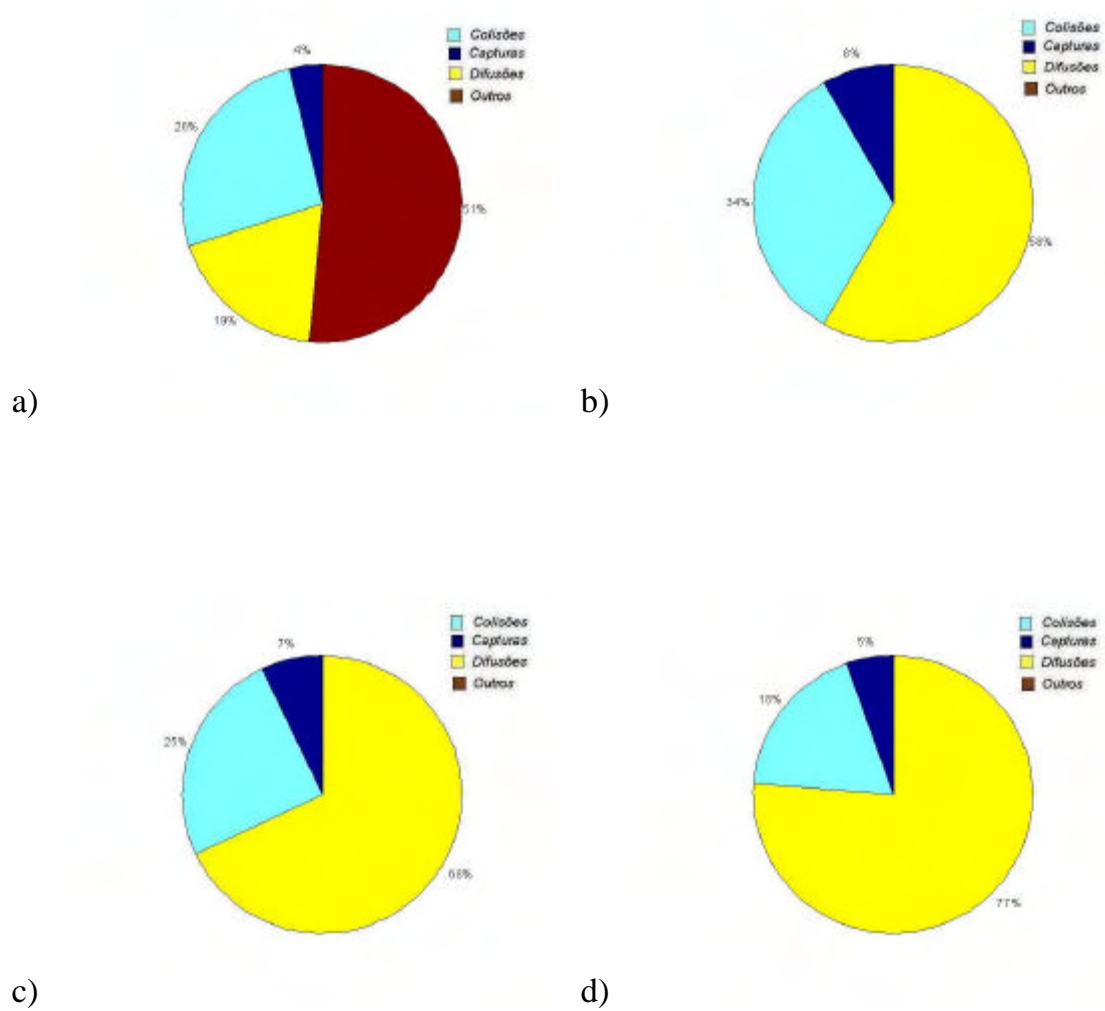


**Figura 30:** Histogramas da distribuição das colisões, capturas em ressonância 1/1, difusões e outros eventos relacionados à dinâmica de uma partícula submetida ao efeito de arrasto gasoso com  $0.025 < k < 1.0$ . As excentricidades da órbita do satélite são as seguintes: a)  $e = 0.014$ , b)  $e = 0.021$ , c)  $e = 0.028$  e d)  $e = 0.035$ .



**Figura 31:** Histogramas da distribuição das colisões, capturas em ressonância 1/1, difusões e outros eventos relacionados à dinâmica de uma partícula submetida ao efeito de arrasto gasoso com  $0.025 < k < 1.0$ . As excentricidades da órbita do satélite são as seguintes: a)  $e = 0.042$ , b)  $e = 0.049$ , c)  $e = 0.056$ , d)  $e = 0.063$  e e)  $e = 0.07$





**Figura 32:** Histogramas da distribuição das colisões, capturas em ressonância 1/1, difusões e outros eventos relacionados à dinâmica de uma partícula submetida ao efeito de arrasto gasoso para todas as excentricidades da órbita do satélite e nos casos a)  $0.025 < k < 0.1$ , b)  $0.325 < k < 0.4$ , c)  $0.625 < k < 0.7$  e d)  $0.925 < k < 1.0$

Na distribuição geral dos dados em relação a todas as simulações, podemos afirmar que o maior número é representado pela difusão, com uma taxa de 59%, seguido pela colisões, com 28% do total. As capturas em ressonância representam 7% e as ressonâncias externas ou outros eventos representam 6% do total (Figura 28).

