

JULIANO ANTÔNIO DE OLIVEIRA

ANÁLISE COMPARATIVA DE
ALGUNS SISTEMAS DINÂMICOS
CLÁSSICOS E QUÂNTICOS

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Alvaro de Souza Dutra

Co-orientador: Prof. Dr. Othon Cabo Winter

Guaratinguetá

2005

DADOS CURRICULARES

JULIANO ANTÔNIO DE OLIVEIRA

NASCIMENTO 15.09.1980 - Divinópolis / MG

FILIAÇÃO Antônio Sílvio de Oliveira
Helena Maria da Costa Oliveira

1999/2002 Curso de Graduação - Universidade do Estado de Minas Gerais
- UEMG. Campus de Divinópolis

de modo especial, à minha família que diante de meus momentos de ausências e limitações apoiaram-me com a sua compreensão e cumplicidade.

AGRADECIMENTOS

A Deus por demonstrar-se presente durante esta caminhada.

A minha eterna gratidão ao meu pai Antônio, a minha mãe Helena, ao meu irmão Adriano, a minha irmã Cássia e ao meu querido sobrinho Vinícius, que mesmo distantes se fizeram presentes.

Ao meu orientador prof. Dr. Alvaro e ao meu co-orientador prof. Dr. Othon pela confiança, orientação e dedicação.

Ao prof. Vilhena pelo incentivo e confiança e, ao prof. Dr. Ernesto pelo apoio computacional.

Aos meus professores e amigos da pós-graduação.

A família da Silva Guaratinguetaense que me receberam em sua casa com muito carinho e confiança.

Ao meu tio Francisco e a minha tia Hidalva, a todos os meus familiares e amigos, entre eles o Edson.

Ao meu avô Wilson e ao meu tio Ari in memóriam.

Este trabalho contou com o apoio da entidade CAPES.

Não é digno de saborear o mel,
aquele que se afasta da colméia
por medo das picadas das abelhas

Shakespeare

OLIVEIRA, J. A. de. **Análise comparativa de alguns sistemas dinâmicos clássicos e quânticos**. 2005. 62 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2005.

RESUMO

O estudo da correspondência clássica-quântica vem despertando o interesse de muitos autores nos últimos anos. Pollet et al. (1995) introduziram o estudo de um estado coerente complexo de um sistema hermitiano bidimensional. Foi verificado que o máximo de probabilidade acompanha a órbita clássica correspondente. Verificamos que a densidade de probabilidade do estado final não degenerado, aquele composto pela soma de todos os estados com a mesma energia, também apresenta o máximo de probabilidade sobre uma curva simétrica acompanhando a órbita clássica correspondente. A partir do trabalho de Pollet et al. (1995) iniciamos o estudo do estado coerente de um sistema não hermitiano bidimensional com energias reais. Verificamos que o máximo de probabilidade dado por este sistema também acompanha a órbita clássica correspondente, porém determina a quebra da paridade definida como inversão de apenas uma das duas variáveis espaciais. Interpretamos a quebra da paridade como sendo tal que, para determinados parâmetros de não hermiticidade, a velocidade da partícula aumenta em certas regiões diminuindo a probabilidade de encontrar a partícula nelas. Lin e Ballentine (1990, 1992) estudaram a correspondência clássica-quântica através da evolução temporal da função de Husimi. O pacote de ondas está inicialmente localizado em uma ilha da seção de Poincaré construída pela dinâmica clássica do oscilador anarmônico quártico forçado. Propomos neste trabalho discutir os resultados da evolução temporal do deslocamento, x , e da energia, H , no poço de potencial assimétrico e no simétrico. Foi observado que o pacote de ondas tunelam coerentemente entre as ilhas de mesma natureza, determinando o máximo de probabilidade centrado nas ilhas e a mais baixa probabilidade na região caótica. A partir deste trabalho, propomos o estudo das regiões regulares e caóticas no espaço de fase de um oscilador anarmônico sêxtuplo forçado. Construímos as seções de Poincaré e discutimos os resultados da evolução temporal de x e H no poço de potencial simétrico.

PALAVRAS-CHAVE: Estado coerente; sistemas não-hermitianos; simetria PT; caos; tunelamento coerente.

OLIVEIRA, J. A. de. **Comparative analysis of some classic and quantum dynamic systems**. 2005. 62 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2005.

ABSTRACT

The study of the classical-quantum correspondence has been rising the interest of many authors in the last years. Pollet et al. (1995) started the study of a complex coherent state of a two-dimensional Hermitian system. They verified that the maximum of probability follows the corresponding classical orbit. Here, we have verified that the non-degenerated final state, the one composed by the sum of all the states with the same energy, also presents its maximum of probability upon a symmetric curve following the corresponding classical orbit. By using the idea introduced in Pollet et al. (1995) work, we have started a systematic study of a complex coherent state of a two-dimensional non-Hermitian system with real energy. We have verified that the maximum of probability in this system also follows the corresponding classical orbit, however it determines the parity break, defined as inversion of only one of two space spatial variables. Then, we interpreted the parity breaking as being such that for certain parameters of non-Hermiticity, the particle speed increases in certain regions, decreasing the probability of finding them in these regions. Lin and Ballentine (1990, 1992) studied the classical-quantum correspondence through the Husimi function time evolution. The Husimi function is initially located in one island of the Poincaré section built by the classical dynamic of the forced quartic anharmonic oscillator. We propose in this work the discussion of the time evolution result both for the displacement, x , and energy, H , in a double-well potential of the asymmetric and symmetric anharmonic potential. It was observed that the wave packet tunnel coherently between the islands of the same nature, determining the maximum of probability in these islands and the low probabilities in the chaotic region. Furthermore, we propose the study of chaos in the forced sextuple anharmonic oscillator. We built Poincaré sections and discussed the time evolution results of x and H in the double-well of the symmetric potential.

KEYWORDS: Coherent states; non-Hermitian systems; symmetric PT; chaos; coherent tunneling.

Sumário

1	Introdução	7
2	Autoestados Elípticos Complexos	9
2.1	Introdução	9
2.2	Representação dos Estados Elípticos Complexos	10
2.3	Simetria PT	15
2.4	Comentários	22
3	Regiões Regulares e Caóticas no Espaço de Fase de um Oscilador Anarmônico Quártico Forçado	24
3.1	Introdução	24
3.2	Modelo para o Oscilador Anarmônico Quártico Forçado	26
3.3	Superfície da Seção de Poincaré	27
3.4	Resultado e Análise para o Poço de Potencial Assimétrico	29
3.5	Resultados e Análise para o Poço de Potencial Simétrico	33
3.6	Tunelamento Coerente	38
3.7	Comentários	46

4	Regiões Regulares e Caóticas no Espaço de Fase de um Oscilador Anarmônico Sêxtuplo Forçado	49
4.1	Introdução	49
4.2	Modelo para o Oscilador Anarmônico Sêxtuplo Forçado	50
4.3	Resultados e Análise para o Poço de Potencial Simétrico	51
4.4	Variação dos Parâmetros B e D	54
4.5	Comentários	56
5	Comentários Finais	58

Lista de Figuras

2.1	<i>Densidade de probabilidade associada aos estados elípticos. (a) e (b) mostram os resultados para $\eta = \pi/4$. (c) e (d) mostram os resultados para $\eta = \pi/6$.</i>	14
2.2	<i>Resultado do estado final não degenerado. (a) mostra a densidade de probabilidade para o parâmetro $\eta = \pi/4$. (b) mostra a densidade de probabilidade para o parâmetro $\eta = \pi/6$.</i>	15
2.3	<i>Densidade Probabilidade com o parâmetro $\eta = \pi/4$. (a) $\gamma = 0,5 \times 10^{-8}$, (b) $\gamma = 0,05$, (c) $\gamma = 0,1$, (d) $\gamma = 0,3$, (e) $\gamma = 0,5$ e (f) $\gamma = 1$.</i>	19
2.4	<i>Densidade de probabilidade com o parâmetro $\eta = \pi/6$. (a) $\gamma = 0,5 \times 10^{-8}$, (b) $\gamma = 0,05$, (c) $\gamma = 0,1$, (d) $\gamma = 0,3$, (e) $\gamma = 0,5$ e (f) $\gamma = 1$.</i>	20
2.5	<i>Resultado do estado final não degenerado com o parâmetro $\eta = \pi/4$. (a) $\gamma = 0,5 \times 10^{-8}$, (b) $\gamma = 0,05$, (c) $\gamma = 0,1$, (d) $\gamma = 0,3$, (e) $\gamma = 0,5$ e (f) $\gamma = 1$.</i>	21
2.6	<i>Resultado do estado final não degenerado com o parâmetro $\eta = \pi/6$. (a) $\gamma = 0,5 \times 10^{-8}$, (b) $\gamma = 0,05$, (c) $\gamma = 0,1$, (d) $\gamma = 0,3$, (e) $\gamma = 0,5$ e (f) $\gamma = 1$.</i>	22
3.1	<i>Esboço da produção da seção de Poincaré. (a) Mostra a interseção da órbita da partícula com as seções de Poincaré no espaço de fase tridimensional correspondendo à posição, x, ao momento linear, p, e ao tempo, t, enquanto (b) mostra a projeção do pontos A_1, A_2 e A_3 no plano x versus p.</i>	27
3.2	<i>Seção de Poincaré para duas órbitas distintas com os parâmetros $B=0,2$, $D=0,2$ e $\omega_0=5,35$. (a) Mostra órbitas regulares, (b) uma separatriz e (c) ampliação da região marcada na separatriz.</i>	28

3.3	<i>Seção de Poincaré para o oscilador anarmônico quártico forçado, com $B=0,5$, $D=10$, $\omega_0=5,35$ e vinte e nove condições iniciais. O parâmetro λ assume os seguintes valores: (a) $\lambda=1$, (b) $\lambda=2$, (c) $\lambda=3$, (d) $\lambda=4$, (e) $\lambda=6$ e (f) $\lambda=10$.</i> . . .	30
3.4	<i>Ampliação da região caótica na seção de Poincaré mostrada na Figura 3.3(c).</i> . . .	31
3.5	<i>Evolução temporal do deslocamento, x, e da energia, H, para cinco condições iniciais da Figura 3.4. As condições iniciais são $x = -4,1$ e $p = 0$ (a)(b); $x = -1,8$ e $p = 0$ (c)(d); $x = 1,5$ e $p = 0$ (e)(f); $x = 1,8$ e $p = 0$ (g)(h); $x = 4,1$ e $p = 0$ (i)(j).</i>	32
3.6	<i>Energia potencial com $\lambda = 3$, onde são mostradas as regiões que a partícula movimenta-se no poço de potencial assimétrico.</i>	33
3.7	<i>Seções de Poincaré em $t = (\frac{1}{4} + n)\tau$ para o oscilador anarmônico quártico forçado, com $B=0,5$, $D=10$, $\omega_0=5,35$ e 36 condições iniciais. O parâmetro λ assume os seguintes valores: (a) $\lambda=1$, (b) $\lambda=2$, (c) $\lambda=3$, (d) $\lambda=4$, (e) $\lambda=6$ e (f) $\lambda=10$.</i>	35
3.8	<i>Ampliação da região caótica na seção de Poincaré mostrada na Figura 3.7(c).</i> . . .	36
3.9	<i>Evolução temporal de x e H para cinco condições iniciais da Figura 3.8. As condições iniciais são $x = -3$ e $p = -7$ (a)(b); $x = 3$ e $p = -7$ (c)(d); $x = -3,1$ e $p = 0$ (e)(f); $x = 2$ e $p = 0$ (g)(h); $x = 3,1$ e $p = 0$ (i)(j).</i>	37
3.10	<i>Energia potencial onde são mostradas as regiões que a partícula movimenta-se no poço de potencial simétrico.</i>	38
3.11	<i>Função de Husimi de um estado coerente que começa a partir de um pacote de ondas inicialmente com $x = -3,42$ e $p=0$, para $\omega_0 = 5,35$ e $\lambda=3$. (a) $t=0$, (b) $t=65\tau$, (c) $t=130\tau$, (d) $t=200\tau$. Lin e Ballentine (1992).</i>	44
3.12	<i>Função de Husimi de um estado coerente que começa a partir de um pacote de ondas inicialmente com $x = -1,3$ e $p=0$, para $\omega_0 = 5,35$ e $\lambda=3$. (a) $t=0$, (b) $t=65\tau$, (c) $t=130\tau$, (d) $t=200\tau$. Lin e Ballentine (1992).</i>	45

3.13	<i>Função de Husimi de um estado coerente que começa a partir de um pacote de ondas inicialmente com $x = -3,78$ e $p=0$, para $\omega_0 = 5,35$ e $\lambda = 6$. (a) $t=0$, (b) $t=43\tau$, (c) $t=50\tau$, (d) $t=60\tau$. Lin e Ballentine (1992).</i>	46
3.14	<i>Função de Husimi de um estado coerente que começa a partir de um pacote de ondas inicialmente com $x = -1,17$ e $p=0$, para $\omega_0 = 5,35$ e $\lambda = 6$. (a) $t=0$, (b) $t=50\tau$, (c) $t=100\tau$, (d) $t=181\tau$. Lin e Ballentine (1992).</i>	46
4.1	<i>Seção de Poincaré para o oscilador anarmônico sêxtuplo forçado, com $B=0,5$, $D=10$, $\omega_0=5,35$ e 22 condições iniciais. O parâmetro λ assume os seguintes valores:(a) $\lambda=1$, (b) $\lambda=2$, (c) $\lambda=3$, (d) $\lambda=4$, (e) $\lambda=6$ e (f) $\lambda=10$.</i>	52
4.2	<i>Evolução temporal de x e H para quatro condições iniciais da Figura 4.1(c). As condições iniciais são $x = -1,8$ e $p = 0$ (a)(b); $x = 1,8$ e $p = 0$ (c)(d); $x = 2$ e $p = 0$ (e)(f); $x = 0$ e $p = 5$ (g)(h).</i>	53
4.3	<i>Energia potencial onde são mostradas as regiões que a partícula movimenta-se no poço de potencial simétrico referente a Figura 4.1(c).</i>	54
4.4	<i>Seções de Poincaré para o oscilador anarmônico sêxtuplo forçado, com $D=10$, $\lambda=3$, $\omega_0=5,35$ e 20 condições iniciais. Os valores para o coeficiente de anarmonicidade são: (a) $B=0,1$, (b) $B=0,3$, (c) $B=0,7$, (d) $B=1$, (e) $B=3$, (f) $B=6$, (g) $B=10$ e (h) $B=15$.</i>	55
4.5	<i>Seções de Poincaré para o oscilador anarmônico sêxtuplo forçado, com $B=0,5$, $\lambda=3$, $\omega_0=5,35$ e 20 condições iniciais. Os valores para o coeficiente proporcional a constante elástica do sistema são: (a) $D=0,7$, (b) $D=1$, (c) $D=3$, (d) $D=6$, (e) $D=8$, (f) $D=15$, (g) $D=25$, (h) $D=35$.</i>	56

Capítulo 1

Introdução

Sistemas dinâmicos sempre foram objetivos de estudo desde os tempos passados até os dias de hoje. Todavia um problema importante do ponto de vista da mecânica quântica é aquele associado ao seu limite clássico (DE BIÈVRE, 1992; POLLET et al., 1995; CHEN; HUANG, 2003; CHEN; HUANG; LAN, 2003; CHEN et al., 2004), sobretudo para os sistemas dinâmicos que possuem o comportamento clássico caótico (LIN; BALLENTINE, 1990, 1992).

Uma forma de realizar a correspondência clássica-quântica foi estudada por Pollet et al. (1995). Naquele estudo eles determinaram uma função de onda elíptica complexa caracterizando um determinado estado coerente para o operador hermitiano isotrópico bidimensional. Foi observado que o máximo de probabilidade acompanha a órbita clássica correspondente na forma de uma curva fechada simétrica. Nesta dissertação propomos estender os estudos de Pollet et al. (1995) iniciando um estudo sistemático de operadores não hermitianos bidimensionais complexos com energias reais. Em nossos estudos utilizamos uma generalização da função de onda elíptica complexa definida por Pollet et al. (1995) e, verificamos que os máximos de probabilidade continuaram apresentando a forma de uma curva fechada, porém com a quebra da simetria. Observamos que a quebra da simetria pode ser interpretada classicamente como sendo tal que, para grandes valores dos parâmetros de quebra de hermiticidade, a velocidade da partícula aumenta em determinadas regiões e diminui a probabilidade de encontrá-la.

Por outro lado, Lin e Ballentine (1990, 1992) buscaram fazer a comparação da correspondência clássica-quântica, através do cômputo da evolução temporal da função de Husimi (HUSIMI, 1940). Nestes trabalhos a função de Husimi foi inicialmente localizada em uma ilha da seção de Poincaré, que foi construída pela dinâmica clássica do oscilador anarmônico quártico forçado.

Por causa da existência da região caótica na seção de Poincaré a partícula tunela coerentemente entre as ilhas de mesma natureza, determinando o máximo de probabilidade nas ilhas e uma baixa probabilidade de encontrar a partícula na região caótica. Propomos estender o trabalho de Lin e Ballentine (1990, 1992) para o estudo das regiões regulares e caóticas no espaço de fase de um oscilador anarmônico sêxtuplo forçado.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: no Capítulo 2 fazemos uma breve revisão do trabalho de Pollet et al. (1995), em que foi estudada a dinâmica do oscilador harmônico isotrópico bidimensional. Apresentamos a função de onda elíptica complexa que caracteriza um estado coerente e, calculamos a densidade de probabilidade do estado coerente definido por eles. Calculamos também a densidade de probabilidade do estado final não degenerado, que é aquele estado composto pela soma dos estados degenerados com a mesma energia. A partir do trabalho de Pollet et al. (1995), iniciamos um estudo de sistemas não hermitianos com energias reais. Calculamos a densidade de probabilidade e verificamos o impacto da degenerescência neste sistema. No Capítulo 3 fazemos uma revisão do trabalho de Lin e Ballentine (1990, 1992), que consiste na dinâmica do oscilador anarmônico quártico forçado. Construimos as seções de Poincaré e mostramos na evolução temporal o comportamento do deslocamento, x , e da energia, H , das órbitas caóticas e regulares nos pontos das seções de Poincaré. Propomos discutir os resultados da evolução temporal no poço de potencial assimétrico e no simétrico, onde determinamos a natureza das ilhas construídas na seção de Poincaré. Em seguida estudamos alguns resultados obtidos por Lin e Ballentine (1992) do tunelamento coerente entre as ilhas de mesma natureza através do cômputo da função de Husimi. No Capítulo 4 propomos o estudo das regiões regulares e caóticas no espaço de fase de um oscilador anarmônico sêxtuplo forçado, discutimos a dinâmica regular e caótica da partícula no poço de potencial simétrico e, variamos alguns parâmetros do potencial. Já no Capítulo 5 são apresentados os comentários finais.

Capítulo 2

Autoestados Elípticos Complexos

2.1 Introdução

O estudo dos autoestados elípticos complexos para o oscilador harmônico isotrópico quântico bidimensional foi introduzido por Pollet et al. (1995), o qual consiste na análise do limite clássico dado pela dinâmica de um conjunto de soluções quânticas deste sistema. Desde então esta proposta tem despertado o interesse de outros autores e vem sendo estudada em outros contextos (CHEN; HUANG, 2003; CHEN; HUANG; LAN, 2003; CHEN et al., 2004). Para melhor compreender este estudo, neste Capítulo fazemos uma breve revisão do trabalho original (POLLET et al., 1995), em que foi utilizada a hamiltoniana hermitiana para o oscilador harmônico isotrópico quântico bidimensional e, definida uma função de onda elíptica complexa, caracterizando um determinado estado coerente deste sistema. Pollet et al. (1995), observaram que a densidade de probabilidade de tais estados apresenta o máximo de probabilidade sobre uma curva na forma de uma elipse, observa-se ainda que esta curva é simétrica correspondendo ao esperado para a órbita clássica da partícula.

Verificamos que a função de onda elíptica complexa definida por Pollet et al. (1995) determina alguns estados degenerados com a mesma energia. Então calculamos a densidade de probabilidade do estado final não degenerado, sendo aquele composto pela soma de todos os estados com a mesma energia e, observamos que o estado final não degenerado apresenta o máximo de probabilidade sobre uma curva fechada simétrica na forma circular.

