



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.002/11

SOBRE INTERFERÊNCIA E DISCOS DE ACREÇÃO EM ESPAÇOS CURVOS

Raissa Fernandes Pessoa Mendes

Orientador

Prof. Dr. George Emanuel Avraam Matsas

Março de 2011

Agradecimentos

Dedicado a Dinah, minha mãe, meu maior exemplo de força e amor, com o coração cheio de saudade.

Agradeço ao Prof. George Matsas, pela orientação dedicada e pelo exemplo inspirador. Agradeço à minha família, pelo amor, apoio e presença constantes em minha vida; aos amigos, que me acolheram tão prontamente e com tanto carinho em São Paulo; a Daniel, meu namorado, pela grande amizade e companheirismo.

Agradeço à Fapesp pelo apoio financeiro.

Agradeço ainda à Mãe Natureza, da qual somos todos partes, e que nos dá a bênção de, das mais diversas formas, penetrar um pouco em seu Mistério.

Resumo

A Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos fornece um arcabouço teórico consistente para o estudo de diversos fenômenos em que o caráter quântico dos campos e a curvatura clássica do espaço-tempo são importantes, mas em que a natureza quântica da gravitação não exerce um papel relevante. Em particular, a emissão de radiação por uma fonte nas imediações de um buraco negro tem sido analisada, nesse contexto, com perspectivas diversas, dentre as quais está a busca de uma compreensão detalhada dos processos de emissão por discos de acreção e da influência da curvatura espaço-temporal sobre tais processos. De fato, a emissão de radiação por discos de acreção é uma das principais evidências observacionais da existência de buracos negros. Além da emissão térmica de *bremstrahlung* devida a efeitos de colisões locais, o movimento global de cargas individuais ao redor do buraco negro também as faz irradiar, efeito por vezes chamado de radiação síncrotron gravitacional. Nesta dissertação, nós estendemos a análise da radiação devida a uma fonte, considerando um conjunto de fontes em rotação ao redor de um buraco negro. Discutimos a contribuição desse efeito para discos de acreção e investigamos os processos de interferência e como eles são modificados pela curvatura espaço-temporal.

Palavras Chaves: teoria quântica de campos; radiação síncrotron gravitacional; discos de acreção; interferência.

Áreas do conhecimento: Teoria de Campos; Gravitação e Cosmologia.

Abstract

Quantum Field Theory in Curved Spacetimes provides a theoretical framework for the investigation of phenomena in which the quantum nature of fields and the classical spacetime curvature are important but in which the quantum nature of gravitation does not play a crucial role. In particular, radiation emission by a source in the vicinity of a black hole has been analyzed in this context with a number of motivations, one of which is to fully understand radiation emission processes by accretion discs and how they are modified by the nontrivial curvature of the black hole spacetime. In fact, radiation emission by accretion discs is one of the main observational evidences of the existence of black holes. Besides thermal *bremstrahlung* emission due to local collision effects, the global motion of individual charges around a black hole also causes them to radiate; an effect often called gravitational synchrotron radiation. In this thesis, we extend the analysis of radiation due to one source by considering an ensemble of sources orbiting a black hole. We discuss the contribution of this effect to accretion discs, and investigate the interference processes that take place and how they are modified by space-time curvature.

Sumário

1	Introdução	1
2	Teoria Quântica de Campos em Espaços-tempos Estáticos	5
2.1	Quantização do campo escalar	6
2.2	Acoplamento com uma corrente clássica e emissão de radiação	9
3	Espaço-tempo de Minkowski	11
3.1	Radiação emitida por uma fonte escalar em movimento circular . . .	12
3.2	Radiação emitida por duas fontes escalares em movimento circular . .	17
3.3	Radiação emitida por N fontes escalares em movimento circular . . .	24
3.3.1	Configuração neutra	24
3.3.2	Configuração carregada	29
3.3.3	Análise gráfica	30
4	Espaço-tempo de Schwarzschild	33
4.1	Modos normais	33
4.1.1	Formas assintóticas	34
4.1.2	Regime de baixas frequências	37
4.1.3	Regime de altas frequências	39
4.2	Radiação emitida por uma fonte escalar em movimento circular . . .	43
4.2.1	Radiação cíclotron	45
4.2.2	Radiação síncrotron	47
4.3	Radiação emitida por duas fontes escalares em movimento circular . .	52
4.4	Radiação emitida por N fontes escalares em movimento circular . . .	58
4.4.1	Configuração neutra	58

