

LEONARDO SIMAL MOREIRA

VARIÁVEIS CANÔNICAS NÃO SINGULARES E O MOVIMENTO
ROTACIONAL DE SATÉLITES ARTIFICIAIS

Dissertação apresentada à Faculdade
de Engenharia do Campus de
Guaratinguetá, Universidade
Estadual Paulista, para a obtenção
do título de Mestre em Física, na
área de Dinâmica Orbital e
Planetologia.

Orientador: Profa. Dra. Maria Cecília F.P.S. Zanardi

Guaratinguetá
2006

S588v Simal Moreira, Leonardo
Variáveis canônicas não singulares e o movimento rotacional de satélites artificiais / Leonardo Simal Moreira . – Guaratinguetá : [s.n.], 2006
168f. : il.
Bibliografia: f. 160-163

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2006
Orientador: Profa Dra.Maria Cecília F. P. S. Zanardi

1. Satélites artificiais I. Título

CDU 629.783

DADOS CURRICULARES

LEONARDO SIMAL MOREIRA

NASCIMENTO	11.09.1978 – BARRA MANSA / RJ
FILIAÇÃO	Mário Moreira Ilvanide do Vale Simal Moreira
1998/2001	Curso de Graduação – Licenciatura Plena em Matemática Centro Universitário de Barra Mansa – UBM
2005/2006	Curso de Pós-Graduação em Física, nível de Mestrado, na Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista - UNESP

à Sandrinha,
minha eterna e querida amiga.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus. Agradeço pela minha vida, minha inteligência, minha saúde, minha família e meus amigos, e também pela oportunidade de ter prosseguido com meus estudos.

à minha orientadora, *Profa. Dra. Maria Cecília F. P. S. Zanardi*, pela dedicação e paciência em seu trabalho de orientação. Agradeço também pela confiança que sempre depositou em meu trabalho, o que possibilitou que esta dissertação pudesse ser concluída.

aos meus pais *Mário e Ilvanide*, que sempre incentivaram meus estudos, e ao meu irmão *Leandro*. Obrigado, Dona Silvana!

à *Sandra*, que de todas as formas sempre ajudou a iluminar minhas idéias,

ao prof. *Paulo Roberto Furtado Dias*, que por suas conversas ao telefone tantas vezes me devolveu o ânimo em continuar estudando,

ao colega *Alison*, que ajudou nos primeiros passos,

aos colegas da Pós-Graduação, que de alguma forma incentivaram e colaboraram,

às secretárias da Pós-Graduação pela dedicação e alegria no atendimento,

aos demais professores da Pós-Graduação da FEG, que com suas aulas contribuíram com sua experiência ao meu crescimento como estudante,

aos amigos, colegas, alunos, e até aos desconhecidos que acreditaram que esta dissertação seria concluída.

“Para se fazer Matemática, não precisamos enxergar, andar, ter braços ou mesmo corpo. Só precisamos ter espírito, vontade, perseverança e principalmente, convicção na mais bela estrutura da lógica criada pelo homem. Só assim será possível proporcionar conhecimentos à humanidade, fazendo o homem senhor da Terra, dos ares e dos mares. Conseguirá talvez até o absurdo de dar condições ao homem para que ele vá à Lua, a Lua de Deus”.

Leonhard Euler

SIMAL MOREIRA, L. **Variáveis Canônicas Não Singulares e o Movimento Rotacional de Satélites Artificiais**. 2006. 168f. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2006.

RESUMO

A atitude de um satélite artificial representa sua orientação no espaço, de modo que através da atitude pode-se conhecer a orientação espacial do satélite pela relação entre dois sistemas de coordenadas, um deles fixo no corpo do satélite e o outro associado com um sistema de referência inercial. Apesar da atitude ser bem representada por vários conjuntos de variáveis, todos estes apresentam limitações em sua utilização. Focaliza-se neste trabalho um conjunto de variáveis canônicas não singulares, aplicáveis ao movimento rotacional de satélites artificiais. Estas variáveis são úteis para o caso em que o vetor momento angular de rotação coincide com o maior momento principal de inércia do satélite. As equações dinâmicas do movimento rotacional são deduzidas pelo formalismo hamiltoniano e então integradas para a análise do movimento rotacional livre de torques externos. Soluções analíticas aproximadas são obtidas e comparadas com as soluções gerais, representadas em funções elípticas, e com soluções numéricas. A Hamiltoniana média associada ao Torque de Gradiente de Gravidade é também incluída e as equações diferenciais do movimento perturbado são deduzidas em termos das variáveis não singulares. A integração analítica e numérica destas equações permite uma análise qualitativa e quantitativa das variáveis não singulares utilizadas para o movimento rotacional, quando se considera a perturbação provocada pelo Torque de Gradiente de Gravidade. Ao mesmo tempo esta análise aponta para limitações de intervalos de tempo em que algumas soluções devem ser utilizadas. Aplicações são realizadas para satélites com características similares às dos Satélites Brasileiros de Coleta de Dados (SCD1 e SCD2).

PALAVRAS-CHAVE: Satélites artificiais, movimento rotacional, variáveis canônicas não singulares, transformação canônica, torque de gradiente de gravidade.

SIMAL MOREIRA, L. **Non-Singular Canonical Variables and the Rotational Motion of Artificial Satellites**. 2006. 168f. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2006.

ABSTRACT

The attitude of an artificial satellite represents its orientation in the space, in way that through the attitude can be known the spatial orientation of the satellite for the relation between two systems of coordinates, one of them fixed in the satellite and other associate with an Inertial Reference System. Many sets of variables are used to represent the satellite attitude, but some of them present limitations in its use. A set of non-singular canonical variables, applicable to the rotational motion of artificial satellites, is focused in this work. These variables are useful for the case where the rotational angular momentum vector coincides with the biggest principal moment of inertia of the satellite. The dynamic equations of the rotational motion are deduced by the Hamiltonian formalism and then they are integrated for the analysis of the torque-free rotational motion. Approximated analytical solutions are gotten and compared with the general solutions and numerical solutions. The associated mean Hamiltonian to the Gravity Gradient Torque also enclosed and the differential equations of the motion are deduced for the non-singular variables. The analytical and numerical integration of these equations allow a qualitative and quantitative analysis of these non-singular variables, when the disturbance of the Gravity Gradient Torque is considered. At the same time this analysis points to limitations of time intervals where some solutions must be used. Applications are done for the satellite with similar characteristics of the Brazilian Satellites of Collection of Data (SCD1 and SCD2).

KEYWORDS: Artificial satellites, rotational motion, non-singular canonical variables, canonical transformation, gradient gravity torque.

LISTA DE FIGURAS_{Scv}

FIGURA 1 – Significado geométrico da transformação canônica \mathfrak{S}	34
FIGURA 2 – As variáveis de Andoyer (L, G, H, l, g, h)	44
FIGURA 3 – Novas variáveis para o movimento rotacional $(\Psi, \Xi, H; \psi, \xi, h)$	47
FIGURA 4 – Novas variáveis para o movimento rotacional $(\Lambda, \Xi, \Sigma; \lambda, \xi, \sigma)$	51
FIGURA 5 – Comparação das soluções analíticas para a função $\psi(t)$	86
FIGURA 6 – Comportamento de $\Delta\psi$ com o tempo (500s).....	87
FIGURA 7 – Comparação das soluções analíticas para a função $\Xi(t)$ (3600s).....	89
FIGURA 8 – Comparação das soluções analíticas para a função $\Xi(t)$ (500s).....	89
FIGURA 9 – Comportamento de $\Delta\Xi$ com o tempo (500s).....	90
FIGURA 10 – Variação periódica de $\Delta\Xi(t)$ ($1,6 \times 10^6$ s).....	90
FIGURA 11 – Comparação das soluções analíticas para a função $\xi(t)$ (500s)	92
FIGURA 12 – Comparação das soluções analíticas para a função $\xi(t)$ (3600s).....	93
FIGURA 13 – Comportamento de $\Delta\xi$ com o tempo (500s)	93
FIGURA 14 – Variação periódica de $\Delta\xi(t)$ ($1,6 \times 10^6$ s).....	94
FIGURA 15 – Comparação das soluções numérica e analítica para $\psi(t)$	96
FIGURA 16 – Comparação das soluções numérica e analítica para $\Xi(t)$	97
FIGURA 17 – Comparação das soluções numérica e analítica para $\xi(t)$	98
FIGURA 18 – Comportamento de $\Delta h = h_{TGG} - h_{MRLTE}$, $J = 0$ (500s)	126
FIGURA 19 – Comparação entre as soluções obtidas para $H(t)$ no MRLTE e considerando-se a influência do TGG, $J = 0$ (500s).....	127
FIGURA 20 – Comportamento de $\Delta H = H_{TGG} - H_{MRLTE}$, $J = 0$ (500s).....	128
FIGURA 21 – Comparação entre as soluções obtidas para $H(t)$ no MRLTE e considerando-se a influência do TGG, $J = 0$ (2×10^8 s)	128
FIGURA 22 – Comportamento de $\Delta H = H_{TGG} - H_{MRLTE}$, $J = 0$ (2×10^8 s).....	129
FIGURA 23 – Comparação entre as soluções obtidas para $\psi(t)$ no MRLTE e considerando-se a influência do TGG, $J = 0$ (500s).....	130

FIGURA 24 – Comportamento de $\Delta\psi = \psi_{TGG} - \psi_{MRLTE}$, $J = 0$ (500s)	131
FIGURA 25 – Comparação entre as soluções obtidas para $h(t)$ no MRLTE e considerando-se a influência do TGG, $J \approx 0$ (2000s).....	133
FIGURA 26 – Comportamento de $\Delta h = h_{TGG} - h_{MRLTE}$, $J \approx 0$ (2000s)	134
FIGURA 27 – Comparação entre as soluções obtidas para $H(t)$ no MRLTE e considerando-se a influência do TGG, $J \approx 0$ (2×10^9 s)	135
FIGURA 28 – Comportamento de $\Delta H = H_{TGG} - H_{MRLTE}$, $J \approx 0$ (2×10^9 s).....	136
FIGURA 29 – Comparação entre as soluções obtidas para $\psi(t)$ no MRLTE e considerando-se a influência do TGG, $J \approx 0$ (1000s).....	137
FIGURA 30 – Comportamento de $\Delta\psi = \psi_{TGG} - \psi_{MRLTE}$, $J \approx 0$ (1000s)	138
FIGURA 31 – Comparação entre as soluções obtidas para $\xi(t)$ no MRLTE e considerando-se a influência do TGG, $J \approx 0$ (500s).....	139
FIGURA 32 – Comportamento de $\Delta\xi = \xi_{TGG} - \xi_{MRLTE}$, $J \approx 0$ (500s).....	140
FIGURA 33 – Comparação entre as soluções obtidas para $\Xi(t)$ no MRLTE e considerando-se a influência do TGG, $J \approx 0$ (500s).....	141
FIGURA 34 – Comportamento de $\Delta\Xi = \Xi_{TGG} - \Xi_{MRLTE}$, $J \approx 0$ (500s).....	142
FIGURA 35 – Comparação entre as soluções numérica e analítica para $h(t)$, quando $J = 0$ (500s).....	145
FIGURA 36 – Comparação entre as soluções numérica e analítica para $H(t)$, quando $J = 0$ (500s).....	146
FIGURA 37 – Comparação entre as soluções numérica e analítica para $\psi(t)$, quando $J = 0$ (500s).....	147
FIGURA 38 – Comparação entre as soluções numérica e analítica para $h(t)$, quando $J \approx 0$ (2000s).....	149
FIGURA 39 – Comparação entre as soluções numérica e analítica para $H(t)$, quando $J \approx 0$ (2000s).....	150
FIGURA 40 – Comparação entre as soluções numérica e analítica para $\psi(t)$, quando $J \approx 0$ (1000s).....	151
FIGURA 41 – Comparação entre as soluções numérica e analítica para $\xi(t)$, quando $J \approx 0$ (1000s).....	152
FIGURA 42 – Comparação entre as soluções numérica e analítica para $\Xi(t)$, quando $J \approx 0$ (1000s).....	153

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Dados de um satélite fictício de pequeno porte.....	84
TABELA 2 – Comparação entre as soluções geral e aproximada para $\psi(t)$, em radianos, para um período de 3600s.....	86
TABELA 3 – Comparação entre as soluções geral e aproximada para $\Xi(t)$, em kg.m ² /s, para um período de 3600s.....	88
TABELA 4 – Comparação entre as soluções geral e aproximada para $\xi(t)$, em radianos, para um período de 3600s	91
TABELA 5 – Solução numérica obtida para a variável $\psi(t)$, e suas respectivas diferenças em relação às soluções analíticas geral e aproximada, para um período de 3600s.....	96
TABELA 6 – Solução numérica obtida para a variável $\Xi(t)$, e suas respectivas diferenças em relação às soluções analíticas geral e aproximada, para um período de 3600s.....	97
TABELA 7 – Solução numérica obtida para a variável $\xi(t)$, e suas respectivas diferenças em relação às soluções analíticas geral e aproximada, para um período de 3600s.....	98
TABELA 8 – Dados de um satélite fictício de pequeno porte, com características similares às do satélite brasileiro SCD2.....	125
TABELA 9 – Comparação entre as soluções obtidas para $h(t)$ no MRLTE e considerando-se a influência do TGG, quando $J = 0$	126
TABELA 10 –.Comparação entre as soluções obtidas para $H(t)$ no MRLTE e considerando-se a influência do TGG, quando $J = 0$	129
TABELA 11 – Comparação entre as soluções obtidas para $\psi(t)$ no MRLTE e considerando-se a influência do TGG, quando $J = 0$	131
TABELA 12 – Dados de um satélite fictício de pequeno porte, incluindo os parâmetros orbitais.....	132
TABELA 13 – Comparação entre as soluções obtidas para $h(t)$ no MRLTE e considerando-se a influência do TGG, quando $J \approx 0$	134

TABELA 14 – Comparação entre as soluções obtidas para $H(t)$ no MRLTE e considerando-se a influência do TGG, quando $J \approx 0$	136
TABELA 15 – Comparação entre as soluções obtidas para $\psi(t)$ no MRLTE e considerando-se a influência do TGG, quando $J \approx 0$	138
TABELA 16 – Comparação entre as soluções obtidas para $\xi(t)$ no MRLTE e considerando-se a influência do TGG, quando $J \approx 0$	140
TABELA 17 – Comparação entre as soluções obtidas para $\Xi(t)$ no MRLTE e considerando-se a influência do TGG, quando $J \approx 0$	142
TABELA 18 – Solução numérica obtida para a variável $h(t)$, e sua diferença em relação à solução analítica, quando $J = 0$	145
TABELA 19 – Solução numérica obtida para a variável $H(t)$, e sua diferença em relação à solução analítica, quando $J = 0$	146
TABELA 20 – Solução numérica obtida para a variável $\psi(t)$, e sua diferença em relação à solução analítica, quando $J = 0$	147
TABELA 21 – Solução numérica obtida para a variável $h(t)$, e sua diferença em relação à solução analítica, quando $J \approx 0$	149
TABELA 22 – Solução numérica obtida para a variável $H(t)$, e sua diferença em relação à solução analítica, quando $J \approx 0$	150
TABELA 23 – Solução numérica obtida para a variável $\psi(t)$, e sua diferença em relação à solução analítica, quando $J \approx 0$	151
TABELA 24 – Solução numérica obtida para a variável $\xi(t)$, e sua diferença em relação à solução analítica, quando $J \approx 0$	152
TABELA 25 – Solução numérica obtida para a variável $\Xi(t)$, e sua diferença em relação à solução analítica, quando $J \approx 0$	153

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

- CM - Centro de Massa do Satélite
- MRLTE - Movimento Rotacional Livre de Torques Externos
- SCD1 - 1° Satélite Brasileiro de Coleta de Dados
- SCD2 - 2° Satélite Brasileiro de Coleta de Dados
- TGG - Torque de Gradiente de Gravidade

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Semi-eixo maior da órbita do satélite
a	Parâmetro envolvido nas soluções das equações do movimento rotacional, definido como $a = \frac{C}{A} - 1$
$\text{am}(u, k)$	Função elíptica: amplitude de Jacobi
A, B, C	Momentos principais de inércia do satélite nas direções dos eixos $x = OA$, $y = OB$ e $z = OC$ respectivamente, de forma que $I_x = A, I_y = B, I_z = C$
b	Parâmetro envolvido nas soluções das equações do movimento rotacional, definido como $b = \frac{C}{B} - 1$
c	Constante que figura nos parâmetros P, Q, R, n , tal que $c = 2T_0$, sendo T_0 a energia cinética do movimento no instante inicial
$C_i, \quad i = h, \xi, \psi, \Xi$	Constantes envolvidas na solução das equações do movimento rotacional com TGG
$C_{\psi}^*, \tilde{C}_{\psi}^*$	Constantes envolvidas na solução de $d\psi/dt$, com TGG, quando $J = 0$
$C_{H_i}, \quad i = 1, 2, 3$	Constantes envolvidas na solução das equações do movimento rotacional com TGG
C_I, C_{II}	Constantes envolvidas na solução de $d\xi/dt$, com TGG, quando $J \approx 0$
$\tilde{C}_I, \tilde{C}_{II}, \tilde{C}_{\psi}$	Constantes envolvidas na solução de $d\psi/dt$, com TGG, quando $J \approx 0$
CH_0	Constante de integração da equação dH/dt , com TGG, quando $J \approx 0$
$C\Xi_0$	Constante de integração da equação $d\Xi/dt$, com TGG, quando $J \approx 0$

ζ	Parâmetro envolvido nas soluções aproximadas das equações do movimento rotacional, para $A \neq B$, definido como $\zeta = \frac{C - A}{ACK}$
$\bar{\zeta}$	Parâmetro envolvido nas soluções das equações do movimento rotacional com TGG, definido como $\bar{\zeta} = \frac{\xi\xi_1}{\Xi_0 K}$
$\text{cn}(u, k)$	Função elíptica: cosseno amplitude de Jacobi
$\text{dn}(u, k)$	Função elíptica: delta amplitude de Jacobi
e	Excentricidade da órbita do satélite
$F(\varphi, k)$	Integral elíptica incompleta de primeira espécie, com argumento φ e módulo k
$(L, G, H; l, g, h)$	Conjunto das variáveis canônicas de Andoyer, sendo:
g	Ângulo medido desde o nodo N sobre o plano $X'Y'$ até o nodo M
G	Módulo do momento angular de rotação \vec{S}
h	Ângulo medido sobre o plano XY , desde o eixo inercial OX até o nodo N
H	Projeção de \vec{S} sobre o eixo inercial OZ
l	Ângulo medido a partir do nodo M até o eixo OA , no plano AB
L	Projeção de \vec{S} sobre o eixo OC do sistema de coordenadas fixo no satélite e definido pela direção do momento principal de inércia C
$L_0, G_0, H_0, l_0, g_0, h_0$	Variáveis de Andoyer no instante inicial $t_0 = 0$, definido como aquele em que $l_0 = \frac{\pi}{2}$
h^*_1	Constante envolvida na solução de dh/dt , com TGG, quando $J = 0$
$hh_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$	Constantes envolvidas na solução de dh/dt , com TGG, quando $J \approx 0$

$H^*_i, i = 0,1,2$	Constantes envolvidas na solução de dH / dt , com TGG, quando $J = 0$
$HH_i, i = 1,2,3,4,5,6$	Constantes envolvidas na solução de dH / dt , com TGG, quando $J \approx 0$
i	Inclinação orbital
I	Ângulo formado entre os planos XY e X'Y'
J	Ângulo formado entre os planos X'Y' e AB
$J_i, i = 0,1,\dots,\infty$	Funções de Bessel
k	Módulo elíptico das funções de Jacobi, dado nas soluções das equações do movimento
k'	Módulo elíptico complementar, dado por $k' = \sqrt{1 - k^2}$
K	Parâmetro envolvido nas soluções aproximadas das equações do movimento rotacional, para $A \neq B$, definido como
	$K = \frac{\Psi_0}{C} \sqrt{\frac{AB - AC - BC + C^2}{AB}}$
M	Nodo M , definido pela interseção do plano X'Y' com o plano AB, determinado pelos eixos OA e OB
N	Nodo N , definido pela interseção dos planos XY e X'Y', sendo X'Y' perpendicular a \vec{S}
O	Centro de Massa do satélite
OABC	Sistema de referência com eixos nas direções dos momentos principais de inércia do satélite
OXYZ	Sistema inercial
OX'Y'Z'	Sistema do momento angular de rotação \vec{S} , estando \vec{S} na direção de OZ'
$\{P, Q\}$	Colchete de Poisson de duas variáveis P e Q , definido como

$$\{P, Q\} = \left(\frac{\partial P}{\partial X} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial X} \right) + \left(\frac{\partial P}{\partial Y} \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial Y} \right)$$

P, Q, R, n	Parâmetros envolvidos na solução das equações do movimento rotacional utilizando-se o método de Whittaker
\vec{S}	Vetor momento angular de rotação
S_A, S_B, S_C	Componentes do momento angular de rotação \vec{S} no sistema de eixos principais OABC, sendo $S_A = \Xi$
S_x, S_y, S_z	Componentes do momento angular de rotação \vec{S} no sistema inercial OXYZ, sendo $S_x = \Sigma$
$\text{sn}(u, k)$	Função elíptica: seno amplitude de Jacobi
t	Tempo
T	Hamiltoniana do MRLTE
T_{TGG}	Energia do movimento rotacional quando se considera o TGG, tal que $T_{TGG} = T + \Phi$
u	Argumento das funções elípticas de Jacobi, dado nas soluções das equações do movimento
U	Variável auxiliar, definida como $U = \frac{\sqrt{\Psi^2 - \Xi^2}}{\Xi} \text{sen } \xi$
$(U, V; u, v)$	Variáveis obtidas de $(X, Y; x, y)$ pela aplicação de \mathfrak{S}
$(X, Y; x, y)$	Variáveis a serem transformadas por \mathfrak{S}
α^2	Parâmetro envolvido nas soluções das equações do movimento rotacional, definido como $\alpha^2 = 1 - \gamma^2$
$\hat{\alpha}^2$	Parâmetro envolvido na solução das equações do movimento rotacional em variáveis de Fukushima, definido como $\hat{\alpha}^2 = \frac{k^2}{\alpha^2}$
β	Ângulo auxiliar do grupo de variáveis $(\Psi, \Xi, H; \psi, \xi, h)$, definido pela relação $\Xi = \Psi \text{sen } \beta$
γ	Parâmetro envolvido nas soluções das equações do movimento rotacional, definido como $\gamma = \sqrt{\frac{a}{b}}$

δ	Parâmetro envolvido nas soluções aproximadas das equações do movimento rotacional, para $A = B$, definido como
	$\delta = \sqrt{\Xi_0^2 + \Psi_0^2 \xi^2}$
$\bar{\eta}$	Parâmetro envolvido nas soluções aproximadas das equações do movimento rotacional, para $A = B$, definido como
	$\bar{\eta} = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) \Psi_0^2$
η	Parâmetro envolvido nas soluções aproximadas das equações do movimento rotacional, para $A = B$, definido como
	$\eta = \frac{\bar{\eta}}{\Psi_0} = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) \Psi_0$
θ	Ângulo auxiliar da transformação \mathfrak{S} definido pela relação $Y = X \cos \theta$
Θ	Ângulo auxiliar, definido por $\Theta = \frac{\pi}{2} - \beta$
$(\Lambda, \Xi, \Sigma; \lambda, \xi, \sigma)$	2º grupo de variáveis canônicas de Fukushima, sendo:
Λ	Módulo do vetor momento angular de rotação \vec{S}
Σ	Projeção de \vec{S} no eixo OX
λ	Ângulo medido entre as projeções dos eixos OA e OX no plano perpendicular a \vec{S}
σ	Ângulo entre o plano XZ e o grande círculo conectando OX e \vec{S}
$(\Psi, \Xi, H; \psi, \xi, h)$	1º grupo de variáveis canônicas de Fukushima, sendo:
Ψ	Módulo do vetor momento angular de rotação \vec{S}
Ξ	Projeção de \vec{S} no eixo OA
ψ	Longitude do eixo OA medida sobre o plano perpendicular a \vec{S} , a partir do nodo N

ξ	Ângulo entre o plano AC e o grande círculo conectando o eixo OA e \vec{S}
μ	Constante gravitacional da Terra
ψ^*_1	Constante envolvida na solução de $d\psi/dt$, com TGG, quando $J = 0$
$\psi\psi_i, i = 1,2,3,4,5$	Constantes envolvidas na solução de $d\psi/dt$, com TGG, quando $J \approx 0$
ξ_m	Parâmetro envolvido nas soluções aproximadas das equações do movimento rotacional, para $A = B$, definido como $\xi_m = \frac{\xi_0}{\cos\phi}$
$\xi\xi_i, i = 1,2$	Constantes envolvidas na solução de $d\xi/dt$, com TGG, quando $J \approx 0$
$\Xi\Xi_i, i = 1,2,3,4,5,6$	Constantes envolvidas na solução de $d\Xi/dt$, com TGG, quando $J \approx 0$
$\Pi(\varphi, \alpha^2, k)$	Integral elíptica incompleta de terceira espécie, em que as variáveis $\varphi = \text{am}(u, k)$, α^2 e k são chamadas o argumento, o parâmetro e o módulo, respectivamente.
$\Pi(\varphi, \hat{\alpha}^2, k)$	Integral elíptica incompleta de terceira espécie, com argumento φ , parâmetro $\hat{\alpha}^2$ e módulo k
$\vec{\Pi}$	Diádica de inércia do satélite no sistema de eixos principais, definida pela matriz $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$
ϕ	Ângulo auxiliar da transformação \mathfrak{S} definido pela relação $V = U \text{sen}\phi$
$\bar{\phi}$	Parâmetro envolvido nas soluções aproximadas das equações do movimento rotacional, para $A = B$, definido como $\bar{\phi} = \arctan\left(\frac{\Xi_0}{\Psi_0\xi_0}\right)$

$\bar{\varphi}$	Ângulo auxiliar do grupo de variáveis $(\Psi, \Xi, H; \psi, \xi, h)$, definido pela relação $\Sigma = \Psi \operatorname{sen} \bar{\varphi}$
$\Phi(L, G, H, h)$	Hamiltoniana média do movimento rotacional associada ao TGG, em variáveis de Andoyer
$\Phi(\Psi, \Xi, H, h)$	Hamiltoniana média do movimento rotacional associada ao TGG, em variáveis não singulares de Fukushima
ζ	Variável auxiliar, definida como $\zeta = \frac{\Xi_0 \gamma \operatorname{sn}(u, k)}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2} \operatorname{dn}(u, k)}$
$\Psi_0, \Xi_0, H_0, \psi_0, \xi_0, h_0$	Variáveis de Fukushima do Grupo 1 no instante inicial $t_0 = 0$, definido como aquele em que $\xi_0 = 0$
$\vec{\omega}$	Vetor velocidade de rotação do satélite
$ \vec{\omega} $	Módulo da velocidade de rotação do satélite
$\omega_A, \omega_B, \omega_C$	Componentes da velocidade de rotação do satélite nos eixos OA, OB e OC, respectivamente
Ω	Longitude do nodo ascendente
\mathfrak{S}	Transformação canônica de Fukushima $\mathfrak{S}: (X, Y, x, y) \rightarrow (U, V, u, v)$

SUMÁRIO

DADOS CURRICULARES

DEDICATÓRIA

AGRADECIMENTOS

EPÍGRAFE

RESUMO

ABSTRACT

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LISTA DE SÍMBOLOS

1	INTRODUÇÃO	24
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	27
3	TRANSFORMAÇÃO CANÔNICA DE FUKUSHIMA	33
3.1	A TRANSFORMAÇÃO \mathfrak{S}	33
3.2	PROPRIEDADES DE \mathfrak{S}	38
3.2.1	Casos limites	38
3.2.2	Transformação canônica	40
3.3	NOVOS GRUPOS DE VARIÁVEIS PARA O MOVIMENTO ROTACIONAL.....	43
3.3.1	Sistemas de referência e variáveis de Andoyer	43
3.3.2	Grupo $(\Psi, \mathfrak{E}, H; \psi, \xi, h)$	45
3.3.3	Grupo $(\Lambda, \mathfrak{E}, \Sigma; \lambda, \xi, \sigma)$	49
3.3.4	Comentários	52

4 MOVIMENTO ROTACIONAL LIVRE DE TORQUES EXTERNOS.....	53
4.1 HAMILTONIANA DO MRLTE E EQUAÇÕES DO MOVIMENTO EM VARIÁVEIS DE ANDOYER.....	53
4.2 HAMILTONIANA DO MRLTE E EQUAÇÕES DO MOVIMENTO EM VARIÁVEIS NÃO SINGULARES DE FUKUSHIMA.....	56
4.2.1 Solução das equações do movimento rotacional pela aplicação da transformação \mathfrak{S}	58
4.2.2 Solução das equações do movimento rotacional obtida por integração direta	67
5 SOLUÇÕES PARTICULARES DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO ROTACIONAL LIVRE DE TORQUES EXTERNOS.....	73
5.1 SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES PARA O CASO $J = 0$	73
5.2 SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES PARA O CASO $J \approx 0$	75
5.2.1 Satélite simétrico, com dois momentos principais de inércia iguais ($A=B$)....	75
5.2.2 Satélite com três momentos principais de inércia diferentes.....	81
5.3 COMPARAÇÕES ENTRE AS SOLUÇÕES ANALÍTICAS.....	84
5.3.1 Variável ψ	85
5.3.2 Variável Ξ	88
5.3.3 Variável ξ	91
5.4 SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DO MRLTE.....	95
6 MOVIMENTO ROTACIONAL COM TORQUE DE GRADIENTE DE GRAVIDADE.....	100
6.1 HAMILTONIANA MÉDIA ASSOCIADA AO TGG.....	101
6.2 EQUAÇÕES DO MOVIMENTO ROTACIONAL COM TGG.....	102
6.2.1 Equações para as variáveis angulares.....	103
6.2.2 Equações para as variáveis métricas.....	104

6.3 SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA AS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO ROTACIONAL COM TORQUE DE GRADIENTE DE GRAVIDADE.....	105
6.3.1 Caso particular: $J = 0$	106
6.3.1.1 Integração das equações para as variáveis angulares.....	106
6.3.1.2 Integração das equações para as variáveis métricas.....	108
6.3.2 Caso geral: $J \approx 0$	110
6.3.2.1 Integração das equações para as variáveis angulares.....	111
6.3.2.2 Integração das equações para as variáveis métricas.....	116
6.4 COMPARAÇÃO ANALÍTICA ENTRE MRLTE E TGG.....	123
6.4.1 Comparações analíticas: caso $J = 0$	124
6.4.1.1 Variável h	125
6.4.1.2 Variável H	127
6.4.1.3 Variável ψ	130
6.4.2 Comparações analíticas: caso $J \approx 0$	132
6.4.2.1 Variável h	133
6.4.2.2 Variável H	135
6.4.2.3 Variável ψ	137
6.4.2.4 Variável ξ	139
6.4.2.5 Variável Ξ	141
6.5 SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO COM TGG	143
6.5.1 Soluções numéricas: caso $J = 0$	144
6.5.2 Soluções numéricas: caso $J \approx 0$	148
7 CONCLUSÕES	154
REFERÊNCIAS.....	160
BIBLIOGRAFIA CONSULTADA.....	163
APÊNDICE A – Relações de trigonometria esférica.....	164
APÊNDICE B – Manipulações algébricas necessárias à integração de ψ	166

CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO

A atitude de um satélite artificial representa sua orientação no espaço, de modo que através da atitude pode-se conhecer a orientação espacial do satélite, uma vez que este pode ser considerado um corpo rígido e a atitude ser expressa pela relação entre dois sistemas de coordenadas, um deles fixo no corpo do satélite e o outro associado com um sistema de referência inercial ou algum referencial fixo de interesse, como a Terra.

Várias são as formas de representação de atitude comumente utilizadas, das quais se pode destacar: ângulos de Euler, Quatérnios e variáveis de Andoyer. Cada um desses conjuntos de variáveis é útil e tem aplicação ampla, porém, da mesma forma, cada um deles apresenta limitações.

É justamente das limitações na utilização das variáveis de Andoyer (especificamente, da indefinição das variáveis angulares de Andoyer em certos casos) que surge a idéia da aplicação de um novo conjunto de variáveis, não singulares, idealizadas por Toshio Fukushima e introduzidas no início dos anos 90 (FUKUSHIMA, 1993,1994).

A análise das variáveis canônicas não singulares para o movimento rotacional de satélites artificiais, introduzidas por Fukushima, constitui o objetivo desta dissertação. Tais variáveis, por sua definição, devem ser úteis para o caso em que o vetor momento angular de rotação coincide com o maior momento principal de inércia do satélite (exatamente um dos casos em que não é possível a utilização das variáveis de Andoyer para descrever o movimento rotacional do satélite).

Nesta dissertação, a análise da atitude do satélite artificial deve ser realizada através da dedução e resolução das equações do movimento rotacional livre de torques externos, numa primeira etapa. Com a inclusão da Hamiltoniana média associada ao Torque de Gradiente de Gravidade (TGG), devem ser deduzidas novas equações do movimento, numa segunda etapa, em condições de serem integradas pelo método de aproximações sucessivas. Os resultados assim obtidos podem ser comparados com soluções analíticas e numéricas, de modo a permitir uma análise qualitativa e quantitativa destas novas variáveis não singulares.

O **CAPÍTULO 2** faz um breve resumo dos trabalhos que foram consultados para dar subsídio ao desenvolvimento deste projeto. Dentre vários livros e artigos, alguns diretamente relacionados ao tema central das variáveis não singulares e ao movimento rotacional de satélites artificiais, destacam-se, nesta revisão de bibliografia, justamente aqueles mais significativos e suas respectivas parcelas de contribuição.

No **CAPÍTULO 3** são apresentadas as variáveis não singulares introduzidas por Fukushima, as quais são úteis na representação dos movimentos orbital e rotacional de satélites artificiais, quando existem dificuldades associadas a singularidades em outros conjuntos de variáveis. A transformação matemática \mathfrak{S} geradora dessas novas variáveis é discutida em linhas gerais, e apresentadas suas propriedades mais importantes, inclusive demonstrando-se que tais variáveis são canônicas e os casos limites em que podem ser aplicadas. No que diz respeito ao movimento rotacional, faz-se uma breve apresentação das variáveis de Andoyer, e pela aplicação da citada transformação \mathfrak{S} ao conjunto dessas variáveis, obtém-se novos conjuntos de variáveis canônicas não singulares, de utilidade ao estudo da propagação de atitude de satélites artificiais.

O movimento rotacional livre de torques externos é analisado no **CAPÍTULO 4**. Para este fim, são utilizadas variáveis canônicas não singulares, obtidas pela aplicação da transformação \mathfrak{S} conforme definida no **CAPÍTULO 3**. A Hamiltoniana do problema é determinada em termos das novas variáveis a partir de sua forma em variáveis de Andoyer e as equações do movimento obtidas utilizando-se o formalismo hamiltoniano. A transformação \mathfrak{S} também é utilizada para determinar as soluções das equações do movimento, dadas em termos de integrais e funções elípticas.

No **CAPÍTULO 5** examinam-se alguns casos particulares das equações do movimento rotacional dadas em variáveis não singulares. São casos importantes, pois se aplicam a situações em que o ângulo entre o vetor momento angular de rotação e o eixo na direção do maior momento principal de inércia do satélite é zero ou muito próximo de zero. Embora as soluções aproximadas obtidas para estes casos particulares dependam apenas de funções elementares, mostra-se que elas têm boa concordância com as soluções para o caso geral em termos de integrais e funções elípticas, quando tais soluções são comparadas, analítica e numericamente. Nas

comparações realizadas, são usados dados de um satélite fictício de pequeno porte, com características similares as dos Satélites Brasileiros de Coleta de Dados (SCD1 e SCD2).

A presença de torques externos atuando no movimento rotacional do satélite começa a ser discutida no **CAPÍTULO 6**. Neste capítulo é introduzida a parcela da Hamiltoniana média associada ao Torque de Gradiente de Gravidade, na qual são excluídos termos periódicos em função das variáveis rápidas. A parcela da Hamiltoniana média é apresentada em termos das variáveis de Andoyer e dos elementos orbitais clássicos, e então transformadas por \mathfrak{S} para as variáveis canônicas não singulares de Fukushima. Este procedimento possibilita que as equações dinâmicas sejam obtidas pelo formalismo hamiltoniano, para então serem integradas pelo método de aproximações sucessivas, associado a algumas aproximações simplificadoras. Deste modo, permite-se uma análise da atitude de um satélite artificial em variáveis não singulares, sob a influência do Torque de Gradiente de Gravidade. Assim como no Capítulo 5, as soluções analíticas obtidas no Capítulo 6 para as equações considerando-se o TGG são comparadas com soluções numéricas, considerando-se os casos em que o vetor momento angular de rotação coincide ou aproxima-se do eixo de maior momento principal de inércia do satélite. Estas comparações têm por objetivo mostrar a concordância das soluções obtidas, e permitir a análise qualitativa e quantitativa das variáveis não singulares envolvidas no estudo do movimento rotacional.

Finalmente, o **CAPÍTULO 7** apresenta as conclusões a respeito dos resultados obtidos ao longo desta dissertação de Mestrado, e aponta perspectivas de trabalhos futuros utilizando estes resultados como ponto de partida.

CAPÍTULO 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Muitos trabalhos foram consultados de modo a dar subsídio para o desenvolvimento desta dissertação de Mestrado. Entre livros e artigos, alguns diretamente relacionados ao tema das variáveis não singulares e ao movimento rotacional de satélites artificiais, ou mesmo outros que têm apenas uma tênue ligação com o assunto, todos contribuíram com idéias valiosas para que a dissertação pudesse ser desenvolvida. Este capítulo tem como objetivo justamente relacionar os trabalhos mais significativos e resumir suas parcelas de contribuição.

Um dos mais importantes problemas dos sistemas dinâmicos é resolvido em Whittaker (1961), envolvendo o movimento de um corpo rígido, quando forças externas não agem sobre o corpo. Refere-se especificamente ao movimento do corpo rígido em relação ao seu Centro de Massa (CM), sob a ação de forças cuja resultante passa unicamente através do CM. A direção do vetor momento angular de rotação é coincidente com o eixo OZ, e chamada por Whittaker de “linha invariável”, pois esta direção é invariante no espaço, devido à ausência de forças externas. Deste modo as componentes do momento angular são nulas nos eixos OX e OY. Assim, mostra-se como a orientação espacial do corpo em qualquer instante é especificada no sistema de eixos principais do corpo rígido, dependendo de seus momentos principais de inércia ($I_x = A, I_y = B, I_z = C$). Estas orientações são representadas em termos de ângulos de Euler, considerando que os momentos principais de inércia satisfazem à condição $A > B > C$. A partir das componentes da velocidade de rotação, as equações do movimento são deduzidas e suas soluções apresentadas em termos de funções elípticas. O trabalho de Whittaker é importante no desenvolvimento desta dissertação, pois as equações do movimento nas variáveis que aqui são utilizadas têm a mesma forma que as equações em termos de ângulos de Euler. Em conseqüência, apenas adotando a hipótese diversa $A < B < C$, é possível adaptar as soluções para o caso aqui considerado.

Kinoshita (1972), ao analisar o movimento de um sistema de dois corpos rígidos finitos, um esférico e um triaxial, interagindo unicamente pela força gravitacional mútua, destaca a utilização do movimento rotacional livre de torques e do movimento kepleriano como movimentos rotacional e translacional não perturbados, respectivamente. Na solução do movimento rotacional, introduz variáveis de ação sobre as variáveis de Andoyer, e obtém expansões úteis em termos de integrais elípticas para o problema finito de dois corpos. Kinoshita ainda investiga o movimento rotacional não perturbado de um corpo rígido com ajuda das variáveis de Andoyer, assumindo que o sistema de referência fixo no satélite coincide com o sistema dos eixos principais de inércia.

Em Zanardi (1986) as variáveis de Andoyer são também utilizadas para descrever o movimento rotacional de um satélite artificial, sendo que um estudo do movimento rotacional e translacional acoplado é realizado, com o movimento translacional sendo descrito pelas variáveis de Delaunay. O Torque de Gradiente de Gravidade é introduzido nas equações do movimento. O método de Hori é aplicado para obter uma solução analítica para as equações do movimento. A Hamiltoniana média determinada neste artigo é utilizada no presente trabalho, devendo ser desenvolvida em termos das variáveis não singulares de Fukushima.

Em Kinoshita (1992), o movimento rotacional livre de torques externos é integrado nas variáveis de Andoyer e sua solução expressa em termos de funções e integrais elípticas. Destaca-se, apesar disto, que as expressões analíticas convencionais destas soluções são complicadas e não úteis em geral para implementações numéricas, e que mais recentemente o movimento de pequenos corpos celestes no sistema solar tem sido investigado por integração numérica em lugar das soluções analíticas, já que a implementação numérica das soluções analíticas e exatas apresenta dificuldades. A parte principal deste trabalho dedica-se a desenvolver expansões analíticas simples do movimento livre de torques em torno do maior ou menor momentos de inércia, as quais são válidas até a segunda ordem dos pequenos parâmetros envolvidos. Além disso, incluem apenas funções trigonométricas

e são, portanto, facilmente implementadas para estimar as quantidades essenciais a partir das quais pode-se determinar a rotação do corpo rígido, para o caso do movimento livre de torques. Conclui-se ainda que o movimento rotacional livre de torques externos (MRLTE) é bastante adequado como solução de ordem zero em métodos de perturbação.

