

LUIS RAFAEL BENITO CASTRO

ESTADOS LIGADOS EM
MECÂNICA QUÂNTICA RELATIVÍSTICA

Dissertação apresentada à
Faculdade de Engenharia do
Campus de Guaratinguetá,
Universidade Estadual Pau-
lista, para a obtenção do título
de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Soares de Castro

Guaratinguetá

2007

DADOS CURRICULARES

LUIS RAFAEL BENITO CASTRO

NASCIMENTO	02.02.1979 – LIMA/PERU
FILIAÇÃO	Luis Alejandro Benito Castro Elena Clara Castro de Benito
1997/2003	Curso de Graduação Escuela Profesional de Física – Universidad Nacional del Callao – Peru.
2005/2007	Curso de Pós-Graduação em Física, nível Mestrado, na Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista.

de forma especial à minha família, ao meu
filho Luiz, e à minha esposa Isabel.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus e a todas as pessoas que fizeram possível concluir este trabalho. Em especial a meu orientador Prof. Dr. Antonio Soares de Castro por sua orientação, dedicação e auxílio.

Aos professores do Grupo de Física de Partículas e Campos da Universidade Estadual Paulista - Campus de Guaratinguetá - FEG pelas correções sugeridas ao trabalho.

Aos meus pais Luis Alejandro e Elena Clara, por sua paciência, amor e que jamais deixaram de me incentivar.

À minha família.

Este trabalho contou com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

“A maior recompensa do nosso
trabalho não é o que nos
pagam por ele, mas aquilo em
que ele nos transforma ”

John Ruskin

CASTRO, L. R. B. **Estados Ligados em Mecânica Quântica Relativística**. 2007. 63 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2007.

RESUMO

O estudo dos estados ligados das equações relativísticas têm muitas aplicações em física nuclear e em outras áreas da física, portanto as soluções que apresentam estados ligados usando as equações de Dirac e Klein-Gordon (KG) desempenham um papel importante no interesse dos pesquisadores. A redução a uma dimensão espacial das equações relativísticas permite melhorar o entendimento dos problemas equivalentes em três dimensões de uma maneira fisicamente mais transparente. Esta redução espacial traz como consequência alterações nas estruturas relativísticas dos potenciais que devem ser estudadas. A tarefa de achar estados ligados dessas equações não é fácil para formas funcionais gerais para os potenciais externos. Neste trabalho as equações de Dirac e KG em uma dimensão espacial são investigadas para diferentes tipos de acoplamento e formas funcionais para os potenciais externos que apresentam estados ligados. Um resultado relevante é que para certas misturas convenientes dos potenciais externos as equações de Dirac e KG apresentam as mesmas auto-energias mas diferentes autofunções. O problema em geral pode ser *mapeado* num problema de Sturm-Liouville encontrando-se soluções de estados ligados exatamente. Discutimos detalhadamente o comportamento das autofunções e auto-energias para partículas e antipartículas obtidas do problema de Sturm-Liouville e as possíveis soluções isoladas no caso da equação de Dirac. Uma aparente violação do princípio da incerteza em alguns casos é remediada com a introdução do conceito de comprimento de onda Compton efetivo, mostrando que a partícula pode ser localizada numa região do espaço arbitrariamente pequena sem a produção de pares partícula-antipartícula.

PALAVRAS - CHAVE: Estados ligados, Equação de Dirac, Equação de Klein-Gordon.

CASTRO, L. R. B. **Bound States in Relativistic Quantum Mechanics**. 2007. 63 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2007.

ABSTRACT

The study of bound states of the relativistic equations has many applications in nuclear physics and other areas of the physics, therefore the solutions that present bound states for the Dirac and the Klein-Gordon (KG) equations play an important role in the interest of the researchers. The reduction to one space dimension of the relativistic equations allows to improve our understanding of the equivalent problems in three dimensions in a physically more transparent way. This space reduction brings as a consequence alterations in the relativistic structures of the potentials that must be studied. The task of finding bound states of these equations is not easy for general functional forms for the external potentials. In this work the Dirac and the KG equations in one space dimension for different types of coupling and functional forms for the external potentials that present bound states are investigated. A relevant result is that for certain convenient mixtures of the external potentials the Dirac and the KG equations present the same eigenvalues but different eigenfunctions. The problem in general can be mapped into an exactly solvable Sturm-Liouville problem. The behavior of the eigenfunctions and eigenvalues for particles and antiparticles of the Sturm-Liouville problem and the possible isolated solutions in the case of the Dirac equation is discussed in detail. An apparent breaking of the uncertainty principle in some cases is remedied by the introduction of the concept of effective Compton wavelength, showing that the particle can be located into a region of space arbitrarily small without producing particle-antiparticle pairs.

KEYWORDS: Bound states, Dirac equation, Klein-Gordon equation.

Sumário

Lista de figuras	12
1 Introdução	8
2 A equação de Klein-Gordon	11
2.1 Origem da equação de Klein-Gordon	11
2.2 Redução dimensional da equação de Klein-Gordon	13
2.3 Limite não-relativístico da equação de Klein-Gordon em (1+1) dimensões .	14
3 A equação de Dirac	15
3.1 Origem da equação de Dirac	15
3.2 Redução dimensional da equação de Dirac	19
3.3 Limite não-relativístico da equação de Dirac em (1+1) dimensões	24
4 Simetrias das equações relativísticas em (1+1) dimensões	26
4.1 Paridade	26
4.2 Conjugação de carga	26
4.3 Transformação quiral	27
4.4 Translações do espectro	28
4.5 Simetria do espectro em torno de $E = 0$	28
5 Estados ligados das equações relativísticas	29
5.1 Estados ligados intrinsecamente relativísticos	29
5.2 Estados ligados de um férmion neutro num potencial tangente trigonométrico em (1+1) dimensões	29
5.3 Estados ligados de férmions em potenciais escalar e vetorial do tipo Pöschl-Teller em (1+1) dimensões	34
5.4 Estados ligados e espectros equivalentes de partículas de spin-0 e spin-1/2 em potenciais escalar e vetorial em (1+1) dimensões	38
5.4.1 Caso isoespectral 1: $V_t - V_s = \text{const}$ ($\Delta' = 0$)	39
5.4.2 Caso isoespectral 2: $V_t + V_s = \text{const}$ ($\Sigma' = 0$)	41

5.5	Estados ligados de férmions em potenciais escalar, vetorial e pseudoescalar do tipo Pöschl-Teller em (1+1) dimensões	46
6	Conclusões	53
A	Polinômios de Gegenbauer e polinômios associados de Legendre	55
B	Potenciais exatamente solúveis na mecânica quântica não-relativística	57
B.1	Potencial Pöschl-Teller simétrico	57
B.2	Potencial Pöschl-Teller simétrico modificado	58
	Referências bibliográficas	59

Lista de Figuras

5.1	Auto-energias de Dirac para os quatro primeiros níveis de energia em função de g para o potencial $V_p = \hbar c \gamma g \tan \gamma x$ ($m = \hbar = c = \gamma = 1$).	33
5.2	Autofunções do espinor de Dirac para $n_+ = 1$ ($n_- = 2$) para o potencial $V_p = \hbar c \gamma g \tan \gamma x$. As linhas fina e densa correspondem aos componentes superior ψ_+ e inferior ψ_- do espinor, respectivamente ($m = \hbar = c = \gamma = 1$, $g = 2$).	34
5.3	Auto-energias de Dirac para os três primeiros níveis de energia em função de V_0 para o potencial $V_t = V_s = -\frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x}$. As linhas tracejadas horizontais são para $ E = mc^2$ e a linha tracejada inclinada para $-2V_0 + mc^2$ ($m = \hbar = c = \alpha = 1$).	37
5.4	Auto-energias de Dirac para os três primeiros níveis de energia em função de α para o potencial $V_t = V_s = -\frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x}$. As linhas tracejadas horizontais são para mc^2 e $-2V_0 + mc^2$ ($m = \hbar = c = 1$ e $V_0 = 0.75$).	38
5.5	$ \psi_+ ^2$ (linha tracejada densa), $ \psi_- ^2$ (linha tracejada fina), $ \psi ^2 = \psi_+ ^2 + \psi_- ^2$ (linha densa) para $n = 0$, para o potencial $V_t = V_s = -\frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x}$ ($m = \hbar = c = V_0 = \alpha = 1$).	39
5.6	Auto-energias de Dirac (\mathcal{E}) para os quatro primeiros níveis de energia em função de V_0 para os potenciais $V_t = V_0 \sec^2 \alpha x$ e $V_s = V_0 \tan^2 \alpha x$ ($m = \hbar = c = \alpha = 1$).	42
5.7	Auto-energias de Dirac (\mathcal{E}) para os quatro primeiros níveis de energia em função de α para os potenciais $V_t = V_0 \sec^2 \alpha x$ e $V_s = V_0 \tan^2 \alpha x$ ($m = \hbar = c = 1$ e $V_0 = 1$).	43
5.8	$ \psi_+ ^2$ (linha tracejada densa), $ \psi_- ^2$ (linha tracejada fina), $ \psi ^2 = \psi_+ ^2 + \psi_- ^2$ (linha densa) e $ \phi ^2$ (linha fina) para $n = 0$, para os potenciais $V_t = V_0 \sec^2 \alpha x$ e $V_s = V_0 \tan^2 \alpha x$ ($m = \hbar = c = 1$, $V_0 = 3$ e $\alpha = 5$).	44
5.9	Auto-energias de Dirac para os quatro primeiros níveis de energia em função de V_0 para os potenciais $V_t = V_0 \operatorname{sech}^2 \alpha x$ e $V_s = V_0 \tanh^2 \alpha x$. As linhas tracejadas são para $-m_{\text{eff}}c^2$ e $2V_0 - m_{\text{eff}}c^2$ ($m = \hbar = c = \alpha = 1$).	46
5.10	Auto-energias de Dirac para os quatro primeiros níveis de energia em função de α para os potenciais $V_t = V_0 \operatorname{sech}^2 \alpha x$ e $V_s = V_0 \tanh^2 \alpha x$. As linhas tracejadas são para $-m_{\text{eff}}c^2$ e $2V_0 - m_{\text{eff}}c^2$ ($m = \hbar = c = 1$ e $V_0 = 4$).	47

- 5.11 $|\psi_+|^2$ (linha tracejada densa), $|\psi_-|^2$ (linha tracejada fina), $|\psi|^2 = |\psi_+|^2 + |\psi_-|^2$ (linha densa) e $|\phi|^2$ (linha fina) para $n = 0$, para os potenciais $V_t = V_0 \operatorname{sech}^2 \alpha x$ e $V_s = V_0 \tanh^2 \alpha x$ ($m = \hbar = c = 1$, $V_0 = \alpha = 5$). 48
- 5.12 Auto-energias de Dirac para os quatro primeiros níveis de energia quando $g_s = 10$ como uma função de g_p para os potenciais $\Sigma = -\hbar c |\alpha| g_s \operatorname{sech}^2 \alpha x$, $\Delta = 0$ e $V_p = \hbar c |\alpha| g_p \tanh \alpha x$. O nível $n = 0$ para g_p negativo e energia negativa não foi representada porque corresponde à solução isolada com $E = -mc^2$. A linha tracejada fina corresponde à função $-1 - \frac{g_p}{g_s}(g_p - 1)$ ($m = \hbar = c = \gamma = 1$). 51
- 5.13 Auto-energias de Dirac para os quatro primeiros níveis de energia quando $g_s = -10$ como uma função de g_p para os potenciais $\Sigma = -\hbar c |\alpha| g_s \operatorname{sech}^2 \alpha x$, $\Delta = 0$ e $V_p = \hbar c |\alpha| g_p \tanh \alpha x$. A linha tracejada fina corresponde à mesma função como na Figura 5.11 ($m = \hbar = c = \gamma = 1$). 51
- 5.14 Auto-energias de Dirac para os quatro primeiros níveis de energia quando $g_p = 10$ como uma função de g_s para os potenciais $\Sigma = -\hbar c |\alpha| g_s \operatorname{sech}^2 \alpha x$, $\Delta = 0$ e $V_p = \hbar c |\alpha| g_p \tanh \alpha x$. As linhas tracejadas finas são para a função $-1 - \frac{g_p}{g_s}(g_p - 1)$ ($m = \hbar = c = \alpha = 1$). 52
- 5.15 Auto-energias de Dirac para os quatro primeiros níveis de energia quando $g_s = 10$ como uma função de g_p para os potenciais $\Delta = -\hbar c |\alpha| g_s \operatorname{sech}^2 \alpha x$, $\Sigma = 0$ e $V_p = \hbar c |\alpha| g_p \tanh \alpha x$. A linha tracejada fina corresponde à função $1 - \frac{g_p}{g_s}(g_p + 1)$. O número quântico N é da solução da equação (5.59) ($m = \hbar = c = \gamma = 1$). 52

Capítulo 1

Introdução

Existe um interesse grande em resolver as equações relativísticas de Klein-Gordon (KG) e de Dirac em (3+1) dimensões [2, 3, 26, 35, 37, 38, 39],[44]-[51],[55] e também em baixas dimensões [6]-[25],[30, 33, 34, 41, 52] para uma variedade de potenciais. Isto acontece não apenas porque elas fornecem as correções relativísticas para as teorias não-relativísticas quando as partículas estão sujeitas a potenciais suficientemente intensos, mas também porque elas são equações fundamentais da física. Além disso, em algumas circunstâncias elas podem apresentar soluções não encontradas num esquema não-relativístico. Indubtavelmente tais circunstâncias revelam-se ser uma poderosa ferramenta para se obter um *insight* mais profundo acerca da natureza das equações relativísticas e suas soluções.

Um férmion de spin 1/2 pode interagir com um campo externo através de diversos tipos de acoplamentos. Os acoplamentos em (3+1) dimensões podem ser escalar, pseudoescalar, vetorial, pseudovetorial e tensorial, enquanto em (1+1) dimensões podem ser escalar, vetorial e pseudoescalar; esta classificação depende de como o potencial se comporta com respeito às transformações de Lorentz. Por outro lado, um bóson de spin 0 interage via acoplamentos vetorial e escalar.

A equação de Dirac em (1+1) dimensões pode ser obtida da equação em (3+1) dimensões com uma mistura de acoplamentos escalar, vetorial e acoplamento do tipo momento magnético anômalo (tensorial) com simetria esférica. Se limitamos o férmion a mover-se na direção x ($p_y = p_z = 0$) o momentum angular se desvanece e a projeção do spin ao longo do eixo x comuta com a hamiltoniana, o que resulta que a projeção de spin é uma constante de movimento. Como a projeção de spin se conserva, o número de componentes do quadriespino reduz-se à metade, um deles relacionado com o componente superior e outro com o componente inferior. Portanto, a equação de Dirac em (3+1) dimensões pode ser decomposta em duas equações equivalentes em (1+1) dimensões com um espinor de dois componentes e matrizes 2×2 [56]. Os dois componentes do biespinor correspondem à combinação de energia positiva com *spin up* e energia negativa com *spin down*, ou de energia positiva com *spin down* e energia negativa com *spin up*. Nesse tipo de redução dimensional os acoplamentos escalar e vetorial preservam suas estruturas de

Lorentz, enquanto o acoplamento magnético anômalo torna-se um acoplamento pseudo-escalar. Portanto, as equações de KG e Dirac em (1+1) dimensões permitem-nos analisar as conseqüências dos estados de energia negativa com um formalismo matemático mais simples e de uma maneira fisicamente mais transparente.

O objetivo principal deste trabalho é analisar e resolver analiticamente as equações relativísticas de KG e Dirac em (1+1) dimensões obtendo estados ligados para diferentes tipos de acoplamentos e formas funcionais para os potenciais externos. O problema em geral pode ser *mapeado* num problema de Sturm-Liouville da mecânica quântica não-relativística encontrando-se soluções de estados ligados exatamente. Discutimos detalhadamente o comportamento das autofunções e auto-energias para partículas e antipartículas obtidas do problema de Sturm-Liouville e as possíveis soluções isoladas no caso da equação de Dirac. Em alguns casos um aparente paradoxo relacionado com a localização de uma partícula em uma região do espaço arbitrariamente pequena é resolvido com a introdução do conceito de comprimento de onda Compton efetivo. São mostrados alguns resultados relevantes que foram objetos de recentes publicações. Para além da importância intrínseca de se obter novas soluções para estas equações fundamentais da física, procura-se melhorar o entendimento dos problemas equivalentes num mundo em (3+1) dimensões.

Deve ser mencionado que grande parte da retórica empregada no desenvolvimento do formalismo das equações relativísticas, ut retro, valeu-se de um recente trabalho [14] que, apesar de explorar a equação de Dirac em (1+1) dimensões, estabelece certas conexões entre simetrias relacionadas com a física de partículas elementares e os fenômenos nucleares, viz., as simetrias de spin e pseudospin.

Este trabalho está organizado da forma seguinte. No capítulo 2 apresentamos a origem da equação de KG e analisamos sua redução a uma dimensão espacial com a estrutura de Lorentz mais geral para os potenciais externos, seções 2.1 e 2.2 respectivamente, e na seção 2.3 seu correspondente limite não-relativístico. No capítulo 3 apresentamos a origem, a redução dimensional, os problemas *mapeados* no problema de Sturm-Liouville, as soluções isoladas e o limite não-relativístico da equação de Dirac. No capítulo 4 discutimos as simetrias das equações de Dirac e KG, a paridade é discutida na seção 4.1, o efeito da conjugação de carga e a transformação quiral γ^5 são discutidos nas seções 4.2 e 4.3, respectivamente. A translação do espectro e a simetria com em torno de $E = 0$ são discutidas nas seções 4.4 e 4.5, respectivamente. No capítulo 5, discutimos os estados ligados das equações relativísticas, os estados intrinsecamente relativísticos na seção 5.1. Na seção 5.2 discutimos o problema de um férmion neutro num potencial pseudoescalar tipo tangente trigonométrico. Com exceção das soluções isoladas, o problema é *mapeado* num problema de Sturm-Liouville, mostramos que este potencial na teoria relativística é um potencial confinante. Na seção 5.3 discutimos o problema de férmions interagindo com uma mistura conveniente de potenciais de natureza escalar e vetorial ($V_t = V_s$) em

uma dimensão espacial que é *mapeado* em um problema de Sturm-Liouville. Para o caso específico em que o potencial efetivo, no problema de Sturm-Liouville é do tipo Pöschl-Teller, encontramos soluções de estados ligados exatamente. Na seção 5.4 discutimos o problema de partículas relativísticas em potenciais de natureza escalar e vetorial sob a condição geral $V_t \pm V_s = \text{const}$. Com exceção das possíveis soluções isoladas para a equação de Dirac, a equação de KG e a equação de Dirac para um componente do espinor de Dirac são *mapeadas* em uma equação tipo Schrödinger. Funções trigonométricas e hiperbólicas quadradas são escolhidas de maneira que a condição $V_t \pm V_s = \text{const}$ são satisfeitas naturalmente e o problema isoespectral é *mapeado* num problema de Sturm-Liouville com soluções exatas para os estados ligados. Na seção 5.5 discutimos os estados ligados de férmions com a estrutura de Lorentz mais geral para os potenciais externos do tipo Pöschl-Teller simétrico modificado. Estabelecemos certa relação entre simetrias de spin e pseudospin a partir da conjugação de carga e transformação quiral. Finalmente, no capítulo 6 apresentamos as conclusões.

Capítulo 2

A equação de Klein-Gordon

2.1 Origem da equação de Klein-Gordon

A equação de Klein-Gordon (KG) pode ser obtida a partir de uma analogia com a derivação da equação de Schrödinger da mecânica quântica não-relativística, quer dizer, para obter a equação de Schrödinger escreve-se a expressão da energia não-relativística de uma partícula livre e substitue-se a energia e o momento por operadores.

Para construir a equação de onda relativística temos que principiar da expressão relativística da energia para uma partícula livre com massa de repouso m e momentum p

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (2.1)$$

onde c é a velocidade da luz. Logo fazemos a substituição das correspondentes grandezas pelos operadores

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad \hat{p} = -i\hbar \vec{\nabla} \quad (2.2)$$

onde \hbar é a constante de Planck ($\hbar = h/(2\pi)$), e atuando sobre a função de onda $\Phi(\vec{r}, t)$, encontramos

$$i\hbar \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4)^{1/2} \Phi(\vec{r}, t) \quad (2.3)$$

A equação (2.3) seria a equação básica da mecânica quântica relativística, mas ela está numa forma incômoda para o operador ∇^2 . Pode-se observar também que as coordenadas espacial e temporal não são tratadas de uma maneira simétrica como requer a teoria da relatividade restrita. Removendo a raiz quadrada de (2.1) obtemos

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (2.4)$$

e usando o fato que se $[A, B] = 0$, então $A\Phi = B\Phi$ implica que $A^2\Phi = B^2\Phi$, reescrevendo (2.3) obtemos

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \Phi(\vec{r}, t) \quad (2.5)$$

Esta equação pode ser expressa numa forma mais compacta introduzindo-se o operador d'Alembertiano

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (2.6)$$

Em termos do operador \square , a equação de onda (2.5) pode ser escrita como

$$\left[\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \Phi(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.7)$$

Esta equação é conhecida como a equação de KG para uma partícula livre. Pode-se observar que agora tanto as coordenadas espaciais quanto temporal são tratadas de uma maneira simétrica e que ambas derivadas são de segunda ordem. De forma análoga à equação de Schrödinger pode-se obter a equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (2.8)$$

onde

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\Phi^* \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} \right) \quad (2.9)$$

$$\vec{J} = \frac{i\hbar}{2im} \left[\Phi^* (\vec{\nabla} \Phi) - \Phi (\vec{\nabla} \Phi^*) \right] \quad (2.10)$$

Pode-se ver que a peculiaridade na derivada com respeito ao tempo revela uma dificuldade na interpretação da densidade de probabilidade ρ já que este valor pode ser negativo. Mas essa dificuldade não existe se essa grandeza física é interpretada como densidade de carga, em vez de densidade de probabilidade [53]. Além disso é importante notar que o feito de remover a raiz quadrada da expressão relativística da energia possibilita valores negativos. Este feito de ter soluções com energia negativa está relacionado com a existência de antipartículas.