4.4.2	Configuração carregada	59
4.4.3	Análise gráfica	60
5	Discussão e conclusões	64
A	Emissão de radiação escalar: alguns resultados em Teoria Clássica de Campos	67
B	Considerações sobre radiação cíclotron no Eletromagnetismo	70
C	Órbitas circulares no espaço-tempo de Schwarzschild	74
	Referências	77

Capítulo 1

Introdução

A Teoria Quântica de Campos, de um lado, e a Relatividade Geral, de outro, se estabeleceram, nas últimas décadas, como teorias-padrão em Física devido à sua consistência matemática, dentro de certos limites, e ao seu sucesso quando confrontadas com dados observacionais e experimentais. Contudo, ainda hoje permanece em aberto a questão da construção de uma teoria quântica para a gravitação, e muitos problemas, conceituais bem como técnicos, desafiam as propostas existentes. De fato, uma teoria completa de gravitação quântica, necessária para a descrição de fenômenos cuja escala seja comparável à escala de Planck ($l_P = 10^{-33}\text{cm}$), deve desafiar a nossa intuição sobre o espaço-tempo, uma vez que essa estrutura, tida em geral como simples “pano de fundo”, passaria a ser discretizada e ganharia uma nova dinâmica.

Na ausência de uma teoria consistente e satisfatória de gravitação quântica, é razoável trabalhar, exceto nas vizinhanças de singularidades, com uma teoria semiclássica em que a métrica do espaço-tempo seja tratada classicamente, mas que seja acoplada a campos de matéria descritos quanticamente. Assim, a Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos (TQCEC) permite a abordagem de problemas em que a gravitação e a natureza quântica dos campos são de interesse, mas em que a natureza quântica da gravitação é pouco relevante. A TQCEC começou a ser desenvolvida na década de 60, possibilitando, então, o estudo da criação de partículas em universos em expansão [1]. Uma das previsões mais impressionantes desse tipo de abordagem é o *efeito Hawking*, de evaporação de buracos negros, descoberto em 1974 [2, 3]: buracos negros, objetos tão densos que deles nenhuma

informação clássica pode escapar, emitem radiação com um espectro de corpo negro, com temperatura inversamente proporcional à sua massa ($T_H = \hbar c^3 / 8\pi k_B G M$, como medida por observadores estáticos no infinito)*.

A TQCEC fornece um arcabouço teórico para o estudo de diversos fenômenos de interesse. Dentre eles, a emissão de radiação por uma fonte nas proximidades de um buraco negro tem sido analisada em vários contextos e com perspectivas diversas. Uma motivação recorrente (ver [4, 5, 6], por exemplo), ligada à Astrofísica, é a de compreender os detalhes dos processos de emissão pela matéria em volta de um buraco negro, tendo em vista a identificação e caracterização apropriada desse tipo de objeto. Em particular, é necessário um bom entendimento teórico dos processos de emissão para que se possa fazer uma análise adequada dos dados cada vez mais precisos de telescópios, bem como dos dados esperados de experimentos como LISA, LIGO e VIRGO, projetados para a detecção de ondas gravitacionais.

As características observacionais de buracos negros dependem basicamente do ambiente que os cerca. Estima-se que um buraco negro no meio interestelar emita de 10^{29} a 10^{35} ergs/s de radiação eletromagnética concentrada na região óptica do espectro. Para sistemas binários de buracos e estrelas, a taxa de emissão esperada é de aproximadamente 10^{37} erg/s em raios-X e, para um buraco negro supermassivo no centro de uma galáxia, ela é de aproximadamente 10^{45} ergs/s em ultravioleta e azul [7]. Em todos esses casos, o fenômeno físico de interesse é a acreção de gás do meio interestelar ou de ventos estelares, e a consequente emissão de radiação. A radiação, aqui, é em grande parte térmica: a viscosidade aquece o gás, fazendo que ele irradie, efeito geralmente intensificado pela presença de campos magnéticos. Contudo, a física de discos de acreção é complexa, envolvendo de forma intrincada conceitos de Hidrodinâmica e Eletromagnetismo, por exemplo.

