



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.004/10

**RELATIVIDADE RESTRITA DE DE SITTER:
UMA ABORDAGEM CINEMÁTICA**

Lucas Lolli Savi

Orientador

José Geraldo Pereira

Março de 2010

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Prof. José Geraldo, pela infindável paciência e imensurável apoio, cruciais para a concretização deste trabalho.

Aos meus pais pelo suporte sempre fornecido.

Aos meus familiares e amigos pelo incentivo no trabalho e na vida.

Aos demais professores e colegas de estudo e de profissão com os quais aprendi e nos quais me inspirei.

À CAPES, por quem este trabalho foi financiado.

Resumo

O espaço de de Sitter foi estudado pela primeira vez como a solução de vácuo da equação de Einstein com constante cosmológica. Tal visão dinâmica acerca deste espaço predomina entre os físicos ainda nos dias atuais. No entanto, do ponto de vista geométrico, o espaço de de Sitter, assim como Minkowski, é um espaço quociente. Isto significa que o espaço de de Sitter pode ser construído independentemente de qualquer teoria gravitacional, sendo portanto mais fundamental do que a equação de Einstein. Consequentemente, torna-se possível construir uma relatividade especial baseada no grupo de de Sitter, que é o grupo cinemático do espaço de de Sitter. Tal teoria vem sendo proposta como generalização da relatividade restrita usual com o nome de *relatividade de de Sitter*. Nesta, o termo cosmológico é interpretado como uma entidade cinemática, constituindo-se num segundo parâmetro invariante, além da velocidade da luz. Pode-se entender tal modificação da relatividade einsteniana como uma solução cinemática para o problema da “energia escura”. No presente texto, pretendemos delinear as propriedades cinemáticas fundamentais de tal teoria em paralelo com as da relatividade restrita usual, baseada no grupo de Poincaré.

Palavras Chaves: Relatividade de de Sitter; Constante Cosmológica; Cinemática Relativística; Espaços quocientes

Áreas do conhecimento: Teoria da Relatividade; Relatividade Restrita; Física Matemática

Abstract

The de Sitter space was first studied as the vacuum solution of Einstein's field equation with cosmological constant. This dynamical view of that space is still prevalent among physicists even today. Nevertheless, from the point of view of geometry, the de Sitter space, like Minkowski, is a quotient space. That means that de Sitter space may be built independently of any gravitational theory, being more fundamental than Einstein's equation. Consequently, it turns out possible to construct a special relativity based on the de Sitter group. Such theory has been proposed as a generalization of ordinary special relativity, being called *de Sitter relativity*. In this theory, the cosmological term is interpreted as a kinematical entity, constituting a second invariant parameter, in addition to the speed of light. Such modification of Einsteinian relativity may be understood as a kinematical solution to the "dark energy" problem. In the present text, we intend to outline the fundamental kinematical properties of such a de Sitter-invariant special relativity, in parallel to those of the ordinary Poincaré-invariant special relativity.

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 1.1 | Apresentação | 1 |
| 1.2 | Motivações | 2 |
| 1.2.1 | A Constante Cosmológica | 2 |
| 1.2.2 | Fenomenologia de Altas Energias | 2 |
| 1.2.3 | Limite de Planck | 3 |
| 1.3 | Espaços e Grupos de Movimento | 3 |
| 1.4 | Objetivos | 5 |
| 2 | Simetrias Espaço-Temporais | 7 |
| 2.1 | O Espaço-Tempo Relativístico | 7 |
| 2.2 | Isometrias e Campos de Killing | 8 |
| 2.3 | Homogeneidade e Isotropia | 10 |
| 2.4 | Espaços Maximalmente Simétricos | 11 |
| 2.5 | A Simetria Conforme | 14 |
| 3 | A Relatividade de Einstein | 20 |
| 3.1 | O Princípio da Relatividade e o Eletromagnetismo | 20 |
| 3.1.1 | A Teoria de Maxwell | 20 |
| 3.1.2 | Uma nova relatividade | 22 |
| 3.2 | Aspectos Formais | 24 |
| 3.2.1 | O Espaço de Minkowski | 24 |
| 3.2.2 | O grupo de Poincaré | 25 |
| 3.2.3 | O Caráter Quociente do Espaço de Minkowski | 27 |
| 4 | A Relatividade de de Sitter | 29 |
| 4.1 | O Espaço de de Sitter | 29 |
| 4.2 | Coordenadas estereográficas | 31 |
| 4.3 | O Grupo de de Sitter | 32 |
| 4.4 | O Caráter Quociente do Espaço de de Sitter | 35 |
| 4.5 | Desvio Geodésico no Espaço de de Sitter | 35 |

| | |
|-----------------------------------|-----------|
| 5 Conclusões | 38 |
| Referências Bibliográficas | 41 |

Capítulo 1

Introdução

1.1 Apresentação

Relatividade restrita de de Sitter é o nome que se dá à teoria da relatividade restrita que possui como grupo de movimento o grupo de de Sitter $dS \equiv SO^+(4, 1)$ agindo sobre o espaço de de Sitter (do qual dS é o grupo de isometria) [1]. Esta teoria é uma generalização da relatividade restrita usual (einsteiniana), a qual possui como grupo de movimento o grupo de Poincaré $\mathcal{P} \equiv ISO^+(3, 1)$ agindo sobre o espaço de Minkowski (do qual \mathcal{P} é o grupo de isometria). Tanto o espaço de Minkowski quanto o de de Sitter são maximalmente simétricos [3]; porém, enquanto aquele possui curvatura nula, este possui uma curvatura R constante negativa¹ [4]. No grupo de de Sitter, as translações espaço-temporais são acrescidas de transformações conformes próprias, deixando de ser comutativas. Estes termos adicionais são parametrizados por uma nova escala invariante $1/l^2$, em que l é um parâmetro geométrico ligado à curvatura do espaço de de Sitter e que desempenha, do ponto de vista algébrico, papel análogo ao da velocidade da luz c no caso dos boosts lorentzianos.

Além disso, o espaço de de Sitter é também a solução da equação de Einstein usual no vácuo com constante cosmológica positiva [2, 4]. O valor da constante cosmológica Λ na equação de Einstein que fornece um dado espaço de de Sitter determina univocamente o valor da sua curvatura escalar R [4] (e, por conseqüência, também o valor do parâmetro $1/l^2$ no grupo de de Sitter correspondente). No limite em que a constante cosmológica tende a zero, anulam-se também a curvatura e o parâmetro das transformações conformes, de modo que o espaço-tempo torna-se Minkowski e o grupo de movimento reduz-se ao de Poincaré.

¹O sinal do escalar de Ricci $R \equiv R^\nu{}_\nu$ depende das convenções usadas na definição da métrica e do tensor de Ricci. Escolhemos, neste trabalho, $\eta_{\mu\nu} \equiv \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ e $R_{\mu\nu} \equiv R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}$.

1.2 Motivações

1.2.1 A Constante Cosmológica

A constante cosmológica Λ constitui uma generalização da equação de Einstein original mantendo sua consistência física e matemática [5]². Atualmente, ela é parte integrante do modelo padrão da cosmologia³, o chamado modelo Λ CDM, sendo responsável pela aceleração observada na expansão do universo. Tal modelo tem sido corroborado por diversas observações, dentre as quais destacam-se as de galáxias e supernovas do tipo Ia (velas padrão) com alto desvio para o vermelho [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16] e as da radiação cósmica de fundo [17, 18].

Existem teorias que buscam construir mecanismos dinâmicos que imitem o efeito da constante cosmológica. No entanto, se esta for, de fato, conforme a sua definição e a concepção original de Einstein [5], um elemento de natureza puramente geométrica e cinemática, Λ estará presente mesmo na ausência de gravitação. Isto significa que, à luz do nosso conhecimento atual do universo, não apenas a cosmologia e a relatividade geral, mas a própria relatividade restrita deve assumir uma nova forma, na qual o termo cosmológico seja incluído por construção como um termo de origem cinemática. Uma análise matemática dos fundamentos da teoria da relatividade, bem como dos princípios cinemáticos básicos da física, favorece tal hipótese, conforme explicitaremos pouco adiante.

1.2.2 Fenomenologia de Altas Energias

Além da observação de uma constante cosmológica não nula, ainda outros fatos experimentais desafiam a relatividade restrita usual. O primeiro deles diz respeito ao chamado *paradoxo GZK*. Segundo previsões teóricas obtidas por Kenneth Greisen [19] e independentemente por Vadim Kuz'min e Georgiy Zatsepin [20], as partículas de raios cósmicos (em sua grande maioria prótons livres) com valores de energia acima de 10^{20} eV (batizado *limite de Greisen-Zatsepin-Kuz'min (GZK)*) deveriam interagir com os fótons da radiação cósmica de fundo dando origem a outras partículas e perdendo parte da sua energia. Desse modo, raios cósmicos provenientes de fontes extragaláticas suficientemente distantes (além de algumas dezenas de megaparsecs) não seriam capazes de alcançar as imediações Terra portando energias acima do limite GZK. Todavia, partículas com tais energias aparentemente *têm sido* observadas (e.g. [21, 22]) vindas de direções onde não há nenhuma fonte próxima conhecida.

O segundo fato é fornecido pela observação de erupções de raios gama provenientes

²Para uma discussão aprofundada acerca do papel de Λ na cosmologia e em outras áreas da física, recomendamos as referências [2], [6] e [7]. Aqui nos atemos às implicações cinemáticas do termo cosmológico.

³Cf. [8] e referências citadas neste parágrafo.

do núcleo da galáxia Markarian 501 [23]. Observou-se que a radiação de frequências mais elevadas leva mais tempo para atingir a Terra do que a de baixas frequências.

Os dois fatos supracitados encontram-se além da capacidade de explicação da relatividade einsteniana e podem constituir indícios de que, na presença de fenômenos envolvendo altas energias, o tecido do espaço-tempo sofra flutuações de um tipo novo. Esta hipótese faz sugerir que o termo cosmológico seja na verdade dado pela cinemática de cada sistema físico, ou seja, que o valor de Λ num dado ponto do espaço-tempo dependa da densidade de energia no referido ponto. Dessa forma, o espaço-tempo assumiria localmente a forma de um espaço de de Sitter com o valor de Λ correspondente à densidade de energia local. Num tal cenário, processos envolvendo partículas altamente energéticas (como é o caso em ambos os experimentos acima descritos) seriam capazes de exibir comportamentos não permitidos no contexto da relatividade usual. Por outro lado, a homogeneidade da distribuição de matéria e energia no universo em escala cosmológica faria com que, em tal escala, o valor de Λ fosse observado como constante, o que está de acordo com os fatos conhecidos.

1.2.3 Limite de Planck

Além da experiência, a hipótese de que a relatividade einsteniana deva falhar no limite de altas energias é suportada também por indícios teóricos.⁴ Isto está ligado ao fato da teoria quântica possuir um comprimento invariante, o comprimento de Planck, que é a escala a partir da qual se presume que efeitos quânticos da gravitação passem a ser relevantes. O fato de o comprimento de Planck ser definido exclusivamente a partir de constantes fundamentais (a constante de planck h , a velocidade da luz no vácuo c e a constante gravitacional G) faz dele também uma constante universal. Em observação a isso, é coerente pensar que o caráter da gravitação não dependa do observador, ou seja, que um efeito de gravitação que possua caráter clássico ou quântico o possua intrinsecamente. Este fato favorece a inclusão de um segundo parâmetro de escala invariante no grupo de simetria da relatividade, além da velocidade da luz. O comprimento de de Sitter l presente no grupo de movimento da relatividade de de Sitter satisfaz tal condição. Tal modificação da teoria da relatividade restrita poderia significar um passo adiante no sentido de se obter uma teoria da relatividade geral que possa ser consistente com a teoria quântica.

1.3 Espaços e Grupos de Movimento

A experiência dita condições precisas para a descrição matemática do pano de fundo de uma teoria cinemática. Na mecânica clássica, o espaço é descrito por uma variedade euclidiana tridimensional, ao passo que o tempo é um parâmetro independente. Já no

⁴Diversos trabalhos estudam tal hipótese, entre os quais [24] e [25].

contexto relativístico, em que tempo e espaço são tratados em pé de igualdade, tem-se um espaço-tempo descrito por uma variedade lorentziana quadridimensional. Por outro lado, as exigências de homogeneidade e isotropia implicam que este seja um espaço maximalmente simétrico [3], isto é, que possua o máximo número de simetrias admissível para uma variedade com o seu número de dimensões (expressas matematicamente pelos seus campos de Killing). Porém, os espaços maximalmente simétricos são aqueles que possuem curvatura escalar R constante (não necessariamente nula) [3]. Portanto, o espaço-tempo de uma teoria da relatividade restrita deve ser uma *variedade quadridimensional lorentziana com curvatura escalar constante*. Na relatividade restrita usual, escolhe-se $R = 0$. O caso mais geral, porém, compreende $R \neq 0$. Nesse sentido, o espaço de de Sitter, que possui $R < 0$, é apenas a generalização natural do espaço de Minkowski⁵.

Pode-se obter o análogo da conclusão acima pensando-se em termos dos grupos cinemáticos. O grupo de movimento da mecânica newtoniana é o grupo de Galileu. Este é composto por um produto semidireto entre dois subgrupos. O primeiro deles é o grupo quadridimensional das translações, que é comutativo e define a homogeneidade do espaço e do tempo. O segundo (que Minkowski [26] chamou de G_∞) é um grupo de seis dimensões e é ele próprio dividido em transformações de dois tipos. Três de suas dimensões correspondem ao subgrupo não-comutativo das rotações espaciais $SO(3)$, que define a isotropia do espaço. As demais três correspondem aos boosts galileanos, transformações comutativas que relacionam os referenciais inerciais da mecânica clássica, ou seja, os observadores para os quais as leis da física são as mesmas segundo o princípio da relatividade, tal qual definido por Poincaré:

“The principle of relativity, according to which the laws of physical phenomena should be the same, whether for an observer fixed, or for an observer carried along in a uniform movement of translation; so that we have not and could not have any means of discerning whether or not we are carried along in such a motion” [27]⁶.

Estas transformações formam um subgrupo abeliano normal ao grupo G_∞ , de modo que este não é um grupo simples (sequer semi-simples) [31].

Já a cinemática da relatividade restrita usual é descrita pelo grupo de Poincaré. Este é obtido a partir do grupo de Galileu quando se abandona a condição de comutatividade dos boosts. Dessa forma, os boosts galileanos transformam-se nos boosts de Lorentz,

⁵O caso em que $R > 0$ é chamado de espaço *anti-de Sitter* [4]. Este espaço não nos apresenta interesse físico no presente contexto por exibir um valor negativo da constante cosmológica.