Vamos estender os estudos de Pollet et al. (1995) para um novo sistema cuja a hamiltoniana

seja não hermitiana mas com energias reais. Notamos que é possível associar este trabalho ao estudo da paridade temporal conhecida como simetria PT o qual foi proposto por Bender e Boettcher (1998). O trabalho de Bender e Boettcher (1998), consiste no estudo de hamiltonianas não hermitianas para sistemas unidimensionais com autovalores reais, nas quais busca-se a explicação para a realidade do espectro de um sistema que possui uma simetria que consiste basicamente em invariância sob inversão do tempo e do espaço ($P : x \rightarrow -x; T : t \rightarrow -t, i \rightarrow -i$). Mais recentemente verificou-se que esta simetria não é necessária nem tão pouco suficiente para garantir a realidade do espectro (Pseudo-Hermitian Hamiltonians in Quantum Mechanics I, 2004; Pseudo-Hermitian Hamiltonians in Quantum Mechanics II, 2004).

Para o sistema não hermitiano que propomos, verificamos que ao contrário do sistema hermitiano apresentado por Pollet et al. (1995), a densidade de probabilidade mostra a quebra da simetria, porém mantendo a forma da trajetória clássica do sistema hermitiano correspondente.

Este Capítulo está organizado na seguinte forma: na seção 2.2 fazemos uma breve revisão do trabalho de Pollet et al. (1995) e propomos incluir para este trabalho o estudo da degenerescência destes estados. Na seção 2.3 propomos o estudo da simetria PT nos estados elípticos complexos de um sistema não hermitiano com energias reais. Calculamos a densidade de probabilidade e verificamos o impacto da degenerescência. Finalmente na seção 2.4 fazemos os comentários.

2.2 Representação dos Estados Elípticos Complexos

A hamiltoniana usada por Pollet et al. (1995) para o estudo da dinâmica quântica do oscilador harmônico isotrópico bidimensional é dada por

$$H = \frac{M \omega^2 x^2}{2} + \frac{M \omega^2 y^2}{2} + \frac{p_x^2}{2M} + \frac{p_y^2}{2M}, \quad (2.1)$$

onde ω é a frequência natural do sistema e M é a massa da partícula.

Notemos na hamiltoniana escrita na equação (2.1) que os osciladores são desacoplados, portanto, temos dois osciladores unidimensionais.

Um procedimento que pode ser usado na determinação de uma simetria via transformação complexa da equação (2.1), consiste em escrever a matriz de transformação na forma

$$\frac{1}{\sqrt{\cos(2\eta)}} \begin{bmatrix} \cos(\eta) & i \operatorname{sen}(\eta) \\ -i \operatorname{sen}(\eta) & \cos(\eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

que nos leva as variáveis espaciais transformadas complexas

$$X = \frac{1}{\sqrt{\cos(2\eta)}} \cos(\eta) x + \frac{i}{\sqrt{\cos(2\eta)}} \operatorname{sen}(\eta) y, \quad (2.3)$$

e

$$Y = -\frac{i}{\sqrt{\cos(2\eta)}} \operatorname{sen}(\eta) x + \frac{1}{\sqrt{\cos(2\eta)}} \cos(\eta) y, \quad (2.4)$$

onde η é um parâmetro relacionado à excentricidade da elipse para o estado coerente.

Para as equações (2.3) e (2.4), temos que

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 &= \left[\frac{\cos(\eta) x + i \operatorname{sen}(\eta) y}{\sqrt{\cos(2\eta)}} \right]^2 + \left[\frac{-i \operatorname{sen}(\eta) x + \cos(\eta) y}{\sqrt{\cos(2\eta)}} \right]^2 = \\ &= \frac{1}{\cos(2\eta)} [(\cos^2(\eta) - \operatorname{sen}^2(\eta)) (x^2 + y^2)]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Recorrendo às relações trigonométricas usuais como

$$\cos^2(\eta) - \operatorname{sen}^2(\eta) = \cos(2\eta), \quad (2.6)$$

verificamos que a equação (2.5), é covariante, ou seja:

$$X^2 + Y^2 = x^2 + y^2. \quad (2.7)$$

Considerando o operador momento linear em relação ao eixo x , temos

$$\begin{aligned} p_x &= -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\hbar}{i} \left[\left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial X} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial Y} \right] = \\ &= \frac{\hbar}{i \sqrt{\cos(2\eta)}} \left[\cos(\eta) \frac{\partial}{\partial X} - i \operatorname{sen}(\eta) \frac{\partial}{\partial Y} \right], \end{aligned} \quad (2.8)$$

e o operador momento linear em relação ao eixo y

$$p_y = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\hbar}{i\sqrt{\cos(2\eta)}} \left[i \operatorname{sen}(\eta) \frac{\partial}{\partial X} + \cos(\eta) \frac{\partial}{\partial Y} \right], \quad (2.9)$$

obtemos o quadrado do operador momento linear

$$\begin{aligned} p_x^2 + p_y^2 &= \left(\frac{\hbar}{i\sqrt{\cos(2\eta)}} \right)^2 \left[\left(\cos(\eta) \frac{\partial}{\partial X} - i \operatorname{sen}(\eta) \frac{\partial}{\partial Y} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(i \operatorname{sen}(\eta) \frac{\partial}{\partial X} + \cos(\eta) \frac{\partial}{\partial Y} \right)^2 \right] = -\frac{\hbar^2}{\cos(2\eta)} \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) \times \\ &\quad \times [\cos^2(\eta) - \operatorname{sen}^2(\eta)] = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right), \end{aligned} \quad (2.10)$$

podemos ver que para o operador momento linear também temos uma expressão covariante

$$p_x^2 + p_y^2 = P_x^2 + P_y^2. \quad (2.11)$$

Portanto, a equação (2.1) pode ser reescrita em função das novas coordenadas da seguinte forma

$$H = \frac{M_x \omega^2 X^2}{2} + \frac{M_y \omega^2 Y^2}{2} + \frac{P_x^2}{2M} + \frac{P_y^2}{2M}, \quad (2.12)$$

tanto clássica quanto quanticamente.

Usando a transformação acima, a equação de Schrödinger pode ser escrita nas novas variáveis como

$$-\frac{\hbar}{2M} \nabla^2 \psi_{n_1 n_2}(X, Y) + \frac{M}{2} (\omega^2 X^2 + \omega^2 Y^2) \psi_{n_1 n_2}(X, Y) = E \psi_{n_1 n_2}(X, Y), \quad (2.13)$$

sendo a autofunção, $\psi_{n_1 n_2}(X, Y) = \psi_{n_1}(X) \psi_{n_2}(Y)$, uma solução da equação (2.13), que pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \psi_{n_1 n_2}(X, Y) &= [\pi n_1! n_2! 2^{(n_1+n_2)}]^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{M}{2\hbar}(\omega X^2 + \omega Y^2)} \times \\ &\quad \times H_{n_1} \left(\sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}} X \right) H_{n_2} \left(\sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}} Y \right), \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde H_{n_1} e H_{n_2} são polinômios de Hermite.

O estudo do estado coerente consiste na análise do limite clássico de um sistema dinâmico. No caso em estudo a órbita da partícula no estado coerente é dada pela função de onda elíptica normalizada definida por Pollet et al. (1995) na forma

$$\Psi_{n_1 n_2}(x, y, \eta) = [\cos(2\eta)]^{\frac{n_2}{2}} \psi_{n_1 n_2}(x, y), \quad (2.15)$$

sendo que eles escolheram os números quânticos $n_1 = 0$ e $n_2 = 10$, uma vez que o estado construído acima possui a característica desejada de acompanhar a trajetória clássica.

Eles mostraram ainda que a densidade de probabilidade, $\Psi_{n_1 n_2}(x, y, \eta) = \Psi_{n_1 n_2}(x, y, \eta)^* \times \Psi_{n_1 n_2}(x, y, \eta)$, determina o máximo de probabilidade na forma de uma curva fechada simétrica para a órbita da partícula no estado coerente. Podemos ver na Figura 2.1 a densidade de probabilidade para 2 estados distintos para os quais consideramos o conjunto de parâmetros: $\hbar = M = \omega = 1$ e η , definidos por Pollet et al. (1995). Observe na Figura 2.1 (a) que para $\eta = \pi/4$ a densidade de probabilidade apresenta o comportamento circular que podemos ver claramente o máximo de probabilidade destacado na projeção mostrada na Figura 2.1 (b). Para $\eta = \pi/6$ vemos na Figura 2.1(c) que a da densidade de probabilidade determina o máximo de probabilidade sobre uma curva fechada na forma de uma elipse. Próximo aos dois apocentros de movimento a velocidade da partícula é mais lenta e conseqüentemente a densidade de probabilidade tem máximos absolutos nestes pontos. Podemos ver claramente a simetria de reflexão nos eixos x e y da Figura 2.1(c) na projeção mostrada na Figura 2.1(d).

Observamos que o estado degenerado com $n_1 + n_2 = 10$ na equação (2.15) determina onze estados degenerados, já que a energia do estado coerente é dada por $E_n = (n_1 + n_2 + 1) \hbar \omega$. O estado final não degenerado a ser analisado será aquele composto pela soma de todos os estados de mesma energia. Podemos ver na Figura 2.2 que o estado final não degenerado também apresenta o máximo de probabilidade sobre uma curva fechada circular. Para o parâmetro $\eta = \pi/4$ a Figura 2.2(a) mostra a simetria nos eixos x e y da densidade de probabilidade do estado final não degenerado, enquanto a Figura 2.2(b) mostra a simetria nos eixos x e y da densidade de probabilidade do estado final não degenerado para o parâmetro $\eta = \pi/6$. Observamos na Figura 2.2(b) que ao contrário do estado degenerado definido por Pollet et al. (1995), em que foi mostrado o máximo de probabilidade na forma de uma curva fechada

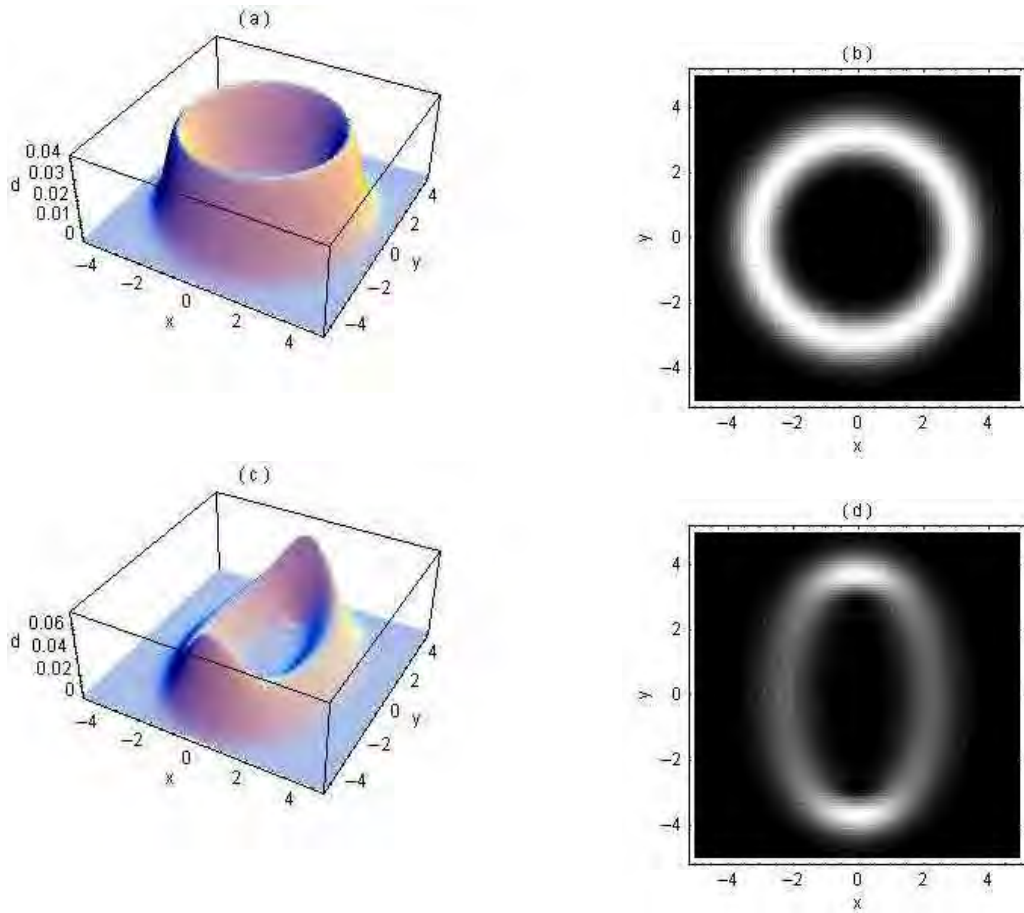


Figura 2.1: *Densidade de probabilidade associada aos estados elípticos. (a) e (b) mostram os resultados para $\eta = \pi/4$. (c) e (d) mostram os resultados para $\eta = \pi/6$.*

elíptica, o estado final não degenerado mostra o máximo de probabilidade na forma de uma curva fechada simétrica circular.

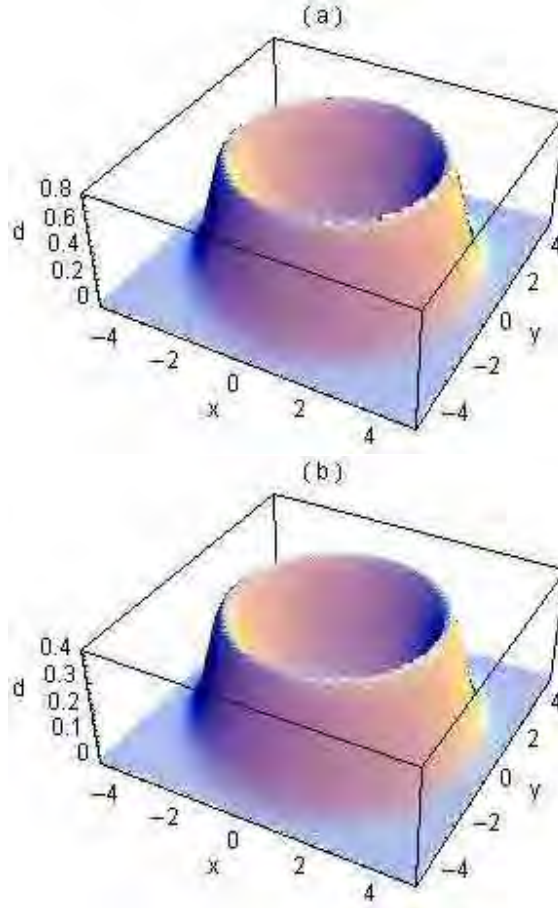


Figura 2.2: Resultado do estado final não degenerado. (a) mostra a densidade de probabilidade para o parâmetro $\eta = \pi/4$. (b) mostra a densidade de probabilidade para o parâmetro $\eta = \pi/6$.

2.3 Simetria PT

O sistema que propomos é dado pela generalização não hermitiana do oscilador anisotrópico forçado bidimensional que pode ser caracterizado pelo potencial escrito na forma

$$V(x, y) = \frac{M}{2} \omega_1^2 x^2 + \frac{M}{2} \omega_2^2 y^2 + \sigma_1 x + \sigma_2 y, \quad (2.16)$$

onde σ_1 e σ_2 são constantes complexas e podem ser escritas como

$$\sigma_j \equiv \lambda_j + i\gamma_j; \quad j = 1, 2, \quad (2.17)$$

onde λ é um termo de força constante e γ é um parâmetro de quebra de hermiticidade. Notemos

que se $\gamma=0$ o sistema é hermitiano.

É interessante ressaltar que as hamiltonianas não hermitianas para os sistemas dinâmicos unidimensionais estudados por Bender e Boettcher (1998), o espectro de energia é real somente se o parâmetro σ é um número real ou imaginário puro. Porém, vamos ver que em duas dimensões podemos evitar esta limitação ao menos quando alguma restrição é imposta sobre os parâmetros dos potenciais.

Como é usualmente tratado neste tipo de potencial, fazemos a translação nas variáveis espaciais

$$x = \bar{x} + a_1, \quad (2.18)$$

$$y = \bar{y} + a_2, \quad (2.19)$$

onde a_1 e a_2 são constantes complexas arbitrárias.

Notemos que, substituindo as equações (2.18) e (2.19) na equação (2.16), temos o potencial reescrito como

$$\begin{aligned} V(\bar{x}, \bar{y}) = & \frac{M}{2} \omega_1^2 \bar{x}^2 + \frac{M}{2} \omega_2^2 \bar{y}^2 + (M \omega_1^2 a_1 + \sigma_1) \bar{x} + \\ & + (M \omega_2^2 a_2 + \sigma_2) \bar{y} + \frac{M}{2} \omega_1^2 a_1^2 + \frac{M}{2} \omega_2^2 a_2^2 + \sigma_1 a_1 + \sigma_2 a_2, \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde as constantes a_1 e a_2 podem ser definidas para anular os termos lineares em \bar{x} e \bar{y} do potencial. Assim, para este caso temos que

$$a_j = -\frac{\sigma_j}{M \omega_j^2}; \quad j = 1, 2, \quad (2.21)$$

de modo que ficamos com o potencial

$$V(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{M}{2} \omega_1^2 \bar{x}^2 + \frac{M}{2} \omega_2^2 \bar{y}^2 + \Delta E, \quad (2.22)$$

onde ΔE é a constante do potencial que é escrita na forma

$$\Delta E = \frac{M}{2} \omega_1^2 a_1^2 + \frac{M}{2} \omega_2^2 a_2^2 + \sigma_1 a_1 + \sigma_2 a_2 = -\frac{1}{2M} \left(\frac{\sigma_1^2}{\omega_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{\omega_2^2} \right). \quad (2.23)$$

Podemos observar na equação (2.23) que o espectro de energia deste sistema não é real. Porém,

substituindo a equação (2.17) na equação (2.23), temos

$$\begin{aligned} -2M\Delta E &= \frac{(\lambda_1 + i\gamma_1)^2}{\omega_1^2} + \frac{(\lambda_2 + i\gamma_2)^2}{\omega_2^2} = \\ &= \frac{(\lambda_1^2 - \gamma_1^2)}{\omega_1^2} + \frac{(\lambda_2^2 - \gamma_2^2)}{\omega_2^2} + 2i \left(\frac{\lambda_1\gamma_1}{\omega_1^2} + \frac{\lambda_2\gamma_2}{\omega_2^2} \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

de onde é simples concluir que, se os parâmetros do potencial obedecem a condição

$$\left(\frac{\lambda_1\gamma_1}{\omega_1^2} + \frac{\lambda_2\gamma_2}{\omega_2^2} \right) \equiv 0, \quad (2.25)$$

o espectro de energia é real.

Nestas condições a equação de Schrödinger em função das novas variáveis é escrita como

$$-\frac{\hbar}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} \right) \psi(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{V}(\bar{x}, \bar{y}) \psi(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{E} \psi(\bar{x}, \bar{y}), \quad (2.26)$$

onde \bar{E} é a energia dos dois osciladores harmônicos em \bar{x} e \bar{y} , o que nos leva ao espectro de energia real do oscilador harmônico bidimensional escrito como

$$\begin{aligned} E_{n_1 n_2} &= \bar{E} + \Delta E = \left(n_1 + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_1 + \left(n_2 + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_2 + \\ &\quad - \frac{1}{2M} \left[\frac{(\lambda_1^2 - \gamma_1^2)}{\omega_1^2} + \frac{(\lambda_2^2 - \gamma_2^2)}{\omega_2^2} \right], \end{aligned} \quad (2.27)$$

e as autofunções de onda correspondentes são

$$\begin{aligned} \psi_{n_1 n_2}(x, y) &= [\pi n_1! n_2! 2^{(n_1 + n_2)}]^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{M}{2\hbar}[\omega_1(x-a_1)^2 + \omega_2(y-a_2)^2]} \times \\ &\quad \times H_{n_1} \left[\sqrt{\frac{M\omega_1}{\hbar}}(x - a_1) \right] H_{n_2} \left[\sqrt{\frac{M\omega_2}{\hbar}}(y - a_2) \right]. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Neste ponto a fim de considerar o estado coerente introduzido por Pollet et al. (1995), incluindo efeitos da simetria PT sobre o comportamento clássico de um sistema, nos restringimos ao caso isotrópico em que $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Assim, a matriz de transformação é escrita como

$$\frac{1}{\sqrt{\cos(2\eta)}} \begin{bmatrix} \cos(\eta) & i \operatorname{sen}(\eta) \\ -i \operatorname{sen}(\eta) & \cos(\eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

que nos leva às variáveis espaciais transformadas complexas fazendo a mudança $(x-a_1)$ e $(y-a_2)$

$$(x - a_1) = \frac{1}{\sqrt{\cos(2\eta)}} [\cos(\eta)(x - a_1) + i \operatorname{sen}(\eta)(y - a_2)], \quad (2.30)$$

$$(y - a_2) = \frac{1}{\sqrt{\cos(2\eta)}} [\cos(\eta)(y - a_2) - i \operatorname{sen}(\eta)(x - a_1)], \quad (2.31)$$

permitindo escrever explicitamente as autofunções $\psi_{n_1 n_2}(x, y)$ escritas na equação (2.28).