Além da emissão de radiação devido ao efeito de colisões locais, o movimento global das partículas ao redor do buraco negro também as faz irradiar. Se as partículas são carregadas, ondas eletromagnéticas são emitidas, e, para todo tipo de matéria, há emissão de ondas gravitacionais. O estudo desse tipo de processo no contexto da Relatividade Geral teve início nos anos 70, quando Misner e seus colaboradores iniciaram um programa de *radiação síncrotron gravitacional* [8, 9]. Sua motivação era fornecer um modelo capaz de explicar os dados de ondas gravitacionais supostamente obtidos por Weber [11]. O modelo de radiação síncrotron

*Esse resultado é válido para buracos negros com carga e momento angular desprezíveis.

era capaz de explicar diretamente a anisotropia da radiação esperada para tornar plausíveis aqueles dados. Desde então, a emissão de radiação por uma carga em movimento ao redor de um buraco negro tem sido investigada em diversas situações de interesse e com motivações variadas, usando abordagens clássicas e quânticas.

Neste trabalho, buscamos estender a análise da emissão de radiação de *uma partícula* para *um conjunto de partículas* em rotação ao redor de um buraco negro, no contexto da TQCEC, com o intuito de nos aproximarmos mais da situação física de interesse, de discos de matéria ionizada. A radiação, aqui, será descrita por um campo escalar real não massivo. A análise do campo escalar, além de tecnicamente mais simples, se justifica por capturar muitas das características básicas do caso da emissão de ondas eletromagnéticas ou gravitacionais, com a exceção óbvia daquelas diretamente relacionadas ao spin. Na aproximação utilizada aqui, consideramos que os campos habitam um espaço-tempo fixo, não levando em conta a contribuição deles próprios para a gravitação. Nos casos em que efeitos de *backreaction* são importantes, pode-se utilizar a equação semiclássica de Einstein, $G_{\mu\nu} = 8\pi\langle\hat{T}_{\mu\nu}\rangle$, para calculá-los. Nela, o valor esperado do operador tensor de energia-momento do campo faz o papel de fonte.

No estudo da emissão de radiação por um conjunto de partículas, a interferência surge como um fenômeno de grande importância. Da Teoria Eletromagnética, sabemos que uma carga em movimento circular uniforme irradia ondas eletromagnéticas, uma vez que está acelerada. Duas fontes, colocadas na mesma órbita, em geral emitem uma potência ainda maior. Contudo, no limite do contínuo, quando temos um aro carregado em rotação, a corrente é estacionária (regime da Magnetostática) e não deve haver emissão de radiação. Se estamos interessados em um disco de material ionizado, composto de um número finito mas muito grande de partículas, é importante analisar se a potência irradiada por essa configuração é significativa e em que situações isso acontece. Mas ainda, gostaríamos de entender os detalhes da interferência e investigar como ela é influenciada pela curvatura do espaço-tempo.

Dessa forma, o estudo, neste trabalho, da radiação emitida por um conjunto de partículas em rotação ao redor de um buraco negro, além de possibilitar algumas discussões sobre discos de acreção, permite desenvolver a nossa intuição sobre a interferência e analisá-la quando levamos em conta a curvatura e a topologia não-triviais do espaço-tempo de um buraco negro.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: no Capítulo 2, apresentamos

em linhas gerais o procedimento de quantização do campo escalar real sem massa em um espaço-tempo globalmente hiperbólico e estático. Introduzimos também o acoplamento do campo com uma corrente semiclassica e apresentamos os observáveis que serão de interesse na análise seguinte. No Capítulo 3, estudamos o problema da radiação emitida por um conjunto de fontes escalares em rotação no espaço-tempo de Minkowski com gravitação Newtoniana: primeiro tratamos o caso de uma única carga em movimento circular e, então, generalizamos para o caso de duas fontes e de um conjunto de partículas dispostas em um anel. Uma vez compreendido o problema em espaços planos, no Capítulo 4 voltamos a nossa atenção para o problema da emissão de radiação por um conjunto de partículas em rotação no espaço-tempo de Schwarzschild, destacando a influência da geometria espaço-temporal sobre a interferência. Por fim, no Capítulo 5, fazemos algumas discussões e considerações finais.