Para estudar o limite não-relativístico da equação de KG introduzimos o *Ansatz*

$$\Phi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}, t) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} mc^2 t\right) \quad (2.11)$$

onde $\varphi(\vec{r}, t)$ é uma função de onda não-relativística. No limite não-relativístico a diferença da energia total E da partícula e a energia da massa de repouso mc^2 é pequena. Portanto definimos $\mathcal{E} = E - mc^2$, \mathcal{E} é a energia não-relativística e $\mathcal{E} \ll mc^2$, então $i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} \approx \mathcal{E} \varphi \ll mc^2 \varphi$. Logo temos que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} mc^2 \varphi \right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} mc^2 t\right) \approx -\frac{i}{\hbar} mc^2 \varphi \exp\left(-\frac{i}{\hbar} mc^2 t\right) \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} mc^2 \varphi \right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} mc^2 t\right) \right]$$

$$\approx - \left[\frac{i2mc^2}{\hbar} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \varphi \right] \exp \left(-\frac{i}{\hbar} mc^2 t \right) \quad (2.13)$$

e substituindo em (2.5) obtemos

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi = i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (2.14)$$

esta é a equação de Schrödinger para uma partícula livre sem spin. Como o tipo de partícula que é descrita pela equação de onda não depende se a partícula é relativística ou não-relativística, inferimos que a equação de KG descreve partículas de spin zero.

2.2 Redução dimensional da equação de Klein-Gordon

Na presença de potenciais vetorial e escalar a equação de KG independente do tempo em (1+1) dimensões para uma partícula com massa de repouso m é

$$\left[\left(p + \frac{V_e}{c} \right)^2 c^2 + (mc^2 + V_s)^2 \right] \Phi = (E - V_t)^2 \Phi \quad (2.15)$$

onde E é a energia da partícula e p é o operador momentum. Os subscritos dos termos de potenciais denotam suas propriedades sob as transformações de Lorentz: t e e para os componentes temporal e espacial de um potencial vetorial e s para o termo escalar. O componente espacial do potencial vetorial pode ser absorvido na função de onda definindo-se ϕ da seguinte forma

$$\Phi = e^{-i\Lambda} \phi \quad (2.16)$$

onde

$$\Lambda = \int^x \frac{V_e(y)}{\hbar c} dy \quad (2.17)$$

de modo que

$$\left(p + \frac{V_e}{c} \right)^2 \Phi = e^{-i\Lambda} p^2 \phi \quad (2.18)$$

Assim a equação de KG torna-se

$$-\hbar^2 c^2 \phi'' + (mc^2 + V_s)^2 \phi = (E - V_t)^2 \phi, \quad (2.19)$$

onde o símbolo " ' " denota diferenciação com respeito a x .

A equação de KG pode ser ainda escrita como

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \phi'' + \left[\frac{V_s^2 - V_t^2}{2mc^2} + V_s + \frac{E}{mc^2} V_t \right] \phi = \frac{E^2 - m^2 c^4}{2mc^2} \phi \quad (2.20)$$

Portanto, as soluções do problema relativístico são *mapeadas* num problema de Sturm-

Liouville e a função ϕ torna-se uma autofunção, mas o autovalor correspondente não é E . De (2.20) pode-se perceber à primeira vista que para potenciais que tendem para infinito quando $|x| \rightarrow \infty$ (potenciais confinantes) o termo entre colchetes tende para $(V_s^2 - V_t^2)/(2mc^2)$, de modo que a equação de KG fornece um espectro puramente discreto para $|V_s| > |V_t|$, ou para $|V_s| = |V_t|$, com $V_s + V_t E/(mc^2) > 0$. Por outro lado, se os potenciais permanecem finitos quando $|x| \rightarrow \infty$ o espectro contínuo é onipresente mas as condições necessárias para a existência de um espectro discreto não é uma tarefa fácil para formas funcionais gerais para os potenciais.

Conforme veremos adiante, é conveniente definir as combinações

$$\Sigma = V_t + V_s \quad \text{e} \quad \Delta = V_t - V_s \quad (2.21)$$

de forma que a equação de KG pode ser reescrita na forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \phi'' + \frac{(E + mc^2)\Sigma + (E - mc^2)\Delta - \Sigma\Delta}{2mc^2} \phi = \frac{E^2 - m^2c^4}{2mc^2} \phi \quad (2.22)$$

2.3 Limite não-relativístico da equação de Klein-Gordon em (1+1) dimensões

Para o limite não-relativístico da equação de KG, $E \approx mc^2$, a equação (2.22) fica

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \phi'' + \frac{(2mc^2)\Sigma + \mathcal{E}\Delta - \Sigma\Delta}{2mc^2} \phi = \mathcal{E} \phi \quad (2.23)$$

ou

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \phi'' + \left(\Sigma + \frac{\mathcal{E}\Delta}{2mc^2} - \frac{\Sigma\Delta}{2mc^2} \right) \phi = \mathcal{E} \phi \quad (2.24)$$

onde

$$\mathcal{E} = E - mc^2 \quad (2.25)$$

No limite não-relativístico, para o intervalo de valores de x em que a função de onda não é desprezível, as energias potenciais são pequenas comparadas com mc^2 , a equação (2.24) torna-se

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \phi'' + \Sigma \phi = \mathcal{E} \phi \quad (2.26)$$

portanto no limite não-relativístico, ϕ obedece a equação de Schrödinger com energia de ligação igual a \mathcal{E} sem distinguir as contribuições dos potenciais vetorial e escalar.

Capítulo 3

A equação de Dirac

3.1 Origem da equação de Dirac

No capítulo anterior achamos uma equação relativística válida para partículas de spin zero, que depende das derivadas de segunda ordem das coordenadas de espaço e tempo. Essa dependência revela uma dificuldade na interpretação da densidade e corrente de probabilidade, para evitar isso Dirac procurou uma equação relativística que dependesse só da derivada de primeira ordem no tempo, assim como a própria equação de Schrödinger. Entretanto, as equações relativísticas devem tratar as coordenadas espaciais e temporal de uma maneira simétrica, dessa forma as derivadas com respeito às coordenadas espaciais também deveriam ser de primeira ordem. A partir dessas considerações Dirac considerou a seguinte forma

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i} \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \Psi(\vec{r}, t) + \beta m c^2 \Psi(\vec{r}, t) \equiv \mathcal{H} \Psi(\vec{r}, t) \quad (3.1)$$

onde α_i e β são operadores que não contêm coordenadas.

Esta equação deve satisfazer a relação de energia relativística para uma partícula livre, quer dizer, também deve satisfazer a equação de KG ou

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \Psi(\vec{r}, t) \quad (3.2)$$

além de disso da equação (3.1) obtemos

$$\begin{aligned} -\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= -\hbar^2 c^2 \sum_{i,j=1}^3 \frac{\alpha_j \alpha_i + \alpha_i \alpha_j}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^i \partial x^j} \\ &+ \frac{\hbar m c^3}{i} \sum_{i=1}^3 (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} + \beta^2 m^2 c^4 \Psi \end{aligned} \quad (3.3)$$

comparando (3.2) com (3.3) obtemos as seguintes relações

$$\begin{aligned}\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i &= 2\delta_{ij} \\ \alpha_i\beta + \beta\alpha_i &= 0 \\ \alpha_i^2 = \beta^2 &= 1\end{aligned}\tag{3.4}$$

os operadores α_i e β não podem ser simples números, se isto fosse assim seria impossível satisfazer as relações (3.4). Tentemos procurar expressões explícitas para os operadores α_i e β em forma de matrizes $N \times N$. Estas matrizes devem ser hermitianas com a finalidade de que a hamiltoniana seja hermitiana, em analogia com a mecânica quântica não-relativística. Devemos em princípio determinar o número N que será o mesmo para as matrizes α_i e β , e para nossa função de onda que agora é uma matriz coluna de N componentes, que é analoga com a função de onda espinorial da mecânica quântica não-relativística.

Das regras de comutação se obtém

$$\alpha_i\beta = -\beta\alpha_i = -I\beta\alpha_i\tag{3.5}$$

onde I é a matriz identidade. Tomando o determinante em ambos lados e aplicando a propriedade $\det(AB) = \det A \det B$ temos

$$\det(\alpha_i\beta) = \det\alpha_i \det\beta = \det(-I) \det\alpha_i \det\beta\tag{3.6}$$

e como os determinantes são números ordinários não nulos, a equação torna-se

$$\det(-I) = 1\tag{3.7}$$

e então,

$$(-1)^N = 1\tag{3.8}$$

Portanto o número N deve ser um número par. Se N fosse dois, as matrizes procuradas seriam matrizes 2×2 . Só existem quatro matrizes 2×2 linearmente independentes: as três matrizes de Pauli mais a matriz identidade. Mas, esta última matriz comuta com as matrizes de Pauli, por conseguinte, não satisfaz as relações (3.4). Entretanto, no caso de matrizes 4×4 resulta possível construir matrizes com as propriedades requeridas, estas matrizes se podem escrever numa forma abreviada usando as matrizes de Pauli σ_i ($i = 1, 2, 3$)

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\tag{3.9}$$

A função de onda Ψ é uma matriz coluna de quatro componentes chamada de quadrespinor de Dirac. A equação (3.1) torna-se da seguinte forma

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = (c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2) \Psi(\vec{r}, t) \equiv \mathcal{H}\Psi(\vec{r}, t) \quad (3.10)$$

onde $\vec{\alpha} \cdot \vec{p} = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3$.

Agora procedamos à construção da equação da continuidade. De forma análoga à equação de Schrödinger obtemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (3.11)$$

onde

$$\rho = \Psi^\dagger \Psi \quad (3.12)$$

$$J^k = c\Psi^\dagger \alpha^k \Psi \quad (3.13)$$

e $\Psi^\dagger = (\Psi_1^*, \Psi_2^*, \Psi_3^*, \Psi_4^*)$. Portanto a função $|\Psi|^2 = \Psi^\dagger \Psi$, satisfaz à equação de continuidade e é interpretada como a densidade de probabilidade de posição, e sua norma é uma constante de movimento. Esta interpretação é completamente satisfatória para estados de partícula única [57].

Note que a equação (3.10) não apresenta dificuldade para generalizar a equação de Dirac ao caso do movimento de uma partícula carregada num campo eletromagnético. Fazendo a substituição freqüente de $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - (e/c)\vec{A}$ e somando $e\phi$ ao operador \mathcal{H} , onde \vec{A} e ϕ são os potenciais vetor e escalar do campo eletromagnético, temos

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[c\vec{\alpha} \cdot \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) + e\phi + \beta mc^2 \right] \Psi(\vec{r}, t) \quad (3.14)$$

Examinemos como tranforma-se a equação (3.14) no limite não-relativístico. Expressemos a função de onda em termos de uma matriz coluna de dois componentes

$$\Psi = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

e utilizemos a representação (3.9) para as matrizes α_i e β , então obtemos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = c\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \begin{pmatrix} \tilde{\chi} \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix} + e\phi \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ -\tilde{\chi} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

onde $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ são as matrizes de Pauli e $\vec{\pi} \equiv \vec{p} - (e/c)\vec{A}$, é o operador momentum mecânico. Da mesma forma que na equação de KG, fazemos o *Ansatz* para a função de

onda

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}mc^2t\right) \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

e obtemos para φ e χ as seguintes equações acopladas

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = c\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \chi + e\phi\varphi \quad (3.17)$$

$$i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} = c\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \varphi + e\phi\chi - 2mc^2\chi \quad (3.18)$$

fazendo a aproximação no limite não-relativístico, para o intervalo de valores de \vec{r} em que a função de onda não é desprezível, as energias cinética e potencial são pequenas comparadas com mc^2 , e a equação (3.18) torna-se

$$\chi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2mc} \varphi \quad (3.19)$$

vemos que χ é um componente pequeno em comparação com o componente φ da função de onda Ψ , quer dizer, χ é da ordem $v/c \ll 1$ com respeito a φ . Usando a expressão obtida para χ de (3.19) e substituindo em (3.17) obtemos

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})}{2m} \varphi + e\phi\varphi \quad (3.20)$$

usando a propriedade das matrizes de Pauli $(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$, que para nosso caso é

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) &= \vec{\pi}^2 + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{\pi} \times \vec{\pi}) \\ &= \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 - \frac{e\hbar}{c}\vec{\sigma} \cdot (\nabla \times \vec{A}) \\ &= \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 - \frac{e\hbar}{c}\vec{\sigma} \cdot \vec{B} \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde \vec{B} é o campo magnético. Então (3.20) torna-se

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left[\frac{\left(\vec{p} - (e/c)\vec{A}\right)^2}{2m} - \frac{e\hbar}{2mc}\vec{\sigma} \cdot \vec{B} + e\phi \right] \varphi \quad (3.22)$$

A equação (3.22) é chamada de equação de Pauli, a qual descreve o momento angular intrínseco da partícula de spin 1/2 na teoria não-relativística. Portanto fica claro que a equação de Dirac descreve não só a existência de partículas com spin 1/2, senão também

a existência de um momento magnético intrínseco

$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc} \quad (3.23)$$

3.2 Redução dimensional da equação de Dirac

Na presença de um potencial matricial independente do tempo a equação de Dirac independente do tempo para um férmion com massa de repouso m é dada por

$$\mathcal{H}\Psi = E\Psi, \quad \mathcal{H} = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2 + \mathcal{V} \quad (3.24)$$

onde $\Psi^T = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4)$. Usando a representação padrão (3.9) para as matrizes de Dirac em termos de matrizes de 2×2 , o operador spin está dado por

$$S_i = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

onde $i = 1, 2, 3$. Para o potencial matricial consideramos o caso com simetria esférica

$$\mathcal{V} = IV_t + \vec{\alpha} \cdot \hat{r}V_e + \beta V_s + i\beta\vec{\alpha} \cdot \hat{r}V_T \quad (3.26)$$

onde $\hat{r} = \vec{r}/r$ e tal como no caso de KG, os subscritos das funções potenciais com simetria esférica denotam suas propriedades com respeito às transformações de Lorentz; aqui o subscrito T especifica o termo tensorial.

Para o movimento ao longo do eixo x ($x_2 = x_3 = p_2 = p_3 = 0$) o momento angular orbital se desvanece e a hamiltoniana de Dirac torna-se

$$\mathcal{H} = c\alpha_1 p + \beta mc^2 + IV_t + \alpha_1 V_e + \beta V_s + i\beta\alpha_1 V_T \quad (3.27)$$

Como S_1 comuta com todos os termos de (3.27), pode-se depreender que $[\mathcal{H}, S_1] = 0$. Este resultado diz que o primeiro componente do spin é uma constante de movimento. Por conseguinte, \mathcal{H} e S_1 podem ter autovetores simultâneos. As autofunções podem ser rotulados com dois números quânticos, um relacionado a S_1 e o outro relacionado a \mathcal{H} . Por outro lado, a hamiltoniana e a energia não dependem do spin, portanto a energia tem dupla degenerescência e só depende do número quântico principal. Assim sendo, pode-se escrever

$$S_1 \Psi_{k,m} = m\hbar \Psi_{k,m} \quad (3.28)$$

$$\mathcal{H} \Psi_{k,m} = E_k \Psi_{k,m}$$

onde $m = \pm 1/2$. As relações entre os componentes da autofunção podem ser obtidos a partir da primeira equação de (3.28). A projeção do spin relaciona os componentes superior e inferior do espinor da seguinte forma

$$\Psi_{k,\pm 1/2} = \begin{pmatrix} \phi_{\pm} \\ \pm \phi_{\pm} \\ \chi_{\pm} \\ \pm \chi_{\pm} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

onde

$$\phi_{\pm} = \frac{\Psi_2 \pm \Psi_1}{2}, \quad \chi_{\pm} = \frac{\Psi_4 \pm \Psi_3}{2} \quad (3.30)$$

e

$$\Psi_2 = \pm \Psi_1, \quad \Psi_4 = \pm \Psi_3 \quad (3.31)$$

Substituindo (3.29) na segunda equação de (3.28) obtemos a equação de autovalores

$$H\tilde{\Psi}_{k,\pm 1/2} = E_k\tilde{\Psi}_{k,\pm 1/2} \quad (3.32)$$

onde

$$H = c\sigma_1 p + \sigma_3 mc^2 + IV_t + \sigma_1 V_e + \sigma_3 V_s - \sigma_2 V_T \quad (3.33)$$

e

$$\tilde{\Psi}_{k,\pm 1/2} = \begin{pmatrix} \phi_{\pm} \\ \pm \chi_{\pm} \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Pode-se verificar que (3.34), têm exatamente a forma obtida em [56], se escrevemos $\tilde{\Psi}_{k,+1/2}$ em termos de Ψ_1 e Ψ_4 , e $\tilde{\Psi}_{k,-1/2}$ em termos de Ψ_2 e Ψ_3 . Tudo isto significa que devido à conservação de S_1 , o número de componentes do espinor de Dirac é reduzido à metade, um deles relacionado ao componente superior e o outro ao componente inferior, além disso eles estão relacionados por duas equações diferenciais acopladas de primeira ordem que equivalem a uma equação de Dirac independente do tempo em (1+1) dimensões. Note que o termo $\sigma_2 V_T$ de (3.33) se comporta como um termo pseudoescalar, por conseguinte analisando (3.33) pode-se depreender que no processo da redução dimensional da equação de Dirac as interações vetorial e escalar preservam suas estruturas de Lorentz, entretanto a interação tensorial torna-se uma interação pseudoescalar.

Então a equação de Dirac independente do tempo em (1+1) dimensões para uma partícula com massa de repouso m e um potencial matricial geral \mathcal{V} pode ser escrita da seguinte forma

$$H\Psi = E\Psi \quad (3.35)$$

$$H = c\alpha p + \beta mc^2 + \mathcal{V} \quad (3.36)$$

Podemos escolher as matrizes de Pauli 2×2 que satisfazem a mesma álgebra de α e β , resultando assim um espinor de dois componentes Ψ . O potencial matricial \mathcal{V} pode ser escrito como

$$\mathcal{V} = IV_t + \beta V_s + \alpha V_e - i\beta\gamma^5 V_p \quad (3.37)$$

onde $\gamma^5 = \alpha$. Esta é a mais geral combinação de estruturas de Lorentz porque só existem quatro matrizes linearmente independentes 2×2 . Aqui o subscrito p especifica um potencial pseudoescalar. Para ter uma representação explícita para as matrizes α e β usamos $\alpha = \sigma_1$ e $\beta = \sigma_3$, de tal forma que $\beta\gamma^5 = i\sigma_2$.

Em termos das combinações (2.21), a hamiltoniana de Dirac pode ser escrita como:

$$H = c\alpha \left(p + \frac{V_e}{c} \right) + \beta mc^2 + \frac{I + \beta}{2} \Sigma + \frac{I - \beta}{2} \Delta - i\beta\gamma^5 V_p \quad (3.38)$$

Tal como no caso da equação de KG, o componente espacial do potencial vetorial pode ser absorvido na função de onda definindo um novo espinor ψ tal que

$$\Psi = e^{-i\Lambda} \psi \quad (3.39)$$

onde Λ é definido como em (2.17), enquanto temos

$$\left(p + \frac{V_e}{c} \right) \Psi = e^{-i\Lambda} p \psi. \quad (3.40)$$

Se agora escrevemos o espinor ψ em termos de seus componentes,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

a equação de Dirac produz duas equações acopladas de primeira ordem para ψ_+ e ψ_- :

$$-i\hbar c \psi'_- + mc^2 \psi_+ + \Sigma \psi_+ - iV_p \psi_- = E \psi_+ \quad (3.42)$$

$$-i\hbar c \psi'_+ - mc^2 \psi_- + \Delta \psi_- + iV_p \psi_+ = E \psi_- \quad (3.43)$$

Em termos de ψ_+ e ψ_- o espinor é normalizado como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx (|\psi_+|^2 + |\psi_-|^2) = 1 \quad (3.44)$$

assim ψ_+ e ψ_- devem ser funções de quadrado integrável.