Fukushima (1993, 1994) apresenta uma nova transformação de variáveis de dimensão dois para aplicação aos movimentos rotacional e translacional. Expõe as bases geométricas gerais desta transformação e demonstra que ela é canônica, pelo cálculo dos colchetes de Poisson das novas variáveis. Com a sua utilização determinam-se três novos conjuntos de variáveis para o movimento orbital e dois para o movimento rotacional. Estas novas variáveis têm um claro significado físico, geram formas simples para as equações dinâmicas e soluções não perturbadas, além de oferecerem um meio de contornar dificuldades ao se lidar com pequenas quantidades, como será discutido no Capítulo 3. Especificamente, em relação ao movimento rotacional, estas pequenas quantidades estão relacionadas às variáveis de Andoyer. Ainda neste trabalho, as equações e soluções apresentadas por Kinoshita (1972, 1992) para as variáveis de Andoyer são transformadas para as novas variáveis não singulares, casos limites são analisados e apresenta-se uma solução em forma fechada em termos de integrais e funções elípticas. Esta transformação será introduzida no Capítulo 3 desta dissertação.

Deprit (1993) mostra que na transformação proposta por Fukushima (1993,1994) encontra-se uma rotação em três dimensões, e que ela remove singularidades para pequenas excentricidades e/ou pequenas inclinações. Demonstra que a transformação é canônica com a utilização da transformação de Mathieu. Um discreto, porém importante detalhe, é o uso de um programa de computador como auxílio a seus cálculos, mostrando que os processadores eletrônicos podem ter relevante contribuição mesmo em trabalhos de matemática formal. Finalmente, o modelo geométrico através do qual Fukushima justifica sua transformação é revisto na perspectiva da geometria vetorial a fim de remover suas ambigüidades.

Fukushima e Ishizaki (1994a) introduzem um conjunto de elementos para uso em estudos numéricos do movimento de um corpo rígido em torno de seu Centro de Massa. Estes elementos são definidos como os valores iniciais das variáveis de Andoyer modificadas. Um procedimento computacional foi obtido para determinar estes elementos a partir da combinação do vetor momento angular de rotação e um sistema de referência fixo no corpo rígido, que é utilizado para definir a sua orientação. Neste artigo mais uma vez são discutidas as equações e soluções apresentadas anteriormente em Kinoshita (1992) e Fukushima (1993).

Em Fukushima e Ishizaki (1994b) são apresentados algoritmos para a computação de integrais elípticas incompletas de forma geral, além de algumas fórmulas bastante úteis para este trabalho. O algoritmo avalia com eficiência algumas combinações lineares de integrais elípticas incompletas de todos os tipos com grande precisão, o que é bastante proveitoso para calcular numericamente valores e derivadas parciais das integrais elípticas, que são essenciais quando se lida com certos problemas em Mecânica Celeste, incluindo a solução analítica do MRLTE de um corpo rígido.

Em Zanardi (1998) as variáveis não singulares, introduzidas por Fukushima (1993) e por Giacaglia e Jefferys (1971), para o movimento rotacional são analisadas. Estas variáveis mostram-se úteis quando o ângulo J entre o eixo Oz de um sistema de coordenadas fixo no satélite (definido pelas direções dos eixos principais de inércia) e o vetor momento angular de rotação é zero ou muito próximo de zero. Comparam-se as variáveis de Fukushima com outros conjuntos de variáveis não singulares para determinar os benefícios de sua utilização. Com este objetivo, as equações dinâmicas foram derivadas para cada conjunto de variáveis, e foi incluída a Hamiltoniana média associada ao Torque de Gradiente de Gravidade. Soluções analíticas para o MRLTE foram computadas para um satélite simétrico para cada conjunto de variáveis, e comparadas com uma solução numérica. Com a inclusão do Torque de Gradiente de Gravidade, uma solução numérica foi obtida. Uma das conclusões deste trabalho é o fato das variáveis não singulares de Fukushima terem um claro significado geométrico

e físico, embora suas equações dinâmicas sejam mais complexas que as descritas para as variáveis introduzidas por Giacaglia e Jefferys (1971).

Zanardi e Vilhena de Moraes (1999) estudam o movimento rotacional de satélites artificiais considerando torques produzidos pelo Gradiente de Gravidade e pela Pressão da Radiação Solar Direta. Um satélite cilíndrico é considerado e as variáveis utilizadas para descrever o movimento rotacional são as variáveis de Andoyer. Dá-se ênfase aos efeitos seculares e de longo período produzidos por estes torques. A parcela da Hamiltoniana associada ao Torque de Gradiente de Gravidade é apresentada explicitamente em termos das variáveis de Andoyer e das variáveis de Delaunay (que descrevem o movimento translacional). Com a obtenção de soluções analíticas para as equações do movimento, verificou-se a boa concordância destas com as soluções numéricas para o intervalo de tempo considerado.

Pereira (1999) analisa a propagação analítica e numérica do movimento rotacional em variáveis não singulares de Fukushima, considerando o Torque de Gradiente de Gravidade (TGG) e um satélite com dois momentos principais de inércia iguais, com o eixo de rotação em torno ou próximo do maior ou menor eixo de inércia do satélite. A influência do TGG é avaliada com relação ao ângulo entre o eixo de rotação e a direção sol-satélite (Ângulo de Aspecto Solar). Pereira também analisou o movimento rotacional livre de torques externos, utilizando variáveis não singulares e integrais elípticas, considerando que o satélite possui momentos principais de inércia I_x e I_y diferentes.

Zanardi (2005), aprofunda o trabalho de Pereira e analisa a propagação de atitude de satélites artificiais com vários grupos de variáveis não singulares. Apresenta também a Hamiltoniana associada ao TGG em função das variáveis de Andoyer e dos elementos orbitais clássicos, forma esta que foi utilizada para derivar as equações do movimento perturbado para esta dissertação.

Completando esta revisão de bibliografia, é preciso citar sem dúvida alguma a obra de Byrd e Friedman (1971), material indispensável a qualquer trabalho de física matemática em que figuram funções e integrais elípticas de qualquer espécie.

CAPÍTULO 3 TRANSFORMAÇÃO CANÔNICA DE FUKUSHIMA

Neste Capítulo são apresentadas as variáveis não singulares introduzidas por Fukushima (1993, 1994), as quais são úteis na representação dos movimentos orbital e rotacional de satélites artificiais, como no caso em que as variáveis de Andoyer apresentam dificuldades quando os ângulos I e/ou J são próximos de zero. A transformação matemática é discutida em linhas gerais, bem como suas propriedades mais relevantes associadas a esta dissertação. Pela sua aplicação ao conjunto das variáveis canônicas de Andoyer, obtém-se novos conjuntos de variáveis canônicas não singulares para o movimento rotacional, as quais são úteis ao estudo da propagação de atitude de satélites artificiais.

3.1 A TRANSFORMAÇÃO \mathfrak{S}

Considere-se a seguinte transformação no espaço de configuração bidimensional:

$$\mathfrak{S}: (X, Y; x, y) \Rightarrow (U, V; u, v), \quad (3.1)$$

em que:

$$U = X, \quad (3.2)$$

$$V = \sqrt{X^2 - Y^2} \operatorname{sen} y, \quad (3.3)$$

$$u = x + \arctan\left(\frac{Y}{X} \tan y\right), \quad (3.4)$$

$$v = \arctan\left(\frac{\sqrt{X^2 - Y^2}}{Y} \cos y\right). \quad (3.5)$$

Assume-se a condição $|X| \geq |Y|$ para assegurar que as novas variáveis sejam reais.

O significado geométrico da transformação \mathfrak{S} pode ser facilmente compreendido com sua representação em termos de elementos de uma superfície esférica de raio

unitário, de acordo com a Figura 1, e com a introdução do ângulo auxiliar θ , de forma que:

$$Y = X \cos \theta . \quad (3.6)$$

Fukushima (1993) assumiu por simplicidade que $0 \leq \theta \leq \pi/2$, embora tenha destacado que a explanação pudesse ser aplicada ao caso $\theta > \pi/2$. Essas restrições foram rediscutidas por Deprit (1993), ampliando o intervalo de θ , tal que $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, e assumindo que $X > 0$, $U > 0$ e $X^2 - Y^2 \geq 0$, as quais implicam em $X = U$ e $U^2 - V^2 \geq 0$, com as variáveis v e y assumindo valores no intervalo $[0, 2\pi)$, sendo ainda $x \geq 0$ e $u \geq 0$.

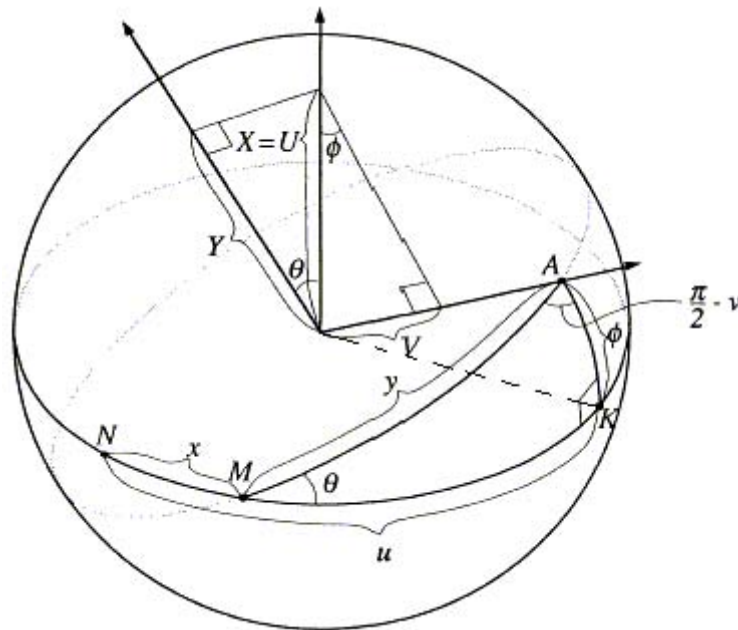


Figura 1: Significado geométrico da transformação canônica \mathfrak{S} , definida em (3.2) – (3.5), com $|X| \geq |Y|$.

Considere-se dois arcos de círculo máximo sobre uma superfície esférica de raio unitário. Sejam esses arcos NM e MA , conforme a Figura 1, e x e y seus respectivos comprimentos. Verifica-se que o ângulo $N\hat{M}A$ é expresso como $\pi - \theta$, sendo θ como definido anteriormente. A projeção do ponto A sobre o círculo máximo que

contém o arco NM será denotada por K . Chamando o arco NK e o ângulo $M\hat{A}K$ por u e $\frac{\pi}{2} - v$, respectivamente, e o arco AK por ϕ , as relações da transformação \mathfrak{S} podem ser obtidas a partir de propriedades de trigonometria esférica aplicadas ao triângulo AMK , e assumindo que $U = X$. Tais propriedades são resumidas no **APÊNDICE A**. De acordo com a Figura 1, o ângulo ϕ é dado por:

$$V = U \operatorname{sen} \phi . \quad (3.7)$$

Da lei dos senos para o triângulo esférico AMK , dada em (A.1):

$$\frac{\operatorname{sen} \phi}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} \hat{K}} , \quad (3.8)$$

e como o ângulo \hat{K} é 90° , obtém-se:

$$\operatorname{sen} \phi = \operatorname{sen} y \operatorname{sen} \theta . \quad (3.9)$$

Utilizando (3.7) em (3.9):

$$V = U \operatorname{sen} y \operatorname{sen} \theta . \quad (3.10)$$

Com a utilização de propriedades de trigonometria, a equação (3.10) pode ser reescrita como:

$$V = \sqrt{U^2 - U^2 \cos^2 \theta} \operatorname{sen} y . \quad (3.11)$$

Substituindo (3.2) e (3.6) em (3.11), obtém-se:

$$V = \sqrt{X^2 - Y^2} \operatorname{sen} y , \quad (3.12)$$

o que demonstra a relação (3.3). Destaca-se que o sinal da variável V é o mesmo que o de $\sin y$, uma vez que $\sqrt{X^2 - Y^2}$ está associada com $U \sin \theta \geq 0$, pois $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e $U \geq 0$.

A fórmula da tangente para o arco MK é dada por (A.2):

$$\tan(u - x) = \tan y \cos \theta \Rightarrow u = x + \arctan(\tan y \cos \theta). \quad (3.13)$$

Levando (3.6) em (3.13), demonstra-se a expressão (3.4).

Para a demonstração da relação (3.5), basta utilizar-se da fórmula da cotangente para o ângulo $\hat{M}AK$, dada em (A.3), a qual fica:

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \sin \phi \cot(u - x) \Rightarrow \tan v = \sin \phi \cot(u - x). \quad (3.14)$$

E pelas fórmulas (3.9) e (3.13):

$$\tan v = \frac{\sin \phi}{\tan y \cos \theta} \Rightarrow \tan v = \frac{\sin y \sin \theta}{\tan y \cos \theta} \Rightarrow v = \arctan(\tan \theta \cos y). \quad (3.15)$$

Observe-se que:

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\cos \theta}, \quad (3.16)$$

sendo que com a utilização de (3.6), a tangente de θ , dada em (3.16), é expressa por:

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{X^2 - Y^2}}{Y}. \quad (3.17)$$

Substituindo (3.17) em (3.15) tem-se que:

$$v = \arctan\left(\frac{\sqrt{X^2 - Y^2}}{Y} \cos y\right), \quad (3.18)$$

completando a demonstração da relação (3.5) e da transformação canônica \mathfrak{S} .

A transformação inversa de \mathfrak{S} pode ser obtida de modo análogo, apenas com o uso de relações da trigonometria esférica para o triângulo AMK , identificando (3.19) – (3.21) respectivamente com (A.4) – (A.6):

$$\cos \phi = \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - v\right)} \Rightarrow \cos \theta = \cos \phi \cos v, \quad (3.19)$$

$$\tan(u - x) = \operatorname{sen} \phi \tan\left(\frac{\pi}{2} - v\right) \Rightarrow \tan(u - x) = \left(\frac{V}{U}\right) \cot v, \quad (3.20)$$

$$\cot y = \cot \phi \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) \Rightarrow \cot y = \frac{\sqrt{U^2 - V^2}}{V} \operatorname{sen} v. \quad (3.21)$$

A partir das quais obtém-se, respectivamente:

$$Y = \sqrt{U^2 - V^2} \cos v, \quad (3.22)$$

$$x = u - \arctan\left(\frac{V}{U} \cot v\right), \quad (3.23)$$

$$y = \arctan\left(\frac{\sqrt{U^2 - V^2}}{V} \operatorname{sen} v\right)^{-1}. \quad (3.24)$$

Com $|U| \geq |V|$, assegura-se que as variáveis são reais. Desta forma, a transformação inversa \mathfrak{S}^{-1} completa-se com:

$$X = U. \quad (3.25)$$

3.2 PROPRIEDADES DE \mathfrak{S}

Esta seção tem como objetivo apresentar de forma resumida algumas propriedades da transformação \mathfrak{S} . Num primeiro momento, mostra-se como as novas variáveis permanecem bem definidas para certos valores limites do ângulo θ . Nestes valores, surgem aparentes singularidades em relação às variáveis de Andoyer, e é este o fato motivador da aplicação de \mathfrak{S} . O caso mais importante a ser analisado é o limite $\theta \rightarrow 0$, no entanto alguma atenção também é dada ao caso $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Em seguida, demonstra-se que as variáveis do movimento obtidas através da transformação \mathfrak{S} são canônicas. Para este fim, são calculados os colchetes de Poisson destas variáveis.

3.2.1 Casos limites

Pela Figura 1, está clara a indefinição das variáveis x e y no caso $\theta \approx 0$, uma vez que o ponto M torna-se indeterminado. Porém, adotando-se novas variáveis (u, ϕ, v) , todas elas permanecem bem definidas mesmo no limite $\theta \rightarrow 0$. Esta afirmativa é confirmada examinando-se as fórmulas de transformação \mathfrak{S} , dadas por (3.3) – (3.5). Com o auxílio do ângulo θ , dado por (3.6), pode-se reescrevê-las como:

$$V = X \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} y, \quad (3.26)$$

$$u = x + \arctan(\cos \theta \tan y), \quad (3.27)$$

$$v = \arctan(\tan \theta \cos y). \quad (3.28)$$

Pode-se demonstrar que (FUKUSHIMA, 1993):

$$\arctan(\cos A \tan B) = B - \arctan\left(\frac{\operatorname{sen} 2B \operatorname{sen}^2(A/2)}{1 - 2 \operatorname{sen}^2(A/2) \operatorname{sen}^2 B}\right), \quad (3.29)$$

e por esta identidade as expressões para u e v ficam:

$$u = x + y - \arctan\left(\frac{\sin 2y \sin^2(\theta/2)}{1 - 2 \sin^2(\theta/2) \sin^2 y}\right), \quad (3.30)$$

$$v = \theta - \arctan\left(\frac{\sin 2\theta \sin^2(y/2)}{1 - 2 \sin^2(y/2) \sin^2 \theta}\right). \quad (3.31)$$

Portanto, no limite $\theta \rightarrow 0$, (V, u, v) permanecem bem definidas como

$$V \approx X\theta \sin y, \quad (3.32)$$

$$u \approx x + y, \quad (3.33)$$

$$v \approx \theta \cos y, \quad (3.34)$$

Estas aproximações estão relacionadas à coincidência de planos, com a variável V se aproximando de zero, como pode ser observado na Figura 1. Representa-se (θ, x, y) em função de (V, u, v) através de:

$$\theta \approx \sqrt{v^2 + \frac{V^2}{U^2}}, \quad (3.35)$$

$$y \approx \arctan \frac{V}{Uv}, \quad (3.36)$$

$$x \approx u - y. \quad (3.37)$$

De forma análoga, no limite $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$, (V, u, v) permanecem bem definidas como

$$V \approx X \sin y, \quad (3.38)$$

$$u \approx x, \quad (3.39)$$

$$v \approx \theta, \quad (3.40)$$

Com essas aproximações, a projeção K do ponto A tende a coincidir com o ponto M , como mostra a Figura 1, para $\theta \approx \pi/2$, e então:

$$\theta \approx v, \quad (3.41)$$

$$y \approx \arcsen \frac{V}{U}, \quad (3.42)$$

$$x \approx u. \quad (3.43)$$

Fica portanto demonstrado que as novas variáveis permanecem bem definidas nos limites $\theta \rightarrow 0$ e $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

3.2.2 Transformação canônica

A transformação \mathfrak{S} é canônica. Para prová-lo, Fukushima (1993) calculou os colchetes de Poisson das novas variáveis $(U, V; u, v)$. O colchete de Poisson de duas variáveis P e Q é definido como função de suas derivadas parciais em relação às antigas variáveis $(X, Y; x, y)$, tal que (LANDAU; LIFCHITZ, 1978):

$$\{P, Q\} = \left(\frac{\partial P}{\partial X} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial X} \right) + \left(\frac{\partial P}{\partial Y} \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial Y} \right). \quad (3.44)$$

As derivadas parciais de $(U, V; u, v)$ em relação a $(X, Y; x, y)$ são calculadas a partir de (3.2) – (3.5) e dadas por:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 1, \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = 0, \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial V}{\partial X} = \frac{X}{\sqrt{X^2 - Y^2}} \text{sen } y, \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{Y}{\sqrt{X^2 - Y^2}} \text{sen } y, \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \sqrt{X^2 - Y^2} \cos y, \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial u}{\partial X} = -\frac{1}{\left(1 + \frac{Y^2}{X^2} \tan^2 y\right)} \frac{Y}{X^2} \tan y, \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial u}{\partial Y} = \frac{1}{\left(1 + \frac{Y^2}{X^2} \tan^2 y\right)} \frac{1}{X} \tan y, \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\left(1 + \frac{Y^2}{X^2} \tan^2 y\right)} \frac{Y}{X} \frac{1}{\cos^2 y}, \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial v}{\partial X} = \frac{1}{\left(1 + \frac{X^2 - Y^2}{Y^2} \cos^2 y\right)} \frac{X}{Y \sqrt{X^2 - Y^2}} \cos y, \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial v}{\partial Y} = -\frac{1}{\left(1 + \frac{X^2 - Y^2}{Y^2} \cos^2 y\right)} \frac{X^2}{Y^2 \sqrt{X^2 - Y^2}} \cos y, \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\left(1 + \frac{X^2 - Y^2}{Y^2} \cos^2 y\right)} \frac{\sqrt{X^2 - Y^2}}{Y} \text{sen } y. \quad (3.60)$$

Desde que $\{U, U\} = \{V, V\} = \{u, u\} = \{v, v\} = 0$ e $\{P, Q\} = -\{Q, P\}$, torna-se necessário avaliar apenas os seguintes seis colchetes de Poisson:

$$\{U, V\} = \left(\frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial X} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial Y} \right), \quad (3.61)$$

$$\{U, u\} = \left(\frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial X} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial Y} \right), \quad (3.62)$$

$$\{U, v\} = \left(\frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial X} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial Y} \right), \quad (3.63)$$

$$\{V, u\} = \left(\frac{\partial V}{\partial X} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial X} \right) + \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial Y} \right), \quad (3.64)$$

$$\{V, v\} = \left(\frac{\partial V}{\partial X} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial X} \right) + \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial Y} \right), \quad (3.65)$$

$$\{u, v\} = \left(\frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial X} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial Y} \right). \quad (3.66)$$

Substituindo as derivadas (3.45) – (3.60) e reagrupando os termos, os resultados finais para os colchetes de Poisson são:

$$\{U, V\} = \{U, v\} = \{V, u\} = \{u, v\} = 0, \quad (3.67)$$

$$\{U, u\} = \{V, v\} = 1. \quad (3.68)$$

Estas relações representam exatamente as condições a que as novas variáveis devem satisfazer para que a transformação \mathfrak{S} seja canônica (LANDAU; LIFCHITZ, 1978).

3.3 NOVOS GRUPOS DE VARIÁVEIS PARA O MOVIMENTO ROTACIONAL

A transformação \mathfrak{S} pode gerar interessantes grupos de variáveis para o movimento rotacional de corpos rígidos quando aplicada ao conjunto das variáveis de Andoyer. Admite-se aqui que o satélite artificial se comporta como um corpo rígido. Os detalhes são mostrados nas próximas três seções.

3.3.1 Sistemas de referência e variáveis de Andoyer

As variáveis de Andoyer (KINOSHITA, 1972; ZANARDI, 1986) representam um conjunto de variáveis canônicas para o estudo do movimento rotacional. Estas variáveis estão representadas na Figura 2, em que O é o Centro de Massa do satélite, OABC é o sistema principal cujos eixos coincidem com as direções dos momentos principais de inércia do satélite ($I_x = A, I_y = B, I_z = C$), OXYZ é o sistema inercial (com os eixos XYZ paralelos aos eixos do sistema equatorial terrestre) e OX'Y'Z' é o sistema do momento angular de rotação \vec{S} , estando \vec{S} na direção de OZ'.

As variáveis de Andoyer são definidas da seguinte forma:

- a) G é a magnitude do vetor momento angular de rotação \vec{S} ;
- b) L é a componente S_c de \vec{S} , isto é, a projeção de \vec{S} sobre o eixo OC do sistema principal e definido pela direção do momento principal de inércia C ;
- c) H é a projeção de \vec{S} sobre o eixo inercial OZ;
- d) h é o ângulo medido sobre o plano XY, desde o eixo inercial OX até um nodo N , definido pela interseção dos planos XY e X'Y' (este último perpendicular a \vec{S});
- e) g é o ângulo medido desde o nodo N sobre o plano X'Y' até outro nodo M , definido pela interseção do plano X'Y' com o plano AB, determinado pelos eixos OA e OB;
- f) l é o ângulo medido a partir do nodo M até o eixo OA, portanto no plano AB.

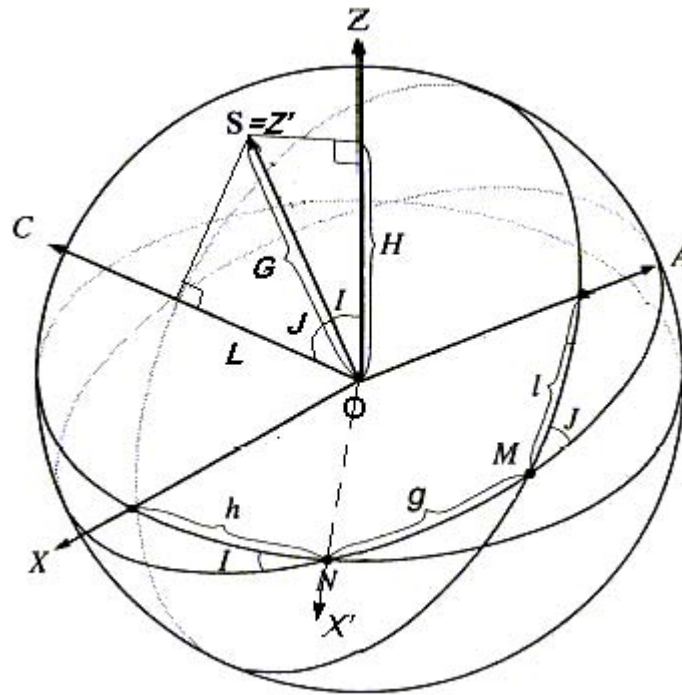


Figura 2: As variáveis de Andoyer (L, G, H, l, g, h). Os ângulos auxiliares I e J são os ângulos que o vetor de momento angular \vec{S} forma com os eixos OZ e OC , respectivamente, ou seja os ângulos formados entre os planos XY e $X'Y'$, $X'Y'$ e AB respectivamente.

Embora as variáveis de Andoyer sejam úteis em estudos teóricos relacionados com a propagação do movimento rotacional de satélites artificiais (ZANARDI, 2005), elas apresentam limitações. Especificamente, surgem algumas dificuldades quando o problema em estudo envolve pequenas inclinações, como quando o ângulo J entre o eixo OC e o vetor momento angular de rotação é zero ou muito próximo de zero (e da mesma forma para o ângulo I). Uma maneira de contornar tais dificuldades está em utilizar a transformação de Fukushima para obter outras variáveis canônicas. Nas próximas seções, serão obtidos dois novos conjuntos de variáveis canônicas para o movimento rotacional, aplicando-se a transformação \mathfrak{S} às variáveis de Andoyer (L, G, H, l, g, h), uma ou duas vezes, como segue.

3.3.2 Grupo $(\Psi, \Xi, H; \psi, \xi, h)$

Aplicando-se a transformação \mathfrak{S} , dada por (3.1), ao subconjunto das variáveis de Andoyer $(G, L; g, l)$, obtém-se um novo conjunto de variáveis canônicas para o movimento rotacional $(\Psi, \Xi, H; \psi, \xi, h)$, definido por:

$$\Psi = G, \quad (3.69)$$

$$\Xi = \sqrt{G^2 - L^2} \operatorname{sen} l, \quad (3.70)$$

$$\psi = g + \arctan\left(\frac{L}{G} \tan l\right), \quad (3.71)$$

$$\xi = \arctan\left(\frac{\sqrt{G^2 - L^2}}{L} \cos l\right), \quad (3.72)$$

em que as variáveis H e h permanecem inalteradas. A condição para aplicar-se \mathfrak{S} é satisfeita desde que $|G| \geq |L|$. Com a introdução de um ângulo auxiliar J , $-\pi/2 \leq J \leq \pi/2$, definido como sendo o ângulo que o vetor momento angular de rotação \vec{S} forma com o eixo OC, como mostra a Figura 2,

$$L = G \cos J, \quad (3.73)$$

algumas das expressões acima podem ser reescritas, à semelhança das relações (3.26), (3.30) e (3.31):

$$\Xi = G \operatorname{sen} J \operatorname{sen} l, \quad (3.74)$$

$$\psi = g + l - \arctan\left(\frac{\operatorname{sen} 2l \operatorname{sen}^2(J/2)}{1 - 2 \operatorname{sen}^2(J/2) \operatorname{sen}^2 l}\right), \quad (3.75)$$

$$\xi = J - \arctan\left(\frac{\operatorname{sen} 2J \operatorname{sen}^2(l/2)}{1 - 2 \operatorname{sen}^2(l/2) \operatorname{sen}^2 J}\right). \quad (3.76)$$

Adicionalmente, se outro ângulo auxiliar β for introduzido para as novas variáveis, sendo β o ângulo que o eixo OA forma com o plano perpendicular ao momento angular \vec{S} , de modo que

$$\Xi = \Psi \operatorname{sen} \beta, \quad (3.77)$$

as componentes do momento angular de rotação são escritas como (FUKUSHIMA, 1993, 1994):

$$S_A = \Psi \operatorname{sen} \beta, \quad (3.78)$$

$$S_B = \Psi \cos \beta \operatorname{sen} \xi, \quad (3.79)$$

$$S_C = \Psi \cos \beta \cos \xi. \quad (3.80)$$

As novas variáveis $(\Psi, \Xi, H; \psi, \xi, h)$ são mostradas na Figura 3, juntamente com as variáveis de Andoyer (L, G, H, l, g, h) . Observa-se que as novas variáveis não singulares possuem significado físico e geométrico, isto é:

- a) Ψ é o módulo do vetor momento angular de rotação \vec{S} ;
- b) Ξ é a projeção de \vec{S} no eixo OA, ou seja, $\Xi = S_A$;
- c) ψ é uma espécie de longitude do eixo OA medida sobre o plano perpendicular a \vec{S} , a partir do nodo N ;
- d) ξ é o ângulo diferença entre o eixo OC e \vec{S} visto a partir do eixo OA, ou o ângulo entre o plano AC e o grande círculo conectando o eixo OA e \vec{S} .

As variáveis H e h têm a mesma definição anterior, pois não são modificadas pela transformação \mathfrak{S} .

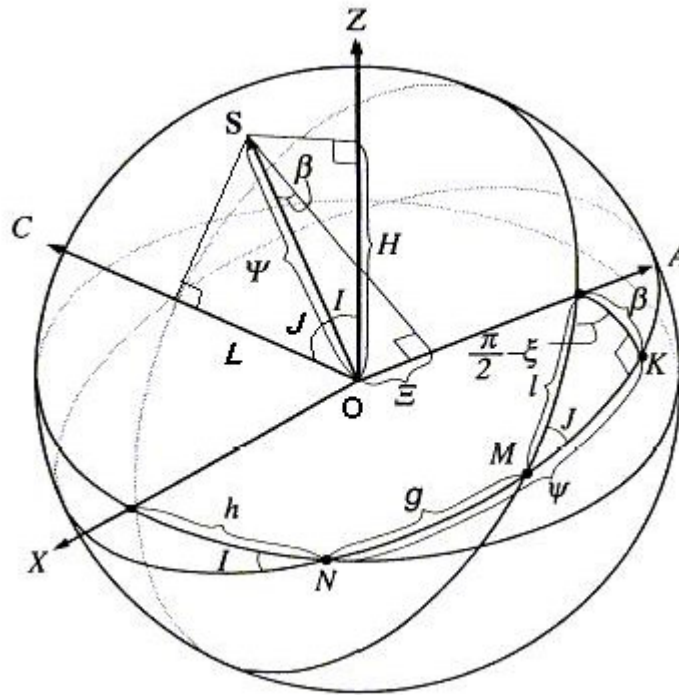


Figura 3: Novas variáveis canônicas para o movimento rotacional. Ψ é o módulo do vetor momento angular de rotação \vec{S} , Ξ é a projeção de \vec{S} no eixo OA, H é a projeção de \vec{S} no eixo OZ, ψ é o ângulo medido a partir do ponto N , na interseção do plano XY com o plano normal a \vec{S} , até o ponto K , a base de uma vertical traçada a partir do eixo OA sobre o plano normal ao momento angular \vec{S} , ξ é o ângulo $\pi/2 - \widehat{M\hat{A}K}$, e h é o ângulo medido desde o eixo OX até N . O ângulo auxiliar β é definido pelo arco AK .

Conhecendo-se as componentes do momento angular de rotação \vec{S} , pode-se determinar as componentes da velocidade de rotação. De fato,

$$\vec{S} = \vec{\Pi} \vec{\omega} \Rightarrow \vec{S} = \begin{pmatrix} S_A \\ S_B \\ S_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_A \\ \omega_B \\ \omega_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\omega_A \\ B\omega_B \\ C\omega_C \end{pmatrix}, \quad (3.81)$$

em que $\vec{\Pi}$ é a diádica de inércia do satélite e $\vec{\omega}$ a velocidade de rotação, cujas componentes no sistema de eixos principais são ω_A , ω_B e ω_C , e expressas nas novas variáveis da seguinte forma:

$$\omega_A = \frac{S_A}{A} = \frac{\Psi \operatorname{sen} \beta}{A} \therefore$$

$$\omega_A = \frac{\Xi}{A}, \quad (3.82)$$

$$\omega_B = \frac{S_B}{B} = \frac{\Psi \cos \beta \operatorname{sen} \xi}{B} \therefore$$

$$\omega_B = \frac{\sqrt{\Psi^2 - \Xi^2}}{B} \operatorname{sen} \xi, \quad (3.83)$$

$$\omega_C = \frac{S_C}{C} = \frac{\Psi \cos \beta \cos \xi}{C} \therefore$$

$$\omega_C = \frac{\sqrt{\Psi^2 - \Xi^2}}{C} \cos \xi. \quad (3.84)$$

Para o presente conjunto de variáveis, examinar-se-á apenas o limite $J \rightarrow 0$.

Quando $J \approx 0$, tem-se que $L \approx G$, e então:

$$\frac{\Xi}{\Psi} = \operatorname{sen} J \operatorname{sen} l \approx J \operatorname{sen} l, \quad (3.85)$$

$$\psi \approx l + g, \quad (3.86)$$

$$\xi \approx J \cos l. \quad (3.87)$$

De forma resumida, pode-se dizer que um conjunto de variáveis quando $J \rightarrow 0$ é:

$$(\Psi, \Xi, H, \psi, \xi, h) \rightarrow (L, LJ \operatorname{sen} l, H, l + g, J \cos l, h). \quad (3.88)$$

Finalizando, por comparação direta com as fórmulas (3.22)-(3.25), obtém-se a forma inversa das relações de definição das novas variáveis:

$$G = \Psi, \quad (3.89)$$

$$L = \sqrt{\Psi^2 - \Xi^2} \cos \xi, \quad (3.90)$$

$$g = \psi - \arctan\left(\frac{\Xi}{\Psi} \cot \xi\right), \quad (3.91)$$

$$l = \arctan\left(\frac{\sqrt{\Psi^2 - \Xi^2}}{\Xi} \tan \xi\right)^{-1}. \quad (3.92)$$

com $G \geq 0$, $-G \leq L \leq G$, $g \geq 0$ e $l \geq 0$. O conjunto de variáveis $(\Psi, \Xi, H; \psi, \xi, h)$ é útil quando $J = 0$ ou $J \approx 0$, porque a indefinição das variáveis de Andoyer l e g é superada pela bem definida variável ψ .

3.3.3 Grupo $(\Lambda, \Xi, \Sigma; \lambda, \xi, \sigma)$

Aplicando-se uma segunda vez a transformação \mathfrak{S} , dada por (3.1), às variáveis $(\Psi, H; \psi, h)$, obtém-se outro novo conjunto de variáveis canônicas para o movimento rotacional $(\Lambda, \Xi, \Sigma; \lambda, \xi, \sigma)$ definido por:

$$\Lambda = \Psi = G, \quad (3.93)$$

$$\Sigma = \sqrt{\Psi^2 - H^2} \sinh h = \sqrt{G^2 - L^2} \sinh h, \quad (3.94)$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \psi + \arctan\left(\frac{H}{\Psi} \tanh h\right) = g + \arctan\left(\frac{L}{G} \tan l\right) + \arctan\left(\frac{H}{G} \tanh h\right) = \\ &= g + \arctan(\cos J \tan l) + \arctan\left(\frac{H}{G} \tanh h\right), \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$\sigma = \arctan\left(\frac{\sqrt{\Psi^2 - H^2}}{H} \cosh h\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{G^2 - H^2}}{H} \cosh h\right). \quad (3.96)$$

As variáveis Ξ e ξ permanecem inalteradas por esta transformação. Mais uma vez, a condição para aplicar-se \mathfrak{S} é satisfeita, uma vez que $|\Psi| = |G| \geq |H|$.

Analogamente ao caso anterior, com a introdução de ângulos auxiliares I e $\bar{\varphi}$, sendo I o ângulo que o vetor momento angular de rotação $\vec{\mathfrak{S}}$ forma com o eixo inercial OZ, e $\bar{\varphi}$ o ângulo entre o eixo inercial OX e o plano perpendicular ao momento angular $\vec{\mathfrak{S}}$, definidos por

$$H = \Psi \cos I, \quad (3.97)$$

$$\Sigma = \Psi \sin \bar{\varphi}, \quad (3.98)$$

algumas das expressões acima são reescritas, com o auxílio de (3.29), como:

$$\Sigma = \sin I \sinh, \quad (3.99)$$

$$\begin{aligned} \lambda &= g + \arctan(\cos J \tan l) + \arctan(\cos I \tanh) = \\ &= l + g + h - \arctan\left(\frac{\sin 2I \sin^2(J/2)}{1 - 2\sin^2(J/2)\sin^2 l}\right) - \arctan\left(\frac{\sin 2h \sin^2(I/2)}{1 - 2\sin^2(I/2)\sin^2 h}\right), \end{aligned} \quad (3.100)$$

$$\sigma = \arctan(\tan I \cosh) = I - \arctan\left(\frac{\sin 2I \sin^2(h/2)}{1 - 2\sin^2(h/2)\sin^2 I}\right). \quad (3.101)$$

Estas novas variáveis estão representadas na Figura 4 e também têm um claro significado físico:

- a) Λ é o módulo do vetor momento angular de rotação $\vec{\mathfrak{S}}$;
- b) Σ é a componente de $\vec{\mathfrak{S}}$ no eixo OX;
- c) λ é o ângulo medido entre as projeções dos eixos OA e OX no plano perpendicular a $\vec{\mathfrak{S}}$;
- d) σ é o ângulo diferença entre o eixo OZ e $\vec{\mathfrak{S}}$ visto a partir do eixo OX, ou ângulo entre o plano XZ e o grande círculo conectando OX e $\vec{\mathfrak{S}}$.

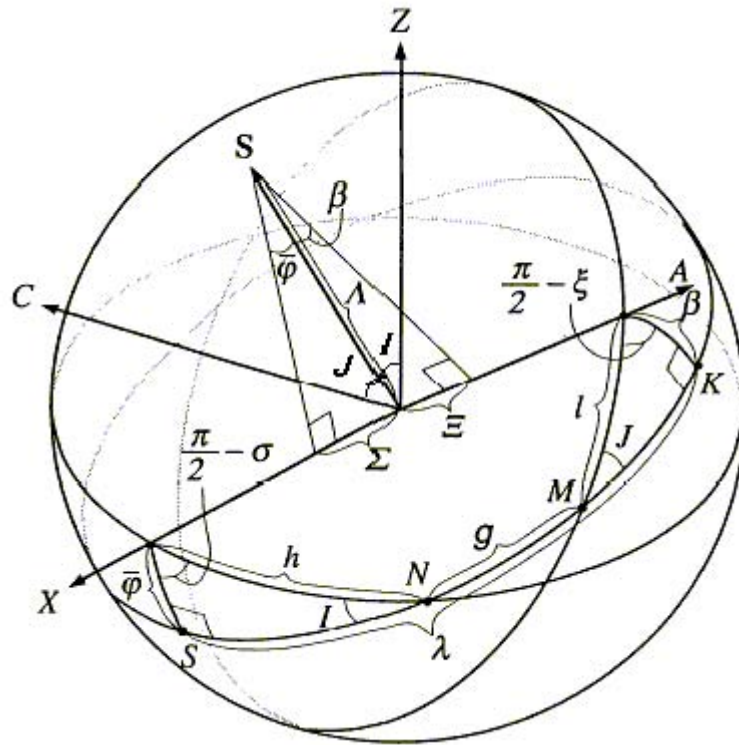


Figura 4: Novas variáveis canônicas para o movimento rotacional. Λ é o módulo do vetor momento angular de rotação \vec{S} , Ξ é a projeção de \vec{S} no eixo OA, Σ é a projeção de \vec{S} no eixo OX, λ é o ângulo medido a partir do ponto S, na projeção do eixo OX sobre o plano normal a \vec{S} , até o ponto K, a base de uma vertical traçada a partir do eixo OA sobre o plano normal ao momento angular \vec{S} , ξ é o ângulo $\pi/2 - M\hat{A}K$, e σ é o ângulo $N\hat{X}S$. Os ângulos auxiliares β e $\bar{\varphi}$ são definidos pelos arcos AK e XS , respectivamente.

Nota-se que este conjunto de variáveis $(\Lambda, \Xi, \Sigma; \lambda, \xi, \sigma)$ está mais diretamente associado ao sistema de referência inercial OXYZ, em oposição ao conjunto $(\Psi, \Xi, H; \psi, \xi, h)$, que mantém estreita relação com o sistema de eixos principais OABC.

As componentes do momento angular nos eixos OX, OY e OZ são dadas por:

$$S_x = \Lambda \sin \bar{\varphi} = G \sin I \sinh, \quad (3.102)$$

$$S_y = -\Lambda \cos \bar{\varphi} \sin \sigma = -G \sin I \cosh, \quad (3.103)$$

$$S_z = \Lambda \cos \bar{\varphi} \cos \sigma = G \cos I. \quad (3.104)$$

As variáveis $(\Lambda, \Xi, \Sigma; \lambda, \xi, \sigma)$ são todas bem definidas para quaisquer valores dos ângulos J e I . Os casos limites são analisados em detalhes em Fukushima (1993) e resumidos em Fukushima (1994).

3.3.4 Comentários

Neste capítulo, apresentou-se uma transformação de variáveis \mathfrak{S} , útil tanto ao movimento orbital quanto ao movimento rotacional (FUKUSHIMA, 1993, 1994). Pela sua aplicação às variáveis de Andoyer, novos conjuntos de variáveis foram obtidos para o movimento rotacional.