Nota: Nesta dissertação, utilizaremos unidades naturais, $\hbar = c = G = k = 1$ e assinatura $(+ - - -)$ da métrica.

Capítulo 2

Teoria Quântica de Campos em Espaços-tempos Estáticos

No espaço-tempo de Minkowski, o procedimento padrão de quantização consiste em se decompor o campo em componentes de frequência positiva e negativa e identificar os coeficientes dessa expansão com operadores de criação e aniquilação de partículas, que obedecem a relações de comutação bem definidas. De fato, a simetria do espaço-tempo de Minkowski por transformações de Poincaré permite escolher como espaço de Hilbert, \mathcal{H} , as soluções de frequência positiva que surgem naturalmente da invariância da teoria por translações temporais. Contudo, em um espaço-tempo curvo arbitrário, existe uma grande liberdade na escolha de \mathcal{H} e não há, em geral, um critério (como a invariância de Poincaré) que permita uma escolha privilegiada e uma forma natural de decompor o campo. Como consequência, os conceitos de vácuo e de partículas, que aparecem naturalmente no espaço-tempo de Minkowski, podem ter pouco ou nenhum significado físico em um *background* curvo arbitrário*.

Contudo, um espaço-tempo globalmente hiperbólico[†] dotado de um campo de

*Ainda assim, é possível definir de forma consistente uma teoria quântica de campos em espaços-tempos curvos causalmente bem comportados. No caso geral, não-estacionário, isso precisa ser feito, contudo, por meio de uma construção algébrica que não recorra a uma base privilegiada de auto-funções para a expansão do campo. Não há, também, uma noção privilegiada de partículas na teoria assim definida (ver [14], por exemplo).

[†]Um espaço-tempo $(M, g_{\mu\nu})$ que possui uma superfície de Cauchy Σ é dito globalmente hiperbólico. Essa propriedade implica em uma estrutura causal bem definida para o espaço-tempo, uma vez que toda a sua história pregressa e futura pode ser conhecida a partir das condições dadas em Σ [29].

Killing[‡] tipo tempo global admite uma escolha preferencial de vácuo, e a quantização dos campos nesse espaço-tempo pode ser conduzida de forma análoga à quantização usual em Minkowski (ver [13, 14], por exemplo). Neste capítulo, trataremos, portanto, da quantização do campo escalar real, linear e não massivo em um espaço-tempo globalmente hiperbólico e estático e da descrição, no contexto da TQCEC, da emissão de radiação por uma fonte semiclássica acoplada minimamente ao campo.

2.1 Quantização do campo escalar

Em um espaço-tempo globalmente hiperbólico, estático e assintoticamente plano descrito pelo elemento de linha

$$ds^2 = f(\mathbf{x})dt^2 - h_{ij}(\mathbf{x})dx^i dx^j, \quad (2.1)$$

a equação de Klein-Gordon sem massa obtida através do procedimento de acoplamento mínimo com o campo gravitacional é dada por

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi = 0. \quad (2.2)$$

Essa equação pode ser derivada da densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \sqrt{fh} \left(\frac{1}{2} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi \right), \quad (2.3)$$

onde $h \equiv \det(h_{ij})$.

Como observado anteriormente, nesta dissertação trataremos a radiação como um campo escalar real não massivo. Notamos que, no calibre de Lorenz ($\nabla_\mu A^\mu = 0$), a equação dinâmica para o potencial A^μ se escreve como $\square A^\mu = 0$. A semelhança entre a Eq. (2.2) e a equação para o potencial eletromagnético sugere a interpretação do campo escalar como um “fóton sem spin”, ou seja, sugere que o campo escalar possa codificar muitas das características básicas do caso eletromagnético (e gravitacional), sem as complicações técnicas advindas do spin e da liberdade de calibre. É com essa motivação em mente que prosseguimos o estudo desse campo.

[‡]Para que um campo vetorial ξ seja dito um campo de Killing, deve satisfazer a equação $\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0$. As curvas integrais dos campos assim definidos são isometrias no espaço-tempo, ou seja, curvas em que a métrica se mantém constante.