⁶Apesar de o nome *princípio da relatividade* ter sido cunhado por Poincaré e popularizado a partir da sua adoção explícita na teoria da relatividade restrita por Einstein [28], a equivalência entre observadores em movimento relativo uniforme faz-se presente na mecânica de Newton desde os *Principia* [29] e já era considerada anteriormente por Galileu [30].

que possuem a forma de rotações (hiperbólicas) espaço-temporais. Isto faz com que o grupo composto pelos boosts e pelas rotações espaciais se torne um grupo semi-simples de transformações não-comutativas: o grupo de Lorentz. Este grupo de rotações generalizadas define a isotropia do espaço quadridimensional de Minkowski, onde tempo e espaço são integrados numa estrutura matemática única. A não-comutatividade dos boosts neste grupo é medida por um parâmetro universal introduzido nestas transformações, o qual fornece o “emaranhamento” entre tempo e espaço: a velocidade da luz no vácuo c (ou, mais propriamente, por c^{-2}). No limite degenerado em que $c \rightarrow \infty$ ($c^{-2} \rightarrow 0$), os boosts tornam a ser comutativos e o grupo de Poincaré reduz-se de volta ao grupo de Galileu⁷.

No entanto, apesar da unificação dos boosts com as rotações espaciais num grupo semi-simples, o grupo de Poincaré como um todo não é ainda um grupo semi-simples. Isto porque este é composto não apenas pelas transformações de Lorentz, mas também pelas translações, que são as mesmas que as do grupo de Galileu e formam ainda um subgrupo invariante e abeliano. Assim, portar adiante a idéia de generalização que leva do grupo de Galileu ao grupo de Poincaré significa abrir mão da comutatividade não apenas dos boosts, mas também das translações. Isto acaba fazendo com estas deixem de constituir um subgrupo invariante do novo grupo de movimento, que será, portanto, um grupo simples. Tal grupo simples, composto pelas transformações de Lorentz e pelas novas “translações generalizadas”, é chamado *grupo de de Sitter* e corresponde às isometrias do espaço de de Sitter. Esta segunda não-comutatividade presente no grupo de de Sitter se obtém de forma análoga à do caso dos boosts: introduzindo-se, agora no grupo das translações, um novo parâmetro universal, chamado *comprimento de de Sitter* l , de uma tal sorte que, no limite em que $l \rightarrow \infty$ ($l^{-2} \rightarrow 0$), recobra-se a comutatividade das translações e o grupo de Poincaré é reobtido. Vemos, portanto, que o grupo de de Sitter é uma generalização do grupo de Poincaré no mesmo sentido em que este é uma generalização do grupo de Galileu⁸, e, de fato, o grupo de de Sitter é o último estágio nesta cadeia, vez que não há mais nele nenhum subgrupo invariante não-trivial⁹.

1.4 Objetivos

Com base no que foi exposto nas seções precedentes, percebe-se que a teoria da relatividade restrita de de Sitter, além de dar conta naturalmente (de fato, por construção) do problema da constante cosmológica, é também a generalização teórica natural da relati-

⁷Tal noção de limite degenerado no contexto de grupos encontra sua expressão formal no conceito de *contrações de grupos*, conforme apresentado em [32].

⁸Esta idéia é também explorada nas referências [33] e [34].

⁹No contexto das contrações de grupo de Inönü-Wigner [32], tal fato está ligado à impossibilidade de se obter o grupo de de Sitter por meio da contração de algum outro grupo mais geral. Na referência [35] se encontra um estudo análogo ao argumento aqui apresentado, porém conduzido com foco nas álgebras de grupo.

vidade de Einstein, e, ainda além, a expressão mais geral do princípio cinemático básico de homogeneidade e isotropia de um espaço-tempo quadridimensional. Adicionalmente, esta teoria contém dentro de si os princípios básicos que podem permitir a explicação de fenômenos experimentais que até o momento desafiam a física teórica, bem como outros que possam vir a ser observados, além da possibilidade de uma via de construção da gravitação quântica com base numa nova simetria. Eis, portanto, nossa motivação em estudá-la.

Isto posto, o objetivo deste texto será descrever os fundamentos geométricos e cinemáticos da relatividade restrita de de Sitter, evidenciando os paralelos existentes entre esta e a relatividade restrita usual, bem como ressaltando as diferenças em essência apresentadas por estas duas teorias. Com isto, pretende-se demonstrar a viabilidade e a vantagem da adoção da relatividade restrita de de Sitter em substituição à sua correspondente einsteniana como teoria cinemática fundamental na ausência de gravitação.

Capítulo 2

Simetrias Espaço-Temporais

Dado o objetivo deste texto tal qual exposto no capítulo anterior, de modo a tornar rigorosa e ao mesmo tempo transparente a analogia entre os espaços de de Sitter e de Minkowski, lançaremos mão de conceitos matemáticos específicos, em particular ligados à idéia de simetrias (idéia esta que nos permitirá demonstrar e explorar o fato crucial de que ambos os espaços citados são maximalmente simétricos, ponto chave deste trabalho). Para tanto, desenvolvemos uma breve exposição de tais conceitos. A idéia principal aqui, portanto, é estabelecer condições gerais das quais os espaços de Minkowski e de Sitter (bem como os grupos de Poincaré e de de Sitter) serão casos particulares, edificando a base matemática para os capítulos subsequentes e deixando claro como as propriedades de ambos os espaços (e grupos) são obtidas a partir de um eixo comum.

2.1 O Espaço-Tempo Relativístico

O pano de fundo dos fenômenos físicos na teoria da relatividade, isto é, no contexto em que tempo e espaço são de fato unificados numa entidade única, é chamado espaço-tempo e representado matematicamente por uma variedade lorentziana quadridimensional, ou seja, um espaço topológico localmente euclidiano e diferenciável munido de um tensor (ou, mais rigorosamente, um campo tensorial) métrico g com assinatura (3,1). Em g estão contidas as informações a respeito das características locais do espaço-tempo.

Um mapa que leva cada ponto de uma variedade n -dimensional no ponto x do espaço euclidiano \mathbf{E}^n é um *sistema de coordenadas*. Um mapa que transita entre dois sistemas de coordenadas, de tal forma que $x \rightarrow x'$, é uma *transformação de sistema de coordenadas*, ou, simplesmente, uma *mudança de coordenadas*. Dada uma mudança de coordenadas $x \rightarrow x'$, as componentes tensoriais $g_{\mu\nu}(x)$ da métrica $g(x) = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu \otimes dx^\nu$ serão transformadas de acordo:

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x). \quad (2.1)$$

2.2 Isometrias e Campos de Killing

Diz-se que um objeto possui simetria por um dado tipo de transformação se ele permanece idêntico tal qual observado antes e depois da referida transformação. No caso de uma variedade métrica, portanto, a existência de simetria por uma dada mudança de coordenadas $x \rightarrow x'$ significa que as componentes do tensor métrico mantêm a sua forma após a transformação, isto é, para qualquer conjunto de coordenadas y (que descreverá um ponto na variedade antes da transformação e, em geral, *outro* ponto depois da transformação):

$$g'_{\mu\nu}(x') \Big|_{x'=y} = g_{\mu\nu}(x) \Big|_{x=y}. \quad (2.2)$$

Transformações obedecendo a relação acima para uma dada métrica $g(x)$ são formalmente denominadas *isometrias* de $g(x)$ (ou do espaço que possui $g(x)$ como métrica) e expressam matematicamente a idéia intuitiva de simetria.

As mudanças de coordenadas que correspondem a mudanças físicas de referencial devem respeitar a noção de continuidade, ou seja, devem ser transformações que possam ser obtidas por meio de uma seqüência contínua de transformações a partir da identidade. Portanto, as isometrias de interesse físico são aquelas que podem ser expressas como uma transformação infinitesimal nas coordenadas (caracterizada por um parâmetro infinitesimal ϵ)

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu(x) = x^\mu + \epsilon \xi^\mu(x). \quad (2.3)$$

Inserindo esta equação invertida

$$x^\mu(x'^\mu) = x'^\mu - \epsilon \xi^\mu(x') \quad (2.4)$$

na equação (2.1) para a transformação das componentes da métrica, ficamos com

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu}(x') &= \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \left(x'^\rho - \epsilon \xi^\rho(x') \right) \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \left(x'^\sigma - \epsilon \xi^\sigma(x') \right) g_{\rho\sigma}(x) \\ &= \left(\delta_\mu^\rho - \epsilon \frac{\partial \xi^\rho(x')}{\partial x'^\mu} \right) \left(\delta_\nu^\sigma - \epsilon \frac{\partial \xi^\sigma(x')}{\partial x'^\nu} \right) g_{\rho\sigma}(x) \\ &= \left[\delta_\mu^\rho \delta_\nu^\sigma - \epsilon \delta_\nu^\sigma \frac{\partial \xi^\rho(x')}{\partial x'^\mu} - \epsilon \delta_\mu^\rho \frac{\partial \xi^\sigma(x')}{\partial x'^\nu} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right] g_{\rho\sigma}(x). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Expandindo as componentes da métrica $g(x)$ em série de potências de ϵ em torno de x' ,

$$g_{\rho\sigma}(x) = g_{\rho\sigma}(x') - \epsilon \xi^\lambda(x') \frac{\partial}{\partial x'^\lambda} g_{\rho\sigma}(x') + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (2.6)$$

obtemos, em primeira ordem em ϵ ,

$$\begin{aligned}
g'_{\mu\nu}(x') &= \left(\delta_{\mu}^{\rho} \delta_{\nu}^{\sigma} - \epsilon \delta_{\nu}^{\sigma} \frac{\partial \xi^{\rho}(x')}{\partial x'^{\mu}} - \epsilon \delta_{\mu}^{\rho} \frac{\partial \xi^{\sigma}(x')}{\partial x'^{\nu}} \right) g_{\rho\sigma}(x') \\
&- \epsilon \delta_{\mu}^{\rho} \delta_{\nu}^{\sigma} \xi^{\lambda}(x') \frac{\partial}{\partial x'^{\lambda}} g_{\rho\sigma}(x') \\
&= g_{\mu\nu}(x') - \epsilon g_{\rho\nu}(x') \frac{\partial \xi^{\rho}(x')}{\partial x'^{\mu}} - \epsilon g_{\mu\sigma}(x') \frac{\partial \xi^{\sigma}(x')}{\partial x'^{\nu}} - \epsilon \xi^{\lambda}(x') \frac{\partial}{\partial x'^{\lambda}} g_{\mu\nu}(x'),
\end{aligned} \tag{2.7}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\epsilon} [g_{\mu\nu}(x') - g'_{\mu\nu}(x')] &= g_{\lambda\nu}(x') \frac{\partial \xi^{\lambda}(x')}{\partial x'^{\mu}} + g_{\mu\lambda}(x') \frac{\partial \xi^{\lambda}(x')}{\partial x'^{\nu}} + \xi^{\lambda}(x') \frac{\partial}{\partial x'^{\lambda}} g_{\mu\nu}(x') \tag{2.8} \\
&= \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \left(g_{\lambda\nu}(x') \xi^{\lambda}(x') \right) - \xi^{\lambda}(x') \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} g_{\lambda\nu}(x') \\
&+ \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} \left(g_{\mu\lambda}(x') \xi^{\lambda}(x') \right) - \xi^{\lambda}(x') \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} g_{\mu\lambda}(x') + \xi^{\lambda}(x') \frac{\partial}{\partial x'^{\lambda}} g_{\mu\nu}(x') \\
&= \frac{\partial \xi_{\nu}(x')}{\partial x'^{\mu}} + \frac{\partial \xi_{\mu}(x')}{\partial x'^{\nu}} - \xi^{\lambda}(x') \left[\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} g_{\lambda\nu}(x') + \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} g_{\mu\lambda}(x') - \frac{\partial}{\partial x'^{\lambda}} g_{\mu\nu}(x') \right] \\
&= \frac{\partial \xi_{\nu}(x')}{\partial x'^{\mu}} + \frac{\partial \xi_{\mu}(x')}{\partial x'^{\nu}} - 2 \xi_{\zeta}(x') \Gamma_{\mu\nu}^{\zeta}(x') \\
&= \nabla_{\mu} \xi_{\nu}(x') + \nabla_{\nu} \xi_{\mu}(x').
\end{aligned}$$

No caso de uma isometria,

$$g_{\mu\nu}(x') - g'_{\mu\nu}(x') = 0, \tag{2.9}$$

e (2.8) resulta na *equação de Killing* para o campo $\xi(x)$:

$$\nabla_{(\mu} \xi_{\nu)} = 0. \tag{2.10}$$

Os campos que a satisfizerem serão chamados *campos de Killing*. Desse modo, a cada campo de Killing corresponderá uma isometria (ou seja, uma simetria) infinitesimal da métrica (e, conseqüentemente, da variedade) em questão¹.

As componentes $\xi_{\lambda}(x)$ de qualquer campo de Killing $\xi(x)$ de uma dada métrica $g(x)$ podem ser obtidas [3] a partir do seu valor e do valor da sua derivada num dado ponto x_0 , sendo escritas na forma

$$\xi_{\lambda}(x) = A_{\lambda}^{\mu}(x, x_0) \xi_{\mu}(x) \Big|_{x=x_0} + B_{\lambda}^{\nu\rho}(x, x_0) \nabla_{\nu} \xi_{\rho}(x) \Big|_{x=x_0}, \tag{2.11}$$

onde os campos tensoriais A e B dependem do ponto x_0 escolhido, sendo que, para um dado x_0 , serão os mesmos para todos os campos de Killing de $g(x)$. Portanto, numa variedade de dimensão n , as n quantidades $\xi_{\mu}(x = x_0)$ mais as $n(n-1)/2$ quantidades

¹Frisamos, porém, que isometrias que não possam ser representadas por transformações *infinitesimais* não satisfarão a equação de Killing, já que esta é obtida a partir da condição (2.3).

independentes $\nabla_\nu \xi_\rho(x = x_0)$ (pois, segundo (2.10), estas quantidades são anti-simétricas) fornecerão um máximo de $n(n + 1)/2$ campos de Killing independentes. Espaços que possuam tal número máximo de simetrias são ditos *maximalmente simétricos*.

É relevante salientar que a equação de Killing, apesar de usualmente estudada no contexto da relatividade geral, não possui qualquer relação *a priori* com a gravitação, ou seja, não depende da dinâmica em questão. Ela é uma equação puramente geométrica que pode ser resolvida para qualquer métrica riemanniana ou pseudo-riemanniana em qualquer dimensão, seja esta métrica solução da equação de Einstein ou não. Ao espaço-tempo vazio, em particular, são usualmente atribuídas duas simetrias específicas, ambas passíveis de serem expressas por transformações infinitesimais, e, portanto, por campos de Killing: a homogeneidade e a isotropia.