Usando a expressão para ψ_- obtida de (3.43) com $E \neq -mc^2 + \Delta$,

$$\psi_- = -i \frac{\hbar c \psi'_+ - V_p \psi_+}{E + mc^2 - \Delta} \quad (3.45)$$

e substituindo em (3.42) obtemos uma equação diferencial de segunda ordem para ψ_+ :

$$-\hbar^2 c^2 \psi_+'' + \hbar c \Delta' \frac{V_p \psi_+ - \hbar c \psi_+'}{E + mc^2 - \Delta} + [V_p^2 + \hbar c V_p' - (E - mc^2 - \Sigma)(E + mc^2 - \Delta)] \psi_+ = 0 \quad (3.46)$$

De forma semelhante, usando a expressão para ψ_+ obtida de (3.42) com $E \neq mc^2 + \Sigma$,

$$\psi_+ = -i \frac{\hbar c \psi_-' + V_p \psi_-}{E - mc^2 - \Sigma} \quad (3.47)$$

e substituindo em (3.43) obtemos uma equação diferencial de segunda ordem para ψ_- :

$$-\hbar^2 c^2 \psi_-'' - \hbar c \Sigma' \frac{V_p \psi_- + \hbar c \psi_-'}{E - mc^2 - \Sigma} + [V_p^2 - \hbar c V_p' - (E - mc^2 - \Sigma)(E + mc^2 - \Delta)] \psi_- = 0 \quad (3.48)$$

Para $\Delta = 0$ com $E \neq -mc^2$, (3.45) e (3.46) reduzem-se a

$$\psi_- = -i \frac{\hbar c \psi_+' - V_p \psi_+}{E + mc^2} \quad (3.49)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi_+'' + \left[\frac{(E + mc^2)\Sigma}{2mc^2} + \frac{V_p^2}{2mc^2} + \frac{\hbar V_p'}{2mc} \right] \psi_+ = \frac{E^2 - m^2 c^4}{2mc^2} \psi_+ \quad (3.50)$$

e para $\Sigma = 0$ com $E \neq mc^2$, (3.47) e (3.48) reduzem-se a

$$\psi_+ = -i \frac{\hbar c \psi_-' + V_p \psi_-}{E - mc^2} \quad (3.51)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi_-'' + \left[\frac{(E - mc^2)\Delta}{2mc^2} + \frac{V_p^2}{2mc^2} - \frac{\hbar V_p'}{2mc} \right] \psi_- = \frac{E^2 - m^2 c^4}{2mc^2} \psi_- \quad (3.52)$$

Em quaisquer dos casos, $\Delta = 0$ com $E \neq -mc^2$ ou $\Sigma = 0$ com $E \neq mc^2$, as soluções do problema relativístico são *mapeadas* num problema de Sturm-Liouville. Por isso mesmo as soluções podem ser encontradas resolvendo-se um problema tipo Schrödinger.

As soluções para $\Delta = 0$ com $E = -mc^2$ e $\Sigma = 0$ com $E = mc^2$, excluídas do problema de Sturm-Liouville, podem ser obtidas diretamente das equações originais de primeira ordem (3.42) e (3.43). Para $\Delta = 0$ com $E = -mc^2$ tem-se que

$$\psi_+ = \psi_+^{(0)} \exp \left[+ \int^x dy \frac{V_p(y)}{\hbar c} \right] \quad (3.53)$$

$$\psi_-' + \frac{V_p}{\hbar c} \psi_- = -\frac{i}{\hbar c} (\Sigma + 2mc^2) \psi_+$$

e para $\Sigma = 0$ com $E = mc^2$

$$\psi_- = \psi_-^{(0)} \exp \left[- \int^x dy \frac{V_p(y)}{\hbar c} \right] \quad (3.54)$$

$$\psi'_+ - \frac{V_p}{\hbar c} \psi_+ = -\frac{i}{\hbar c} (\Delta - 2mc^2) \psi_-$$

onde $\psi_+^{(0)}$ e $\psi_-^{(0)}$ são constantes de normalização.

Agora analisemos certos casos particulares das equações de Dirac (3.46) e (3.48). Por exemplo para o caso particular de $\Sigma = 0$ com $E \neq mc^2$ e $\Delta = 0$ com $E \neq -mc^2$, i.e., o caso de um potencial pseudoescalar puro, as equações apresentam uma estrutura supersimétrica

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi_{\mp}'' + \left(\frac{V_p^2}{2mc^2} \mp \frac{\hbar V_p'}{2mc} \right) \psi_{\mp} = \frac{E^2 - m^2 c^4}{2mc^2} \psi_{\mp} \quad (3.55)$$

onde V_p é o superpotencial correspondente ao potencial supersimétrico de Sturm-Liouville $V_p^2/(2mc^2) \mp \hbar V_p'/(2mc)$. Esta estrutura supersimétrica já foi apreciada na literatura [9]-[12],[21]. Os componentes superior e inferior do espinor podem ser normalizadas da forma $\int_a^b dx |\psi_{\pm}|^2 = |N_{\pm}|^2$ e as constantes de normalização, N_+ e N_- , podem ser obtidas a partir das equações originais de primeira ordem (3.42) e (3.43). De fato, temos

$$\begin{aligned} (E \pm mc^2) \int_a^b dx |\psi_{\mp}|^2 &= [(\hbar c)^2 \psi_{\pm}^* \psi'_{\pm} \mp \hbar c V_p |\psi_{\pm}|^2]_{x=a}^{x=b} \\ &+ 2c^2 \int_a^b dx \psi_{\pm}^* \left(-\frac{\hbar^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{V_p^2}{2c^2} \pm \frac{\hbar}{2c} V_p' \right) \psi_{\pm} \end{aligned} \quad (3.56)$$

que satisfazem as condições de contorno $\psi_{\pm}(b) = \psi_{\pm}(a) = 0$, o primeiro termo da destra de (3.56) desvanece-se. Portanto pode-se deprender que

$$\int_a^b dx |\psi_{\pm}|^2 = \frac{E \pm mc^2}{E \mp mc^2}, \quad \text{para} \quad E \neq \pm mc^2 \quad (3.57)$$

e

$$-\frac{\hbar^2}{2} \psi_{\mp}'' + \left(\frac{V_p^2}{2c^2} \mp \frac{\hbar}{2c} V_p' \right) \psi_{\mp} = 0, \quad \text{para} \quad E = \pm mc^2. \quad (3.58)$$

Finalmente, usando (3.44) e (3.57) obtemos

$$N_{\pm} = \sqrt{\frac{E \pm mc^2}{2E}} \quad (3.59)$$

portanto, uma possível solução com $E = -mc^2$ ($E = +mc^2$) tem um espinor de Dirac com uma componente superior (inferior) nula.

Outro caso particular é aquele em que o potencial $V_p = 0$. Neste último caso não

percebe-se uma estrutura supersimétrica como no caso do potencial pseudoescalar puro e as equações (3.46) e (3.48) reduzem-se a

$$-\hbar^2 c^2 \psi_+'' - \frac{\hbar^2 c^2 \Delta'}{E + mc^2 - \Delta} \psi_+' - (E - mc^2 - \Sigma)(E + mc^2 - \Delta) \psi_+ = 0 \quad (3.60)$$

$$-\hbar^2 c^2 \psi_-'' - \frac{\hbar^2 c^2 \Sigma'}{E - mc^2 - \Sigma} \psi_-' - (E - mc^2 - \Sigma)(E + mc^2 - \Delta) \psi_- = 0 \quad (3.61)$$

Agora vejamos os seguintes casos:

- I) Para $\Delta' = 0$ com $E \neq -mc^2 + \text{const}$, (3.60) torna-se equivalente a (2.22), com ψ_+ no lugar de ϕ , enquanto o componente inferior do espinor encontra-se de (3.45).
- II) Para $\Sigma' = 0$ com $E \neq mc^2 + \text{const}$, (3.61) torna-se equivalente a (2.22), com ψ_- no lugar de ϕ . Para este caso o componente superior do espinor encontra-se de (3.47).

Portanto, em quaisquer dos casos, i.e., $\Delta' = 0$ ou $\Sigma' = 0$, as equações de KG e Dirac apresentam o mesmo espectro de energia, enquanto suas autofunções são diferentes, isto é assim devido à natureza de cada uma dessas equações relativísticas.

3.3 Limite não-relativístico da equação de Dirac em (1+1) dimensões

Para o limite não-relativístico da equação de Dirac usemos a equação

$$-\hbar^2 c^2 \psi_+'' + \hbar c \Delta' \frac{V_p \psi_+ - \hbar c \psi_+'}{E + mc^2 - \Delta} + [V_p^2 + \hbar c V_p' - (E - mc^2 - \Sigma)(E + mc^2 - \Delta)] \psi_+ = 0 \quad (3.62)$$

agora fazendo $E \sim mc^2$, obtemos

$$-\hbar^2 c^2 \psi_+'' + \hbar c \Delta' \frac{V_p \psi_+ - \hbar c \psi_+'}{2mc^2 - \Delta} + [V_p^2 + \hbar c V_p' - (\mathcal{E} - \Sigma)(2mc^2 - \Delta)] \psi_+ = 0 \quad (3.63)$$

donde \mathcal{E} está definido por (2.25). Dividindo a equação por $2mc^2 - \Delta$, obtemos

$$\frac{\hbar^2 c^2}{2mc^2 - \Delta} \left[-\psi_+'' - \frac{\Delta'}{2mc^2 - \Delta} (\psi_+' - \frac{V_p}{\hbar c} \psi_+) + \frac{V_p'}{\hbar c} \psi_+ + \frac{V_p^2}{\hbar^2 c^2} \psi_+ \right] + \Sigma \psi_+ = \mathcal{E} \psi_+ \quad (3.64)$$

Entretanto, no regime não-relativístico, para o intervalo de valores de x na qual a função de onda não é desprezível, $|\Delta(x)| \ll mc^2$, analisemos a equação de primeira ordem

$$\psi_- = -i \frac{\hbar c \psi_+' - V_p \psi_+}{E + mc^2 - \Delta} \quad (3.65)$$

e fazendo $E \sim mc^2$ a equação fica

$$\psi_- = -i \frac{\hbar c \psi'_+ - V_p \psi_+}{2mc^2 - \Delta} \quad (3.66)$$

agora, se $2mc^2 - \Delta \sim 2mc^2$ e $V_p \ll 2mc^2$, então

$$\psi_- = -\frac{i\hbar}{2mc} \psi'_+ = \frac{p}{2mc} \psi_+ \quad (3.67)$$

vemos que ψ_- é da ordem $v/c \ll 1$ com respeito a ψ_+ . Além disso se $2mc^2 - \Delta \sim 2mc^2$ e Δ' na equação (3.64) é desprezível com respeito aos outros termos, vemos que ψ_+ obedece à equação

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''_+ + \Sigma \psi_+ = \mathcal{E} \psi_+ \quad (3.68)$$

que é a equação de Schrödinger com energia de ligação igual a \mathcal{E} .

Agora consideremos o limite não-relativístico no caso especial de $\Delta = 0$. A equação (3.64) torna-se

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''_+ + \left(\Sigma + \frac{V_p^2}{2mc^2} + \frac{\hbar V'_p}{2mc} \right) \psi_+ = \mathcal{E} \psi_+ \quad (3.69)$$

Para o caso $\Sigma = 0$ e $|\Delta|/(mc^2)$ desprezível, a (3.64) torna-se

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''_+ + \left(\frac{V_p^2}{2mc^2} + \frac{\hbar V'_p}{2mc} \right) \psi_+ = \mathcal{E} \psi_+ \quad (3.70)$$

Capítulo 4

Simetrias das equações relativísticas em (1+1) dimensões

4.1 Paridade

O par de equações diferenciais acopladas de primeira ordem (3.42) e (3.43) implica que os ψ_+ e ψ_- têm paridades opostas se a equação de Dirac é covariante sob $x \rightarrow -x$. A covariância da equação de Dirac é garantida se V_p troca de sinal, enquanto V_t e V_s , e portanto Σ e Δ , ficam os mesmos quando $x \rightarrow -x$. Isto acontece porque o operador paridade é $P = \exp(i\eta)P_0\sigma_3$, onde η é uma fase constante e P_0 troca x em $-x$. Visto que este operador unitário anticomuta com α e $\beta\gamma^5$, eles trocam de sinal sob uma transformação de paridade, enquanto I e β , que comutam com P , ficam invariantes.

No caso da equação de KG, há invariância sob a operação de paridade se V_t e V_s , e conseqüentemente Σ e Δ , também são funções pares.

4.2 Conjugação de carga

A operação de conjugação de carga troca o sinal da interação eletromagnética, i.e., troca o sinal dos componentes temporal e espacial dos potenciais. Para a equação de Dirac isto está de acordo com a transformação

$$\Psi_c = C\bar{\Psi}^T = \alpha\Psi^*. \quad (4.1)$$

onde

$$C = \alpha\beta.$$

Agora, aplicando esta operação de conjugação de carga na equação de Dirac (3.35) e sem tomar em conta o componente espacial do potencial vetorial, obtém-se

$$H_c\psi_c = -E\psi_c, \quad (4.2)$$

onde

$$\psi_c = \alpha\psi^* = \begin{pmatrix} \psi_-^* \\ \psi_+^* \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

e H_c está dado por

$$H_c = c\alpha p + \beta mc^2 - IV_t + \beta V_s + i\beta\gamma^5 V_p \quad (4.4)$$

Em termos dos potenciais Δ e Σ , esta última hamiltoniana pode ser escrita como

$$H_c = c\alpha p + \beta mc^2 - \frac{I + \beta}{2} \Delta - \frac{I - \beta}{2} \Sigma + i\beta\gamma^5 V_p \quad (4.5)$$

então vemos que uma operação de conjugação de carga troca o sinal da energia e dos potenciais V_t e V_p , isto significa que $\Sigma \rightarrow -\Delta$ e $\Delta \rightarrow -\Sigma$. Portanto a hamiltoniana de Dirac será invariante sob a operação de conjugação de carga se ela contém somente o potencial escalar.

No caso da equação de KG vemos que há invariância sob uma operação de conjugação de carga, no sentido de $E \rightarrow -E$ e $V_t \rightarrow -V_t$, mesmo que haja um potencial escalar.

4.3 Transformação quiral

O operador quiral para o espinor Dirac é representado pela matriz γ^5 , e chamaremos "transformação quiral" à transformação associada com esta matriz. Portanto, o espinor transformado é dado por $\psi_\chi = \gamma^5\psi$ e a hamiltoniana transformada $H_\chi = \gamma^5 H \gamma^5$. Como γ^5 anticomuta com β , a equação de Dirac independente do tempo com uma transformação quiral é

$$H_\chi \psi_\chi = E \psi_\chi, \quad (4.6)$$

onde

$$\psi_\chi = \begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_+ \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

e H_χ é dada por

$$H_\chi = c\alpha p - \beta mc^2 + IV_t - \beta V_s + i\beta\gamma^5 V_p \quad (4.8)$$

ou

$$H_\chi = c\alpha p - \beta mc^2 + \frac{I + \beta}{2} \Delta + \frac{I - \beta}{2} \Sigma + i\beta\gamma^5 V_p \quad (4.9)$$

Isto significa que uma transformação quiral troca o sinal da massa e dos potenciais escalar e pseudoescalar, portanto $\Sigma \rightarrow \Delta$ e vice-versa. A hamiltoniana de Dirac não é invariante sob esta transformação. Uma hamiltoniana de Dirac invariante sob uma transformação quiral precisa ter massa zero e os potenciais V_s e V_p também zero.

No caso da equação de KG a invariância sob uma transformação quiral, no sentido de $m \rightarrow -m$ e $V_s \rightarrow -V_s$, é trivial.

4.4 Translações do espectro

Vemos que as equações de KG e Dirac com um potencial não vetorial, não são invariantes sob as transformações simultâneas $E \rightarrow E + const$ e $V \rightarrow V + const$, isto é assim porque só o potencial vetorial se acopla às energias positivas da mesma forma que às energias negativas, enquanto os potenciais escalar e pseudoescalar se acoplam à massa da partícula. Portanto, se existir algum acoplamento escalar ou pseudoescalar o valor absoluto da energia terá significado físico e a liberdade translação do espectro será perdida. De fato, esta peculiaridade das equações relativísticas foi explorada recentemente para demonstrar que a adição de um potencial constante pode ser uma condição essencial para a existência de estados ligados [10, 12].

4.5 Simetria do espectro em torno de $E = 0$

Vê-se claramente de (2.20) que os níveis de energia do espectro bosônico são dispostos simetricamente em torno de $E = 0$, quando a partícula está na presença de um potencial puramente escalar. Se este é o caso, tem-se ainda que os níveis de energia para partícula e antipartícula compartilham uma mesma autofunção.

Não fossem as possíveis soluções isoladas, essa simetria também manifestar-se-ia para um férmion sujeito a um potencial puramente pseudoescalar, como pode-se inferir de (3.55). Um efeito similar ocorre no espectro de férmions com acoplamento puramente escalar. Tal não revela-se de modo explícito nas equações consignadas em páginas precedentes por causa da representação das matrizes α e β que escolhemos ($\alpha = \sigma_1$ e $\beta = \sigma_3$). Contudo, pode-se depreender essa conclusão via operação de conjugação de carga. Entretanto, deve-se mencionar que essa simetria e a possível existência de soluções isoladas (necessariamente com $E = 0$), tanto quanto a estrutura supersimétrica para os componentes superior e inferior do espinor de Dirac, transparecem quando se escolhe $\alpha = \sigma_2$ e $\beta = \sigma_1$ [15, 16, 28, 29, 30, 52].

Capítulo 5

Estados ligados das equações relativísticas

5.1 Estados ligados intrinsecamente relativísticos

É conhecido que um potencial confinante na teoria não-relativística não é confinante na teoria relativística quando ele é considerado como um vetor de Lorentz (paradoxo de Klein). É surpreendente que potenciais relativísticos confinantes podem resultar em potenciais não-confinantes no limite não-relativístico. Este último fenômeno é uma consequência do fato que os acoplamentos dos potenciais vetorial e escalar são diferentes tanto na equação de KG quanto na equação de Dirac, enquanto tal diferença não existe na equação de Schrödinger. Esta afirmação manifesta-se mais claramente na equação de KG devido à presença do termo proporcional a V_s^2 , e também na equação de Dirac com um potencial pseudoescalar puro devido à presença do termo proporcional a V_p^2 . Já vimos que os potenciais escalar e vetorial com a combinação expressa por Δ não se manifestam no limite não-relativístico. Deste modo se $V_p = 0$ e $\Sigma = 0$, embora haja potenciais vetorial e escalar agindo sobre a partícula, temos como resultado uma partícula livre no limite não-relativístico.

Deve-se também mencionar uma peculiaridade do acoplamento pseudoescalar. No limite não-relativístico da equação de Dirac este potencial não se retrata do mesmo modo que o faz em uma teoria não-relativística.

5.2 Estados ligados de um férmion neutro num potencial tangente trigonométrico em $(1+1)$ dimensões

O acoplamento magnético anômalo descreve a interação de férmions neutros com campos elétricos. Devido à redução espacial da equação de Dirac este tipo de acoplamento torna-se um acoplamento tipo pseudoescalar (seção 3.2). Os estados ligados de férmions em po-

tenciais pseudoescalares têm tido interesse na literatura [6]-[12] e sua análise meticulosa pode melhorar o entendimento de sua versão em três dimensões. Nesta seção o problema de férmions neutros num potencial pseudoescalar é investigado. À parte das soluções para $E = \pm mc^2$, o problema é *mapeado* numa equação de Sturm-Liouville. O caso de um potencial tangente trigonométrico ($\sim \tan \gamma x$) é solucionado exatamente, assim como o conjunto completo de autofunções é discutido em detalhe. Esta análise foi objeto de uma recente publicação [21]. É destacável mencionar que este potencial intrinsecamente relativístico e confinante, é capaz de localizar o férmion numa região arbitrariamente pequena sem a produção de pares partícula-antipartícula. Além da propriedade de confinamento, este potencial apresenta como limite os potenciais oscilador harmônico e poço quadrado infinito.

Agora concentramos nossa atenção no potencial

$$V_p = \hbar c \gamma g \tan \gamma x \quad (5.1)$$

onde o parâmetro de *kink*, γ , e a constante de acoplamento adimensional, g , são números reais. Devido aos infinitos em $x = \pm \pi/(2|\gamma|)$, restringimos nossa análise para $|x| \leq \pi/(2|\gamma|)$. O potencial é invariante sob $\gamma \rightarrow -\gamma$, portanto os resultados só dependem de $|\gamma|$ enquanto o sinal de V_p depende do sinal de g . Como as soluções para diferentes sinais de g podem ser relacionadas por conjugação de carga, e também por uma transformação quiral para férmions sem massa, restringimos a análise para $g > 0$.