Podemos observar que a transformação complexa acima pode ser realizada em termos de uma transformação real se fizermos a identificação de $\eta \rightarrow i\eta$. Neste caso teremos que

$$\frac{1}{\sqrt{\cos(2\eta)}} \begin{bmatrix} \cos(\eta) & i \operatorname{sen}(\eta) \\ -i \operatorname{sen}(\eta) & \cos(\eta) \end{bmatrix} = \frac{1}{\cosh(2\eta)} \begin{bmatrix} \cosh(\eta) & \operatorname{senh}(\eta) \\ \operatorname{senh}(\eta) & \cosh(\eta) \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Como foi mostrado por Chen e Huang (2003); Chen, Huang e Lan (2003); Chen *et al*, (2004), esta solução é um estado coerente que tem a mais alta probabilidade em torno da trajetória clássica para o operador hamiltoniano hermitiano.

Considerando o estado coerente estacionário definido por Pollet et al. (1995) na equação (2.15) e os seguintes parâmetros do potencial: $\hbar = M = \omega = 1$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, obtivemos nas Figuras 2.3 e 2.4 a densidade de probabilidade onde podemos ver claramente a quebra da simetria de reflexão nos eixos x e y . A Figura 2.3 mostra os resultados para o parâmetro $\eta = \pi/4$ enquanto a Figura 2.4 mostra os resultados para o parâmetro $\eta = \pi/6$. Observamos que aumentando o parâmetro γ para $\eta = \pi/4$ e $\eta = \pi/6$ a região de maior probabilidade concentra-se progressivamente em uma única região, diminuindo a região mais provável de encontrar a partícula, sem contudo mudar a órbita da partícula para o sistema hermitiano correspondente.

Verificamos também o impacto da degenerescência, calculando a densidade de probabilidade do estado final não degenerado, sendo aquele composto pela soma de todos os estados com a mesma energia. Observamos que o resultado do estado final não degenerado apresenta o máximo de

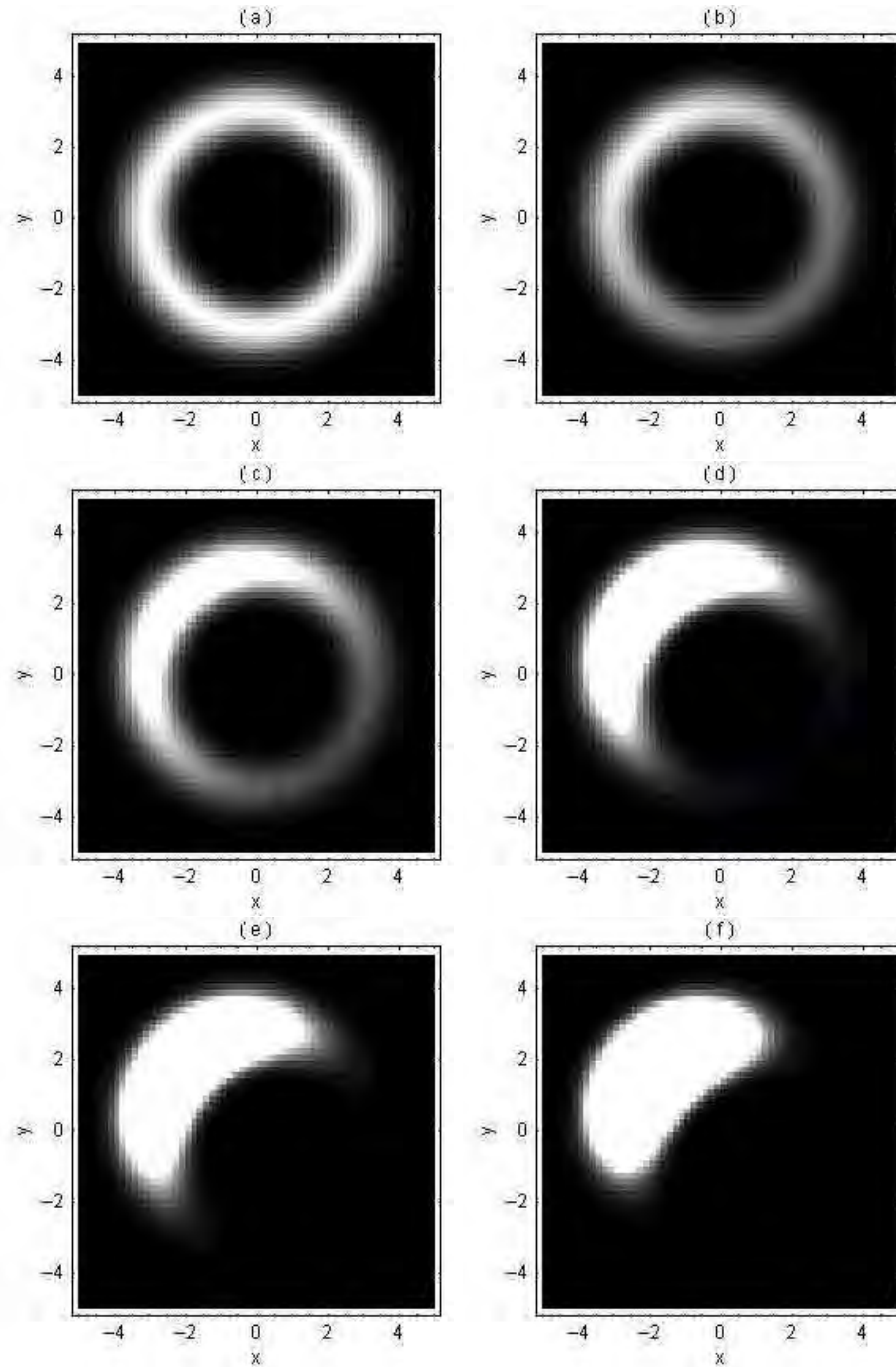


Figura 2.3: *Densidade Probabilidade com o parâmetro $\eta = \pi/4$. (a) $\gamma = 0,5 \times 10^{-8}$, (b) $\gamma = 0,05$, (c) $\gamma = 0,1$, (d) $\gamma = 0,3$, (e) $\gamma = 0,5$ e (f) $\gamma = 1$.*

probabilidade sobre uma curva na forma circular, porém com a quebra de simetria de reflexão nos eixos x e y . Podemos ver na Figuras 2.5 o resultado do estado final não degenerado com o parâmetro $\eta = \pi/4$ e na Figura 2.6 com o parâmetro $\eta = \pi/6$. Observamos que para ambos os parâmetros utilizados para η determina o máximo de probabilidade sobre uma curva na forma circular, porém com a quebra da simetria. Notemos que com o aumento do parâmetro de quebra de hermiticidade, γ , o resultado da densidade de probabilidade para o estado final

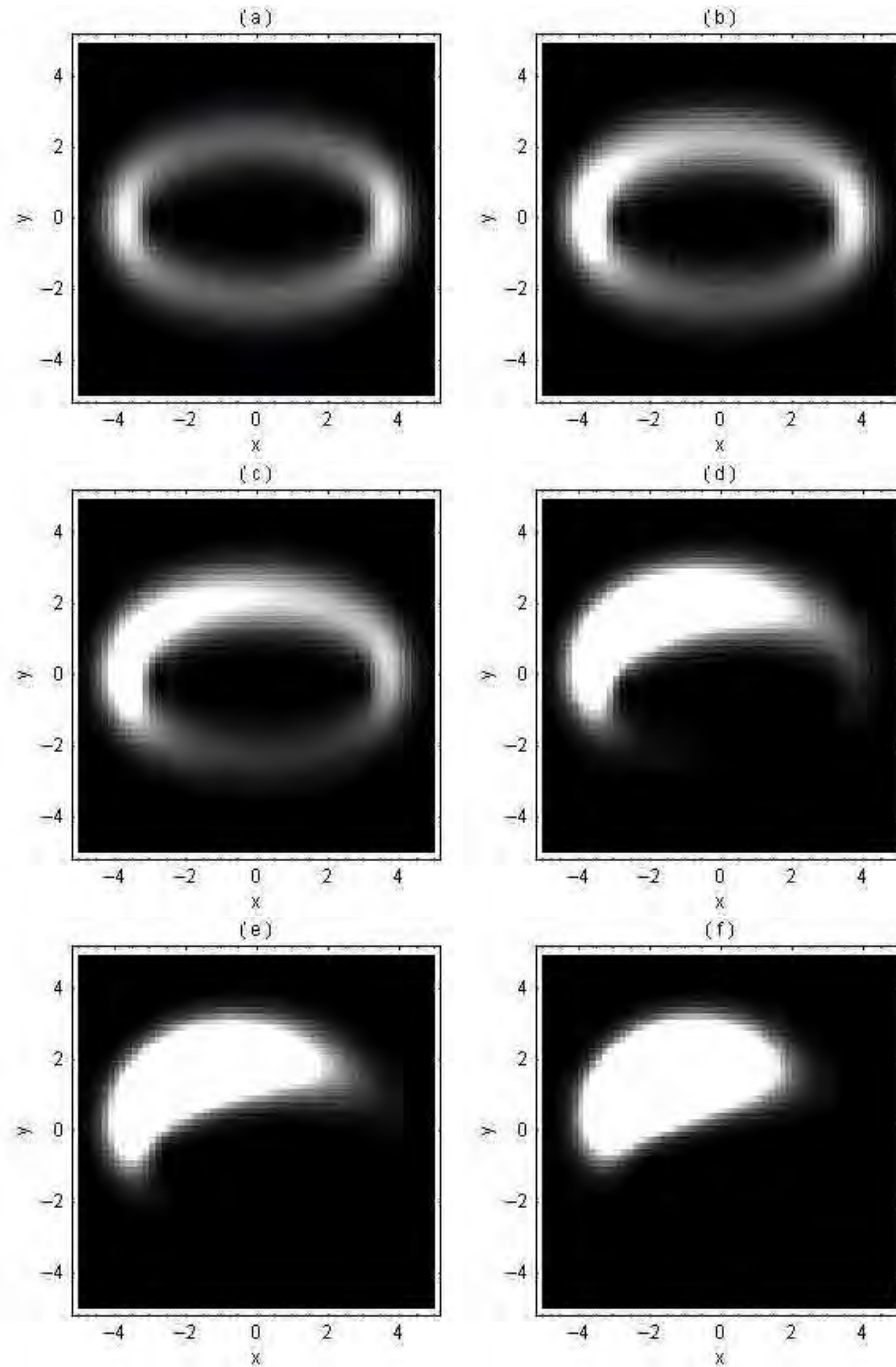


Figura 2.4: *Densidade de probabilidade com o parâmetro $\eta = \pi/6$. (a) $\gamma = 0,5 \times 10^{-8}$, (b) $\gamma = 0,05$, (c) $\gamma = 0,1$, (d) $\gamma = 0,3$, (e) $\gamma = 0,5$ e (f) $\gamma = 1$.*

degenerado determina uma pequena região do espaço onde se localiza a maior probabilidade. Para os valores mais elevados do parâmetro γ , o comportamento da probabilidade pode ser interpretado classicamente como sendo tal que, para valores mais altos do parâmetro de quebra de hermiticidade, aumenta a velocidade da partícula na região em que é menos provável de encontrá-la.

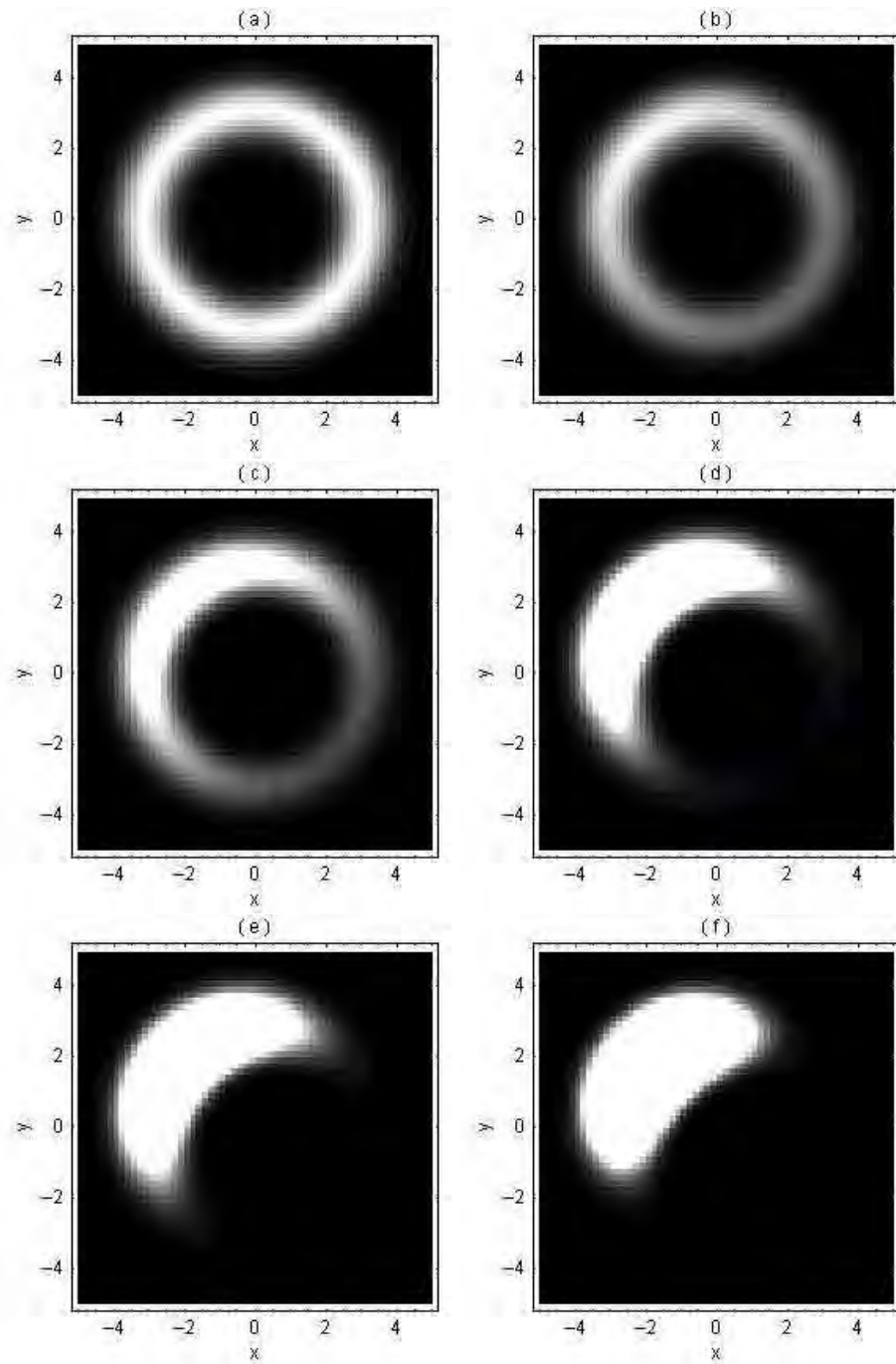


Figura 2.5: Resultado do estado final não degenerado com o parâmetro $\eta = \pi/4$. (a) $\gamma = 0,5 \times 10^{-8}$, (b) $\gamma = 0,05$, (c) $\gamma = 0,1$, (d) $\gamma = 0,3$, (e) $\gamma = 0,5$ e (f) $\gamma = 1$.

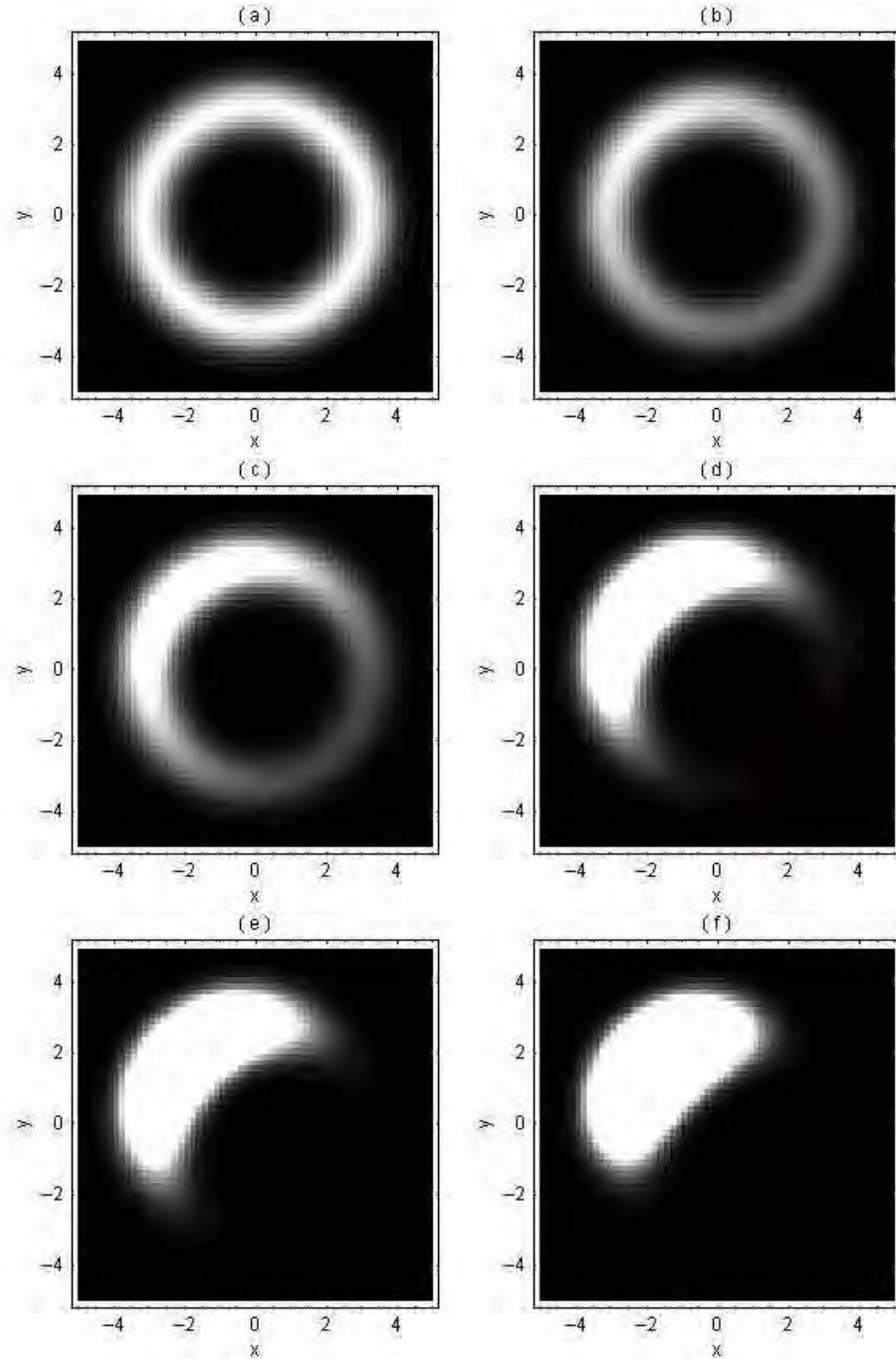


Figura 2.6: Resultado do estado final não degenerado com o parâmetro $\eta = \pi/6$. (a) $\gamma = 0,5 \times 10^{-8}$, (b) $\gamma = 0,05$, (c) $\gamma = 0,1$, (d) $\gamma = 0,3$, (e) $\gamma = 0,5$ e (f) $\gamma = 1$.