Chamamos de outros eventos: as ressonâncias externas à região coorbital ou o fato de que a partícula não passou o limite para ser considerada difusão até o final da simulação. Se estudarmos o efeito da excentricidade no total dos eventos para todos os valores de  $k$ , veremos a partir das Figuras 29 a 31 que, no caso circular, não existe captura em ressonância 1/1 e a taxa deste tipo de captura aumenta até o valor de 10% do total para uma excentricidade de  $e = 0.021$ . No caso circular, a distribuição das difusões e colisões é quase igual, com uma taxa de 49% para as colisões e 48% para as difusões. Um dado importante mostra que a taxa de colisão decresce até o valor de  $e = 0.028$  (21%) e cresce novamente com o aumento da excentricidade. O mesmo acontece mas de modo contrário para as difusões com um valor máximo para  $e = 0.028$  de 63%. Se nos preocuparmos somente com o valor da constante de arrasto  $k$  para todos os valores de  $e$ , podemos dizer da Figura 32 que, se o valor é menor que 0.1, as ressonâncias externas ou outros eventos representam mais da metade dos casos. Esses casos não representam 1% quando  $0.325 < k < 0.4$ . Como já foi visto, a taxa das difusões está diretamente ligada ao valor de  $k$  e seu valor é máximo (77%) quando  $k$  é máximo. Finalmente, o valor máximo das colisões (34%) é atingido quando  $0.325 < k < 0.4$ .

## CONCLUSÃO

No presente trabalho, estudamos, através do problema restrito de três corpos, a formação de sistemas coorbitais num sistema planetário nos primórdios de sua formação. Nesse sentido, foram mostrados dois tipos de modelo de arrasto nebular, um definido por Peale (93) e o outro definido por Murray (94). Escolhemos para nosso trabalho o modelo definido por Murray e para a parte da dinâmica do sistema utilizamos as mesmas condições que Kary e Lissauer, em **Nebular Gas Drag and Planetary Accretion** (1995). Vimos que Planetesimais decaem devido ao efeito do arrasto e sofrerão basicamente uma dessas três possibilidades: (1) captura em ressonância com o satélite, (2) colisão com o satélite, acrescentando a massa do satélite, ou (3) difusão, passagem pelo satélite. Estabelecemos estatísticas para mostrar o efeito do arrasto e da excentricidade nos três casos. No caso das capturas em ressonância 1/1 com o satélite, mostramos que, no processo da captura, ocorre uma troca de momento entre a partícula e o satélite, as oscilações diminuem e a excentricidade da partícula tende para um certo limite. Vimos que a excentricidade do satélite muda a configuração dos pontos de equilíbrio L4 e L5 onde o ponto L4 reaparece, mesmo com condições de arrasto fora do limite definido por Murray (94). A configuração com arrasto e excentricidade aumenta o poder atrativo da região onde se localiza o ponto L5 além de seu deslocamento em direção ao satélite. Assim teremos mais captura que no ponto L4 e os corpos terão dimensões bem menores com oscilações maiores aumentando a probabilidade de colisões entre eles.

No caso das colisões, percebemos que a distribuição não é uniforme e que, em regiões perto do pericentro e apocentro do satélite, essa distribuição tem algumas falhas. A excentricidade do satélite aumenta ou diminui a velocidade relativa, criando essas falhas na distribuição das colisões em relação à anomalia verdadeira do satélite.

A excentricidade aumenta a velocidade relativa entre o satélite e a partícula e reduz a taxa de acreção por contato. Assim a taxa de colisão é maior (30% dos casos) quando  $e = 0$  até  $e = 0.007$ . Qualquer que seja a excentricidade  $e$  do satélite temos um máximo (15% dos casos) quando  $k = 0.2$  e um decréscimo linear a partir deste valor. Isso mostra que no começo da formação dos corpos celestes a quantidade de

impactos de corpos de grande dimensão era maior, contribuindo para uma acreção de massa muito rápida.

A distribuição das difusões é bem diferente em relação às colisões. Vimos que a taxa de difusão é diretamente ligada ao valor da constante de arrasto e é máxima para altos valores de  $k$  no caso circular.

Finalmente na distribuição geral dos dados em relação a todas as simulações, podemos afirmar que o maior número é representado pela difusão, com uma taxa de 59%, seguido pelas colisões, com 28% do total. As capturas em ressonância representam 7% e as ressonâncias externas ou outros eventos representam 6% do total. Isso mostra que o arrasto nebuloso no começo contribui para o espalhamento da matéria.