2.3 Homogeneidade e Isotropia

Um objeto é intuitivamente considerado homogêneo se não há diferença entre as suas partes constituintes. Formalmente, uma variedade será dita *homogênea* (ou, ainda, *transitiva*) se qualquer de seus pontos puder ser levado em qualquer outro por meio de alguma isometria — o que significa que todos os pontos são formalmente equivalentes. Mais rigorosamente, tais isometrias devem ser contínuas, de modo que a condição se reescreve: em qualquer ponto da variedade, devem existir isometrias infinitesimais que levem em qualquer ponto na sua vizinhança imediata. Tais isometrias costumam ser chamadas de *translações*. Uma variedade homogênea de dimensão n terá n translações independentes, cujos campos de Killing em cada ponto da variedade podem ser pensados como os vetores de uma base coordenada no espaço tangente ao ponto.

Por outro lado, um objeto é intuitivamente considerado isotrópico em torno de um dado ponto se for exatamente o mesmo quando visto de todas as diferentes direções a partir do referido ponto. Formalmente, uma variedade será dita *isotrópica* em relação a um dado ponto x_0 se existirem campos de Killing que mantenham fixo o ponto x_0 (i.e., $\xi(x_0) = 0$) e cujas derivadas covariantes em torno deste ponto $\nabla_\mu \xi_\nu(x) \Big|_{x=x_0}$ assumam todos os valores possíveis. Como a equação de Killing (2.10) exige que as derivadas dos campos de Killing sejam anti-simétricas, uma variedade de dimensão n que seja isotrópica em torno de um de seus pontos possuirá não n^2 , mas apenas $n(n - 1)/2$ isometrias deste tipo (tradicionalmente chamadas *rotações* no caso euclidiano).

Adicionalmente, uma variedade isotrópica em torno de um ponto que seja também homogênea será necessariamente isotrópica em torno de todos os demais pontos [3] (de modo que podemos nos referir a ela simplesmente como uma variedade *homogênea e isotrópica* sem gerar ambigüidade). Notamos, ainda, que uma variedade homogênea e isotrópica possuirá o número máximo $n + n(n - 1)/2 = n(n + 1)/2$ de campos de Killing admissível para a sua dimensão e será, portanto, por definição, maximalmente simétrica.

O inverso desta afirmação também pode ser provado [3]: todo espaço maximalmente simétrico é homogêneo e isotrópico.

2.4 Espaços Maximalmente Simétricos

Alguns resultados de enorme importância e fortemente restritivos podem ser obtidos para espaços que apresentem o número máximo de simetrias possível para a sua dimensão. Em primeiro lugar, todo espaço maximalmente simétrico possui curvatura escalar $R \equiv R^\nu{}_\nu$, constante e vice-versa [3]. Em particular, todo espaço plano será maximalmente simétrico. Além disso, dadas a assinatura (p, q) e a curvatura escalar R , um espaço maximalmente simétrico estará univocamente determinado. Apoiados neste fato, denotaremos, doravante, um tal espaço simplesmente por $(p, q)_R$ (onde p corresponderá às dimensões do tipo espaço). Em particular, $(p, q)_0 \equiv \mathbf{E}^{p, q}$.

Em segundo lugar, qualquer $(p, q)_R$ de dimensão $p + q = n$ e com $R \neq 0$ pode ser representado como uma pseudo-esfera imersa numa variedade pseudo-euclidiana (que chamaremos de \mathcal{H}) de dimensão $N = n + 1$ com assinatura $(P, Q) \equiv (p + 1, q)$ para o caso $R < 0$ e $(p, q + 1)$ para $R > 0$. Vamos provar esta afirmação efetuando a construção de um $(p, q)_R$ genérico por meio de tal imersão (à qual recorreremos no quarto capítulo quando formos tratar do espaço de de Sitter).

Sejam H_{AB} as componentes da métrica do espaço $\mathcal{H} \equiv (P, Q)_0 = (p + 1, q)_0 = \mathbf{E}^{p+1, q}$ ou $(p, q + 1)_0 = \mathbf{E}^{p, q+1}$ em coordenadas cartesianas $\{\chi^A\}$. Escrevemos, então, o elemento de linha de \mathcal{H} como

$$H_{AB}d\chi^A d\chi^B = H_{ab}d\chi^a d\chi^b + H_{NN} (d\chi^N)^2, \quad (2.12)$$

onde os índices A e B variam no intervalo de 0 a $N = n + 1$ e os índices a e b variam no intervalo de 0 a $n = N - 1$. Se h_{ab} forem as componentes cartesianas da métrica plana do espaço $(p, q)_0 = \mathbf{E}^{p, q}$, teremos

$$H_{ab} = h_{ab}. \quad (2.13)$$

Podemos, então, escrever

$$H_{AB}d\chi^A d\chi^B = d\Sigma^2 + \mathbf{s} (d\chi^N)^2, \quad (2.14)$$

onde

$$d\Sigma^2 \equiv h_{ab}d\chi^a d\chi^b \quad (2.15)$$

e $\mathbf{s} \equiv H_{NN} = \pm 1$ assumirá o sinal oposto ao de R . O espaço $(p, q)_R$, então, será obtido limitando-se os pontos de \mathcal{H} àqueles sobre a hipersuperfície da pseudo-esfera definida pela equação

$$H_{AB}\chi^A \chi^B \equiv \Sigma^2 + \mathbf{s} (\chi^N)^2 = \mathbf{s} l^2 \quad (2.16)$$

(onde $\Sigma^2 \equiv h_{ab}\chi^a\chi^b$) cujo pseudo-raio l satisfaça [3]

$$l^2 = \frac{n(n-1)}{|R|}. \quad (2.17)$$

Para obtermos o elemento de linha induzido no espaço $(p, q)_R$ pela métrica H do espaço \mathcal{H} , precisamos eliminar χ^N na equação (2.14). A equação (2.16) nos diz que o espaço $(p, q)_R$ corresponde aos pontos de \mathcal{H} para os quais a coordenada χ^N satisfaz

$$(\chi^N)^2 = l^2 - \mathbf{s}\Sigma^2. \quad (2.18)$$

Diferenciando, obtemos

$$2\chi^N d\chi^N = -2\mathbf{s}\Sigma d\Sigma, \quad (2.19)$$

onde $\Sigma d\Sigma \equiv h_{ab}\chi^a d\chi^b$, de modo que

$$d\chi^N = -\mathbf{s} \frac{\Sigma d\Sigma}{\chi^N} \quad (2.20)$$

e, portanto,

$$(d\chi^N)^2 = \frac{(\Sigma d\Sigma)^2}{(\chi^N)^2} = \frac{(\Sigma d\Sigma)^2}{l^2 - \mathbf{s}\Sigma^2}. \quad (2.21)$$

Substituindo este resultado em (2.14), obtemos o elemento de linha $d\tau^2$ induzido pela métrica H de \mathcal{H} na pseudo-esfera $(p, q)_R$ (com métrica $g_{\alpha\beta}$ num sistema de coordenadas qualquer $\{x^\alpha\}$):

$$\begin{aligned} d\tau^2 = g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta &= H_{AB} d\chi^A d\chi^B \quad (2.22) \\ &= d\Sigma^2 + \mathbf{s} \frac{(\Sigma d\Sigma)^2}{l^2 - \mathbf{s}\Sigma^2} \\ &= h_{\mu\nu} d\chi^\mu d\chi^\nu + \frac{1}{\mathbf{s}l^2 - \Sigma^2} (h_{\mu\rho}\chi^\rho d\chi^\mu) (h_{\nu\sigma}\chi^\sigma d\chi^\nu) \\ &= \left(h_{\mu\nu} + \frac{1}{\mathbf{s}l^2 - \Sigma^2} h_{\mu\rho}\chi^\rho h_{\nu\sigma}\chi^\sigma \right) d\chi^\mu d\chi^\nu \\ &= \left(h_{\mu\nu} + \frac{1}{\mathbf{s}l^2 - \Sigma^2} h_{\mu\rho}\chi^\rho(x) h_{\nu\sigma}\chi^\sigma(x) \right) \frac{\partial\chi^\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \frac{\partial\chi^\nu}{\partial x^\beta} dx^\beta, \end{aligned}$$

ou seja,

$$g_{\alpha\beta}(x) = \left(h_{\mu\nu} + \frac{1}{\mathbf{s}l^2 - \Sigma^2} h_{\mu\rho}\chi^\rho(x) h_{\nu\sigma}\chi^\sigma(x) \right) \frac{\partial\chi^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial\chi^\nu}{\partial x^\beta}. \quad (2.23)$$

Em particular, no sistema de coordenadas induzido $\{\chi^\alpha\}$,

$$\bar{g}_{\alpha\beta}(\chi) = \left(h_{\alpha\beta} + \frac{1}{\mathbf{s}l^2 - \Sigma^2} h_{\alpha\rho}\chi^\rho h_{\beta\sigma}\chi^\sigma \right). \quad (2.24)$$

O grupo das isometrias de $g(x)$ será simplesmente o grupo das transformações no

espaço \mathcal{H} que mantêm os pontos da pseudo-esfera sobre a pseudo-esfera, ou seja, o grupo ortogonal indefinido [36] $O(p+1, q)$ para $R > 0$ e $O(p, q+1)$ para $R < 0$ (denotaremos ambos genericamente por $O(P, Q)$, de modo que $P+Q = p+q+1 = n+1 = N$), cujas transformações \mathcal{R} satisfazem

$$H_{AB}\mathcal{R}^A{}_C\mathcal{R}^B{}_D = H_{CD}. \quad (2.25)$$

Os campos de Killing de $g(x)$, porém, corresponderão apenas àquelas transformações pertencentes a $O(P, Q)$ que possam ser expressas como uma sucessão de transformações infinitesimais, ou seja, que possam ser obtidas continuamente a partir da identidade. Portanto, o grupo de movimento do espaço $(p, q)_R$ será a componente de identidade de $O(P, Q)$, ou seja, o grupo ortogonal *restrito* $SO^+(P, Q)$ (correspondente às “rotações rígidas” do espaço $(P, Q)_0$). Este grupo (bem como $O(P, Q)$) possui $N(N-1)/2 = n(n+1)/2$ dimensões, provando que o espaço assim construído é de fato maximalmente simétrico. E, como sabemos que cada espaço desse tipo é determinado univocamente pela sua assinatura e pela sua curvatura escalar, vemos que a construção acima fornece todos os espaços maximalmente simétricos com curvatura não-nula. No caso em que $R = 0$, ou seja, em que a pseudo-esfera degenera-se no plano $(p, q)_0$ (correspondendo ao limite $l \rightarrow \infty$), o grupo de isometria corresponde às rotações $SO^+(p, q)$ acrescidas das translações em $p+q$ dimensões, o que forma o grupo afim ou inomogêneo [37] $ISO^+(p, q)$.

É interessante notar que tanto os grupos $SO^+(p+1, q)$ e $SO^+(p, q+1)$ quanto o grupo $ISO^+(p, q)$ possuem o grupo $SO^+(p, q)$ como subgrupo. Estas transformações se caracterizam por manterem a origem fixa e formam, portanto, o *subgrupo de isotropia* destes grupos (para qualquer valor de R). Torna-se evidente daí que a mecânica clássica não é uma teoria efetivamente quadridimensional, vez que os boosts galileanos não possuem a estrutura de “rotações” (transformações ortogonais). Com efeito, não existe uma entidade que se possa considerar com propriedade como sendo “o espaço-tempo quadridimensional da mecânica clássica”. Isso porque a mecânica clássica “acontece” não em \mathbf{E}^4 ou $\mathbf{E}^{3,1}$, mas sim em \mathbf{E}^3 munido de um parâmetro universal t . O conceito de espaço-tempo passa a fazer sentido a partir do momento em que os boosts galileanos são substituídos pelos boosts lorentzianos, os quais possuem a forma de “rotações” (hiperbólicas) espaço-temporais, emaranhando derradeiramente tempo e espaço por meio do parâmetro de conversão c .

Trataremos destes grupos em mais detalhes nos próximos capítulos, no contexto específico do espaço de Minkowski, que é o caso $p = 3, q = 1, R = 0$ (capítulo 3) e dos espaços de de Sitter e anti-de Sitter, que são o caso $p = 3, q = 1, R \neq 0$ (capítulo 4). O que se torna claro aqui, contudo, é que estes três espaços são casos particulares de uma mesma estrutura geral, qual seja, a dos espaços maximalmente simétricos (em $3+1$ dimensões).

2.5 A Simetria Conforme

Um conceito relevante no contexto da relatividade de de Sitter é o da simetria conforme. As transformações conformes num dado espaço são uma generalização das suas isometrias. Enquanto estas são as transformações que mantêm constante a forma da métrica $g(x)$, aquelas são as que mantêm a forma de $g(x)$ a menos de um fator de escala dado por uma função do ponto na variedade (equivalentemente, são transformações que preservam ângulos). Ou seja, enquanto as isometrias são transformações que satisfazem

$$g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x), \quad (2.26)$$

para qualquer $x \in \mathbf{E}^n$, as transformações conformes são as que satisfazem

$$g'_{\mu\nu}(x) = S(x)g_{\mu\nu}(x). \quad (2.27)$$

Vemos, portanto, que as transformações conformes são uma generalização das isometrias. Com efeito, uma transformação conforme com $S(x) \equiv 1$ é uma isometria.

Vamos manter nossa atenção nas transformações de interesse físico, ou seja, aquelas que podem ser descritas por um parâmetro infinitesimal, conforme (2.3). Vimos, no estudo das isometrias (segunda seção deste capítulo), que esta condição leva à equação (2.8):

$$\frac{1}{\epsilon} [g_{\mu\nu}(x) - g'_{\mu\nu}(x)] = \nabla_{\mu}\xi_{\nu}(x) + \nabla_{\nu}\xi_{\mu}(x). \quad (2.28)$$

No caso de uma transformação conforme, ou seja, quando

$$g_{\mu\nu}(x) - g'_{\mu\nu}(x) = [1 - S(x)] g_{\mu\nu}(x), \quad (2.29)$$

teremos

$$\nabla_{(\mu}\xi_{\nu)} = \frac{1}{\epsilon} (1 - S) g_{\mu\nu}. \quad (2.30)$$

Quando $S(x)$ for a identidade, esta equação reduzir-se-á evidentemente à equação de Killing, conforme esperado. Por analogia, chamamos (2.30) de *equação de Killing conforme* e de *campos de Killing conformes* os campos ξ que a satisfizerem.