Estas variáveis apresentam as seguintes características:

- a) são canônicas;
- b) permanecem bem definidas mesmo quando $L \approx G$ e/ou $G \approx H$;
- c) têm significado físico;
- d) geram equações do movimento com formas relativamente simples.

Os capítulos a seguir restringem a análise ao conjunto $(\Psi, \Xi, H; \psi, \xi, h)$, aplicável aos casos em que $J = 0$ ou $J \approx 0$. Nestes termos, é um conjunto valioso, pois pode ser utilizado, por exemplo, para o estudo da atitude de satélites estabilizados por rotação, para os quais o eixo de rotação é coincidente com o eixo de maior momento principal de inércia, ou seja $J = 0$.

CAPÍTULO 4 MOVIMENTO ROTACIONAL LIVRE DE TORQUES EXTERNOS

Neste capítulo é analisado o movimento rotacional livre de torques externos (MRLTE). Para isso são utilizadas variáveis canônicas não singulares, obtidas pela aplicação da transformada \mathfrak{S} definida no capítulo anterior. A Hamiltoniana do problema é determinada em termos destas variáveis não singulares a partir de sua forma em termos das variáveis de Andoyer. A transformada também é utilizada para determinar as soluções das equações do movimento, dadas em termos de integrais e funções elípticas. As soluções obtidas mostram-se idênticas às deduzidas utilizando-se o método de Whittaker (1961).

4.1 HAMILTONIANA DO MRLTE E EQUAÇÕES DO MOVIMENTO EM VARIÁVEIS DE ANDOYER

No caso do MRLTE de um corpo rígido, a Hamiltoniana é a própria energia cinética de rotação deste corpo e é expressa em variáveis de Andoyer (KINOSHITA, 1972; ZANARDI, 1986) como:

$$T = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\text{sen}^2 l}{A} + \frac{\text{cos}^2 l}{B} \right) (G^2 - L^2) + \frac{L^2}{C} \right], \quad (4.1)$$

em que A , B e C são os momentos principais de inércia do satélite. Neste caso as equações do movimento são obtidas pelo formalismo hamiltoniano e dadas por:

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial l}, \quad (4.2)$$

$$\frac{dG}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial g}, \quad (4.3)$$

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial h}, \quad (4.4)$$

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\partial T}{\partial L}, \quad (4.5)$$

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial T}{\partial G}, \quad (4.6)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial T}{\partial H}, \quad (4.7)$$

Utilizando a expressão (4.1), as equações do MRLTE assumem a seguinte forma:

$$\frac{dL}{dt} = -\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)(G^2 - L^2)\text{sen } l \cos l, \quad (4.8)$$

$$\frac{dG}{dt} = 0, \quad (4.9)$$

$$\frac{dH}{dt} = 0, \quad (4.10)$$

$$\frac{dl}{dt} = -\left(\frac{L}{A}\text{sen}^2 l + \frac{L}{B}\text{cos}^2 l - \frac{L}{C}\right), \quad (4.11)$$

$$\frac{dg}{dt} = \frac{G}{A}\text{sen}^2 l + \frac{G}{B}\text{cos}^2 l, \quad (4.12)$$

$$\frac{dh}{dt} = 0. \quad (4.13)$$

Observa-se neste caso que permanecem constantes o módulo do momento angular de rotação (G), a componente do momento angular de rotação (H) no eixo inercial OZ e o ângulo h .

A solução do movimento livre de torques foi obtida por Kinoshita (1972, 1992) em forma fechada em termos de funções e integrais elípticas, e os resultados resumidos em Fukushima (1993):

$$L = L_0 \text{dn}(u, k), \quad (4.14)$$

$$G = G_0, \quad (4.15)$$

$$H = H_0, \quad (4.16)$$

$$l = \arctan\left(\frac{\text{cn}(u, k)}{\gamma \text{sn}(u, k)}\right), \quad (4.17)$$

$$g = g_0 + \frac{G_0}{C}(t - t_0) + \frac{G_0 \gamma}{L_0} \Pi(\text{am}(u, k), \alpha^2, k), \quad (4.18)$$

$$h = h_0, \quad (4.19)$$

sendo

$$u = \frac{L_0}{C} \sqrt{ab}(t - t_0), \quad (4.20)$$

$$k = \sqrt{\gamma^2 - 1} \frac{\sqrt{G_0^2 - L_0^2}}{L_0}, \quad (4.21)$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad (4.22)$$

$$\alpha^2 = 1 - \gamma^2, \quad (4.23)$$

$$a = \frac{C}{A} - 1, \quad (4.24)$$

$$b = \frac{C}{B} - 1. \quad (4.25)$$

Nestas soluções, L_0, G_0, H_0, g_0, h_0 e t_0 são as condições iniciais do MRLTE, sendo L_0, G_0, H_0, g_0, h_0 os valores iniciais de L, G, H, g, h respectivamente. O instante inicial t_0 é definido como aquele em que $l = \frac{\pi}{2}$. As funções $\text{am}(u, k)$, $\text{sn}(u, k)$, $\text{cn}(u, k)$, e $\text{dn}(u, k)$ são funções elípticas de Jacobi de argumento u e módulo elíptico k . Na solução (4.18), $\Pi(\text{am}(u, k), \alpha^2, k)$ é a integral elíptica de terceira espécie, em que as variáveis $\varphi = \text{am}(u, k)$, α^2 e k são chamadas de argumento, de parâmetro e de módulo, respectivamente. A integral Π é definida por (BYRD; FRIEDMAN, 1971):

$$\Pi(\varphi, \alpha^2, k) = \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{(1 - \alpha^2 \text{sen}^2 \vartheta) \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \vartheta}}. \quad (4.26)$$

Uma solução particular para as equações do MRLTE foi determinada por Zanardi (1986) para o caso em que os momentos principais de inércia A e B do satélite são iguais. As equações do movimento são simplificadas, não sendo necessária à utilização de integrais elípticas para solucioná-las. A solução determinada aponta uma variação linear nas variáveis angulares l e g , com as demais variáveis permanecendo constantes devido à ausência de torques externos.

4.2 HAMILTONIANA DO MRLTE E EQUAÇÕES DO MOVIMENTO EM VARIÁVEIS NÃO SINGULARES DE FUKUSHIMA

A energia cinética do MRLTE, representada pela função Hamiltoniana T , pode ser reescrita em variáveis não singulares pela aplicação direta da transformação \mathfrak{S} em (4.1), e pela substituição de das relações (3.89), (3.90) e (3.92):

$$T = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{A} \sin^2(\arctan U^{-1}) + \frac{1}{B} \cos^2(\arctan U^{-1}) \right] \cdot [\Psi^2 - (\Psi^2 - \Xi^2) \cos^2 \xi] + \frac{1}{2C} (\Psi^2 - \Xi^2) \cos^2 \xi, \quad (4.27)$$

em que

$$U = \frac{\sqrt{\Psi^2 - \Xi^2}}{\Xi} \sin \xi. \quad (4.28)$$

Simplificando a expressão (4.27):

$$T = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{A} + \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) \cos^2(\arctan U^{-1}) \right] \cdot [\Psi^2 \sin^2 \xi + \Xi^2 \cos^2 \xi] + \frac{1}{2C} (\Psi^2 - \Xi^2) \cos^2 \xi.$$

Aplicando propriedades de trigonometria e utilizando a variável U , a energia cinética pode ser colocada na forma:

$$T = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{A} + \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) \cdot \left(\frac{U^2}{1+U^2} \right) \right] \cdot [\Psi^2 \sin^2 \xi + \Xi^2 \cos^2 \xi] + \frac{1}{2C} (\Psi^2 - \Xi^2) \cos^2 \xi . \quad (4.29)$$

Da relação (4.28) obtém-se que:

$$\frac{U^2}{1+U^2} = \frac{(\Psi^2 - \Xi^2) \sin^2 \xi}{\Psi^2 \sin^2 \xi + \Xi^2 \cos^2 \xi}, \quad (4.30)$$

Pela substituição de (4.30) na Hamiltoniana dada por (4.29):

$$T = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{A} + \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) \cdot \frac{(\Psi^2 - \Xi^2) \sin^2 \xi}{\Psi^2 \sin^2 \xi + \Xi^2 \cos^2 \xi} \right] \cdot [\Psi^2 \sin^2 \xi + \Xi^2 \cos^2 \xi] + \frac{1}{2C} (\Psi^2 - \Xi^2) \cos^2 \xi.$$

Reagrupando os termos e simplificando:

$$T = \frac{1}{2} \left[\frac{\Xi^2}{A} + \left(\frac{\sin^2 \xi}{B} + \frac{\cos^2 \xi}{C} \right) (\Psi^2 - \Xi^2) \right]. \quad (4.31)$$

As equações do movimento rotacional são obtidas de forma análoga às equações (4.2)-(4.13):

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial \psi}, \quad (4.32)$$

$$\frac{d\Xi}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial \xi}, \quad (4.33)$$

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial h}, \quad (4.34)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial T}{\partial \Psi}, \quad (4.35)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial T}{\partial \Xi}, \quad (4.36)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial T}{\partial H}. \quad (4.37)$$

Portanto:

$$\frac{d\Psi}{dt} = 0, \quad (4.38)$$

$$\frac{d\Xi}{dt} = -\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right)(\Psi^2 - \Xi^2)\text{sen } \xi \cos \xi, \quad (4.39)$$

$$\frac{dH}{dt} = 0, \quad (4.40)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\Psi}{B}\text{sen } 2\xi + \frac{\Psi}{C}\cos 2\xi, \quad (4.41)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -\left(\frac{\Xi}{B}\text{sen } 2\xi + \frac{\Xi}{C}\cos 2\xi - \frac{\Xi}{A}\right), \quad (4.42)$$

$$\frac{dh}{dt} = 0. \quad (4.43)$$

Nas seções a seguir, as soluções das equações (4.38) – (4.43) são obtidas, primeiro pela aplicação da transformada \mathfrak{S} às soluções em variáveis de Andoyer dadas em (4.14) – (4.19), e em seguida pela integração direta das equações com a utilização de integrais e funções elípticas.

4.2.1 Solução das equações do movimento rotacional pela aplicação da transformação \mathfrak{S}

As soluções de (4.38), (4.40) e (4.43) são triviais. Já as soluções de (4.39), (4.41) e (4.42) podem ser obtidas de (4.14), (4.17) e (4.18) pela aplicação de \mathfrak{S} . Em Fukushima (1993, 1994), são apresentados apenas os resultados destas transformações, sem detalhamento do processo de determinação das soluções. O desenvolvimento

algébrico necessário para a obtenção das soluções está detalhado nesta dissertação, no que segue.

Inicialmente, deve-se observar que a definição do instante inicial como sendo aquele em que $l = \frac{\pi}{2}$ implica que $\xi_0 = 0$. Pode-se ver que esta não é uma escolha casual, mas bastante adequada para simplificar os cálculos. Assim, as relações entre as variáveis do movimento no instante inicial são dadas, de acordo com (3.89) – (3.91), por:

$$G_0 = \Psi_0, \quad (4.44)$$

$$L_0 = \sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2} \cos \xi_0 \Rightarrow L_0 = \sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}, \quad (4.45)$$

$$g_0 = \psi_0 - \arctan\left(\frac{\Xi_0}{\Psi_0} \cot \xi_0\right) \Rightarrow g_0 = \psi_0 - \frac{\pi}{2}, \quad (4.46)$$

Num primeiro passo, os parâmetros envolvidos nas soluções são transformados, com a simples substituição das relações (4.44)-(4.46):

$$u = \frac{L_0}{C} \sqrt{ab}(t - t_0) \Rightarrow u = \frac{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}}{C} \sqrt{ab}(t - t_0), \quad (4.47)$$

$$k = \sqrt{\gamma^2 - 1} \frac{\sqrt{G_0^2 - L_0^2}}{L_0} = \sqrt{\gamma^2 - 1} \frac{\sqrt{\Psi_0^2 - (\Psi_0^2 - \Xi_0^2)}}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}} \therefore$$

$$k = \sqrt{\gamma^2 - 1} \frac{\Xi_0}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}}. \quad (4.48)$$

Em seguida, pela substituição de (3.89)-(3.92) e de (4.44)-(4.46), as soluções (4.14) e (4.17) ficam:

$$L = L_0 \operatorname{dn}(u, k) \Rightarrow \sqrt{\Psi^2 - \Xi^2} \cos \xi = \sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2} \operatorname{dn}(u, k), \quad (4.49)$$

$$l = \arctan\left(\frac{\text{cn}(u, k)}{\gamma \text{sn}(u, k)}\right) \Rightarrow \arctan\left(\frac{\sqrt{\Psi^2 - \Xi^2}}{\Xi} \text{sen } \xi\right)^{-1} = \arctan\left(\frac{\text{cn}(u, k)}{\gamma \text{sn}(u, k)}\right),$$

de modo que:

$$\sqrt{\Psi^2 - \Xi^2} \text{sen } \xi = \Xi \left(\frac{\text{cn}(u, k)}{\gamma \text{sn}(u, k)}\right)^{-1}. \quad (4.50)$$

Observando que $\Psi = \Psi_0$ e somando os quadrados das expressões (4.49) e (4.50), pode-se obter a solução para Ξ :

$$\Psi_0^2 - \Xi^2 = \Xi^2 \left(\frac{\gamma \text{sn}(u, k)}{\text{cn}(u, k)}\right)^2 + (\Psi_0^2 - \Xi_0^2) \text{dn}^2(u, k).$$

Agrupando os termos em Ξ :

$$\left[\frac{\gamma^2 \text{sn}^2(u, k)}{\text{cn}^2(u, k)} + 1\right] \Xi^2 = \Psi_0^2 - (\Psi_0^2 - \Xi_0^2) \text{dn}^2(u, k),$$

e sabendo-se que $\text{dn}^2(u, k) = 1 - k^2 \text{sn}^2(u, k)$ e $\text{cn}^2(u, k) = 1 - \text{sn}^2(u, k)$, tem-se que:

$$\left[\frac{\gamma^2 \text{sn}^2(u, k) + \text{cn}^2(u, k)}{\text{cn}^2(u, k)}\right] \Xi^2 = \Psi_0^2 - (\Psi_0^2 - \Xi_0^2)(1 - k^2 \text{sn}^2(u, k)),$$

ou ainda:

$$\left[\frac{1 + (\gamma^2 - 1) \text{sn}^2(u, k)}{\text{cn}^2(u, k)}\right] \Xi^2 = (\Psi_0^2 - \Xi_0^2) k^2 \text{sn}^2(u, k) + \Xi_0^2.$$

Substituindo o parâmetro k , dado por (4.48), chega-se finalmente a:

$$\left[\frac{1 + (\gamma^2 - 1)\text{sn}^2(u, k)}{\text{cn}^2(u, k)} \right] \Xi^2 = \Xi_0^2 [1 + (\gamma^2 - 1)\text{sn}^2(u, k)],$$

ou seja:

$$\Xi = \Xi_0 \text{cn}(u, k). \quad (4.51)$$

Levando a expressão (4.51) em (4.50) pode-se determinar a solução para a variável ξ após diversas manipulações algébricas na seqüência a seguir:

$$\text{sen } \xi = \frac{\Xi_0 \gamma \text{sn}(u, k)}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2 \text{cn}^2(u, k)}} = \frac{\Xi_0 \gamma \text{sn}(u, k)}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2 (1 - \text{sn}^2(u, k))}} = \frac{\Xi_0 \gamma \text{sn}(u, k)}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2 + \Xi_0^2 \text{sn}^2(u, k)}}.$$

Rearranjando convenientemente o coeficiente de $\text{sn}^2(u, k)$ no radicando do denominador, tem-se:

$$\text{sen } \xi = \frac{\Xi_0 \gamma \text{sn}(u, k)}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2 + \left[-(\Psi_0^2 - \Xi_0^2) \frac{(\gamma^2 - 1)\Xi_0^2}{(\Psi_0^2 - \Xi_0^2)} + \Xi_0^2 \gamma^2 \right] \text{sn}^2(u, k)}}.$$

Observa-se que $\frac{(\gamma^2 - 1)\Xi_0^2}{(\Psi_0^2 - \Xi_0^2)} = k^2$, devido à (4.48), logo:

$$\text{sen } \xi = \frac{\Xi_0 \gamma \text{sn}(u, k)}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2 + [-(\Psi_0^2 - \Xi_0^2)k^2 + \Xi_0^2 \gamma^2] \text{sn}^2(u, k)}},$$

ou ainda:

$$\text{sen } \xi = \frac{\Xi_0 \gamma \text{sn}(u, k)}{\sqrt{(\Psi_0^2 - \Xi_0^2)(1 - k^2 \text{sn}^2(u, k)) + \Xi_0^2 \gamma^2 \text{sn}^2(u, k)}}.$$

Da definição da função elíptica $\text{dn}^2(u, k) = 1 - k^2 \text{sn}^2(u, k)$ (BYRD; FRIEDMAN, 1971), o $\text{sen } \xi$ pode ser colocado na forma:

$$\text{sen } \xi = \frac{\Xi_0 \gamma \text{sn}(u, k)}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2} \text{dn}(u, k) \sqrt{1 + \frac{\Xi_0^2 \gamma^2 \text{sn}^2(u, k)}{(\Psi_0^2 - \Xi_0^2) \text{dn}^2(u, k)}}},$$

que pode ser reescrito como:

$$\text{sen } \xi = \frac{\frac{\Xi_0 \gamma \text{sn}(u, k)}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2} \text{dn}(u, k)}}{\sqrt{1 + \frac{\Xi_0^2 \gamma^2 \text{sn}^2(u, k)}{(\Psi_0^2 - \Xi_0^2) \text{dn}^2(u, k)}}}. \quad (4.52)$$

Seja $\zeta = \frac{\Xi_0 \gamma \text{sn}(u, k)}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2} \text{dn}(u, k)}$. Sabendo-se que $\text{sen}(\arctan \zeta) = \frac{\zeta}{\sqrt{1 + \zeta^2}}$, a

expressão (4.52) fica:

$$\text{sen } \xi = \text{sen} \left[\arctan \left(\frac{\Xi_0 \gamma \text{sn}(u, k)}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2} \text{dn}(u, k)} \right) \right],$$

ou seja:

$$\xi = \arctan \left(\frac{\Xi_0 \gamma \text{sn}(u, k)}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2} \text{dn}(u, k)} \right). \quad (4.53)$$

Pela substituição de (3.91) e (4.44)-(4.46) em (4.18) obtém-se a solução para a variável ψ :

$$\begin{aligned} \psi - \arctan\left(\frac{\Xi}{\Psi} \cot \xi\right) &= \psi_0 - \arctan\left(\frac{\Xi_0}{\Psi_0} \cot \xi_0\right) + \frac{\Psi_0}{C} (t - t_0) + \\ &+ \frac{\Psi_0 \gamma}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}} \Pi(\text{am}(u, k), \alpha^2, k) . \end{aligned} \quad (4.54)$$

De acordo com Byrd e Friedman (1971), existe uma relação de adição para uma integral elíptica de terceira espécie dada por:

$$\begin{aligned} \Pi(\varphi, \alpha^2, k) + \Pi(\varphi, k^2/\alpha^2, k) &= F(\varphi, k) + \\ &+ \sqrt{\frac{\alpha^2}{(1-\alpha^2)(\alpha^2-k^2)}} \arctan\left(\sqrt{\frac{(1-\alpha^2)(\alpha^2-k^2)}{\alpha^2(1-k^2\text{sen}^2\varphi)}} \tan \varphi\right), \end{aligned} \quad (4.55)$$

em que $\varphi = \text{am}(u, k)$, $k^2/\alpha^2 = \hat{\alpha}^2$, $\text{sen}^2\varphi = \text{sen}^2(\text{am}(u, k)) = \text{sn}^2(u, k)$ e $F(\varphi, k)$ é a integral elíptica de primeira espécie com argumento φ e módulo k . Em relação às constantes do movimento apresentadas para estas soluções, a expressão (4.55) pode ser reescrita. De fato,

$$\sqrt{\frac{\alpha^2}{(1-\alpha^2)(\alpha^2-k^2)}} = \sqrt{\frac{1-\gamma^2}{\gamma^2 \left[1-\gamma^2 - (\gamma^2-1) \frac{\Xi_0^2}{(\Psi_0^2 - \Xi_0^2)} \right]}}$$

e simplificando:

$$\sqrt{\frac{\alpha^2}{(1-\alpha^2)(\alpha^2-k^2)}} = \frac{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}}{\gamma \Psi_0}, \quad (4.56)$$

Além disso:

$$\sqrt{\frac{(1-\alpha^2)(\alpha^2-k^2)}{\alpha^2(1-k^2\text{sen}^2\varphi)}} = \sqrt{\frac{(1-\alpha^2)(\alpha^2-k^2)}{\alpha^2}} \sqrt{\frac{1}{(1-k^2\text{sen}^2\varphi)}} = \frac{\gamma \Psi_0}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\text{dn}^2(u, k)}},$$

ou seja:

$$\sqrt{\frac{(1-\alpha^2)(\alpha^2-k^2)}{\alpha^2(1-k^2\sin^2\varphi)}} = \frac{\Psi_0}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}} \frac{\gamma}{\operatorname{dn}(u,k)}. \quad (4.57)$$

Observando ainda que $\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\sin(\operatorname{am}(u,k))}{\cos(\operatorname{am}(u,k))} = \frac{\operatorname{sn}(u,k)}{\operatorname{cn}(u,k)}$, pela substituição

de (4.56) e (4.57) em (4.55) tem-se:

$$\begin{aligned} \Pi(\operatorname{am}(u,k), \alpha^2, k) &= F(\operatorname{am}(u,k), k) - \Pi(\operatorname{am}(u,k), \hat{\alpha}^2, k) + \\ &+ \frac{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}}{\gamma \Psi_0} \arctan \left(\frac{\Psi_0}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}} \frac{\gamma \operatorname{sn}(u,k)}{\operatorname{dn}(u,k) \operatorname{cn}(u,k)} \right). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Ao mesmo tempo, de (4.53):

$$\cot \xi = \frac{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}}{\Xi_0^2} \frac{\operatorname{dn}(u,k)}{\gamma \operatorname{sn}(u,k)}. \quad (4.59)$$

Levando a fórmula (4.58) em (4.54):

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 + \arctan \left(\frac{\Xi}{\Psi} \cot \xi \right) - \arctan \left(\frac{\Xi_0}{\Psi_0} \cot \xi_0 \right) + \frac{\Psi_0}{C} (t - t_0) + \\ &+ \frac{\Psi_0 \gamma}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}} \left[F(\operatorname{am}(u,k), k) - \Pi(\operatorname{am}(u,k), \hat{\alpha}^2, k) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}}{\gamma \Psi_0} \arctan \left(\frac{\Psi_0}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}} \frac{\gamma \operatorname{sn}(u,k)}{\operatorname{dn}(u,k) \operatorname{cn}(u,k)} \right) \right] \therefore \\ \psi &= \psi_0 + \frac{\Psi_0}{C} (t - t_0) + \frac{\Psi_0 \gamma}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}} [F(\operatorname{am}(u,k), k) - \Pi(\operatorname{am}(u,k), \hat{\alpha}^2, k)] + \\ &+ \arctan \left(\frac{\frac{\Xi}{\Psi} \cot \xi - \frac{\Xi_0}{\Psi_0} \cot \xi_0}{1 + \frac{\Xi}{\Psi} \frac{\Xi_0}{\Psi_0} \cot \xi \cot \xi_0} \right) + \arctan \left(\frac{\Psi_0}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}} \frac{\gamma \operatorname{sn}(u,k)}{\operatorname{dn}(u,k) \operatorname{cn}(u,k)} \right), \end{aligned} \quad (4.60)$$

uma vez que $\arctan x - \arctan y = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$. Pela escolha do instante inicial como sendo aquele em que $\xi_0 = 0$, mostra-se pelo cálculo formal que:

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow 0} \arctan \left(\frac{\frac{\Xi}{\Psi} \cot \xi - \frac{\Xi_0}{\Psi_0} \cot \xi_0}{1 + \frac{\Xi}{\Psi} \frac{\Xi_0}{\Psi_0} \cot \xi \cot \xi_0} \right) = -\arctan \left(\frac{\Psi_0}{\Xi_0 \operatorname{cn}(u, k) \cot \xi} \right), \quad (4.61)$$

tendo sido considerado o fato de que $\Xi = \Xi_0 \operatorname{cn}(u, k)$. Por fim, pela expressão (4.59), o limite (4.61) é escrito mais adequadamente como:

$$\arctan \left(\frac{\frac{\Xi}{\Psi} \cot \xi - \frac{\Xi_0}{\Psi_0} \cot \xi_0}{1 + \frac{\Xi}{\Psi} \frac{\Xi_0}{\Psi_0} \cot \xi \cot \xi_0} \right) = -\arctan \left(\frac{\Psi_0}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}} \frac{\gamma \operatorname{sn}(u, k)}{\operatorname{dn}(u, k) \operatorname{cn}(u, k)} \right), \quad (4.62)$$

de forma que a solução para ψ , dada por (4.60), é expressa de modo mais simplificado por:

$$\psi = \psi_0 + \frac{\Psi_0}{C} (t - t_0) + \frac{\Psi_0 \gamma}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}} [F(\operatorname{am}(u, k), k) - \Pi(\operatorname{am}(u, k), \hat{\alpha}^2, k)]. \quad (4.63)$$

Sumarizando, as soluções para as equações do MRLTE, expressas em variáveis não singulares, dadas por (4.38)-(4.43), são as seguintes:

$$\Psi = \Psi_0, \quad (4.64)$$

$$\Xi = \Xi_0 \operatorname{cn}(u, k), \quad (4.65)$$

$$H = H_0, \quad (4.66)$$

$$\psi = \psi_0 + \frac{\Psi_0}{C} (t - t_0) + \frac{\Psi_0 \gamma}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}} [F(\operatorname{am}(u, k), k) - \Pi(\operatorname{am}(u, k), \hat{\alpha}^2, k)], \quad (4.67)$$

$$\xi = \arctan\left(\frac{\Xi_0}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}} \frac{\gamma \operatorname{sn}(u, k)}{\operatorname{dn}(u, k)}\right), \quad (4.68)$$

$$h = h_0. \quad (4.69)$$

A solução (4.67) obtida para a variável $\psi(t)$ é diferente da apresentada por Fukushima (1993, 1994). No entanto, de acordo com Jupp (1974), a solução para a variável diretamente relacionada à rotação do satélite depende das hipóteses que são consideradas a respeito dos seus momentos principais de inércia. No caso presente, considerando-se que $A < B < C$, e que a rotação ocorre em torno do eixo OC, é adequado que a parte linear da solução seja dada por Ψ_0/C , já que este coeficiente está relacionado à velocidade de rotação do satélite.

Nestas soluções, $\Psi_0, \Xi_0, H_0, \psi_0, h_0$ e t_0 são as condições iniciais do MRLTE, sendo $\Psi_0, \Xi_0, H_0, \psi_0, h_0$ os valores iniciais de Ψ, Ξ, H, ψ, h respectivamente. Como mencionado anteriormente, o instante inicial t_0 é definido como aquele em que $\xi_0 = 0$. Os parâmetros envolvidos na solução e que dependem das condições iniciais são:

$$u = \frac{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}}{C} \sqrt{ab}(t - t_0), \quad (4.70)$$

$$k = \sqrt{\gamma^2 - 1} \frac{\Xi_0}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}}, \quad (4.71)$$

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{k^2}{\alpha^2} = -\frac{\Xi_0^2}{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}, \quad (4.72)$$

sendo os demais parâmetros γ, α^2, a, b dados em (4.22)-(4.25).

4.2.2 Solução das equações do movimento rotacional obtida por integração direta

Uma outra maneira de obter as soluções acima seria utilizar-se de um ângulo auxiliar $\Theta = \pi/2 - \beta$, sendo β como definido em (3.77). Pela Figura 2, vê-se facilmente que

$$\cos \Theta = \frac{\Xi}{\Psi}, \quad (4.73)$$

e portanto, lembrando que $\Psi = \Psi_0$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\cos \Theta) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\Xi}{\Psi} \right) \Rightarrow -\text{sen } \Theta \dot{\Theta} = \frac{\dot{\Xi}}{\Psi_0} \therefore \\ \dot{\Xi} &= -(\Psi_0 \text{sen } \Theta) \cdot \dot{\Theta}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Pela substituição destas últimas relações em (4.39) e (4.42) as equações tomam a forma:

$$\dot{\Theta} = \left(\frac{C-B}{BC} \right) \Psi_0 \text{sen } \Theta \cos \xi \text{sen } \xi, \quad (4.75)$$

$$\xi = \left(\frac{\Psi_0}{A} - \frac{\Psi_0}{C} \cos^2 \xi - \frac{\Psi_0}{B} \text{sen}^2 \xi \right) \cos \Theta. \quad (4.76)$$

Estas são precisamente as equações de Whittaker (1961). Observando-se que por hipótese se está considerando $A < B < C$, as soluções deste sistema de equações, já adaptadas para a notação neste novo grupo de variáveis é a seguinte:

$$\cos \Theta = P \text{cn}(u, k), \quad (4.77)$$

$$\text{sen } \Theta \text{sen } \xi = Q \text{sn}(u, k), \quad (4.78)$$

$$\text{sen } \Theta \cos \xi = R \text{dn}(u, k), \quad (4.79)$$

em que P , Q e R são constantes e u é uma função linear, ou seja, $u = nt + \varepsilon$. As quantidades P , Q , R e n e também o módulo k puderam ser escolhidos de modo que coincidissem com as equações (BYRD; FRIEDMAN, 1971):

$$\begin{cases} k^2 \operatorname{cn}^2(u, k) = -k'^2 + \operatorname{dn}^2(u, k), \\ k^2 \operatorname{sn}^2(u, k) = 1 - \operatorname{dn}^2(u, k), \\ \frac{\partial}{\partial u} \operatorname{dn}(u, k) = -k^2 \operatorname{sn}(u, k) \operatorname{cn}(u, k). \end{cases} \quad (4.80)$$

em que k' é chamado de módulo elíptico complementar, definido por $k' = \sqrt{1 - k^2}$. As comparações forneceram:

$$P^2 = \frac{A(\Psi_0^2 - cC)}{\Psi_0^2(A - C)}, \quad (4.81)$$

$$Q^2 = \frac{B(\Psi_0^2 - cC)}{\Psi_0^2(B - C)}, \quad (4.82)$$

$$R^2 = \frac{C(cA - \Psi_0^2)}{\Psi_0^2(A - C)}, \quad (4.84)$$

$$k^2 = \frac{(A - B)(\Psi_0^2 - cC)}{(B - C)(Ac - \Psi_0^2)}, \quad (4.85)$$

$$n^2 = \frac{(B - C)(cA - \Psi_0^2)}{ABC}. \quad (4.86)$$

A constante c que está presente nas relações (4.81)-(4.86) é tal que $c = 2T_0$, sendo T_0 a energia cinética no instante inicial, e portanto em qualquer instante, uma vez que a energia não varia no MRLTE. Mais uma vez o cálculo é facilitado pela escolha $\xi_0 = 0$. A constante c é então dada por:

$$c = \frac{\Psi_0^2}{C} + \left(\frac{C - A}{AC} \right) \Xi_0^2. \quad (4.87)$$

Substituindo e simplificando, têm-se os seguintes resultados:

$$P = \frac{\Xi_0}{\Psi_0}, \quad (4.88)$$

$$Q = \gamma \frac{\Xi_0}{\Psi_0}, \quad (4.89)$$

$$R = \frac{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}}{\Psi_0}, \quad (4.90)$$

$$k = \sqrt{\gamma^2 - 1} \frac{\Xi_0}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}}, \quad (4.91)$$

$$n = \frac{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}}{C} \sqrt{ab}. \quad (4.92)$$

As constantes γ , a e b são as mesmas de (4.22), (4.24) e (4.25).

Por substituição de (4.73) e (4.88) em (4.77) obtém-se a primeira solução:

$$\cos \Theta = P \operatorname{cn}(u, k) \Rightarrow \frac{\Xi}{\Psi} = \frac{\Xi_0}{\Psi_0} \operatorname{cn}(u, k) \therefore$$

$$\Xi = \Xi_0 \operatorname{cn}(u, k). \quad (4.93)$$

Dividindo (4.78) por (4.79) e substituindo (4.89) e (4.90):

$$\frac{\operatorname{sen} \xi}{\operatorname{cos} \xi} = \frac{Q \operatorname{sn}(u, k)}{R \operatorname{dn}(u, k)} \Rightarrow \tan \xi = \frac{\Xi_0}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}} \frac{\gamma \operatorname{sn}(u, k)}{\operatorname{dn}(u, k)} \therefore$$

$$\xi = \arctan \left(\frac{\Xi_0}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}} \frac{\gamma \operatorname{sn}(u, k)}{\operatorname{dn}(u, k)} \right). \quad (4.94)$$

No instante inicial, $\xi_0 = 0$, o que implica que

$$\xi_0 = \arctan\left(\frac{\Xi_0}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}} \frac{\gamma \operatorname{sn}(u_0, k)}{\operatorname{dn}(u_0, k)}\right) = 0 \Rightarrow \operatorname{sn}(u_0, k) = 0 \Rightarrow u_0 = 0,$$

e $u_0 = u(0) = n \cdot 0 + \varepsilon = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0$ quando adota-se $t_0 = 0$. Daqui por diante, nesta dissertação, o instante inicial, por comodidade, será $t_0 = 0$. Portanto, $u = nt$ tal qual em (4.70).

Por fim, para a solução de ψ , pode-se reescrever a equação (4.41) como:

$$\psi = \frac{\Psi_0}{C} + \left(\frac{C-B}{BC}\right) \Psi_0 \operatorname{sen}^2 \xi. \quad (4.95)$$

Por meio da solução (4.94), manipula-se algebricamente (4.95) de modo que (ver **APÊNDICE B**):

$$\psi = \frac{\Psi_0}{C} + \left(\frac{C-A}{AC}\right) \frac{\Psi_0}{n} \left(\frac{-\hat{\alpha}^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{1 - \hat{\alpha}^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} n\right). \quad (4.96)$$

sendo $\varphi = \operatorname{am}(u, k)$ e $\operatorname{sen}^2 \varphi = \operatorname{sn}^2(u, k)$. Por simplicidade, anotar-se-á apenas $\operatorname{sn}^2 u$.

Da relação (4.92):

$$\begin{aligned} \left(\frac{C-A}{AC}\right) \frac{\Psi_0}{n} &= \left(\frac{C-A}{AC}\right) \frac{\Psi_0}{\sqrt{ab}} \frac{C}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{\Psi_0}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}} \therefore \\ \left(\frac{C-A}{AC}\right) \frac{\Psi_0}{n} &= \gamma \frac{\Psi_0}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}}. \end{aligned} \quad (4.97)$$

Substituindo a identidade (4.97), a equação (4.96) pode ser integrada:

$$\psi - \psi_0 = \frac{\Psi_0}{C} t + \frac{\Psi_0 \gamma}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}} \int_0^t \frac{-\hat{\alpha}^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{1 - \hat{\alpha}^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} n dt. \quad (4.98)$$

A integral no segundo membro de (4.98) é uma combinação das integrais elípticas de primeira e terceira espécies. Para prová-lo, basta observar que $u = nt$ implica $du = ndt$. Sabendo ainda que:

$$\frac{d}{du} \operatorname{am}(u, k) = \operatorname{dn}(u, k) \Rightarrow du = \frac{d\varphi}{\operatorname{dn}u} \therefore$$

$$du = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}, \quad (4.99)$$

e como $\varphi = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sn}u)$, os limites de integração mudam de 0 a t para 0 a φ .

Levando todos estes resultados em (4.98), e fazendo a identificação da variável de integração $\vartheta \equiv \varphi$ (para torná-la distinta do limite de integração φ):

$$\psi - \psi_0 = \frac{\Psi_0}{C} t + \frac{\Psi_0 \gamma}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}} \int_0^\varphi \frac{-\hat{\alpha}^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}{(1 - \hat{\alpha}^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta)} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}} \therefore$$

$$\psi - \psi_0 = \frac{\Psi_0}{C} t + \frac{\Psi_0 \gamma}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}} \int_0^\varphi \left[\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}} - \frac{1}{(1 - \hat{\alpha}^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta) \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}} \right] d\vartheta \therefore$$

$$\psi - \psi_0 = \frac{\Psi_0}{C} t + \frac{\Psi_0 \gamma}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}} \left(\int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}} - \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{(1 - \hat{\alpha}^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta) \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}} \right),$$

e como $F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}}$ e $\Pi(\varphi, \hat{\alpha}^2, k) = \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{(1 - \hat{\alpha}^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta) \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}}$, sendo

$\varphi = \operatorname{am}(u, k)$:

$$\psi = \psi_0 + \frac{\Psi_0}{C} t + \frac{\Psi_0 \gamma}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}} [F(\operatorname{am}(u, k), k) - \Pi(\operatorname{am}(u, k), \hat{\alpha}^2, k)], \quad (4.100)$$

com $t_0 = 0$, a solução é idêntica a (4.63).

É apropriado destacar que Whittaker (1961) não apresentou sua solução em termos de integrais elípticas incompletas. Em lugar disso, a solução foi representada em seu trabalho como uma combinação das funções Theta de Jacobi, bem como outras funções especiais que figuram na teoria das funções elípticas.

CAPÍTULO 5 SOLUÇÕES PARTICULARES DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO ROTACIONAL LIVRE DE TORQUES EXTERNOS

Neste capítulo, examinam-se alguns casos particulares das equações do movimento rotacional expressas em variáveis não-singulares $(\Psi, \Xi, H; \psi, \xi, h)$, quando torques externos não são considerados. Estes casos são importantes, pois aplicam-se a situações em que o ângulo J entre o vetor momento angular de rotação \vec{S} e o eixo OC do sistema de eixos principais do satélite é zero ou muito próximo de zero. Mostra-se que estas soluções aproximadas dependem apenas de funções elementares, mas que concordam muito bem com as soluções gerais em termos de funções e integrais elípticas. Portanto, para estes casos, pode-se utilizar as soluções deduzidas neste capítulo em lugar das complexas soluções dadas por (4.65), (4.67) e (4.68), contando inclusive com o fato de que são mais fáceis de implementar numericamente. Nas comparações realizadas, são usados dados de um satélite fictício de pequeno porte, com características similares a dos Satélites Brasileiros de Coleta de Dados (SCD1 e SCD2).

5.1 SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES PARA O CASO $J = 0$

Se $J = 0$, tem-se que $\Xi = 0$ e $\xi = 0$ pelas relações (3.74) e (3.76). As equações (4.39), (4.41) e (4.42) ficam:

$$\frac{d\Xi}{dt} = 0, \quad (5.1)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\Psi}{C}, \quad (5.2)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = 0. \quad (5.3)$$

As soluções das equações do movimento rotacional quando $J = 0$ são, portanto:

$$\Psi = \Psi_0 , \quad (5.4)$$

$$\Xi = \Xi_0 = 0 , \quad (5.5)$$

$$H = H_0 , \quad (5.6)$$

$$\psi = \frac{\Psi_0}{C}t + \psi_0 , \quad (5.7)$$

$$\xi = \xi_0 = 0 , \quad (5.8)$$

$$h = h_0 , \quad (5.9)$$

em que $\Psi_0, \Xi_0, H_0, \psi_0, \xi_0, h_0$ são as constantes relacionadas às condições iniciais do problema. Neste caso, apenas o ângulo ψ varia linearmente com o tempo, sendo esta variação associada ao movimento de rotação do satélite. Com efeito, o fato de ser $\Xi = 0$ e $\xi = 0$ implica que $\omega_A = \omega_B = 0$, quando analisam-se as relações (3.82) e (3.83), ou seja, as componentes da velocidade de rotação nos eixos principais de inércia OA e OB são nulas, com o eixo de rotação coincidindo com o eixo principal de inércia OC, o que era esperado uma vez que o ângulo J é nulo. A partir de (3.83):

$$|\vec{\omega}| = \omega_c = \frac{\sqrt{\Psi^2 - \Xi^2}}{C} \cos \xi = \frac{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}}{C} \cos \xi_0 = \frac{\Psi_0}{C} . \quad (5.10)$$

Portanto, o coeficiente angular da função (5.7) corresponde justamente ao módulo da velocidade de rotação do satélite.

Pode-se ainda mostrar que as soluções gerais (4.65), (4.67) e (4.68) se reduzem às soluções particulares (5.5), (5.7) e (5.8). No caso das variáveis Ξ e ξ esta demonstração é imediata, uma vez que $J_0 = 0 \Rightarrow \Xi_0 = 0$. De (4.71) e (4.72), observa-se que $k = 0$ e $\hat{\alpha}^2 = 0$, e substituindo este resultado em (4.67), tem-se que:

$$\psi = \psi_0 + \frac{\Psi_0}{C}(t - t_0) + \gamma[F(\text{am}(u,0),0) - \Pi(\text{am}(u,0),0,0)].$$

Introduzindo as definições de $F(\text{am}(u,0),0)$ e $\Pi(\text{am}(u,0),0,0)$:

$$\psi = \psi_0 + \frac{\Psi_0}{C} t + \gamma \left[\int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-0^2 \cdot \text{sen}^2 \vartheta}} - \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{(1-0 \cdot \text{sen}^2 \vartheta) \sqrt{1-0^2 \cdot \text{sen}^2 \vartheta}} \right],$$

ou seja,

$$\psi = \psi_0 + \frac{\Psi_0}{C} t + \gamma \left(\int_0^\varphi d\vartheta - \int_0^\varphi d\vartheta \right),$$

e portanto:

$$\psi = \frac{\Psi_0}{C} t + \psi_0,$$

que corresponde a solução dada por (5.7), considerando-se $t_0 = 0$.