A densidade de momento canonicamente conjugada ao campo ϕ é definida como $\pi(x) \equiv \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}$. Usando a Eq. (2.3), ela pode ser escrita como

$$\pi(x) = \sqrt{\hbar f^{-1}}\dot{\phi}(x). \quad (2.4)$$

Dadas duas soluções, u_a e u_b , da Eq. (2.2), pode-se definir a densidade de corrente de Klein-Gordon como

$$J^\mu[u_a, u_b](x) \equiv u_a^*(x)\nabla^\mu u_b(x) - u_b(x)\nabla^\mu u_a^*(x). \quad (2.5)$$

Como essa quantidade é conservada, ou seja, $\nabla_\mu J^\mu[u_a, u_b](x) = 0$, podemos associar a ela um produto interno que seja independente do tempo, o que pode ser verificado por meio do teorema de Gauss. Esse produto interno (de Klein-Gordon) é dado por

$$(u_a, u_b)_{KG} \equiv \imath \int_{\Sigma_t} d\Sigma_t n_\mu J^\mu[u_a, u_b], \quad (2.6)$$

onde Σ_t é a superfície tipo-espaço definida por t constante e n_μ é um vetor unitário normal à hipersuperfície Σ_t e que aponta para o futuro. Em termos da métrica (2.1), $n^\mu = \sqrt{f^{-1}}(\partial_t)^\mu$ e $d\Sigma_t = \sqrt{\hbar}d^3\mathbf{x}$.

Em termos das densidades de momento π_a e π_b conjugadas às soluções u_a e u_b , o produto interno de Klein-Gordon assume a forma

$$(u_a, u_b)_{KG} = \imath \int_{\Sigma_t} d^3\mathbf{x} [u_a^*(x)\pi_b(x) - \pi_a^*(x)u_b(x)]. \quad (2.7)$$

O produto interno (2.6) permite dividir o espaço de soluções da Eq. (2.2) em soluções de norma positiva e negativa[§]; em outras palavras, existe um conjunto completo $\{u_i\}$ de modos que satisfazem a Eq. (2.2) e são ortonormais pelo produto interno de Klein-Gordon, ou seja, satisfazem

$$(u_i, u_j)_{KG} = \delta_{ij}, \quad (u_i^*, u_j^*)_{KG} = -\delta_{ij}, \quad (u_i, u_j^*)_{KG} = 0. \quad (2.8)$$

O campo ϕ pode expandido, portanto, como

$$\phi(x) = \sum_i [a_i u_i(x) + a_i^\dagger u_i^*(x)]. \quad (2.9)$$

O índice i representa, aqui, o conjunto de números quânticos necessários para se caracterizar completamente os modos. O procedimento de quantização canônica,

[§]Ver [14] para uma discussão em um contexto mais geral.

adotado aqui, consiste em associar às quantidades ϕ e π , que caracterizam o espaço de fase clássico, operadores $\hat{\phi}$ e $\hat{\pi}$ que satisfazem às seguintes relações de comutação a tempo constante:

$$[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\phi}(t, \mathbf{x}')] = [\hat{\pi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{x}')] = 0, \quad (2.10)$$

$$[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{x}')] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.11)$$

Devido à ortonormalidade dos modos pelo produto interno de Klein-Gordon, obtêm-se as relações de comutação usuais para os operadores a_i e a_i^\dagger :

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad (2.12)$$

e demais comutadores nulos. Há uma ambiguidade, contudo, na construção precedente [15], uma vez que existem outros conjuntos completos de modos ortonormais que também são bases possíveis para a expansão do campo. Como discutido anteriormente, existe, no espaço-tempo de Minkowski, um conjunto natural de modos normais, associados à simetria desse espaço-tempo por transformações de Poincaré. De fato, os modos normais naturais em Minkowski são autofunções do vetor de Killing ∂_t com autovalores $-i\omega$ e $i\omega$ ($\omega > 0$). Em um espaço-tempo arbitrário, porém, não há um conjunto natural de modos normais, e a quantização deve ser feita usando uma abordagem algébrica, que não dependa da introdução de uma base privilegiada de auto-funções.