2.4 Comentários

Neste Capítulo fizemos uma breve revisão do trabalho de Pollet et al. (1995) que consistiu na construção de estados coerentes para a hamiltoniana hermitiana dada ao oscilador harmônico bidimensional isotrópico. Tais estados coerentes tem a característica interessante de seguir a

órbita clássica do sistema.

Obtivemos a transformação das variáveis espaciais complexas que nos levam a uma hamiltoniana transformada covariante garantindo a simetria dada para este sistema. Escrevemos a função de onda elíptica definida por Pollet et al. (1995), para o estado coerente que delimita a densidade de probabilidade sobre uma curva fechada simétrica nos eixos x e y na forma de uma elipse, correspondendo ao esperado para uma trajetória clássica. Observamos que esta função de onda elíptica é degenerada. Então verificamos que a densidade de probabilidade para o resultado final da soma dos estados degenerados também apresenta o máximo de probabilidade sobre uma curva fechada que acompanha a trajetória clássica.

Estendemos o trabalho de Pollet et al. (1995) iniciando o estudo do estado coerente no sistema não hermitiano bidimensional com energias reais, contanto que consideramos algumas limitações impostas sobre os parâmetros dos potenciais. Calculamos a densidade de probabilidade e observamos a quebra da simetria de reflexão nos eixos x e y para órbita da partícula no estado coerente. Verificamos que a região que determina a maior probabilidade mantém a forma da curva clássica do sistema hermitiano correspondente, tanto para o estado degenerado quanto para o estado final não degenerado para $\eta = \pi/4$. Para $\eta = \pi/6$ o estado coerente também determina a quebra da simetria da densidade de probabilidade, porém o estado degenerado mantém a forma de uma curva elíptica, enquanto o estado final não degenerado determina a quebra de simetria na forma de uma curva circular. Observamos que aumentando o parâmetro de quebra de hermiticidade, γ , o comportamento da probabilidade pode ser interpretado classicamente como sendo tal que para os mais altos valores dos parâmetros γ , a velocidade da partícula aumenta e a região mais provável de encontrar a partícula diminui.

Capítulo 3

Regiões Regulares e Caóticas no Espaço de Fase de um Oscilador Anarmônico Quártico Forçado

3.1 Introdução

O estudo do oscilador anarmônico quártico forçado associado ao caos foi proposto por Lin e Ballentine (1990) na tentativa de buscar uma interpretação entre a estrutura do espaço de fase clássico e o tunelamento quântico. Deste então este assunto tem sido estudado em diversos contextos (LIN; BALLENTINE, 1992; HINES et al., 2005; ELTSCHKA; SCHLAGHECK, 2005; IGARASHI; YAMADA, 2004; SANGOUARD et al., 2004). Para melhor entender esta questão neste Capítulo vamos fazer uma revisão desta proposta (LIN; BALLENTINE, 1990, 1992), a qual consiste de uma hamiltoniana dada por uma partícula localizada no poço de um potencial anarmônico sofrendo a ação de uma força externa. Recorremos as equações de movimento de Hamilton para escrever as equações que utilizamos na construção da seção de Poincaré dada pela dinâmica deste sistema.

A seção de Poincaré permite a identificação das órbitas como sendo regulares ou caóticas. No caso da presença de ilhas na seção de Poincaré estas correspondem a órbitas regulares e Lin e Ballentine (1992) mostraram na evolução temporal do deslocamento x , e da energia, H , que estas apresentam o comportamento quase-periódico, enquanto os comportamentos irregulares correspondem à evolução temporal das órbitas caóticas. Para a obtenção da evolução temporal

Lin e Ballentine (1992) desconsideraram a ação da força externa sobre o sistema. Nós observamos que ao desconsiderar a ação da força externa na evolução temporal há uma inconsistência devido ao fato que perde-se parte da energia potencial que atua no sistema ao construir a seção de Poincaré. Uma vez que as seções de Poincaré são construídas considerando a ação da força externa sobre o sistema ao contrário à proposta de Line e Ballentine (1992), vamos propor obter a evolução temporal considerando a ação da força externa. Nós mostramos que considerando a ação de força externa sobre o sistema o poço de potencial é assimétrico.

Lin e Ballentine (1992) determinaram que as ilhas não ressonantes cercam os pontos fixos elípticos que estão no fundo do poço de potencial e que as ilhas ressonantes são devidas à indução de força externa. Verificamos os resultados da evolução temporal no poço de potencial assimétrico e, vimos que as ilhas não ressonantes indicam que os movimentos das partículas aproximam-se daqueles de um oscilador harmônico, o que significa que as energias destas ilhas estão localizadas no fundo do poço de potencial onde estão localizados pontos fixos elípticos. Observamos que próximo à estes pontos a energia potencial tende à forma de uma parábola a qual determina a energia potencial de um oscilador hamônico, enquanto para as ilhas ressonantes que são devidas à indução da força externa, verificamos que os movimentos das partículas estão localizados na parte superior do poço de potencial assimétrico, afastadas dos pontos fixos elípticos localizados no fundo do poço de potencial.

Aqui propomos a obtenção dos pontos da evolução temporal junto às interseções da órbita da partícula com as seções de Poincaré no espaço de fase de forma que podemos mostrar a análise qualitativa dos resultados da evolução temporal no poço de potencial simétrico.

Conhecido o comportamento da dinâmica clássica podemos estudar a correspondência quântica-clássica, através do cômputo do pacote de ondas cujos valores médios evoluem acompanhando a órbita clássica. A função de Husimi (HUSIMI, 1940) é a freqüentemente utilizada na literatura (TAKAHASHI e SAITÔ, 1985) a qual neste caso determina a densidade de probabilidade. Esta função foi usada por Lin e Ballentine (1990, 1992) na correspondência quântica-clássica dada por este sistema. O pacote de onda pode estar inicialmente localizado na região caótica (LIN; BALLENTINE, 1990) ou em uma ilha (LIN; BALLENTINE, 1990, 1992) da seção de Poincaré. Eles observaram que se o pacote de ondas estiver inicialmente localizado dentro de uma ilha, tal pacote tunela coerentemente para frente e para trás entre as ilhas de mesma natureza determinando os mínimos de probabilidade na região caótica, onde a partícula passa rapidamente e os máximos de probabilidade centrados nas ilhas onde a partícula passa lentamente.

Este Capítulo está organizado como se segue: na seção 3.2 mostramos a hamiltoniana e determinamos as equações de movimento. Na seção 3.3 apresentamos o método da seção de Poincaré. Na seção 3.4 obtemos os resultados da evolução temporal de x e H , em seguida analisamos os resultados da evolução temporal no poço de potencial assimétrico. Na seção 3.5 obtemos os resultados da evolução temporal e analisamos os resultados no poço de potencial simétrico. Na seção 3.6 discutimos os resultados obtidos por Lin e Ballentine (1992) para o tunelamento coerente onde a função de Husimi está inicialmente localizada em uma ilha da seção de Poincaré, ao passo que na seção 3.7 fazemos os comentários.

3.2 Modelo para o Oscilador Anarmônico Quártico Forçado

O sistema usado por Lin e Ballentine (1990, 1992) para caracterizar a dinâmica do oscilador anarmônico quártico forçado unidimensional, consistiu em uma partícula no poço de potencial sofrendo a ação de uma força externa. A hamiltoniana dada para a dinâmica deste sistema é escrita como

$$H = \frac{p^2}{2M} + Bx^4 - Dx^2 + \lambda x \cos(\omega_0 t), \quad (3.1)$$

onde p é o momento linear, x é a posição, B é um coeficiente de anarmonicidade, D é um coeficiente proporcional à constante elástica do sistema (quando $D < 0$), λ é a amplitude da força externa, ω_0 é a frequência angular de força externa e t é o tempo.

Podemos observar que a não linearidade no termo anarmônico e a dependência temporal na equação (3.1) permitem o caos neste sistema. A característica fundamental apresentada por sistemas caóticos consiste na sensibilidade às condições iniciais. Existem diferentes métodos que determinam o caos em um sistema dinâmico (LICHTENBERG; LIEBERMAN, 1992; WINTER; MURRAY, 1994; MARION; THORNTON, 1995). Lin e Ballentine (1990, 1992) usaram o método da superfície da seção de Poincaré, o qual apresentamos na seção (3.3).

As equações que descrevem a dinâmica clássica deste sistema podem ser escritas recorrendo às equações de movimento de Hamilton que são dadas da seguinte forma

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{M}, \quad (3.2)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -4Bx^3 + 2Dx - \lambda \cos(\omega_0 t). \quad (3.3)$$

3.3 Superfície da Seção de Poincaré

Para melhor compreender o espaço de fase do oscilador anarmônico forçado é necessário conhecer a posição (x), o momento linear (p) e o tempo (t) que caracterizam um ponto no espaço de fase tridimensional.

Um método interessante para simplificar a representação do espaço de fase foi introduzido por Henry Poincaré. O método conhecido como superfície da seção de Poincaré (WINTER; MURRAY, 1994; MARION; THORNTON, 1995), consiste na determinação de uma sequência de pontos formados por interseções da órbita da partícula com um conjunto de planos fixos, perpendiculares ao eixo do tempo e com intervalos iguais, conforme mostra a Figura 3.1.

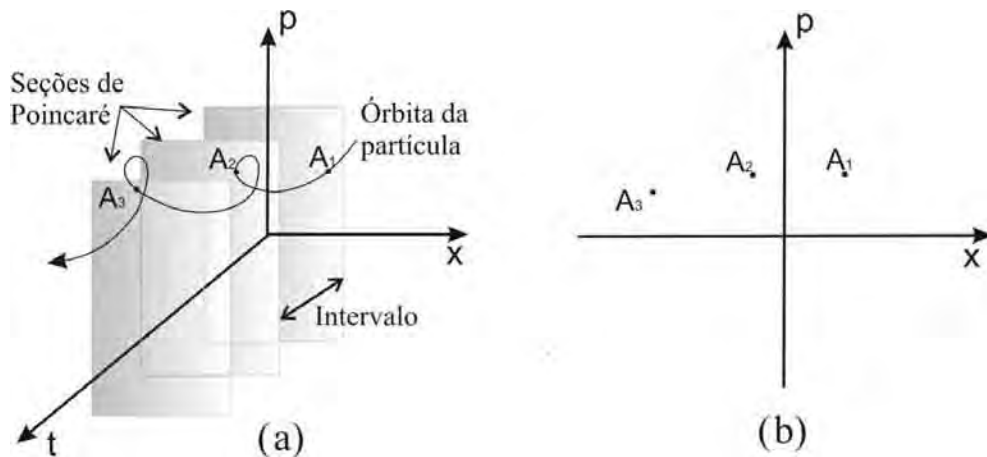


Figura 3.1: Esboço da produção da seção de Poincaré. (a) Mostra a interseção da órbita da partícula com as seções de Poincaré no espaço de fase tridimensional correspondendo à posição, x , ao momento linear, p , e ao tempo, t , enquanto (b) mostra a projeção dos pontos A_1 , A_2 e A_3 no plano x versus p .

Notemos na Figura 3.1(a) as interseções da órbita da partícula com as seções de Poincaré para um sistema dinâmico periódico, enquanto a Figura 3.1(b) mostra a projeção no plano x versus p dos pontos das interseções da órbita da partícula com as seções de Poincaré. Esta técnica é adequada para determinar as regiões regulares e caóticas dadas pelo movimento da partícula ao longo do tempo. Se a projeção dos pontos no plano x versus p construir ilhas bem definidas, então, as órbitas serão regulares e as ilhas corresponderão a libração em torno de

órbitas periódicas. Por outro lado se houver um espalhamento dos pontos no plano x versus p implicará que a órbita da partícula é caótica.

Podemos observar na Figura 3.2 o exemplo de dois comportamentos distintos usando a técnica da seção de Poincaré para determinar os movimentos do oscilador anarmônico forçado no qual a partícula está no poço de potencial sofrendo a ação de uma força externa.

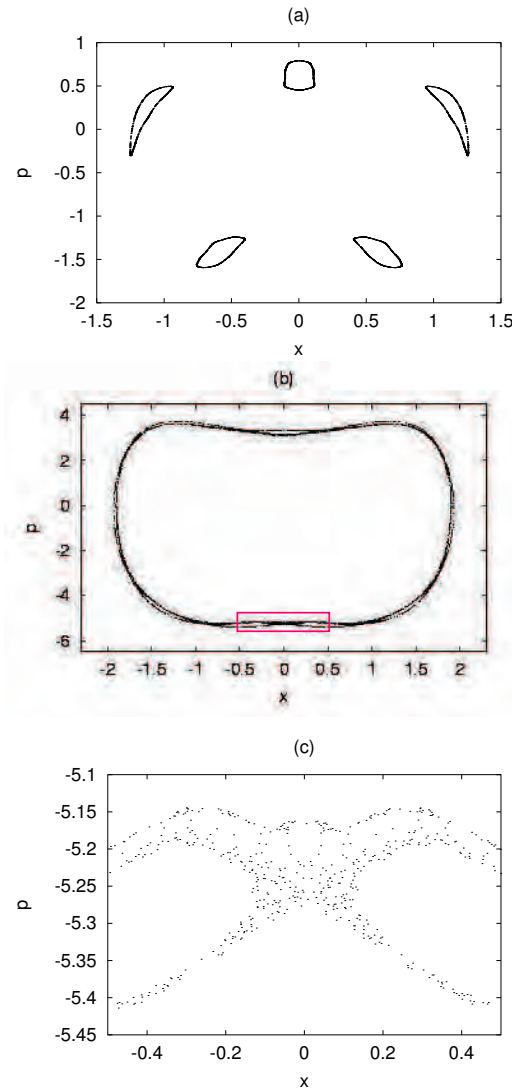


Figura 3.2: Seção de Poincaré para duas órbitas distintas com os parâmetros $B=0,2$, $D=0,2$ e $\omega_0=5,35$. (a) Mostra órbitas regulares, (b) uma separatriz e (c) ampliação da região marcada na separatriz.

A Figura 3.2(a) mostra um conjunto de cinco ilhas distintas. Em alguns casos as ilhas são devidas à ressonância entre a frequência natural do sistema e a frequência de força externa. Em outras situações as ilhas correspondem a libração em torno dos pontos fixos elípticos (localizados no fundo do poço de potencial) que são os centros das ilhas classificadas como não ressonantes.

A Figura 3.2(b) mostra uma separatriz. Uma ampliação da região marcada na separatriz mostra um espalhamento dos pontos que caracterizam os movimentos caóticos, ver Figura 3.2(c).

Desta forma, podemos observar que a superfície da seção de Poincaré é de grande valia para caracterizar uma órbita clássica de uma partícula, para todo o espaço de fase.

Na construção das seções de Poincaré apresentadas nesta dissertação, foram considerados diferentes parâmetros e várias condições iniciais. As simulações computacionais, foram feitas usando o método de integração Burlisch-Stoer (PRESS et al., 1990). O método de Newton Raphson foi usado com a precisão de (10^{-11}) para determinar o momento em que a órbita da partícula cruza o plano da seção. No caso do oscilador anarmônico quártico forçado, as equações (3.2) e (3.3) são integradas numericamente, considerando uma condição inicial dada.

3.4 Resultado e Análise para o Poço de Potencial Assimétrico

Ao construir a seção de Poincaré dada por este sistema Lin e Ballentine (1990, 1992) propuseram obter os pontos da seção nos tempos, $t = n\tau$, onde τ é o período da força externa e n são números inteiros. Podemos notar na Figura 3.3 algumas seções de Poincaré considerando $M=1$ e os parâmetros $B=0,5$, $D=10$, $\omega_0=5,35$ que foram definidos por Lin e Ballentine (1992) e seis valores diferentes do parâmetro λ . Eles atribuíram somente uma condição inicial que determina a região caótica e uma condição inicial para cada ilha interna à região caótica. Para ver a estrutura geral da seção de Poincaré atribuímos vinte e nove condições iniciais arbitrárias e mil pontos para cada condição inicial. Verifica-se que a seção de Poincaré mostra uma simetria em p e que existem várias ilhas internas e externas à região caótica. Observa-se também que à medida que a amplitude da força externa aumenta, a área das ilhas diminui e conseqüentemente a região caótica aumenta. Salientamos que os casos com o parâmetro $\lambda = 1, 2$ e 10 não foram estudados por Lin e Ballentine (1990, 1992). Podemos ver na Figura 3.4 a ampliação da região caótica destacando as ilhas internas, que mostra a seção de Poincaré construída por Lin e Ballentine (1992).

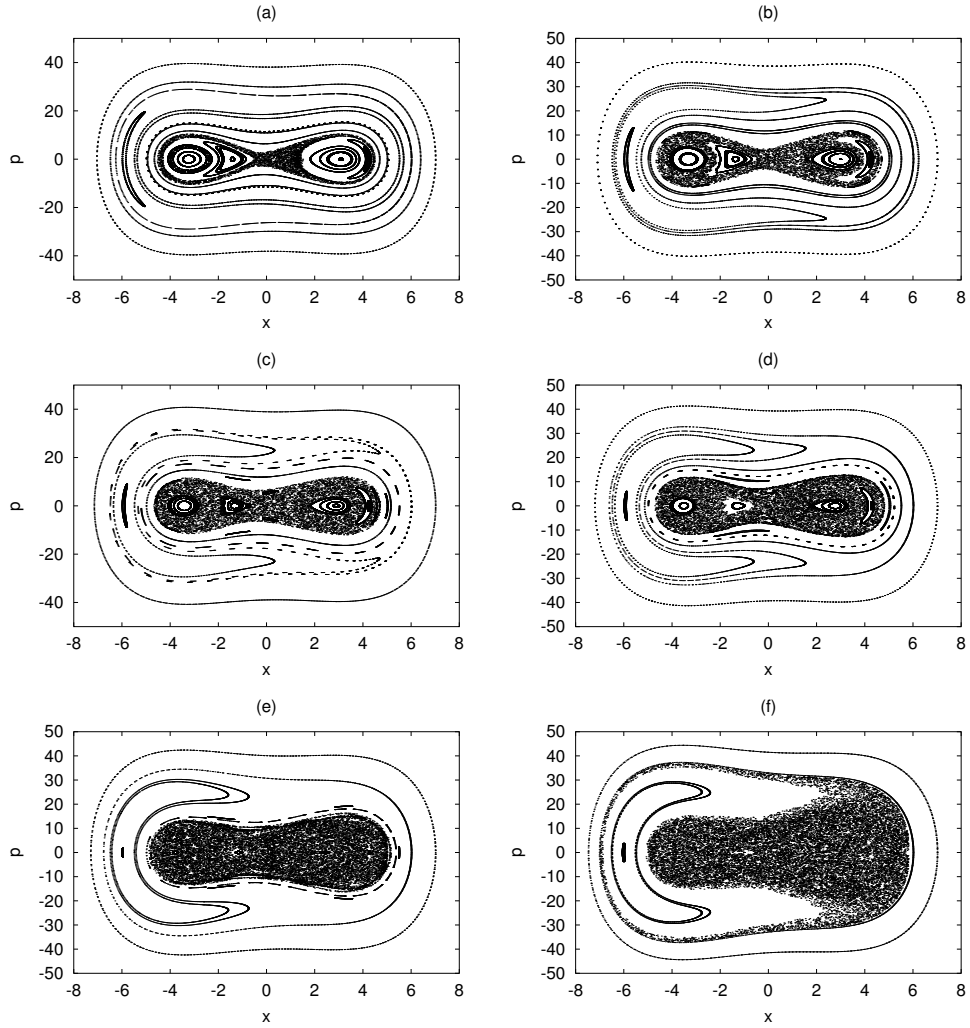


Figura 3.3: *Seção de Poincaré para o oscilador anarmônico quártico forçado, com $B=0,5$, $D=10$, $\omega_0=5,35$ e vinte e nove condições iniciais. O parâmetro λ assume os seguintes valores: (a) $\lambda=1$, (b) $\lambda=2$, (c) $\lambda=3$, (d) $\lambda=4$, (e) $\lambda=6$ e (f) $\lambda=10$.*

O comportamento das órbitas regulares e caóticas foi mostrado por Lin e Ballentine (1992) na evolução temporal do deslocamento, x , e da energia, H , desconsiderando a ação da força externa sobre o sistema. Isto implica que a energia do sistema dada na equação (3.1) é reescrita na forma

$$H' = \frac{p^2}{2M} + Bx^4 - Dx^2, \quad (3.4)$$

a qual nos dá a energia potencial escrita como

$$V'_x = Bx^4 - Dx^2, \quad (3.5)$$

de forma que o poço de potencial é simétrico. Todavia, as seções de Poincaré que eles obtiveram

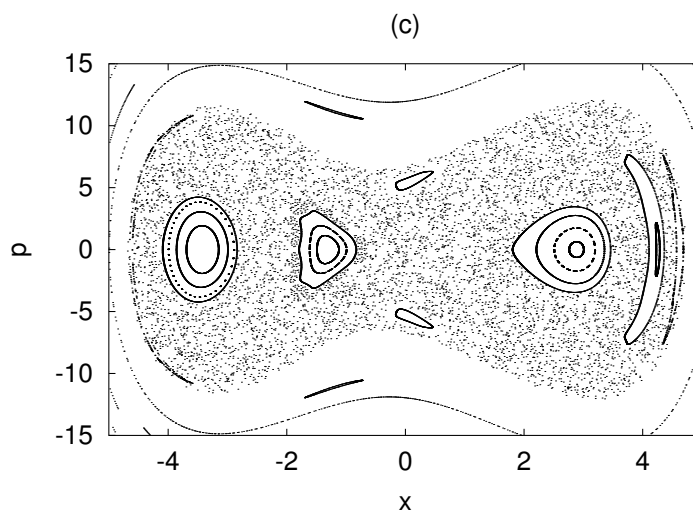


Figura 3.4: *Ampliação da região caótica na seção de Poincaré mostrada na Figura 3.3(c).*

deveria ser analisadas incluindo o termo de força externa dado por λx . Ou seja, este termo deve ser incluído nas equações (3.4) e (3.5). Assim sendo a energia potencial é dada na forma

$$V_x = Bx^4 - Dx^2 + \lambda x, \quad (3.6)$$

correspondendo a um poço de potencial assimétrico.