5.2 SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES PARA O CASO $J \approx 0$

Quando $J \approx 0$, tem-se que $\Xi \approx 0$ e $\xi \approx 0$ por (3.74) e (3.76). É útil analisar as soluções para dois casos distintos: quando o satélite tem dois momentos principais de inércia iguais $A = B$ (satélite simétrico) e quando os três momentos principais de inércia são diferentes.

5.2.1 Satélite simétrico, com dois momentos principais de inércia iguais ($A = B$)

Para o caso $A = B$, as equações (4.39), (4.41) e (4.42) se reduzem a:

$$\frac{d\Xi}{dt} = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) (\Psi^2 - \Xi^2) \cos \xi \text{ sen } \xi, \quad (5.11)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) \Psi \cos^2 \xi + \frac{\Psi}{A}, \quad (5.12)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = - \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) \Xi \cos^2 \xi. \quad (5.13)$$

Do fato de Ξ e ξ serem muito pequenos ($\Xi \approx 0$ e $\xi \approx 0$), utilizando expansões em série de Taylor, pode-se adotar aproximações tais como $\sin \xi \approx \xi$ e $\cos \xi \approx 1$, de forma que:

$$\frac{d\Xi}{dt} = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) (\Psi^2 - \Xi^2) \xi, \quad (5.14)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\Psi}{C}, \quad (5.15)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = - \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) \Xi. \quad (5.16)$$

Desprezando-se termos de segunda ordem em (5.14):

$$\frac{d\Xi}{dt} = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) \Psi^2 \xi. \quad (5.17)$$

A solução de (5.15) é a mesma que para o caso de $J = 0$, dada por (5.7), quando são feitas as aproximações sugeridas. Para a solução de (5.16) e (5.17) adota-se inicialmente, por comodidade de notação:

$$\bar{\eta} = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) \Psi_0^2, \quad (5.18)$$

de modo que substituindo (5.18) em (5.16) e (5.17), obtém-se:

$$\frac{d\Xi}{dt} = \bar{\eta} \xi, \quad (5.19)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{\bar{\eta}}{\Psi_0^2} \Xi. \quad (5.20)$$

Derivando (5.20):

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{\bar{\eta}}{\Psi_0^2} \frac{d\Xi}{dt} \Rightarrow \frac{d\Xi}{dt} = -\frac{\Psi_0^2}{\bar{\eta}} \frac{d^2\xi}{dt^2}. \quad (5.21)$$

Pela substituição de (5.21) em (5.19), obtém-se a equação para a variável ξ :

$$-\frac{\Psi_0^2}{\bar{\eta}} \frac{d^2\xi}{dt^2} = \bar{\eta} \xi \therefore$$

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \left(\frac{\bar{\eta}}{\Psi_0} \right)^2 \xi = 0. \quad (5.22)$$

A (5.22) é simplesmente a equação do oscilador harmônico, cuja solução é dada por:

$$\xi(t) = \xi_m \cos(\eta t + \bar{\phi}), \quad (5.23)$$

em que:

$$\eta = \frac{\bar{\eta}}{\Psi_0} = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) \Psi_0. \quad (5.24)$$

Aplicando-se a condição inicial $t_0 = 0$ em (5.23):

$$\xi(0) = \xi_0 = \xi_m \cos(0 + \bar{\phi}),$$

sendo portanto

$$\xi_m = \frac{\xi_0}{\cos \bar{\phi}}, \quad (5.25)$$

e o ângulo ξ , a partir de (5.23) e (5.25) é dado por

$$\xi(t) = \frac{\xi_0}{\cos \bar{\phi}} \cos(\eta t + \bar{\phi}), \quad (5.26)$$

que pode ser reescrita como:

$$\xi(t) = \frac{\xi_0}{\cos \bar{\phi}} (\cos \eta t \cos \bar{\phi} - \text{sen } \eta t \text{ sen } \bar{\phi}). \therefore$$

$$\xi(t) = \xi_0 \cos \eta t - \xi_0 \tan \bar{\phi} \text{ sen } \eta t. \quad (5.27)$$

Substituindo as expressões (5.24) e (5.27) em (5.19):

$$\frac{d\Psi}{dt} = \eta \Psi_0 \xi_0 \cos \eta t - \eta \Psi_0 \xi_0 \tan \bar{\phi} \text{ sen } \eta t. \quad (5.28)$$

Integrando:

$$\Psi(t) = \Psi_0 \xi_0 \text{ sen } \eta t + \Psi_0 \xi_0 \tan \bar{\phi} \cos \eta t. \quad (5.29)$$

A solução geral de Ξ dada por (5.29) fica:

$$\Xi(t) = \Psi_0 \xi_0 \operatorname{sen} \eta t + \Psi_0 \xi_0 \frac{\operatorname{sen} \bar{\phi}}{\cos \bar{\phi}} \cos \eta t.$$

Reagrupando os termos:

$$\Xi(t) = \frac{\Psi_0 \xi_0}{\cos \bar{\phi}} (\cos \bar{\phi} \operatorname{sen} \eta t + \operatorname{sen} \bar{\phi} \cos \eta t),$$

ou seja:

$$\Xi(t) = \frac{\Psi_0 \xi_0}{\cos \bar{\phi}} \operatorname{sen}(\eta t + \bar{\phi}). \quad (5.30)$$

Da condição inicial, para $t_0 = 0$:

$$\Xi(0) = \Xi_0 = \Psi_0 \xi_0 \tan \bar{\phi} \therefore$$

$$\tan \bar{\phi} = \frac{\Xi_0}{\Psi_0 \xi_0}. \quad (5.31)$$

Observe-se ainda que, a partir de (5.31):

$$\begin{aligned} \tan^2 \bar{\phi} &= \frac{\Xi_0^2}{\Psi_0^2 \xi_0^2} \Rightarrow (\sec^2 \bar{\phi} - 1) \Psi_0^2 \xi_0^2 = \Xi_0^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\Psi_0^2 \xi_0^2}{\cos^2 \bar{\phi}} - \Psi_0^2 \xi_0^2 = \Xi_0^2 \Rightarrow \frac{\Psi_0^2 \xi_0^2}{\cos^2 \bar{\phi}} = \Xi_0^2 + \Psi_0^2 \xi_0^2 \therefore \end{aligned}$$

$$\frac{\xi_0}{\cos \bar{\phi}} = \frac{\sqrt{\Xi_0^2 + \Psi_0^2 \xi_0^2}}{\Psi_0}. \quad (5.32)$$

A partir dos resultados (5.31) e (5.32), a solução geral do sistema para as variáveis $\Xi(t)$ e $\xi(t)$ pode ser reduzida à seguinte forma:

$$\Xi(t) = \delta \operatorname{sen}(\eta t + \bar{\phi}), \quad (5.33)$$

$$\xi(t) = \frac{\delta}{\Psi_0} \cos(\eta t + \bar{\phi}), \quad (5.34)$$

em que:

$$\eta = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) \Psi_0, \quad (5.35)$$

$$\bar{\phi} = \arctan \left(\frac{\Xi_0}{\Psi_0 \xi_0} \right), \quad (5.36)$$

$$\delta = \sqrt{\Xi_0^2 + \Psi_0^2 \xi_0^2}. \quad (5.37)$$

Esta solução é válida qualquer que seja o valor de ξ_0 . No entanto, pela escolha adotada no desenvolvimento deste trabalho, $\xi_0 = 0$, tem-se simplesmente $\bar{\phi} = \frac{\pi}{2}$ e $\delta = \Xi_0$, e portanto:

$$\Xi(t) = \Xi_0 \operatorname{sen} \left(\eta t + \frac{\pi}{2} \right),$$

ou seja:

$$\Xi(t) = \Xi_0 \cos \eta t. \quad (5.38)$$

E também:

$$\xi(t) = \frac{\bar{\mathbb{E}}_0}{\bar{\Psi}_0} \cos\left(\eta t + \frac{\pi}{2}\right),$$

isto é:

$$\xi(t) = -\frac{\bar{\mathbb{E}}_0}{\bar{\Psi}_0} \text{sen } \eta t. \quad (5.39)$$

Esta variação periódica em ξ corresponde a oscilações do plano principal de inércia AC em relação ao plano perpendicular ao momento angular $\bar{\mathbf{S}}$.

5.2.2 Satélite com três momentos principais de inércia diferentes

Como foi visto no Capítulo 4, a solução geral das equações do movimento rotacional pode ser expressa em termos de funções elípticas de Jacobi e integrais elípticas. Mas considerando-se que o ângulo J é pequeno, pode-se da mesma forma obter soluções aproximadas adequadas mesmo para o caso de considerar-se os três momentos principais de inércia diferentes.

Com as aproximações sugeridas na seção anterior, e também desprezando-se termos de segunda ordem das variáveis, as equações (4.39), (4.41) e (4.42) para $\bar{\mathbb{E}}$, $\bar{\Psi}$ e $\bar{\xi}$ tornam-se:

$$\frac{d\bar{\mathbb{E}}}{dt} = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right) \bar{\Psi}^2 \bar{\xi}, \quad (5.40)$$

$$\frac{d\bar{\Psi}}{dt} = \frac{\bar{\Psi}}{C}, \quad (5.41)$$

$$\frac{d\bar{\xi}}{dt} = -\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) \bar{\mathbb{E}}. \quad (5.42)$$

A solução de (5.41) é mais uma vez a função $\psi(t) = \frac{\Psi_0}{C}t + \psi_0$, dada por (5.7), de modo similar a equação (5.15), porém é importante destacar que o coeficiente $\frac{\Psi_0}{C}$ não representa mais o módulo da velocidade de rotação do satélite, mas apenas está relacionado à maior componente de $\vec{\omega}$ que está na direção do eixo OC.

As soluções de (5.40) e (5.42) foram obtidas com o auxílio do software MAPLE V, Versão 5, e são as seguintes:

$$\Xi(t) = \Xi_0 \cos Kt + \frac{ACK}{A-C} \xi_0 \sin Kt, \quad (5.43)$$

$$\xi(t) = \xi_0 \cos Kt + \frac{C-A}{ACK} \Xi_0 \sin Kt, \quad (5.44)$$

em que:

$$K = \frac{\Psi_0}{C} \sqrt{\frac{AB - AC - BC + C^2}{AB}}. \quad (5.45)$$

Novamente, assumindo $\xi_0 = 0$:

$$\Xi(t) = \Xi_0 \cos Kt, \quad (5.46)$$

$$\xi(t) = \phi \Xi_0 \sin Kt, \quad (5.47)$$

em que

$$\phi = \frac{C-A}{ACK}. \quad (5.48)$$

Essas variações periódicas em Ξ e ξ correspondem a oscilações do plano principal de inércia AC em relação ao plano perpendicular ao momento angular \vec{S} .

Pode-se ainda mostrar como as soluções (5.46) e (5.47) se reduzem a (5.38) e (5.39) quando se faz $A = B$. De fato, neste caso, as constantes dadas em (5.45) e (5.48) ficam:

$$K_{A=B} = \frac{\Psi_0}{C} \sqrt{\frac{A^2 - 2AC + C^2}{A^2}} = \frac{\Psi_0}{C} \sqrt{\frac{(A-C)^2}{A^2}} = \frac{(A-C)}{AC} \Psi_0,$$

$$\phi_{A=B} = \frac{C-A}{ACK_{A=B}} = \frac{C-A}{AC\eta} = -\frac{1}{\eta} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) = -\frac{1}{\eta} \frac{\eta}{\Psi_0},$$

e simplificando:

$$K_{A=B} = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) \Psi_0 = \eta, \quad (5.49)$$

$$\phi_{A=B} = -\frac{1}{\Psi_0}. \quad (5.50)$$

Levando (5.49) e (5.50) em (5.46) e (5.47):

$$\Xi_{A=B}(t) = \Xi_0 \cos K_{A=B} t = \Xi_0 \cos \eta t$$

e

$$\xi_{A=B}(t) = \phi_{A=B} \Xi_0 \sin K_{A=B} t = -\frac{1}{\Psi_0} \Xi_0 \sin \eta t = -\frac{\Xi_0}{\Psi_0} \sin \eta t,$$

que correspondem as soluções de Ξ e ξ para momentos principais de inércia A e B iguais, dadas por (5.38) e (5.39) respectivamente.

5.3 COMPARAÇÕES ENTRE AS SOLUÇÕES ANALÍTICAS

O objetivo desta seção é mostrar como as soluções obtidas no Capítulo 5 têm boa concordância com as soluções gerais das equações deduzidas no Capítulo 4.

Como se vê, as variáveis Ψ , H e h permanecem constantes, qualquer que seja o caso, devido à ausência de torques externos. A variável angular ψ apresenta variação linear em todas as situações, e como já foi comentado, tal variação está relacionada à rotação do satélite, cuja direção coincide ($J = 0$) ou quase coincide ($J \approx 0$) com a do eixo de maior momento principal de inércia OC. Quanto às variáveis Ξ e ξ , seu comportamento muda conforme se considera $J = 0$ ou $J \approx 0$.

No que segue, as soluções obtidas neste Capítulo para as equações do movimento são implementadas numericamente apenas para os casos em que $J \approx 0$, uma vez que os casos em que $J = 0$ são triviais. É suficiente também considerar-se que o satélite possui os três momentos principais de inércia diferentes, já que ficou demonstrado na seção 5.2.2 que as soluções para $A \neq B$ englobam naturalmente o caso $A = B$.

Para as implementações, são utilizados dados relacionados a um satélite fictício de pequeno porte, com características semelhantes às dos Satélites Brasileiros de Coleta de Dados (SCD1 e SCD2), que estão apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Dados de um satélite fictício de pequeno porte.

DADOS DO SATÉLITE		
MOMENTOS PRINCIPAIS DE INÉRCIA		
$I_x = A = 10,67 \text{ kg.m}^2$	$I_y = B = 10,90 \text{ kg.m}^2$	$I_z = C = 11,06 \text{ kg.m}^2$
VARIÁVEIS DE ANDOYER NO INSTANTE INICIAL $t_0 = 0s$		
$G_0 = 58,0583 \text{ kg.m}^2/s$	$g_0 = 1,1497 \text{ rad}$	$J_0 \approx 0,0087 \text{ rad}$
$H_0 = 58,0569 \text{ kg.m}^2/s$	$h_0 = 1,3905 \text{ rad}$	
$L_0 = 58,0561 \text{ kg.m}^2/s$	$l_0 = \pi/2 \text{ rad}$	

5.3.1 Variável ψ

A solução geral para a função $\psi(t)$ dada em (4.67) depende das integrais elípticas de primeira e terceira espécies $F(\varphi, k)$ e $\Pi(\varphi, \hat{\alpha}^2, k)$, em que $\varphi = \text{am}(u, k)$, sendo u e k dados por (4.70) e (4.71) respectivamente. A implementação numérica das integrais elípticas costuma apresentar algumas dificuldades, e vários algoritmos têm sido desenvolvidos com o objetivo de computar integrais elípticas incompletas de forma geral (FUKUSHIMA; ISHIZAKI, 1994b).

Para os objetivos desta seção, pode-se fazer uso, com proveito, das expansões em série das integrais F e Π , apresentadas por Byrd e Friedman (1971), fórmulas 902.00 e 906.02:

$$F(\varphi, k) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{m} (-k^2)^m t_{2m}(\varphi), \quad (5.51)$$

$$\Pi(\varphi, \hat{\alpha}^2, k) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m (\hat{\alpha}^2)^m t_{2m}(\varphi) \binom{-\frac{1}{2}}{j} \left(\frac{k^2}{-\hat{\alpha}^2} \right)^j, \quad (5.52)$$

em que

$$t_0(\varphi) = \varphi, \quad (5.53)$$

$$t_{2m}(\varphi) = \frac{2m-1}{2m} t_{2(m-1)}(\varphi) - \frac{1}{2m} \text{sen}^{2m-1} \varphi \cos \varphi, \quad (5.54)$$

sendo $0 < \varphi < \pi/2$, $k^2 < 1$ e $|\hat{\alpha}^2| < 1$. Todas estas condições são satisfeitas a partir dos dados do problema.

Por comparação direta das soluções (4.67) e (5.7), obteve-se os resultados apresentados na Tabela 2 e nos gráficos das Figuras 5 e 6. O intervalo de tempo considerado varia conforme a conveniência na apresentação dos resultados.

Tabela 2: Comparação entre a solução geral dada por (4.67) e a solução aproximada dada por (5.7) para a variável ψ , em radianos, para um período de 3600s.

$\psi(t)$ (em rad)			
Tempo (s)	Solução geral dada por (4.67)	Solução aproximada dada por (5.7)	$\Delta\psi(t)$ (sol. geral menos sol. aprox.) 10^{-4} rad
0	2,720496327	2,720496327	0
200	1052,599320	1052,599339	-0,19
400	2102,478080	2102,478181	-1,01
600	3152,356848	3152,357024	-1,46
800	4202,236054	4202,235866	1,88
1000	5252,114869	5252,114709	1,6
1200	6301,993624	6301,993552	0,72
1400	7351,872401	7351,872394	0,07
1600	8401,751236	8401,751237	-0,01
1800	9451,630041	9451,630079	-0,38
2000	10501,50880	10501,50893	-1,3
2200	11551,38759	11551,38777	-1,8
2400	12601,26680	12601,26661	1,9
2600	13651,14599	13651,14545	1,4
2800	14701,02435	14701,02430	0,5
3000	15750,90314	15750,90314	0
3200	16800,78198	16800,78198	0
3400	17850,66076	17850,66082	-0,6
3600	18900,53952	18900,53967	-1,5

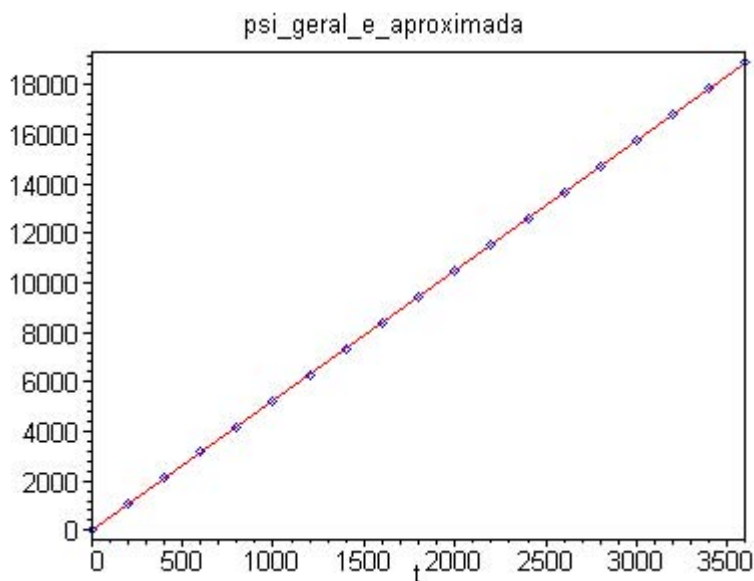


Figura 5: Comparação das soluções analíticas geral e aproximada para a função $\psi(t)$, para um período de 3600s (— solução geral; * solução aproximada).

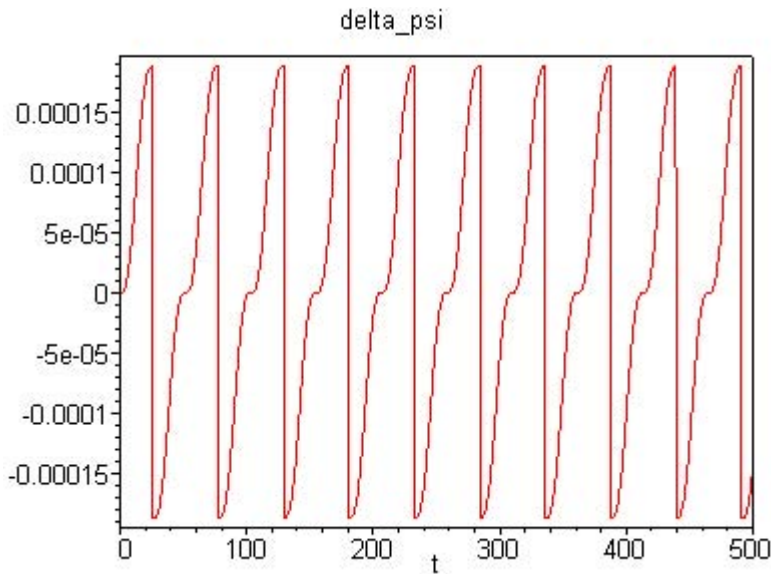


Figura 6: Gráfico de $\Delta\psi(t)$, para um período de 500s, tal que $\Delta\psi = \psi_{geral} - \psi_{aprox}$.

Para a variável $\psi(t)$, prevalece a variação linear, que está diretamente associada à rotação do satélite. O termo linear está relacionado com a componente da velocidade de rotação na direção do eixo OC.

As variações periódicas presentes na solução geral devem-se unicamente às integrais elípticas de primeira e terceira espécies, que são melhor visualizadas na variação da diferença $\Delta\psi(t)$ na Figura 6, uma vez que a terceira parcela da solução (4.67) corresponde justamente à diferença $\Delta\psi(t)$. São variações de curto período e de amplitude muito pequena, pois os parâmetros k e $\hat{\alpha}^2$ são pequenos quando $J \approx 0$, como se pode ver ao analisar as equações (4.71) e (4.72). Sem as integrais, as soluções geral e aproximada são idênticas, ou seja, a parcela da solução contendo as integrais elípticas pode ser desprezada. Para o satélite com as características dadas na Tabela 1, estes parâmetros assumem os seguintes valores:

$$k = 1,062688733 \times 10^{-2},$$

$$\hat{\alpha}^2 = -7,579029391 \times 10^{-5}.$$

5.3.2 Variável Ξ

Por comparação direta das soluções (4.65) e (5.46), obteve-se os resultados apresentados na Tabela 3 e nos gráficos das Figuras 7, 8, 9 e 10. O intervalo de tempo considerado varia conforme a conveniência na apresentação dos resultados.

Para evidenciar as variações de curto período de $\Xi(t)$, mostra-se a comparação dos resultados para um período menor nas Figuras 8 e 9, observando-se que a variável $\Xi(t)$ oscila em torno de zero.

Tabela 3: Comparação entre a solução geral dada por (4.65) e a solução aproximada dada por (5.46) para a variável Ξ , em $\text{kg.m}^2/\text{s}$, para um período de 3600s.

$\Xi(t)$ (em $\text{kg.m}^2/\text{s}$)			
Tempo (s)	Solução geral dada por (4.65) $10^{-1} \text{ kg.m}^2/\text{s}$	Solução aproximada dada por (5.46) $10^{-1} \text{ kg.m}^2/\text{s}$	$\Delta\Xi(t)$ (sol. geral menos sol. aprox.) $10^{-2} \text{ kg.m}^2/\text{s}$
0	5,054225955	5,054225955	0
200	3,463199547	3,469166501	-0,05966954
400	-0,3080462874	-0,2918285802	-0,162177072
600	-3,885376846	-3,869782517	-0,15594329
800	-5,016671963	-5,020525871	0,03853908
1000	-2,989563848	-3,022287731	0,32723883
1200	0,9195626608	0,8715942861	0,479683747
1400	4,249820667	4,218793347	0,31027320
1600	4,904568354	4,919874999	-0,15306645
1800	2,471508183	2,535105695	-0,63597512
2000	-1,517416145	-1,439736531	-0,77679614
2200	-4,551115090	-4,511545045	-0,39570045
2400	-4,719581790	-4,753615665	0,34033875
2600	-1,916731062	-2,014116548	0,97385486
2800	2,092724777	1,988679314	1,04045463
3000	4,784780199	4,744133210	0,40646989
3200	4,464461575	4,523964741	-0,59503166
3400	1,333476409	1,466268790	-1,32792381
3600	-2,636940406	-2,511102702	-1,25837704

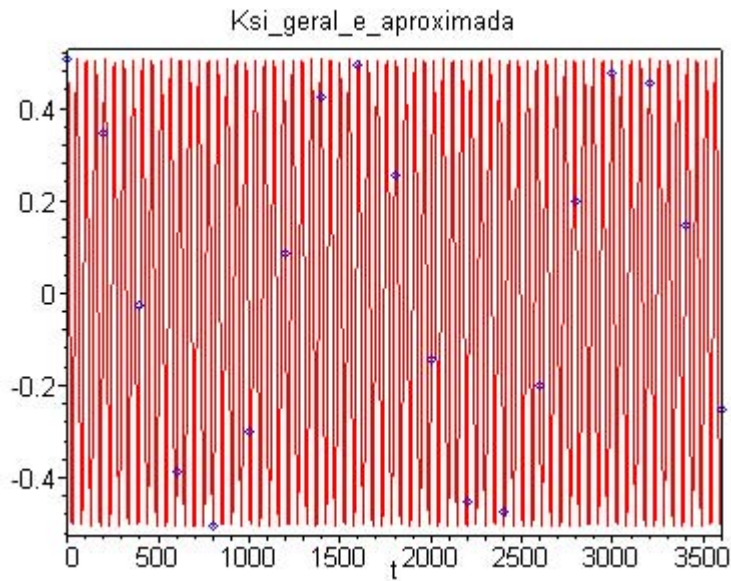


Figura 7: Comparação das soluções analíticas geral e aproximada para a função $\Xi(t)$, para um período de 3600s (— solução geral; * solução aproximada).

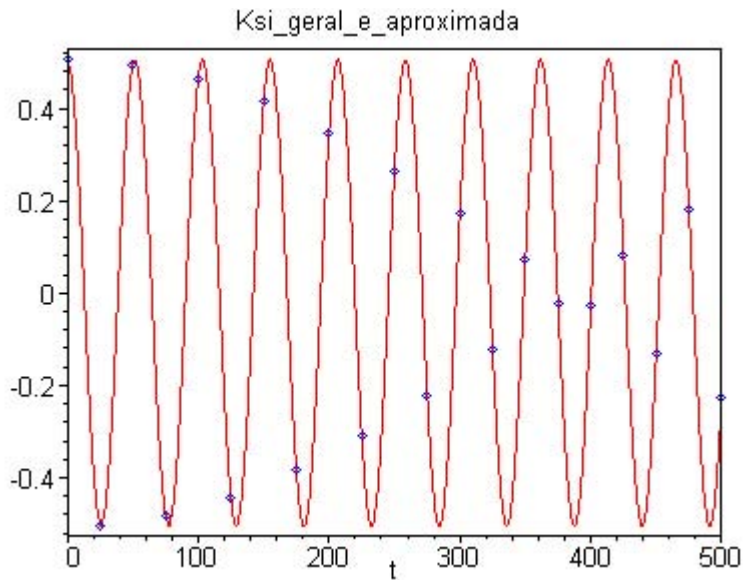


Figura 8: Comparação das soluções analíticas geral e aproximada para a função $\Xi(t)$, para um período de 500s (— solução geral; * solução aproximada).

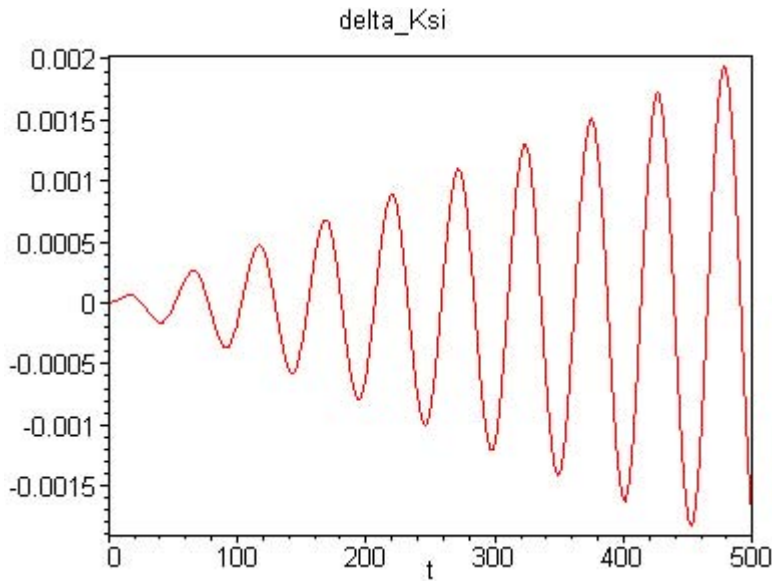


Figura 9: Gráfico de $\Delta\Xi(t)$, para um período de 500s, tal que $\Delta\Xi = \Xi_{geral} - \Xi_{aprox}$.

Num primeiro momento, a análise da Tabela 3 e da Figura 9 parecem indicar uma divergência das soluções, pois a amplitude de $\Delta\Xi(t)$ aumenta com o tempo dentro do pequeno período considerado. No entanto, ao considerar-se $\Delta\Xi(t)$ para um período muito maior (aqui de $1,6 \times 10^6$ s = 18,5 dias), percebe-se que tal diferença recua e tende a zero novamente, ou seja, ela apresenta uma variação de longo período. Este comportamento é evidenciado pela Figura 10.

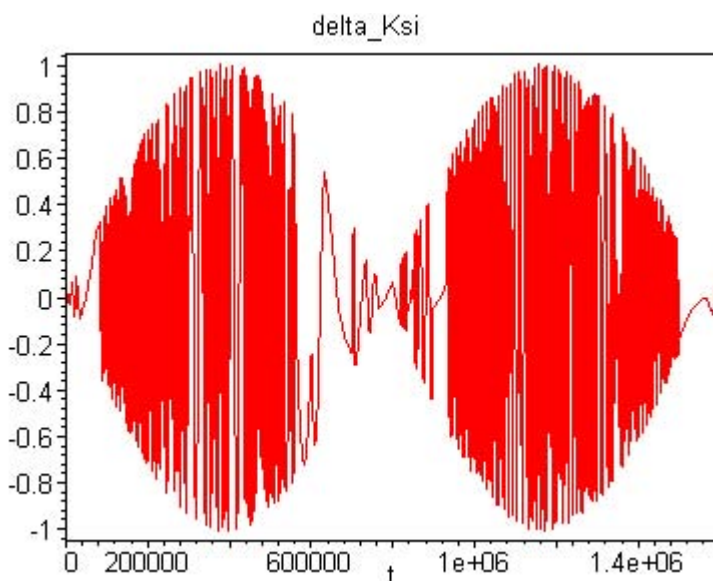


Figura 10: Variação periódica de $\Delta\Xi(t)$, evidenciada ao considerar-se um período de $1,6 \times 10^6$ s.

Apesar das diferenças entre as soluções geral e aproximada, salienta-se que a variável Ξ apresenta apenas variações de curto período em ambas as soluções e representa a projeção do momento angular de rotação \vec{S} no eixo principal de inércia OA, estando as variações periódicas relacionadas com o ângulo β , introduzido pela relação (3.66) e representado na Figura 3. As diferenças entre as soluções geral e aproximada têm o aspecto apresentado na Figura 10 em virtude de uma diferença entre os períodos das duas soluções. Enquanto a solução aproximada (5.46) tem período relacionado a uma função trigonométrica (função cosseno) a solução geral dada em (4.65) apresenta um período relacionado a uma função elíptica (função cosseno amplitude). Portanto, é preciso ter cuidado ao utilizar-se a solução aproximada, considerando apenas os intervalos de tempo em que a diferença entre as duas soluções tenha pequena ordem de grandeza e possa ser desprezada.

5.3.3 Variável ξ

Por comparação direta das soluções (4.68) e (5.47) obteve-se os resultados apresentados na Tabela 4 e nos gráficos das Figuras 11, 12, 13 e 14. O intervalo de tempo considerado varia conforme a conveniência na apresentação dos resultados. Para evidenciar as variações de curto período de $\xi(t)$, mostra-se a comparação dos resultados para um período menor nas Figuras 12 e 13, observando-se que a variável $\xi(t)$ oscila em torno do valor inicial $\xi_0 = 0$ e que $\Delta\xi(t)$ apresenta variação periódica.

Tabela 4: Comparação entre a solução geral dada por (4.68) e a solução aproximada dada por (5.47) para a variável ξ , em radianos, para um período de 3600s.

$\xi(t)$ (em rad)			
Tempo (s)	Solução geral dada por (4.68) 10^{-2} rad	Solução aproximada dada por (5.47) 10^{-2} rad	$\Delta\xi(t)$ (sol. geral menos sol. aprox.) 10^{-4} rad
0	0	0	0
200	-1,000568612	-0,9990059109	-0,15627011
400	-1,371195007	-1,371413891	0,0218884
600	-0,8786030068	-0,8836416675	0,50386607
800	0,1671543178	0,1583695593	0,87847585
1000	1,107665234	1,101048002	0,6617232

Tempo (s)	Solução geral dada por (4.68) 10^{-2} rad	Solução aproximada dada por (5.47) 10^{-2} rad	$\Delta\xi(t)$ (sol. geral menos sol. aprox.) 10^{-4} rad
1200	1,350820952	1,353125516	-0,2304564
1400	0,7435806353	0,7564937243	-1,29130890
1600	-0,3318242341	-0,3146272225	-1,63138120
1800	-1,198301978	-1,188407141	-0,9894837
2000	-1,310375465	-1,36792679	0,6417214
2200	-0,5975072881	-0,6192575337	2,17502456
2400	0,4915624041	0,4666891241	2,48732800
2600	1,271132476	1,259918451	1,1214025
2800	1,250459195	1,262899886	-1,2440691
3000	0,4425542254	0,4737634110	-3,12091856
3200	-0,6439952776	-0,6125276630	-3,14676146
3400	-1,325074955	-1,314628175	-1,0446780
3600	-1,171962021	-1,192165750	2,0203729

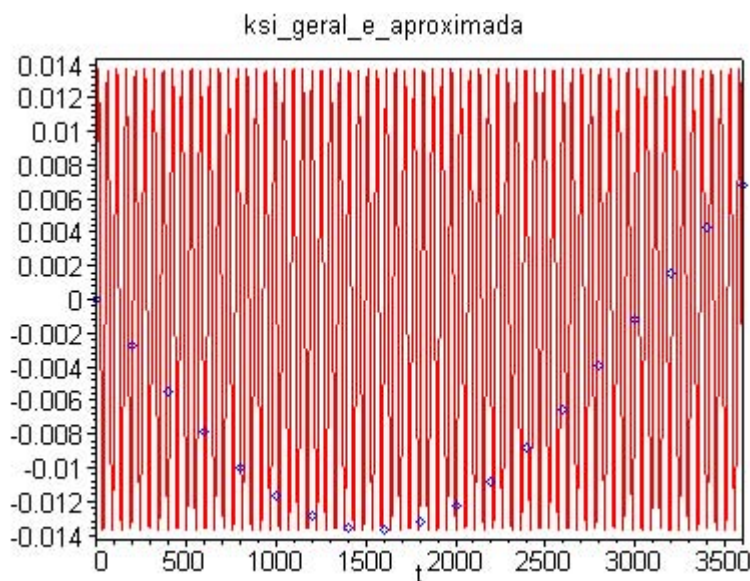


Figura 11: Comparação das soluções analíticas exata e aproximada para a função $\xi(t)$, para um período de 3600s (— solução geral; * solução aproximada).

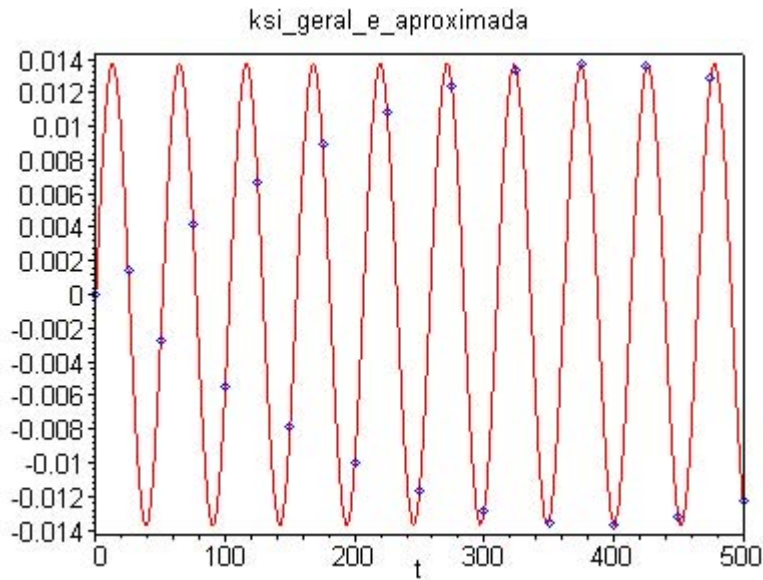


Figura 12: Comparação das soluções analíticas exata e aproximada para a função $\xi(t)$, para um período de 500s (— solução geral; * solução aproximada).

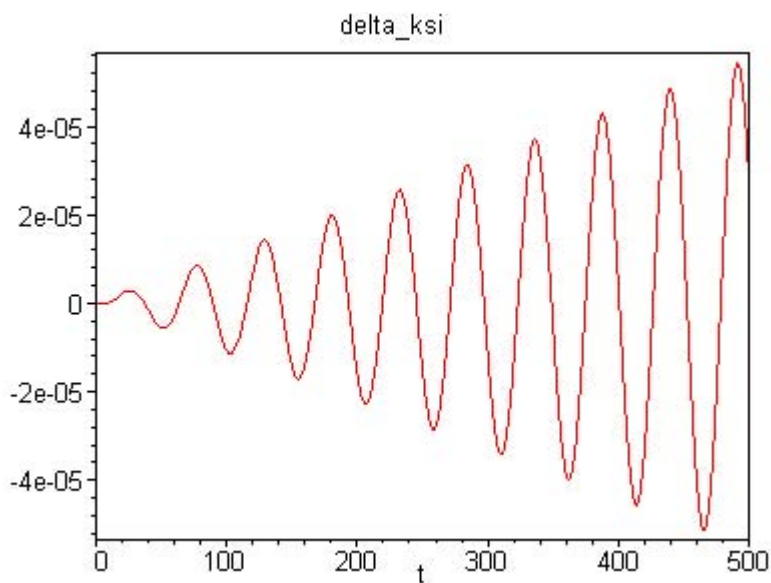


Figura 13: Gráfico de $\Delta\xi(t)$, para um período de 500s, tal que $\Delta\xi = \xi_{geral} - \xi_{aprox}$.

A análise da Tabela 4 e da Figura 13 parecem indicar uma divergência das soluções, pois a amplitude de $\Delta\xi(t)$ aumenta com o tempo dentro do pequeno período considerado. No entanto, ao considerar-se $\Delta\xi(t)$ para um período muito maior, percebe-se que tal diferença recua e tende a zero novamente, ou seja, ela apresenta uma variação de longo período. Este comportamento é evidenciado pela Figura 14. A amplitude máxima na diferença entre as soluções é da ordem de 10^{-2} rad.

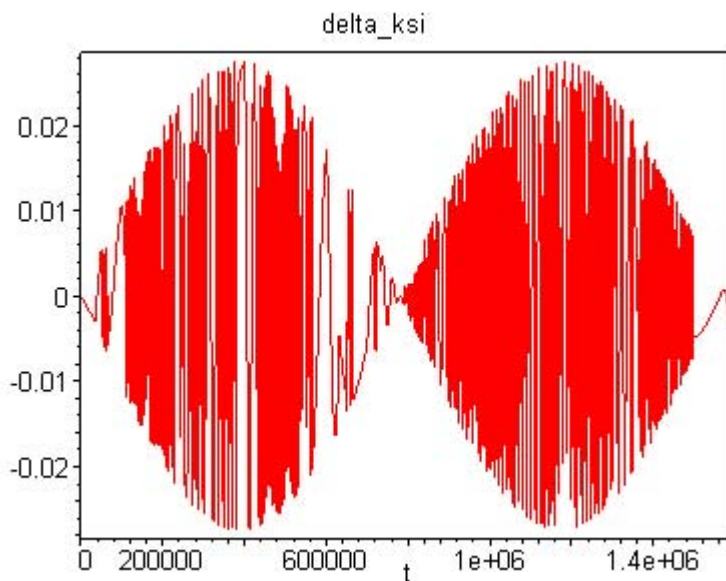


Figura 14: Variação periódica de $\Delta\xi(t)$, evidenciada ao considerar-se um período de $1,6 \times 10^6$ s.

Assim, do mesmo modo que para a variável Ξ , apesar das diferenças entre as soluções geral e aproximada, a variável ξ apresenta apenas variações de curto período em ambas as soluções e representa o ângulo entre o plano de inércia AC e o grande círculo conectando o eixo OA e \vec{S} . As diferenças entre as soluções geral e aproximada têm o aspecto apresentado na Figura 14 em virtude de uma diferença entre os períodos das duas soluções. Enquanto a solução aproximada (5.47) têm período relacionado a uma função trigonométrica (função seno) a solução geral dada em (4.68) apresenta um período relacionado a uma função elíptica (função com o mesmo

comportamento do seno amplitude). Portanto, é preciso ter cuidado ao utilizar-se a solução aproximada, considerando apenas os intervalos de tempo em que a diferença entre as duas soluções tenha pequena ordem de grandeza e possa ser desprezada.

A variável métrica Ξ e a variável angular ξ são justamente as duas variáveis diretamente influenciadas pelo pequeno valor do ângulo J , como se pode perceber ao analisar as equações (3.63) e (3.65). Para a variável ψ , a influência do ângulo J mostra-se justamente nas variações periódicas de curto período e pequena amplitude, que são representadas pela parcela contendo as integrais elípticas.

5.4 SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DO MRLTE

Com o objetivo de validar as soluções analíticas apresentadas anteriormente, foram obtidas soluções numéricas das equações do movimento rotacional pela aplicação do método de Runge-Kutta de 4ª ordem, realizada pelo software MAPLE V, com passo estático de 0,005.