Nesta dissertação, porém, estamos interessados apenas em espaços tempos estáticos, com a métrica da forma (2.1). Nesse caso, assim como no caso plano, existe uma isometria global tipo tempo gerada pelo vetor de Killing ∂_t . Isso nos permite expandir o campo $\hat{\phi}$ em termos de um conjunto completo natural de modos de norma positiva e negativa. Para isso, utilizamos como modos normais as auto-funções da derivada de Lie com relação a este campo de Killing, ou seja, $u_{\omega\mathbf{s}\lambda}(x)$ e $u_{\omega\mathbf{s}\lambda}^*(x)$ tais que

$$\mathcal{L}_{\partial_t} u_{\omega\mathbf{s}\lambda} = -i\omega u_{\omega\mathbf{s}\lambda}, \quad \mathcal{L}_{\partial_t} u_{\omega\mathbf{s}\lambda}^* = i\omega u_{\omega\mathbf{s}\lambda}^*, \quad (2.13)$$

com $\omega > 0$. Esses modos podem ser escritos como

$$u_{\omega\mathbf{s}\lambda}(x^\mu) = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} U_{\omega\mathbf{s}\lambda}(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t) \quad (\omega > 0), \quad (2.14)$$

e analogamente para $u_{\omega\mathbf{s}\lambda}^*(x^\mu)$. Aqui, $U_{\omega\mathbf{s}\lambda}(\mathbf{x})$ representa a parte espacial dos modos e $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$ e $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ representam conjuntos de números quânticos

contínuos e discretos, respectivamente, necessários para sua caracterização completa. O fator $\sqrt{\omega/\pi}$ é introduzido por conveniência de cálculo. Os modos são normalizados de acordo com o produto interno de Klein-Gordon, como na Eq. (2.8), ou, explicitamente,

$$i \int_{\Sigma_t} d^3\mathbf{x} \sqrt{h} n_\mu (u_{\omega\mathbf{s}\lambda}^* \nabla^\mu u_{\omega'\mathbf{s}'\lambda'} - \nabla^\mu u_{\omega\mathbf{s}\lambda}^* \cdot u_{\omega'\mathbf{s}'\lambda'}) = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}') \delta(\omega - \omega'), \quad (2.15)$$

$$i \int_{\Sigma_t} d^3\mathbf{x} \sqrt{h} n_\mu (u_{\omega\mathbf{s}\lambda} \nabla^\mu u_{\omega'\mathbf{s}'\lambda'} - \nabla^\mu u_{\omega\mathbf{s}\lambda} \cdot u_{\omega'\mathbf{s}'\lambda'}) = 0. \quad (2.16)$$

com $n_\mu = \sqrt{f^{-1}}(\partial_t)_\mu$.

O campo $\hat{\phi}$ pode ser expandido, portanto, da seguinte forma:

$$\hat{\phi}(x^\mu) = \sum_\lambda \int d\omega d\mathbf{s} [u_{\omega\mathbf{s}\lambda} a_{\omega\mathbf{s}\lambda} + u_{\omega\mathbf{s}\lambda}^* a_{\omega\mathbf{s}\lambda}^\dagger]. \quad (2.17)$$

A escolha da normalização dos modos através do produto interno de Klein-Gordon permite, como já foi dito, que os operadores $a_{\omega\mathbf{s}\lambda}$ e $a_{\omega\mathbf{s}\lambda}^\dagger$, interpretados, respectivamente, como operadores de aniquilação e criação de partículas, satisfaçam relações de comutação da forma usual:

$$[a_{\omega\mathbf{s}\lambda}, a_{\omega'\mathbf{s}'\lambda'}^\dagger] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}') \delta(\omega - \omega'), \quad (2.18)$$

com demais comutadores nulos.

Para construirmos o espaço de Fock, definimos o vácuo como o estado $|0\rangle$ aniquilado por todos os operadores $a_{\omega\mathbf{s}\lambda}$, ou seja, $a_{\omega\mathbf{s}\lambda} |0\rangle = 0 |0\rangle$, e obtemos, a partir dele, estados de várias partículas, através da aplicação sucessiva de operadores de criação sobre $|0\rangle$. Um fator de normalização apropriado é também introduzido, de forma que o estado assim definido se adeque à estatística de Bose-Einstein para partículas idênticas.