Num espaço plano (cuja métrica denotaremos por $h_{\mu\nu}$), as derivadas covariantes reduzem-se a derivadas convencionais e a equação de Killing conforme se torna

$$\partial_{(\mu}\xi_{\nu)} = \frac{1}{\epsilon} (1 - S) h_{\mu\nu}. \quad (2.31)$$

Para encontrar a forma dos campos de Killing conformes, começamos por tomar o traço desta equação:

$$2 \partial_{\mu}\xi^{\mu} = \frac{n}{\epsilon} (1 - S), \quad (2.32)$$

ou

$$\frac{1}{\epsilon}(1 - S) = \frac{2}{n} \partial_\mu \xi^\mu \equiv F(x), \quad (2.33)$$

onde $n = h^\nu{}_\nu$ novamente é a dimensão da variedade. Assim, (2.31) se torna

$$\partial_{(\mu} \xi_{\nu)} = F h_{\mu\nu}. \quad (2.34)$$

Aplicamos, então, mais uma derivada

$$\partial_\lambda \partial_{(\mu} \xi_{\nu)} = \partial_\lambda F h_{\mu\nu}, \quad (2.35)$$

e, permutando os índices, obtemos

$$\partial_\mu \partial_{(\nu} \xi_{\lambda)} = \partial_\mu F h_{\nu\lambda} \quad (2.36)$$

e

$$\partial_\nu \partial_{(\lambda} \xi_{\mu)} = \partial_\nu F h_{\lambda\mu}. \quad (2.37)$$

Subtraindo (2.37) de (2.36), ficamos com

$$\begin{aligned} h_{\nu\lambda} \partial_\mu F - h_{\lambda\mu} \partial_\nu F &= (\partial_\mu \partial_\nu \xi_\lambda + \partial_\mu \partial_\lambda \xi_\nu) - (\partial_\nu \partial_\lambda \xi_\mu + \partial_\nu \partial_\mu \xi_\lambda) \\ &= \partial_\mu \partial_\lambda \xi_\nu - \partial_\nu \partial_\lambda \xi_\mu \\ &= \partial_\lambda (\partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu), \end{aligned} \quad (2.38)$$

e, integrando em dx^λ ,

$$\begin{aligned} \int dx^\lambda (h_{\nu\lambda} \partial_\mu F - h_{\lambda\mu} \partial_\nu F) &= \int dx^\lambda \partial_\lambda (\partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu) \\ \int (dx_\nu \partial_\mu F - dx_\mu \partial_\nu F) &= \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu + \omega_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde ω é um tensor constante e anti-simétrico. Portanto,

$$\partial_{[\mu} \xi_{\nu]} = -\omega_{\mu\nu} + \int (dx_\nu \partial_\mu F - dx_\mu \partial_\nu F). \quad (2.40)$$

Agora, somando (2.34) e (2.40), temos

$$\partial_\mu \xi_\nu = -\omega_{\mu\nu} + \frac{1}{2} F h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \int (dx_\nu \partial_\mu F - dx_\mu \partial_\nu F). \quad (2.41)$$

Integrando esta equação em dx^μ ,

$$\xi_\nu = a_\nu - \omega_{\mu\nu} x^\mu + \frac{1}{2} \int dx_\nu F + \frac{1}{2} \int dx^\mu \int (dx_\nu \partial_\mu F - dx_\mu \partial_\nu F), \quad (2.42)$$

onde a é um vetor constante, obtemos o campo ξ_ν em função de $F(x) \equiv \frac{2}{n} \partial_\mu \xi^\mu$.

Para encontrar F , contraímos (2.38) com $h^{\lambda\mu}$:

$$\partial_\nu F - n \partial_\nu F = \partial_\mu \partial^\mu \xi_\nu - \partial_\nu \partial^\mu \xi_\mu. \quad (2.43)$$

Mas

$$\partial^\mu \xi_\mu = \partial_\mu \xi^\mu \equiv \frac{n}{2} F, \quad (2.44)$$

de modo que

$$\partial^2 \xi_\nu = \left(1 - \frac{n}{2}\right) \partial_\nu F. \quad (2.45)$$

Tomando mais uma derivada,

$$\partial^2 \partial_\mu \xi_\nu = \left(1 - \frac{n}{2}\right) \partial_\mu \partial_\nu F \quad (2.46)$$

e simetrizando:

$$\begin{aligned} \partial^2 \partial_{(\mu} \xi_{\nu)} &= \left(1 - \frac{n}{2}\right) \partial_{(\mu} \partial_{\nu)} F \\ &= \left(1 - \frac{n}{2}\right) 2 \partial_\mu \partial_\nu F \\ &= (2 - n) \partial_\mu \partial_\nu F. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Agora, de (2.34), temos que

$$\partial^2 \partial_{(\mu} \xi_{\nu)} = \partial^2 F h_{\mu\nu}. \quad (2.48)$$

Logo, (2.47) se torna

$$\partial^2 F h_{\mu\nu} = (2 - n) \partial_\mu \partial_\nu F. \quad (2.49)$$

O traço desta equação fornece

$$\begin{aligned} n \partial^2 F &= (2 - n) \partial^2 F \\ (n - 1) \partial^2 F &= 0. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Portanto, para $n > 1$,

$$\partial^2 F = 0, \quad (2.51)$$

o que, substituído em (2.49), nos dá

$$\partial_\mu \partial_\nu F = 0 \quad (2.52)$$

para $n > 2$. Nesse caso, $F(x)$ deverá ser uma função linear, que escreveremos

$$F(x) = 2 \lambda + 4 c_\nu x^\nu, \quad (2.53)$$

com λ e c_ν constantes, de forma que

$$\partial_\mu F = 4 c_\nu \delta_\mu^\nu = 4 c_\mu. \quad (2.54)$$

Substituindo (2.53) e (2.54) em (2.42), obtemos finalmente

$$\begin{aligned} \xi^\mu &= a^\mu - \omega^{\mu\nu} x_\nu + \int dx^\mu (\lambda + 2 c_\nu x^\nu) + 2 \int dx^\nu \int (dx^\mu c_\nu - dx_\nu c^\mu) \quad (2.55) \\ &= a^\mu - \omega^{\mu\nu} x_\nu + \lambda x^\mu + 2 c_\nu \int (x^\nu dx^\mu + x^\mu dx^\nu) - 2 c^\mu \int x_\nu dx^\nu \\ &= a^\mu - \omega^{\mu\nu} x_\nu + \lambda x^\mu + 2 c_\nu x^\mu x^\nu - c^\mu x_\nu x^\nu \\ &= a^\mu - \omega^{\mu\nu} x_\nu + \lambda x^\mu + c^\nu (2 h_{\nu\rho} x^\mu x^\rho - \delta_\nu^\mu \sigma^2(x)), \end{aligned}$$

que é a forma geral para um campo de Killing conforme num espaço plano (aqui, $\sigma^2(x) \equiv x_\nu x^\nu$).

Neste momento, é interessante retornarmos à equação de Killing (2.10) e resolvê-la também para um espaço plano, de modo a traçarmos um paralelo com a sua versão conforme. Para uma métrica plana, (2.10) se torna

$$\partial_{(\mu} \xi_{\nu)} = 0. \quad (2.56)$$

Agora, assim como no caso conforme, tomamos uma derivada adicional

$$\partial_\lambda \partial_{(\mu} \xi_{\nu)} = 0 \quad (2.57)$$

e permutamos os índices

$$\partial_\mu \partial_{(\nu} \xi_{\lambda)} = 0 \quad (2.58)$$

$$\partial_\nu \partial_{(\lambda} \xi_{\mu)} = 0. \quad (2.59)$$

Subtraindo (2.59) de (2.58), temos

$$\partial_\lambda \partial_{[\mu} \xi_{\nu]} = 0. \quad (2.60)$$

Somando (2.60) a (2.57), vemos que

$$\partial_\lambda \partial_\mu \xi_\nu = 0, \quad (2.61)$$

a mesma condição obtida para $\partial_\nu \xi^\nu$ no caso conforme. Num espaço plano, portanto, os campos de Killing assumirão a forma

$$\xi^\mu = a^\mu - \omega^{\mu\nu} x_\nu, \quad (2.62)$$

com a^μ e $\omega^{\mu\nu}$ constantes. De (2.56) também vemos que $\omega^{\mu\nu}$ é anti-simétrico. Logo, notamos que o campo de Killing geral num espaço plano (2.62) corresponde aos dois primeiros termos do campo de Killing conforme geral no espaço correspondente (2.55).

Cada um dos termos do campo de Killing conforme (2.55) da métrica plana $h_{\mu\nu}$ corresponde a um tipo de transformação, cujos geradores podem ser identificados como segue.

Translações:

$$\begin{aligned}\xi^\mu &= a^\mu \\ &= a^\nu \delta_\nu^\mu \\ &= a^\nu \partial_\nu x^\mu \\ &\equiv (a^\nu P_\nu) x^\mu,\end{aligned}\tag{2.63}$$

com os n geradores

$$P_\nu = \partial_\nu;\tag{2.64}$$

(Pseudo-)Rotações:

$$\begin{aligned}\xi^\mu &= -\omega^{\mu\nu} x_\nu \\ &= \omega^{\nu\mu} x_\nu \\ &= \omega^{\nu\rho} \partial_\rho x^\mu x_\nu \\ &= \frac{1}{2} (\omega^{\nu\rho} - \omega^{\rho\nu}) x_\nu \partial_\rho x^\mu \\ &= \frac{1}{2} (\omega^{\nu\rho} x_\nu \partial_\rho - \omega^{\rho\nu} x_\nu \partial_\rho) x^\mu \\ &= \frac{1}{2} \omega^{\nu\rho} (x_\nu \partial_\rho - x_\rho \partial_\nu) x^\mu \\ &\equiv \frac{1}{2} \omega^{\nu\rho} M_{\nu\rho} x^\mu,\end{aligned}\tag{2.65}$$

com os $\frac{1}{2} n(n-1)$ geradores independentes (anti-simétricos)

$$M_{\nu\rho} = x_\nu P_\rho - x_\rho P_\nu;\tag{2.66}$$

Dilatações:

$$\begin{aligned}\xi^\mu &= \lambda x^\mu \\ &= \lambda x^\nu \delta_\nu^\mu \\ &= \lambda x^\nu \partial_\nu x^\mu \\ &\equiv \lambda D x^\mu,\end{aligned}\tag{2.67}$$

com o gerador

$$D = x^\nu P_\nu; \quad (2.68)$$

Transformações conformes especiais (ou próprias):

$$\begin{aligned} \xi^\mu &= c^\nu (2 h_{\nu\rho} x^\mu x^\rho - \delta_\nu^\mu \sigma^2) \\ &= c^\nu (2 h_{\nu\rho} x^\lambda x^\rho - \delta_\nu^\lambda \sigma^2) \delta_\lambda^\mu \\ &= c^\nu (2 h_{\nu\rho} x^\lambda x^\rho - \delta_\nu^\lambda \sigma^2) \partial_\lambda x^\mu \\ &= c^\nu K_\nu x^\mu, \end{aligned} \quad (2.69)$$

com os n geradores

$$K_\nu = (2 h_{\nu\rho} x^\lambda x^\rho - \delta_\nu^\lambda \sigma^2) P_\lambda. \quad (2.70)$$

No total, temos $n + \frac{1}{2}n(n-1) + 1 + n = \frac{1}{2}(n+2)(n+1)$ geradores correspondentes aos $\frac{1}{2}(n+2)(n+1)$ parâmetros a^μ , $\omega^{\mu\nu}$, λ e c^μ . Cada uma das quatro famílias de transformações constitui uma estrutura algébrica de grupo, bem como o conjunto de todas elas. Este último é chamado grupo conforme (em $n = p + q$ dimensões) $C(p, q)$ e é isomórfico à componente de identidade do grupo pseudo-ortogonal em $(p+1) + (q+1)$ dimensões $SO^+(p+1, q+1)$. Os primeiros dois tipos de transformações, em particular, compõem, de acordo com (2.62), as isometrias do espaço em questão, dadas por $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$ geradores referentes aos $n(n+1)/2$ parâmetros a^μ e $\omega^{\mu\nu}$ (o que condiz com o fato de os espaços planos serem maximalmente simétricos).

A simetria conforme não é uma simetria física global na relatividade restrita. Porém, estas transformações preservam a estrutura do cone de luz, sobre o qual todas as distâncias são nulas — ou seja, $ds^2 = 0$, que é uma condição invariante conforme (i.e. não depende de escala). Logo, fótons, os quais não possuem massa (e que, portanto, viajam sobre o cone de luz) obedecem a simetria conforme e o eletromagnetismo é, conseqüentemente, uma teoria invariante de escala. Partículas massivas, por outro lado, obedecem $ds^2 < 0$, estabelecendo uma escala dada pela sua massa e não respeitando, conseqüentemente, a simetria conforme.

Como veremos adiante, no grupo de de Sitter, cada uma das quatro translações espaço-temporais do grupo de Poincaré será adicionada da transformação conforme própria correspondente. Além disso, a métrica do espaço de de Sitter será conformalmente plana, ou seja, será a mesma que a de Minkowski a menos de uma função multiplicativa. Como conseqüência deste fato, veremos que raios de luz viajarão sobre linhas retas no espaço de de Sitter. Tais questões serão tratadas no quarto capítulo, onde discutiremos em detalhe o espaço de de Sitter e suas simetrias.

Capítulo 3

A Relatividade de Einstein

Conforme discutido na seção anterior, as teorias cinemáticas aceitas na física desde a mecânica clássica incorporam como fundamento implícito ou explícito o princípio da relatividade. A relatividade newtoniana, no entanto, não abarca fenômenos eletromagnéticos, que só passaram a ser descritos formalmente por uma teoria completa a partir de Maxwell em 1865 [39]. A teoria de Maxwell, por introduzir elementos fundamentalmente novos, demandou a formulação de uma nova relatividade (ou, em outras palavras, uma nova definição cinemática dos referenciais inerciais), feito alcançado na sua forma derradeira por Einstein em 1905 [28]. Minkowski, posteriormente, demonstraria [26] ser o próprio princípio da relatividade consequência de uma propriedade mais fundamental do universo: a inseparabilidade entre tempo e espaço. Os detalhes deste processo fornecem uma iluminação valiosa no sentido de uma compreensão mais profunda acerca dos princípios-guia na edificação da teoria da relatividade restrita e, num âmbito mais amplo, das questões em jogo no processo de formulação de teorias cinemáticas em geral. Iniciamos, portanto, com um tratamento de tal desenvolvimento histórico, passando daí para uma exposição formal dos fundamentos da teoria. Tais conteúdos serão de vital importância no desenvolvimento dos princípios da relatividade restrita de de Sitter e na análise do seu status como teoria cinemática viável.