Deste modo, obtivemos os resultados da evolução temporal de x e H dos pontos das seções. Na Figura 3.5 são mostradas as evoluções temporais para uma órbita caótica e quatro órbitas regulares construídas na Figura 3.4.

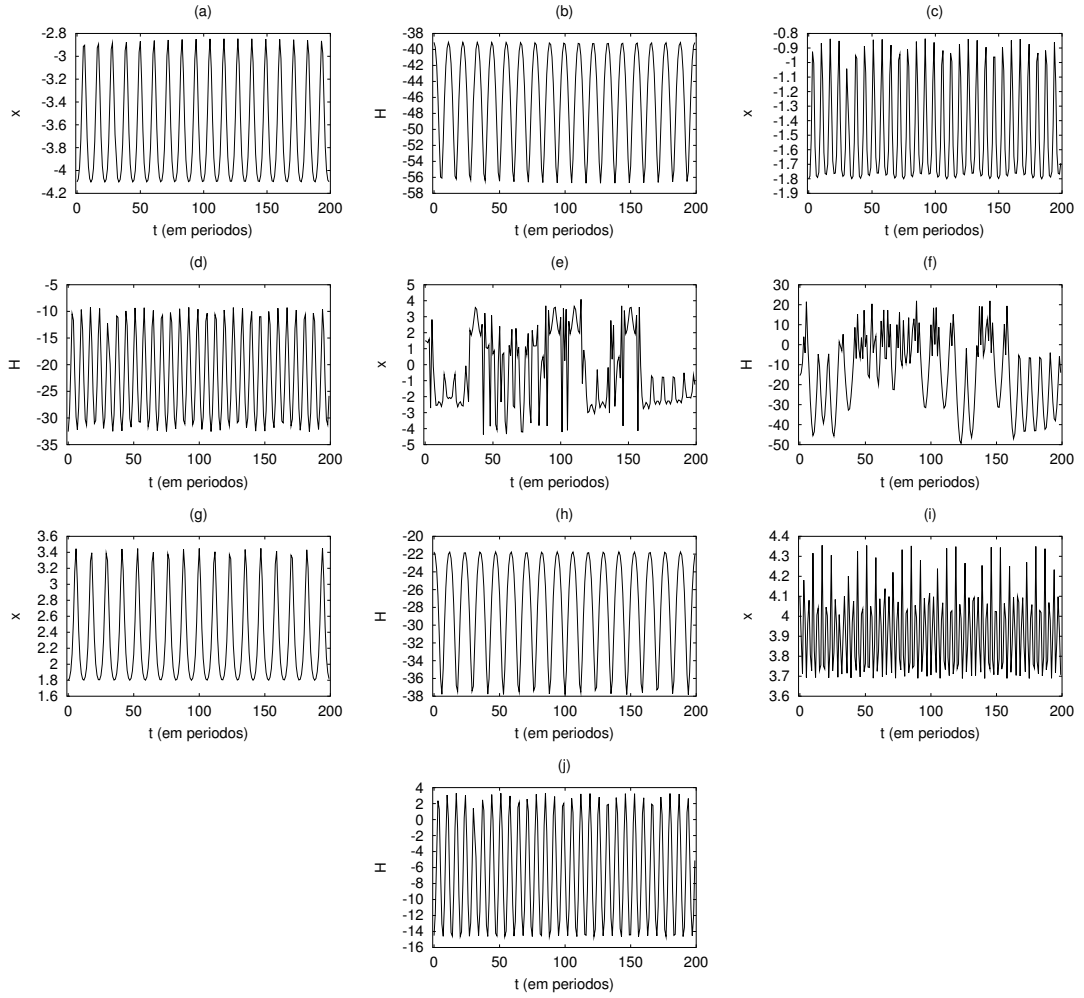


Figura 3.5: *Evolução temporal do deslocamento, x , e da energia, H , para cinco condições iniciais da Figura 3.4. As condições iniciais são $x = -4,1$ e $p = 0$ (a)(b); $x = -1,8$ e $p = 0$ (c)(d); $x = 1,5$ e $p = 0$ (e)(f); $x = 1,8$ e $p = 0$ (g)(h); $x = 4,1$ e $p = 0$ (i)(j).*

Podemos notar na Figura 3.5 que as figuras que mostram as oscilações quase-periodicas correspondem aos movimentos das órbitas regulares, enquanto as figuras que mostram as oscilações irregulares correspondem à órbita caótica. Foi observado que os duzentos primeiros pontos da seção são suficientes para obter a evolução temporal de x e H sem perder informações dadas por este sistema. Mostramos os resultados de x e H no poço de potencial assimétrico construído pela equação (3.6) com $\lambda = 3$, conforme mostra a Figura 3.6.

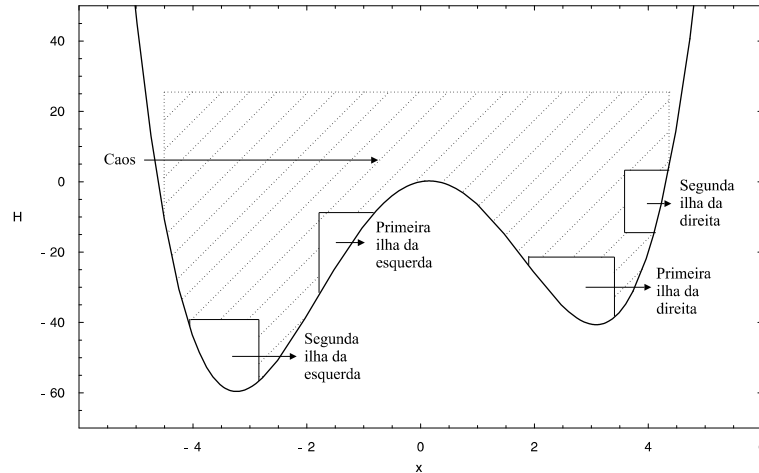


Figura 3.6: *Energia potencial com $\lambda = 3$, onde são mostradas as regiões que a partícula movimenta-se no poço de potencial assimétrico.*

Podemos observar que as regiões demarcadas no poço de potencial correspondem aos limites dados pelos resultados da evolução temporal de x e H , de forma que as regiões demarcadas limitam os movimentos da partícula dentro do poço de potencial. Notemos na Figura 3.4, que a segunda ilha à esquerda da origem e a primeira ilha à direita estão ao redor dos pontos fixos elípticos que estão localizados no fundo do poço de potencial. Próximo à estes pontos a energia potencial da partícula tende à forma de uma parábola. Isto implica que os movimentos da partícula nesta região aproximam-se daqueles de um oscilador harmônico, ou seja, a parte não linear é desprezável. Portanto, estas ilhas são classificadas como sendo ilhas não ressonantes. Já as outras ilhas são devidas à indução da força externa de forma que esta força faz com que as ilhas fiquem localizadas na parte superior do poço de potencial e afastadas dos pontos fixos elípticos que estão no fundo do poço de potencial.

3.5 Resultados e Análise para o Poço de Potencial

Simétrico

Ao estudar a proposta de Lin e Ballentine (1990, 1992) para dinâmica clássica do oscilador anarmônico quártico forçado, observamos que os resultados da evolução temporal de x e H foram obtidos desconsiderando a ação da força externa sobre o sistema de forma que levaria à análise dos resultados no poço de potencial simétrico. Visto que as seções de Poincaré são construídas considerando a ação da força externa sobre o sistema, propusemos a obtenção dos

resultados na evolução temporal de x e H sob a ação da força externa de forma que mostramos os resultados no poço de potencial assimétrico.

Para tentar facilitar a análise dos resultados no poço de potencial, observamos que é possível obter os resultados na evolução temporal de x e H considerando a ação da força externa sobre o sistema e, mostrarmos os resultados no poço de potencial simétrico, sem perder informações dadas pelos movimentos da partícula. Para isto, notemos na equação (3.1) que se obtivermos os pontos da seção nos tempos, $t = (\frac{1}{4} + n) \tau$, o termo da força externa será nulo no momento das interseções da órbita da partícula com as seções de Poincaré. Podemos ver na Figura 3.7 a estrutura da seção de Poincaré para este caso. Para comparar a estrutura das seções de Poincaré com as que foram construídas por Lin e Ballentine (1992) consideramos os mesmos parâmetros usados por eles e atribuímos trinta e seis condições iniciais. Notemos que a diferença mostrada na estrutura da seção de Poincaré consiste na alteração da simetria da figura nos eixos x e p .

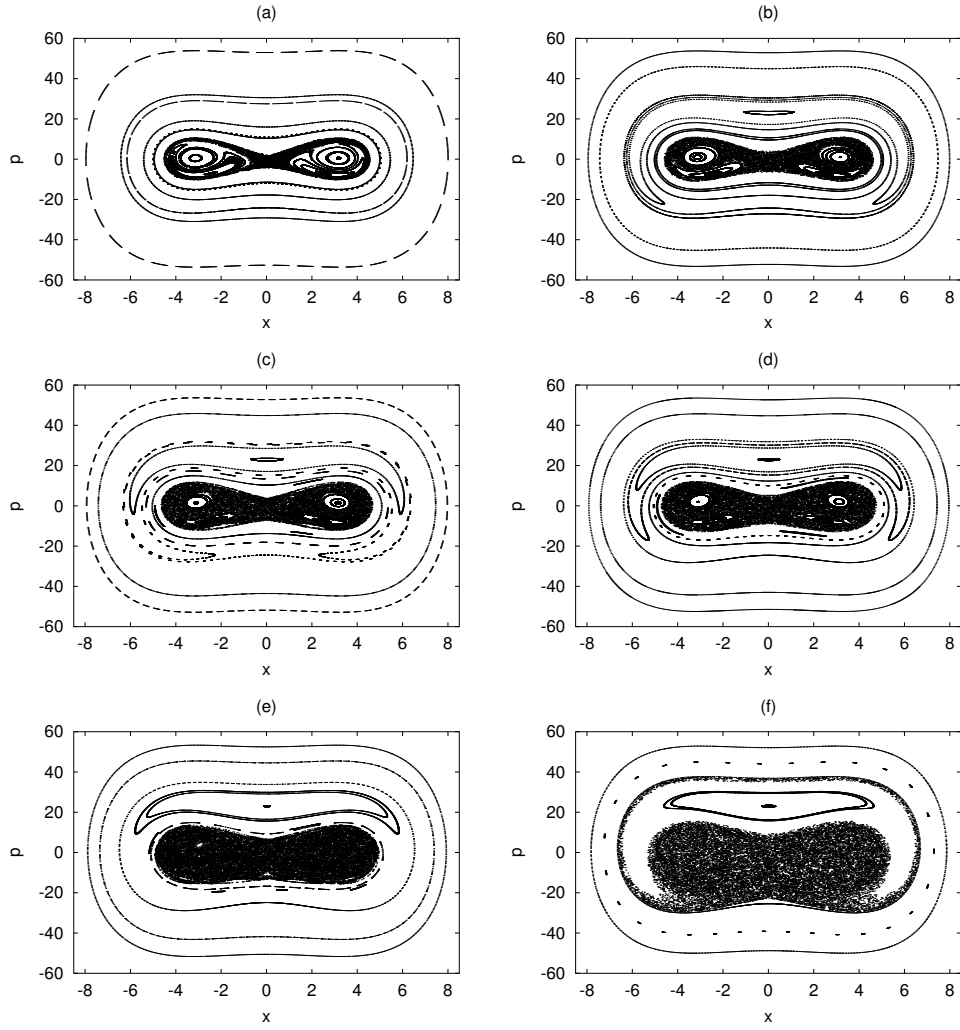


Figura 3.7: Seções de Poincaré em $t = (\frac{1}{4} + n) \tau$ para o oscilador anarmônico quártico forçado, com $B=0,5$, $D=10$, $\omega_0=5,35$ e 36 condições iniciais. O parâmetro λ assume os seguintes valores: (a) $\lambda=1$, (b) $\lambda=2$, (c) $\lambda=3$, (d) $\lambda=4$, (e) $\lambda=6$ e (f) $\lambda=10$.

A Figura 3.8 mostra a ampliação da região caótica mostrada na Figura 3.7(c) destacando as ilhas internas à região caótica. Notemos a mudança de simetria comparando a Figura 3.8 com a Figura 3.4.

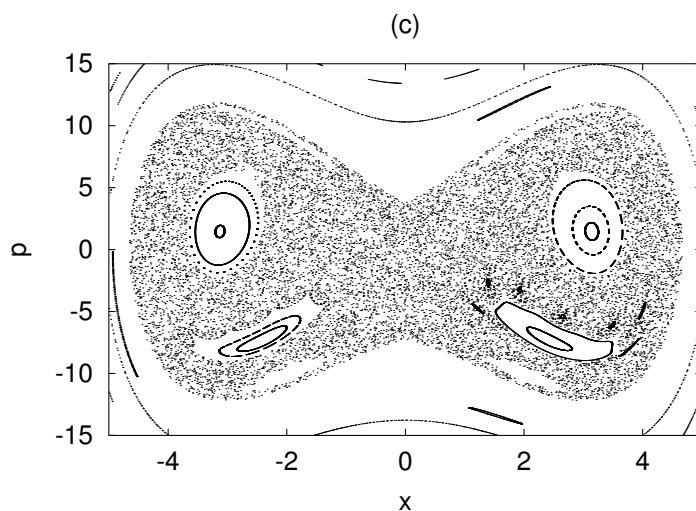


Figura 3.8: *Ampliação da região caótica na seção de Poincaré mostrada na Figura 3.7(c).*

Na Figura 3.9 mostramos os resultados na evolução temporal de x e H para o comportamento de uma órbita caótica e de quatro órbitas regulares construídas na Figura 3.8. Obtivemos estes resultados nos pontos das seções de Poincaré e mostramos no poço de potencial simétrico, ver Figura 3.10, onde determina que a primeira ilha à esquerda inferior e a primeira ilha à direita inferior em relação a origem na Figura 3.8 são ressonantes, enquanto a segunda ilha da esquerda e a segunda ilha da direita em relação a origem são não ressonantes.

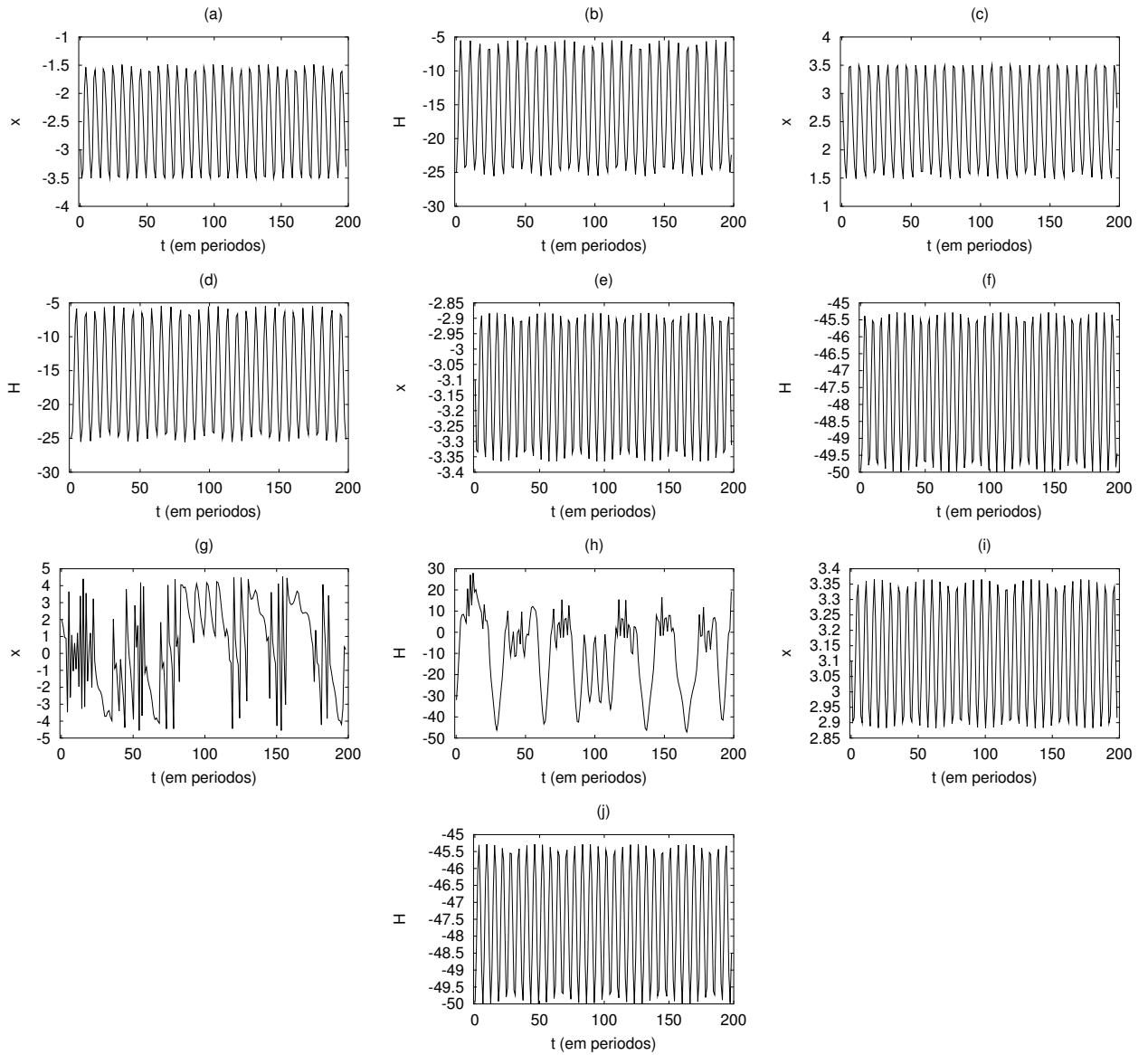


Figura 3.9: *Evolução temporal de x e H para cinco condições iniciais da Figura 3.8. As condições iniciais são $x = -3$ e $p = -7$ (a)(b); $x = 3$ e $p = -7$ (c)(d); $x = -3,1$ e $p = 0$ (e)(f); $x = 2$ e $p = 0$ (g)(h); $x = 3,1$ e $p = 0$ (i)(j)*

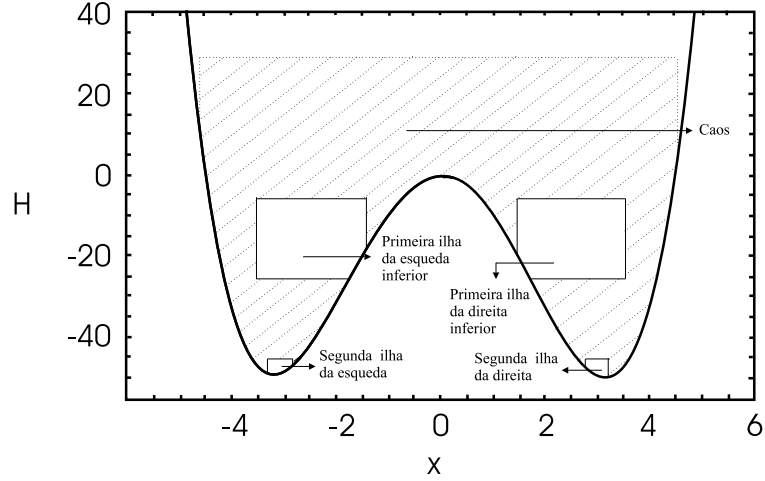


Figura 3.10: Energia potencial onde são mostradas as regiões que a partícula movimenta-se no poço de potencial simétrico.