Os resultados são apresentados nas Tabelas 5, 6 e 7 para as variáveis ψ , Ξ e ξ , respectivamente, e computadas suas diferenças em relação às respectivas soluções gerais e aproximadas, para um período de 3600s. Na representação gráfica do comportamento das variáveis apresentadas nas Figuras 15, 16 e 17, comparam-se as soluções numéricas unicamente com as soluções analíticas aproximadas, dadas pelas expressões (5.7), (5.38) e (5.39), respectivamente, para um período de 500s para melhor visualização dos resultados.

O objetivo de tais comparações é destacar a boa concordância das soluções aproximadas com os resultados obtidos pelo método numérico.

Tabela 5: Solução numérica obtida para a variável $\psi(t)$, e suas respectivas diferenças em relação às soluções analíticas geral e aproximada, para um período de 3600s.

$\psi(t)$ (em rad)			
Tempo (s)	Solução numérica obtida pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem	$\Delta\psi_1(t)$ (solução numérica menos solução geral) 10^{-2} rad	$\Delta\psi_2(t)$ (solução numérica menos solução aproximada) 10^{-2} rad
0	2,720496327	0	0
200	1052,600819	1,499	1,48
400	2102,481083	3,003	2,902
600	3152,361354	4,506	4,33
800	4202,241696	5,642	5,83
1000	5252,122012	7,143	7,303
1200	6302,002274	8,65	8,722
1400	7351,882581	1,018	1,0187
1600	8401,762911	1,1675	1,1674
1800	9451,643172	1,3131	1,3093
2000	10501,52343	1,463	1,45
2200	11551,40364	1,605	1,587
2400	12601,28387	1,707	1,726
2600	13651,16421	1,822	1,876
2800	14701,04450	2,015	2,02
3000	15750,92484	2,17	2,17
3200	16800,80517	2,319	2,319
3400	17850,68546	2,47	2,464
3600	18900,56577	2,625	2,61

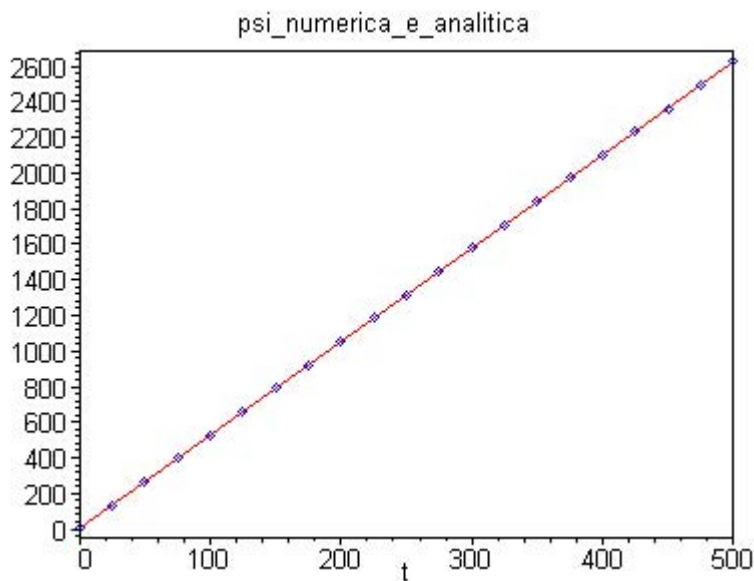


Figura 15: Comparação entre as soluções numérica e analítica aproximada para $\psi(t)$, considerando um período de 500s (— solução analítica; * solução numérica).

Tabela 6: Solução numérica obtida para a variável $\Xi(t)$, e suas respectivas diferenças em relação às soluções analíticas geral e aproximada, para um período de 3600s.

$\Xi(t)$ (em kg.m ² /s)			
Tempo (s)	Solução numérica obtida pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem 10 ⁻¹ kg.m ² /s	$\Delta\Xi_1(t)$ (solução numérica menos sol. geral) 10 ⁻⁶ kg.m ² /s	$\Delta\Xi_2(t)$ (solução numérica menos sol. aprox.) 10 ⁻² kg.m ² /s
0	5,054225955	0	0
200	3,463201705	0,2158	-0,05964796
400	-0,3080470348	-0,0747	-0,16218455
600	-3,885385596	-0,8750	-0,15603079
800	-5,016686129	-1,4166	0,03839742
1000	-2,989573677	-0,9829	0,32714054
1200	0,9195676548	0,4994	0,47973369
1400	4,249841357	2,0690	0,31048010
1600	4,904596522	2,8168	-0,15278477
1800	2,471520094	1,1911	-0,63585601
2000	-1,517428609	-1,2464	-0,77692078
2200	-4,551151682	-3,6592	-0,39606637
2400	-4,719618170	-3,6380	0,33997495
2600	-1,916744469	-1,3407	0,97372079
2800	2,092746899	2,2122	1,04067585
3000	4,784831197	5,0998	0,40697987
3200	4,464513350	5,1775	-0,59451391
3400	1,333494933	1,8524	-1,32773857
3600	-2,636971710	-3,1304	-1,25869008

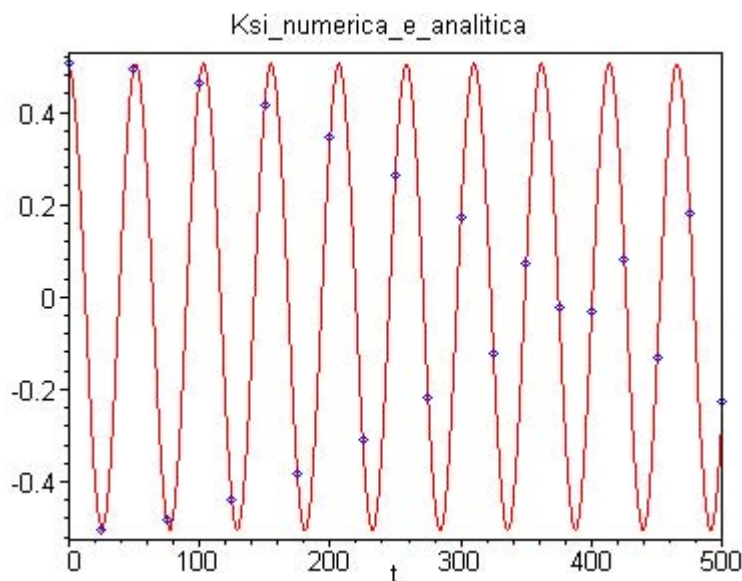


Figura 16: Comparação entre as soluções numérica e analítica aproximada para $\Xi(t)$, considerando um período de 500s (— solução analítica; * solução numérica).

Tabela 7: Solução numérica obtida para a variável $\xi(t)$, e suas respectivas diferenças em relação às soluções analíticas geral e aproximada, para um período de 3600s.

$\xi(t)$ (em rad)			
Tempo (s)	Solução numérica obtida pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem 10^{-2} rad	$\Delta\xi_1(t)$ (sol. numérica menos sol. geral.) 10^{-7} rad	$\Delta\xi_2(t)$ (sol. numérica menos sol. aprox.) 10^{-4} rad
0	0	0	0
200	-1,000569384	-0,07720	-0,15634731
400	-1,371197026	-0,20190	0,02168650
600	-0,8786049256	-0,19188	0,50367419
800	0,1671548367	0,05189	0,87852774
1000	1,107669311	0,40770	0,66213090
1200	1,350826724	0,57720	-0,22987920
1400	0,7435848040	0,41687	-1,29089203
1600	-0,3318261065	-0,18724	-1,71988840
1800	-1,198310355	-0,83770	-0,99032140
2000	-1,310384686	-0,92210	5,75421040
2200	-0,5975114628	-0,41747	2,17460709
2400	0,4915692317	0,68276	2,48801076
2600	1,271144691	1,22150	1,12262400
2800	1,250471515	1,23200	-1,24283710
3000	0,4425589352	0,47098	-3,12044758
3200	-0,6440020756	-0,67980	-3,14744126
3400	-1,325090788	-1,58330	-1,04626130
3600	-1,171977492	-1,54710	2,01882580

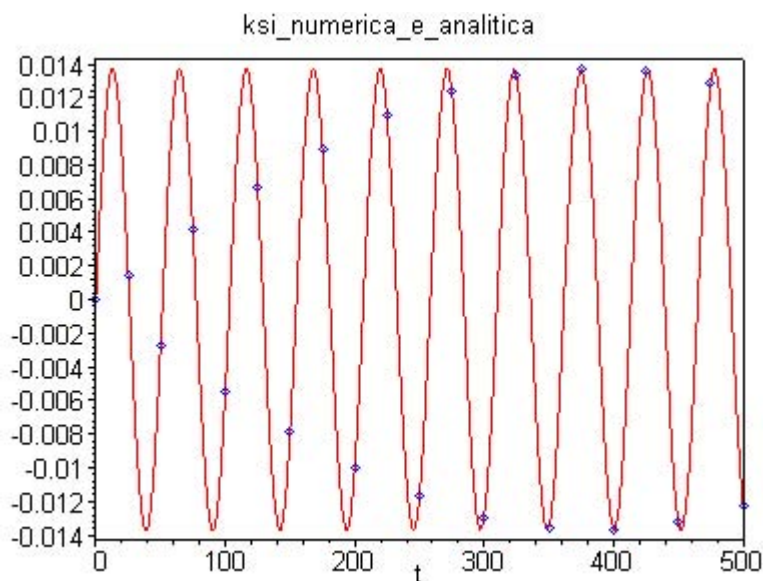


Figura 17: Comparação entre as soluções numérica e analítica aproximada para $\xi(t)$, considerando um período de 500s (— solução analítica; * solução numérica).

Pelos resultados apresentados, observa-se uma melhor concordância dos resultados numéricos com a solução geral do que com a solução aproximada. Este fato era esperado devido as aproximações consideradas nas soluções obtidas no Capítulo 5.

No entanto, na continuação desta dissertação, as soluções aproximadas (e não as soluções gerais) deverão ser utilizadas como solução de ordem zero no método de aproximações sucessivas, quando da integração das equações do movimento considerando-se a perturbação provocada pelo Torque de Gradiente de Gravidade, o que pode gerar limitações em suas aplicações.

CAPÍTULO 6 MOVIMENTO ROTACIONAL COM TORQUE DE GRADIENTE DE GRAVIDADE

A força gravitacional da Terra atrai distintos elementos de massa dm de um satélite com determinadas intensidades e direções, não iguais entre si, uma vez que cada elemento dm tem uma posição diferente em relação ao Centro de Massa da Terra. Essa diferença de atração em cada elemento de massa gera um torque, denominado Torque de Gradiente de Gravidade (TGG).

Este torque pode causar alterações no movimento rotacional do satélite, de modo que é importante incluí-lo nas equações que descrevem seu movimento rotacional. Neste trabalho apenas uma parcela do TGG será acrescentada à Hamiltoniana associada ao movimento rotacional. Esta parcela está relacionada à Hamiltoniana média devido ao TGG, na qual os termos não dependem diretamente do tempo, ou seja, independem da anomalia média e da variável angular de Andoyer l (ZANARDI, 1986). Esta parcela da Hamiltoniana do TGG já inclui os principais efeitos do Torque de Gradiente de Gravidade no movimento rotacional do satélite, associados com variações seculares ou variações de longo período nas variáveis envolvidas. Os demais termos da Hamiltoniana do TGG acrescentarão apenas variações periódicas de curto período nas soluções a serem determinadas. Sejam T a Hamiltoniana do movimento rotacional livre de torques externos (MRLTE), a qual é a mesma apresentada em (4.31), e Φ a Hamiltoniana média associada ao TGG, de modo que a Hamiltoniana T_{TGG} do movimento rotacional é agora dada por:

$$T_{TGG} = T + \Phi, \quad (6.1)$$

Utilizando esta Hamiltoniana é possível deduzir as equações do movimento rotacional sob a influência do Torque de Gradiente de Gravidade, utilizando (4.2) - (4.7), substituindo T por T_{TGG} .

Na próxima seção, a parcela da Hamiltoniana associada ao TGG é apresentada em termos das variáveis de Andoyer e dos elementos orbitais clássicos, e então

transformada para as variáveis canônicas não-singulares de Fukushima $(\Psi, \Xi, H; \psi, \xi, h)$, através da transformação \mathfrak{S} . Este procedimento possibilita que as equações dinâmicas sejam obtidas em termos das variáveis de Fukushima, podendo ser integradas na continuidade desta dissertação, de modo a permitir uma análise da atitude de um satélite artificial em variáveis não-singulares, sob a influência do TGG.

6.1 HAMILTONIANA MÉDIA ASSOCIADA AO TGG

A Hamiltoniana média $\Phi = \Phi(L, G, H, h)$, associada com o Torque de Gradiente de Gravidade, com expansões até o quadrado da excentricidade da órbita do satélite, é expressa por (ZANARDI, 1986, 2005; ZANARDI; VILHENA DE MORAES, 1999):

$$\Phi = \frac{\mu}{a^3} \left(\frac{2C - A - B}{4} \right) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \left(3 \frac{L^2}{G^2} - 1 \right) \left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{8} \left(1 + \cos^2 i + \frac{H^2}{G^2} - 3 \cos^2 i \frac{H^2}{G^2} \right) - \frac{3}{4} \sin 2i \frac{H}{G^2} \sqrt{G^2 - H^2} \cos(\Omega - h) - \frac{3}{8} \sin^2 i \frac{G^2 - H^2}{G^2} \cos(2\Omega - 2h) \right], \quad (6.2)$$

em que:

μ - constante gravitacional da Terra;

a - semi-eixo maior da órbita;

e - excentricidade da órbita;

i - inclinação orbital;

Ω - longitude do nodo ascendente.

Pela aplicação da transformação \mathfrak{S} , dada em (3.1), às variáveis $(L, G, H; h)$, obtém-se a parcela Φ em variáveis não-singulares. De acordo com a relação (3.90),

$$L^2 = (\Psi^2 - \Xi^2) \cos^2 \xi. \quad (6.3)$$

Então a expressão (6.2), tal que $\Phi = \Phi(\Psi, \Xi, H, h)$, tem a forma:

$$\begin{aligned}
\Phi = & \frac{\mu}{a^3} \left(\frac{2C - A - B}{4} \right) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \left(3 \frac{(\Psi^2 - \Xi^2)}{\Psi^2} \cos^2 \xi - 1 \right) \left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{8} \left(1 + \cos^2 i + \frac{H^2}{\Psi^2} - \right. \right. \\
& - 3 \cos^2 i \frac{H^2}{\Psi^2} \left. \left. \right) - \frac{3}{4} \operatorname{sen} 2i \frac{H}{\Psi^2} \sqrt{\Psi^2 - H^2} \cos(\Omega - h) - \right. \\
& \left. \left. - \frac{3}{8} \operatorname{sen}^2 i \frac{\Psi^2 - H^2}{\Psi^2} \cos(2\Omega - 2h) \right] . \tag{6.4}
\end{aligned}$$

Substituindo (4.31) e (6.4) em (6.1) tem-se finalmente que a Hamiltoniana T_{TGG} em termos das variáveis não singulares é dada por:

$$\begin{aligned}
T_{TGG} = & \frac{1}{2} \left[\frac{\Xi^2}{A} + \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \xi}{B} + \frac{\cos^2 \xi}{C} \right) (\Psi^2 - \Xi^2) \right] + \\
& + \frac{\mu}{a^3} \left(\frac{2C - A - B}{4} \right) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \left(3 \frac{(\Psi^2 - \Xi^2)}{\Psi^2} \cos^2 \xi - 1 \right) \left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{8} \left(1 + \cos^2 i + \frac{H^2}{\Psi^2} - \right. \right. \\
& - 3 \cos^2 i \frac{H^2}{\Psi^2} \left. \left. \right) - \frac{3}{4} \operatorname{sen} 2i \frac{H}{\Psi^2} \sqrt{\Psi^2 - H^2} \cos(\Omega - h) - \right. \\
& \left. \left. - \frac{3}{8} \operatorname{sen}^2 i \frac{\Psi^2 - H^2}{\Psi^2} \cos(2\Omega - 2h) \right] . \tag{6.5}
\end{aligned}$$

6.2 EQUAÇÕES DO MOVIMENTO ROTACIONAL COM TGG

Analogamente ao procedimento do Capítulo 4, as equações do movimento rotacional considerando a influência do TGG são obtidas pelo formalismo hamiltoniano, e dadas por:

A) Variáveis angulares

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial T_{TGG}}{\partial H} = \frac{\partial T}{\partial H} + \frac{\partial \Phi}{\partial H}, \tag{6.6}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial T_{TGG}}{\partial \Xi} = \frac{\partial T}{\partial \Xi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \Xi}, \tag{6.7}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial T_{TGG}}{\partial \Psi} = \frac{\partial T}{\partial \Psi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \Psi}. \tag{6.8}$$

B) Variáveis métricas

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial T_{TGG}}{\partial h} = -\frac{\partial T}{\partial h} - \frac{\partial \Phi}{\partial h}, \quad (6.9)$$

$$\frac{d\Xi}{dt} = -\frac{\partial T_{TGG}}{\partial \xi} = -\frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad (6.10)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{\partial T_{TGG}}{\partial \psi} = -\frac{\partial T}{\partial \psi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \psi}. \quad (6.11)$$

6.2.1 Equações para as variáveis angulares

Substituindo a Hamiltoniana T_{TGG} nas equações (6.6) - (6.8) , após o desenvolvimento das derivadas e manipulações algébricas, as equações para as variáveis angulares h , ξ e ψ são dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} = & \frac{3}{\Psi} \frac{\mu}{a^3} \left(\frac{2C - A - B}{16} \right) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \left(3 \frac{(\Psi^2 - \Xi^2)}{\Psi^2} \cos^2 \xi - 1 \right) \left\{ \frac{H}{\Psi} [1 - 3 \cos^2 i + \right. \\ & \left. + \sin^2 i \cos(2\Omega - 2h)] + \frac{\sin 2i}{\sqrt{1 - \frac{H^2}{\Psi^2}}} \left(2 \frac{H^2}{\Psi^2} - 1 \right) \cos(\Omega - h) \right\}; \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} = & \left(\frac{1}{A} - \frac{\sin^2 \xi}{B} - \frac{\cos^2 \xi}{C} \right) \Xi + \\ & - \frac{3}{\Psi^2} \frac{\mu}{a^3} \left(\frac{2C - A - B}{2} \right) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{8} \left(1 + \cos^2 i + \frac{H^2}{\Psi^2} - 3 \cos^2 i \frac{H^2}{\Psi^2} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{3}{4} \sin 2i \frac{H}{\Psi} \sqrt{1 - \frac{H^2}{\Psi^2}} \cos(\Omega - h) - \frac{3}{8} \sin^2 i \left(1 - \frac{H^2}{\Psi^2} \right) \cos(2\Omega - 2h) \right] \Xi \cos^2 \xi; \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi}{dt} = & \frac{\Psi}{B} \text{sen}^2 \xi + \frac{\Psi}{C} \text{cos}^2 \xi + \\
& + \frac{3}{\Psi^2} \frac{\mu}{a^3} \left(\frac{2C - A - B}{2} \right) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{8} \left(1 + \text{cos}^2 i + \frac{H^2}{\Psi^2} - 3 \text{cos}^2 i \frac{H^2}{\Psi^2} \right) - \right. \\
& - \frac{3}{4} \text{sen} 2i \frac{H}{\Psi} \sqrt{1 - \frac{H^2}{\Psi^2}} \text{cos}(\Omega - h) - \frac{3}{8} \text{sen}^2 i \left(1 - \frac{H^2}{\Psi^2} \right) \text{cos}(2\Omega - 2h) \left. \right] \Psi \text{cos}^2 \xi + \\
& + \frac{1}{\Psi} \frac{\mu}{a^3} \left(\frac{2C - A - B}{2} \right) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \left\{ - \left[3 \frac{(\Psi^2 - \Xi^2)}{\Psi^2} \text{cos}^2 \xi \right] \left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{8} \left(1 + \text{cos}^2 i + \frac{H^2}{\Psi^2} - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - 3 \text{cos}^2 i \frac{H^2}{\Psi^2} \right) - \frac{3}{4} \text{sen} 2i \frac{H}{\Psi} \sqrt{1 - \frac{H^2}{\Psi^2}} \text{cos}(\Omega - h) - \frac{3}{8} \text{sen}^2 i \left(1 - \frac{H^2}{\Psi^2} \right) \text{cos}(2\Omega - 2h) \right] - \\
& - \frac{3}{8} \frac{H}{\Psi} \left[3 \frac{(\Psi^2 - \Xi^2)}{\Psi^2} \text{cos}^2 \xi - 1 \right] \left[\frac{H}{\Psi} [1 - 3 \text{cos}^2 i + \text{sen}^2 i \text{cos}(2\Omega - 2h)] + \right. \\
& \left. \left. + \frac{\text{sen} 2i}{\sqrt{1 - \frac{H^2}{\Psi^2}}} \left(2 \frac{H^2}{\Psi^2} - 1 \right) \text{cos}(\Omega - h) \right] \right\}. \tag{6.14}
\end{aligned}$$

6.2.2 Equações para as variáveis métricas

Do mesmo modo que para variáveis angulares, com a substituição de (6.5) em (6.9) - (6.11) e após algumas manipulações algébricas, as equações do movimento para as variáveis métricas H , Ξ e Ψ são dadas por:

$$\begin{aligned}
\frac{dH}{dt} = & 3 \frac{\mu}{a^3} \left(\frac{2C - A - B}{16} \right) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \left[3 \frac{(\Psi^2 - \Xi^2)}{\Psi^2} \text{cos}^2 \xi - 1 \right] \cdot \\
& \cdot \left[\text{sen} 2i \frac{H}{\Psi} \sqrt{1 - \frac{H^2}{\Psi^2}} \text{sen}(\Omega - h) + \text{sen}^2 i \left(1 - \frac{H^2}{\Psi^2} \right) \text{sen}(2\Omega - 2h) \right]; \tag{6.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\Xi}{dt} = & \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B} \right) + \frac{3}{\Psi^2} \frac{\mu}{a^3} \left(\frac{2C - A - B}{4} \right) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{8} \left(1 + \cos^2 i + \frac{H^2}{\Psi^2} - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - 3 \cos^2 i \frac{H^2}{\Psi^2} \right) - \frac{3}{4} \sin 2i \frac{H}{\Psi} \sqrt{1 - \frac{H^2}{\Psi^2}} \cos(\Omega - h) - \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{3}{8} \sin^2 i \left(1 - \frac{H^2}{\Psi^2} \right) \cos(2\Omega - 2h) \right] \right\} (\Psi^2 - \Xi^2) \sin 2\xi ; \tag{6.16}
\end{aligned}$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = 0. \tag{6.17}$$

Como a Hamiltoniana média T_{TGG} não depende da variável ψ , então o módulo do momento angular de rotação Ψ permanece constante. Se os demais termos associados com o Torque de Gradiente de Gravidade fossem incluídos na Hamiltoniana, o módulo do momento angular de rotação sofreria variações de curto período (ZANARDI, 1986; ZANARDI; VILHENA DE MORAES, 1999).

Para a análise do movimento rotacional do satélite na presença do Torque de Gradiente de Gravidade, as equações do movimento (6.12) - (6.17) são integradas analiticamente nas próximas seções com o auxílio do método de aproximações sucessivas, considerando-se o caso particular $J = 0$ e o caso geral $J \approx 0$. As soluções aproximadas, obtidas no Capítulo 5, é que serão utilizadas como soluções aproximadas de ordem zero para a aplicação do método.

6.3 SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA AS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO ROTACIONAL COM TORQUE DE GRADIENTE DE GRAVIDADE

Nesta seção, as equações (6.12) – (6.17) são integradas, considerando-se em primeiro lugar o caso particular $J = 0$, e em seguida o caso geral $J \approx 0$. O método utilizado é o de aproximações sucessivas. Integram-se primeiramente as equações das variáveis angulares, considerando-se como solução de ordem zero a do MRLTE. As soluções assim obtidas são então substituídas nas equações para as variáveis métricas

para serem integradas em seguida. No processo de integração, é considerado que a dinâmica translacional é descrita pelo problema dos dois corpos.

6.3.1 Caso particular: $J = 0$

No processo de integração, as grandezas de valor constante são os momentos principais de inércia do satélite (A, B, C), as condições iniciais ($\Psi_0, \Xi_0, H_0, \psi_0, \xi_0, h_0$) e os parâmetros orbitais (a, e, i, Ω), sendo μ a constante gravitacional da Terra.

6.3.1.1 Integração das equações para as variáveis angulares

No emprego do método de aproximações sucessivas, utilizou-se como solução de ordem zero a solução do MRLTE, dada por (5.4) – (5.9), considerando o instante inicial $t = 0s$ como aquele em que $\xi(0) = \xi_0 = 0$.

Substituindo as soluções (5.4) – (5.9) em (6.12), esta equação é expressa mais simplesmente como:

$$\frac{dh}{dt} = 2C_h, \quad (6.18)$$

em que:

$$C_h = \frac{3}{\Psi_0} \frac{\mu}{a^3} \left(\frac{2C - A - B}{16} \right) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \left\{ \begin{array}{l} \frac{H_0}{\Psi_0} [1 - 3 \cos^2 i + \sin^2 i \cos(2\Omega - 2h_0)] + \\ \frac{\sin 2i}{\sqrt{1 - \frac{H_0^2}{\Psi_0^2}}} \left(2 \frac{H_0^2}{\Psi_0^2} - 1 \right) \cos(\Omega - h_0) \end{array} \right\}. \quad (6.19)$$

Integrando (6.18), a solução para a função $h(t)$ é dada por:

$$h(t) = h^*_{1} t + h_0, \quad (6.20)$$

sendo:

$$h^*_{1} = 2C_h. \quad (6.21)$$

De (5.5) e (5.8), a equação (6.13) torna-se:

$$\frac{d\xi}{dt} = 0, \quad (6.22)$$

e sua solução é simplesmente:

$$\xi(t) = \xi_0 = 0, \quad (6.23)$$

de acordo com a definição do instante inicial.

Finalmente, substituindo-se (5.4) – (5.9) em (6.14), encontra-se a solução para a variável $\psi(t)$. Depois de agrupar convenientemente os termos, a equação é escrita mais simplesmente como:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\Psi_0}{C} + \psi^*_{1}, \quad (6.24)$$

em que:

$$\psi^*_{1} = C^*_{\psi} + \tilde{C}^*_{\psi}, \quad (6.25)$$

$$C^*_{\psi} = \frac{3}{\Psi_0} \frac{\mu}{a^3} \left(\frac{2C - A - B}{2} \right) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{8} \left(1 + \cos^2 i + \frac{H_0^2}{\Psi_0^2} - 3 \cos^2 i \frac{H_0}{\Psi_0} \right) - \right. \\ \left. - \frac{3}{4} \sin 2i \frac{H_0}{\Psi_0} \sqrt{1 - \frac{H_0^2}{\Psi_0^2}} \cos(\Omega - h_0) - \frac{3}{8} \sin^2 i \left(1 - \frac{H_0^2}{\Psi_0^2} \right) \cos(2\Omega - 2h_0) \right], \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{C}^*_{\psi} = & \frac{3}{\Psi_0} \frac{\mu}{a^3} \left(\frac{2C-A-B}{2} \right) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \left\{ - \left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{8} \left(1 + \cos^2 i + \frac{H_0^2}{\Psi_0^2} - 3 \cos^2 i \frac{H_0}{\Psi_0} \right) - \right. \right. \\
& - \frac{3}{4} \frac{\sin 2i}{\Psi_0} \frac{H_0}{\Psi_0} \sqrt{1 - \frac{H_0^2}{\Psi_0^2}} \cos(\Omega - h_0) - \frac{3}{8} \sin^2 i \left(1 - \frac{H_0^2}{\Psi_0^2} \right) \cos(2\Omega - 2h_0) \left. \right] - \\
& \left. - \frac{3}{4} \frac{H_0}{\Psi_0} \left[\frac{H_0}{\Psi_0} [1 - 3 \cos^2 i + \sin^2 i \cos(2\Omega - 2h_0)] + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\sin 2i}{\sqrt{1 - \frac{H_0^2}{\Psi_0^2}}} \left(2 \frac{H_0^2}{\Psi_0^2} - 1 \right) \cos(\Omega - h_0) \right] \right\}. \tag{6.27}
\end{aligned}$$

Integrando (6.24):

$$\psi(t) = \left(\frac{\Psi_0}{C} + \psi^*_{1} \right) t + \psi_0. \tag{6.28}$$

6.3.1.2 Integração das equações para as variáveis métricas

Para a integração das equações dadas por (6.15) e (6.16), considera-se (6.20) e (6.23). Substituindo (6.20) e (6.23) em (6.15) e agrupando os termos de forma conveniente:

$$\frac{dH}{dt} = 2C_{H1} C_{H2} \sin(\Omega - h_0 - h^*_{1} t) + 2C_{H1} C_{H3} \sin(2\Omega - 2h_0 - 2h^*_{1} t), \tag{6.29}$$

em que:

$$C_{H1} = 3 \frac{\mu}{a^3} \left(\frac{2C-A-B}{16} \right) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right), \tag{6.30}$$

$$C_{H2} = \sin 2i \frac{H_0}{\Psi_0} \sqrt{1 - \frac{H_0^2}{\Psi_0^2}}, \tag{6.31}$$

$$C_{H3} = \text{sen}^2 i \left(1 - \frac{H_0^2}{\Psi_0^2} \right). \quad (6.32)$$

A integração da equação (6.29) fornece o seguinte resultado:

$$H(t) = H^*_0 + H^*_1 \cos(\Omega - h_0 - h^*_1 t) + H^*_2 \cos(2\Omega - 2h_0 - 2h^*_1 t) \quad (6.33)$$

sendo:

$$H^*_1 = \frac{2C_{H1}C_{H2}}{h^*_1}, \quad (6.34)$$

$$H^*_2 = \frac{C_{H1}C_{H3}}{h^*_1}. \quad (6.35)$$

A constante de integração H^*_0 é dada por:

$$H^*_0 = H_0 - H^*_1 \cos(\Omega - h_0) - H^*_2 \cos(2\Omega - 2h_0). \quad (6.36)$$

A solução de (6.16) para o caso de ser $J = 0$ é trivial, uma vez que sendo $\xi_1 = 0$, tem-se simplesmente:

$$\frac{d\Xi}{dt} = 0, \quad (6.37)$$

e portanto:

$$\Xi(t) = \Xi_0 = 0. \quad (6.38)$$

Finalmente, a solução de (6.17) é:

$$\Psi = \Psi_0. \quad (6.39)$$

Como comentado anteriormente, a solução para a variável Ψ é constante porque foi considerada apenas a parcela da Hamiltoniana média associada ao TGG na dedução das equações do movimento perturbado. Se os demais termos associados com o Torque de Gradiente de Gravidade fossem incluídos na Hamiltoniana, o módulo do momento angular de rotação sofreria variações de curto período (ZANARDI, 1986).

Apenas sumarizando os resultados encontrados para as equações do movimento com TGG, para o caso $J = 0$:

$$h(t) = h^*_1 t + h_0, \quad (6.40)$$

$$\xi(t) = \xi_0 = 0, \quad (6.41)$$

$$\psi(t) = \left(\frac{\Psi_0}{C} + \psi^*_1 \right) t + \psi_0, \quad (6.42)$$

$$H(t) = H^*_0 + H^*_1 \cos(\Omega - h_0 - h^*_1 t) + H^*_2 \cos(2\Omega - 2h_0 - 2h^*_1 t), \quad (6.43)$$

$$\Xi(t) = \Xi_0 = 0, \quad (6.44)$$

$$\Psi = \Psi_0, \quad (6.45)$$

sendo as constantes envolvidas na solução dadas por (6.19), (6.21), (6.25) – (6.27), (6.30) – (6.32) e (6.34) – (6.36).

6.3.2 Caso geral: $J \approx 0$

No processo de integração, as grandezas de valor constante são os momentos principais de inércia do satélite (A, B, C), as condições iniciais ($\Psi_0, \Xi_0, H_0, \psi_0, \xi_0, h_0$) e os parâmetros orbitais (a, e, i, Ω), sendo μ a constante gravitacional da Terra.

Devido à natureza das soluções envolvidas, será necessário fazer-se uso de expansões em série de Fourier complexa relacionadas às funções de Bessel J_i (BELLANDI FILHO, 1985), dadas por:

$$\cos(z \operatorname{sen} \theta) = J_0(z) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(z) \cos 2p\theta, \quad (6.46)$$

$$\operatorname{sen}(z \operatorname{sen} \theta) = 2 \sum_{p=0}^{\infty} J_{2p+1}(z) \operatorname{sen}(2p+1)\theta. \quad (6.47)$$

6.3.2.1 Integração das equações para as variáveis angulares

No emprego do método de aproximações sucessivas, utilizou-se como solução de ordem zero a solução do MRLTE, obtida de forma aproximada, considerando o instante inicial $t = 0s$ como aquele em que $\xi(0) = \xi_0 = 0$. As soluções do MRLTE para o caso $J \approx 0$ são as seguintes:

$$\Psi = \Psi_0, \quad (6.48)$$

$$\Xi = \Xi_0 \cos Kt, \quad (6.49)$$

$$H = H_0, \quad (6.50)$$

$$\psi = \frac{\Psi_0}{C} t + \psi_0, \quad (6.51)$$

$$\xi = \varphi \Xi_0 \operatorname{sen} Kt, \quad (6.52)$$

$$h = h_0, \quad (6.53)$$

em que:

$$K = \frac{\Psi_0}{C} \sqrt{\frac{AB - AC - BC + C^2}{AB}}, \quad (6.54)$$

$$\varphi = \frac{C - A}{ACK}. \quad (6.55)$$

Pela substituição de (6.48) – (6.53), a equação (6.12) pode ser reescrita na forma:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{3}{2} \frac{C_h}{\Psi_0^2} \left(\Psi_0^2 - \frac{\Xi_0^2}{2} - \frac{\Xi_0^2}{2} \cos 2Kt \right) (1 + \cos 2\xi) - C_h, \quad (6.56)$$

em que C_h é dado por (6.19).

A partir de (6.46), a função $\cos 2\xi$ pode ser desenvolvida em série da seguinte maneira:

$$\cos 2\xi = \cos(2\phi \Xi_0 \sin Kt) = J_0(2\phi \Xi_0) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(2\phi \Xi_0) \cdot \cos 2pKt. \quad (6.57)$$

Substituindo (6.57) em (6.56) e agrupando convenientemente os termos, depois de várias manipulações algébricas, a equação para $\frac{dh}{dt}$ toma a forma:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} = & hh_1 + hh_2 \cos 2Kt + hh_3 \cos 4Kt + \\ & + hh_4 \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(2\phi \Xi_0) \cdot \cos 2pKt + \\ & + hh_5 \sum_{p=2}^{\infty} J_{2p}(2\phi \Xi_0) \cdot \cos 2Kt \cdot \cos 2pKt, \end{aligned} \quad (6.58)$$

sendo:

$$hh_1 = \frac{C_h}{2} \left[1 + 3J_0(2\phi \Xi_0) - \frac{3}{2} \frac{\Xi_0^2}{\Psi_0^2} (1 + J_0(2\phi \Xi_0) + J_2(2\phi \Xi_0)) \right], \quad (6.59)$$

$$hh_2 = -\frac{3}{4} \frac{\Xi_0^2}{\Psi_0^2} C_h (1 + J_0(2\phi \Xi_0)), \quad (6.60)$$

$$hh_3 = -\frac{3}{4} \frac{\Xi_0^2}{\Psi_0^2} C_h J_2(2\varphi \Xi_0), \quad (6.61)$$

$$hh_4 = 3C_h \left(1 - \frac{\Xi_0^2}{2\Psi_0^2}\right), \quad (6.62)$$

$$hh_5 = -\frac{3}{2} \frac{\Xi_0^2}{\Psi_0^2} C_h. \quad (6.63)$$

Após a integração, tem-se, para $h(t)$:

$$\begin{aligned} h(t) = & h_0 + hh_1 t + \frac{hh_2}{2K} \text{sen } 2Kt + \frac{hh_3}{4K} \text{sen } 4Kt + \\ & + \frac{hh_4}{2K} \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(2\varphi \Xi_0) \frac{\text{sen } 2pKt}{p} + \\ & + \frac{hh_5}{4K} \sum_{p=2}^{\infty} J_{2p}(2\varphi \Xi_0) \left(\frac{\text{sen}[2(p+1)Kt]}{p+1} + \frac{\text{sen}[2(p-1)Kt]}{p-1} \right). \end{aligned} \quad (6.64)$$

Da mesma forma, pela substituição das soluções do MRLTE dadas em (6.48) – (6.53), a equação (6.13) pode ser colocada na forma:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2}{A} - \frac{1}{B} - \frac{1}{C} - C_\xi \right) + \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C} - C_\xi \right) \cos 2\xi \right] \Xi_0 \cos Kt, \quad (6.65)$$

em que:

$$C_\xi = \frac{3}{\Psi_0^2} \frac{\mu}{a^3} \left(\frac{2C - A - B}{2} \right) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \cdot \left[\begin{aligned} & -\frac{1}{2} + \frac{3}{8} \left(1 + \cos 2i + \frac{H_0^2}{\Psi_0^2} - 3 \cos 2i \frac{H_0^2}{\Psi_0^2} \right) - \\ & -\frac{3}{4} \text{sen } 2i \frac{H_0}{\Psi_0} \sqrt{1 - \frac{H_0^2}{\Psi_0^2}} \cos(\Omega - h_0) - \\ & -\frac{3}{8} \text{sen } 2i \left(1 - \frac{H_0^2}{\Psi_0^2} \right) \cos(2\Omega - 2h_0) \end{aligned} \right]. \quad (6.66)$$

Levando (6.57) em (6.65):

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi\xi_1 \cos Kt + \xi\xi_2 \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(2\phi\Xi_0) \cdot \cos Kt \cdot \cos 2pKt, \quad (6.67)$$

sendo:

$$\xi\xi_1 = (C_I + C_{II} J_0(2\phi\Xi_0))\Xi_0, \quad (6.68)$$

$$\xi\xi_2 = 2C_{II}\Xi_0, \quad (6.69)$$

$$C_I = \frac{1}{2} \left(\frac{2BC - AC - AB}{ABC} - C_\xi \right), \quad (6.70)$$

$$C_{II} = \frac{1}{2} \left(\frac{C - B}{BC} - C_\xi \right). \quad (6.71)$$

Após a integração, tem-se, para $\xi(t)$:

$$\xi(t) = \frac{\xi\xi_1}{K} \sin Kt + \frac{\xi\xi_2}{2K} \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(2\phi\Xi_0) \left(\frac{\sin[(2p+1)Kt]}{2p+1} + \frac{\sin[(2p-1)Kt]}{2p-1} \right). \quad (6.72)$$

Com procedimento análogo aos anteriores, pela substituição de (6.48) – (6.53) e (6.57) na equação (6.14), obtém-se para $\frac{d\psi}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} = & \psi\psi_1 + \psi\psi_2 \cos 2Kt + \psi\psi_3 \cos 4Kt + \\ & + \psi\psi_4 \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(2\phi\Xi_0) \cdot \cos 2pKt + \\ & + \psi\psi_5 \sum_{p=2}^{\infty} J_{2p}(2\phi\Xi_0) \cdot \cos 2Kt \cdot \cos 2pKt, \end{aligned} \quad (6.73)$$

em que as constantes são dadas por:

$$\begin{aligned} \psi\psi_1 = & \tilde{C}_I + \tilde{C}_{II} J_0(2\mathcal{E}\Xi_0) + \frac{3}{2} C_\psi (1 + J_0(2\mathcal{E}\Xi_0)) - \\ & - \frac{3}{4} \frac{\Xi_0^2}{\Psi_0^2} C_\psi (1 + J_0(2\mathcal{E}\Xi_0) + J_2(2\mathcal{E}\Xi_0)), \end{aligned} \quad (6.74)$$

$$\psi\psi_2 = -\frac{3}{4} \frac{\Xi_0^2}{\Psi_0^2} C_\psi (1 + J_0(2\mathcal{E}\Xi_0)), \quad (6.75)$$

$$\psi\psi_3 = -\frac{3}{4} \frac{\Xi_0^2}{\Psi_0^2} C_\psi J_2(2\mathcal{E}\Xi_0), \quad (6.76)$$

$$\psi\psi_4 = 2\tilde{C}_{II} + 3\left(1 - \frac{\Xi_0^2}{2\Psi_0^2}\right) C_\psi, \quad (6.77)$$

$$\psi\psi_5 = -\frac{3}{2} \frac{\Xi_0^2}{\Psi_0^2} C_\psi, \quad (6.78)$$

$$\tilde{C}_I = \frac{\Psi_0}{2} \left(\frac{B+C}{BC} + C_\xi \right) + \tilde{C}_\psi, \quad (6.79)$$

$$\tilde{C}_{II} = \frac{\Psi_0}{2} \left(\frac{B-C}{BC} + C_\xi \right), \quad (6.80)$$

$$\begin{aligned} C_\psi = & \frac{1}{\Psi_0} \frac{\mu}{a^3} \left(\frac{2C-A-B}{2} \right) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \cdot \left\{ - \left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{8} \left(1 + \cos^2 i + \frac{H_0^2}{\Psi_0^2} - 3 \cos^2 i \frac{H_0^2}{\Psi_0^2} \right) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{3}{4} \operatorname{sen} 2i \frac{H_0}{\Psi_0} \sqrt{1 - \frac{H_0^2}{\Psi_0^2}} \cos(\Omega - h_0) - \frac{3}{8} \operatorname{sen} 2i \left(1 - \frac{H_0^2}{\Psi_0^2} \right) \cos(2\Omega - 2h_0) \right\} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{8} \frac{H_0}{\Psi_0} \left[\frac{H_0}{\Psi_0} [1 - 3\cos^2 i + \sin^2 i \cos(2\Omega - 2h_0)] + \right. \\
& \left. + \frac{\sin 2i}{\sqrt{1 - \frac{H_0^2}{\Psi_0^2}}} \left(2 \frac{H_0^2}{\Psi_0^2} - 1 \right) \cos(\Omega - h_0) \right] \Bigg\}, \tag{6.81}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_\psi = & \frac{1}{\Psi_0} \frac{\mu}{a^3} \left(\frac{2C - A - B}{2} \right) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \cdot \left\{ \frac{3}{8} \frac{H_0}{\Psi_0} \left[\frac{H_0}{\Psi_0} [1 - 3\cos^2 i + \sin^2 i \cos(2\Omega - 2h_0)] + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\sin 2i}{\sqrt{1 - \frac{H_0^2}{\Psi_0^2}}} \left(2 \frac{H_0^2}{\Psi_0^2} - 1 \right) \cos(\Omega - h_0) \right] \right\}. \tag{6.82}
\end{aligned}$$