3.1 O Princípio da Relatividade e o Eletromagnetismo

3.1.1 A Teoria de Maxwell

Precussores e contemporâneos de Maxwell defendiam a idéia de que as interações eletromagnéticas, assim como a gravitação newtoniana, atuavam a distância. Tais interações, todavia, difeririam da gravitação em serem dependentes não apenas da separação espacial, mas também das velocidades dos corpos envolvidos. Com respeito a isso, Maxwell, apesar de reconhecer o êxito das teorias obtidas a partir de tal hipótese, advertia:

“The mechanical difficulties, however, which are involved in the assumption of particles acting at a distance with forces which depend on their velo-

cities are such as to prevent me from considering this theory as an ultimate one [...]

propondo alternativa:

“I have therefore preferred to seek an explanation of the fact in another direction, by supposing them to be produced by actions which go on in the surrounding medium as well as in the excited bodies, and endeavoring to explain the action between distant bodies without assuming the existence of forces capable of acting directly at sensible distances.” [39].

Portanto, Maxwell propunha que as interações eletromagnéticas fossem propagadas no meio existente entre os corpos. Tal idéia possuía, adicionalmente, sustentação no entendimento da época acerca dos fenômenos termodinâmicos e ópticos (até então, a óptica não possuía vínculos com o eletromagnetismo), segundo o qual a propagação de calor e luz entre os corpos dependeria sempre de algum meio que lhe desse suporte (da mesma forma como as ondas sonoras). Acreditava-se, ainda, que tal meio possuísse uma natureza que ultrapassasse a da matéria usual (daí receber o nome *éter*), visto que tal propagação aconteceria independentemente da existência de matéria entre os corpos, a qual apenas modificá-la-ia em certa instância. Considerando tais argumentos, Maxwell estendeu a idéia do éter para o domínio do eletromagnetismo, definindo o que chamou de *campo eletromagnético*:

“The electromagnetic field is that part of space which contains and surrounds bodies in electric or magnetic conditions.

It may be filled with any kind of matter, or we may endeavour to render it empty of all gross matter, as in the case of Geissler’s tubes and other so called vacua.

There is always, however, enough of matter left to receive and transmit the undulations of light and heat, and it is because the transmission of these radiations is not greatly altered when transparent bodies of measurable density are substituted for the so-called vacuum, that we are obliged to admit that the undulations are those of an æthereal substance, and not of the gross matter, the presence of which merely modifies in some way the motion of the ether.

We have therefore some reason to believe, from the phenomena of light and heat, that there is an æthereal medium filling space and permeating bodies, capable of being set in motion and of transmitting that motion from one part to another, and of communicating that motion to gross matter so as to heat it and affect it in various ways.” [39],

Tal passagem esclarece o acima exposto acerca das motivações de Maxwell e torna clara a função essencial da presença do éter na sua teoria eletromagnética. Tal teoria teve entre suas conseqüências mais relevantes a predição da existência de ondas eletromagnéticas. Estas possuiriam, de acordo com a equação de onda obtida por Maxwell, uma velocidade de propagação constante dada por $c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\epsilon_0}}$, onde μ_0 e ϵ_0 são a permissividade elétrica e permeabilidade magnética do vácuo (ou, no caso, do éter) respectivamente. Tal valor coincidia com a velocidade então experimentalmente conhecida de propagação da luz, o que levou Maxwell a propor que a natureza fundamental da luz fosse de fato a de radiação eletromagnética. A velocidade c seria praticada pela luz com relação ao éter, o qual assumiria, desse modo, a função de um referencial absoluto. A produção de ondas de rádio por Hertz em 1885 forneceu a confirmação experimental definitiva da teoria de Maxwell.

Um fato, porém, assombrava as equações de Maxwell: estas não são invariantes por boosts de Galileu. A própria universalidade do valor $c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\epsilon_0}}$ para a velocidade da luz, pela construção da teoria segundo a interpretação de Maxwell, só seria possível para referenciais em repouso com relação ao éter — e não para outros em movimento, ainda que retilíneo e uniforme, relativamente a este [40]. Desse modo, observadores neste último caso seriam capazes de conhecer a sua condição de movimento com relação ao éter pela medida da velocidade da luz no seu referencial, o que contrariaria o princípio da relatividade (segundo o qual, reiteramos, repouso e movimento retilíneo uniforme são indistinguíveis). Portanto, parecia aos físicos da época que o eletromagnetismo, ao contrário da mecânica (leis de Newton e gravitação), não respeitaria o princípio da relatividade na sua completude. No entanto, a “não-galileianidade” da teoria de Maxwell acabou revelando conter inovações teóricas (e matemáticas) profundas, demonstrando serem não somente o eletromagnetismo mas a própria mecânica fundamentalmente sujeitos a um outro tipo de relatividade, da qual a newtoniana seria apenas uma aproximação.

3.1.2 Uma nova relatividade

Tanto antes quanto depois de Maxwell, diversas teorias existiram no que diz respeito à propagação da luz e à natureza do éter. Também diversos foram os experimentos realizados em fins do século XIX e começo do século XX no intuito de se observar o movimento dos corpos em relação ao éter. O resultado negativo de tais experimentos levou cientistas como Lorentz, FitzGerald, Larmor e Poincaré a trabalharem em idéias que se conformariam no que Poincaré batizou como *transformações de Lorentz* (hoje mais propriamente chamadas *boosts de Lorentz*). Estas são transformações de coordenadas entre referenciais em movimento relativo, ou seja, o equivalente aos boosts galileanos, porém levando-se em conta a nova simetria imposta pelas equações de Maxwell e interpretada à luz dos resultados dos experimentos citados. De acordo com tais transformações, as coordenadas cartesianas (t', x', y', z') do referencial de um observador inercial movendo-

se com velocidade de magnitude v na direção x tal qual medida por um observador num outro referencial inercial com coordenadas (t, x, y, z) serão:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \quad (3.1)$$

$$x' = \gamma (x - vt) \quad (3.2)$$

$$y' = y \quad (3.3)$$

$$z' = z, \quad (3.4)$$

onde

$$\gamma \equiv \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-2}. \quad (3.5)$$

Tais transformações carregam consigo os conceitos de contração espacial e dilatação temporal, além da relatividade do conceito de simultaneidade.

Com base nestas transformações, uma teoria cinemática do movimento dos corpos no éter foi elaborada, especialmente por Lorentz e Poincaré, compatível com as equações de Maxwell, com os resultados experimentais — o éter seria, nesta teoria, indetectável — e com o princípio da relatividade.

Einstein, porém, mostrou-se insatisfeito com a interpretação do eletromagnetismo decorrente da suposta existência do éter. Segundo esta, fenômenos cujos resultados observacionais só dependem dos movimentos relativos entre os corpos envolvidos seriam descritos formalmente de modo diferente dependendo de como se considerasse o movimento destes corpos com relação ao éter. Este fato o levou a tomar um caminho teórico diferente do de seus contemporâneos: Einstein restituiu ao princípio da relatividade o status de postulado que lhe fora conferido de modo nato por Galileu, assumindo adicionalmente o segundo postulado de que a luz prapagar-se-ia no vácuo com a velocidade constante c em relação a todos os observadores inerciais (e não ao éter). Einstein pôde, assim, obter as transformações de Lorentz, e, por extensão, todos os resultados da teoria de Lorentz e Poincaré, sem a necessidade de um éter luminífero [28].

Em 1908, Minkowski [26] obteve o belo e valioso resultado de que o postulado da constância da velocidade da luz adicionado por Einstein ao princípio da relatividade significava algo muito mais fundamental: uma união entre tempo e espaço muito mais íntima do que aquela existente na mecânica clássica. Em Newton, espaço e tempo, ainda que atuando conjuntamente para constituir o pano de fundo dos fenômenos naturais, são grandezas de naturezas distintas, cada qual com suas unidades de medida próprias e incomunicáveis entre si, visto que qualquer escala de velocidade escolhida para relacionar-se medidas de tempo com medidas de espaço sofreria variação pelos boosts de Galileu e não possuiria, portanto, caráter universal. Em Einstein, porém, segundo observado por Minkowski, a velocidade c fornece um parâmetro universal de conversão entre medidas de espaço e de tempo, tornando os dois conceitos compatíveis. Tal velocidade acaba

por ser a máxima concebível na teoria, e hoje sabemos que é praticada pela luz devido ao fato de os fótons não possuírem massa. Portanto, o segundo postulado de Einstein torna-se consequência da fusão entre espaço e tempo numa única entidade.

Além disso, o próprio princípio da relatividade, agora expresso pelos boosts de Lorentz em vez dos de Galileu, assume um novo significado, tornando-se, como o segundo postulado, consequência da unificação entre espaço e tempo. Na mecânica clássica, as translações e rotações espaciais, as translações no tempo e os boosts correspondiam, respectivamente, à homogeneidade e à isotropia do espaço, à homogeneidade do tempo e ao princípio da relatividade newtoniano. Na relatividade einsteniana, por outro lado, temos um espaço-tempo uno, as translações espaço-temporais correspondendo à sua homogeneidade e as transformações de Lorentz (rotações espaciais mais boosts lorentzianos, ou, conjuntamente, “rotações espaço-temporais”), à sua isotropia.

A relatividade restrita, portanto, pode (e deve) ser pensada, em termos fundamentais, como a teoria cinemática clássica que assume um espaço-tempo unificado, homogêneo e isotrópico¹ (ou, em outras palavras, maximalmente simétrico), desta definição seguindo a constância da velocidade da luz, as transformações de Lorentz, o princípio da relatividade e todas as suas demais propriedades.

3.2 Aspectos Formais

Expomos nesta seção os elementos fundamentais da relatividade restrita na linguagem da física-matemática moderna, ou seja, a sua variedade métrica e o seu grupo de movimento, a partir dos quais todas as suas propriedades cinemáticas podem ser obtidas.

3.2.1 O Espaço de Minkowski

Dentre os espaços maximalmente simétricos de 3+1 dimensões, o espaço de Minkowski \mathcal{M} é definido como aquele que possui curvatura nula; ou seja, é o espaço pseudo-euclidiano

$$\mathcal{M} \equiv \mathbf{E}^{3,1}. \quad (3.6)$$

Sua métrica, portanto, em coordenadas cartesianas, é expressa pela matriz diagonal $\eta \equiv (+1, -1, -1, -1)$, o que fornece o elemento de linha ($c = 1$)

$$d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = dt^2 - dl^2, \quad (3.7)$$

onde $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ é o elemento de linha no espaço euclidiano tridimensional (distância espacial).

¹Minkowski [26] batizou tal princípio de *postulado do mundo absoluto*, usando a palavra “mundo” no sentido de espaço-tempo, e defendendo expressamente ser este o postuldo cinemático fundamental da teoria da relatividade, em lugar do princípio da relatividade.

3.2.2 O grupo de Poincaré

Conforme visto no segundo capítulo, as isometrias infinitesimais de um espaço plano $(p, q)_0$ qualquer são dadas pelos geradores

$$P_\mu = \partial_\mu \quad (3.8)$$

$$M_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu), \quad (3.9)$$

que fornecem respectivamente as $n = p + q$ translações e as $n(n-1)/2$ (pseudo-)rotações. As translações formam um grupo algébrico, que denotaremos por T_n . As pseudo-rotações, por outro lado, constituem o grupo $SO^+(p, q)$. O conjunto de todas as combinações possíveis entre translações e pseudo-rotações forma o grupo $ISO^+(p, q)$. Este grupo é um produto semi-direto [41] entre T_n e $SO^+(p, q)$ (denotamos $ISO^+(p, q) = T_n \circledast SO^+(p, q)$) pois [42]:

1. cada transformação de $ISO^+(p, q)$ pode ser expressa como a composição entre uma única translação e uma única rotação;
2. o único elemento em comum entre T_n e $SO^+(p, q)$ é a identidade;
3. T_n é um subgrupo invariante [31] de $ISO^+(p, q)$, ou seja,

$$ATA^{-1} \in T_n \quad \forall \quad T \in T_n, \quad A \in ISO^+(p, q). \quad (3.10)$$

O grupo $SO^+(p, q)$, porém, não é um subgrupo invariante de $ISO^+(p, q)$, e por isto este não é um produto direto [42]. Fisicamente, isto significa que, numa composição de duas transformações genéricas de $ISO^+(p, q)$, a parte translacional é afetada pela parte rotacional (mas não o inverso). Para tornar clara e rigorosa esta idéia, denotamos cada transformação de $ISO^+(p, q)$ como (Λ, a) , onde Λ representa a matriz da rotação e a o vetor da translação que, efetuadas nesta ordem, fornecem em conjunto a referida transformação. Sabemos que uma translação $(\mathbb{1}, a)$ seguida de outra translação $(\mathbb{1}, a')$ fornece a translação $(\mathbb{1}, a + a') = (\mathbb{1}, a' + a)$ (aqui notamos, de passagem, que as translações são comutativas), e que a seqüência de duas rotações $(\Lambda, 0)$ e $(\Lambda', 0)$ fornece igualmente a rotação $(\Lambda'\Lambda, 0)$ (aqui, por outro lado, a ordem dos fatores faz diferença). Se efetuamos, porém, uma transformação genérica (Λ, a) seguida de outra transformação (Λ', a') , teremos como resultante a transformação $(\Lambda'\Lambda, \Lambda'a + a')$. No caso de um produto direto, por outro lado, a resultante seria simplesmente $(\Lambda'\Lambda, a + a')$, sem interferência mútua entre os dois subgrupos [41].

No caso do espaço de Minkowski $(3, 1)_0$, as pseudo-rotações correspondem às transformações de Lorentz (boosts de Lorentz mais rotações espaciais). O grupo $SO^+(3, 1)$ é, portanto, chamado *grupo de Lorentz* e denotado por \mathcal{L} . Já o grupo $ISO^+(3, 1)$ de todas as isometrias de \mathcal{M} é chamado *grupo de Poincaré* e denotado por \mathcal{P} , de modo que $\mathcal{P} = T_4 \circledast \mathcal{L}$ [43].

As transformações do grupo T_4 podem ser expressas como

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu, \quad (3.11)$$

onde x^μ são as coordenadas espaço-temporais cartesianas e os parâmetros a^μ são as componentes cartesianas de um quadrivetor constante. Da forma destas transformações vemos que o grupo T_4 age transitivamente em \mathcal{M} , ou seja, que as translações levam qualquer ponto da variedade \mathcal{M} em qualquer outro. O grupo T_4 , portanto, é o subgrupo de \mathcal{P} responsável pela homogeneidade do espaço de Minkowski (dizemos também que \mathcal{M} é transitivo por translações e que a variedade correspondente a T_4 é \mathcal{M}).