Como sugestão para trabalhos futuros, como fizeram Kary e Lissauer (95), podemos ver o efeito do aumento ou da diminuição do raio de Hill. Por exemplo, no nosso estudo consideramos  $R_H = 0.05h$ , se mudamos 10 vezes para mais ou menos  $R_H$ , a dinâmica das colisões, das capturas e das difusões não será a mesma. De quanto serão as variações? Essas variações serão proporcionais à mudança de  $R_H$ ?

Lubow S., H. Seibert M. and Artymowicz P. em **Disk Accretion onto High-Mass Planet**.(1999) estudaram a dinâmica de uma nebulosa planetária. Essa dinâmica é diferente da nebulosa Solar apresentada por Peale (93). Um estudo interessante seria comparar os dois modelos no caso da formação de sistemas coorbitais.

## REFERÊNCIAS

- Borelli, L.F.M. **Um Estudo Numérico do Efeito Dinâmico do Achatamento e do Arrasto na Estrutura e Estabilidade de Sistemas Coorbitais**. Dissertação de Mestrado, UNESP, Guaratinguetá, 2001.
- Brown, E.W. and C.A. Shook. **Planetary Theory**. Dover Publications, New York, 1964.
- Colombo, G., D.A. Lautman and I.I. Shapiro. **The Earth's Dust Belt: Fact or Fiction? 2. Gravitational Focusing and Jacobi Capture**. *J. Geophys. Res.* **71**, 5705, 1966.
- Fleming, H.J. and D.P. Hamilton. **The Origin of Trojan Asteroids: Effects of Jupiter's Mass Accretion and Radial Migration**. *Icarus* **148**, 479, 2000.
- Gomes, R.S. **Dynamical Effects of Planetary Migration on Primordial Trojan-type Asteroids**. *Astronomical Journal* **116**, 2590, 1998.
- Kusaka, T., Nakano T. and Hayashi. *Prog. Theor. Phys.* **44**, 1580, 1970.
- Lissauer, J. J. **Urey Prize Lecture: On the Diversity of Plausible Planetary Systems**. *Icarus* **114**, 217, 1994.
- Lubow S., H. Seibert M. and Artymowicz P. **Disk Accretion onto High- Mass Planet**. *Astronomical Journal* **526**, 1001-1012, 1999.
- Malhotra, R. **Orbital resonances in the solar nebula: Strengths and weaknesses**. *Icarus* **106**, 264-273, 1993.
- Marzari, F. and H. Sholl. **Capture of Trojans by a Growing Proto-Jupiter**. *Icarus* **131**, 41, 1997.
- Mourão, D.C. **Estudo da Estrutura Dinâmica de Satélites Coorbitais. Caso Não Restrito**. Dissertação de Mestrado, UNESP, Guaratinguetá, 2001.
- Namouni, F., Murray, C.D. **The effect of eccentricity and inclination on the motion near the Lagrangian point L4 and L5**. *Celest. Mech* **76**, 131-138, 2000.
- Peale, S. J., (1999). **Origin and Evolution of the Natural Satellites**. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **37**, 533.
- Pollack, J.B. et al. **Formation of the Giant Planets by Concurrent Accretion of Solids and Gás**. *Icarus* **124**, 62-85, 1996.

Schuerman, D. **The restricted tree-body problem including radiation pressure.** *Astrophys. J.* **238**, 337-342, 1980.

Simmons, J.F.L., McDonald, A.J.C. and Brown, J.C. **The restricted 3-body problem with radiation pressure.** *Celest. Mech.* **35**, 145-187, 1985.

Weidenschilling, S.J. **Aerodynamics of solid bodies in the solar nebula.** *Mon. Not. Roy. Ast. Soc.* **180**, 57-70, 1977.

Ward, W. R. and Hourigan, K. **Orbital migration of Protoplanets - The Inertial Limit.** *Astrophys. J.* **347**, 490, 1989.

Yoder, C.F., Colombo, G., Synnott, S.P., and Yoder, K.A. **Theory of Motion of Saturn's Co-orbiting Satellites.** *Icarus* **53**, 431, 1983.

**BIBLIOGRAFIA CONSULTADA**

Kary, D.M. and Lissauer, J.J., **Nebular Gas Drag in the Planetary Accretion II. Planet on an Eccentric Orbit.** *Icarus* **117**, 1, 1995.

Murray, C.D. **Dynamical Effects of Drag in the Circular Restricted Three-Body Problem. I. Location and Stability of the Lagrangian Equilibrium Points.** *Icarus* **112**, 465, 1994.

Peale, S.J. **The Effect of the Nebula on the Trojan Precursors.** *Icarus* **106**, 308, 1993.