A solução da equação (6.73) para a variável $\psi(t)$ é a seguinte:

$$\begin{aligned}
\psi(t) = & \psi_0 + \psi\psi_1 t + \frac{\psi\psi_2}{2K} \sin 2Kt + \frac{\psi\psi_3}{4K} \sin 4Kt + \\
& + \frac{\psi\psi_4}{2K} \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(2\phi\Xi_0) \frac{\sin 2pKt}{p} + \\
& + \frac{\psi\psi_5}{4K} \sum_{p=2}^{\infty} J_{2p}(2\phi\Xi_0) \left(\frac{\sin[2K(p+1)t]}{p+1} + \frac{\sin[2K(p-1)t]}{p-1} \right). \tag{6.83}
\end{aligned}$$

6.3.2.2 Integração das equações para as variáveis métricas

Para a integração das equações dadas por (6.15) e (6.16), considera-se a parte mais significativa das soluções (6.64) e (6.67) para as variáveis h e ξ , ou seja, apenas variações lineares em h_1 e a variação periódica mais significativa em ξ_1 , não incluindo as variações periódicas associadas com os demais termos, devido à pequena ordem de grandeza dos mesmos, de modo que:

$$h_1 = h_0 + hh_1 t, \quad (6.84)$$

$$\xi_1 = \bar{\varphi} \Xi_0 \text{ sen } Kt, \quad (6.85)$$

considerando que:

$$\bar{\varphi} = \frac{(C_I + C_{II} J_0(2\bar{\varphi} \Xi_0))}{K} = \frac{\xi_1 \Xi_1}{\Xi_0 K}. \quad (6.86)$$

Também são necessárias na integração das equações os desenvolvimentos em série das funções $\cos 2\xi_1$ e $\text{sen } 2\xi_1$. De acordo com (6.46) e (6.47), tais desenvolvimentos são dados respectivamente por:

$$\cos 2\xi_1 = \cos(2\bar{\varphi} \Xi_0 \text{ sen } Kt) = J_0(2\bar{\varphi} \Xi_0) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(2\bar{\varphi} \Xi_0) \cdot \cos 2pKt, \quad (6.87)$$

$$\text{sen } 2\xi_1 = \text{sen}(2\bar{\varphi} \Xi_0 \text{ sen } Kt) = 2 \sum_{p=0}^{\infty} J_{2p+1}(2\bar{\varphi} \Xi_0) \cdot \text{sen}[(2p+1)Kt]. \quad (6.88)$$

A equação em $\frac{dH}{dt}$ pode ser reescrita, após várias manipulações algébricas,

como:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} = & HH_1 \text{sen}(\Omega - h_1) + HH_2 \text{sen}(2\Omega - 2h_1) + \\ & + HH_3 \text{sen}(\Omega - h_1) \cdot \cos 2Kt + HH_4 \text{sen}(2\Omega - 2h_1) \cdot \cos 2Kt + \\ & + HH_5 \text{sen}(\Omega - h_1) \cdot \cos 2\xi_1 + HH_6 \text{sen}(2\Omega - 2h_1) \cdot \cos 2\xi_1 + \\ & + HH_3 \text{sen}(\Omega - h_1) \cdot \cos 2Kt \cdot \cos 2\xi_1 + HH_4 \text{sen}(2\Omega - 2h_1) \cdot \cos 2Kt \cdot \cos 2\xi_1, \end{aligned} \quad (6.89)$$

sendo os coeficientes desta equação dados por:

$$HH_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\Xi_0^2}{\Psi_0^2} \right) C_{H1} C_{H2}, \quad (6.90)$$

$$HH_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3 \bar{\Xi}_0^2}{2 \Psi_0^2} \right) C_{H1} C_{H3}, \quad (6.91)$$

$$HH_3 = -\frac{3 \bar{\Xi}_0^2}{4 \Psi_0^2} C_{H1} C_{H2}, \quad (6.92)$$

$$HH_4 = -\frac{3 \bar{\Xi}_0^2}{4 \Psi_0^2} C_{H1} C_{H3}, \quad (6.93)$$

$$HH_5 = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\bar{\Xi}_0^2}{2 \Psi_0^2} \right) C_{H1} C_{H2}, \quad (6.94)$$

$$HH_6 = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\bar{\Xi}_0^2}{2 \Psi_0^2} \right) C_{H1} C_{H3}, \quad (6.95)$$

e tais que C_{H1} , C_{H2} , C_{H3} são dados por (6.30) – (6.32). Pela substituição de (6.87) em (6.89), chega-se, depois de agrupar os termos convenientemente, a:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} = & [HH_1 + HH_5 J_0(2\bar{\phi}\bar{\Xi}_0)] \text{sen}(\Omega - h_1) + \\ & + [HH_2 + HH_6 J_0(2\bar{\phi}\bar{\Xi}_0)] \text{sen}(2\Omega - 2h_1) + \\ & + [1 + J_0(2\bar{\phi}\bar{\Xi}_0)] HH_3 \cdot \text{sen}(\Omega - h_1) \cdot \cos 2Kt + \\ & + [1 + J_0(2\bar{\phi}\bar{\Xi}_0)] HH_4 \cdot \text{sen}(2\Omega - 2h_1) \cdot \cos 2Kt + \\ & + 2HH_5 \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(2\bar{\phi}\bar{\Xi}_0) \cdot \text{sen}(\Omega - h_1) \cdot \cos 2pKt + \\ & + 2HH_6 \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(2\bar{\phi}\bar{\Xi}_0) \text{sen}(2\Omega - 2h_1) \cdot \cos 2pKt + \\ & + 2HH_3 \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(2\bar{\phi}\bar{\Xi}_0) \text{sen}(\Omega - h_1) \cdot \cos 2Kt \cdot \cos 2pKt + \\ & + 2HH_4 \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(2\bar{\phi}\bar{\Xi}_0) \text{sen}(2\Omega - 2h_1) \cdot \cos 2Kt \cdot \cos 2pKt, \end{aligned} \quad (6.96)$$

que integrada fornece a seguinte solução:

$$\begin{aligned}
H(t) = & CH_0 + \frac{[HH_1 + HH_5 J_0(2\bar{\phi}\Xi_0)]}{hh_1} \cos(-hh_1 t + \Omega - h_0) + \\
& + \frac{[HH_2 + HH_6 J_0(2\bar{\phi}\Xi_0)]}{2hh_1} \cos(-2hh_1 + 2\Omega - 2h_0) - \\
& - \frac{[1 + J_0(2\bar{\phi}\Xi_0)]}{2} HH_3 \left(\frac{\cos[(-hh_1 + 2K)t + \Omega - h_0]}{-hh_1 + 2K} + \right. \\
& \left. + \frac{\cos[(-hh_1 - 2K)t + \Omega - h_0]}{-hh_1 - 2K} \right) - \\
& - \frac{[1 + J_0(2\bar{\phi}\Xi_0)]}{4} HH_4 \left(\frac{\cos[(-2hh_1 + 2K)t + 2\Omega - 2h_0]}{-hh_1 + K} + \right. \\
& \left. + \frac{\cos[(-2hh_1 - 2K)t + 2\Omega - 2h_0]}{-hh_1 - K} \right) - \\
& - HH_5 \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(2\bar{\phi}\Xi_0) \left(\frac{\cos[(-hh_1 + 2pK)t + \Omega - h_0]}{-hh_1 + 2pK} + \right. \\
& \left. + \frac{\cos[(-hh_1 - 2pK)t + \Omega - h_0]}{-hh_1 - 2pK} \right) - \\
& - \frac{HH_6}{2} \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(2\bar{\phi}\Xi_0) \left(\frac{\cos[(-2hh_1 + 2pK)t + 2\Omega - 2h_0]}{-hh_1 + pK} + \right. \\
& \left. + \frac{\cos[(-2hh_1 - 2pK)t + 2\Omega - 2h_0]}{-hh_1 - pK} \right) - \\
& - \frac{HH_3}{2} \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(2\bar{\phi}\Xi_0) \left(\frac{\cos[(-hh_1 + 2pK + 2K)t + \Omega - h_0]}{-hh_1 + 2pK + 2K} + \right. \\
& + \frac{\cos[(-hh_1 - 2pK + 2K)t + \Omega - h_0]}{-hh_1 - 2pK + 2K} + \frac{\cos[(-hh_1 + 2pK - 2K)t + \Omega - h_0]}{-hh_1 + 2pK - 2K} + \\
& \left. + \frac{\cos[(-hh_1 - 2pK - 2K)t + \Omega - h_0]}{-hh_1 - 2pK - 2K} \right) - \\
& - \frac{HH_4}{4} \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(2\bar{\phi}\Xi_0) \left(\frac{\cos[(-2hh_1 + 2pK + 2K)t + 2\Omega - 2h_0]}{-hh_1 + pK + K} + \right. \\
& + \frac{\cos[(-2hh_1 - 2pK + 2K)t + 2\Omega - 2h_0]}{-hh_1 - pK + K} + \frac{\cos[(-2hh_1 + 2pK - 2K)t + 2\Omega - 2h_0]}{-hh_1 + pK - K} + \\
& \left. + \frac{\cos[(-2hh_1 - 2pK - 2K)t + 2\Omega - 2h_0]}{-hh_1 - pK - K} \right). \tag{6.97}
\end{aligned}$$

A constante de integração CH_0 é dada por:

$$\begin{aligned}
CH_0 = H_0 & - \left\{ \frac{[HH_1 + HH_5 J_0(2\bar{\phi}\Xi_0)]}{hh_1} - \frac{[1 + J_0(2\bar{\phi}\Xi_0)]}{4K^2 - hh_1^2} HH_3 \right\} \cos(\Omega - h_0) - \\
& - \left\{ \frac{[HH_2 + HH_6 J_0(2\bar{\phi}\Xi_0)]}{2hh_1} - \frac{[1 + J_0(2\bar{\phi}\Xi_0)]}{2(K^2 - hh_1^2)} HH_4 \right\} \cos(2\Omega - 2h_0) + \\
& + 2hh_1 HH_5 \cos(\Omega - h_0) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_{2p}(2\bar{\phi}\Xi_0)}{4K^2 p^2 - hh_1^2} + \\
& + hh_1 HH_6 \cos(2\Omega - 2h_0) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_{2p}(2\bar{\phi}\Xi_0)}{K^2 p^2 - hh_1^2} + \\
& + 2hh_1 HH_3 \cos(\Omega - h_0) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_{2p}(2\bar{\phi}\Xi_0)(4K^2 p^2 + 4K^2 - hh_1^2)}{[(2Kp + 2K)^2 - hh_1^2][(2Kp - 2K)^2 - hh_1^2]} + \\
& + hh_1 HH_4 \cos(2\Omega - 2h_0) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_{2p}(2\bar{\phi}\Xi_0)(K^2 p^2 + K^2 - hh_1^2)}{[(Kp + K)^2 - hh_1^2][(Kp - K)^2 - hh_1^2]}. \tag{6.98}
\end{aligned}$$

A equação para $\frac{d\Xi}{dt}$, após as manipulações algébricas, é colocada na forma:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Xi}{dt} = & \Xi\Xi_1 \sin 2\xi_1 + \Xi\Xi_2 \cos 2Kt. \sin 2\xi_1 + \\
& + \Xi\Xi_3 \cos(\Omega - h_1). \sin 2\xi_1 + \Xi\Xi_4 \cos(2\Omega - 2h_1). \sin 2\xi_1 + \\
& + \Xi\Xi_5 \cos 2Kt. \cos(\Omega - h_1). \sin 2\xi_1 + \Xi\Xi_6 \cos 2Kt. \cos(2\Omega - 2h_1). \sin 2\xi_1, \tag{6.99}
\end{aligned}$$

em que:

$$\Xi\Xi_1 = (2\Psi_0^2 - \Xi_0^2) \left[\frac{2}{\Psi_0^2} C_{H1} C_{\Xi} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B} \right) \right], \tag{6.100}$$

$$\Xi\Xi_2 = - \left[\frac{2}{\Psi_0^2} C_{H1} C_{\Xi} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B} \right) \right] \Xi_0^2, \tag{6.101}$$

$$\Xi \Xi_3 = 3 \left(\frac{\Xi_0^2}{2\Psi_0^2} - 1 \right) C_{H1} C_{H2}, \quad (6.102)$$

$$\Xi \Xi_4 = \frac{3}{2} \left(\frac{\Xi_0^2}{2\Psi_0^2} - 1 \right) C_{H1} C_{H3}, \quad (6.103)$$

$$\Xi \Xi_5 = \frac{3}{2} \frac{\Xi_0^2}{\Psi_0^2} C_{H1} C_{H2}, \quad (6.104)$$

$$\Xi \Xi_6 = \frac{3}{4} \frac{\Xi_0^2}{\Psi_0^2} C_{H1} C_{H3}, \quad (6.105)$$

$$C_{\Xi} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{8} \left(1 + \cos^2 i + \frac{H_0^2}{\Psi_0^2} - 3 \cos^2 i \frac{H_0^2}{\Psi_0^2} \right). \quad (6.106)$$

Pela substituição de (6.88) em (6.99), chega-se à forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\Xi}{dt} = & 2\Xi \Xi_1 \sum_{p=0}^{\infty} J_{2p+1}(2\bar{\phi} \Xi_0) \cdot \text{sen}[(2p+1)Kt] + \\ & + 2\Xi \Xi_2 \sum_{p=0}^{\infty} J_{2p+1}(2\bar{\phi} \Xi_0) \cdot \cos 2Kt \cdot \text{sen}[(2p+1)Kt] + \\ & + 2\Xi \Xi_3 \sum_{p=0}^{\infty} J_{2p+1}(2\bar{\phi} \Xi_0) \cdot \cos(\Omega - h_1) \cdot \text{sen}[(2p+1)Kt] + \\ & + 2\Xi \Xi_4 \sum_{p=0}^{\infty} J_{2p+1}(2\bar{\phi} \Xi_0) \cdot \cos(2\Omega - 2h_1) \cdot \text{sen}[(2p+1)Kt] + \\ & + 2\Xi \Xi_5 \sum_{p=0}^{\infty} J_{2p+1}(2\bar{\phi} \Xi_0) \cdot \cos 2Kt \cdot \cos(\Omega - h_1) \cdot \text{sen}[(2p+1)Kt] + \\ & + 2\Xi \Xi_6 \sum_{p=0}^{\infty} J_{2p+1}(2\bar{\phi} \Xi_0) \cdot \cos 2Kt \cdot \cos(2\Omega - 2h_1) \cdot \text{sen}[(2p+1)Kt], \end{aligned} \quad (6.107)$$

que depois de integrada fornece a solução para $\Xi(t)$:

$$\begin{aligned}
\Xi(t) = & C\Xi_0 - 2\frac{\Xi\Xi_1}{K} \sum_{p=0}^{\infty} J_{2p+1}(2\bar{\varphi}\Xi_0) \frac{\cos[(2p+1)Kt]}{2p+1} - \\
& - \frac{\Xi\Xi_2}{K} \sum_{p=0}^{\infty} J_{2p+1}(2\bar{\varphi}\Xi_0) \left(\frac{\cos[(2p+3)Kt]}{2p+3} + \frac{\cos[(2p-1)Kt]}{2p-1} \right) - \\
& - \Xi\Xi_3 \sum_{p=0}^{\infty} J_{2p+1}(2\bar{\varphi}\Xi_0) \left(\frac{\cos[(hh_1 + 2Kp + K)t - \Omega + h_0]}{hh_1 + 2Kp + K} + \right. \\
& \left. + \frac{\cos[(-hh_1 + 2Kp + K)t + \Omega - h_0]}{-hh_1 + 2Kp + K} \right) - \\
& - \Xi\Xi_4 \sum_{p=0}^{\infty} J_{2p+1}(2\bar{\varphi}\Xi_0) \left(\frac{\cos[(2hh_1 + 2Kp + K)t - 2\Omega + 2h_0]}{2hh_1 + 2Kp + K} + \right. \\
& \left. + \frac{\cos[(-2hh_1 + 2Kp + K)t + 2\Omega - 2h_0]}{-2hh_1 + 2Kp + K} \right) - \\
& - \frac{\Xi\Xi_5}{2} \sum_{p=0}^{\infty} J_{2p+1}(2\bar{\varphi}\Xi_0) \left(\frac{\cos[(hh_1 + 2Kp - K)t - \Omega + h_0]}{hh_1 + 2Kp - K} + \right. \\
& + \frac{\cos[(-hh_1 + 2Kp + 3K)t + \Omega - h_0]}{-hh_1 + 2Kp + 3K} + \frac{\cos[(hh_1 + 2Kp + 3K)t - \Omega + h_0]}{hh_1 + 2Kp + 3K} + \\
& \left. + \frac{\cos[(-hh_1 + 2Kp - K)t + \Omega - h_0]}{-hh_1 + 2Kp - K} \right) - \\
& - \frac{\Xi\Xi_6}{2} \sum_{p=0}^{\infty} J_{2p+1}(2\bar{\varphi}\Xi_0) \left(\frac{\cos[(2hh_1 + 2Kp - K)t - 2\Omega + 2h_0]}{2hh_1 + 2Kp - K} + \right. \\
& + \frac{\cos[(-2hh_1 + 2Kp + 3K)t + 2\Omega - 2h_0]}{-2hh_1 + 2Kp + 3K} + \frac{\cos[(2hh_1 + 2Kp + 3K)t - 2\Omega + 2h_0]}{2hh_1 + 2Kp + 3K} + \\
& \left. + \frac{\cos[(-2hh_1 + 2Kp - K)t + 2\Omega - 2h_0]}{-2hh_1 + 2Kp - K} \right), \tag{6.108}
\end{aligned}$$

em que a constante de integração $C\Xi_0$ é dada por:

$$\begin{aligned}
C\Xi_0 = & \Xi_0 + 2\frac{\Xi\Xi_1}{K} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{J_{2p+1}(2\bar{\varphi}\Xi_0)}{2p+1} + 2\frac{\Xi\Xi_2}{K} \sum_{p=0}^{\infty} J_{2p+1}(2\bar{\varphi}\Xi_0) \frac{2p+1}{(2p+3)(2p-1)} + \\
& + 2\Xi\Xi_3 K \cos(\Omega - h_0) \sum_{p=0}^{\infty} J_{2p+1}(2\bar{\varphi}\Xi_0) \frac{2p+1}{(2pK + K)^2 - hh_1^2} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\Xi\Xi_4 K \cos(2\Omega - 2h_0) \sum_{p=0}^{\infty} J_{2p+1}(2\bar{\phi}\Xi_0) \frac{2p+1}{(2pK+K)^2 - 4hh_1^2} + \\
& + 2\Xi\Xi_5 K \cos(\Omega - h_0) \sum_{p=0}^{\infty} J_{2p+1}(2\bar{\phi}\Xi_0) \frac{8K^2 p^3 + 12K^2 p^2 - 2(K^2 + hh_1^2)p - 3K^2 - hh_1^2}{[(2pK+3K)^2 - hh_1^2][(2pK-K)^2 - hh_1^2]} + \\
& + 2\Xi\Xi_6 K \cos(2\Omega - 2h_0) \sum_{p=0}^{\infty} J_{2p+1}(2\bar{\phi}\Xi_0) \frac{8K^2 p^3 + 12K^2 p^2 - 2(K^2 + 4hh_1^2)p - 3K^2 - 4hh_1^2}{[(2pK+3K)^2 - 4hh_1^2][(2pK-K)^2 - 4hh_1^2]}
\end{aligned}
\tag{6.109}$$

Com $\Psi = \Psi_0$ completa-se o conjunto de soluções para as equações do movimento rotacional quando considera-se a perturbação provocada pelo Torque de Gradiente de Gravidade, nos casos em que $J \approx 0$. Por estas soluções verifica-se que a magnitude do momento angular de rotação Ψ permanece constante enquanto que as componentes do momento angular H e Ξ , no eixo inercial OZ e no eixo principal de inércia OA , respectivamente, sofrem apenas variações periódicas devido às parcelas associadas ao TGG.

6.4 COMPARAÇÃO ANALÍTICA ENTRE MRLTE E TGG

O objetivo desta seção é comparar as soluções analíticas obtidas no estudo do movimento rotacional livre de torques externos, nos Capítulos 4 e 5, com as soluções determinadas neste capítulo para as equações do movimento rotacional sob a influência do Torque de Gradiente de Gravidade.

Num primeiro momento, considera-se o caso particular $J = 0$, comparando-se o comportamento das soluções de ordem zero, dadas por (5.4) – (5.9), com as soluções de 1ª ordem, dadas em (6.40) – (6.45).

Para as comparações realizadas em relação ao caso geral $J \approx 0$, as soluções do MRLTE serão as dadas em (6.48) – (6.53), já que foram estas soluções aproximadas utilizadas como solução de ordem zero no método de aproximações sucessivas. As soluções obtidas ao longo da seção **6.3.2** são implementadas e as comparações

mostram, ao mesmo tempo, uma mudança de comportamento de algumas variáveis (especialmente aquelas que relacionam o sistema do momento angular com o sistema inercial, h e H) devido ao TGG, bem como a pequena magnitude do Torque de Gradiente de Gravidade.

6.4.1 Comparações analíticas: caso $J = 0$

Ao se comparar as soluções (5.4) – (5.9) para o MRLTE com as soluções (6.40) – (6.45), para o caso de movimento perturbado pelo TGG, nota-se que as soluções $\Psi = \Psi_0$, $\Xi = 0$ e $\xi = 0$ são as mesmas. Isto ocorre devido ao fato de $J = 0$ implicar que o vetor momento angular de rotação \vec{S} permaneça com uma orientação fixa no espaço em relação ao sistema dos eixos principais de inércia OABC, e coincidente com o eixo principal de inércia OC.

No entanto, o mesmo não acontece com as demais variáveis. Por causa da perturbação provocada pelo TGG, as relações entre o sistema do vetor momento angular de rotação e o sistema inercial deixam de ser invariantes no tempo. Explicitamente, as variáveis h e H passam a sofrer variações devido à ação do Torque de Gradiente de Gravidade, apresentando a primeira uma variação linear muito lenta, enquanto a segunda apresenta variações periódicas de longo período.

Também para a variável ψ pode-se perceber uma pequena variação, que pode ser relacionada com o módulo da velocidade angular de rotação. A influência do TGG está representada pelo coeficiente ψ^*_1 , dado pela fórmula (6.25), embora seu valor possa ser considerado desprezível devido à sua pequena magnitude.

No que segue, as soluções são mostradas em gráficos e tabelas, para efeito de comparação. Os intervalos de tempo escolhidos variam conforme a conveniência na apresentação dos resultados.

Para as implementações, são utilizados dados relacionados a um satélite fictício de pequeno porte, com características muito similares às do 2º Satélite Brasileiro de Coleta de Dados (SCD2). Estes dados são apresentados na Tabela 8 abaixo:

Tabela 8: Dados de um satélite fictício de pequeno porte, com características similares às do satélite brasileiro SCD2.

DADOS DO SATÉLITE			
MOMENTOS PRINCIPAIS DE INÉRCIA			
$I_x = A = 12,33 \text{ kg.m}^2$	$I_y = B = 12,35 \text{ kg.m}^2$	$I_z = C = 14,50 \text{ kg.m}^2$	
VARIÁVEIS DE FUKUSHIMA NO INSTANTE INICIAL $t_0 = 0s$		PARÂMETROS ORBITAIS	
$\Psi_0 = 50,8675 \text{ kg.m}^2/s$	$\psi_0 = \pi/2 \text{ rad}$	$a = 7133,4 \text{ km}$	$i = 0,4362 \text{ rad}$
$H_0 = 42,5495 \text{ kg.m}^2/s$	$h_0 = 0,0377 \text{ rad}$	$e = 0,0018$	$\Omega = 3,6480 \text{ rad}$
$\Xi_0 = 0 \text{ kg.m}^2/s$	$\xi_0 = 0 \text{ rad}$	$\mu = 398601 \text{ km}^3/s^2$	

6.4.1.1 Variável h

Por comparação direta das soluções (5.9) e (6.40), obtiveram-se os resultados apresentados na Figura 18 e na Tabela 9. Como a solução do MRLTE é constante e igual a $h_0 = 0,0377 \text{ rad}$, a diferença entre as duas soluções corresponde à variação associada com o TGG. Percebe-se que a função $h(t)$ sofre uma variação linear com decrescimento muito lento, devido ao pequeno valor do coeficiente h^*_1 dado pela relação (6.21), quando considera-se o efeito produzido pelo TGG. O tempo necessário para uma revolução completa do ângulo h é de aproximadamente 1264,5 dias.

O lento decrescimento de $\Delta h(t)$ apresentado na Figura 18 também pode ser observado ao analisar-se a Tabela 9, para um intervalo de tempo de 3600s.

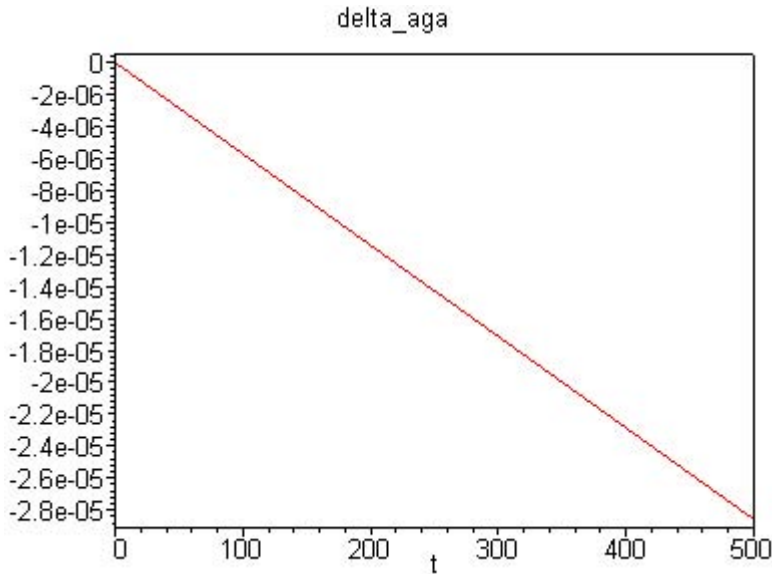


Figura 18: Gráfico de $\Delta h(t)$, de forma que $\Delta h(t) = h_{TGG} - h_{MRLTE}$, sendo h_{MRLTE} constante.

Tabela 9: Comparação entre as soluções obtidas para $h(t)$ no movimento livre de torques e considerando-se a influência do TGG.

$h(t)$ (em rad)			
Tempo (s)	Solução considerando-se a influência do TGG, dada por (6.40) 10^{-2} rad	Solução constante para o MRLTE, dada por (5.9) 10^{-2} rad	$\Delta h(t) = h_{TGG} - h_{MRLTE}$ 10^{-4} rad
0	3,77	3,77	0
200	3,768856675	3,77	-0,1143324804
400	3,767713350	3,77	-0,2286649608
600	3,766570026	3,77	-0,3429974412
800	3,765426701	3,77	-0,4573299216
1000	3,764283376	3,77	-0,5716624020
1200	3,763140051	3,77	-0,6859948824
1400	3,761996726	3,77	-0,8003273628
1600	3,760853402	3,77	-0,9146598432
1800	3,759710077	3,77	-1,028992324
2000	3,758566752	3,77	-1,143324804
2200	3,757423427	3,77	-1,257657284
2400	3,756280102	3,77	-1,371989765
2600	3,755136778	3,77	-1,486322245
2800	3,753993453	3,77	-1,600654726
3000	3,752850128	3,77	-1,714987206
3200	3,751706803	3,77	-1,829319686
3400	3,750563478	3,77	-1,943652167
3600	3,749420154	3,77	-2,057984647

Com a influência do Torque de Gradiente de Gravidade, a direção do vetor momento angular de rotação \vec{S} deixa de ser fixa em relação ao sistema inercial OXYZ. Dessa forma, produz-se essa pequena variação no ângulo h , que é o ângulo medido sobre o plano inercial XY, desde o eixo inercial OX até o nodo N , definido pela interseção dos planos XY e X'Y' (este último perpendicular a \vec{S}). A variação linear na variável h está relacionada com o movimento de precessão do vetor do momento angular de rotação \vec{S} em torno do eixo inercial OZ.

6.4.1.2 Variável H

Por comparação direta das soluções (5.6) e (6.33), obtiveram-se os resultados apresentados nas Figuras 19, 20, 21 e 22 e na Tabela 10. Percebe-se que a função $H(t)$ sofre uma variação periódica de longo período quando considera-se o efeito produzido pelo TGG. Na solução do MRLTE, como se sabe, H é constante e igual a $H_0 = 42,5495 \text{ kg.m}^2/\text{s}$. Observa-se nas Figuras 19 – 22 que a variação periódica de H ocorre em torno de H^*_0 , dada em (6.36). Esta expressão de H^*_0 desloca a variação de $H(t)$, de modo que ela não ocorre em torno do valor inicial de H que corresponde à solução de ordem zero (MRLTE).

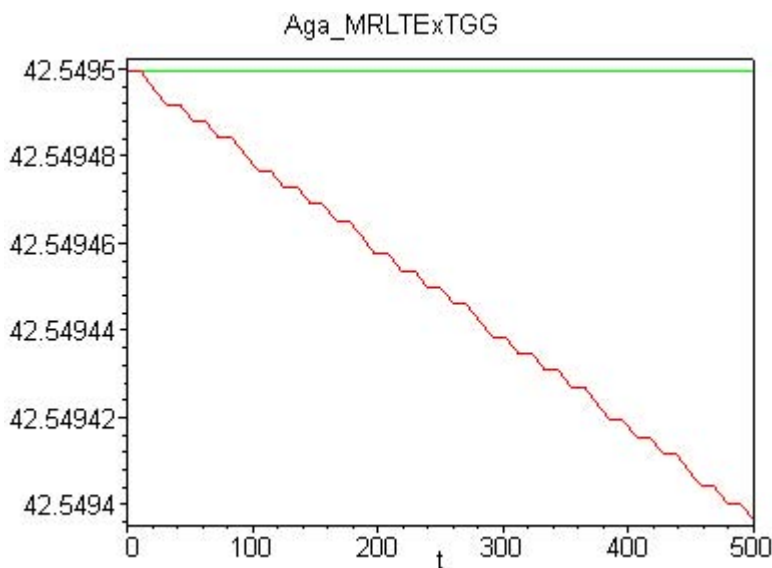


Figura 19: Comparação entre as soluções obtidas para $H(t)$ no movimento livre de torques e considerando-se a influência do TGG (— MRLTE; — TGG).

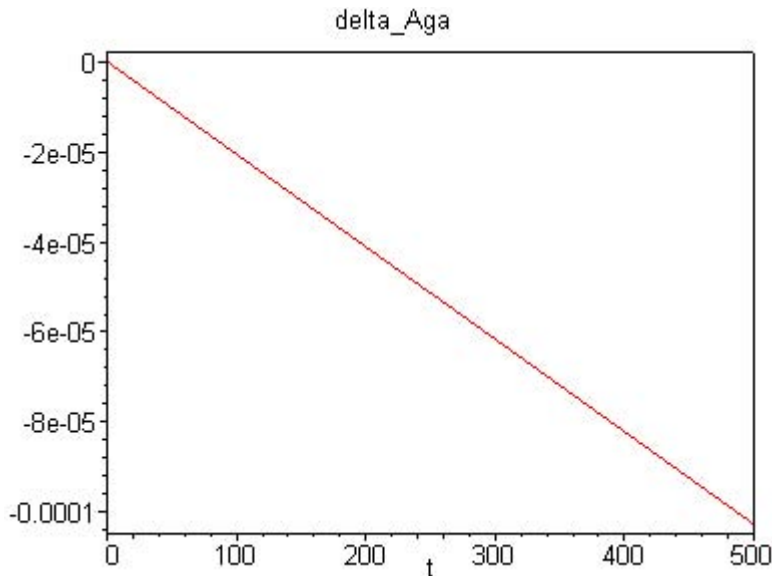


Figura 20: Gráfico de $\Delta H(t)$, de forma que $\Delta H(t) = H_{TGG} - H_{MRLTE}$.

A análise das Figuras 19 e 20 parece indicar apenas uma variação linear para a variável $H(t)$, tal como ocorre com h . No entanto, como foi mencionado, a variação sofrida por H é de longo período, só podendo ser verificada para intervalos de tempo bem maiores. As duas próximas figuras (Figuras 21 e 22) ilustram bem a situação, pois os gráficos foram plotados para intervalos de tempo da ordem de 10^8 s.

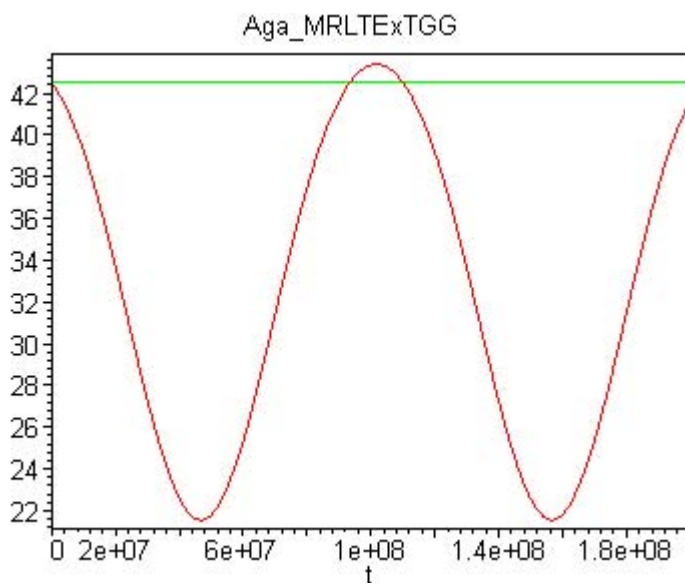


Figura 21: Comparação entre as soluções obtidas para $H(t)$ no movimento livre de torques e considerando-se a influência do TGG, para um tempo de 2×10^8 s (— MRLTE; — TGG).

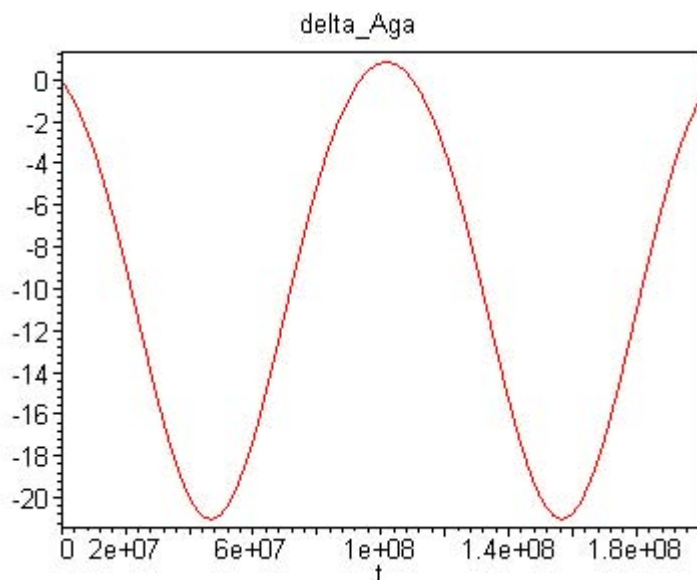


Figura 22: Gráfico de $\Delta H(t)$, de forma que $\Delta H(t) = H_{TGG} - H_{MRLTE}$, para um tempo de 2×10^8 s.

Tabela 10: Comparação entre as soluções obtidas para $H(t)$ no movimento livre de torques e considerando-se a influência do TGG.

$H(t)$ (em kg.m ² /s)			
Tempo (s)	Solução considerando-se a influência do TGG, dada por (6.43)	Solução constante para o MRLTE, dada por (5.9)	$\Delta H(t) = H_{TGG} - H_{MRLTE}$ 10^{-4} kg.m ² /s
0	42,5495	42,5495	0
200	42,54945894	42,5495	-0,4106
400	42,54941790	42,5495	-0,8210
600	42,54937683	42,5495	-1,2317
800	42,54933579	42,5495	-1,6421
1000	42,54929473	42,5495	-2,0527
1200	42,54925367	42,5495	-2,4633
1400	42,54921261	42,5495	-2,8739
1600	42,54917155	42,5495	-3,2845
1800	42,54913049	42,5495	-3,6951
2000	42,54908943	42,5495	-4,1057
2200	42,54904836	42,5495	-4,5164
2400	42,54900730	42,5495	-4,9270
2600	42,54896623	42,5495	-5,3377
2800	42,54892517	42,5495	-5,7483
3000	42,54888411	42,5495	-6,1589
3200	42,54884303	42,5495	-6,5697
3400	42,54880197	42,5495	-6,9803
3600	42,54876090	42,5495	-7,3910

Deste modo, embora não ocorra alteração no módulo do momento angular de rotação \vec{S} , pelo modelo de Hamiltoniana que foi adotado para o TGG, ocorrem variações na projeção do vetor \vec{S} sobre o eixo inercial OZ, o que acarreta variações na inclinação do eixo do momento angular de rotação em relação ao plano de inércia xy . Esta variação periódica em H está relacionada com o movimento de nutação do vetor do momento angular de rotação \vec{S} em torno do eixo inercial OZ.

6.4.1.3 Variável ψ

Por comparação direta das soluções (5.7) e (6.42), obtiveram-se os resultados apresentados nas Figuras 23 e 24, e na Tabela 11. Percebe-se que a função $\psi(t)$ tem na prática o mesmo comportamento, tanto no movimento livre como no movimento perturbado pelo TGG. Sabe-se que no caso particular $J = 0$, o coeficiente angular da função $\psi(t)$ representa o módulo da velocidade de rotação do satélite. Sob a influência do TGG, um outro termo é acrescido, o que significa que há uma alteração de frequência de rotação devida ao TGG. No entanto, qualquer que seja o caso, este termo extra ψ^*_1 poderia ser desprezado devido à sua magnitude muito pequena. Os resultados observados para $\psi(t)$ são sintetizados a seguir:

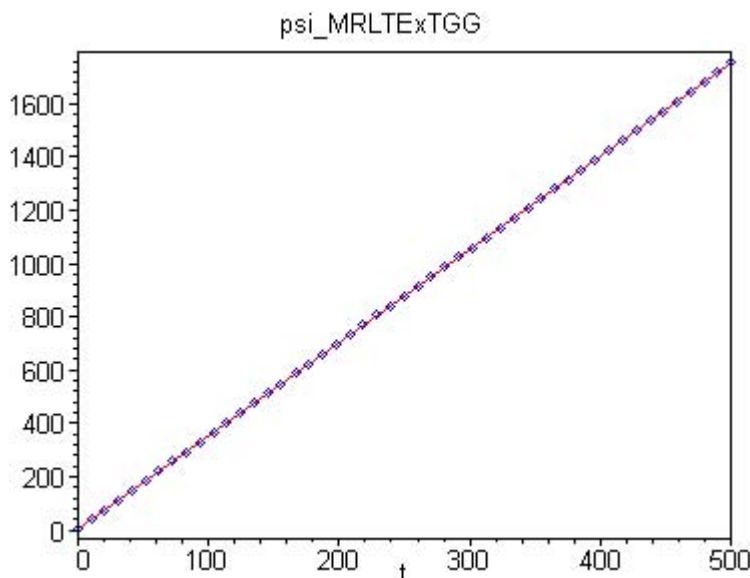


Figura 23: Comparação entre as soluções obtidas para $\psi(t)$ no movimento livre de torques e considerando-se a influência do TGG (**MRLTE; — TGG).

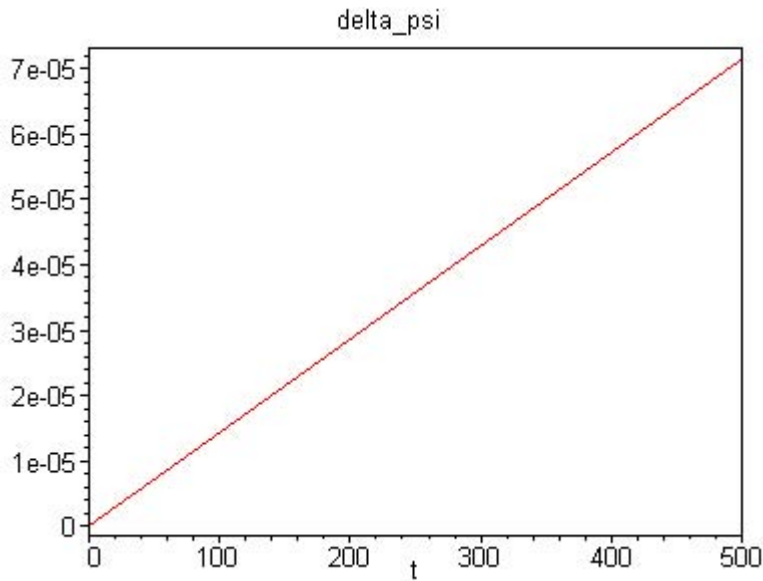


Figura 24: Gráfico de $\Delta\psi(t)$, de forma que $\Delta\psi(t) = \psi_{TGG} - \psi_{MRLTE}$.