3.6 Tunelamento Coerente

A dinâmica quântica deste sistema pode ser obtida a partir da hamiltoniana dada pela da equação (3.1), onde x e p são operadores. Este operador pode ser reescrito na forma

$$H = H_0 + H_I, \tag{3.7}$$

onde H_0 é o operador hamiltoniano do oscilador harmônico e H_I é o operador hamiltoniano de interação.

A equação de Schrödinger fica então escrita como

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle. \tag{3.8}$$

O operador hamiltoniano H_0 é dado neste caso por

$$H_0 = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\hat{x}^2, \tag{3.9}$$

que pode ser reescrito em termos de operadores de criação e aniquilação como

$$H_0 = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega = \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega. \quad (3.10)$$

Aplicando H_0 em um autovetor $|n\rangle$ deste operador e utilizando a definição usual para os operadores de criação

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad (3.11)$$

e aniquilação

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad (3.12)$$

chegamos à equação de autovalores para o operador hamiltoniano do oscilador harmônico escrito como

$$H_0 |n\rangle = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega |n\rangle, \quad (3.13)$$

onde n é o “*n-ésimo*” estado de energia do oscilador harmônico simples.

Usando esta base ortornormal a equação de Schrödinger (3.8) pode ser reescrita como

$$i \hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle, \quad (3.14)$$

onde

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(t) |m\rangle. \quad (3.15)$$

No entanto, substituindo a equação (3.15) na equação (3.14), temos

$$i \hbar \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d}{dt} c_m(t) |m\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(t) H |m\rangle. \quad (3.16)$$

Fazendo o produto escalar da equação (3.16) com o autovetor $\langle n|$, obtemos

$$i \hbar \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d}{dt} c_m(t) \langle n|m \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(t) \langle n|H|m \rangle. \quad (3.17)$$

Lembrando agora que $\langle n|m \rangle = \delta_{nm} = 1$ devido à ortonormalidade da base, a equação (3.17) pode ser reescrita como

$$i \hbar \dot{c}_m(t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(t) H_{nm}. \quad (3.18)$$

onde H_{nm} é um elemento de matriz. Redefinindo a notação na equação (3.18) em que $H_{nm} = \langle n|H|m \rangle$, vemos que

$$H_{nm} = \langle n|H_0|m \rangle + \langle n|H_I|m \rangle. \quad (3.19)$$

Assim, do produto escalar $\langle n|H_0|m \rangle$, vem que

$$\langle n|H_0|m \rangle = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \langle n|m \rangle = \delta_{nm} \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega. \quad (3.20)$$

Já o operador hamiltoniano de interação que neste caso é dado por

$$H_I = B \hat{x}^4 - \left(D + \frac{1}{2} M \omega^2 \right) \hat{x}^2 + \lambda \hat{x} \cos(\omega_0 t), \quad (3.21)$$

de tal forma que o produto escalar $\langle n|H_I|m \rangle$ escreve-se como

$$\langle n|H_I|m \rangle = B \langle n|\hat{x}^4|m \rangle - \left(D + \frac{1}{2} M \omega^2 \right) \langle n|\hat{x}^2|m \rangle + \lambda \cos(\omega_0 t) \langle n|\hat{x}|m \rangle. \quad (3.22)$$

Lembrando ainda que os operadores de criação e aniquilação (COHEN-TANNOUJJI, 1977) podem ser reescritos em termos dos operadores de momento e posição na forma

$$a \equiv \sqrt{\frac{M\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + i \frac{\hat{p}}{M\omega} \right), \quad (3.23)$$

$$a^\dagger \equiv \sqrt{\frac{M\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - i \frac{\hat{p}}{M\omega} \right), \quad (3.24)$$

que nos permite escrever

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}(a + a^\dagger). \quad (3.25)$$

Calculando o elemento de matriz do operador \hat{x} , vemos que

$$\langle n|\hat{x}|m\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}\langle n|(a + a^\dagger)|m\rangle, \quad (3.26)$$

o que nos leva a

$$\langle n|\hat{x}|m\rangle = \sqrt{\frac{gm}{2}}\delta_{n,m-1} + \sqrt{\frac{g(m+1)}{2}}\delta_{n,m+1}, \quad (3.27)$$

onde $g \equiv \frac{\hbar}{M\omega}$.

Por sua vez o operador \hat{x}^2 gera os termos

$$\langle n|\hat{x}^2|m\rangle = \frac{g}{2} \left[\sqrt{m(m-1)}\delta_{n,m-2} + (2m+1)\delta_{n,m} + \sqrt{(m+1)(m+2)}\delta_{n,m+2} \right], \quad (3.28)$$

enquanto o operador \hat{x}^4 gera os seguintes termos

$$\begin{aligned} \langle n|\hat{x}^4|m\rangle = & \frac{g^2}{4} [\sqrt{m(m-1)(m-2)(m-3)}\delta_{n,m-4} + (m+1)\sqrt{m(m+1)}\delta_{n,m-2} + \\ & +(m+1)(m+2)\delta_{n,m} + \sqrt{m(m-1)^3}\delta_{n,m-2} + (m+1)^2\delta_{n,m} + \\ & +m(m+1)\delta_{n,m} + (m+3)\sqrt{(m+1)(m+2)}\delta_{n,m+2} + \\ & +(m-2)\sqrt{m(m-1)}\delta_{n,m-2} + m(m+1)\delta_{n,m} + m^2\delta_{n,m} + \\ & +(m+2)\sqrt{(m+1)(m+2)}\delta_{n,m+2} + m(m-1)\delta_{n,m} + \\ & +(m+1)\sqrt{(m+1)(m+2)}\delta_{n,m+2} + m\sqrt{(m+1)(m+2)}\delta_{n,m+2} + \\ & +\sqrt{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}\delta_{n,m+4}]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Assim, os elementos de matriz do operador hamiltoniano, definido pela equação (3.7), podem ser apresentados na forma

$$H_{nm} = \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega + \frac{3B}{2} \frac{g^2}{2} \left(m^2 + m + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2}gD'(2m+1) \right\} \delta_{n,m} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sqrt{\frac{gm}{2}} \lambda \cos(\omega_0 t) \delta_{n,m-1} + \sqrt{\frac{g(m+1)}{2}} \lambda \cos(\omega_0 t) \delta_{n,m+1} + \\
& + g \sqrt{m(m-1)} \left[Bg \left(m - \frac{1}{2} \right) - \frac{D'}{2} \right] \delta_{n,m-2} + \\
& + g \sqrt{(m+1)(m+2)} \left[Bg \left(m + \frac{3}{2} \right) - \frac{D'}{2} \right] \delta_{n,m+2} + \\
& + \frac{Bg^2}{4} \left[\sqrt{m(m-1)(m-2)(m-3)} \right] \delta_{n,m-4} + \\
& + \frac{Bg^2}{4} \left[\sqrt{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} \right] \delta_{n,m+4}, \tag{3.30}
\end{aligned}$$

onde $D' = D + \frac{1}{2}M\omega^2$.

No entanto, Lin e Ballentine (1990, 1992) definiram somente os elementos de matriz acima da diagonal principal escrevendo

$$\begin{aligned}
H_{nm} & = \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega + \frac{3g^2 B}{2} \left(m^2 + m + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} g D'(2m+1) \right\} \delta_{n,m} + \\
& + \sqrt{\frac{g(m+1)}{2}} \lambda \cos(\omega_0 t) \delta_{n,m+1} + \\
& + g \sqrt{(m+1)(m+2)} \left[Bg \left(m + \frac{3}{2} \right) - \frac{D'}{2} \right] \delta_{n,m+2} + \\
& + \frac{Bg^2}{4} \left[\sqrt{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} \right] \delta_{n,m+4}. \tag{3.31}
\end{aligned}$$

Podemos verificar a correspondência clássica-quântica, através do cômputo de pacotes de onda cujos valores médios evoluam acompanhando a órbita clássica correspondente. Existe uma gama muito grande de pacotes que desempenham este papel, todavia o que mais freqüentemente é utilizado na literatura é a chamada de função de Husimi (HUSIMI, 1940; TAKAHASHI; SAITÔ, 1985), a qual no caso em estudo determina a densidade de probabilidade no instante inicial. Em particular, a função de Husimi foi utilizada por Lin e Ballentine (1990, 1992) na correspondência clássica-quântica dada por este sistema, sendo ela definida como

$$\rho(x, p) \equiv (2\pi \hbar)^{-1} |\langle \phi_{x,p} | \psi(t) \rangle|^2, \tag{3.32}$$

onde $|\phi_{x,p}\rangle$ é o estado de incerteza mínima que tem a forma gaussiana tanto na representação de posição quanto na de momento e ainda $|\phi_{x,p}\rangle$ é um estado coerente de um oscilador harmônico. Esta expressão pode ser calculada através da relação de completeza de tal forma que

$$\langle \phi_{x,p} | \psi(t) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \phi_{x,p} | n \rangle \langle n | \psi(t) \rangle, \quad (3.33)$$

mas na equação (3.15), $|\psi(t)\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(t) |m\rangle$, então

$$\langle n | \psi(t) \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(t) \langle n | m \rangle = c_n(t), \quad (3.34)$$

logo

$$\langle \phi_{x,p} | \psi(t) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) \langle \phi_{x,p} | n \rangle. \quad (3.35)$$

Se escolhermos um estado coerente pertencendo ao mesmo oscilador, cujas autofunções formam a base vetorial utilizada, então obtemos

$$\langle \phi_{x,p} | n \rangle = \langle 0 | \exp \left(-\frac{1}{2} |\alpha|^2 + \alpha^* a \right) | n \rangle = \frac{\exp \left(-\frac{1}{2} |\alpha|^2 \right) \alpha^{*n}}{\sqrt{n!}}, \quad (3.36)$$

onde a é o operador de aniquilação e $\alpha = \frac{(x+igp)/\hbar}{\sqrt{2g}}$.

Nos cálculos realizados por Lin e Ballentine (1990, 1992), a equação (3.18) foi integrada considerando o estado inicial $|\psi(0)\rangle = c(0) = |\phi_{x,p}\rangle$. A base vetorial utilizada tem infinitos elementos. Computacionalmente entretanto trabalha-se com um número finito de elementos, o que introduz uma aproximação. Assim, considera-se nos cálculos que n varie entre *zero* e n_{max} . No trabalho de Lin e Ballentine (1992), eles formaram $n_{max} = 114$.

A função de Husimi com este estado inicial forma uma gaussiana em ambas as representações x e p com o máximo de probabilidade na forma de um pico. A base utilizada corresponde a um oscilador harmônico com a frequência natural do sistema, $\omega = 6,25$ e, definindo $\hbar = 1$.

Lin e Ballentine (1992) mostraram o tunelamento coerente entre as ilhas de estabilidade que estão internas à região caótica, através da evolução temporal da função de Husimi considerando tempos diferentes, o que pode ser visto na Figura 3.11. O pacote de ondas está inicialmente localizado no centro da ilha não ressonante à esquerda da origem na seção de Poincaré construída na Figura 3.4 com $\lambda = 3$. Foi observado neste caso que para tempos diferentes o pacote fica estacionado nesta ilha. Na Figura 3.12 o pacote de ondas está inicialmente localizado na primeira

ilha ressonante à esquerda da origem na seção de Poincaré construída na Figura 3.4 com $\lambda = 3$. Neste caso podemos ver claramente que para tempos diferentes o pacote de ondas tunela coerentemente entre as ilhas ressonantes. Como se pode observar a partícula que tinha a maior probabilidade de ser encontrada na ilha da esquerda, passa rapidamente pela região caótica e forma um máximo de probabilidade no centro da ilha ressonante da direita e, em seguida passa novamente pela região caótica e forma um máximo de probabilidade na ilha da esquerda. Foi observado que o tempo de tunelamento pode ser bem diferente quando se comparam aos tunelamentos entre ilhas não ressonantes, ver Figura 3.11, e ressonantes, ver Figura 3.12, ao menos para valores baixos da amplitude de força externa λ . Uma outra observação importante de Lin e Ballentine (1992), é a de que o tunelamento sempre ocorre entre ilhas de mesma natureza.

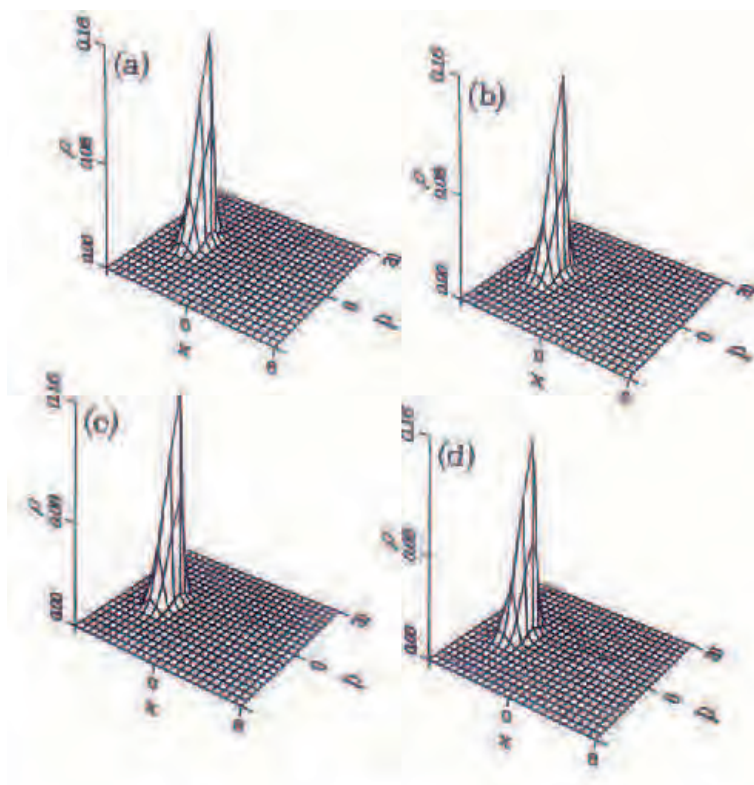


Figura 3.11: *Função de Husimi de um estado coerente que começa a partir de um pacote de ondas inicialmente com $x = -3,42$ e $p=0$, para $\omega_0 = 5,35$ e $\lambda=3$. (a) $t=0$, (b) $t=65\tau$, (c) $t=130\tau$, (d) $t=200\tau$. Lin e Ballentine (1992).*

Podemos ver na Figura 3.13 o resultado do tunelamento coerente para a função de Husimi inicialmente localizada na ilha não ressonante à esquerda da origem na seção de Poincaré construída na Figura 3.3(e) com $\lambda = 6$, enquanto a Figura 3.14 mostra o resultado do tunelamento coerente para a função de Husimi inicialmente localizada na primeira ilha ressonante à esquerda da

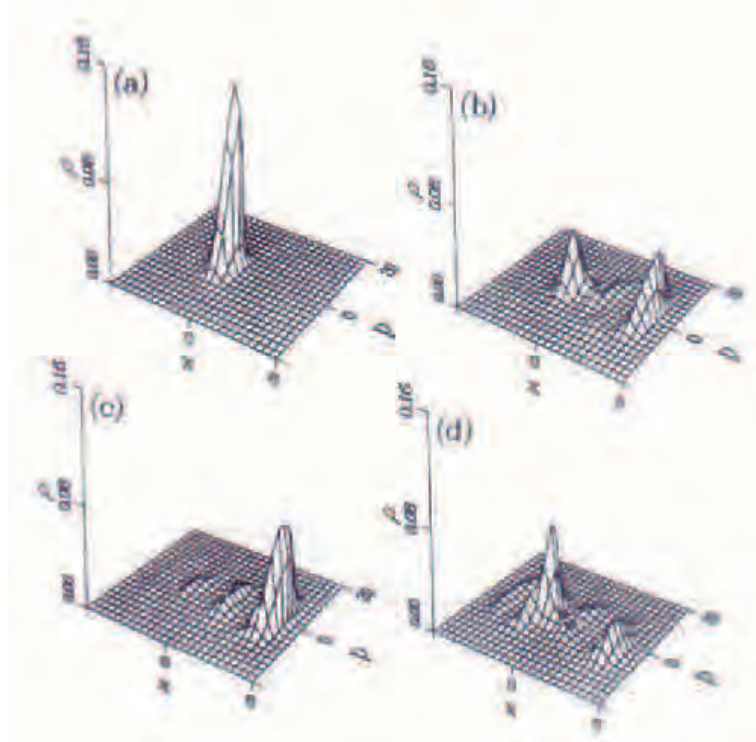


Figura 3.12: *Função de Husimi de um estado coerente que começa a partir de um pacote de ondas inicialmente com $x = -1,3$ e $p=0$, para $\omega_0 = 5,35$ e $\lambda=3$. (a) $t=0$, (b) $t=65\tau$, (c) $t=130\tau$, (d) $t=200\tau$. Lin e Ballentine (1992).*

origem na seção de Poincaré construída na Figura 3.3(e) com $\lambda = 6$. Agora podemos perceber que os tempos de tunelamento podem ser comparáveis.

Resultados similares a estes foram mostrados por Lin e Ballentine (1992) correspondendo ao parâmetro $\lambda = 4$ utilizado na construção da seção de Poincaré construída na Figura 3.3(d).

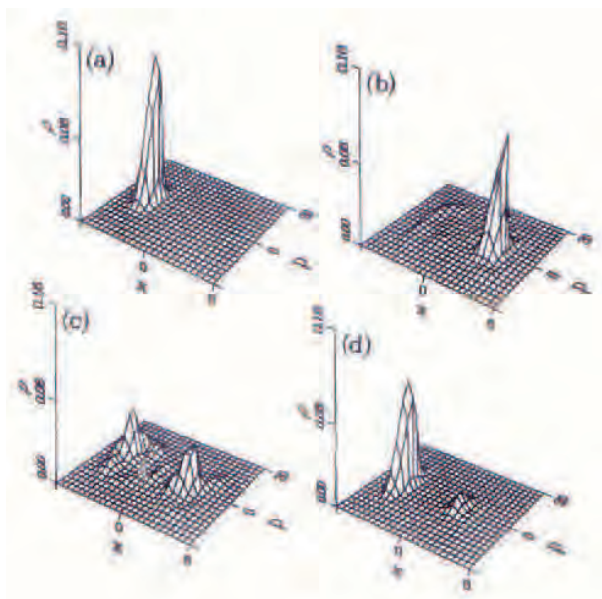


Figura 3.13: *Função de Husimi de um estado coerente que começa a partir de um pacote de ondas inicialmente com $x = -3,78$ e $p=0$, para $\omega_0 = 5,35$ e $\lambda = 6$. (a) $t=0$, (b) $t=43\tau$, (c) $t=50\tau$, (d) $t=60\tau$. Lin e Ballentine (1992).*

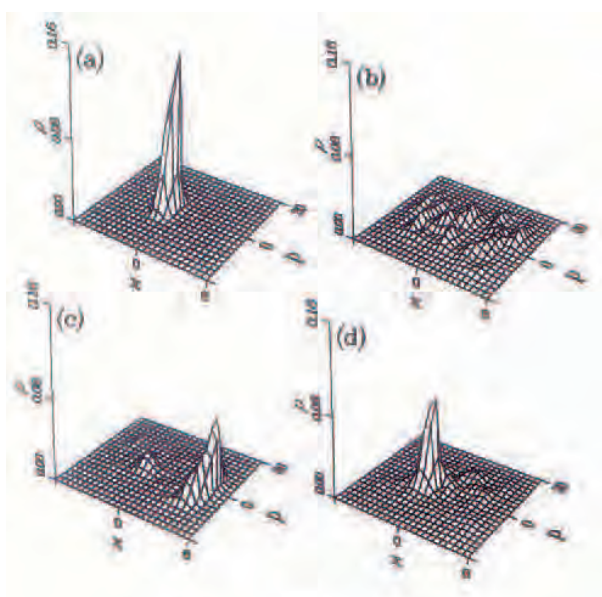


Figura 3.14: *Função de Husimi de um estado coerente que começa a partir de um pacote de ondas inicialmente com $x = -1,17$ e $p=0$, para $\omega_0 = 5,35$ e $\lambda = 6$. (a) $t=0$, (b) $t=50\tau$, (c) $t=100\tau$, (d) $t=181\tau$. Lin e Ballentine (1992).*

3.7 Comentários

Neste Capítulo estudamos a dinâmica do oscilador anarmônico quártico forçado, o qual consiste de uma partícula sofrendo a ação de uma força externa oscilante no tempo no poço de

um potencial anarmônico. Conforme proposto por Lin e Ballentine (1990, 1992), mostramos a hamiltoniana para este modelo e, a partir dessa hamiltoniana obtivemos as equações que descrevem o movimento clássico deste sistema. Construímos as seções de Poincaré e, observamos que elas são compostas de ilhas de estabilidade e de regiões caóticas.