Por outro lado, o grupo de Lorentz é o subgrupo de isotropia de \mathcal{P} , ou seja, é o subgrupo das transformações de \mathcal{P} que deixam a origem fixa (sendo esta uma característica das transformações ortogonais). Portanto, dentro do grupo \mathcal{P} das isometrias do espaço de Minkowski, \mathcal{L} é o subgrupo responsável pela isotropia deste espaço. As transformações de tal grupo, portanto, podem ser expressas como

$$x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (3.12)$$

onde $\Lambda^\mu{}_\nu$ são componentes de matrizes ortogonais de ordem 4 e que podem ser deformadas continuamente até se obter a matriz identidade (estas matrizes, evidentemente, possuem todas determinante igual a $+1$, vez que $\det \mathbb{1} = +1$).

Além disso, o grupo de Lorentz, sendo um grupo ortogonal, possui a estrutura de um grupo de rotações generalizadas. Os seus elementos podem ser divididos em dois conjuntos. Aqueles que mantêm a componente temporal do espaço-tempo intacta formam um subgrupo isomórfico ao grupo ortogonal especial $SO(3)$, constituído pelas rotações próprias (ou seja, descontadas reflexões) nas três dimensões espaciais. As transformações restantes em \mathcal{L} fornecem “rotações em planos espaço-temporais”, ou seja, rotações hiperbólicas (imaginárias) envolvendo coordenadas de espaço e de tempo. Este subconjunto constitui os boosts de Lorentz: as transformações que relacionam referenciais inerciais em movimento relativo — definindo o conceito de movimento uniforme no sentido do princípio da relatividade — no contexto da relatividade restrita. Portanto, podemos compreender a equação (3.12) como sendo Λ matrizes de rotação atuando nas coordenadas (it, x, y, z) (em unidades naturais, i.e. $c = 1$). No caso em que a componente temporal é envolvida, obtêm-se as expressões para os boosts descritas na seção anterior. É válido salientar que tal subconjunto, ao contrário das rotações espaciais, não constitui um grupo por conta própria (visto que a composição de dois boosts de Lorentz, em geral, não fornece um boost de Lorentz). Além disso, nem as rotações espaciais nem os boosts lorentzianos são comutativos (ao contrário dos boosts galileanos) e o grupo de Lorentz, ao contrário do seu correspondente galileano G_∞ , é um grupo semi-simples. O grupo de Poincaré como um todo, por outro lado, não é um grupo semi-simples, pois o subgrupo

T_4 é ainda abeliano.

A partir das formas finitas das translações e transformações de Lorentz dadas acima, vemos que uma transformação genérica de \mathcal{P} possuirá a forma

$$x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \quad (3.13)$$

caso a transformação de Lorentz seja efetuada antes da translação, ou

$$x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu (x^\nu + a^\nu) = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu \quad (3.14)$$

caso contrário. Notamos que esta transformação é uma expressão linear inhomogênea em x , ou seja, consiste de um termo proporcional a x (transformação de Lorentz) acrescido de um termo independente de x (translação). Por conta disso, \mathcal{P} é também chamado *grupo de Lorentz inhomogêneo* (daí a notação $ISO^+(1,3)$) — enquanto \mathcal{L} , nesse caso, é chamado *grupo de Lorentz homogêneo*. O caráter inhomogêneo conferido pelas translações ao grupo de Poincaré significa que as transformações de \mathcal{P} em geral não mantêm a origem fixa (preservada pelo grupo de Lorentz homogêneo). Devido a este fato, o grupo de Poincaré é considerado o grupo *afim* ao grupo de Lorentz. Tal propriedade confere também ao espaço de Minkowski o caráter de um espaço afim, em vez de um espaço vetorial, pois nele não existe uma origem privilegiada, ou seja, todos os pontos são equivalentes, de modo que uma translação (mudança da origem) mantém o espaço idêntico.

A matriz que representa a transformação (3.13) é imediatamente obtida como sendo

$$\begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 & a^0 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 & a^1 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 & a^2 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 & a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

donde o caráter afim de \mathcal{P} fica claro no sentido matricial [44].

3.2.3 O Caráter Quociente do Espaço de Minkowski

O grupo de Poincaré, bem como os seus subgrupos \mathcal{L} e T_4 , são grupos de Lie. Isto significa que a cada um deles corresponde uma variedade diferenciável. As variedades são, antes de tudo, espaços topológicos. O grupo de Lorentz (entre outros subgrupos de \mathcal{P}) define uma simetria — e, portanto, uma relação de equivalência — na variedade correspondente ao grupo de Poincaré (a qual denotaremos também por \mathcal{P}). Tal relação consiste em se identificarem todos os pontos da variedade \mathcal{P} (que possui 10 dimensões) os quais podem ser obtidos uns a partir dos outros por meio de alguma transformação de Lorentz. Um espaço topológico S munido de uma relação de equivalência R (que

denotaremos por S_R) permite a definição de um espaço quociente S/R [45], que é o espaço resultante da identificação dos pontos dada pela relação de equivalência — ou seja, o espaço cujos pontos são as classes de equivalência em S_R (com a topologia induzida por S). O quociente da variedade \mathcal{P} pela classe de equivalência dada por \mathcal{L} (ou, simplesmente, o quociente de \mathcal{P} por \mathcal{L}^2) é também uma maneira de se definir o espaço de Minkowski:

$$\mathcal{M} \equiv \mathcal{P}/\mathcal{L}. \quad (3.16)$$

O caráter quociente do espaço-tempo, como veremos, é preservado na relatividade de de Sitter.

²Note-se que não tratamos aqui efetivamente do quociente entre dois grupos (no sentido algébrico), mas sim de um quociente no sentido topológico, ou seja, de um espaço topológico por uma relação de equivalência — ainda que cada um de ambos corresponda a um grupo. Dessa forma, o resultado obtido não é um grupo (como seria no caso algébrico), mas sim um outro espaço topológico (no caso, por se tratarem de grupos de Lie, uma variedade diferenciável).

Capítulo 4

A Relatividade de de Sitter

4.1 O Espaço de de Sitter

Vimos no capítulo anterior que o espaço de Minkowski \mathcal{M} caracteriza-se matematicamente por ser o espaço maximalmente simétrico de 3+1 dimensões e curvatura nula (ou seja, $(3, 1)_0$ na notação definida no primeiro capítulo) e que o seu grupo de isometria é o grupo de Poincaré \mathcal{P} , o qual é formado pelo produto semi-direto entre o grupo das translações T_4 (responsável pela homogeneidade de \mathcal{M}) e o grupo de Lorentz \mathcal{L} (responsável pela sua isotropia).

Por outro lado, o espaço de de Sitter (estudado pela primeira vez pelo astrônomo neerlandês Willem de Sitter [46], de quem leva o nome) é definido como $dS_R \equiv (3, 1)_R$, $R < 0$, ou seja, é o espaço maximalmente simétrico também de 3+1 dimensões, porém com curvatura escalar negativa (na convenção de sinais da métrica em que as componentes espaciais são negativas). A sua contraparte em curvatura positiva é o espaço anti-de Sitter $AdS_R \equiv (3, 1)_R$, $R > 0$.

Conforme visto no primeiro capítulo, ambos estes espaços podem ser visualizados como hipersuperfícies quadridimensionais imersas num espaço \mathcal{H} pseudo-euclidiano lorentziano em cinco dimensões. Tal imersão é definida pela equação (2.16), que, neste caso, fornece

$$H_{AB}\chi^A\chi^B \equiv \eta_{ab}\chi^a\chi^b + \mathbf{s} (\chi^4)^2 \equiv (\chi^0)^2 - (\chi^1)^2 - (\chi^2)^2 - (\chi^3)^2 + \mathbf{s} (\chi^4)^2 = \mathbf{s} l^2, \quad (4.1)$$

onde $H_{AB} \equiv \text{diag}(+1, -1, -1, -1, \mathbf{s})$ são as componentes da métrica pseudo-euclidiana do espaço \mathcal{H} nas coordenadas cartesianas $\{\chi^A\}$, ao passo que $\eta_{ab} \equiv (+1, -1, -1, -1)$ e $\{x^a\}$ são a métrica e coordenadas cartesianas sobre o espaço de Minkowski $\mathbf{E}^{3,1}$ (de modo que $H_{ab} = \eta_{ab}$ para $a, b = 0, 1, 2, 3$).

No caso de de Sitter ($R < 0$), $\mathcal{H} \equiv (4, 1)_0 \equiv \mathbf{E}^{4,1}$, ou seja, $\mathbf{s} = -1$, de modo que (4.1) se torna

$$(\chi^0)^2 - (\chi^1)^2 - (\chi^2)^2 - (\chi^3)^2 - (\chi^4)^2 = -l^2. \quad (4.2)$$

Esta hipersuperfície é um hiperbolóide equilátero de uma folha centrado na origem cujos semi-eixos principais medem l . Damos a este parâmetro o nome de *comprimento* ou *raio de de Sitter*.

Já o caso anti-de Sitter ($R > 0$), $\mathcal{H} \equiv (3, 2)_0 \equiv \mathbf{E}^{3,2}$, ou seja, $s = +1$. Temos, portanto,

$$(\chi^0)^2 - (\chi^1)^2 - (\chi^2)^2 - (\chi^3)^2 + (\chi^4)^2 = l^2, \quad (4.3)$$

ou seja, este espaço é um hiperbolóide equilátero de duas folhas.

De (2.17), temos que, para ambos estes espaços,

$$l^2 = \frac{12}{|R|}. \quad (4.4)$$

Por outro lado, da equação de Einstein com termo cosmológico no vácuo

$$R_{\mu\nu} - \left(\frac{R}{2} + \Lambda\right) g_{\mu\nu} = 0, \quad (4.5)$$

obtemos de imediato, por contração com $g^{\mu\nu}$,

$$R = -4\Lambda \quad (4.6)$$

e, conseqüentemente,

$$l^2 = \frac{3}{|\Lambda|} \quad (4.7)$$

para um dado valor experimental da constante cosmológica. Notamos que o limite em que a constante cosmológica (e, conseqüentemente, a curvatura) se anula corresponde ao limite em que o comprimento de de Sitter tende a infinito. Por outro lado, no limite em que o comprimento de de Sitter tende a zero, a constante cosmológica tende a infinito, o que dá origem a um espaço-tempo singular [47].

O tensor de Riemann é dado (para qualquer espaço com curvatura constante) [3] por

$$R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma = \frac{R}{12} (\delta_\nu^\sigma g_{\mu\rho} - \delta_\mu^\sigma g_{\rho\nu}) = -\frac{\Lambda}{3} (\delta_\nu^\sigma g_{\mu\rho} - \delta_\mu^\sigma g_{\rho\nu}), \quad (4.8)$$

de onde obtemos também o tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = \frac{R}{4} g_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} \quad (4.9)$$

(o mesmo resultado obtém-se pela combinação de (4.5) e (4.6)).

4.2 Coordenadas estereográficas

Para estudarmos o espaço de de Sitter em comparação com o espaço de Minkowski, é útil introduzirmos naquele um sistema de coordenadas que o projete sobre este. Para tanto, escolhemos a projeção estereográfica [48] do hiperbolóide de de Sitter (ou anti-de Sitter) sobre o plano de Minkowski \mathcal{M} com este situado em $\chi^4 = -l$, ou seja, $\mathcal{M} = \mathcal{M} \times \{-l\} \subset \mathcal{H}$ (lembrando que o hiperbolóide está centrado na origem do sistema cartesiano $\{\chi^A\}$ do espaço plano \mathcal{H}).

As quatro coordenadas estereográficas $\{x^a\}$ relacionam-se às cinco coordenadas cartesianas $\{\chi^A\}$ de \mathcal{H} por meio do comprimento de de Sitter l segundo

$$\frac{\chi^a}{x^a} = \frac{\Sigma(\chi)}{\sigma(x)} = \frac{1}{2} (1 - \bar{\chi}^4) \equiv \Omega_l(\bar{\chi}^4), \quad (4.10)$$

onde

$$\Sigma(\chi) \equiv \left(H_{ab} \chi^a \chi^b \right)^{1/2}, \quad \sigma(x) \equiv \left(\eta_{ab} x^a x^b \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad \bar{\chi}^4 \equiv \frac{\chi^4}{l} \quad (4.11)$$

(lembrando que $a, b = 0, 1, 2, 3$). Portanto, a mudança da coordenadas é dada simplesmente por

$$x^a(\chi) = \Omega_l^{-1}(\bar{\chi}^4) \chi^a. \quad (4.12)$$

É válido salientar que esta projeção é definida para todos os pontos do hiperbolóide de de Sitter exceto aqueles para os quais $\bar{\chi}^4 = 1$, ou seja, $\chi^4 = l$ (que correspondem ao “pólo norte” na projeção estereográfica da esfera euclidiana, a partir do qual os demais pontos são projetados [48]). Estes pontos serão “projetados sobre o infinito” do plano de Minkowski. A projeção dos demais pontos do hiperbolóide cobre toda a região finita deste plano.