Tabela 11: Comparação entre as soluções obtidas para $\psi(t)$ no movimento livre de torques e considerando-se a influência do TGG.

$\psi(t)$ (em rad)			
Tempo (s)	Solução considerando-se a influência do TGG, dada por (6.42)	Solução para o MRLTE, dada por (5.9)	$\Delta\psi(t) = \psi_{TGG} - \psi_{MRLTE}$ 10^{-4} rad
0	1,570796327	1,570796327	0
200	703,1915145	703,1914859	0,286
400	1404,812232	1404,812175	0,57
600	2106,432951	2106,432864	0,86
800	2808,053669	2808,053554	1,15
1000	3509,674387	3509,674244	1,43
1200	4211,295105	4211,294934	1,71
1400	4912,915823	4912,915624	2,00
1600	5614,536542	5614,536312	2,29
1800	6316,157260	6316,157002	2,58
2000	7017,777978	7017,777692	2,86
2200	7719,398696	7719,398382	3,14
2400	8421,019414	8421,019072	3,43
2600	9122,640133	9122,639760	3,72
2800	9824,260851	9824,260450	4,01
3000	10525,88157	10525,88114	4,3
3200	11227,50229	11227,50183	4,6
3400	11929,12301	11929,12252	4,9
3600	12630,74373	12630,74321	5,2

6.4.2 Comparações analíticas: caso $J \approx 0$

Nesta seção são comparados o MRLTE com o movimento sob a influência do TGG, quando $J \approx 0$. No que segue, as soluções são mostradas em gráficos e tabelas. Os intervalos de tempo escolhidos variam conforme a conveniência na apresentação dos resultados.

Para as implementações, são utilizados dados relacionados a um satélite fictício de pequeno porte, com características muito similares às dos Satélites Brasileiros de Coleta de Dados (SCD1 e SCD2), tal como na Tabela 1 do Capítulo 5. Estes dados são apresentados na Tabela 12 abaixo em termos das variáveis de Fukushima:

Tabela 12: Dados de um satélite fictício de pequeno porte, incluindo os parâmetros orbitais.

DADOS DO SATÉLITE			
MOMENTOS PRINCIPAIS DE INÉRCIA			
$I_x = A = 10,67 \text{ kg.m}^2$	$I_y = B = 10,90 \text{ kg.m}^2$	$I_z = C = 11,06 \text{ kg.m}^2$	
VARIÁVEIS DE FUKUSHIMA NO INSTANTE INICIAL $t_0 = 0s$		PARÂMETROS ORBITAIS	
$\Psi_0 = 58,0583 \text{ kg.m}^2/s$	$\psi_0 = 1,1497 + \frac{\pi}{2} \text{ rad}$	$a = 7140,42 \text{ km}$	$i = 0,4359 \text{ rad}$
$H_0 = 57,8374 \text{ kg.m}^2/s$	$h_0 = 1,3905 \text{ rad}$	$e = 0,0051$	$\Omega = 2,8747 \text{ rad}$
$\Xi_0 = 0,5054 \text{ kg.m}^2/s$	$\xi_0 = 0 \text{ rad}$	$\mu = 398601 \text{ km}^3/s^2$	

No caso considerado, a direção do vetor momento angular de rotação \vec{S} varia tanto em relação ao sistema de eixos principais de inércia OABC, por ser $J \approx 0$, como em relação ao sistema inercial OXYZ, devido à influência do TGG. No primeiro caso, as variações são observadas no comportamento das variáveis Ξ , ξ e ψ . Em relação ao sistema OXYZ, as variações são representadas nas variáveis h e H . As soluções para as variáveis h , H e ψ são similares às do caso $J = 0$, incluindo pequenas variações periódicas de efeitos quase desprezíveis. Com relação a Ξ e ξ , as soluções

são semelhantes às do MRLTE, nas quais também estão presentes variações periódicas de pequena magnitude devidas ao Torque de Gradiente de Gravidade.

6.4.2.1 Variável h

Por comparação direta das soluções (6.53) e (6.64), obtiveram-se os resultados apresentados nas Figuras 25 e 26, e na Tabela 13. Percebe-se que a função $h(t)$ sofre uma variação linear com decrescimento muito lento, devido ao pequeno valor do coeficiente hh_1 , dado em (6.59), e também variações periódicas de curto período e pequena amplitude, quando considera-se o efeito produzido pelo TGG. O tempo necessário para uma revolução completa da variável angular h é de aproximadamente 16427 dias. A solução do MRLTE é constante e igual a $h_0 = 1,3905$ rad.

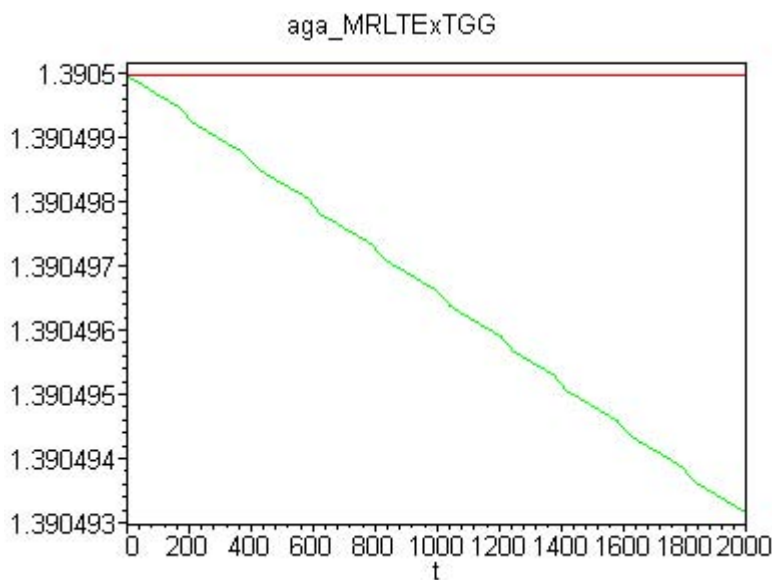


Figura 25: Comparação entre as soluções obtidas para $h(t)$ no movimento livre de torques e considerando-se a influência do TGG, quando $J \approx 0$ (— MRLTE; — TGG).

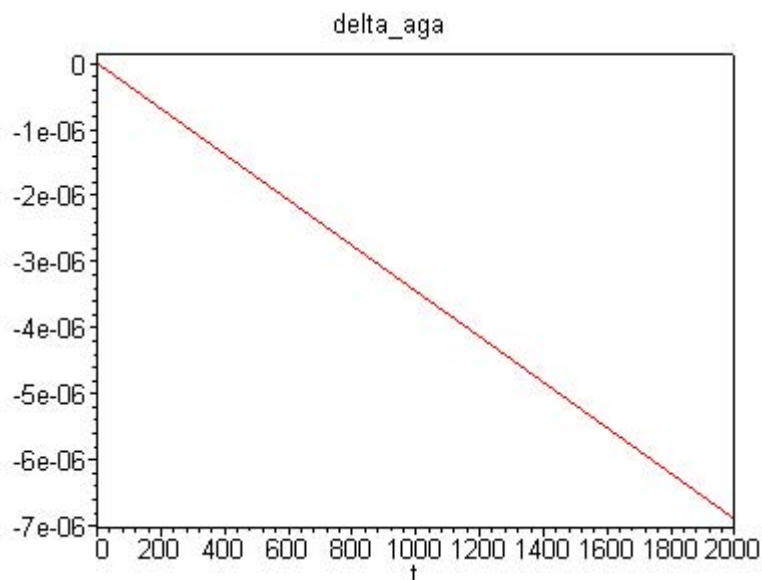


Figura 26: Gráfico de $\Delta h(t)$, de forma que $\Delta h(t) = h_{TGG} - h_{MRLTE}$, quando $J \approx 0$.

Tabela 13: Comparação entre as soluções obtidas para $h(t)$ no movimento livre de torques e considerando-se a influência do TGG, quando $J \approx 0$.

$h(t)$ (em rad)			
Tempo (s)	Solução considerando-se a influência do TGG, dada por (6.64)	Solução constante para o MRLTE, dada por (6.53)	$\Delta h(t) = h_{TGG} - h_{MRLTE}$ 10^{-5} rad
0	1,3905	1,3905	0
200	1,390499311	1,3905	-0,0689
400	1,390498621	1,3905	-0,1379
600	1,390497932	1,3905	-0,2068
800	1,390497242	1,3905	-0,2758
1000	1,390496553	1,3905	-0,3447
1200	1,390495863	1,3905	-0,4137
1400	1,390495174	1,3905	-0,4826
1600	1,390494485	1,3905	-0,5515
1800	1,390493795	1,3905	-0,6205
2000	1,390493106	1,3905	-0,6894
2200	1,390492416	1,3905	-0,7584
2400	1,390491727	1,3905	-0,8273
2600	1,390491037	1,3905	-0,8963
2800	1,390490348	1,3905	-0,9652
3000	1,390489659	1,3905	-1,0341
3200	1,390488969	1,3905	-1,1031
3400	1,390488280	1,3905	-1,172
3600	1,390487590	1,3905	-1,241

6.4.2.2 Variável H

Por comparação direta das soluções (6.50) e (6.97), obtiveram-se os resultados apresentados nas Figuras 27 e 28 e na Tabela 14. Percebe-se que a função $H(t)$ sofre uma variação periódica de longo período quando considera-se o efeito produzido pelo TGG. No caso $J \approx 0$, a solução conta também com outros termos periódicos de curto período e pequena amplitude. Da mesma forma que em seção anterior, só se pode perceber a variação de longo período sofrida por $H(t)$ quando considera-se um intervalo de tempo relativamente longo, aqui da ordem de 10^9 s. A solução do MRLTE, como se sabe, é constante e igual a $H_0 = 57,8374$ kg.m²/s. Pelas Figuras 27 e 28 verifica-se a variação de H em torno do valor inicial H_0 . Neste caso, as condições iniciais consideradas anularam a somatória dos termos de CH_0 , dada por (6.98), levando a $CH_0 = H_0$.

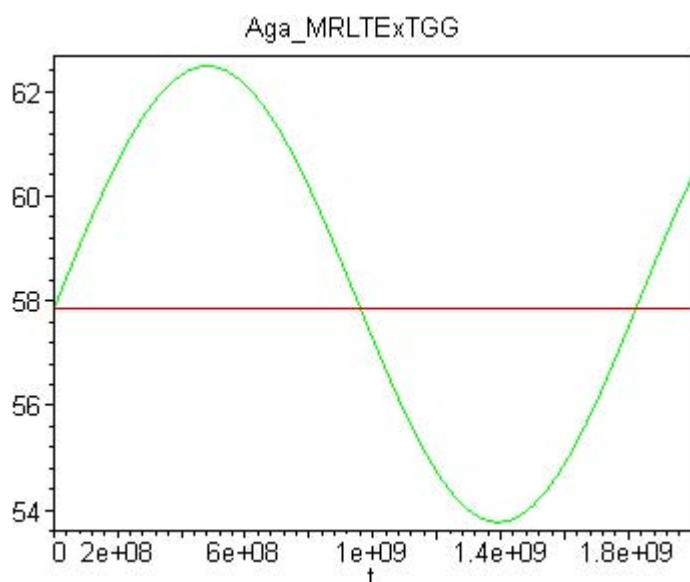


Figura 27: Comparação entre as soluções obtidas para $H(t)$ no movimento livre de torques e considerando-se a influência do TGG, para um tempo de 2×10^9 s, quando $J \approx 0$ (— MRLTE; — TGG).

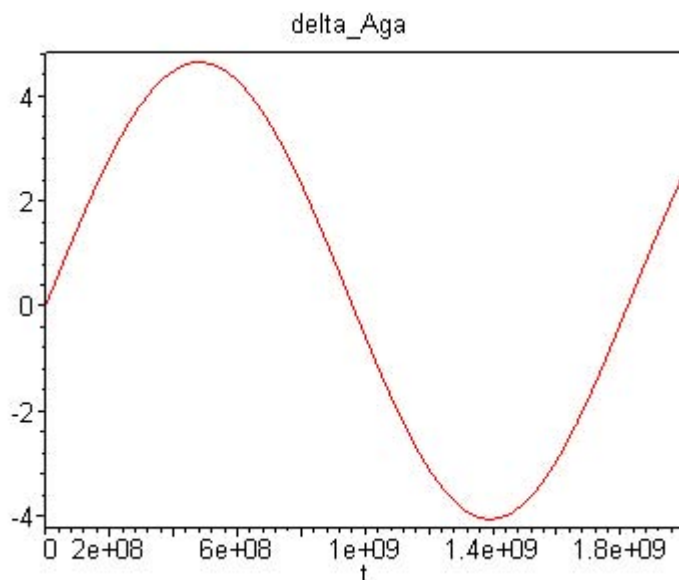


Figura 28: Gráfico de $\Delta H(t)$, de forma que $\Delta H(t) = H_{TGG} - H_{MRLTE}$, para um tempo de 2×10^9 s, quando $J \approx 0$.

Tabela 14: Comparação entre as soluções obtidas para $H(t)$ no movimento livre de torques e considerando-se a influência do TGG, quando $J \approx 0$.

$H(t)$ (em $\text{kg.m}^2/\text{s}$)			
Tempo (s)	Solução considerando-se a influência do TGG, dada por (6.99)	Solução constante para o MRLTE, dada por (6.52)	$\Delta H(t) = H_{TGG} - H_{MRLTE}$ $10^{-5} \text{ kg.m}^2/\text{s}$
0	57,8374	57,8374	0
200	57,83740300	57,8374	0,3
400	57,83740600	57,8374	0,6
600	57,83740900	57,8374	0,9
800	57,83741200	57,8374	1,2
1000	57,83741500	57,8374	1,5
1200	57,83741800	57,8374	1,8
1400	57,83742100	57,8374	2,1
1600	57,83742399	57,8374	2,399
1800	57,83742700	57,8374	2,7
2000	57,83742999	57,8374	2,999
2200	57,83743300	57,8374	3,3
2400	57,83743600	57,8374	3,6
2600	57,83743900	57,8374	3,9
2800	57,83744200	57,8374	4,2
3000	57,83744499	57,8374	4,499
3200	57,83744800	57,8374	4,8
3400	57,83745099	57,8374	5,099
3600	57,83745401	57,8374	5,401

6.4.2.3 Variável ψ

Por comparação direta das soluções (6.51) e (6.83), obtiveram-se os resultados apresentados nas Figuras 29 e 30, e na Tabela 15. Percebe-se que a função $\psi(t)$ tem na prática o mesmo comportamento, tanto no movimento livre como no movimento perturbado pelo TGG. Sob a influência do TGG, quando considera-se $J \approx 0$, vários termos periódicos são acrescentados à solução geral, no entanto são variações de curto período e pequena amplitude, que praticamente não influem no comportamento da função. O principal termo da solução é $\psi\psi_1$, dado em (6.74), e é tal que $\psi\psi_1 \approx \Psi_0/C$, de modo que o crescimento da função ψ é pouco influenciado pelo TGG. Os resultados observados para $\psi(t)$ são sintetizados a seguir:

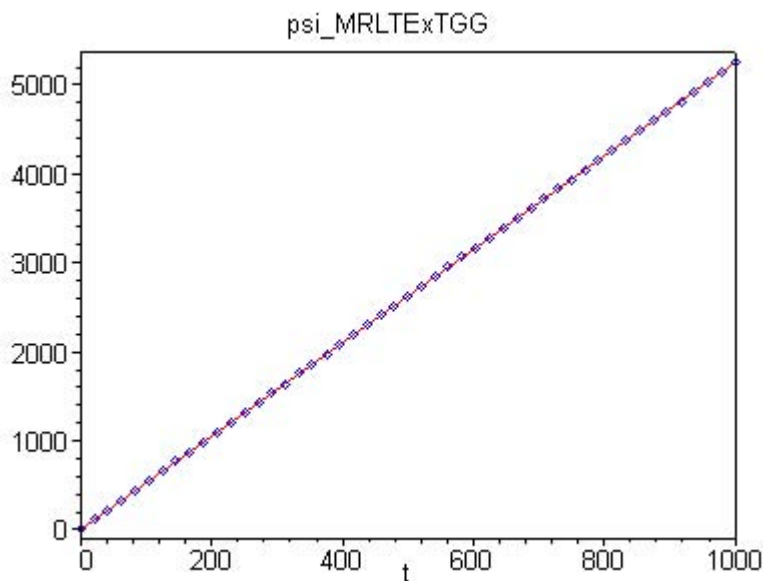


Figura 29: Comparação entre as soluções obtidas para $\psi(t)$ no movimento livre de torques e considerando-se a influência do TGG, quando $J \approx 0$ (** MRLTE; — TGG).

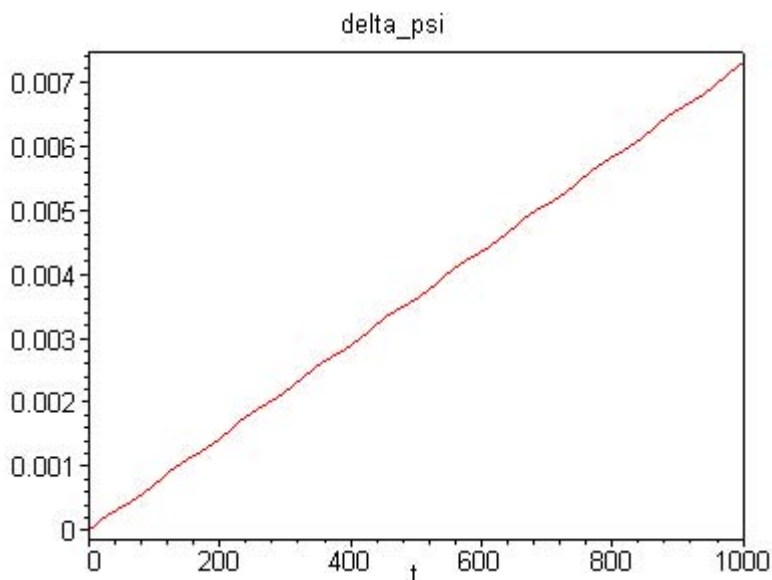


Figura 30: Gráfico de $\Delta\psi(t)$, de forma que $\Delta\psi(t) = \psi_{TGG} - \psi_{MRLTE}$, quando $J \approx 0$.

Tabela 15: Comparação entre as soluções obtidas para $\psi(t)$ no movimento livre de torques e considerando-se a influência do TGG, quando $J \approx 0$.

$\psi(t)$ (em rad)			
Tempo (s)	Solução considerando-se a influência do TGG, dada por (6.83)	Solução para o MRLTE, dada por (6.51)	$\Delta\psi(t) = \psi_{TGG} - \psi_{MRLTE}$ 10^{-2} rad
0	2,720496327	2,720496327	0
200	1052,600823	1052,599339	0,1484
400	2102,481088	2102,478182	0,2906
600	3152,361359	3152,357024	0,4335
800	4202,241693	4202,235866	0,5827
1000	5252,122012	5252,114710	0,7302
1200	6302,002270	6301,993552	0,8718
1400	7351,882550	7351,872394	1,0156
1600	8401,762888	8401,751236	1,1652
1800	9451,643199	9451,630080	1,3119
2000	10501,52345	10501,50893	1,452
2200	11551,40375	11551,38777	1,598
2400	12601,28409	12601,26661	1,748
2600	13651,16439	13651,14545	1,894
2800	14701,04464	14701,02430	2,034
3000	15750,92494	15750,90314	2,18
3200	16800,80528	16800,78198	2,33
3400	17850,68558	17850,66082	2,476
3600	18900,56582	18900,53967	2,615

6.4.2.4 Variável ξ

Por comparação direta das soluções (6.52) e (6.72), obtiveram-se os resultados apresentados nas Figuras 31 e 32, e na Tabela 16. Percebe-se que a função $\xi(t)$ tem na prática o mesmo comportamento, tanto no movimento livre como no movimento perturbado pelo TGG. Sob a influência do TGG, quando considera-se $J \approx 0$, vários termos periódicos são acrescentados à solução geral, no entanto são variações de curto período e pequena amplitude, que praticamente não influem no comportamento da função. Os resultados observados para $\xi(t)$ são sintetizados a seguir, salientando que as variações ocorreram em torno do valor inicial $\xi_0 = 0$, uma vez que a solução de $\xi(t)$ dada por (6.72) só possui termos periódicos na função trigonométrica seno.

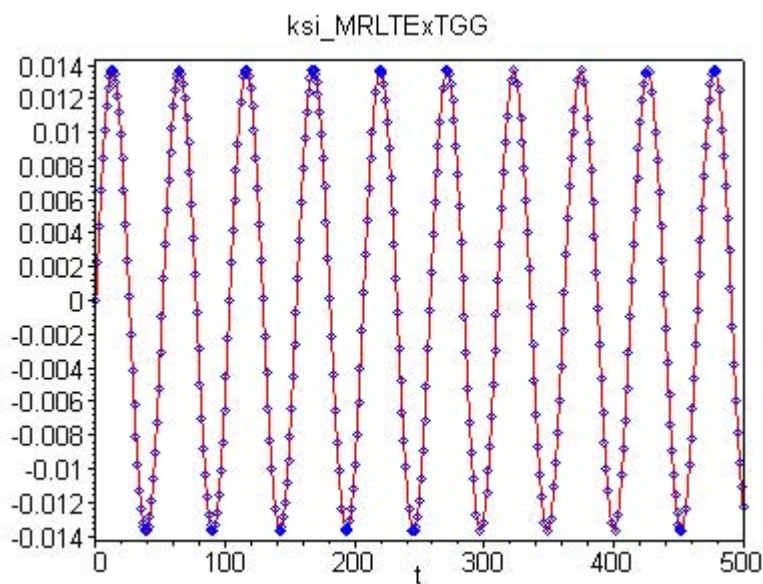


Figura 31: Comparação entre as soluções obtidas para $\xi(t)$ no movimento livre de torques e considerando-se a influência do TGG, quando $J \approx 0$ (** MRLTE; — TGG).

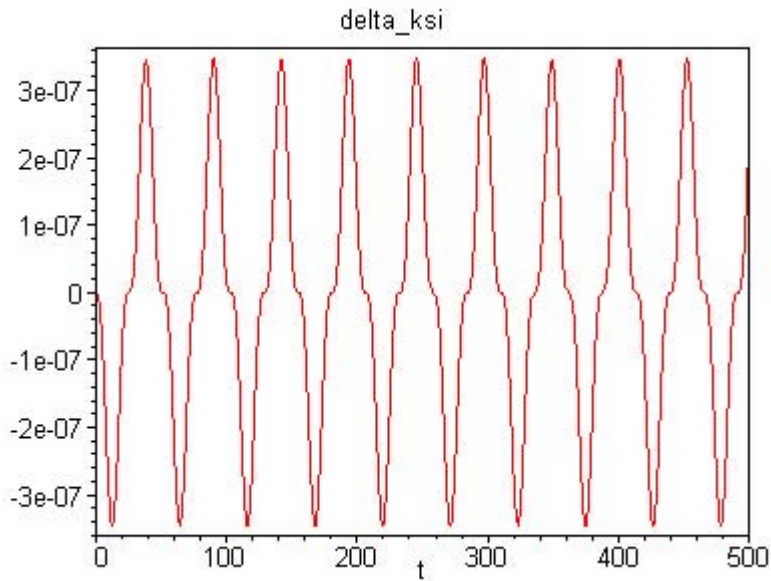


Figura 32: Gráfico de $\Delta\xi(t)$, de forma que $\Delta\xi(t) = \xi_{TGG} - \xi_{MRLTE}$, quando $J \approx 0$.

Tabela 16: Comparação entre as soluções obtidas para $\xi(t)$ no movimento livre de torques e considerando-se a influência do TGG, quando $J \approx 0$.

$\xi(t)$ (em rad)			
Tempo (s)	Solução considerando-se a influência do TGG, dada por (6.74) 10^{-2} rad	Solução para o MRLTE, dada por (6.54) 10^{-2} rad	$\Delta\xi(t) = \xi_{TGG} - \xi_{MRLTE}$ 10^{-7} rad
0	0	0	0
200	-0,9989925947	-0,9990059109	1,33162
400	-1,371379405	-1,371413891	3,4486
600	-0,8836324581	-0,8836416675	0,92094
800	0,1583695109	0,1583695593	-0,00484
1000	1,101030168	1,101048002	-1,7834
1200	1,353092393	1,353125516	-3,3123
1400	0,7564879519	0,7564937243	-0,57724
1600	-0,3146268151	-0,3146272225	0,04074
1800	-1,188384710	-1,188407141	2,2431
2000	-1,316762155	-1,316792679	3,0524
2200	-0,6192543736	-0,6192575337	0,31601
2400	0,4666877776	0,4666892534	-0,14758
2600	1,259891717	1,259918396	-2,6679
2800	1,262872962	1,262899886	-2,6924
3000	0,4737620019	0,4737634110	-0,14091
3200	-0,6125246051	-0,6125276630	0,30579
3400	-1,314597802	-1,314628215	3,0413
3600	-1,192143105	-1,192165818	2,2713

6.4.2.5 Variável Ξ

Por comparação direta das soluções (6.49) e (6.109), obtiveram-se os resultados apresentados nas Figuras 33 e 34, e na Tabela 17. Percebe-se que a função $\Xi(t)$ tem na prática o mesmo comportamento, tanto no movimento livre como no movimento perturbado pelo TGG. Sob a influência do TGG, quando considera-se $J \approx 0$, vários termos periódicos são acrescentados à solução geral, no entanto são variações de curto período e pequena amplitude, que praticamente não influem no comportamento da função. Os resultados observados para $\Xi(t)$ são sintetizados a seguir, observando-se que nas Figuras 33 e 34 que a variação periódica de Ξ ocorre em torno de $C\Xi_0$, dado em (6.109). Esta expressão de $C\Xi_0$ desloca a variação de $\Xi(t)$ de modo que ela não ocorre em torno do valor inicial de Ξ que corresponde à solução de ordem zero (MRLTE). Neste caso, as condições iniciais consideradas não anularam a somatória dos termos de $C\Xi_0$, levando a $C\Xi_0 \neq \Xi_0$.

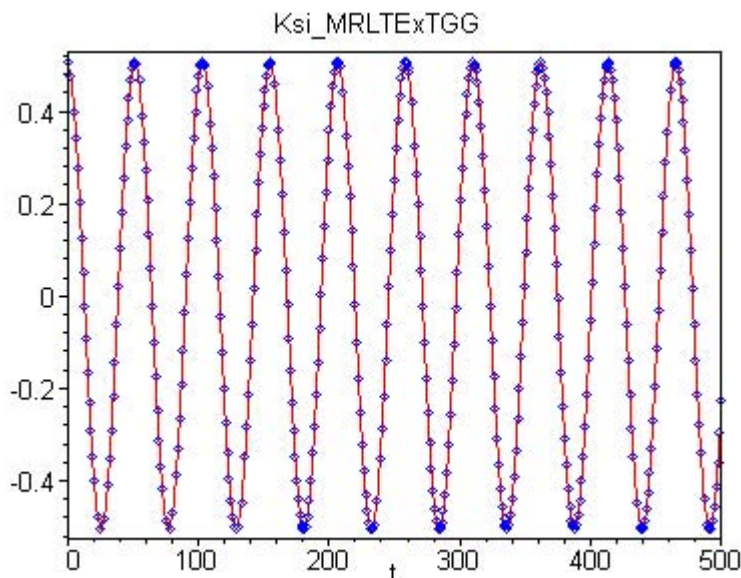


Figura 33: Comparação entre as soluções obtidas para $\Xi(t)$ no movimento livre de torques e considerando-se a influência do TGG, quando $J \approx 0$ (** MRLTE; — TGG).

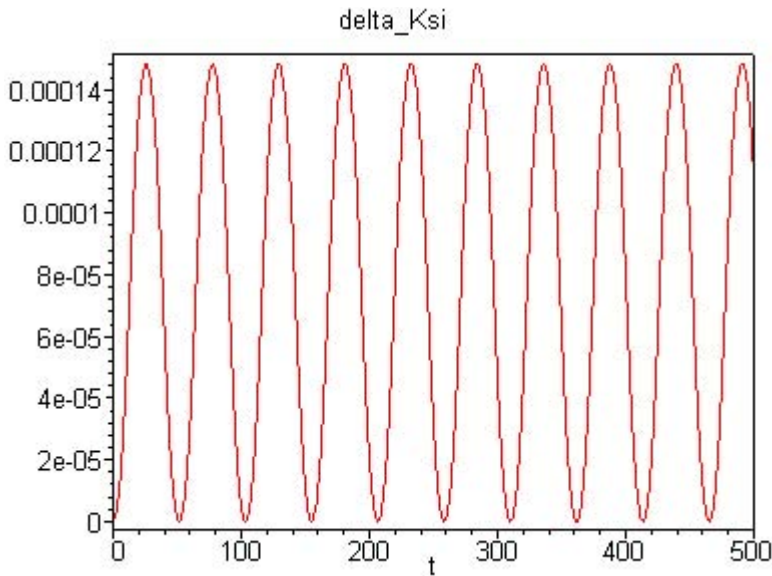


Figura 34: Gráfico de $\Delta\Xi(t)$, de forma que $\Delta\Xi(t) = \Xi_{TGG} - \Xi_{MRLTE}$, quando $J \approx 0$.

Tabela 17: Comparação entre as soluções obtidas para $\Xi(t)$ no movimento livre de torques e considerando-se a influência do TGG, quando $J \approx 0$.

$\Xi(t)$ (em kg.m ² /s)			
Tempo (s)	Solução considerando-se a influência do TGG, dada por (6.109) 10 ⁻¹ kg.m ² /s	Solução para o MRLTE, dada por (6.49) 10 ⁻¹ kg.m ² /s	$\Delta\Xi(t) = \Xi_{TGG} - \Xi_{MRLTE}$ 10 ⁻⁴ kg.m ² /s
0	5,054225955	5,054225955	0
200	3,469368774	3,469166501	0,202273
400	-0,2910383662	-0,2918285802	0,790214
600	-3,868444843	-3,869782517	1,337674
800	-5,019044724	-5,020525871	1,481147
1000	-3,021068885	-3,022287731	1,218846
1200	0,8721946426	0,8715942861	0,600356
1400	4,218894753	4,218793347	0,101406
1600	4,919890437	4,919874999	0,015438
1800	2,535444144	2,535105695	0,338449
2000	-1,438760482	-1,439736531	0,976049
2200	-4,510124501	-4,511545045	1,420544
2400	-4,752165696	-4,753615493	1,449797
2600	-2,013049929	-2,014117012	1,067083
2800	1,989101645	1,988679314	0,422331
3000	4,744169361	4,744133210	0,036151
3200	4,524027649	4,523964741	0,062908
3400	1,466773498	1,466268306	0,505192
3600	-2,509959790	-2,511102263	1,142473

6.5 SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO COM TGG

Com o objetivo de validar as soluções analíticas apresentadas neste capítulo, foram obtidas soluções numéricas das equações do movimento rotacional sob influência do Torque de Gradiente de Gravidade, pela aplicação do método de Runge-Kutta de 4ª ordem, realizada com o software MAPLE V.

Os resultados são apresentados inicialmente para o caso $J = 0$, nas Tabelas 18, 19 e 20 para as variáveis h , H e ψ , respectivamente, e computadas suas diferenças em relação às respectivas soluções analíticas, para um período de 3600s. Salienta-se que neste caso as variáveis ξ , Ξ e Ψ permanecem constantes, apesar da presença do TGG. Na representação gráfica do comportamento das variáveis apresentada nas Figuras 35, 36 e 37, são considerados intervalos de tempo de 500s. Os dados iniciais são dados na Tabela 8.

Em seguida os resultados são apresentados para o caso $J \approx 0$, nas Tabelas 21, 22, 23, 24 e 25 para as variáveis h , H , ψ , ξ e Ξ respectivamente, e computadas suas diferenças em relação às respectivas soluções analíticas, para um período de 3600s. Na representação gráfica do comportamento das variáveis apresentada nas Figuras 38 - 42, são considerados intervalos de tempo de 2000s para h e H , e 1000s para as demais. Neste caso apenas a variável Ψ permanece constante uma vez que foi utilizada a Hamiltoniana média associada ao TGG. Os dados iniciais para este caso são dados na Tabela 12.

O objetivo de tais comparações é destacar a boa concordância das soluções analíticas com os resultados obtidos pelo método numérico.

6.5.1 Soluções numéricas: caso $J = 0$

Os resultados numéricos obtidos para as equações do movimento (6.12) – (6.17) com a aplicação do método de Runge-Kutta de 4ª ordem e para $J = 0$, estão apresentadas nas Tabelas 18, 19, 20 para as variáveis h , H e ψ respectivamente, considerando os dados para o satélite, dados na Tabela 8.

A Figura 35 apresenta a comparação entre a solução analítica e numérica para a variável angular h em um intervalo de 500s. Pelos resultados das Tabelas 9 e 18 e Figura 35, observa-se uma boa concordância entre as soluções, com diferença entre elas sendo da ordem de 10^{-9} rad e menor do que a diferença entre a solução do MRLTE e a solução com o TGG, que foi da ordem de 10^{-4} rad para o intervalo considerado.

A Figura 36 apresenta a comparação entre a solução analítica e numérica para a variável métrica H em um intervalo de 500s. Pelos resultados das Tabelas 10 e 19 e Figura 36 observa-se também uma boa concordância entre as soluções, com diferença entre elas sendo da ordem de 10^{-8} kg.m²/s e menor do que a diferença entre a solução do MRLTE e a solução com o TGG, que foi da ordem de 10^{-4} rad para o intervalo considerado.

Do mesmo modo, a Figura 37 apresenta a comparação entre a solução analítica e numérica para a variável angular ψ em um intervalo de 500s. Pelos resultados das Tabelas 11 e 20 e Figura 37 observa-se uma boa concordância entre as soluções, com diferença entre elas sendo da ordem de 10^{-6} rad e menor do que a diferença entre a solução do MRLTE e a solução com o TGG, que foi da ordem de 10^{-4} rad para o intervalo considerado.

Tabela 18: Solução numérica obtida para a variável $h(t)$, e sua diferença em relação à solução analítica, quando $J = 0$.

$h(t)$ (em rad)			
Tempo (s)	Solução numérica 10^{-2} rad	Solução analítica 10^{-2} rad	$\Delta h(t) = h_{num} - h_{anlt}$ 10^{-9} rad
0	3,77	3,77	0
200	3,768856677	3,768856675	0,02
400	3,767713358	3,767713350	0,08
600	3,766570043	3,766570026	0,17
800	3,765426732	3,765426701	0,31
1000	3,764283425	3,764283376	0,49
1200	3,763140122	3,763140051	0,71
1400	3,761996823	3,761996726	0,97
1600	3,760853528	3,760853402	1,26
1800	3,759710237	3,759710077	1,60
2000	3,758566950	3,758566752	1,98
2200	3,757423667	3,757423427	2,40
2400	3,756280388	3,756280102	2,86
2600	3,755137113	3,755136778	3,35
2800	3,753993842	3,753993453	3,89
3000	3,752850575	3,752850128	4,47
3200	3,751707312	3,751706803	5,09
3400	3,750564053	3,750563478	5,75
3600	3,749420798	3,749420154	6,44

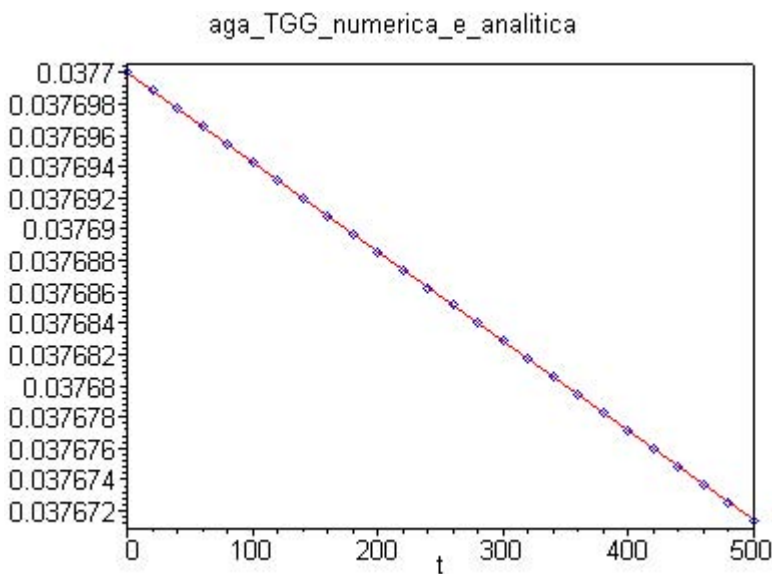


Figura 35: Comparação entre as soluções numérica (***) e analítica (—) para $h(t)$, $J = 0$, para um intervalo de tempo de 500s.

Tabela 19: Solução numérica obtida para a variável $H(t)$, e sua diferença em relação à solução analítica, quando $J = 0$.

$H(t)$ (em $\text{kg.m}^2/\text{s}$)			
Tempo (s)	Solução numérica	Solução analítica	$\Delta H(t) = H_{num} - H_{anlt}$ $10^{-8} \text{ kg.m}^2/\text{s}$
0	42,5495	42,5495	0
200	42,54945895	42,54945894	1,0
400	42,54941789	42,54941790	-1,0
600	42,54937683	42,54937683	0
800	42,54933577	42,54933579	-2,0
1000	42,54929471	42,54929473	-2,0
1200	42,54925365	42,54925367	-2,0
1400	42,54921259	42,54921261	-2,0
1600	42,54917153	42,54917155	-2,0
1800	42,54913047	42,54913049	-2,0
2000	42,54908941	42,54908943	-2,0
2200	42,54904835	42,54904836	-1,0
2400	42,54900729	42,54900730	-1,0
2600	42,54896623	42,54896623	0
2800	42,54892517	42,54892517	0
3000	42,54888410	42,54888411	-1,0
3200	42,54884303	42,54884303	0
3400	42,54880196	42,54880197	-1,0
3600	42,54876089	42,54876090	-1,0

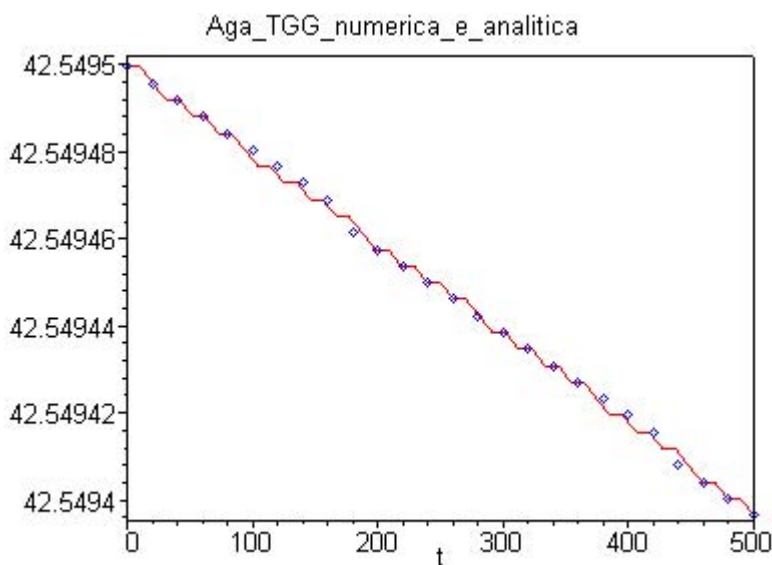


Figura 36: Comparação entre as soluções numérica (***) e analítica (—) para $H(t)$, $J = 0$, para um intervalo de tempo de 500s.

Tabela 20: Solução numérica obtida para a variável $\psi(t)$, e sua diferença em relação à solução analítica, quando $J = 0$.

$\psi(t)$ (em rad)			
Tempo (s)	Solução numérica	Solução analítica	$\Delta\psi(t) = \psi_{num} - \psi_{ant}$ 10^{-6} rad
0	1,570796327	1,570796327	0
200	703,1915146	703,1915145	0,1
400	1404,812233	1404,812232	1,0
600	2106,432951	2106,432951	0
800	2808,053669	2808,053669	0
1000	3509,674387	3509,674387	0
1200	4211,295105	4211,295105	0
1400	4912,915823	4912,915823	0
1600	5614,536541	5614,536542	-1,0
1800	6316,157259	6316,157260	-1,0
2000	7017,777977	7017,777978	-1,0
2200	7719,398695	7719,398696	-1,0
2400	8421,019413	8421,019414	-1,0
2600	9122,640131	9122,640133	-2,0
2800	9824,260850	9824,260851	-1,0
3000	10525,88157	10525,88157	0
3200	11227,50229	11227,50229	0
3400	11929,12301	11929,12301	0
3600	12630,74373	12630,74373	0

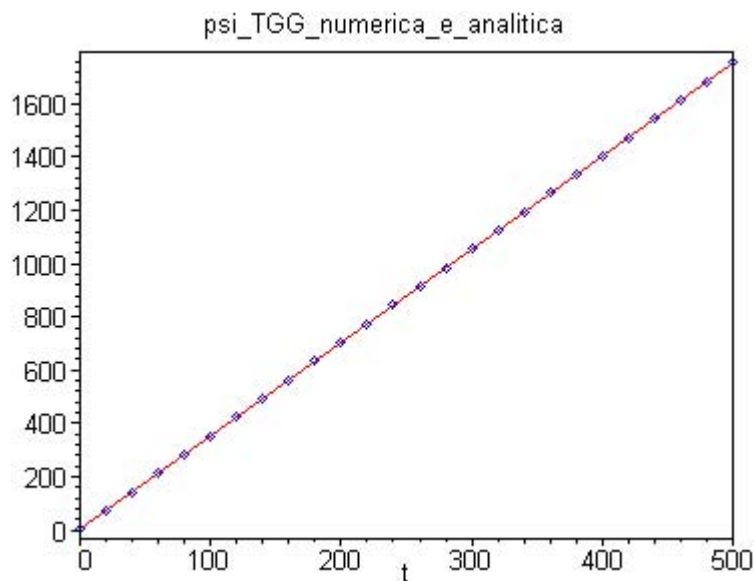


Figura 37: Comparação entre as soluções numérica (***) e analítica (—) para $\psi(t)$, $J = 0$, para um intervalo de tempo de 500s.