Foi observado que à medida a que a amplitude da força externa aumenta a área das ilhas diminui e conseqüentemente a região caótica aumenta. Na proposta original (LIN; BALLENTINE, 1992) os resultados da dinâmica regular e caótica foram obtidos na evolução temporal de x e H desconsiderando a ação da força externa sobre o sistema, mostrando que as oscilações quase-periodicas correspondem aos movimentos das órbitas regulares, enquanto as oscilações irregulares correspondem a órbita caótica. Por conseguinte, eles determinaram que as ilhas não ressonantes cercam os pontos fixos elípticos que estão no fundo do poço de potencial e, que as ilhas ressonantes são devidas à indução de força externa. Todavia as seções de Poincaré obtidas por eles foram construídas considerando a ação de força externa sobre o sistema. Observamos que ao desconsiderar a indução da força externa os resultados na evolução temporal de x e H não correspondem aos pontos na seções de Poincaré. Portanto, fizemos a evolução temporal de x e H considerando a ação da força externa sobre o sistema e conseqüentemente mostramos os resultados da evolução temporal no poço de potencial assimétrico. Foi observado que as ilhas não ressonantes são aquelas oriundas de pontos fixos elípticos que se localizam no fundo do poço de potencial. Próximo à estes pontos fixos os movimentos da partícula aproximam-se aos movimentos do oscilador harmônico e a energia da partícula tende a forma de uma parábola, a qual determina a energia de um oscilador hamônico. Já as ilhas ressonantes estão associadas à frequência da força externa e verificamos no poço de potencial que os movimentos das partículas nas ilhas ressonantes estão localizados na parte superior do poço de potencial afastadas dos pontos fixos elípticos que estão localizados no fundo do poço de potencial.

Para tentar facilitar a análise dos resultados da evolução temporal de x e H no poço de potencial, mostramos que é possível obter a evolução temporal considerando a ação da força externa e analisar os resultados da evolução temporal no poço de potencial simétrico. Para isto obtivemos os pontos da seção nos tempos, $t = (\frac{1}{4} + n) \tau$, de forma que o termo da força externa é nulo no momento das interseções da órbita da partícula com as seções de Poincaré. Desta forma o poço de potencial anarmônico é simétrico nas interseções da órbita da partícula com as seções de Poincaré. A diferença mostrada na estrutura da seção de Poincaré obtendo os pontos nos tempos, $t = (\frac{1}{4} + n) \tau$, consiste na alteração da simetria que era dada no eixo p .

Mediante a obtenção das seções de Poincaré, estudamos os resultados discutidos por Lin e Ballentine (1992) da correspondência clássica-quântica através do cálculo da evolução temporal da função de Husimi. A função de Husimi está inicialmente localizada em uma ilha na seção de Poincaré e por causa da presença da região caótica o pacote de ondas realiza o tunelamento coerente oscilante entre as ilhas, determinando o mínimo de probabilidade na região caótica, onde a partícula passa rapidamente e os máximos centrados nas ilhas onde a partícula passa lentamente. Pretendemos estender este trabalho para verificar o efeito de tunelamento coerente para os outros valores de parâmetros que não foram estudados por eles e, verificar se o pacote de ondas fica estacionado na maior ilha construída na seção de Poincaré, para o parâmetro $\lambda = 10$. Pretendemos também utilizar a função de Husimi para verificar os efeitos de tunelamento para os casos em que analisamos os resultados da evolução temporal no poço de potencial simétrico.

Capítulo 4

Regiões Regulares e Caóticas no Espaço de Fase de um Oscilador Anarmônico Sêxtuplo Forçado

4.1 Introdução

O que propomos neste Capítulo é o estudo da dinâmica clássica do oscilador anarmônico sêxtuplo forçado. A partir dos estudos de Lin e Ballentine (1990, 1992) definimos a hamiltoniana para a dinâmica clássica que também consiste de uma partícula sofrendo a ação de uma força externa no poço de potencial. A diferença da hamiltoniana para o sistema que propomos em relação a hamiltoniana definida por Lin e Ballentine (1990, 1992) consiste basicamente na alteração de potência no termo anarmônico.

Uma das motivações iniciais para discutirmos este novo potencial, surge do fato que, em mecânica quântica, este é o potencial polinomial mais simples que pertence à chamada classe dos potenciais quase-exatamente-solúveis (QES). A principal característica desta classe de potenciais é a de possuir soluções exatas da equação de Schrödinger para os primeiros “ n ” (n inteiros arbitrários finitos) níveis de energia do potencial, desde que seus parâmetros obedeçam certas relações que restringem alguns de seus parâmetros (DUTRA; BOSHI FILHO, 1991; DUTRA; CASTRO, 1995). Torna-se interessante então verificar se na dinâmica clássica estes potenciais possuem algumas características especiais.

A partir da hamiltoniana escrevemos as equações de movimento para construir as seções de Poincaré. Observamos que considerando os mesmos parâmetros definidos por Lin e Ballentine (1992) a estrutura das seções de Poincaré construídas por este sistema também determina ilhas internas e externas à região caótica. Porém o efeito deste novo potencial no sistema mostra uma redução da escala nos eixos x e p em relação as seções de Poincaré construídas pelo oscilador anarmônico quártico forçado. Obtemos os resultados na evolução temporal de x e H considerando a ação da força externa na evolução temporal e verificamos os resultados no poço de potencial simétrico determinando as ilhas ressonantes e não ressonantes presentes nas seções de Poincaré.

Este Capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 4.2 escrevemos as equações de movimento. Na seção 4.3 mostramos os resultados e analisamos no poço de potencial simétrico. Na seção 4.4 variamos os parâmetros B e D , já na seção 4.5 fazemos os comentários.

4.2 Modelo para o Oscilador Anarmônico Sêxtuplo Forçado

A hamiltoniana para o oscilador anarmônico sêxtuplo forçado unidimensional é dada por

$$H = \frac{p^2}{2M} + Bx^6 - Dx^2 + \lambda x \cos(\omega_0 t). \quad (4.1)$$

A partir da hamiltoniana as equações de movimento são dadas por

$$\dot{x} = \frac{p}{M}, \quad (4.2)$$

$$\dot{p} = -6Bx^5 + 2Dx - \lambda \cos(\omega_0 t). \quad (4.3)$$

4.3 Resultados e Análise para o Poço de Potencial Simétrico

Como vimos no Capítulo anterior, a superfície da seção de Poincaré é adequada para determinar os movimentos clássicos da partícula. Portanto, adotamos esta técnica para determinar os movimentos da partícula deste sistema dinâmico. Podemos ver na Figura 4.1 a estrutura das seções de Poincaré para o oscilador anarmônico sêxtuplo forçado. Para comparar os resultados obtidos por este sistema com os resultados mostrados para a dinâmica do oscilador anarmônico quártico forçado utilizamos os mesmos parâmetros definidos por Lin e Ballentine (1992), já as condições iniciais são arbitrárias. Em nossos estudos obtivemos os pontos da seção de Poincaré nos tempos, $t = (\frac{1}{4} + n) \tau$, onde n são números inteiros, para tentar facilitar a análise qualitativa no poço de potencial anarmônico simétrico. Notamos que utilizando este novo potencial a região caótica é grande em relação as ilhas internas a ela. Observamos que ocorre uma redução nas escalas de x e p em relação as seções de Poincaré construídas para o oscilador anarmônico quártico forçado. Esta redução das escalas de x e p é devido a ação deste novo potencial que determina forças maiores atuando sobre o sistema, fazendo os movimentos da partícula serem mais confinados.

Podemos ver na Figura 4.2 a evolução temporal do deslocamento, x , e da energia, H , para uma órbita caótica e três órbitas regulares que correspondem as três ilhas construídas na Figura 4.1(c). Para a evolução temporal consideramos a ação da força externa sobre o sistema de forma que obtemos os pontos da evolução nas seções de Poincaré. Mostramos na Figura 4.3 os resultados da evolução temporal de x e H no poço do potencial anarmônico simétrico, onde demarcamos a área que a partícula movimenta-se no poço de potencial. Podemos ver que as regiões que a partícula movimenta-se no poço de potencial classifica a ilha da direita e a ilha da esquerda em relação à origem na Figura 4.1(c) como sendo não ressonantes, enquanto a maior ilha que está na parte superior da seção de Poincaré é ressonante. Notemos que a área demarcada no poço de potencial correspondendo a ilha ressonante é grande em relação a área das ilhas não ressonantes.

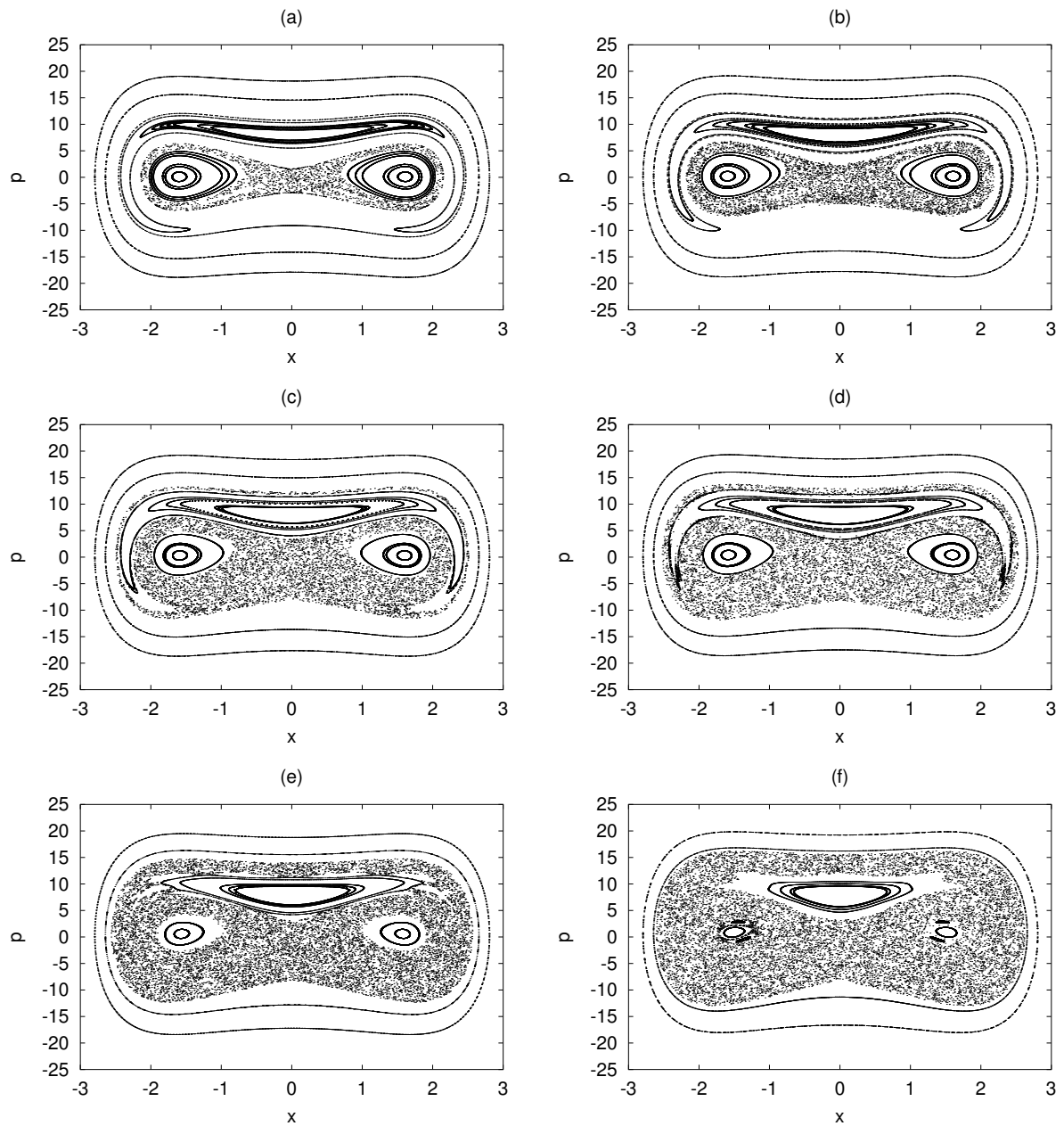


Figura 4.1: *Seção de Poincaré para o oscilador anarmônico sêxtuplo forçado, com $B=0,5$, $D=10$, $\omega_0=5,35$ e 22 condições iniciais. O parâmetro λ assume os seguintes valores: (a) $\lambda=1$, (b) $\lambda=2$, (c) $\lambda=3$, (d) $\lambda=4$, (e) $\lambda=6$ e (f) $\lambda=10$.*

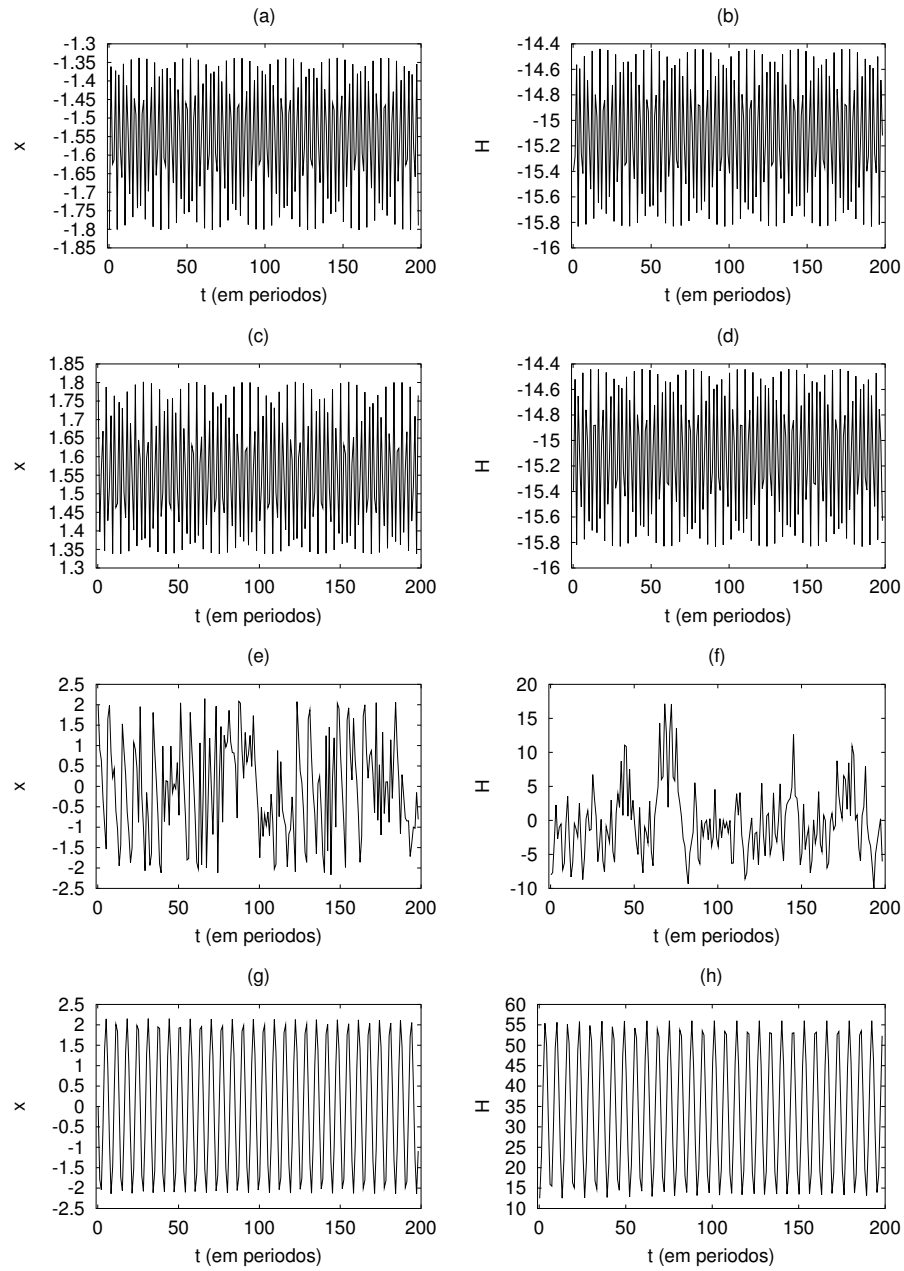


Figura 4.2: Evolução temporal de x e H para quatro condições iniciais da Figura 4.1(c). As condições iniciais são $x = -1,8$ e $p = 0$ (a)(b); $x = 1,8$ e $p = 0$ (c)(d); $x = 2$ e $p = 0$ (e)(f); $x = 0$ e $p = 5$ (g)(h).

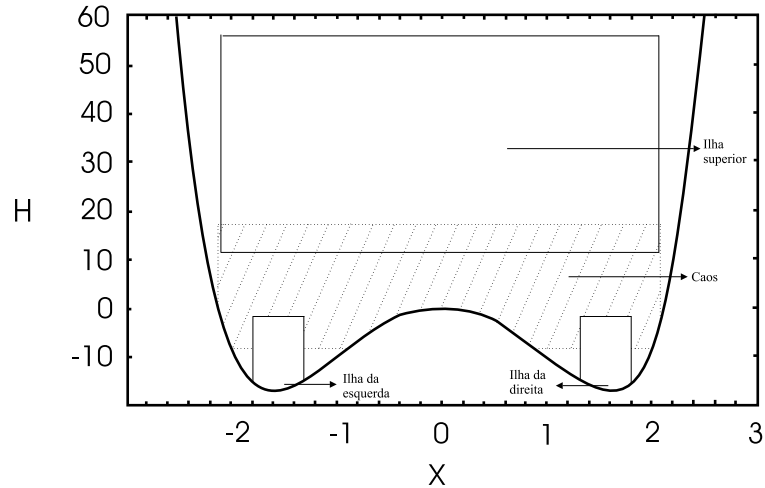


Figura 4.3: *Energia potencial onde são mostradas as regiões que a partícula movimenta-se no poço de potencial simétrico referente a Figura 4.1(c).*

4.4 Variação dos Parâmetros B e D

Ao desenvolver de nossos estudos verificamos a sensibilidade deste sistema em relação aos parâmetros B e D . Obtivemos os pontos da seção nos tempos, $t = (\frac{1}{4} + n) \tau$, para verificar os efeitos causados pela mudança dos valores arbitrários que foram atribuídos aos parâmetros. As Figuras 4.4 e 4.5 mostram diferentes formas para a estrutura da seção de Poincaré em função destes parâmetros. Analogamente à variação de λ , na Figura 4.1(c), as variações de B e D afetam a não linearidade do sistema. Assim sendo, podemos ver na Figura 4.4 que os valores menores de B implica no aumento da região caótica. Por outro lado, podemos ver na Figura 4.5 que os menores valores de D determinam uma região caótica pequena e, para os maiores valores de D implica no aumento das ilhas não ressonantes determinando uma maior área na seção de Poincaré para os movimentos da partícula que correspondem aqueles movimentos do oscilador harmônico.