O problema de Sturm-Liouville correspondente ao caso de um potencial pseudoescalar puro tipo tangente trigonométrico (3.55) é

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi_{\pm}'' + V_{\text{eff}}^{[\pm]} \psi_{\pm} = E_{\text{eff}} \psi_{\pm}, \quad (5.2)$$

onde reconhecemos o potencial efetivo como o potencial Pöschl-Teller simétrico [54, 40, 48, 49, 50] (ver Apêndice B.1).

$$V_{\text{eff}}^{[\pm]}(x) = \frac{\hbar^2 \gamma^2}{2m} [g(g \pm 1) \tan^2 \gamma x \pm g] \quad (5.3)$$

cujas autofunções correspondentes aos estados ligados vão satisfazer as condições de contorno $\psi_{\pm} = 0$ quando $|x| = \pi/(2|\gamma|)$ (onde o potencial torna-se infinito) e identicamente zero para $|x| > \pi/(2|\gamma|)$, só se os potenciais efetivos para ambos ψ_+ e ψ_- apresentam estruturas de poço. De acordo com (5.3), exigimos que $g > 1$. As auto-energias efetivas estão dadas por (na notação de [48], [49] e [50], $g(g \pm 1) = \lambda(\lambda - 1)$) (ver Apêndice B.1)

$$E_{\text{eff}} = \frac{E^2 - m^2 c^4}{2m c^2} = \frac{\hbar^2 \gamma^2}{2m} (n_{\pm}^2 + 2n_{\pm} \lambda_{\pm} + \lambda_{\pm} \pm g) \quad (5.4)$$

onde

$$\lambda_+ = g + 1, \quad \lambda_- = g, \quad n_{\pm} = 0, 1, 2, \dots \quad (5.5)$$

Note que $V_{\text{eff}}^{[\pm]}$ é uma função par sob $x \rightarrow -x$. Portanto, a capacidade do potencial para produzir estados ligados é infinda devido ao fato que o potencial efetivo tem a estrutura de poço limitado por paredes infinitas em $|x| = \pm\pi/(2|\gamma|)$. Analisando as equações (5.3) e (5.4) pode ser observado que as auto-energias de Dirac estão restritas ao intervalo

$$|E| > \sqrt{m^2c^4 + (\hbar c\gamma)^2g} \quad (5.6)$$

e não existe continuum. Como as energias positivas e negativas não se interceptam, então não existe a possibilidade para a produção de pares partícula-antipartícula, portanto o paradoxo de Klein não se apresenta. Para relacionar os autovalores efetivos comuns dos potenciais efetivos $V_{\text{eff}}^{[+]}$ e $V_{\text{eff}}^{[-]}$, de (5.4) e (5.5) pode ser obtido a seguinte relação

$$n_- = n_+ + 1 \quad (5.7)$$

requerendo que $n_- = 1, 2, 3, \dots$. Este feito pode ser entendido observando que $V_{\text{eff}}^{[-]}$ é mais profundo que $V_{\text{eff}}^{[+]}$. Agora de (5.4) e (5.5), obtemos

$$E = \pm \sqrt{m^2c^4 + (\hbar c\gamma)^2[n_+^2 + 2n_+(g+1) + 2g+1]}. \quad (5.8)$$

Na Figura 5.1 se mostra o comportamento dos quatro primeiros estados como uma função de g para $\gamma = 1$.

Os componentes superior e inferior do espinor de Dirac podem ser escritos como (ver Apêndice B.1)

$$\psi_{\pm} = N_{\pm} \sqrt{|\gamma|(n_{\pm} + \lambda_{\pm})} \frac{\Gamma(2\lambda_{\pm} + n_{\pm})}{\Gamma(n_{\pm} + 1)} (1 - z^2)^{1/4} P_{n_{\pm} + \lambda_{\pm} - 1/2}^{1/2 - \lambda_{\pm}}(z) \quad (5.9)$$

onde $z = \text{sen}\gamma x$ e $P_{\nu}^{\mu}(z)$ é a função de Legendre associada de primeira ordem (ver Apêndice A). Em termos do polinômio de Gegenbauer (ultraesféricos) (ver Apêndice A), $C_n^{(a)}(z)$, um polinômio de ordem n definido no intervalo $[-1, +1]$, os componentes do espinor de Dirac podem ser reescritos como

$$\psi_{\pm} = N_{\pm} 2^{-\lambda_{\pm}} \sqrt{2|\gamma|(n_{\pm} + \lambda_{\pm})} \frac{\Gamma(n_{\pm} + 1)}{\Gamma(n_{\pm} + 2\lambda_{\pm})} \frac{\Gamma(2\lambda_{\pm})}{\Gamma(\lambda_{\pm} + 1/2)} (1 - z^2)^{\lambda_{\pm}/2} C_{n_{\pm}}^{\lambda_{\pm}}(z) \quad (5.10)$$

Como $C_n^{(a)}(-z) = (-)^n C_n^{(a)}(z)$ e $C_n^{(a)}(z)$ tem n distintos zeros [1], é claro que ψ_+ e ψ_- têm paridades opostas. Desse modo, o número de nodos de ψ_+ e ψ_- diferem em ± 1 de acordo a (5.7). Na Figura 5.2 ilustramos o comportamento dos componentes superior ψ_+

e inferior ψ_- do espinor de Dirac para $n_+ = 1$ ($n_- = 2$).

Vale a pena observar que a largura da densidade de probabilidade decresce quando $|\gamma|$ ou g crescem, portanto a incerteza na posição pode-se contrair sem limite. À primeira impressão este resultado violaria o princípio da incerteza de Heisenberg. Este aparente paradoxo pode ser impedido considerando-se que o potencial pseudoescalar se acopla à massa da partícula (como foi dito na Seção 4.4) contribuindo para sua alteração. Os resultados prévios sugerem definir a massa efetiva como

$$m_{\text{eff}} = \sqrt{m^2 + \left(\frac{\hbar\gamma}{c}\right)^2} g \quad (5.11)$$

de tal forma que as auto-energias de Dirac estão restritas ao intervalo $|E| > m_{\text{eff}}c^2$. Agora é possível definir o comprimento de onda Compton efetivo como $\lambda_{\text{eff}} = \hbar/(m_{\text{eff}}c)$. Assim sendo, segue-se imediatamente que $(\Delta x)_{\text{mim}} = \lambda_{\text{eff}}/2$ e $(\Delta p)_{\text{max}} = m_{\text{eff}}c$. Isto implica que a localização do férmion neutro pode-se contrair até zero sem estragar a interpretação do modelo de partícula única da equação de Dirac, mesmo se o férmion neutro ligado for sem massa.

Por outro lado, agora analisemos as soluções isoladas a partir das equações (3.53) e (3.54) com $\Sigma = 0$ e $\Delta = 0$,

$$\psi_{\mp} = N_{\mp} \exp \left[\mp \int^x dy \frac{V_p(y)}{\hbar c} \right] \quad (5.12)$$

$$\psi'_{\pm} \mp \frac{V_p}{\hbar c} \psi_{\pm} = \pm i \frac{2mc}{\hbar} \psi_{\mp}$$

com $N_{\pm} = \sqrt{(E \pm mc^2)/(2E)}$. Pode-se observar que a solução isolada para $E = +mc^2$ é

$$\psi \sim (1 - z^2)^{-g/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

e para $E = -mc^2$ é

$$\psi \sim (1 - z^2)^{g/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

pode-se observar de (5.13) e (5.14) que a solução isolada normalizável só é possível se o componente superior do espinor se desvanece ($E = -mc^2$). O espinor de Dirac normalizado pode ser escrito como

$$\psi = 2^{-g+1/2} \sqrt{|\gamma|g} \frac{\Gamma(2g)}{\Gamma(g+1/2)} (1 - z^2)^{g/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

independente da magnitude de g . A melhor localização de um férmion e também a

validez do princípio de incerteza é inalterado se utilizamos a massa efetiva dada por (5.11). Os cálculos numéricos para o caso mais crítico ($m = 0$) com $g = 1.001$ produz $\Delta x = 0.5680 \lambda_{\text{eff}}$ e $\Delta p = 0.9995 m_{\text{eff}}c$, independente do valor de γ .

Em resumo, a tarefa de encontrar as auto-energias e as autofunções do problema relativístico de férmions neutros interagindo com um potencial pseudoescalar tipo tangente trigonométrico foi completada. O potencial não admite estados de espalhamento e, exceto pela solução $E = -mc^2$, apresenta um *gap* espectral maior que $2m_{\text{eff}}c^2$. A solução isolada quebra a simetria dos níveis de energia em torno de $E = 0$ exibida pelas soluções do problema de Sturm-Liouville, e o correspondente espinor de Dirac tem apenas um componente diferente de zero.

Para férmions sem massa, exceto para $E = 0$, o *gap* espectral é maior que $2\sqrt{3}\hbar c|\gamma|$ e a hamiltoniana de Dirac anticomuta com σ_3 de tal maneira que as soluções de auto-energias positivas e negativas podem ser mapeadas via a operação $\psi_{-E} = \sigma_3\psi_E$.

Como foi mencionado no princípio da seção, o acoplamento magnético anômalo torna-se um acoplamento pseudoescalar quando o férmion movimenta-se em uma direção. A interação magnética anômala tem a forma $-i\mu\beta\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\phi(r)$, onde μ é o momento magnético anômalo em unidades de magnéton de Bohr e ϕ é o potencial elétrico, quer dizer, o componente temporal do potencial vetor [57]. Em uma dimensão espacial a interação magnética anômala torna-se $\sigma_2\mu\phi'$, então pode-se supor que o potencial tangente trigonométrico produz um potencial elétrico proporcional a $\ln(\cos\gamma x)^g$.

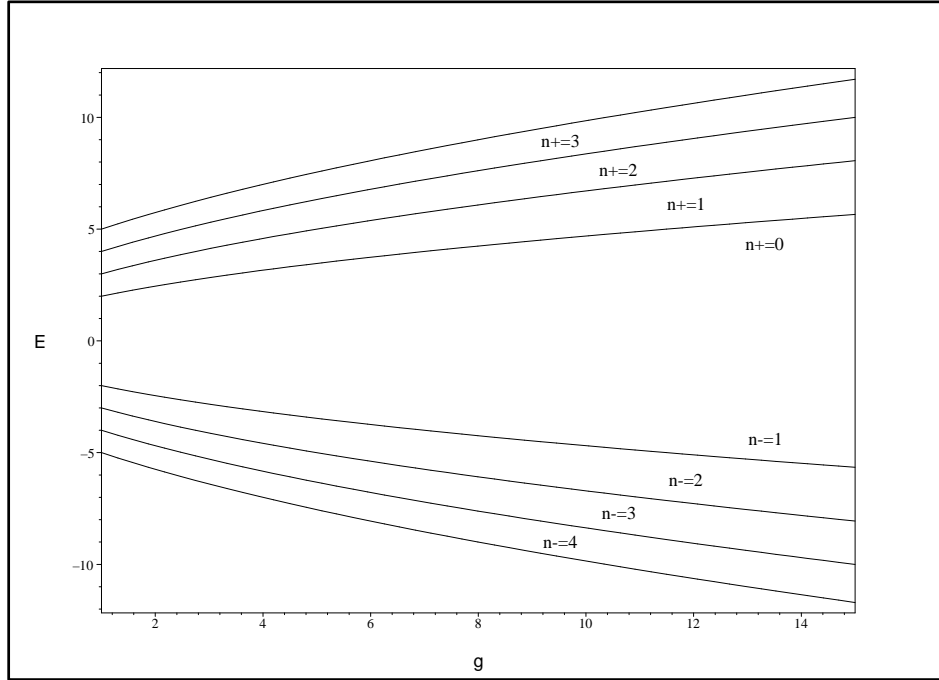


Figura 5.1: Auto-energias de Dirac para os quatro primeiros níveis de energia em função de g para o potencial $V_p = \hbar c \gamma g \tan \gamma x$ ($m = \hbar = c = \gamma = 1$).

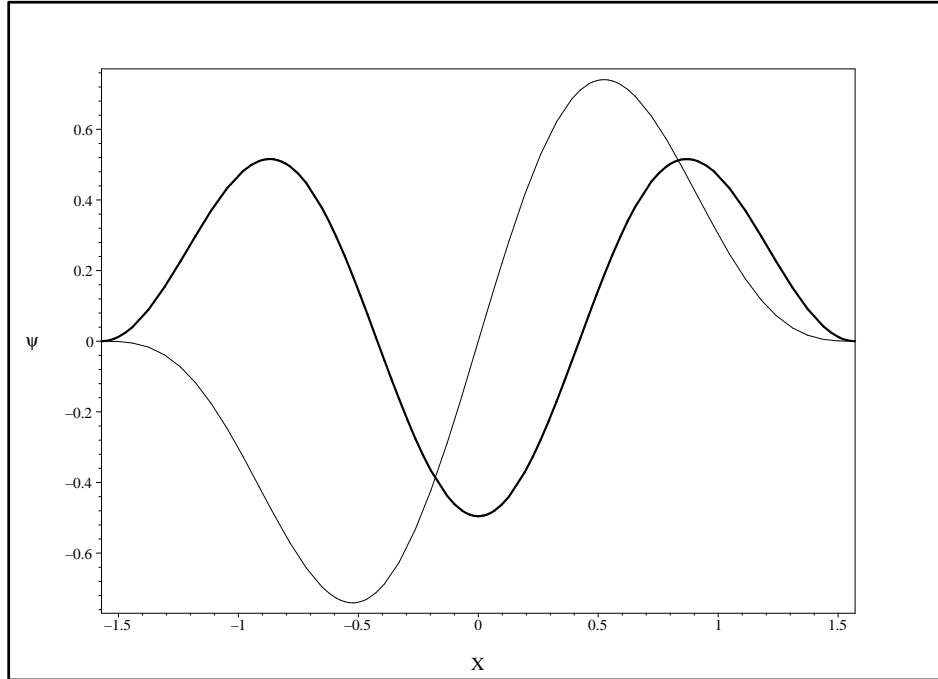


Figura 5.2: Autofunções do espinor de Dirac para $n_+ = 1$ ($n_- = 2$) para o potencial $V_p = \hbar c \gamma g \tan \gamma x$. As linhas fina e densa correspondem aos componentes superior ψ_+ e inferior ψ_- do espinor, respectivamente ($m = \hbar = c = \gamma = 1$, $g = 2$).

5.3 Estados ligados de férmions em potenciais escalar e vetorial do tipo Pöschl-Teller em (1+1) dimensões

O problema de férmions interagindo com potenciais de natureza escalar e vetorial é importante do ponto de vista da física de mésons [45] e física nuclear [2, 3, 26],[37]-[39],[44, 46, 55]. Nesta seção tratamos o problema de férmions interagindo com uma mistura conveniente de potenciais de natureza escalar e vetorial em uma dimensão espacial que é *mapeado* em um problema de Sturm-Liouville. Para o caso específico em que o potencial efetivo, no problema de Sturm-Liouville é do tipo Pöschl-Teller, encontramos soluções de estados ligados exatamente. Discutimos em detalhe o comportamento dos componentes superior e inferior do espinor de Dirac e do espectro de energia. Também tratamos o potencial delta de Dirac, considerando-o como um limite do potencial de Pöschl-Teller. Essa análise foi objeto de uma recente publicação [25].

Consideramos o caso $V_t = V_s$, quer dizer $\Delta = 0$, e as soluções correspondentes ao caso $V_t = -V_s$, quer dizer $\Sigma = 0$, podem ser obtidas por conjugação de carga. Para $V_t = V_s$ o componente inferior é obtido de (3.49) com $V_p = 0$

$$\psi_- = -\frac{i\hbar c}{E + mc^2} \psi'_+ \quad (5.16)$$

e o componente superior é obtido de (3.50) com $V_p = 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_+'' + \left(\frac{E + mc^2}{mc^2}V_s\right)\psi_+ = \frac{E^2 - m^2c^4}{2mc^2}\psi_+ \quad (5.17)$$

é importante notar que as equações (5.16) e (5.17) são válidas só para estados com $E \neq -mc^2$. A equação (5.17) é uma equação de Schrödinger com um potencial efetivo $V_{\text{eff}} = (E + mc^2)V_s/(mc^2)$ e uma energia efetiva dada por $E_{\text{eff}} = (E^2 - m^2c^4)/(2mc^2)$.

Para o potencial escalar tipo Pöschl-Teller simétrico modificado [36] (ver Apêndice B.2)

$$V_s = -\frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x}, \quad V_0 > 0. \quad (5.18)$$

Da equação (5.17) vale a pena observar que para obter estados ligados deve cumprir-se que $(V_{\text{eff}})_{\text{min}} < E_{\text{eff}} < 0$, devido a $V_s \rightarrow 0$ para $x \rightarrow \pm\infty$, isto é

$$-(E + mc^2)V_0 < \frac{E^2 - m^2c^4}{2} < 0. \quad (5.19)$$

Os estados com energia $|E| > mc^2$ correspondem ao espectro contínuo e os estados ligados são achados no intervalo $-mc^2 < E < +mc^2$, para $V_0 \geq mc^2$. Para $V_0 < mc^2$ as energias dos estados ligados estão no intervalo $-2V_0 + mc^2 < E < +mc^2$, e a energia do *gap* entre $-mc^2$ e $mc^2 - 2V_0$.

A solução do problema relativístico pode ser obtido via comparação com a solução não-relativística do potencial Pöschl-Teller simétrico modificado [36, 43, 51, 54]. As auto-energias satisfazem a equação (ver Apêndice B.2)

$$\sqrt{m^2c^4 - E^2} = \hbar c|\alpha|a_n, \quad (5.20)$$

onde n é um número natural, $a_n = s - n > 0$, e

$$s = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8(E + mc^2)V_0}{(\hbar c\alpha)^2}} \right). \quad (5.21)$$

Note que $E > -mc^2$ a fim de garantir que $s > 0$.

Na Figura 5.3 se mostra o comportamento dos três primeiros estados como uma função de V_0 para $\alpha = 1$. Para alguns valores de V_0 é possível ter estados de férmions com energia negativa, ainda que eles não mergulhem no valor $E = -mc^2$, como aguardávamos. Os estados ligados são achados à destra da linha tracejada inclinada (está expressa por $-2V_0 + mc^2$) e a energia do *gap* é a distância vertical entre $E = -mc^2$ e a linha tracejada inclinada. Além disso, pode ser observado desta figura que o número de estados ligados permitidos aumenta quando V_0 aumenta.

Na Figura 5.4 se mostra o comportamento das auto-energias como uma função de

α para um valor fixo de V_0 ($V_0 < mc^2$). Todas as energias dos estados ligados emergem do valor mínimo permitido $E = -2V_0 + mc^2$. Quando α aumenta o número de estados ligados diminui, porque os estados dos níveis mais elevados são ejetados do espectro discreto ao continuum. Isto não pode ser interpretado como uma produção de pares, visto que o estado ligado do férmion torna-se um estado de espalhamento. O estado ligado mais baixo, $n = 0$, está sempre presente e alcança assintoticamente o continuum quando $\alpha \rightarrow \infty$.

Podemos achar o componente superior do espinor de Dirac em termos do polinômio de Gegenbauer (ultraesférico) $C_n^{(a)}(z)$ (um polinômio de ordem n) [51] (ver Apêndices B.2 e A),

$$\psi_+ = N (1 - z^2)^{a_n/2} C_n^{(a_n+1/2)}(z), \quad z = \tanh \alpha x, \quad (5.22)$$

onde N é uma constante de normalização. O componente inferior do espinor é obtido da equação (5.16). Utilizando as propriedades dos polinômios de Gegenbauer [1] (ver Apêndice A), obtemos

$$\begin{aligned} \psi_- = N \frac{i\hbar c \alpha}{E + mc^2} \frac{(1 - z^2)^{a_n/2}}{(2n + 2a_n + 1)} \\ \times \left[(n + a_n)(n + 1) C_{n+1}^{(a_n+1/2)}(z) - (n + 2a_n)(n + a_n + 1) C_{n-1}^{(a_n+1/2)}(z) \right]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Na Figura 5.5 ilustramos o comportamento dos componentes superior e inferior do espinor de Dirac $|\psi_+|^2$ e $|\psi_-|^2$, e a densidade de probabilidade da posição $|\psi|^2 = |\psi_+|^2 + |\psi_-|^2$ para $n = 0$.

Vale a pena observar que definindo $V_0 \equiv \hbar c g |\alpha|/2$, onde $g > 0$, temos que V_s , definido em (5.18), torna-se um potencial delta quando $|\alpha| \rightarrow \infty$, isto é

$$V_s = -\frac{\hbar c g |\alpha|}{2 \cosh^2 \alpha x} \xrightarrow{|\alpha| \rightarrow \infty} -\hbar c g \delta(x). \quad (5.24)$$

Desta forma pode ser estudado o comportamento de um férmion relativístico em potenciais escalar e vetorial tipo delta de Dirac. No limite $\alpha \rightarrow \infty$ o parâmetro s definido em (5.21) pode ser aproximado por

$$s \xrightarrow{|\alpha| \rightarrow \infty} \gamma = \frac{E + mc^2}{\hbar c |\alpha|} g, \quad (5.25)$$

e o requerimento $\gamma - n > 0$ para ter estados ligados é satisfeito só para o estado mais baixo ($n = 0$), com auto-energia satisfazendo a equação $\sqrt{m^2 c^4 - E^2} = \hbar c |\alpha| \gamma$. Dessa maneira o potencial delta de Dirac só tem um estado ligado com energia $E = mc^2(1 - g^2)/(1 + g^2)$, que está de acordo com a referência [32]. O componente superior do espinor é dado por

$$\psi_+ = N (1 - z^2)^{s/2} \xrightarrow{|\alpha| \rightarrow \infty} \psi_{+\delta} = N e^{-\gamma |\alpha x|}, \quad (5.26)$$

e o componente inferior é obtido usando (5.16)

$$\psi_{-\delta} = iN g \frac{x}{|x|} e^{-\gamma|\alpha x|}. \quad (5.27)$$

A constante de normalização é dada por $N = \sqrt{|\alpha|\gamma/(1+g^2)}$. Apesar de o componente inferior do espinor ser descontínuo no origem, a densidade de probabilidade é contínua. Portanto, o limite não-relativístico pode ser estudado fazendo com que a intensidade do potencial g seja muito pequena, dessa maneira o componente inferior é desprezível e a energia é dada por $E = mc^2(1 - 2g^2)$, que está de acordo com os resultados obtidos na referência [31].