6.5.2 Soluções numéricas: caso $J \approx 0$

Os resultados numéricos obtidos para as equações do movimento (6.12) – (6.17) com a aplicação do método de Runge-Kutta de 4ª ordem e para $J \approx 0$, estão apresentadas nas tabelas 21 - 25 para as variáveis h , H , ψ , ξ e Ξ respectivamente, considerando os dados para o satélite, dados na Tabela 12.

As Figuras 38, 39 e 40 apresentam a comparação entre as soluções analíticas e numéricas para as variáveis h , H e ψ . Do mesmo modo que para o caso de $J = 0$, pelos resultados das Tabelas 13 e 21 e Figura 38 para a variável h , Tabelas 14 e 22 e Figura 39 para a variável H , e Tabelas 15 e 23 e Figura 40 para variável ψ , observa-se uma boa concordância entre as soluções, com as diferenças entre elas (10^{-8} rad para h , 10^{-6} kg.m²/s para H , e 10^{-5} rad para ψ) sendo menores do que as diferenças entre a solução do MRLTE e a solução com o TGG (10^{-5} rad para h , 10^{-5} kg.m²/s para H , e 10^{-2} rad para ψ). As Fig. 41 e 42 apresentam a comparação entre as soluções analíticas e numéricas para as variáveis ξ e Ξ em um intervalo de 1000s. Pelos resultados da Tabela 24 e Figura 41 para a variável ξ e Tabela 25 e Figura 42 para a variável Ξ observa-se uma boa concordância entre as soluções para o intervalo considerado. No entanto, comparando os resultados das Tabelas 16 e 17, 24 e 25 para as variáveis ξ e Ξ , observa-se que estas diferenças entre soluções analíticas e numéricas (10^{-4} rad para ξ e 10^{-2} kg.m²/s para Ξ) são maiores do que a diferença entre a solução do MRLTE e a solução com o TGG (10^{-7} rad para ξ e 10^{-4} kg.m²/s para Ξ). Isto mostra a grande influência do ângulo J nas variáveis ξ e Ξ , sendo que a solução analítica aqui determinada deve ser útil para analisar qualitativamente o comportamento destas variáveis, mas deve ser utilizada com muito cuidado nesta avaliação qualitativa das mesmas. Salienta-se que, como observado anteriormente na comparação entre as soluções numéricas e analíticas para o MRLTE na seção 5.4, a solução numérica possui uma melhor concordância com a solução geral do que com a solução aproximada, para cada uma das variáveis. Note-se também que para estas duas variáveis (ξ e Ξ) é que utilizou-se um número maior de aproximações para determinar a solução com o TGG.

Tabela 21: Solução numérica obtida para a variável $h(t)$, e sua diferença em relação à solução analítica, quando $J \approx 0$.

$h(t)$ (em rad)			
Tempo (s)	Solução numérica	Solução analítica	$\Delta h(t) = h_{num} - h_{anlt}$ 10^{-8} rad
0	1,3905	1,3905	0
200	1,390499309	1,390499311	-0,2
400	1,390498618	1,390498621	-0,3
600	1,390497926	1,390497932	-0,6
800	1,390497237	1,390497242	-0,5
1000	1,390496544	1,390496553	-0,9
1200	1,390495853	1,390495863	-1,0
1400	1,390495162	1,390495174	-1,2
1600	1,390494471	1,390494485	-1,4
1800	1,390493779	1,390493795	-1,6
2000	1,390493088	1,390493106	-1,8
2200	1,390492397	1,390492416	-1,9
2400	1,390491707	1,390491727	-2,0
2600	1,390491015	1,390491037	-2,2
2800	1,390490324	1,390490348	-2,4
3000	1,390489632	1,390489659	-2,7
3200	1,390488940	1,390488969	-2,9
3400	1,390488248	1,390488280	-3,2
3600	1,390487557	1,390487590	-3,3

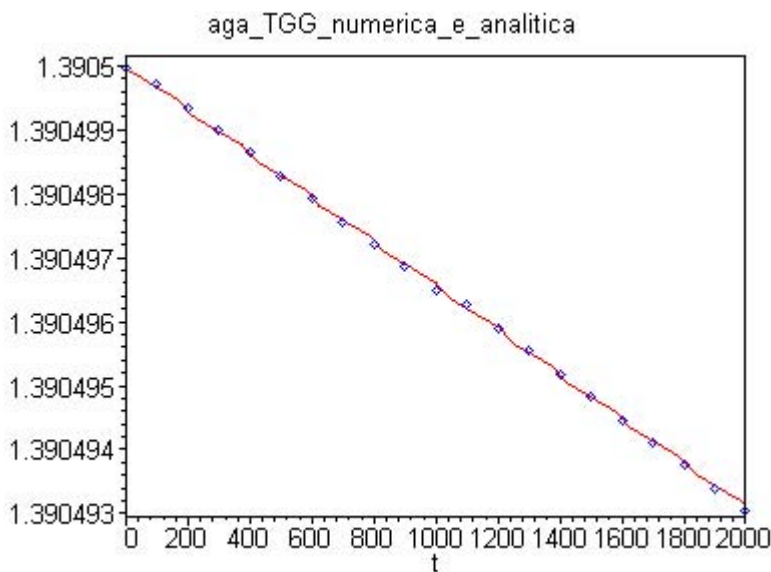


Figura 38: Comparação entre as soluções numérica (***) e analítica (—) para $h(t)$, $J \approx 0$, para um intervalo de tempo de 2000s.

Tabela 22: Solução numérica obtida para a variável $H(t)$, e sua diferença em relação à solução analítica, quando $J \approx 0$.

$H(t)$ (em $\text{kg.m}^2/\text{s}$)			
Tempo (s)	Solução numérica	Solução analítica	$\Delta H(t) = H_{num} - H_{anlt}$ $10^{-6} \text{ kg.m}^2/\text{s}$
0	57,8374	57,8374	0
200	57,83740267	57,83740300	-0,33
400	57,83740534	57,83740600	-0,66
600	57,83740801	57,83740900	-0,99
800	57,83741065	57,83741200	-1,35
1000	57,83741332	57,83741500	-1,68
1200	57,83741600	57,83741800	-2,0
1400	57,83741866	57,83742100	-2,34
1600	57,83742131	57,83742399	-2,68
1800	57,83742398	57,83742700	-3,02
2000	57,83742666	57,83742999	-3,33
2200	57,83742933	57,83743300	-3,67
2400	57,83743197	57,83743600	-4,03
2600	57,83743466	57,83743900	-4,34
2800	57,83743734	57,83744200	-4,66
3000	57,83743999	57,83744499	-5,0
3200	57,83744263	57,83744800	-5,37
3400	57,83744532	57,83745099	-5,67
3600	57,83744799	57,83745401	-6,02

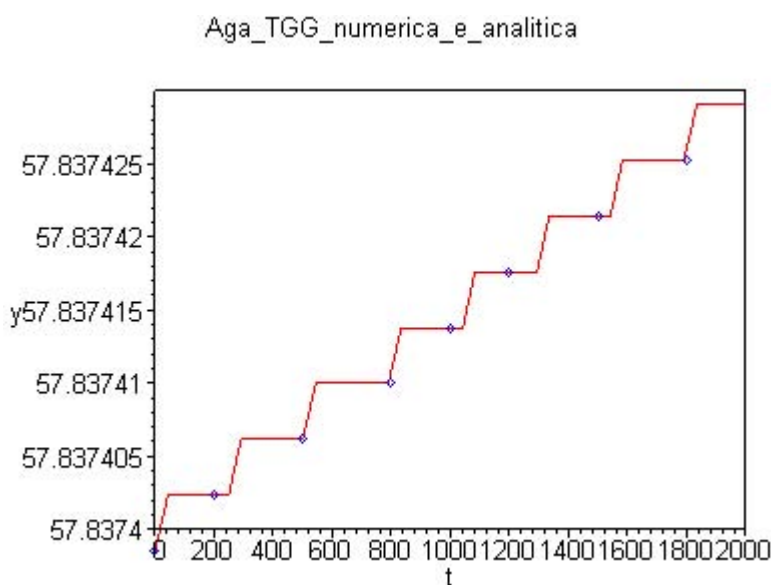


Figura 39: Comparação entre as soluções numérica (***) e analítica (—) para $H(t)$, $J \approx 0$, para um intervalo de tempo de 2000s.

Tabela 23: Solução numérica obtida para a variável $\psi(t)$, e sua diferença em relação à solução analítica, quando $J \approx 0$.

$\psi(t)$ (em rad)			
Tempo (s)	Solução numérica	Solução analítica	$\Delta\psi(t) = \psi_{num} - \psi_{ant}$ 10^{-5} rad
0	2,720496327	2,720496327	0
200	1052,600827	1052,600823	0,4
400	2102,481088	2102,481088	0
600	3152,361372	3152,361359	1,3
800	4202,241703	4202,241693	1,0
1000	5252,122024	5252,122012	1,2
1200	6302,002265	6302,002270	-5,0
1400	7351,882533	7351,882550	-1,7
1600	8401,762868	8401,762888	-2,0
1800	9451,643173	9451,643199	-2,6
2000	10501,52341	10501,52345	-4,0
2200	11551,40371	11551,40375	-4,0
2400	12601,28403	12601,28409	-6,0
2600	13651,16435	13651,16439	-4,0
2800	14701,04461	14701,04464	-3,0
3000	15750,92490	15750,92494	-4,0
3200	16800,80525	16800,80528	-3,0
3400	17850,68553	17850,68558	-5,0
3600	18900,56577	18900,56582	-5,0

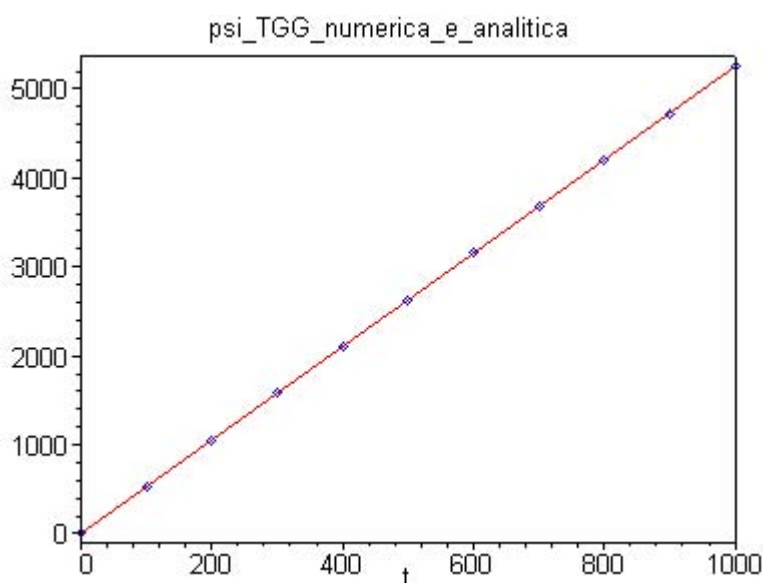


Figura 40: Comparação entre as soluções numérica (***) e analítica (—) para $\psi(t)$, $J \approx 0$, para um intervalo de tempo de 1000s.

Tabela 24: Solução numérica obtida para a variável $\xi(t)$, e sua diferença em relação à solução analítica, quando $J \approx 0$.

$\xi(t)$ (em rad)			
Tempo (s)	Solução numérica 10^{-2} rad	Solução analítica 10^{-2} rad	$\Delta\xi(t) = \xi_{num} - \xi_{anlt}$ 10^{-4} rad
0	0	0	0
200	-1,000568240	-0,9989925947	-0,1575645
400	-1,371197250	-1,371379405	0,0182155
600	-0,8786088575	-0,8836324581	0,5023601
800	0,1671481754	0,1583695109	0,8778665
1000	1,107664347	1,101030168	0,6634179
1200	1,350828528	1,353092393	-0,2263865
1400	0,7435932196	0,7564879519	-1,2894732
1600	-0,3318144745	-0,3146268151	-1,7187659
1800	-1,198303181	-1,188384710	-0,9918471
2000	-1,310389440	-1,316762155	0,6372715
2200	-0,5975268880	-0,6192543736	2,1727486
2400	0,4915503446	0,4666877776	2,4862567
2600	0,271137279	1,259891717	1,1245562
2800	1,250480365	1,262872962	-1,2392597
3000	0,4425794786	0,4737620019	-3,1182523
3200	-0,6439820225	-0,6125246051	-3,1457417
3400	-1,325084564	-1,314597802	-1,0486762
3600	-1,171990817	-1,192143105	2,0152288

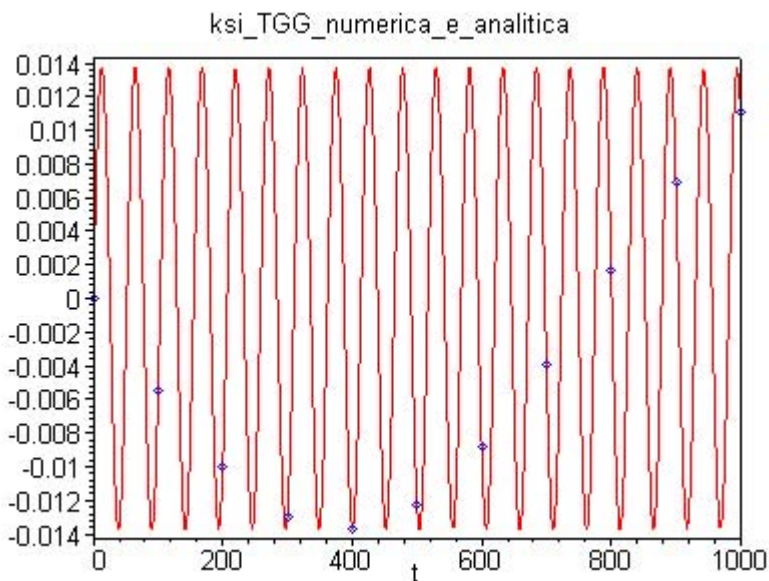


Figura 41: Comparação entre as soluções numérica (***) e analítica (—) para $\xi(t)$, $J \approx 0$, para um intervalo de tempo de 1000s.

Tabela 25: Solução numérica obtida para a variável $\Xi(t)$, e sua diferença em relação à solução analítica, quando $J \approx 0$.

$\Xi(t)$ (em $\text{kg.m}^2/\text{s}$)			
Tempo (s)	Solução numérica $10^{-1} \text{ kg.m}^2/\text{s}$	Solução analítica $10^{-1} \text{ kg.m}^2/\text{s}$	$\Delta\Xi(t) = \Xi_{num} - \Xi_{ant}$ $10^{-2} \text{ kg.m}^2/\text{s}$
0	5,054225955	5,054225955	0
200	3,463206700	3,469368774	-0,06162074
400	-0,3080346656	-0,2910383662	-0,169962994
600	-3,885373438	-3,868444843	-0,16928595
800	-5,016689506	-5,019044724	0,02355218
1000	-2,989599127	-3,021068885	0,31469758
1200	0,9195321350	0,8721946426	0,473374924
1400	4,249821279	4,218894753	0,30926526
1600	4,904607382	4,919890437	-0,15283055
1800	2,471567565	2,535444144	-0,63876579
2000	-1,517374737	-1,438760482	-0,78614255
2200	-4,551124965	-4,510124501	-0,41000464
2400	-4,719645604	-4,752165696	0,32520092
2600	-1,916812724	-2,013049929	0,96237205
2800	2,092676944	1,989101645	1,03575299
3000	4,784806281	4,744169361	0,4063692
3200	4,464553353	4,524027649	-0,59474296
3400	1,333581140	1,466773498	-1,33192358
3600	-2,636892829	-2,509959790	-1,26933039

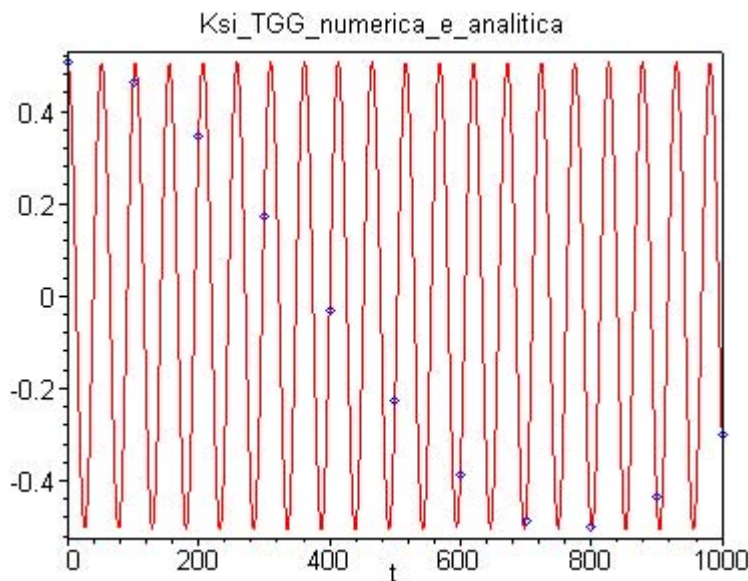


Figura 42: Comparação entre as soluções numérica (***) e analítica (—) para $\Xi(t)$, $J \approx 0$, para um intervalo de tempo de 1000s.

CAPÍTULO 7 CONCLUSÕES

As variáveis de Andoyer, embora úteis em estudos teóricos relacionados com a propagação do movimento rotacional de satélites artificiais, não podem ser utilizadas nos casos em que a orientação espacial do satélite está associada com pequenas inclinações, como quando o ângulo entre o vetor momento angular de rotação \vec{S} e o eixo OC do sistema de referência fixo no satélite (ângulo J) é zero ou muito próximo de zero.

Uma maneira de contornar esta dificuldade é utilizar novas variáveis canônicas, obtidas a partir das variáveis de Andoyer por meio de uma transformação matemática. No Capítulo 3, foi apresentada uma transformação de variáveis \mathfrak{S} , útil tanto para a análise do movimento orbital quanto do movimento rotacional, introduzida por Fukushima (1993, 1994). Pela sua aplicação ao conjunto das variáveis de Andoyer, dois novos conjuntos foram obtidos para o estudo do movimento rotacional. Em particular, o conjunto $(\Psi, \Xi, H; \psi, \xi, h)$, utilizado no desenvolvimento desta dissertação, apresenta vantagens que residem nos seguintes fatos:

- a) São variáveis canônicas, de modo que o formalismo hamiltoniano pode ser utilizado no tratamento das equações do movimento rotacional.
- b) São não singulares, isto é, as variáveis $(\Psi, \Xi, H; \psi, \xi, h)$ mostram-se todas bem definidas mesmo quando o ângulo J é muito pequeno. Neste caso, a indefinição das variáveis de Andoyer l e g é superada pela bem definida variável ψ . Este conjunto pode ser utilizado particularmente no estudo da atitude de satélites estabilizados por rotação, para os quais o eixo de rotação é coincidente com o eixo de maior momento principal de inércia, ou seja, $J = 0$.
- c) Possuem significado físico, estando as variáveis métricas associadas com o módulo do momento angular de rotação (Ψ) e suas projeções no eixo principal de inércia OA (Ξ) e no eixo inercial OZ (H). As variáveis angulares ψ , ξ e h são ângulos que relacionam os sistemas de referência envolvidos, como se pode observar na Figura 3.

As equações do movimento têm formas relativamente simples, porém suas soluções são mais complicadas que em outros tipos de variáveis, sendo a solução geral expressa em termos de funções especiais (funções elípticas de Jacobi e integrais elípticas), quando se consideram diferentes momentos principais de inércia para o satélite.

Para alguns casos particulares, é possível obter-se soluções bem mais simples. Por exemplo, Zanardi (1986) ao considerar dois momentos principais de inércia iguais ($I_x = I_y$), obteve uma solução particular para as equações do movimento em variáveis de Andoyer sem a necessidade de utilizar integrais e funções elípticas. A solução determinada aponta uma variação linear nas variáveis angulares l e g , com as demais permanecendo constantes devido à ausência de torques externos. Um procedimento semelhante foi realizado em Zanardi (1998) com relação às equações dadas em variáveis de Fukushima, isto é, ao considerar-se $A = B$ nas equações do movimento livre de torques externos, obtendo-se soluções bastante simplificadas, destacando-se uma variação linear para a variável ψ (pois esta nova variável está associada às antigas variáveis l e g).

Para o caso de ser $A \neq B$, a solução geral do sistema de equações em variáveis de Andoyer é apresentada detalhadamente em Kinoshita (1972, 1992) e resumidas em Fukushima (1993, 1994). Deve-se destacar que a forma apresentada para as soluções depende fundamentalmente da escolha do instante inicial como sendo aquele em que

$$l = \frac{\pi}{2}.$$

Através da aplicação da transformada \mathfrak{S} a estas soluções, e com a escolha do instante inicial equivalente ($\xi_0 = 0$, em $t_0 = 0$), tais soluções são convertidas para o conjunto de variáveis $(\Psi, \Xi, H; \psi, \xi, h)$. As soluções em três das variáveis (Ξ, ψ e ξ) são complexas, pois dependem de integrais e funções elípticas de diversos tipos, apresentando inclusive algumas dificuldades quando de sua implementação numérica. Afortunadamente, porém, para pequenos valores do ângulo J , é possível obter soluções aproximadas em formas bem mais simples. Estas soluções aproximadas dependem apenas de funções elementares, mas que concordam muito bem com as soluções gerais. Resultados deste tipo foram obtidos em trabalhos anteriores (ZANARDI,

1998; PEREIRA, 1999; SIMAL MOREIRA, 2005; SIMAL MOREIRA; ZANARDI, 2005).

As soluções analíticas (gerais e aproximadas) obtidas para o movimento rotacional livre de torques externos também foram comparadas com soluções numéricas, apresentando uma boa concordância entre si. No que se refere ao comportamento das variáveis Ξ e ξ , o comportamento das diferenças entre as soluções gerais e aproximadas para estas duas variáveis deve-se aos diferentes períodos apresentados pelas respectivas funções que figuram nas soluções (funções trigonométricas para as soluções aproximadas e funções elípticas para as soluções gerais).

No Capítulo 6 discutiu-se o movimento rotacional quando se considera a existência de um torque externo. A Hamiltoniana média associada ao Torque de Gradiente de Gravidade foi apresentada em função das variáveis de Andoyer e então transformada por meio de \mathfrak{S} para as novas variáveis não singulares. Com a utilização de formalismo hamiltoniano, foi possível obter as equações diferenciais do movimento perturbado. As integrações analíticas e numéricas destas equações, com a aplicação dos resultados a satélites com características similares às dos Satélites Brasileiros de Coleta de Dados (em especial o SCD2), constituíram a parte principal deste capítulo.

Na integração analítica das equações do movimento rotacional, considerou-se primeiramente o caso particular de ser $J = 0$, e em seguida o caso geral $J \approx 0$. O método utilizado foi o de aproximações sucessivas, onde as equações das variáveis angulares foram integradas em primeira ordem, utilizando-se como solução de ordem zero a do MRLTE. As soluções assim obtidas foram então substituídas nas equações para as variáveis métricas, ao que se seguiram as respectivas integrações destas. No processo de integração, os valores dos parâmetros orbitais (a, e, i, Ω) foram considerados constantes, uma vez que foi utilizada apenas a Hamiltoniana média associada ao TGG, na qual os termos envolvendo a anomalia média e o argumento do perigeu não estão incluídos. Destacou-se, no entanto, que as soluções aproximadas (e não as soluções gerais) foram utilizadas como solução de ordem zero no método de aproximações sucessivas, quando da integração das equações do movimento com a

inclusão das parcelas do Torque de Gradiente de Gravidade, o que gerou algumas limitações em suas aplicações.

A solução para a variável métrica Ψ (módulo do momento angular de rotação) é constante em todos os casos, porque foi considerada a parcela da Hamiltoniana média associada ao TGG na dedução das equações do movimento perturbado. Se os demais termos associados com o Torque de Gradiente de Gravidade fossem incluídos na Hamiltoniana, o módulo do momento angular de rotação apresentaria variações de curto período, como se pode ver em Zanardi (1986).

Quando $J = 0$, notou-se que as soluções $\Psi = \Psi_0$, $\xi = 0$ e $\Xi = 0$ são as mesmas que para o MRLTE. Isto ocorreu devido ao fato de $J = 0$ implicar que o vetor momento angular de rotação \vec{S} permaneça com uma orientação fixa no espaço em relação ao sistema dos eixos principais de inércia OABC, e coincidente com o eixo principal de inércia OC. No entanto, por causa da perturbação provocada pelo TGG, o mesmo não aconteceu com as demais variáveis. Devido ao Torque, as relações entre o sistema do vetor momento angular de rotação $OX'Y'Z'$ e o sistema inercial OXYZ deixam de ser invariantes no tempo. As variáveis h e H passaram a sofrer variações, apresentando a primeira uma variação linear muito lenta, enquanto a segunda apresentou variações periódicas de longo período. Também para a variável angular ψ percebeu-se uma pequena variação, que está relacionada ao módulo da velocidade angular de rotação. As soluções obtidas para o caso $J = 0$ foram comparadas com as soluções do MRLTE, para evidenciar a mudança de comportamento das variáveis h e H , e aplicadas a um satélite com características muito similares às do 2º Satélite Brasileiro de Coleta de Dados (SCD2).

Quando $J \approx 0$, a direção do vetor momento angular de rotação \vec{S} varia tanto em relação ao sistema de eixos principais de inércia OABC, como em relação ao sistema inercial OXYZ. Por isso observou-se variações no comportamento de Ξ , ξ e ψ devidas ao valor de J , e também variações em h e H , que estão diretamente relacionadas ao sistema OXYZ. As soluções para as variáveis h , H e ψ mostraram-se similares às do caso $J = 0$, estando incluídas no entanto variações periódicas de pequenas amplitudes. Com relação a Ξ e ξ , as soluções apresentaram-se semelhantes

às do MRLTE, e também para estas duas variáveis estão presentes variações periódicas de magnitude muito pequena devidas ao TGG. As soluções obtidas para o caso $J \approx 0$ foram comparadas com as soluções do MRLTE, para evidenciar a mudança de comportamento das variáveis h e H , e mostrar ao mesmo tempo a pequena magnitude do Torque de Gradiente de Gravidade, devida às pequenas dimensões do satélite. As comparações foram realizadas utilizando-se dados de um satélite com características muito similares às dos Satélites Brasileiros de Coleta de Dados (SCD1 e SCD2).

Na etapa final, com o objetivo de validar as soluções analíticas apresentadas no Capítulo 6, foram obtidas soluções numéricas das equações do movimento rotacional perturbado pelo TGG. O método numérico utilizado foi o Runge-Kutta de 4ª ordem. As comparações mostraram uma boa concordância entre as soluções analíticas e numéricas, mas ao mesmo tempo apontaram para certas restrições para as variáveis Ξ e ξ , no caso $J \approx 0$.

No caso $J = 0$, as soluções numéricas apresentaram boa concordância com as soluções analíticas para as variáveis h , H e ψ , e inclusive estas diferenças mostraram-se menores do que as diferenças entre as soluções do MRLTE e as soluções com o TGG, para as respectivas variáveis.

Para $J \approx 0$, as comparações para h , H e ψ apresentaram as mesmas características do caso anterior. Com relação a Ξ e ξ , as soluções analíticas e numéricas mostraram uma boa concordância para o intervalo considerado, no entanto, as diferenças entre as soluções analíticas e numéricas são maiores que as diferenças entre as soluções do MRLTE e as soluções com o TGG. Estes resultados mostraram que o ângulo J tem uma grande influência no comportamento das variáveis Ξ e ξ , por isso as soluções analíticas determinadas nesta dissertação devem ser úteis para analisar qualitativamente o comportamento destas variáveis, inclusive em trabalhos futuros, desde que se tenha cuidado na avaliação qualitativa das mesmas. Outro ponto importante a destacar, é que justamente estas duas variáveis é que sofreram o maior número de aproximações, tanto nas soluções do MRLTE, como em sua aplicação no

método de aproximações sucessivas, quando foram desprezados termos de pequena ordem de grandeza na solução de ordem um para a variável ξ .

Ao longo dos seis capítulos anteriores, esta dissertação pretendeu analisar em linhas gerais a Transformação Canônica de Fukushima (FUKUSHIMA, 1993, 1994) e sua utilidade para obterem-se conjuntos de variáveis úteis ao estudo da propagação da atitude de um satélite artificial, nos casos em que o movimento ocorre livre de perturbações externas (MRLTE), bem como nos casos em que um torque externo apresenta-se atuante. No presente trabalho, o torque escolhido foi o Torque de Gradiente de Gravidade, pois o modelo da Hamiltoniana associada a este torque possibilitou que se obtivessem equações do movimento em formas não tão complexas, a ponto de poderem ser integradas com a utilização de métodos matemáticos de perturbação, e com o auxílio de aproximações simplificadoras. Pela análise realizada verifica-se que devido às variações causadas pelo TGG nas variáveis h e H , o vetor momento angular de rotação possui movimentos de precessão e nutação em torno do eixo inercial OZ.

Sugestões para trabalhos futuros incluem:

— a integração das equações do movimento com TGG, utilizando-se as soluções gerais em lugar das soluções aproximadas no método de aproximações sucessivas, ou seja, com as soluções do MRLTE como sendo de ordem zero na aplicação do método, dadas em termos de funções e integrais elípticas;

— utilizar outros tipos de torques atuantes no satélite, como o Torque Magnético, ou devido à Pressão de Radiação Solar Direta, através do formalismo hamiltoniano para sistemas não conservativos.

Além disso, de acordo com a definição da transformação \mathfrak{S} , poderiam ser obtidos conjuntos de variáveis aplicados ao movimento orbital, para que este fosse estudado individualmente, ou então acoplado ao movimento rotacional com o uso de variáveis similares.

REFERÊNCIAS

BELLANDI FILHO, J. **Funções Especiais**. Campinas: Papyrus, 1985. 231p.

BYRD, P. F.; FRIEDMAN, M. D. **Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists**. 2.ed. Berlin: Springer-Verlag, 1971. 358p.

DEPRIT, A. A Transformation due to Fukushima, **Dynamics and Astronomy of Natural and Artificial Celestial Bodies**, Poland: Astronomical Observatory of A. Meckwicz University, 1993

FERRAZ, A. S. **Elementos de Trigonometria Esférica**. Apostila. Viçosa: Universidade Federal de Viçosa, 1995. 23 p.

FUKUSHIMA, T. New Canonical Variables for Orbital and Rotational Motions, **Publ. Astr. Soc. Japan** , p. 100-131, 1993.

FUKUSHIMA, T. New Canonical Variables for Orbital and Rotational Motions, **Cel. Mech. and Dynam. Astron.**, n. 60, p. 57-68, 1994.

FUKUSHIMA, T.; ISHIZAKI, H. Elements of Spin Motion, **Cel. Mech. and Dynam. Astron.**, n. 59, p. 149-159, 1994.

FUKUSHIMA, T.; ISHIZAKI, H. Numerical Computation of Incomplete Elliptic Integrals of a General Form, **Cel. Mech. and Dynam. Astron.**, n. 59, p. 237-251, 1994.

GIACAGLIA, G. E. O.; JEFFERYS, W. H. Motion of a Space Station I, **Cel. Mech. and Dynam. Astron.**, n. 4, p. 442-470, 1971.

JUPP, A.H. On the Free Rotation of a Rigid Body, **Cel. Mech. and Dyn. Astron**, n. 9, p. 3-20, 1974.

KINOSHITA, H. First Order Perturbations of the Two Finite Body Problem, **Publ. Astr. Soc. Japan.**, n. 24, p. 423-457, 1972.

KINOSHITA, H. Analytical Expansions of Torque-Free Motions for Short and Long Axis Modes, **Cel. Mech. and Dynam. Astron.**, n. 53, p. 365-375, 1992.

LANDAU, L.; LIFCHITZ, E. **Mecânica**. Moscou: Mir, 1978. 235p.

PEREIRA, W. G. **Propagação de Atitude de Satélites com Eixo de Rotação no Menor Eixo de Inércia**. 1999. 90p. Relatório de Pesquisa de Iniciação Científica PIBIC. Guaratinguetá, 1999.

SIMAL MOREIRA, L. Análise Preliminar para Propagação de Atitude de Um Satélite Artificial com Variáveis Canônicas Não-Singulares, In: VIII Jornada de Iniciação Científica e Pós-graduação, 2005, Guaratinguetá, **Anais...**, Guaratinguetá, 2005. CD-ROM.

SIMAL MOREIRA, L.; ZANARDI, M.C. Movimento Rotacional de Satélites Artificiais, Livre de Torques Externos, em Variáveis Canônicas Não-Singulares, In: XXVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 2005, São Paulo, **Anais...**, São Paulo, 2005. CD-ROM.

WHITTAKER, E. T. **A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies**. 4.ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1961.

ZANARDI, M.C. Study of the Terms of Coupling between Rotational and Translational Motions, **Cel. Mech.**, n. 39, 147-158, 1986.

ZANARDI, M. C. Attitude Propagation using Non-Singular Canonical Variables. **Adv. in the Astron. Sci.**, v. 100, p. 551-564, 1998.

ZANARDI, M. C.; VILHENA DE MORAES, R. Analytical and Semi-Analytical of an Artificial Satellite's Rotational Motion, **Cel. Mech. and Dyn. Astron.**, v. 75, n. 4, p. 227-250, 1999.

ZANARDI, M.C.F.P.S. **Dinâmica de Atitude de Satélites Artificiais**. 2005. 235f. Tese (Livre Docência – Dinâmica Orbital e Planetologia) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá. Guaratinguetá, 2005.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. **Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables**. U.S. Department of Commerce, 1972.

BATE, R. R.; MUELLER, D.D.; WHITE, J. **Fundamentals of Astrodynamics**. New York: Dover Publications Inc, 1971. 455p.

BULIRSCH, R. Numerical Calculation of Elliptic Integrals and Elliptic Functions, **Numerische Mathematik**, n. 7, p. 78-90, 1965.

BULIRSCH, R. Numerical Calculation of Elliptic Integrals and Elliptic Functions.II, **Numerische Mathematik**, n. 7, p. 353-354, 1965.

BULIRSCH, R. Numerical Calculation of Elliptic Integrals and Elliptic Functions.III, **Numerische Mathematik**, n. 13, p. 305-315, 1969.

BUTKOV, E. **Física Matemática**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1988. 725p.

LEECH, J.W. **Mecânica Analítica**. Ao Livro Técnico e Editora da Universidade de São Paulo, 1971. 157p.

PISACANE, V. L.; MOORE, R.C. **Fundamentals of Space Systems**. New York: Oxford University Press, 1994.

WERTZ, J. R. **Spacecraft Attitude Determination and Control**. London: Reidel, Kluwer Academic Publishers, 1978.

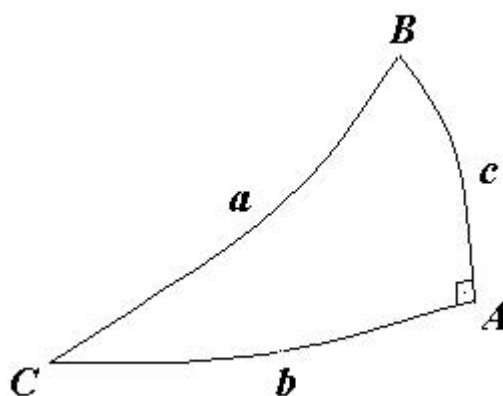
ZANARDI, M. C. **Fundamentos de Astronáutica**. Apostila. São José dos Campos: Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 1990. 260 p.

APÊNDICE A – Relações de trigonometria esférica

Define-se como triângulo esférico à porção de uma superfície esférica limitada por três arcos de circunferências máximas, menores que 180° . Em outras palavras, o triângulo esférico é a figura que se obtém, ligando dois a dois, três pontos de uma superfície esférica não situados sobre a mesma circunferência máxima (FERRAZ; 1995).

O triângulo esférico retângulo constitui um caso particular, sendo que as fórmulas para sua resolução são obtidas a partir das fórmulas fundamentais da trigonometria esférica, em que ocorre uma simplificação, em virtude da condição de um dos ângulos ser reto.

Seja o triângulo retângulo esférico ABC, em que $A = 90^\circ$.



a : hipotenusa

b e c : catetos

As relações trigonométricas no ΔABC , úteis no desenvolvimento desta dissertação, são as seguintes:

1) Lei dos senos:

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} \hat{C}}, \text{ ou conforme a conveniência:}$$

$$\frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} \hat{A}}. \quad (\text{A.1})$$

2) Fórmula da tangente para o arco b :

$$\tan b = \tan a \cos \hat{C}. \quad (\text{A.2})$$

3) Fórmula da cotangente para o ângulo \hat{B} :

$$\cot \hat{B} = \operatorname{sen} c \cot b. \quad (\text{A.3})$$

4) Fórmula do cosseno para o arco c :

$$\cos c = \frac{\cos \hat{C}}{\operatorname{sen} \hat{B}}. \quad (\text{A.4})$$

5) Fórmula da cotangente para o arco b :

$$\cot b = \frac{\cot \hat{B}}{\operatorname{sen} c}, \text{ que pode ser reescrita como:}$$

$$\tan b = \operatorname{sen} c \tan \hat{B}. \quad (\text{A.5})$$

6) Fórmula da cotangente para o arco a :

$$\cot a = \cot c \cos \hat{B}. \quad (\text{A.6})$$

APÊNDICE B – Manipulações algébricas necessárias à integração de ψ

Seja a equação diferencial para a variável $\psi(t)$, identificada no Capítulo 4 por (4.95), e dada por

$$\dot{\psi} = \frac{\Psi_0}{C} + \left(\frac{C-B}{BC} \right) \Psi_0 \operatorname{sen}^2 \xi, \quad (\text{B.1})$$

e a solução geral para a variável $\xi(t)$ dada por

$$\xi = \arctan \left(\frac{\Xi_0}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}} \frac{\gamma \operatorname{sn}(u, k)}{\operatorname{dn}(u, k)} \right). \quad (\text{B.2})$$

Considere-se também a relação trigonométrica:

$$\operatorname{sen}^2(\arctan Z) = \frac{Z^2}{1+Z^2}. \quad (\text{B.3})$$

Utilizando (B.3), a função $\operatorname{sen}^2 \xi$ pode ser colocada na forma:

$$\operatorname{sen}^2 \xi = \frac{M^2 \gamma^2 \frac{\operatorname{sn}^2(u, k)}{\operatorname{dn}^2(u, k)}}{1 + M^2 \gamma^2 \frac{\operatorname{sn}^2(u, k)}{\operatorname{dn}^2(u, k)}}, \quad (\text{B.4})$$

em que

$$M = \frac{\Xi_0}{\sqrt{\Psi_0^2 - \Xi_0^2}}. \quad (\text{B.5})$$

Sabendo-se que $\operatorname{dn}^2(u, k) = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u, k)$ e $\operatorname{sn}(u, k) = \operatorname{sen} \varphi$, sendo $\varphi = \operatorname{am}(u, k)$, pode-se simplificar (B.4) da seguinte forma:

$$\operatorname{sen}^2 \xi = \frac{M^2 \gamma^2 \operatorname{sn}^2(u, k)}{\operatorname{dn}^2(u, k) + M^2 \gamma^2 \operatorname{sn}^2(u, k)} = \frac{M^2 \gamma^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{1 + (M^2 \gamma^2 - k^2) \operatorname{sen}^2 \varphi}. \quad (\text{B.6})$$

De (4.48), tem-se que

$$\frac{\Xi_0^2}{\Psi_0^2 - \Xi_0^2} = \frac{k^2}{\gamma^2 - 1}, \quad (\text{B.7})$$

e comparando (B.5) e (B.7) conclui-se que:

$$M^2 = \frac{k^2}{\gamma^2 - 1}. \quad (\text{B.8})$$

Portanto,

$$M^2 \gamma^2 - k^2 = \frac{k^2 \gamma^2}{\gamma^2 - 1} - k^2 = M^2. \quad (\text{B.9})$$

Além disso, de (4.22), (4.24) e (4.25):

$$\gamma^2 = \frac{a}{b} = \frac{B}{A} \left(\frac{C - A}{C - B} \right). \quad (\text{B.10})$$

Substituindo (B.9) e (B.10) em (B.6):

$$\operatorname{sen}^2 \xi = \frac{B}{A} \left(\frac{C - A}{C - B} \right) \frac{M^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{1 + M^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}. \quad (\text{B.11})$$

Levando a expressão (B.11) na equação (B.1) e simplificando:

$$\dot{\psi} = \frac{\Psi_0}{C} + \left(\frac{C-A}{AC} \right) \Psi_0 \frac{M^2 \text{sen}^2 \varphi}{1+M^2 \text{sen}^2 \varphi}. \quad (\text{B.12})$$

Finalmente, de (4.72), conclui-se que:

$$M^2 = -\hat{\alpha}^2, \quad (\text{B.13})$$

e substituindo (B.13) em (B.12), ao mesmo tempo que se multiplica o último termo da equação, por conveniência, por $\frac{n}{n}$, em que n é dado em (4.92):

$$\dot{\psi} = \frac{\Psi_0}{C} + \left(\frac{C-A}{AC} \right) \frac{\Psi_0}{n} \left(\frac{-\hat{\alpha}^2 \text{sen}^2 \varphi}{1-\hat{\alpha}^2 \text{sen}^2 \varphi} n \right). \quad (\text{B.14})$$

A equação (B.14) corresponde à (4.96), que é então integrada no Capítulo 4.