Para obtermos as transformações inversas (que dependem de $\Omega_l(\bar{\chi}^4)$), precisamos começar por encontrar $\bar{\chi}^4(x)$. Para isto, voltamos à equação que define os espaços de de Sitter e anti-de Sitter (4.1), que agora reescrevemos como

$$\frac{\mathbf{s}}{l^2} \Sigma^2(\chi) + (\bar{\chi}^4)^2 = 1. \quad (4.13)$$

Aqui usamos

$$\begin{aligned} \Sigma^2(\chi) &= \sigma^2(x) \Omega_l^2(\bar{\chi}^4) \\ &= \left(\frac{\sigma(x)}{2} \right)^2 (1 - \bar{\chi}^4)^2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Assim, definindo

$$\zeta(x) \equiv \mathbf{s} \left(\frac{\sigma(x)}{2l} \right)^2, \quad (4.15)$$

temos

$$\begin{aligned} \zeta(x) (1 - \bar{\chi}^4)^2 &= 1 - (\bar{\chi}^4)^2 \\ &= (1 + \bar{\chi}^4) (1 - \bar{\chi}^4). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Como $\bar{\chi}^4 \neq 1$, logo,

$$\zeta(x) (1 - \bar{\chi}^4) = 1 + \bar{\chi}^4, \quad (4.17)$$

de modo que

$$\zeta(\bar{\chi}^4) = \frac{1 + \bar{\chi}^4}{1 - \bar{\chi}^4} \quad \text{e} \quad \bar{\chi}^4(x) = \frac{\zeta(x) - 1}{\zeta(x) + 1}, \quad (4.18)$$

o que nos dá

$$\begin{aligned} \Omega_l(x) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\zeta(x) - 1}{\zeta(x) + 1} \right) \\ &= \frac{1}{\zeta(x) + 1}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Agora sim, munidos de $\Omega_l(x)$, podemos efetuar as transformações inversas

$$\chi^a(x) = \Omega_l(x) x^a \quad \text{e} \quad \chi^4(x) = l \frac{\zeta(x) - 1}{\zeta(x) + 1} = l \Omega_l(x) (\zeta(x) - 1). \quad (4.20)$$

Neste sistema de coordenadas, a métrica de de Sitter demonstra seu caráter conformalmente plano

$$g_{\mu\nu}(x) = \Omega_l^2(x) \eta_{\mu\nu}. \quad (4.21)$$

4.3 O Grupo de de Sitter

O grupo das isometrias do hiperbolóide de de Sitter (bem como do de anti-de Sitter), isto é, o grupo das transformações que mantêm os pontos do hiperbolóide sobre o hiperbolóide, é o grupo que preserva a métrica $\eta = (+1, -1, -1, -1, s)$ do espaço \mathcal{H} , ou seja, o grupo $O(4, 1)$ (no caso de de Sitter) ou $O(3, 2)$ (no caso anti-de Sitter). O grupo de movimento da relatividade de de Sitter, portanto, será a componente de identidade de $O(4, 1)$, ou seja, o grupo de de Sitter $dS \equiv SO^+(4, 1)$ (no caso de uma constante cosmológica negativa, teríamos o grupo anti-de Sitter $AdS \equiv SO^+(3, 2)$ como grupo de movimento). Usando as coordenadas cartesianas do espaço \mathcal{H} , os geradores de ambos os

grupos $SO^+(4, 1)$ e $SO^+(3, 2)$ se escrevem

$$L_{AB} = H_{AC}\chi^C \frac{\partial}{\partial\chi^B} - H_{BC}\chi^C \frac{\partial}{\partial\chi^A}. \quad (4.22)$$

Interessa-nos, porém, saber a forma que estes geradores assumem no espaço de de Sitter (ou anti-de Sitter), e não apenas no espaço \mathcal{H} . Para tanto, usamos as coordenadas estereográficas definidas na seção anterior, que nos fornecem, em primeiro lugar, para $a, b < 4$

$$L_{ab} = H_{aC}\chi^C \frac{\partial}{\partial\chi^b} - H_{bC}\chi^C \frac{\partial}{\partial\chi^a} \quad (4.23)$$

$$= (\eta_{ac}\chi^c + H_{a4}\chi^4) \frac{\partial}{\partial\chi^b} - (\eta_{bc}\chi^c + H_{b4}\chi^4) \frac{\partial}{\partial\chi^a} \quad (4.24)$$

$$= \eta_{ac}\chi^c \frac{\partial}{\partial\chi^b} - \eta_{bc}\chi^c \frac{\partial}{\partial\chi^a}. \quad (4.25)$$

Aqui, usamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\chi^a} &= \frac{\partial x^b(\chi)}{\partial\chi^a} \frac{\partial}{\partial x^b} \\ &= \Omega_l^{-1}(\bar{\chi}^4) \frac{\partial\chi^b}{\partial\chi^a} \frac{\partial}{\partial x^b} \\ &= \Omega_l^{-1} \delta_a^b \frac{\partial}{\partial x^b} \\ &= \Omega_l^{-1} \frac{\partial}{\partial x^a}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

de modo que

$$L_{ab} = \eta_{ac} (\Omega_l x^c) \left(\Omega_l^{-1} \frac{\partial}{\partial x^b} \right) - \eta_{ac} (\Omega_l x^c) \left(\Omega_l^{-1} \frac{\partial}{\partial x^a} \right) \quad (4.27)$$

$$= \eta_{ac} x^c \frac{\partial}{\partial x^b} - \eta_{ac} x^c \frac{\partial}{\partial x^a} \quad (4.28)$$

$$= M_{ab}. \quad (4.29)$$

Portanto, os L_{ab} correspondem aos geradores de Lorentz (2.66). Isso mostra que os grupos de de Sitter $SO^+(4, 1)$ e anti-de Sitter $SO^+(3, 2)$ possuem o grupo de Lorentz $\mathcal{L} \equiv SO^+(3, 1)$ como subgrupo. Como este grupo encerra as transformações que mantêm a origem do espaço-tempo fixa, temos que, assim como no caso do grupo de Poincaré, o grupo de Lorentz é o subgrupo de isotropia dos grupos de de Sitter e anti-de Sitter. *A simetria de Lorentz portanto, é preservada na presença de constante cosmológica.*

Para os demais quatro geradores, temos

$$L_{4b} = H_{4C}\chi^C \frac{\partial}{\partial\chi^b} - H_{bC}\chi^C \frac{\partial}{\partial\chi^4}. \quad (4.30)$$

Usamos aqui

$$H_{4C}\chi^C = H_{44}\chi^4 = \mathbf{s}\chi^4 = \mathbf{s}l\Omega_l(\zeta - 1), \quad (4.31)$$

de modo que o primeiro membro de (4.30) se torna

$$\begin{aligned} H_{4C}\chi^C \frac{\partial}{\partial\chi^b} &= \mathbf{s}l\Omega_l(\zeta - 1)\Omega_l^{-1} \frac{\partial}{\partial x^b} \\ &= \mathbf{s}l(\zeta - 1) \frac{\partial}{\partial x^b}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\chi^4} &= \frac{\partial x^a(\chi)}{\partial\chi^4} \frac{\partial}{\partial x^a} \\ &= \frac{\partial}{\partial\chi^4} (\Omega_l^{-1}(\bar{\chi}^4)\chi^a) \frac{\partial}{\partial x^a} \\ &= \chi^a (-\Omega_l^{-2}) \frac{\partial}{\partial\chi^4} \Omega_l \left(\frac{1 - \bar{\chi}^4}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x^a} \\ &= x^a \Omega_l^{-1} \frac{1}{2l} \frac{\partial}{\partial x^a}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

de modo que o segundo membro de (4.30) se torna

$$\begin{aligned} H_{bC}\chi^C \frac{\partial}{\partial\chi^4} &= (\eta_{bc}\Omega_l x^c) \left(\frac{1}{2l} \Omega_l^{-1} x^a \frac{\partial}{\partial x^a} \right) \\ &= \frac{1}{2l} \eta_{bc} x^c x^a \frac{\partial}{\partial x^a}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Assim, temos enfim

$$\begin{aligned} L_{4b} &= \mathbf{s}l(\zeta - 1) \frac{\partial}{\partial x^b} - \frac{1}{2l} \eta_{bc} x^c x^a \frac{\partial}{\partial x^a} \\ &= \frac{\sigma^2}{4l} \frac{\partial}{\partial x^b} - \mathbf{s}l \frac{\partial}{\partial x^b} - \frac{1}{2l} \eta_{bc} x^c x^a \frac{\partial}{\partial x^a} \\ &= -\mathbf{s}l \frac{\partial}{\partial x^b} + \frac{1}{4l} (\sigma^2 \delta_b^a - 2\eta_{bc} x^c x^a) \frac{\partial}{\partial x^a} \\ &= -\mathbf{s}lP_b - \frac{1}{4l} K_b, \end{aligned} \quad (4.35)$$

ou, ainda,

$$\Pi_b \equiv \frac{L_{4b}}{-\mathbf{s}l} = P_b + \frac{\mathbf{s}}{4l^2} K_b, \quad (4.36)$$

onde identificamos os geradores das translações (2.64) e das transformações especiais conformes (2.70) no espaço de Minkowski. Estas transformações levam qualquer ponto do espaço de (anti-)de Sitter em qualquer outro [3], definido, portanto, a sua homogeneidade.

Neste ponto reparamos na diferença crucial entre o grupo de Poincaré e os grupos

de de Sitter e anti-de Sitter. Embora o grupo de isotropia (“rotações”) seja o mesmo em todos estes, o grupo de transitividade (“translações”) será diferente para cada um deles. Vemos, porém, que, tanto no caso de de Sitter quanto no caso anti-de Sitter, no limite de constante cosmológica nula (em que o raio de de Sitter diverge), escrevendo os geradores na forma apropriada, recuperamos as translações de Minkowski ($\Pi_a \rightarrow P_a$) e o grupo de de Sitter contrai-se para o grupo de Poincaré ($dS \rightarrow \mathcal{P}$).

Os grupos de de Sitter e anti-de Sitter, porém, são matematicamente mais tratáveis do que o grupo de Poincaré. Este último é um grupo afim, ou seja, um produto semi-direto entre um subgrupo ortogonal (\mathcal{L}) e um outro subgrupo invariante abeliano (T_4). Aqueles, por outro lado, são simplesmente grupos ortogonais, de modo que não possuem subgrupos invariantes e são, portanto, grupos simples. De fato, pode-se considerá-los matematicamente como versões do grupo de Lorentz com uma dimensão extra (do tipo espaço ou do tipo tempo, conforme o caso seja de Sitter ou anti-de Sitter).

4.4 O Caráter Quociente do Espaço de de Sitter

No capítulo anterior, vimos que o espaço de Minkowski pode ser definido como um quociente no sentido topológico. O mesmo vale para os espaços de de Sitter e anti-de Sitter, vez que estes também são espaços homogêneos, podendo ser identificados com as variedades correspondentes aos seus subgrupos de transitividade. Como estes dois espaços possuem o grupo de Lorentz como subgrupo de isotropia, eles podem então ser definidos respectivamente como o quociente do grupo de de Sitter e o do grupo anti-de Sitter pela relação de equivalência dada pelo grupo de Lorentz:

$$dS_R \equiv SO^+(4,1)/SO^+(3,1) \quad (4.37)$$

$$AdS_R \equiv SO^+(3,2)/SO^+(3,1). \quad (4.38)$$

Comparando estas definições com a do espaço de Minkowski

$$\mathcal{M} \equiv ISO^+(3,1)/SO^+(3,1), \quad (4.39)$$

vemos que os três espaços compartilham de fato de uma mesma natureza matemática em essência. O espaço de de Sitter, portanto, é matematicamente tão adequado quanto o de Minkowski para o papel de espaço-tempo físico na relatividade restrita.

4.5 Desvio Geodésico no Espaço de de Sitter

Nesta seção pretendemos demonstrar um resultado geométrico referente a uma propriedade intrínseca do espaço de de Sitter que ilustra de modo especial a sua semelhança e ao mesmo tempo a sua diferença crucial com relação ao espaço de Minkowski.

O desvio geodésico [49] é uma propriedade característica dos espaços curvos. Seja $\gamma_s(t)$ uma família de geodésicas parametrizadas pelo parâmetro t e distinguidas entre si pelo parâmetro s . Assim, $T \equiv \frac{\partial}{\partial t}$ será o campo vetorial tangente às geodésicas e $X \equiv \frac{\partial}{\partial s}$ será o campo vetorial que mede a separação entre estas. Esta família de geodésicas cobre uma subvariedade bidimensional sobre a variedade espaço-temporal, cujas coordenadas podem ser escolhidas naturalmente como sendo t e s .

Num espaço curvo (como é o caso de de Sitter), a separação medida por X não será necessariamente constante (em função de t). Medimos a sua taxa de mudança por meio da sua derivada covariante $D_T X$ com relação a T , que chamamos de *desvio geodésico*. A taxa de mudança desta quantidade, por sua vez, chamamos de *aceleração do desvio geodésico* $a \equiv D_T(D_T X)$.

As geodésicas de $\gamma_s(t)$ serão paralelas (num certo ponto de sua extensão, dado por um determinado valor de t) se a sua separação for constante, ou seja, se $D_T X = 0$. No caso da existência de uma aceleração de desvio a , porém, o valor de $D_T X$ deixará de ser nulo para valores subseqüentes de t e, portanto, as geodésicas passarão a se afastar ou se aproximar. Isto nunca acontece em espaços planos, onde a é sempre nula. A existência de tal desvio, ou seja, a falha de uma família de geodésicas inicialmente paralelas em se manterem paralelas, pode de fato ser pensada como uma definição de curvatura.

Vamos então calcular a expressão para a aceleração do desvio geodésico válida para as métricas de de Sitter e anti-de Sitter. É importante ressaltar que nenhuma restrição está sendo feita com relação ao tipo de geodésicas em questão — tipo tempo, tipo espaço ou tipo luz —, razão pela qual o parâmetro t ainda não foi identificado com o tempo próprio nem o campo T com a quadrivelocidade.

A expressão para a aceleração do desvio geodésico em termos do tensor de Riemann é [49]

$$a^\mu = -R_{\sigma\rho\nu}{}^\mu X^\rho T^\sigma T^\nu. \quad (4.40)$$

Usando o tensor de Riemann do espaço de de Sitter (4.8), temos

$$\begin{aligned} a^\mu &= \frac{\Lambda}{3} (\delta_\rho^\mu g_{\nu\sigma} - \delta_\sigma^\mu g_{\nu\rho}) X^\rho T^\sigma T^\nu \\ &= \frac{\Lambda}{3} (X^\mu T_\nu T^\nu - T^\mu X_\nu T^\nu). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Aqui podemos escolher uma parametrização tal que $X_\nu T^\nu$ se anule em todos os pontos [49]. Temos, então,

$$a^\mu = \frac{\Lambda}{3} T^2 X^\mu. \quad (4.42)$$

Vemos, portanto, que a aceleração do desvio geodésico no espaço de de Sitter aumenta linearmente em função da distância entre as geodésicas. Além disso, notamos um fato de interesse: para raios de luz ($T^2 = 0$), o desvio geodésico é nulo, o mesmo não acontecendo para partículas massivas ($T^2 \neq 0$). Em outras palavras, partículas massivas, que seguem

geodésicas do tipo tempo, irão “sentir” a curvatura do espaço de de Sitter e tender a desviar umas das outras, ao passo que raios de luz não irão “sentir” esta curvatura e seguirão geodésicas que não se desviam. Em particular, um experimento com raios de luz em princípio não seria capaz de distinguir entre os espaços de Minkowski e de Sitter (pelo menos não por meio do desvio de suas trajetórias geodésicas), apesar de que um experimento com partículas massivas poderia efetuar esta distinção. Podemos também entender esta propriedade geométrica do espaço de de Sitter como decorrente de a sua métrica ser conformalmente plana, pois, como vimos no segundo capítulo, a simetria conforme preserva a estrutura do cone de luz.