Em resumo, a tarefa de encontrar as auto-energias e as autofunções do problema relativístico de férmions interagindo com potenciais de natureza vetorial e escalar do tipo Pöschl-Teller simétrico modificado foi completada. Notamos que os níveis de energias para partículas emergem de $E = mc^2$, eles podem ter valores negativos mas não mergulham no continuum inferior ($E = -mc^2$). Isto pode ser interpretado como um incremento da energia efetiva para a produção de pares partícula-antipartícula, devido ao fato que o potencial escalar acopla-se à massa do férmion e alterando seu valor.

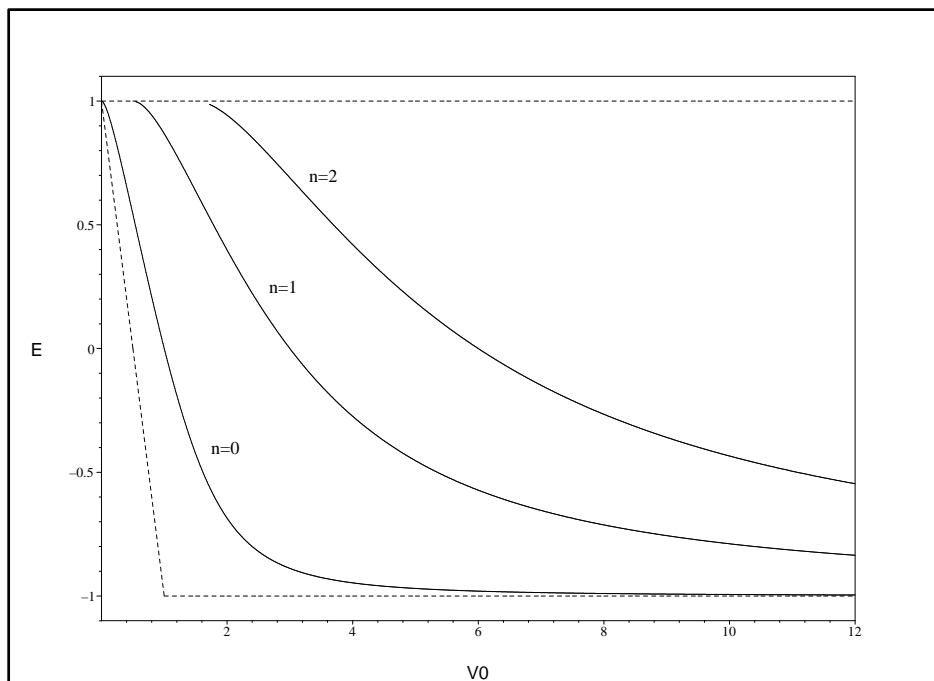


Figura 5.3: Auto-energias de Dirac para os três primeiros níveis de energia em função de V_0 para o potencial $V_t = V_s = -\frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x}$. As linhas tracejadas horizontais são para $|E| = mc^2$ e a linha tracejada inclinada para $-2V_0 + mc^2$ ($m = \hbar = c = \alpha = 1$).

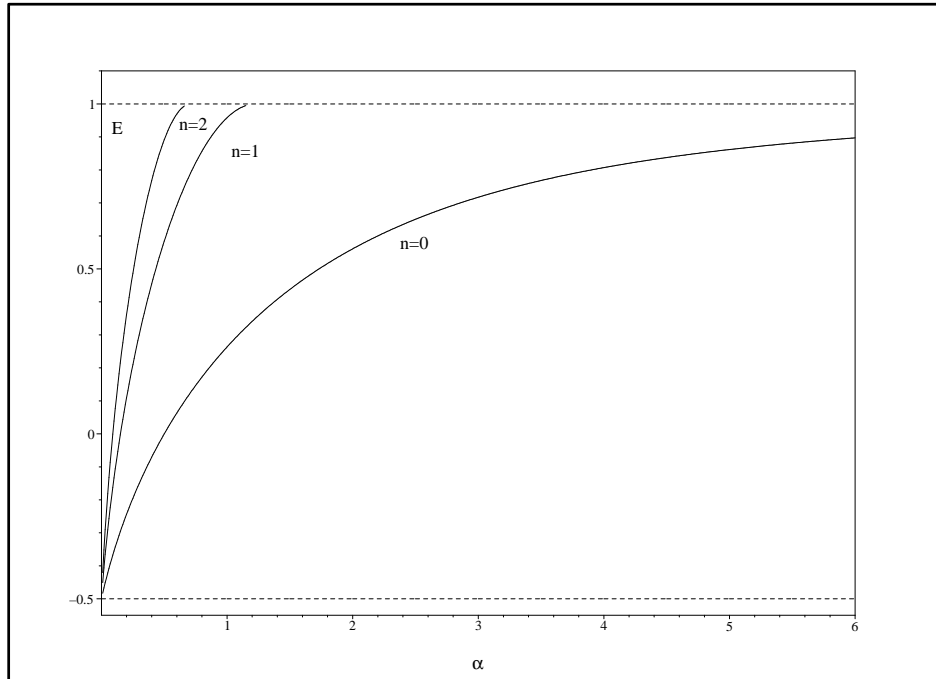


Figura 5.4: Auto-energias de Dirac para os três primeiros níveis de energia em função de α para o potencial $V_t = V_s = -\frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x}$. As linhas tracejadas horizontais são para mc^2 e $-2V_0 + mc^2$ ($m = \hbar = c = 1$ e $V_0 = 0.75$).

5.4 Estados ligados e espectros equivalentes de partículas de spin-0 e spin-1/2 em potenciais escalar e vetorial em (1+1) dimensões

O problema de partículas relativísticas em potenciais de natureza escalar e vetorial é considerado sob a condição geral $V_t \pm V_s = \text{const}$. Com exceção das possíveis soluções isoladas para a equação de Dirac, a equação de KG e a equação de Dirac para um componente do espinor de Dirac são *mapeadas* em uma equação tipo Schrödinger. Funções trigonométricas e hiperbólicas quadradas são escolhidas de maneira que a condição $V_t \pm V_s = \text{const}$ são satisfeitas naturalmente e o problema isoespectral é *mapeado* num problema de Sturm-Liouville com soluções exatas para os estados ligados. As auto-energias e autofunções são discutidas em detalhe tanto para partículas como antipartículas. Mostramos que as partículas de spin-0 são melhor localizadas que as partículas de spin-1/2. Além da importância intrínseca de obter novas soluções destas equações fundamentais da física, as soluções de estados ligados são importantes em matéria condensada, principalmente em paredes de domínio ferroelétricos em sólidos, cadeias magnéticas e funções de Josephson [5].

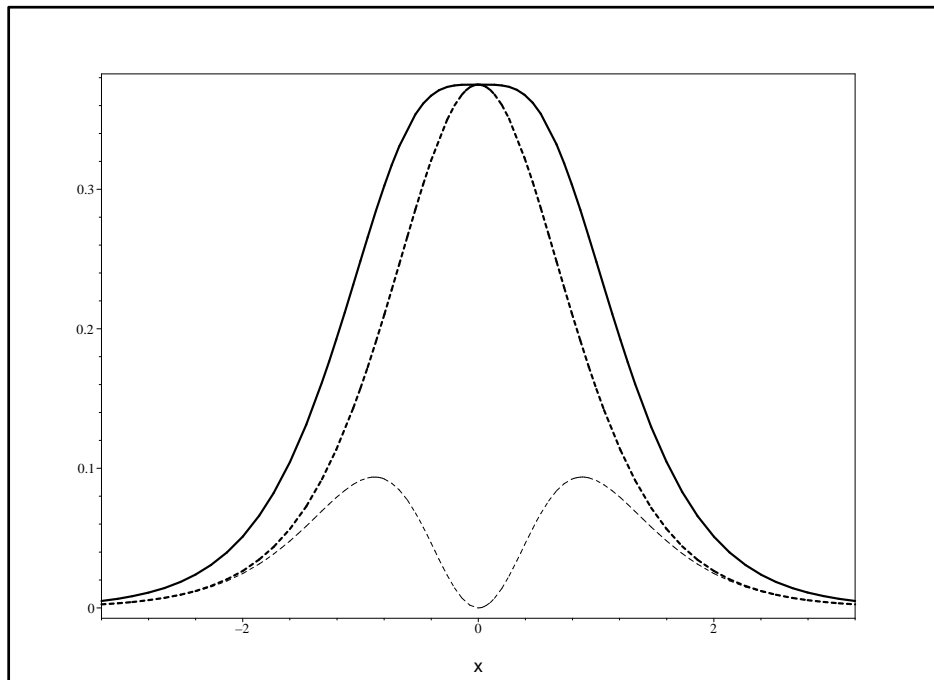


Figura 5.5: $|\psi_+|^2$ (linha tracejada densa), $|\psi_-|^2$ (linha tracejada fina), $|\psi|^2 = |\psi_+|^2 + |\psi_-|^2$ (linha densa) para $n = 0$, para o potencial $V_t = V_s = -\frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x}$ ($m = \hbar = c = V_0 = \alpha = 1$).

5.4.1 Caso isoespectral 1: $V_t - V_s = \text{const}$ ($\Delta' = 0$)

Consideremos os potenciais escalar e vetorial sob a condição $V_t - V_s = V_0$ (objeto de uma recente publicação [22]), onde V_0 é uma constante. Definindo

$$\mathcal{E} = E - V_0, \quad E_{\text{eff}} = \frac{\mathcal{E}^2 - m^2 c^4}{2mc^2}, \quad V_{\text{eff}} = \frac{\mathcal{E} + mc^2}{mc^2} V_s \quad (5.28)$$

a equação de KG pode ser escrita como

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \phi'' + V_{\text{eff}} \phi = E_{\text{eff}} \phi \quad (5.29)$$

Por um lado, para $\mathcal{E} \neq -mc^2$ a mesma equação de Sturm-Liouville para ϕ é obedecida por ψ_+ , enquanto $\psi_- = -i\hbar c \psi'_+ / (\mathcal{E} + mc^2)$. Do contrário, para $\mathcal{E} = -mc^2$, pode ser possível uma solução isolada da equação de Dirac dada por

$$\psi_+ = \text{const.}, \quad \psi_- = \frac{2\psi_+}{i\hbar c} \int^x dx (V_s + mc^2) \quad (5.30)$$

Certamente esta solução não existe se o domínio é infinito porque ψ_+ não seria quadrado-integrável. Vale a pena notar que, à parte da possibilidade de soluções isoladas, ψ_+ satisfaz a equação de KG. Outro resultado interessante é para partículas sem massa, o espectro troca de sinal se V_0 troca de sinal. Por outro lado as autofunções, ϕ e ψ_+ são invariantes sob a troca de sinal de V_0 , enquanto ψ_- troca de sinal.

Consideremos o caso específico de $V_t = V_0 \sec^2 \alpha x$ e $V_s = V_0 \tan^2 \alpha x$. Neste caso, a solução isolada da equação de Dirac para ψ_- não é normalizável e o potencial efetivo do problema de Sturm-Liouville para ambos ϕ e ψ_+ podem ser expressos como

$$V_{\text{eff}} = U_0 \tan^2 \alpha x, \quad U_0 = \frac{\mathcal{E} + mc^2}{mc^2} V_0 \quad (5.31)$$

O potencial V_{eff} é invariante sob $\alpha \rightarrow -\alpha$, assim os resultados só dependem de $|\alpha|$. Quando $\mathcal{E} < -mc^2$ para $V_0 > 0$, e $\mathcal{E} > -mc^2$ para $V_0 < 0$, temos $U_0 < 0$. Neste caso, o potencial efetivo consiste de poços e barreiras periódicos. Por outro lado, quando $\mathcal{E} > -mc^2$ para $V_0 > 0$, e $\mathcal{E} < -mc^2$ para $V_0 < 0$, temos $U_0 > 0$ e o potencial efetivo é identificado como o potencial Pöschl-Teller simétrico [40, 48, 49, 50, 54] (ver Apêndice B.1). Devido aos infinitos em $x = \pm\pi/(2|\alpha|)$ restringimos nossa análise para $|x| \leq \pi/(2|\alpha|)$. De fato, o potencial efetivo é um potencial limitado por paredes infinitas em $|x| = \pm\pi/(2|\alpha|)$ assim a capacidade do potencial efetivo para produzir estados ligados com $\mathcal{E} > mc^2$ para $V_0 > 0$, e $\mathcal{E} < -mc^2$ para $V_0 < 0$, é infinito (com o *gap* espectral no intervalo $|\mathcal{E}| < mc^2$ para $V_0 > 0$).

Para soluções de estados ligados, pode-se enxergar que as autofunções vão satisfazer as condições de contorno $\phi = \psi_+ = 0$ quando $|x| = \pi/(2|\alpha|)$ (onde o potencial torna-se infinito) de tal maneira que a solução de nosso problema relativístico pode ser obtida via comparação com a solução não-relativística do potencial Pöschl-Teller simétrico. As auto-energias efetivas estão dadas por [40, 48, 49, 50, 54] (ver Apêndice B.1)

$$\frac{\mathcal{E}^2 - m^2 c^4}{2mc^2} = \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} (n^2 + 2n\lambda + \lambda), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.32)$$

onde

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8mU_0}{\hbar^2 \alpha^2}} \right) \quad (5.33)$$

Agora, de (5.32) e (5.33) obtemos a condição de quantização

$$2\sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2 c^4 + 2(\mathcal{E} + mc^2)V_0} - \sqrt{\hbar^2 c^2 \alpha^2 + 8V_0(\mathcal{E} + mc^2)} = \hbar c |\alpha| (2n + 1) \quad (5.34)$$

As soluções de (5.34) determinam as auto-energias do problema relativístico. Esta equação pode ser solucionada numericamente procurando energias no intervalo $\mathcal{E} > mc^2$ para $V_0 > 0$, e $\mathcal{E} < -mc^2$ para $V_0 < 0$, como foi previsto pelas análises precedentes. Certamente, para $V_0 > 0$ obtemos $\mathcal{E} \approx mc^2$ para o número quântico mais baixo quando $V_0 \ll mc^2$. Por outro lado, para $V_0 < 0$ obtemos $\mathcal{E} \approx -mc^2$ para o número quântico mais baixo quando $|V_0| \ll mc^2$. Nas Figuras 5.6 e 5.7 mostramos o comportamento das energias como uma função de V_0 e α , respectivamente. Vale a pena observar que para ambas figuras, para $V_0 > 0$, encontramos que o número quântico mais baixo corresponde à mais baixa auto-

energia, como deve ser para os níveis de energia de partículas. Para $V_0 < 0$ o espectro apresenta um comportamento semelhante mas o mais alto nível de energia está rotulado pelo número quântico mais baixo e estes são identificados como níveis de antipartícula. Se fizéssemos a representação gráfica do espectro para partículas sem massa, encontraríamos que o espectro é idêntico para ambos sinais de V_0 . Nesta circunstância, o espectro contém níveis de energias de partícula ou antipartícula.

As autofunções de KG e também o componente superior do espinor de Dirac estão dados por [48, 49, 50] (ver Apêndices B.1 e A)

$$\phi = \psi_+ = N 2^{-\lambda} \sqrt{2|\alpha|(n+\lambda)} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2\lambda)} \frac{\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})} (1-z^2)^{\lambda/2} C_n^{(\lambda)}(z) \quad (5.35)$$

onde $z = \text{sen } \alpha x$. A constante N é a unidade no problema de KG e escolhida tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} dx (|\psi_+|^2 + |\psi_-|^2) = 1$ no problema de Dirac. Na Figura 5.8 ilustramos o comportamento dos componentes superior e inferior do espinor de Dirac $|\psi_+|^2$ e $|\psi_-|^2$, e as densidades de probabilidade da posição $|\psi|^2 = |\psi_+|^2 + |\psi_-|^2$ e $|\phi|^2$ para $n = 0$. A constante de normalização para o caso de Dirac foi obtida numericamente. Comparando $|\psi_+|^2$ e $|\psi_-|^2$ mostra-se que ψ_- é suprimido em relação com ψ_+ . Este resultado é devido a que temos estados de partícula para $V_0 > 0$. Enquanto, para $V_0 < 0$ um comportamento semelhante é mostrado para estados de antipartícula. Além disso, comparando $|\phi|^2$ e $|\psi|^2$ mostramos que as partículas de spin-0 tendem a ser melhor localizadas que as partículas de spin-1/2, os cálculos numéricos para a incerteza na posição produzem $\Delta x = 0.089\lambda_c$ e $\Delta x = 0.121\lambda_c$ (com $m = c = \hbar = 1$, $V_0 = 3$ e $\alpha = 5$), respectivamente. Um aparente paradoxo relacionado com o princípio de incerteza pode ser resolvido com a introdução dos conceitos de massa efetiva e comprimento de onda Compton efetiva, como foi feito no caso do acoplamento pseudoescalar (Seção 5.2). Os resultados prévios sugerem definir a massa efetiva como

$$m_{\text{eff}} = \sqrt{m^2 + \left(\frac{\hbar\alpha}{c}\right)^2} \lambda \quad (5.36)$$

os resultados foram conferidos para um grande intervalo de valores dos parâmetros do potencial.

5.4.2 Caso isoespectral 2: $V_t + V_s = \text{const}$ ($\Sigma' = 0$)

Consideremos os potenciais escalar e vetorial sob a condição $V_t + V_s = V_0$, e definindo

$$m_{\text{eff}} = \left| m + \frac{V_0}{c^2} \right|, \quad V_0 \neq -mc^2 \quad (5.37)$$

$$E_{\text{eff}} = \frac{E^2 - m_{\text{eff}}^2 c^4}{2m_{\text{eff}} c^2} \quad (5.38)$$

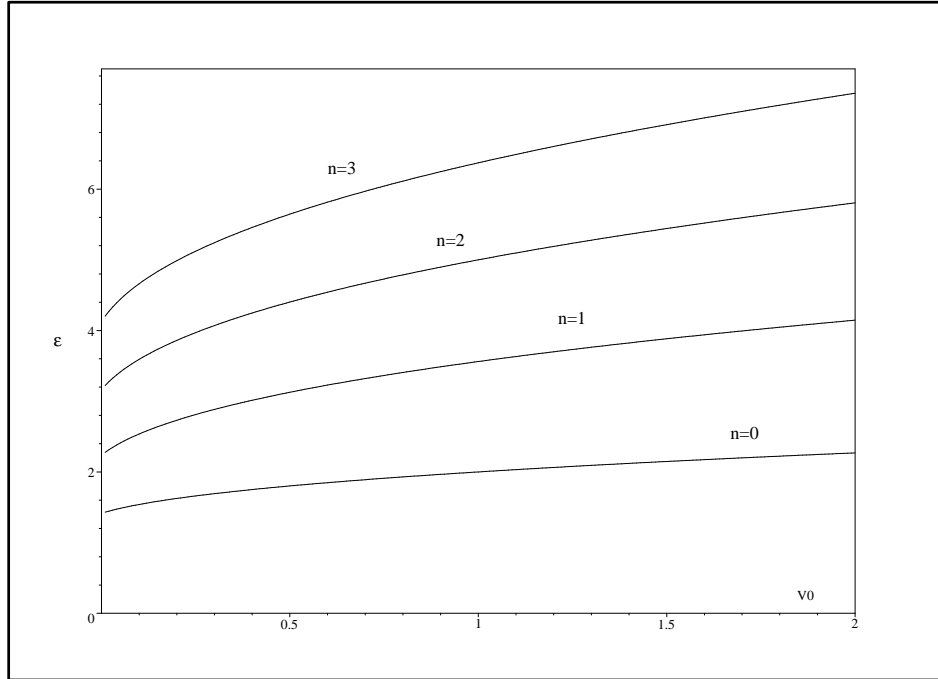


Figura 5.6: Auto-energias de Dirac (\mathcal{E}) para os quatro primeiros níveis de energia em função de V_0 para os potenciais $V_t = V_0 \sec^2 \alpha x$ e $V_s = V_0 \tan^2 \alpha x$ ($m = \hbar = c = \alpha = 1$).

$$V_{\text{eff}} = \frac{E - m_{\text{eff}} c^2 \operatorname{sgn}(mc^2 + V_0)}{m_{\text{eff}} c^2} V_t \quad (5.39)$$

a equação de KG pode ser escrita como

$$-\frac{\hbar^2}{2m_{\text{eff}}} \phi'' + V_{\text{eff}} \phi = E_{\text{eff}} \phi \quad (5.40)$$

Por um lado, para $E \neq m_{\text{eff}} c^2 \operatorname{sgn}(mc^2 + V_0)$ a mesma equação de Sturm-Liouville para ϕ é obedecida por ψ_- , enquanto

$$\psi_+ = -\frac{i\hbar c \psi'_-}{E - m_{\text{eff}} c^2 \operatorname{sgn}(mc^2 + V_0)} \quad (5.41)$$

Do contrário, para $E = m_{\text{eff}} c^2 \operatorname{sgn}(mc^2 + V_0)$, pode ser possível uma solução isolada dada por

$$\psi_- = \text{const.}, \quad \psi_+ = \frac{2i\psi_-}{\hbar c} \int^x dx (V_s + mc^2) \quad (5.42)$$

Certamente, esta solução não existe se o domínio é infinito porque ψ_- não seria quadrado integrável. Vale a pena notar que, à parte da possibilidade de soluções isoladas, ψ_- satisfaz a equação de KG. Outro resultado interessante é para partículas sem massa, o espectro troca de sinal se V_0 troca de sinal. Por outro lado as autofunções, ϕ e ψ_- são invariantes sob a troca de sinal de V_0 , enquanto ψ_+ troca de sinal.