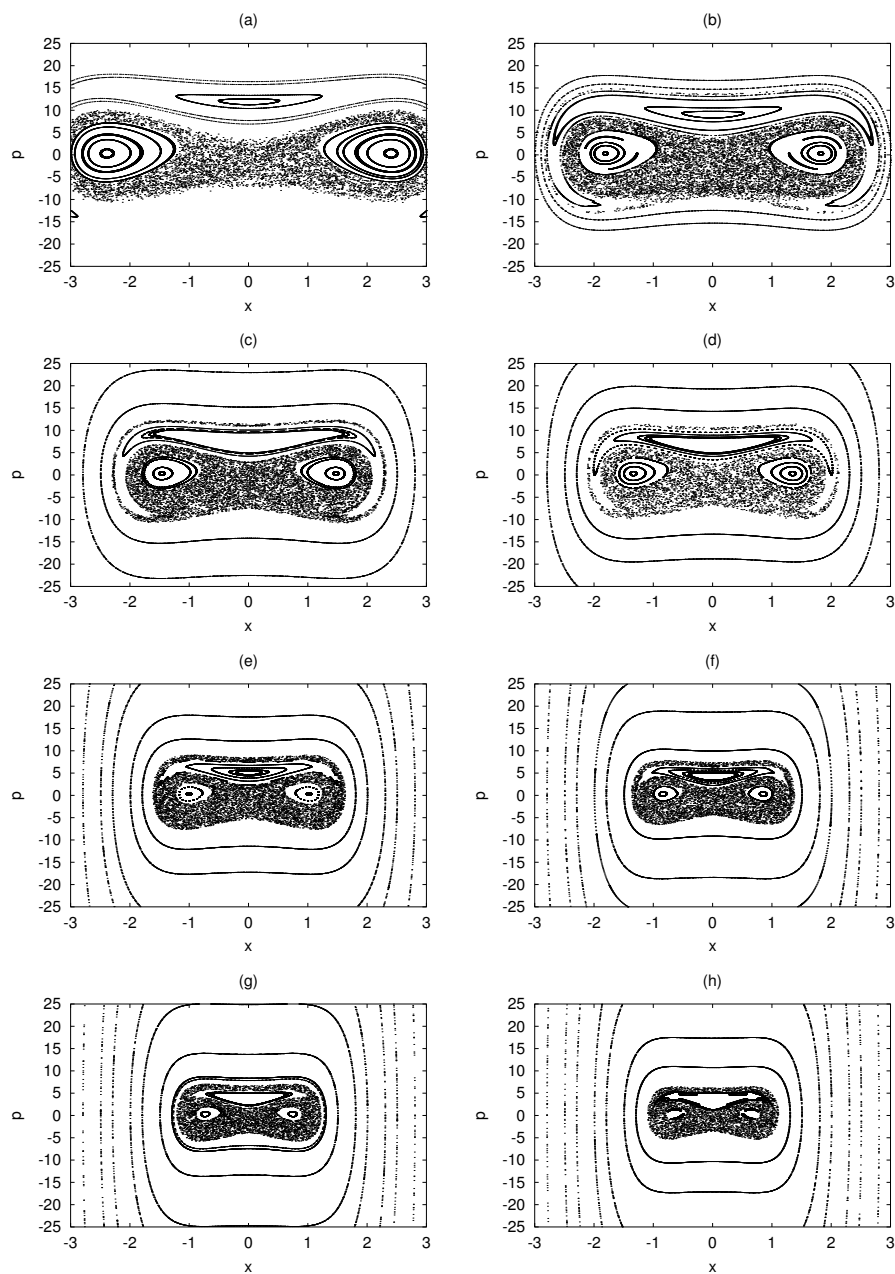


Figura 4.4: Seções de Poincaré para o oscilador anarmônico sêxtuplo forçado, com $D=10$, $\lambda=3$, $\omega_0=5,35$ e 20 condições iniciais. Os valores para o coeficiente de anarmonicidade são: (a) $B=0,1$, (b) $B=0,3$, (c) $B=0,7$, (d) $B=1$, (e) $B=3$, (f) $B=6$, (g) $B=10$ e (h) $B=15$.

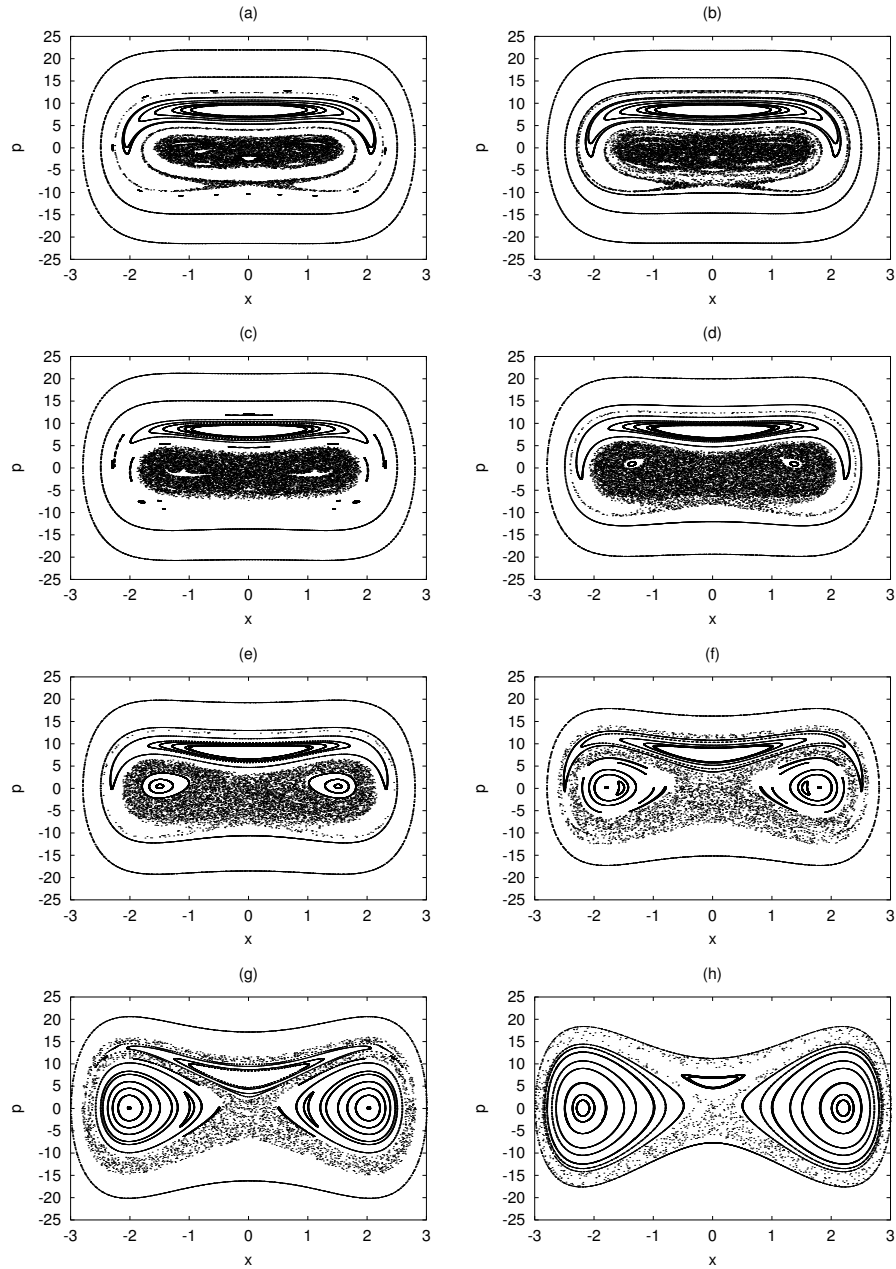


Figura 4.5: Seções de Poincaré para o oscilador anarmônico sêxtuplo forçado, com $B=0,5$, $\lambda=3$, $\omega_0=5,35$ e 20 condições iniciais. Os valores para o coeficiente proporcional a constante elástica do sistema são: (a) $D=0,7$, (b) $D=1$, (c) $D=3$, (d) $D=6$, (e) $D=8$, (f) $D=15$, (g) $D=25$, (h) $D=35$.

4.5 Comentários

Estendemos os estudos de Lin e Ballentine (1990, 1992), propondo o estudo da dinâmica clássica do oscilador anarmônico sêxtuplo forçado. A dinâmica para o sistema que propusemos também

consiste na hamiltoniana para uma partícula sofrendo a ação de uma força externa no poço de potencial. O nosso interesse em discutir este novo potencial basea-se no fato que em mecânica quântica este é o potencial polinomial mais simples que pertence à chamada classe dos potenciais quase-exatamente-solúveis (QES).

Para verificarmos as características destes potenciais para a dinâmica clássica, escrevemos as equações de movimento que utilizamos para construirmos as seções de Poincaré. Obtivemos os resultados na evolução temporal de x e H para uma órbita caótica e três órbitas regulares. Para a construção da evolução temporal consideramos a ação da força externa sobre o sistema de forma que obtivemos a evolução temporal nos pontos das seções de Poincaré. Desta forma verificamos os resultados de x e H no poço de potencial simétrico, destacando as regiões onde a partícula movimenta-se dentro do poço de potencial, classificando as ilhas entre ressonantes e não ressonantes.

Variamos os parâmetros B e D e observamos que para os valores menores de B há um aumento da região caótica. Verificamos que os menores valores de D determinam uma região caótica pequena e, para os maiores valores de D aumenta o tamanho das ilhas não ressonantes determinando uma maior área na seção de Poincaré para os movimentos da partícula que correspondem aqueles movimentos do oscilador harmônico.

Pretendemos dar continuidade neste trabalho e o próximo passo consiste em estudar a correspondência clássica-quântica através do cômputo da função de Husimi. Pretendemos verificar se os pacotes de ondas permanecem estacionados na maior ilha da seção de Poincaré e, verificar o tunelamento coerente entre as ilhas não ressonantes.

Capítulo 5

Comentários Finais

Nesta dissertação estudamos a correspondência clássica-quântica no limite clássico de alguns sistemas dinâmicos.

A nossa idéia central no Capítulo 2 foi generalizar os estudos de Pollet et al. (1995) utilizando o estado coerente desenvolvido por eles em sistemas não hermitianos com energias reais. Fizemos uma breve revisão do trabalho de Pollet et al. (1995), o qual consiste na análise de uma função de onda elíptica complexa caracterizando um determinado estado coerente do oscilador harmônico isotrópico quântico bidimensional. Eles observaram que a densidade de probabilidade de tal estado apresenta o máximo de probabilidade sobre uma curva fechada na forma de uma elipse, correspondendo ao esperado para a órbita clássica da partícula. Observamos que a curva que acompanha a órbita clássica da partícula é simétrica nos eixos x e y . Notamos que o estado coerente elíptico complexo definido por Pollet et al. (1995) é degenerado. Então, calculamos a densidade de probabilidade do resultado final não degenerado, sendo aquele composto pela soma de todos os estados com a mesma energia. O estado final não degenerado também determina a mais alta probabilidade na forma de uma curva fechada simétrica que acompanha a órbita clássica.

Um fato surpreendente observado nesta situação, foi que o estado final não-degenerado possui probabilidades iguais, quaisquer que sejam os valores do parâmetro η , o qual foi introduzido por Pollet et al. (1995) como sendo responsável pela fase da trajetória. Nosso resultado, sugere que este parâmetro não deveria ter tal interpretação, ao menos para a solução final composta por uma combinação de todos os estados de mesma energia.

Estendemos os estudos de Pollet et al. (1995) iniciando o estudo do sistemas não hermitianos com energias reais, considerando algumas restrições impostas aos parâmetros dos potenciais. Calculamos a densidade de probabilidade e notamos a quebra da simetria da curva fechada que determina o máximo de probabilidade. Verificamos que aumentando o parâmetro de quebra de hermiticidade determina-se uma progressiva localização da partícula em uma pequena região do espaço. A progressiva localização diminui a probabilidade para valores mais elevados dos parâmetros de quebra de hermiticidade. Interpretamos classicamente a quebra da simetria como sendo tal que, para os valores mais elevados dos parâmetros de quebra de hermiticidade produzem grandes velocidades para a partícula, aumentando a região de mais baixa probabilidade sem, contudo, mudar a órbita clássica da partícula do sistema hermitiano correspondente.

Por outro lado, no Capítulo 3 fizemos uma revisão do trabalho de Lin e Ballentine (1990, 1992), os quais buscaram fazer a correspondência clássica-quântica através do cômputo da evolução temporal da função de Husimi. O modelo utilizado por eles para analisar esta correspondência, consistiu em uma hamiltoniana para uma partícula em um poço de potencial anarmônico sofrendo a ação de uma força externa oscilante. A partir da hamiltoniana, estudamos a dinâmica clássica escrevendo as equações de movimento e construímos a seção de Poincaré dada pelas interseções da órbita da partícula com as seções de Poincaré no espaço de fase. Foi observado que a seção de Poincaré permite a identificação de duas classes de órbitas, sendo elas caóticas ou regulares. No caso da presença de ilhas na seção de Poincaré estas correspondem às órbitas regulares, enquanto o espalhamento dos pontos corresponde às orbitas caóticas.

No trabalho de Lin e Ballentine (1992) foi obtido a evolução temporal do deslocamento, x , e da energia, H , para as órbitas regulares e caóticas, desconsiderando a ação da força externa sobre o sistema. Observamos que há uma inconsistência, pois ao desconsiderar a ação da força externa perde-se parte da energia potencial. Então, em contra proposta a Lin e Ballentine (1992), obtivemos a evolução temporal de x e H , levando em consideração a ação da força externa de tal forma que a evolução temporal corresponde aos pontos da seção de Poincaré. Com esta mudança discutimos os resultados no poço de potencial assimétrico, onde determinamos a natureza das ilhas construídas na seção de Poincaré.

Para tentar facilitar a análise dos resultados no poço de potencial, propusemos obter os pontos da evolução temporal de x e H , considerando a ação da força externa sobre o sistema de tal forma que, anulamos o termo da força externa nas seções de Poincaré. Para este caso, obtivemos os pontos das seções de Poincaré nos tempos, $t = (\frac{1}{4} + n) \tau$, e discutimos os resultados da evolução

temporal no poço de potencial simétrico, sem perder informações da dinâmica deste sistema.

Estudamos os resultados discutidos por Lin e Ballentine (1992) da correspondência clássica-quântica através do cômputo da evolução temporal da função de Husimi. No trabalho deles, o pacote de ondas está inicialmente localizado em uma ilha, determinando que os máximos de probabilidade oscilam entre as ilhas de mesma natureza e a mais baixa probabilidade ficando na região caótica. Foi observado por eles que o tempo de tunelamento pode ser bem diferente quando se compara o tunelamento entre ilhas não ressonantes com o tunelamento entre ilhas ressonantes.

Já capítulo 4, procuramos estender o trabalho de Lin e Ballentine (1990, 1992), iniciando o estudo das regiões regulares e caóticas no espaço de fase de um oscilador anarmônico sêxtuplo forçado. Escrevemos a hamiltoniana para uma partícula que está sob a ação de uma força externa no poço de potencial. A partir da hamiltoniana escrevemos as equações de movimento e construímos as seções de Poincaré. Obtivemos os resultados na evolução temporal de x e H e discutimos os resultados no poço de potencial simétrico. Verificamos a sensibilidade deste sistema os parâmetros B e D e, observamos que para os valores menores de B há um aumento da região caótica. Os menores valores de D determinam uma região caótica pequena e, para os maiores valores de D aumenta o tamanho das ilhas não ressonantes, determinando desta forma uma área maior na seção de Poincaré para os movimentos da partícula que correspondem aqueles movimentos do oscilador harmônico.

Pretendemos dar continuidade a este trabalho e o próximo passo consiste em estudar a correspondência clássica-quântica através do cômputo da evolução temporal da função de Husimi. Pretendemos verificar se pacotes de ondas podem permanecer estacionado na maior ilha da seção de Poincaré e, verificar o efeito de tunelamento entre as ilhas não ressonantes. Pretendemos ainda tentar generalizar a função de Husimi, criando um pacote de ondas análogo ao introduzido por Pollet et al. (1995) no espaço de fase, analisando em seguida a evolução temporal de tal pacote.

Referências Bibliográficas

- [1] BENDER, C. M.; BOETCHER, S. Real spectra in non-hermitian hamiltonians having PT symmetry. **Physical Review Letters**, v.80, n.24, p. 5243-5246, 1998.
- [2] CHEN, Y. F.; HUANG, K. F. Vortex formation of coherent waves in nonseparable mesoscopic billiards. **Journal Physical E**, v.68, p. 066207, 2003.
- [3] CHEN, Y. F.; HUANG, K. F.; LAN, Y. P. Observation of quantum-classical correspondence from high-order transverse patterns. **Physical Review A**, v.68, n.4, p. 043803, 2003.
- [4] CHEN, Y. F. et al. Wave representation of geometrical laser beam trajectories in a hemiconfocal cavity. **Physical Review A**, v.69, n.5, p. 053807-6, 2004.
- [5] COHEN-TANNOUJDI, C.; DIU, B.; LALOË, F. **Quantum mechanics**. Paris: Hermann, 1977. v.1.
- [6] DE BIÈVRE, S. **Journal Physics A**, n. 25, p. 2299, 1992.
- [7] DUTRA, A. S.; BROSCHI FILHO, H. Dynamical algebra of quasi-exactly-solvable potentials. **Physical Review A**, v.44, n.7, p.4721, 1991.
- [8] DUTRA, A. S.; CASTRO, A. S. Approximate analytic expression for the eigenenergies of the anharmonic oscillator $V(x) = Ax^6 + Bx^4$. **Physical Review A**, v.51, n.69, p.3480, 1995.
- [9] ELTSCHKA, C.; SCHLAGHECK, P. Resonance and chaos assisted tunneling in mixed regular chaotic systems. **Physical Review Letters**, v.94, p. 14101, 2005.
- [10] HINES, A. *et al.*. Quantum entanglement and fixed-point bifurcations. **Physical Review A**, v.71, p. 42303, 2005.
- [11] HUSIMI, K. **Proc. Phys. Math. Soc. Jpn.** n.22, p.264, 1940.

- [12] IGARASHI, A.; YAMADA, H. Tunneling of quantum particle in parametrically driven double-well system. **Chemical Physics**, v. 309, p. 95, 2005.
- [13] LICHTENBERG, A. J. e LIEBERMAN, M. A. **Regular and Chaotic Dynamics**. 2nd. v.38. New York: Springer-Verlag, 1992.
- [14] LIN, W. A.; BALLENTINE, L. E. Quantum tunneling chaos in a driven anharmonic oscillator. **Physical Review Letters**, n.24, p. 2927-2930, 1990.
- [15] LIN, W. A.; BALLENTINE, L. E. Quantum tunneling and regular and irregular quantum dynamics of a driven double-well oscillator. **Physical Review A**, n. 45, p. 3637-3645, 1992.
- [16] MARION, J. B.; THORNTON, S. T. **Classical dynamics: of particles and systems**. 4th. New York: Harcourt Brace, 1995.
- [17] POLLET, J. *et al.* Elliptic eigenstates for the quantum harmonic oscillator. **Journal of Physics A**, n.28, p. 7287-7297, 1995.
- [18] PRESS, W. H. *et al.* **Numerical Recipes: the art of scientific computing**. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [19] PSEUDO-HERMITIAN HAMILTONIANS IN QUANTUM MECHANICS I, *Proceedings ...: Czech. J. Phys*, v.54, p. 1-156, 2004.
- [20] PSEUDO-HERMITIAN HAMILTONIANS IN QUANTUM MECHANICS I, *Proceedings ...: Czech. J. Phys* v.54, p. 1005-1148, 2004.
- [21] SANGOUARD, N. *et al.* Control of localization and suppression of tunneling by adiabatic passage. **Physical Review Letters**, v.93, p. 223602, 2004.
- [22] TAKAHASHI, K.; SAITO, N. Chaos e Husimi Distribution Function in Quantum Mechanics. **Physical Review Letters**, v.55, n.7, p. 645, 1985.
- [23] WINTER, O. C.; MURRAY, C. D. **Atlas of the planar, circular, restricted three-body problem: orbits internal**. Londres: QMW Maths Notes 16, 1994. v.1.