Capítulo 5

Conclusões

O espaço de de Sitter é usualmente interpretado como solução da equação de campo de Einstein sem fontes na presença de uma constante cosmológica Λ . De fato, é praxe nos livros-texto de gravitação apresentar tal espaço nas seções ligadas às soluções da equação de Einstein. Em geral, o termo cosmológico é introduzido à mão na equação de campo, sendo a sua origem atualmente um dos mais intrigantes problemas da física. Recentemente, por conta de novos fatos experimentais (como a aceleração observada na taxa de expansão do universo), o interesse na constante cosmológica se tem renovado e diversas tentativas de explicar a sua origem ou de imitar o seu efeito têm despontado na literatura, muitas das quais fazem uso de campos escalares munidos de potenciais apropriadamente escolhidos. O objetivo desta dissertação foi propor uma explicação alternativa para a origem de Λ , e com isso uma nova interpretação para o espaço de de Sitter.

As motivações para o nosso trabalho se baseiam em quatro pontos fundamentais: (1) a evidência cosmológica em favor de $\Lambda > 0$; (2) a aparente violação experimental da relatividade restrita usual em fenômenos de altas energias; (3) o argumento teórico advindo da teoria quântica em favor de uma escala de comprimento invariante na cinemática de sistemas físicos na escala de Planck e (4) o fato de que o espaço e o grupo de de Sitter constituem generalizações matemáticas naturais dos seus correspondentes einsteinianos (\mathcal{M} e \mathcal{P}) no mesmo sentido em que estes constituem generalizações matemáticas naturais dos seus correspondentes galileanos.

Em termos de relatividade restrita, portanto, os dados cosmológicos apontam no sentido de um espaço-tempo intrinsecamente curvo, caracterizado por um parâmetro invariante l ligado à constante cosmológica. A teoria quântica, por outro lado, aponta no sentido da invariância do comprimento de Planck l_P . Isto significa que o grupo de Poincaré (que não admite um comprimento invariante) deva de algum modo falhar na descrição da cinemática tanto na escala cosmológica quanto na escala de Planck. Algum outro grupo, portanto, deve governar a cinemática em tais escalas. A escolha natural tanto do ponto de vista físico quanto matemático é o grupo de de Sitter, que representa

as simetrias de um espaço-tempo vazio com termo cosmológico positivo e generaliza algebricamente de modo natural o grupo de Poincaré modificando apenas a sua seção translacional — mantendo, portanto, intacta a simetria de Lorentz, intimamente ligada ao conceito fundamental de causalidade. Tal substituição traz como consequência uma mudança também nos conceitos de energia e momento (grandezas ligadas à simetria translacional) — conservando, por outro lado, os conceitos de momento angular e spin (ligados à simetria de Lorentz).

Com base nestes argumentos, estudamos neste trabalho os fundamentos geométricos, algébricos e cinemáticos de uma da relatividade restrita baseada na simetria de de Sitter. A relação entre esta e as teorias cinemáticas clássicas da física (newtoniana e einsteniana) pode ser compreendida através da relação entre os seus grupos de movimento, a qual é formalmente expressa por meio dos processos de contração e expansão de grupos propostos por Wigner e Inönü. A relatividade restrita usual, baseada no grupo de Poincaré, pode ser vista como descrevendo as implicações sofridas pela relatividade newtoniana devidas à introdução de uma escala de velocidade fundamental no grupo de Galileu. Inversamente, esta última pode ser obtida a partir do grupo de Poincaré tomando-se o limite formal em que tal escala de velocidade tende a infinito (limite não-relativístico). Pode-se, de modo análogo, dizer que a relatividade restrita de de Sitter descreve as implicações sofridas pela relatividade newtoniana devidas à introdução de *duas* escalas invariantes, uma de velocidade e uma de comprimento. No limite formal em que a escala de comprimento tende a infinito, o grupo de de Sitter contrai-se para o grupo de Poincaré, no qual apenas a escala de velocidade se faz presente. Num segundo limite, em que a escala de velocidade tende a infinito, recupera-se o grupo de Galileu.

Caso se insista em interpretar o espaço de de Sitter como sendo produzido dinamicamente por meio de fontes materiais, como por exemplo um fluido, termina-se com equações de estado não-físicas, envolvendo pressões negativas. Esta é uma indicação clara de que a constante cosmológica não deve estar conectada a qualquer tipo de fonte por meio de equações de campo gravitacionais. Apesar de, tanto o espaço de Minkowski quanto o de de Sitter serem evidentemente soluções da equação de Einstein, ambos são mais fundamentais do que esta equação no sentido que, como espaços quocientes e maximalmente simétricos, ambos podem ser construídos matematicamente independentemente de qualquer teoria de gravitação. Por conseguinte, tais espaços devem ser interpretados como panos-de-fundo fundamentais sobre os quais qualquer teoria de campos pode ser construída, incluindo a gravitação. Do ponto de vista cinemático, a única diferença entre estes dois espaços encontra-se nos seus respectivos grupos de movimento. Caso a cinemática verdadeira dos fenômenos naturais seja aquela determinada pelo grupo de de Sitter, como as evidências atuais parecem indicar, então o espaço-tempo fundamental sobre o qual tais fenômenos se dão será o espaço de de Sitter, com a constante cosmológica surgindo naturalmente como consequência desta cinemática. De acordo com essa

proposta, portanto, a solução de de Sitter deveria passar a ser estudada nos capítulos iniciais dos livros, e não no capítulo de soluções da equação de Einstein, como é feito usualmente.

Referências Bibliográficas

- [1] R. Aldrovandi, J. P. Beltrán Almeida & J. G. Pereira, *de Sitter special relativity*, *Class. Quant. Grav.* **24**, 1385–1404 (2007) (arXiv:gr-qc/0606122).
- [2] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972), pp. 613–616.
- [3] S. Weinberg, *Op. Cit.*, pp. 375–404.
- [4] S. W. Hawking & G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973), pp. 124–134.
- [5] A. Einstein, “Cosmological Considerations on the General Theory of Relativity” in: H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski & H. Weyl, *The Principle of Relativity* (Methuen, London, 1923), tradução por W. Perrett & G. B. Jeffery do original em alemão: *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie*, Sitz. d. Preuß. Akad. d. Wiss. (Berlin) 142–152 (1917).
- [6] S. M. Carroll, *Why is the Universe Accelerating?*, *AIP Conf. Proc.* **743**, 16–32 (2004) (arXiv:astro-ph/0310342v2).
- [7] S. M. Carroll, *The Cosmological Constant*, *Living. Rev. Rel.* **4**:1 (2001) (disponível em <http://relativity.livingreviews.org>).
- [8] J. P. Ostriker & P. J. Steinhardt, *Cosmic Concordance* (1995) (arXiv:astro-ph/9505066).
- [9] A. Riess et al., *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*, *AJ* **116**, 1009–1038 (1998) (disponível em <http://www.iop.org/EJ/journal/aj>).
- [10] S. Perlmutter et al., *Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae*, *ApJ* **517**, 565–586 (1999) (disponível em <http://www.iop.org/EJ/home/AP>).
- [11] G. Efstathiou et al., *Evidence for a non-zero Λ and a low matter density from a combined analysis of the 2dF Galaxy Redshift Survey and cosmic microwave background anisotropies*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **330**, L29–L35 (2002) (disponível em <http://dspace.anu.edu.au>).

- [12] M. Tegmark et al., *Cosmological parameters from SDSS and WMAP*, Phys. Rev. D **69**, 103501 (2004) (arXiv:astro-ph/0310723v2).
- [13] A. Riess et al., *Type Ia Supernova Discoveries at $z > 1$ from the Hubble Space Telescope: Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolution*, ApJ **607** 665–687 (2004) (disponível em <http://www.iop.org/EJ/home/AP>).
- [14] A. Clocchiatti et al., *Hubble Space Telescope and Ground-based Observations of Type Ia Supernovae at Redshift 0.5: Cosmological Implication*, ApJ **642**, 1–21 (2006) (disponível em <http://www.iop.org/EJ/journal/apj>).
- [15] P. Astier et al., *The Supernova Legacy Survey: measurement of Ω_M , Ω_Λ and w from the first year data set*, A&A **447**, 31–48 (2006) (disponível em <http://www.aanda.org>).
- [16] W. M. Wood-Vasey et al., *Observational Constraints on the Nature of Dark Energy: First Cosmological Results from the ESSENCE Supernova Survey*, ApJ **666**, 694–715 (2007) (disponível em <http://www.iop.org/EJ/journal/apj>).
- [17] R. Rebolo et al., *Cosmological parameter estimation using Very Small Array data out to $l = 1500$* , Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **353**, 747–759 (2004) (disponível em <http://eprints.ucl.ac.uk/>).
- [18] J. Dunkley et al., *Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe Observations: Likelihoods and Parameters from WMAP Data*, ApJS **180**, 306–329 (2009) (disponível em <http://www.iop.org/EJ/journal/apjs>).
- [19] K. Greisen, *End to the Cosmic-Ray Spectrum?*, Phys. Rev. Lett. **16**, 748–750 (1966).
- [20] G. T. Zatsepin & V. A. Kuz'min, *Upper Limit of the Spectrum of Cosmic Rays*, J. Exp. Theor. Phys. Lett. **4**, 78–80 (1966) (disponível em <http://www.jetpletters.ac.ru>).
- [21] N. Hayashida et al., *Observation of a Very Energetic Cosmic Ray Well Beyond the Predicted 2.7 K Cutoff in the Primary Energy Spectrum*, Phys. Rev. Letters **73**, 3491–3494 (1994) (disponível em www-akeno.icrr.u-tokyo.ac.jp).
- [22] M. Takeda et al., *Extension of the Cosmic-Ray Energy Spectrum Beyond the Predicted Greisen-Zatsepin-Kuz'min Cutoff*, Phys. Rev. Letters **81**, 1163–1166 (1998) (disponível em www-akeno.icrr.u-tokyo.ac.jp).
- [23] J. Albert et al. (MAGIC Collaboration), J. Ellis, N. E. Mavromatos, D. V. Nanopoulos, A. S. Sakharov & E. K. G. Sarkisyan, *Probing quantum gravity using*

- photons from a flare of the active galactic nucleus Markarian 501 observed by the MAGIC telescope*, Phys. Lett. B **668**, 253–257 (2008) (arXiv:0708.2889v3).
- [24] G. Amelino-Camelia, *Relativity in space-times with short-distance structure governed by an observer-independent (Planckian) length scale*, Int. J. Mod. Phys. **D11**, 35–60 (2002) (arXiv:gr-qc/0012051v2).
- [25] J. Magueijo & L. Smolin, *Lorentz invariance with an invariant energy scale*, Phys. Rev. Lett. **88**, 190403 (2002) (arXiv:hep-th/0112090v2);
- [26] H. Minkowski, “Space and Time” in: H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski & H. Weyl, Op. Cit., tradução por W. Perrett & G. B. Jeffery do original em alemão: *Raum und Zeit*, 80. Versammlung Deutscher Naturforscher (Köln, 1908) (publicado em *Physikalische Zeitschrift* **10**, 104–111 (1909) e em *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **18**, 75–88 (1909)) (disponível em <http://de.wikisource.org>).
- [27] H. Poincaré, “The Principles of Mathematical Physics” in: *Congress of Arts and Science, Universal Exposition, St. Louis, 1904*, Vol. 1 (Houghton, Mifflin & company, Boston & New York, 1905), pp. 606–622 (disponível em <http://www.archive.org>), tradução por George Bruce Halsted do original em francês: *L’état actuel et l’avenir de la physique mathématique*, Bulletin des sciences mathématiques **28** (2), 302–324 (1904).
- [28] A. Einstein, “On the Electrodynamics of Moving Bodies” in: H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski & H. Weyl, Op. Cit. (disponível em <http://www.fourmilab.ch>), tradução por W. Perrett & G. B. Jeffery do original em alemão: *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Ann. Phys. (Leipzig) **17**, 891–921 (1905).
- [29] I. Newton, “Axioms, or Laws of Motion. — Corollary V.” in: *The Mathematical Principles of Natural Philosophy* (Daniel Adee, New York, 1846), pp. 88–89 (disponível em <http://www.archive.org>), tradução por Adrew Motte do original em latim: *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (London, 1687).
- [30] G. Galilei, *Dialogo sopra i Due Massimi Sistemi del Mondo: Tolemaico e Copernicano*, Giornata Seconda (Firenze, 1632) (disponível em <http://it.wikisource.org>).
- [31] R. Aldrovandi & J. G. Pereira, *An Introduction to Geometrical Physics* (World Scientific, Singapura, 1995), p. 355.
- [32] E. İnönü & E. P. Wigner, *On the Contractions of Groups and their Representations*, Proc. Natl. Acad. Sci. **39** (6), 510–524 (1953) (disponível em <http://www.pnas.org>).

- [33] F. J. Dyson, *Missed opportunities*, Bull. Am. Math. Soc. **78**, 635–652 (1972) (disponível em <http://www.ams.org/bull>).
- [34] S. Cacciatori, V. Gorini & A. Kamenshchik, *Special Relativity in the 21st century*, Ann. Phys. **17** (9-10), 728–768 (2008) (arXiv:0807.3009).
- [35] H. Bacry & J.-M. Lévy-Leblond, *Possible kinematics*, J. Math. Phys. **9**, 1605–1614 (1968).
- [36] R. Aldrovandi & J. G. Pereira, Op. Cit., p. 264.
- [37] Ibid., p. 270.
- [38] I. Newton, “Definitions. — Scholium.” in: Op. Cit., pp. 77–82.
- [39] J. C. Maxwell, *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, Philos. Trans. Roy. Soc. (London) **155** 459–512 (1865) (disponível em <http://www.archive.org>).
- [40] S. Weinberg, Op. Cit., p. 17.
- [41] R. Aldrovandi & J. G. Pereira, Op. Cit., p. 262.
- [42] J. F. Cornwell, *Group Theory in Physics — An Introduction* (Academic Press, Cambridge, 1997), p. 33.
- [43] R. Aldrovandi & J. G. Pereira, Op. Cit., p. 594
- [44] Ibid., p. 48.
- [45] Ibid., pp. 40–42.
- [46] W. de Sitter, *On Einstein’s theory of gravitation and its astronomical consequences*, Second Paper, §30, Mon. Not. R. Astron. Soc. **77**, 181–184 (1916) (disponível em <http://articles.adsabs.harvard.edu>).
- [47] R. Aldrovandi, J. P. Beltrán Almeida & J. G. Pereira, *A Singular Conformal Spacetime*, J. Geom. Phys. **56**, 1042–1056 (2006) (arXiv:gr-qc/0403099v2).
- [48] R. Aldrovandi & J. G. Pereira, Op. Cit., pp. 642–644.
- [49] R. Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, Chicago, 1984), pp. 46–47.