Consideremos o caso específico de $V_t = V_0 \operatorname{sech}^2 \alpha x$ e $V_s = V_0 \tanh^2 \alpha x$. Neste caso,

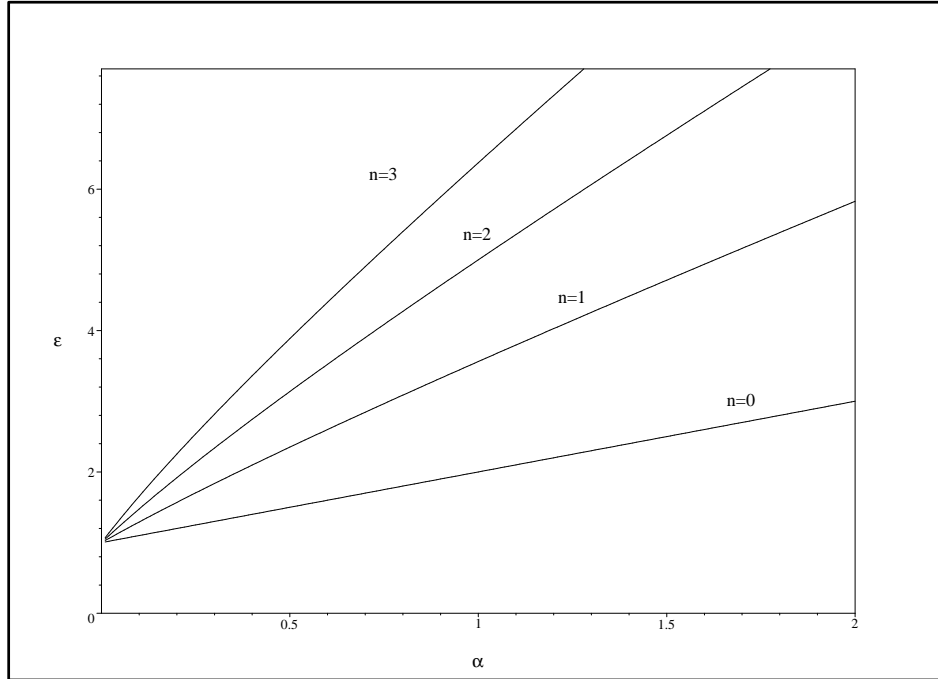


Figura 5.7: Auto-energias de Dirac (\mathcal{E}) para os quatro primeiros níveis de energia em função de α para os potenciais $V_t = V_0 \sec^2 \alpha x$ e $V_s = V_0 \tan^2 \alpha x$ ($m = \hbar = c = 1$ e $V_0 = 1$).

a solução isolada da equação de Dirac para ψ_+ não é normalizável e o potencial efetivo do problema de Sturm-Liouville para ambos ϕ e ψ_- podem ser expressos como

$$V_{\text{eff}} = -U_0 \operatorname{sech}^2 \alpha x, \quad U_0 = [m_{\text{eff}} c^2 \operatorname{sgn}(m c^2 + V_0) - E] \frac{V_0}{m_{\text{eff}} c^2} \quad (5.43)$$

O potencial V_{eff} é invariante sob $\alpha \rightarrow -\alpha$, assim os resultados só dependem de $|\alpha|$. Quando, $E > m_{\text{eff}} c^2$ para $V_0 > 0$, $E < m_{\text{eff}} c^2$ para $-m c^2 < V_0 < 0$, e $E < -m_{\text{eff}} c^2$ para $V_0 < -m c^2$, temos $U_0 < 0$. Neste caso o potencial efetivo é uma barreira potencial e só estados de espalhamento são permitidos com energias restritas a $E > m_{\text{eff}} c^2$ para $V_0 > 0$, e $E < -m_{\text{eff}} c^2$ para $V_0 < 0$. Por outro lado, para $U_0 > 0$ o potencial efetivo é identificado como o potencial Pöschl-Teller simétrico modificado [36, 43, 51, 54] (ver Apêndice B.2). Neste último caso encontramos o espectro contínuo com $E < -m_{\text{eff}} c^2$ para $V_0 > 0$, e $E > m_{\text{eff}} c^2$ para $V_0 < 0$, e um conjunto finito de energias discretas é permitido no intervalo $-m_{\text{eff}} c^2 < E < 2V_0 - m_{\text{eff}} c^2$ para $V_0 > 0$, e $|E| < m_{\text{eff}} c^2$ para $V_0 < -m c^2$.

Focalizando nossa atenção nas soluções de estados ligados, pode-se enxergar que as autofunções vão satisfazer as condições de contorno $\phi = \psi_- = 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$ de tal maneira a solução de nosso problema relativístico pode ser obtido via comparação com a solução não-relativística do potencial Pöschl-Teller simétrico modificado. As auto-energias

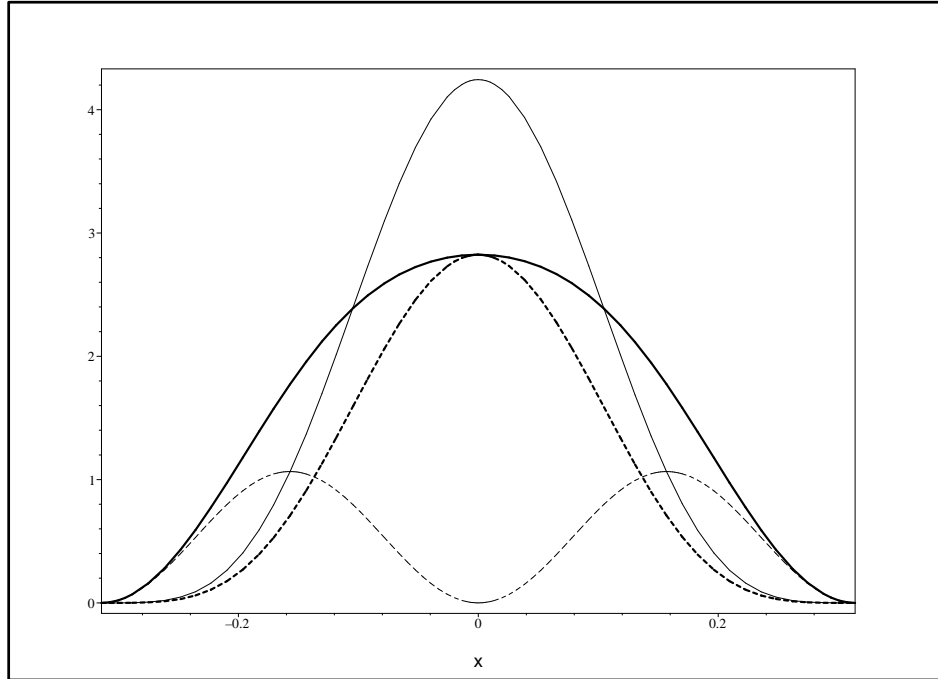


Figura 5.8: $|\psi_+|^2$ (linha tracejada densa), $|\psi_-|^2$ (linha tracejada fina), $|\psi|^2 = |\psi_+|^2 + |\psi_-|^2$ (linha densa) e $|\phi|^2$ (linha fina) para $n = 0$, para os potenciais $V_t = V_0 \sec^2 \alpha x$ e $V_s = V_0 \tan^2 \alpha x$ ($m = \hbar = c = 1$, $V_0 = 3$ e $\alpha = 5$).

efetivas estão dadas por [36, 43, 51] (ver Apêndice B.2)

$$E_{\text{eff}} = -\frac{\hbar^2 \alpha^2 a_n^2}{2m_{\text{eff}}} \quad (5.44)$$

onde

$$a_n = s - n, \quad n = 0, 1, 2, \dots < s \quad (5.45)$$

e

$$s = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8m_{\text{eff}} U_0}{\hbar^2 \alpha^2}} \right) \quad (5.46)$$

Vale a pena notar que o número de estados ligados permitidos incrementa com $|V_0|$ e diminui com $|\alpha|$, e existe pelo menos uma solução de estado ligado. De (5.44)-(5.46) obtemos a condição de quantização

$$\begin{aligned} & \sqrt{\hbar^2 c^2 \alpha^2 + 8V_0 [m_{\text{eff}} c^2 \operatorname{sgn}(mc^2 + V_0) - E]} \\ & - 2\sqrt{m_{\text{eff}}^2 c^4 - E^2} = \hbar c |\alpha| (2n + 1) \end{aligned} \quad (5.47)$$

As soluções de (5.47) que satisfazem o requerimento (5.45) determinam as auto-energias do problema relativístico. Esta equação pode ser solucionada numericamente procurando energias no intervalo $-m_{\text{eff}} c^2 < E < 2V_0 - m_{\text{eff}} c^2$ para $V_0 > 0$, e $|E| < m_{\text{eff}} c^2$ for $V_0 <$

$-mc^2$. Certamente, para $V_0 > 0$ obtemos $E \approx -mc^2$ quando $V_0 \ll mc^2$, e $-V_0 < E < V_0$ quando $V_0 \gg mc^2$. Por outro lado, para $V_0 < -mc^2$ obtemos $E \approx 0$ quando $V_0 \approx -mc^2$, e $-|V_0| < E < |V_0|$ quando $|V_0| \gg mc^2$.

Nas Figuras 5.9 e 5.10 mostramos o comportamento das energias como uma função de V_0 e α , respectivamente. Da Figura 5.9 pode-se enxergar que todos os níveis de energia emergem do continuum de energia negativa de modo que é plausível identificar estes níveis como níveis de antipartículas, mesmo que para um V_0 dado alguns níveis possam ter energia positiva. Entretanto, da Figura 5.10 pode-se enxergar que os níveis de energia desaparecem um a um quando α incrementa e só o nível de energia mais baixo sobrevém quando $\alpha \rightarrow \infty$. Os níveis de energia mais elevados mergulham no continuum de energia negativa quando α incrementa mas isto não pode ser interpretado como uma produção de pares, visto que temos níveis de antipartícula mergulhando no continuum de antipartículas. Vale a pena notar que para ambas figuras encontramos que o número quântico mais baixo corresponde à mais alta auto-energia, como deve ser para os níveis de energia para as antipartículas. Para $V_0 < -mc^2$ o espectro apresenta um comportamento semelhante mas os níveis de energia emergem do continuum superior e são indentificados como níveis de partículas.

As autofunções de KG e também o componente inferior do espinor de Dirac estão dados por [51] (ver Apêndices B.2 e A)

$$\begin{aligned} \phi = \psi_- = N 2^{a_n} \Gamma\left(a_n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{|\alpha| a_n}{\pi} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+2a_n)}} \\ \times (1-z^2)^{a_n/2} C_n^{(a_n+1/2)}(z) \end{aligned} \quad (5.48)$$

onde $z = \tanh \alpha x$. A constante N é a unidade no problema de KG e escolhida tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} dx (|\psi_+|^2 + |\psi_-|^2) = 1$ no problema de Dirac. Na Figura 5.11 ilustramos o comportamento dos componentes superior e inferior do espinor de Dirac $|\psi_+|^2$ e $|\psi_-|^2$, e a densidade de probabilidade de posição $|\psi|^2 = |\psi_+|^2 + |\psi_-|^2$ e $|\phi|^2$ para $n = 0$. A constante de normalização para o caso de Dirac foi obtida numericamente. Comparando $|\psi_+|^2$ e $|\psi_-|^2$ mostra-se que ψ_+ é suprimido em relação com ψ_- . Este resultado é devido a que temos estados de antipartícula. Enquanto, para $V_0 < -mc^2$ um comportamento semelhante é mostrado para estados de partícula. Além disso, comparando $|\phi|^2$ e $|\psi|^2$ mostramos que as partículas de spin-0 tendem a ser melhor localizadas que as partículas de spin-1/2, os cálculos numéricos para a incerteza na posição produzem $\Delta x = 0.160\lambda_c$ e $\Delta x = 0.179\lambda_c$ (com $m = c = \hbar = 1$ e $V_0 = \alpha = 5$), respectivamente. Como no caso anterior também um aparente paradoxo relacionado com o princípio de incerteza é resolvido com a introdução dos conceitos de massa efetiva e comprimento de onda Compton efetivo.

Em resumo, nos obtivemos as auto-energias e autofunções do problema de uma partícula em potenciais de natureza vetorial e escalar sob a condição $V_t \pm V_s = V_0$. Ainda

que as equações de KG e Dirac apresentam o mesmo espectro de energia suas autofunções são diferentes. Em ambos casos, caso 1 e caso 2, mostramos que as partículas de spin-0 tendem a ser melhor localizadas que as partículas de spin-1/2 e que o espectro consiste de partículas ou antipartículas, dependendo do sinal de V_0 .

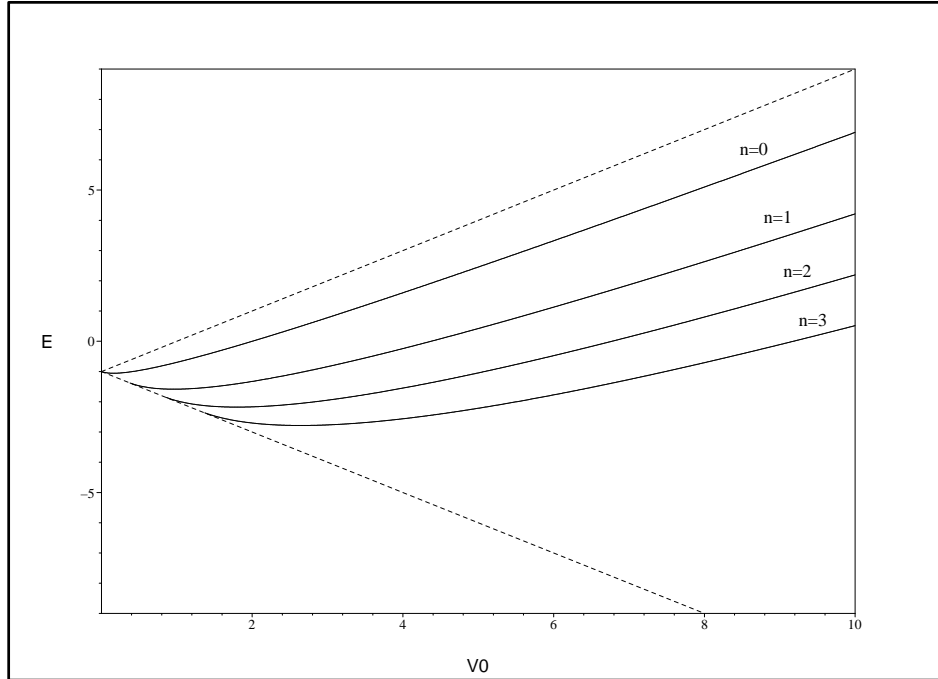


Figura 5.9: Auto-energias de Dirac para os quatro primeiros níveis de energia em função de V_0 para os potenciais $V_t = V_0 \text{sech}^2 \alpha x$ e $V_s = V_0 \tanh^2 \alpha x$. As linhas tracejadas são para $-m_{\text{eff}}c^2$ e $2V_0 - m_{\text{eff}}c^2$ ($m = \hbar = c = \alpha = 1$).

5.5 Estados ligados de férmions em potenciais escalar, vetorial e pseudoescalar do tipo Pöschl-Teller em (1+1) dimensões

Existe um interesse grande em resolver a equação de Dirac com acoplamentos do tipo escalar e vetorial com $V_t = \pm V_s$ ($\Sigma = 0$ ou $\Delta = 0$). O interesse é devido ao fato de explicar a simetria de pseudospin ($\Sigma = 0$) em física nuclear e a simetria de spin na física de mésons ($\Delta = 0$). A simetria de pseudospin pode explicar muitos fenômenos em estrutura nuclear incluindo deformações e superdeformações, momento magnético e bandas idênticas [4, 42, 47].

Atualmente foi discutido em outro contexto em [18], como uma mistura conveniente dos potenciais $V_s = \pm V_t$ é capaz de ligar férmions ou antiférmions. Relacionado a isto, está o fato que no núcleo, a conjugação de carga relaciona a simetria de spin das soluções de estados ligados negativos (antinúcleons) com a simetria de pseudospin das soluções de

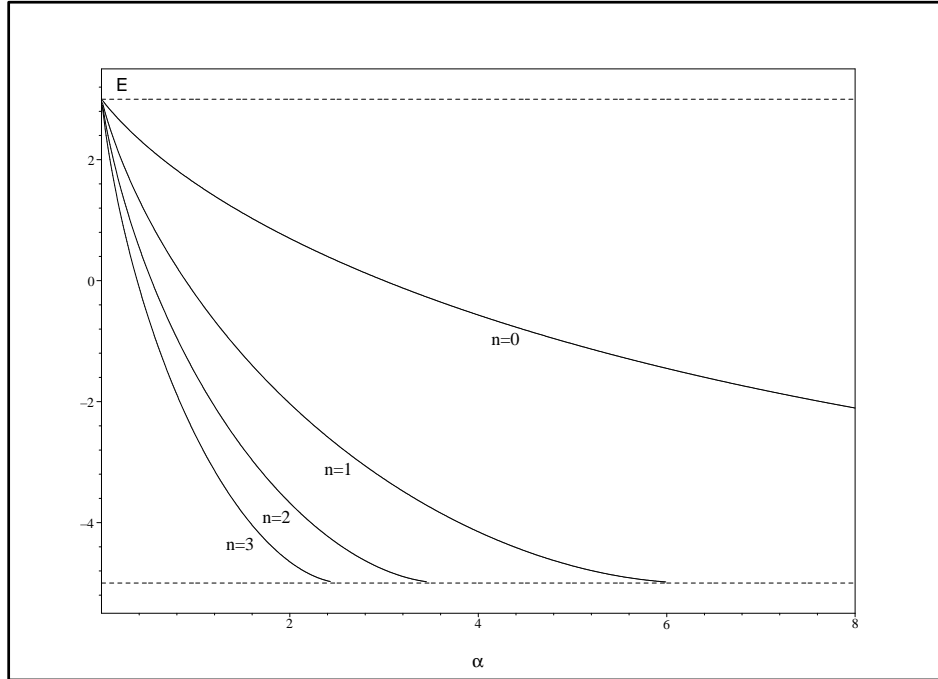


Figura 5.10: Auto-energias de Dirac para os quatro primeiros níveis de energia em função de α para os potenciais $V_t = V_0 \operatorname{sech}^2 \alpha x$ e $V_s = V_0 \tanh^2 \alpha x$. As linhas tracejadas são para $-m_{\text{eff}} c^2$ e $2V_0 - m_{\text{eff}} c^2$ ($m = \hbar = c = 1$ e $V_0 = 4$).

estados ligados positivos (núcleons) [58]. Portanto, cremos que esta conexão entre simetrias de spin e pseudospin obtida a partir da conjugação de carga merece ser estudada. Além disso, a simetria de pseudospin foi mostrada como uma simetria relativística em [38], um enlace disto com a simetria quiral foi sugerido em [27]. Entretanto, até agora não está estabelecida uma clara conexão entre as simetrias de pseudospin e quiral.

Nesta seção tentamos estabelecer uma relação entre simetrias de spin e pseudospin via a conjugação de carga e a transformação quiral. Para isso, solucionamos analiticamente a equação de Dirac com potenciais escalar, vetorial e pseudoescalar tipo Pöschl-Teller em uma dimensão espacial (trabalho apresentado em um recente workshop [24]). Discutimos o espectro para os casos quando $\Delta = 0$ e $\Sigma = 0$. Se o potencial pseudoescalar desaparece, esses casos correspondem respectivamente aos casos de simetrias de spin e pseudospin em três dimensões espaciais. Exploramos todos os possíveis sinais dos potenciais, concentrando nossa atenção às soluções de estados ligados para férmions e também para antiférmions. Comparamos ambos casos $\Delta = 0$ e $\Sigma = 0$ para estabelecer a conexão via conjugação de carga na presença do termo pseudoescalar. Além disso, consideramos o caso de férmions sem massa para estudar a conexão entre as simetrias de spin e pseudospin via uma transformação quiral. Os casos de potenciais escalar e vetorial do tipo Pöschl-Teller [25] e potenciais do tipo *kink* [11], já analisados na literatura, são obtidos como casos particulares.

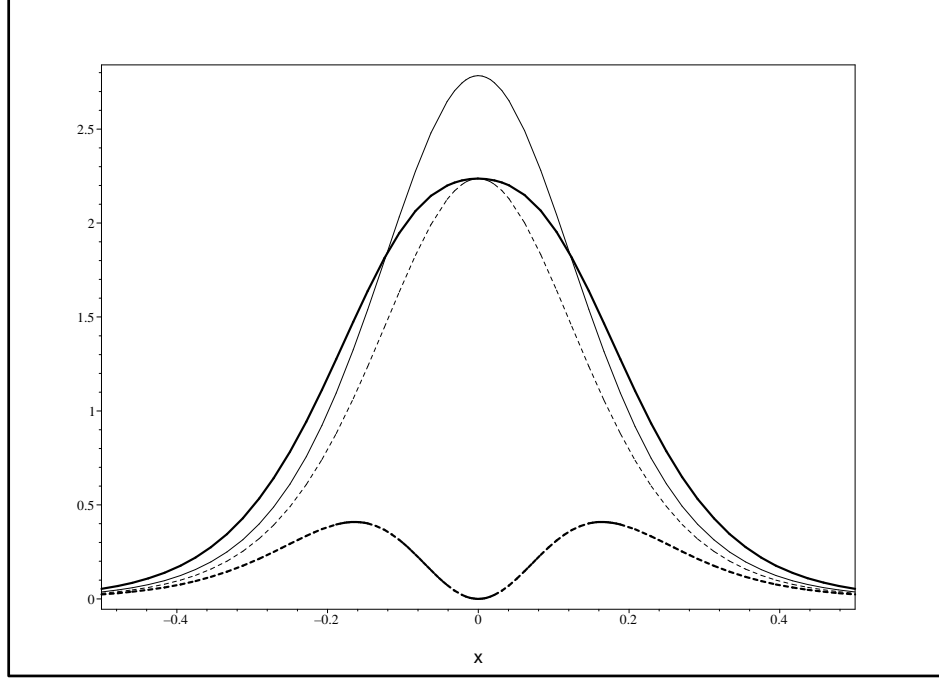


Figura 5.11: $|\psi_+|^2$ (linha tracejada densa), $|\psi_-|^2$ (linha tracejada fina), $|\psi|^2 = |\psi_+|^2 + |\psi_-|^2$ (linha densa) e $|\phi|^2$ (linha fina) para $n = 0$, para os potenciais $V_t = V_0 \operatorname{sech}^2 \alpha x$ e $V_s = V_0 \tanh^2 \alpha x$ ($m = \hbar = c = 1$, $V_0 = \alpha = 5$).

Consideremos os potenciais

$$\Sigma = -\hbar c |\alpha| g_s \operatorname{sech}^2 \alpha x, \quad \Delta = 0, \quad V_p = \hbar c |\alpha| g_p \tanh \alpha x. \quad (5.49)$$

como foi dito na seção 4.3 a transformação quiral troca $\Delta \rightarrow \Sigma$, $\Sigma \rightarrow \Delta$, $m \rightarrow -m$, e $V_p \rightarrow -V_p$. Além disso, γ^5 troca o componentes superior e inferior, obtendo-se que o par de equações transformadas são formalmente as mesmas, deste modo suas soluções têm as mesmas auto-energias. Isto significa que pode-se restringir o estudo para o caso Σ ($\Delta = 0$). O resultado para o caso quando $\Delta = -\hbar c |\alpha| g_s \operatorname{sech}^2 \alpha x$, $\Sigma = 0$, $V_p = \hbar c |\alpha| g_p \tanh \alpha x$ pode ser obtido trocando o sinal de m e de g_p nas expressões relevantes.

O correspondente espinor de Dirac para as soluções isoladas com $E = -mc^2$ são obtidas de (3.53), desafortunadamente, ψ_- não é normalizável e deve ser descartada. Para $E \neq -mc^2$, (3.50) torna-se

$$-\frac{\hbar^2}{2m_{\text{eff}}} \psi_+'' - U_0 \operatorname{sech}^2 \alpha x \psi_+ = E_{\text{eff}} \psi_+, \quad (5.50)$$

onde

$$U_0 = \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m_{\text{eff}}} \left[g_p (g_p - 1) + \frac{g_s}{\hbar c |\alpha|} (E + mc^2) \right], \quad (5.51)$$

$$E_{\text{eff}} = \frac{E^2 - m_{\text{eff}}^2 c^4}{2m_{\text{eff}}}, \quad m_{\text{eff}} = \sqrt{m^2 + \left(\frac{\hbar \alpha g_p}{c} \right)^2} \quad (5.52)$$

A solução para a equação (5.50), com U_0 necessariamente real e positivo, é a solução da equação de Schödinger para o potencial não-relativístico Pöschl-Teller modificado simétrico [36, 43, 51, 54] (ver Apêndice B.2):

$$\psi_+ = N (1 - z^2)^{a_n/2} C_n^{(a_n+1/2)}(z), \quad z = \tanh \alpha x, \quad (5.53)$$

$$\sqrt{m_{\text{eff}}^2 c^4 - E^2} = \hbar c |\alpha| (s - n), \quad (5.54)$$

onde n é um número natural e $a_n = s - n > 0$. N é a constante de normalização, $C_n^{(a)}(z)$ é o polinômio de Gegenbauer de ordem n [1], e

$$s = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8m_{\text{eff}} U_0}{(\hbar c \alpha)^2}} \right). \quad (5.55)$$

Das equações (5.51), (5.52), e (5.54) podemos obter a condição de quantização

$$\begin{aligned} \hbar c |\alpha| \sqrt{1 + 4 \left[g_p (g_p - 1) + \frac{g_s}{\hbar c |\alpha|} (E + mc^2) \right]} \\ - 2 \sqrt{m_{\text{eff}}^2 c^4 - E^2} = \hbar c |\alpha| (2n + 1) \end{aligned} \quad (5.56)$$

En geral não existe requerimento sob os sinais de g_s e g_p , exceto que $U_0 > 0$, e portanto, de (5.51), as auto-energias de Dirac correspondentes às soluções de estados ligados devem estar dentro dos limites

$$E > -mc^2 - \frac{g_p (g_p - 1)}{g_s} \hbar c |\alpha|, \quad \text{for } g_s > 0 \quad (5.57)$$

$$E < -mc^2 + \frac{g_p (g_p - 1)}{|g_s|} \hbar c |\alpha|, \quad \text{for } g_s < 0 \quad (5.58)$$

Para $g_s = 0$, obtemos o potencial tipo *kink*, já analisado em [11] e quando $g_p = 0$ obtemos o potencial misturado escalar-vetorial tipo Pöschl-Teller com simetria de spin também analisado em [25].

Agora, apresentamos a condição de quantização para o caso $\Delta = -\hbar c |\alpha| g_s \text{sech}^2 \alpha x$, $\Sigma = 0$, $V_p = \hbar c |\alpha| g_p \tanh \alpha x$, via transformação quiral:

$$\begin{aligned} \hbar c |\alpha| \sqrt{1 + 4 \left[g_p (g_p + 1) + \frac{g_s}{\hbar c |\alpha|} (E - mc^2) \right]} \\ - 2 \sqrt{m_{\text{eff}}^2 c^4 - E^2} = \hbar c |\alpha| (2N + 1). \end{aligned} \quad (5.59)$$

onde N é o número de nodos (a ordem do polinômio de Gegenbauer) para o componente inferior devido ao fato que a transformação quiral troca o componente superior pelo

inferior e vice-versa, assim que a equação de segunda ordem é para o componente inferior, equação (3.52). O componente superior deve ser obtido da equação de primeira ordem (3.51). Vale a pena notar que para férmions sem massa, o caso $\Delta = 0$ e $\Sigma = 0$ têm o mesmo espectro com o sinal de g_p trocado.

A solução de (5.56) determina as auto-energias do problema relativístico. Esta equação pode ser solucionada numericamente procurando energias nos intervalos (5.57) e (5.58).

Nas Figuras 5.12 e 5.13 mostramos o comportamento das energias para $g_s = 10$ e $g_s = -10$, respectivamente, como uma função de g_p . Na Figura 5.14 mostramos o comportamento das energias para $g_p = 10$ como uma função de g_s .

Como foi dito anteriormente, o caso $\Sigma = 0$ pode ser obtido a partir do caso $\Delta = 0$ via conjugação de carga. Lembrando que a conjugação de carga troca $E \rightarrow -E$, $\Delta \rightarrow -\Sigma$, $V_p \rightarrow -V_p$, ou, troca $g_s \rightarrow -g_s$ e $g_p \rightarrow -g_p$. Isto pode ser enxergado se solucionarmos a equação de auto-energias para $\Sigma = 0$, equação (5.59), para $g_s = 10$ e fazendo a representação gráfica da solução como uma função de g_p . Os resultados estão mostrados na Figura 5.15.

Se comparamos esta figura com a Figura 5.13 ($g_s = -10$) vemos que as figuras são idênticas se trocamos ambos eixos vertical e horizontal, quer dizer, se trocamos o sinal da energia e de g_p , respectivamente. Portanto, a identificação dos níveis de férmions e antiférmions também são trocados, como deve ser, porque estamos aplicando uma transformação da conjugação de carga.

Em resumo, obtivemos as auto-energias e autofunções para o problema de férmions interagindo com um potencial com a mais geral estrutura de Lorentz em uma dimensão espacial do tipo Pöschl-Teller simétrico modificado. Mostramos como obter as soluções de estados ligados do caso $\Sigma = 0$ a partir do caso $\Delta = 0$, via conjugação de carga e transformação quiral. Em particular, usamos a transformação quiral para mostrar que com férmions sem massa e com potencial pseudoescalar zero, as soluções para $\Delta = 0$ e $\Sigma = 0$ têm o mesmo espectro de energia. Estas conclusões não dependem do número de dimensões, porque a equação de auto-energia para $\Delta = 0$ e $\Sigma = 0$ são semelhantes às correspondentes equações em três dimensões.

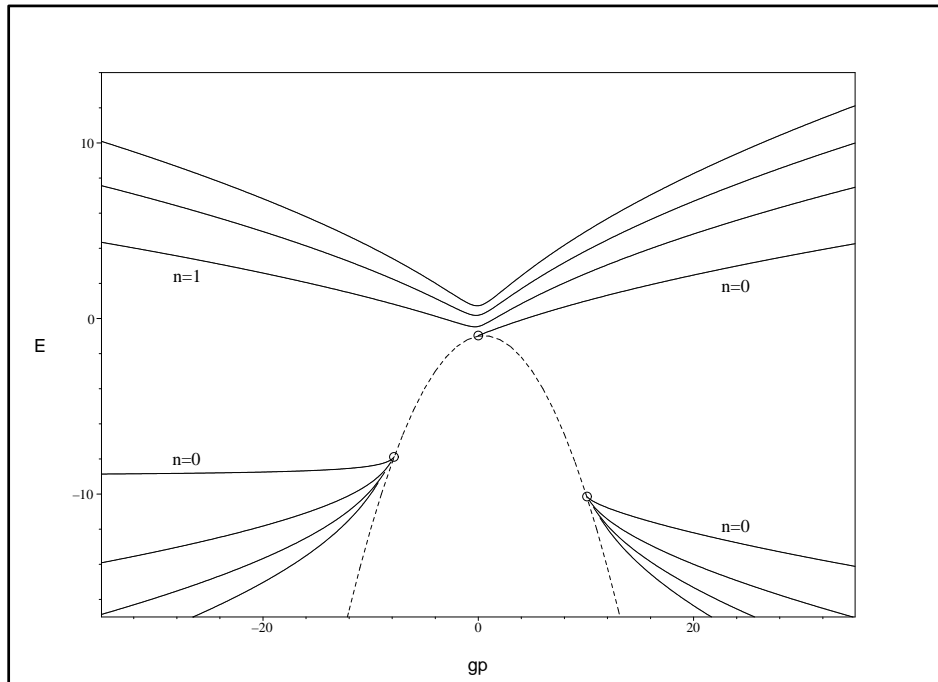


Figura 5.12: Auto-energias de Dirac para os quatro primeiros níveis de energia quando $g_s = 10$ como uma função de g_p para os potenciais $\Sigma = -\hbar c|\alpha|g_s \operatorname{sech}^2\alpha x$, $\Delta = 0$ e $V_p = \hbar c|\alpha|g_p \tanh\alpha x$. O nível $n = 0$ para g_p negativo e energia negativa não foi representada porque corresponde à solução isolada com $E = -mc^2$. A linha tracejada fina corresponde à função $-1 - \frac{g_p}{g_s}(g_p - 1)$ ($m = \hbar = c = \gamma = 1$).

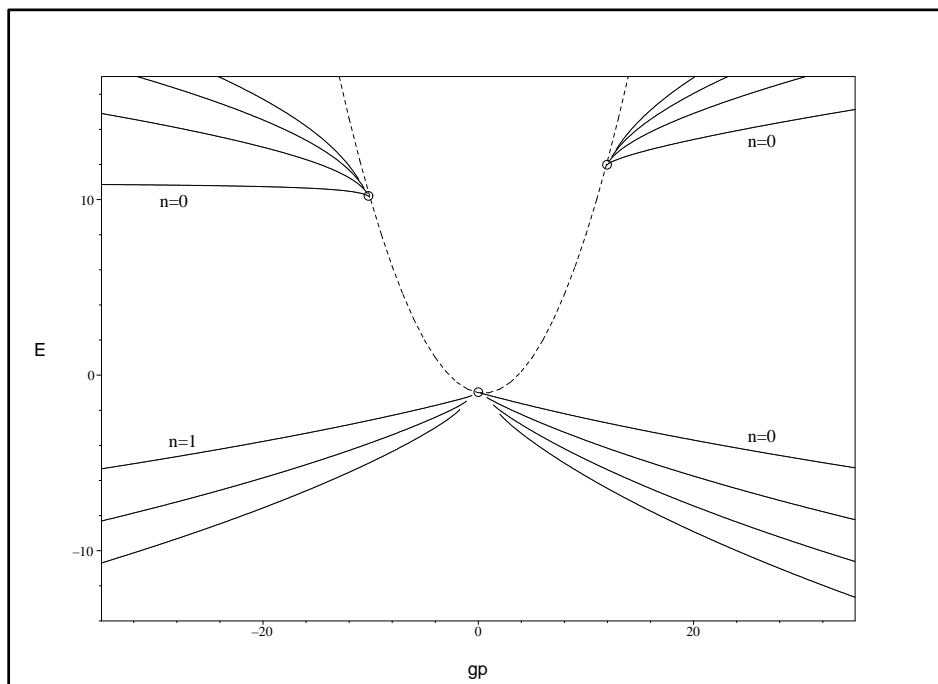


Figura 5.13: Auto-energias de Dirac para os quatro primeiros níveis de energia quando $g_s = -10$ como uma função de g_p para os potenciais $\Sigma = -\hbar c|\alpha|g_s \operatorname{sech}^2\alpha x$, $\Delta = 0$ e $V_p = \hbar c|\alpha|g_p \tanh\alpha x$. A linha tracejada fina corresponde à mesma função como na Figura 5.11 ($m = \hbar = c = \gamma = 1$).

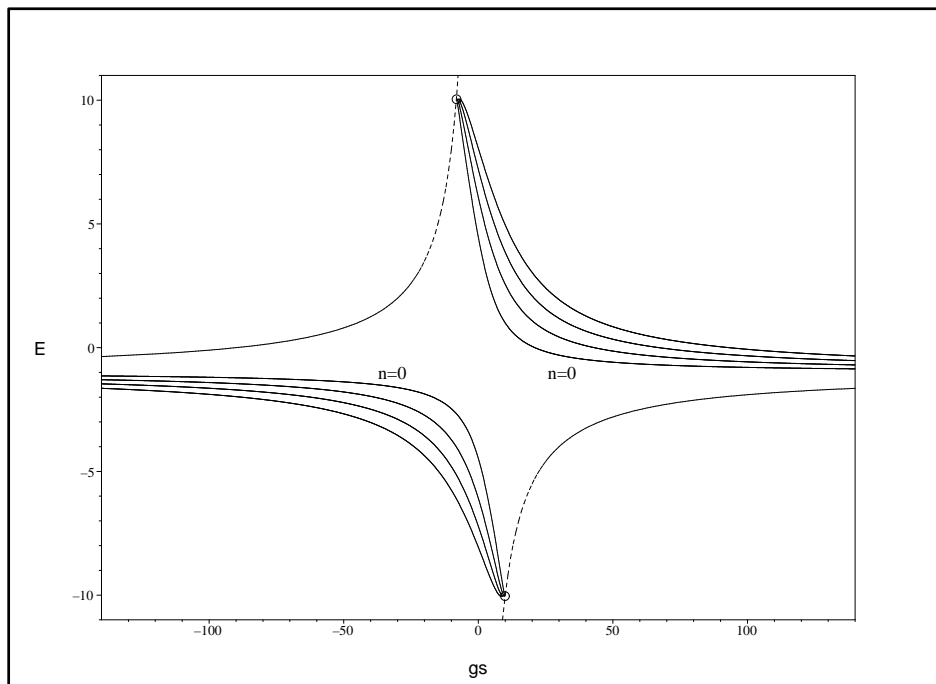


Figura 5.14: Auto-energias de Dirac para os quatro primeiros níveis de energia quando $g_p = 10$ como uma função de g_s para os potenciais $\Sigma = -\hbar c|\alpha|g_s \operatorname{sech}^2 \alpha x$, $\Delta = 0$ e $V_p = \hbar c|\alpha|g_p \tanh \alpha x$. As linhas tracejadas finas são para a função $-1 - \frac{g_p}{g_s}(g_p - 1)$ ($m = \hbar = c = \alpha = 1$).

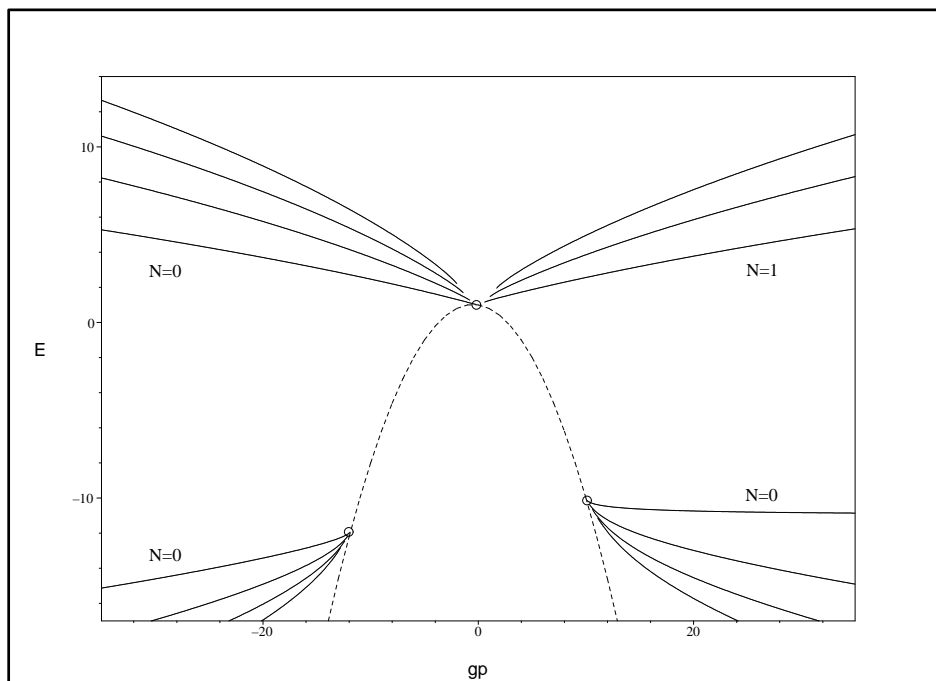


Figura 5.15: Auto-energias de Dirac para os quatro primeiros níveis de energia quando $g_s = 10$ como uma função de g_p para os potenciais $\Delta = -\hbar c|\alpha|g_s \operatorname{sech}^2 \alpha x$, $\Sigma = 0$ e $V_p = \hbar c|\alpha|g_p \tanh \alpha x$. A linha tracejada fina corresponde à função $1 - \frac{g_p}{g_s}(g_p + 1)$. O número quântico N é da solução da equação (5.59) ($m = \hbar = c = \gamma = 1$).

Capítulo 6

Conclusões

A tarefa de obter soluções que apresentam estados ligados para as equações de Dirac e KG para diferentes tipos de acoplamentos e formas funcionais para os potenciais foi completada. Foi mostrado que por meio da redução espacial da equação de Dirac a projeção de spin é uma constante de movimento e devido a isso a equação de Dirac em três dimensões espaciais é equivalente a duas equações acopladas em uma dimensão espacial. Além disso, foi mostrado que a estrutura de Lorentz para os potenciais escalar e vetorial mantém-se intacta mas o potencial tensorial torna-se pseudoescalar.

Foram estudadas as simetrias das equações relativísticas e mostrou-se que são importantes porque podem ser utilizadas para facilitar nossa tarefa de encontrar soluções para estas equações relativísticas.

A equação de Dirac para férmions com um potencial pseudoescalar tangente trigonométrico é um problema intrinsecamente relativístico, o espectro é simétrico em torno a $E = 0$ e é capaz de localizar o férmion numa região arbitrariamente pequena sem a produção de pares partícula-antipartícula, quer dizer, que o princípio de incerteza é inalterado se utilizamos os conceitos de massa efetiva e comprimento de onda Compton efetivo. O potencial não admite estados de espalhamento e, exceto pela solução $E = -mc^2$, apresenta um *gap* espectral maior que $2m_{\text{eff}}c^2$. A solução isolada quebra a simetria dos níveis de energia em torno de $E = 0$ exibida pelas soluções do problema de Sturm-Liouville, e o correspondente espinor de Dirac tem apenas um componente diferente de zero. Para férmions sem massa, exceto para $E = 0$, o *gap* espectral é maior que $2\sqrt{3}\hbar c|\gamma|$ e a hamiltoniana de Dirac anticomuta com σ_3 de tal maneira que as soluções de auto-energias positivas e negativas podem ser *mapeadas* via a operação $\psi_{-E} = \sigma_3\psi_E$. Como foi mencionado no princípio da Seção 5.2, o acoplamento magnético anômalo torna-se um acoplamento pseudoescalar quando o férmion movimenta-se em uma direção. A interação magnética anômala tem a forma $-i\mu\beta\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\phi(r)$, onde μ é o momento magnético anômalo em unidades de magnéton de Bohr e ϕ é o potencial elétrico, quer dizer, o componente temporal do potencial vetor [57]. Em uma dimensão espacial a interação magnética anômala torna-se $\sigma_2\mu\phi'$, então pode-se supor que o potencial tangente trigonométrico produz um potencial

elétrico proporcional a $\ln(\cos \gamma x)^g$.

A equação de Dirac para férmions com uma mistura conveniente de potenciais de natureza escalar e vetorial ($V_t = V_s$) tipo Pöschl-Teller simétrico modificado é um problema que apresenta soluções de estados ligados, o espectro existe só para partículas e converte-se num potencial delta de Dirac como limite. Notamos da Figura 5.3 que os níveis de energias para partículas emergem de $E = mc^2$, eles podem ter valores negativos mas não mergulham no continuum inferior ($E = -mc^2$). Isto pode ser interpretado como um incremento da energia efetiva para a produção de pares partícula-antipartícula, devido ao fato que o potencial escalar acopla-se à massa do férmion e alterando seu valor (Seção 4.4).

Mostrou-se que a equação de Dirac apresenta o mesmo espectro de energia com a equação de KG quando os potenciais de natureza escalar e vetorial estão sujeitos à condição $V_t \pm V_s = V_0$ ou $\Sigma = V_0$ e $\Delta = V_0$. Ainda que as equações de KG e Dirac apresentam o mesmo espectro de energia suas autofunções são diferentes. Em ambos casos, caso 1 (funções trigonométricas) e caso 2 (funções hiperbólicas), mostramos que as partículas de spin-0 tendem a ser melhor localizadas que as partículas de spin-1/2 e que o espectro consiste de partículas ou antipartículas, dependendo do sinal de V_0 . Além disso, também um aparente paradoxo relacionado com o princípio de incerteza (como no caso do potencial pseudoescalar puro) é resolvido com a introdução dos conceitos de massa efetiva e comprimento de onda Compton efetivo.

Por último foi estudado a equação de Dirac com potenciais com a estrutura de Lorentz mais geral em uma dimensão espacial do tipo Pöschl-Teller simétrico modificado, o espectro consiste de partículas e antipartículas. Foi mostrado como obter soluções de estados ligados para o caso $\Sigma = 0$ a partir do caso $\Delta = 0$, via conjugação de carga e transformação quiral, independentemente do número de dimensões espaciais porque a equação de auto-energia para $\Delta = 0$ e $\Sigma = 0$ são semelhantes às correspondentes equações em três dimensões.

A estratégia esboçada nesta dissertação pode ser adotada para a análise dos estados ligados de férmions em potenciais coulombianos blindados. A propósito, uma análise preliminar desse problema para férmions em potenciais coulombianos blindados foi apresentada em um recente workshop [23]. Atualmente estamos aprofundando a análise e posteriormente divulgaremos os resultados.

Apêndice A

Polinômios de Gegenbauer e polinômios associados de Legendre

Os polinômios de Gegenbauer $C_n^{(\lambda)}(x)$ são soluções da equação diferencial ordinária de segunda ordem (equação diferencial ultrasférica) para n inteiro

$$(1 - x^2) y'' + (2\lambda + 1) xy' + n(n + 2\lambda) y = 0, \quad \text{para } y(x) = C_n^{(\lambda)}(x) \quad (\text{A.1})$$

Esses polinômios são ortogonais no intervalo $(-1, 1)$, com relação à função peso $w(x) = (1 - x^2)^{\lambda-1/2}$

$$\int_{-1}^1 w(x) C_n^{(\lambda)}(x) C_m^{(\lambda)}(x) dx = \frac{\pi 2^{(1-2\lambda)} \Gamma(n+2\lambda)}{(n+\lambda) \Gamma^2(\lambda) \Gamma(n+1)} \delta_{mn}, \quad \text{para } \lambda > -1/2 \quad (\text{A.2})$$

Esses polinômios também são obtidos pela função geratriz

$$\frac{1}{(1 - 2xt + t^2)^\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(\lambda)}(x) t^n \quad (\text{A.3})$$

Os três primeiros polinômios de Gegenbauer são

$$C_0^{(\lambda)}(x) = 1 \quad (\text{A.4})$$

$$C_1^{(\lambda)}(x) = 2\lambda x \quad (\text{A.5})$$

$$C_2^{(\lambda)}(x) = -\lambda + 2\lambda(1 + \lambda)x^2 \quad (\text{A.6})$$

Os polinômios de Gegenbauer satisfazem as seguintes relações de recorrência

$$2\lambda(1 - x^2)C_{n-1}^{(\lambda+1)}(x) = (2\lambda + n - 1)C_{n-1}^{(\lambda)}(x) - nxC_n^{(\lambda)}(x) \quad (\text{A.7})$$

$$= (n + 2\lambda)x C_n^{(\lambda)}(x) - (n + 1)C_{n+1}^{(\lambda)}(x) \quad (\text{A.8})$$

$$(1 - x^2) \frac{d}{dx} C_n^{(\lambda)}(x) = -nxC_n^{(\lambda)}(x) + (n + 2\lambda - 1)C_{n-1}^{(\lambda)}(x) \quad (\text{A.9})$$

Podemos definir aos polinômios de Gegenbauer em termos dos polinômios associados de Legendre

$$C_n^{(\lambda)}(x) = \frac{\Gamma(\lambda + 1/2)\Gamma(2\lambda + n)}{n!\Gamma(2\lambda)} \left[\frac{1}{4}(x^2 - 1) \right]^{1/4 - \lambda/2} P_{n+\lambda-1/2}^{1/2-\lambda}(x) \quad (\text{A.10})$$

para $\lambda \neq 0$.

Os polinômios associados de Legendre $P_l^m(x)$ são soluções da equação diferencial ordinária de segunda ordem para l inteiro não-negativo e $m = 0 \dots l$

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0, \quad \text{para } y(x) = P_l^m(x) \quad (\text{A.11})$$

O polinômio associado de Legendre para m negativo esta dado por

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \quad (\text{A.12})$$

Esses polinômios são ortogonais no intervalo $(-1, 1)$, com respeito a l com relação à função peso $w(x) = 1$

$$\int_{-1}^1 w(x) P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'} \quad (\text{A.13})$$

e no intervalo $(-1, 1)$ com respeito a m com relação à função peso $(1-x^2)^{-1}$

$$\int_{-1}^1 w(x) P_l^m(x) P_{l'}^{m'}(x) dx = \frac{(l+m)!}{m(l-m)!} \delta_{mm'} \quad (\text{A.14})$$

Os polinômios associados de Legendre satisfazem a seguinte relação de recorrência

$$(l-m)P_l^m(x) = x(2l-1)P_{l-1}^m(x) - (l+m-1)P_{l-2}^m(x) \quad (\text{A.15})$$

Apêndice B

Potenciais exatamente solúveis na mecânica quântica não-relativística

A equação de Schrödinger estacionária numa dimensão espacial pode ser escrita como

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (\text{B.1})$$

o domínio da variável independente x pode ser especificado para cada potencial em particular. Apresentamos as soluções exatas desta equação para o caso do potencial Pöschl-Teller.

B.1 Potencial Pöschl-Teller simétrico

$$V(x) = \lambda(\lambda - 1)U_0 \tan^2 z, \quad |x| \leq \pi/(2a), \quad \lambda > 1 \quad (\text{B.2})$$

$$z \equiv ax, \quad U_0 = \hbar^2 a^2 / (2m) \quad (\text{B.3})$$

as autofunções normalizadas em termos dos polinômios associados de Legendre P_m^l são

$$\psi_n = \sqrt{a(n + \lambda) \frac{\Gamma(2\lambda + n)}{\Gamma(n + 1)}} (\cos z)^{1/2} P_{n+\lambda-1/2}^{1/2-\lambda}(\text{sen} z) \quad (\text{B.4})$$

e as auto-energias dadas por

$$E_n = U_0 (2n\lambda + n^2 + \lambda) \quad (\text{B.5})$$

com $n = 0, 1, 2, \dots$

B.2 Potencial Pöschl-Teller simétrico modificado

$$V(x) = -V_0 \operatorname{sech} z, \quad V_0 > 0, \quad z \equiv ax \quad (\text{B.6})$$

as autofunções normalizadas em termos dos polinômios associados de Legendre P_m^l são

$$\psi_n = \sqrt{\frac{a(s-n)\Gamma(2s-n+1)}{\Gamma(n+1)}} P_s^{n-s} \quad (\text{B.7})$$

onde

$$s = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4V_0}{U_0}} \right), \quad U_0 = \hbar^2 a^2 / (2m) \quad (\text{B.8})$$

e as auto-energias dadas por

$$E_n = -U_0 (s-n)^2 \quad (\text{B.9})$$

com $n = 0, 1, 2, \dots < s$

Referências Bibliográficas

- [1] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. Handbook of Mathematical Functions. Toronto: Dover, 1965.
- [2] ALBERTO, P. et al. Isospin Asymmetry in the pseudospin dynamical symmetry. Physical Review Letters, v. 86, n. 22, p. 5015-5018, 2001.
- [3] ALBERTO, P. et al. Pseudospin symmetry as a relativistic dynamical symmetry in the nucleus . Physical Review C, v. 65, n. 3, p. 34307, 2002.
- [4] BOHR, A.; HAMAMOTO, I.; MOTTELSON, B. R. Pseudospin in rotating nuclear potentials. Physica Scripta, v. 26, n. 4, p. 267-272, 1982.
- [5] BRAUN, O. M.; KIVSHAR, Y. S. The Frenkel-Kontorova Model: Concepts, Methods, and Applications. Berlin: Springer, 2004.
- [6] CASTRO, A. S.; FRANKLIN, J. Exact solutions of the Dirac equation for modified Coulombic potentials. International Journal of Modern Physics A, v. 15, n. 27, p. 4355-4360, 2000.
- [7] CASTRO, A. S.; PEREIRA, W. G. Confinement of neutral fermions by a pseudoscalar double-step potential in 1+1 dimensions. Physics Letters A, v. 308, p. 131-134, 2003.
- [8] CASTRO, A. S. Bound states by a pseudoscalar Coulomb potential in one-plus-one dimensions. Physics Letters A, v. 318, p. 40-47, 2003.
- [9] CASTRO, A. S. Bound states of the Dirac equation for a class of effective quadratic plus inversely quadratic potentials. Annals of Physics, v. 311, p. 170-181, 2004.
- [10] CASTRO, A. S. Bounded solutions of neutral fermions with a screened Coulomb potential. Annals of Physics, v. 320, p. 56-70, 2005.
- [11] CASTRO, A. S.; HOTT, M. Trapping neutral fermions with kink-like potentials. Physics Letters A, v. 351, p. 379-383, 2006.

- [12] CASTRO, A. S. The preemptory influence of a uniform background for trapping neutral fermions with an inversely linear potential. *International Journal of Modern Physics A*, v. 21, n. 11, p. 2321-2329, 2006.
- [13] CASTRO, A. S. Effects of a mixed vector-scalar screened Coulomb potential for spinless particles. *International Journal of Modern Physics A*, v. 21, n. 25, p. 5141-5159, 2006.
- [14] CASTRO, A. S. et al. Relating pseudospin and spin symmetries through charge conjugation and chiral transformations: The case of the relativistic harmonic oscillator. *Physical Review C*, v. 73, n. 5, p. 054309, 2006.
- [15] CASTRO, A. S. Exact solution for a fermion in the background of a scalar inversely linear potential. *Physics Letters A*, v. 328, p. 289-298, 2004.
- [16] CASTRO, A. S.; HOTT, M. Exact closed-form solutions of the Dirac equation with a scalar exponential potential. *Physics Letters A*, v. 342, p. 53-59, 2005.
- [17] CASTRO, A. S. Confinement of fermions by mixed vector-scalar linear potentials in two-dimensional space-time. *Physics Letters A*, v. 305, p. 100-104, 2002.
- [18] CASTRO, A. S. Bounded solutions of fermions in the background of mixed vector-scalar inversely linear potentials. *Annals of Physics*, v. 316, p. 414-430, 2005.
- [19] CASTRO, A. S. Klein-Gordon particles in mixed vector-scalar inversely linear potentials. *Physics Letters A*, v. 338, p. 81-89, 2005.
- [20] CASTRO, A. S. Confinement of spinless particles by Coulomb potentials in two-dimensional space-time. *Physics Letters A*, v. 346, p. 71-76, 2005.
- [21] CASTRO, L. B.; CASTRO, A. S. Relativistic confinement of neutral fermions with a trigonometric tangent potential. *Journal of Physics A*, v. 40, n. 2, p. 263-270, 2007.
- [22] CASTRO, L. B.; CASTRO, A. S. Confinement of spin-0 and spin-1/2 particles in a mixed vector-scalar coupling with unequal shapes for the potentials. *Physica Scripta*, v. 75, n. 2, p. 170-173, 2007.
- [23] CASTRO, L. B.; CASTRO, A. S. Unified treatment of mixed vector-scalar screened Coulomb potentials for fermions. In: *X Hadron Physics, 2007, Florianópolis - Brazil*.
- [24] CASTRO, L. B.; CASTRO, A. S.; HOTT, M. B. Relativistic effects of mixed vector-scalar-pseudoscalar potentials for fermions in 1+1 dimensions. In: *X Hadron Physics, 2007, Florianópolis - Brazil*.

- [25] CASTRO, L. B.; CASTRO, A. S.; HOTT, M. B. Bounded solutions of fermions in the background of mixed vector-scalar Pöschl-Teller-like potentials. *Europhysics Letters*, v. 77, n. 2, p. 20009, 2007.
- [26] CHEN, T. S. Pseudospin symmetry in relativistic framework with harmonic oscillator potential and Woods-Saxon potential. *Chinese Physics Letters*, v. 20, n. 3, p. 358-361, 2003.
- [27] COHEN, T. D.; FURNSTAHL, R. J.; GRIEGEL, D. K. From QCD sum rules to relativistic nuclear physics. *Physical Review Letters*, v. 67, n. 8, p. 961-964, 1991.
- [28] COOPER, F. et al. Supersymmetry and the Dirac equation. *Annals of Physics*, v. 187, p. 1-28, 1988.
- [29] COUTINHO, F. A. B.; NOGAMI, Y. Conditions for the existence of bound states of a Dirac particle in one dimension. *Physics Letters A*, v. 124, p. 211-214, 1987.
- [30] COUTINHO, F. A. B.; NOGAMI, Y.; TOYAMA, F. M. General aspects of the bound-state solutions of the one-dimensional Dirac equation. *American Journal of Physics*, v. 56, n. 10, p. 904-907, 1988.
- [31] DIAZ, J. I. et al. The supersymmetric modified Pöschl-Teller and delta well potentials. *Journal of Physics A*, v. 32, n. 48, p. 8447-8460, 1999.
- [32] DOMÍNGUEZ, A. F.; MACIÁ, E. Bound states and confining properties of relativistic point interaction potentials. *Journal of Physics A*, v. 22, n. 10, p. L419, 1989.
- [33] DOMÍNGUEZ, A. F. Dirac particles in the potential $1/|x|$. *American Journal of Physics*, v. 58, p. 886, 1990.
- [34] DUTRA, A. S.; CHEN, G. One some classes of exactly-solvable Klein-Gordon equations. *Physics Letters A*, v. 349, p. 297-301, 2006.
- [35] DUTRA, A. S.; SHENG, J. C. Classes of exact Klein-Gordon equations with spatially dependent masses: Regularizing the one-dimensional inversely linear potential. *Physics Letters A*, v. 352, p. 484-487, 2006.
- [36] FLÜGGE, S. *Practical Quantum Mechanics*. Berlin: Springer-Verlag, 1999.
- [37] GINOCCHIO, J. N.; LEVIATAN, A. On the relativistic foundations of pseudospin symmetry in nuclei. *Physics Letters B*, v. 425, p. 1-5, 1998.
- [38] GINOCCHIO, J. N. Pseudospin as a relativistic symmetry , v. 78, p. 436-439, 1997.
- [39] GINOCCHIO, J. N. A relativistic symmetry in nuclei. *Physics Reports*, v. 315, p. 231-240, 1999.

- [40] GOLDMAN, I. I.; KRIVCHENKOV, V. D. Problems in Quantum Mechanics. London: Pergamon Press, 1961.
- [41] GUMBS, G.; KIANG, D. The relativistic one-dimensional square potential. American Journal of Physics, v. 54, p. 462, 1986.
- [42] GUO, J. Y.; FANG, X. Z.; XU, F. X. Pseudospin symmetry in the relativistic harmonic oscillator. Nuclear Physics A, v. 757, p. 411-421, 2005.
- [43] LANDAU, L.; LIFSHITZ, E. M. Quantum Mechanics. New York: Pergamon Press, 1958.
- [44] LISBOA, R. et al. Pseudospin symmetry and the relativistic harmonic oscillator. Physical Review C, v. 69, n. 2, p. 24319, 2004.
- [45] LUCHA, W. et al. Bound states of quark. Physics Reports, v. 200, p. 127-240, 1991.
- [46] MAO, G. Effect of tensor couplings in a relativistic Hartree approach for finite nuclei. Physical Review C, v. 67, n. 4, p. 44318, 2003.
- [47] NAZAREWICZ, P. J. et al. Natural-parity states in superdeformed bands and pseudo SU(3) symmetry at extreme conditions. Physical Review Letters, v. 64, n. 14, p. 1654-1657, 1990.
- [48] NIETO M. M.; SIMMONS, L. M. Coherent States for General Potentials. Physical Review Letters, v. 41, n. 4, p. 207-210, 1978.
- [49] NIETO M. M.; SIMMONS, L. M. Coherent states for general potentials. II. Confining one-dimensional examples. Physical Review D, v. 20, n. 6, p. 1332-1341, 1979.
- [50] NIETO, M. M. Position-momentum uncertainty products for exactly solvable potentials. Physical Review A, v. 20, n. 3, p. 700-705, 1979.
- [51] NIETO, M. M. Exact wave-function normalization constants for the $B_0 \tanh z - U_0 \cosh^{-2} z$ and Pöschl-Teller potentials. Physical Review A, v. 17, n. 4, p. 1273-1283, 1978.
- [52] NOGAMI, Y.; TOYAMA, F. M. Supersymmetry aspects of the Dirac equation in one dimension with a Lorentz scalar potential. Physical Review A, v. 47, n. 3, p. 1708-1714, 1993.
- [53] PAULI, W.; WEISSKOPF, V. F. Über die Quantisierung der skalaren relativistischen Wellengleichung. Helvetica Physica Acta, v. 7, p. 709-731, 1934.
- [54] PÖSCHL, G.; TELLER, E. Bemerkungen zur Quantenmechanik des anharmonischen Oszillators. Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei, v. 83, p. 143-151, 1933.

- [55] SEROT, B. D.; WALECKA, J. D. *Advances in nuclear physics*. v. 16. New York: Plenum Press, 1986.
- [56] STRANGE, P. *Relativistic Quantum Mechanics*. United Kingdom: Cambridge University Press, 1998.
- [57] THALLER, B. *The Dirac Equation*. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
- [58] ZHOU, S. G.; MENG, J.; RING, P. Spin symmetry in the antinucleon spectrum. *Physical Review Letters*, v. 91, n. 26, p. 262501, 2003.