2.2 Acoplamento com uma corrente clássica e emissão de radiação

Em Teoria Quântica de Campos, a emissão de radiação escalar é descrita através do acoplamento do campo e da corrente que representa a fonte. Esta será representada

aqui por meio de uma corrente escalar clássica, dada por

$$j(x^\mu) = \frac{q}{u^0(\tau)} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\tau)), \quad (2.19)$$

onde $x^\mu(\tau)$ representa a linha de mundo associada à partícula e parametrizada pelo tempo próprio τ , $u^\mu(\tau) \equiv dx^\mu/d\tau$ representa sua quadrivelocidade e q determina a magnitude do acoplamento entre a fonte e o campo[¶]. A normalização da corrente é feita exigindo-se que $\int d\sigma j(x^\mu) = q$, onde $d\sigma$ é o elemento de 3-volume ortogonal à quadrivelocidade u^μ .

A corrente pode ser acoplada minimamente ao campo escalar, resultando na ação de interação

$$\hat{S}_{int} = \int d^4x \sqrt{-g} j(x^\mu) \hat{\phi}(x^\nu). \quad (2.21)$$

A amplitude de transição do estado de vácuo para o estado de uma partícula, caracterizado pelos números quânticos ω , \mathbf{s} e λ , é dada, em primeira ordem na expansão em \hbar , por

$$A_{\omega\mathbf{s}\lambda} = \langle \omega\mathbf{s}\lambda | i \int d^4x \sqrt{-g} j(x^\mu) \hat{\phi}(x^\nu) | 0 \rangle = i \int d^4x \sqrt{-g} j(x^\mu) u_{\omega\mathbf{s}\lambda}^*(x^\nu). \quad (2.22)$$

A taxa de emissão de partículas com números quânticos \mathbf{s} e λ , como medida por observadores seguindo a isometria temporal gerada por ∂_t , é dada por

$$\Gamma_{\mathbf{s}\lambda} = \int_0^\infty d\omega \frac{|A_{\omega\mathbf{s}\lambda}|^2}{T}, \quad (2.23)$$

onde T é o tempo total medido por observadores assintóticos [16, 17]:

$$T = 2\pi\delta(0) = \int_{-\infty}^\infty e^{it(w-w)} dt = \int_{-\infty}^\infty dt. \quad (2.24)$$

Neste trabalho, aplicaremos o formalismo desenvolvido aqui para analisar a emissão de radiação por um conjunto de fontes escalares em órbita circular ao redor de um corpo denso, em um espaço-tempo estático. Para isso, $\Gamma_{\mathbf{s}\lambda}$ e a potência emitida serão os observáveis de interesse. No que se segue, começaremos analisando a emissão de radiação no espaço-tempo de Minkowski, com gravitação Newtoniana, e, em seguida, no espaço-tempo de Schwarzschild.

[¶]Vale notar a semelhança entre a Eq. (2.19) e a expressão para a corrente eletromagnética que descreve uma partícula localizada em $\mathbf{x}(\tau)$,

$$j^\mu(x^\nu) = \frac{q}{u^0} u^\mu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\tau)). \quad (2.20)$$

Capítulo 3

Espaço-tempo de Minkowski

O nosso primeiro pano de fundo para a investigação da radiação emitida por um conjunto de fontes é o espaço-tempo de Minkowski, onde incluiremos, posteriormente, a gravitação Newtoniana. Aqui, os modos normais na expansão do campo escalar, Eq. (2.9), têm uma expressão simples em termos de funções especiais conhecidas, o que nos permite um teste de consistência para casos mais complexos, além de comparações e análises interessantes.

O espaço-tempo de Minkowski é descrito pelo elemento de linha

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.1)$$

e, com essa métrica plana, a equação satisfeita pela parte espacial dos modos normais se reduz à equação de Laplace usual, cuja solução em termos de funções especiais - harmônicos esféricos e funções de Bessel - é bem conhecida. Isso nos permite escrever, para os modos de frequência positiva (Eq. (2.14)),

$$u_{\omega lm}(x^\mu) = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} j_l(\omega r) Y_{lm}(\theta, \phi) e^{-i\omega t} \quad (\omega > 0), \quad (3.2)$$

em que $\omega \geq 0$ está associado à frequência e $l \geq 0$ ($l \in \mathbb{N}$) e $m \in [-l, l]$ são os números quânticos usuais associados ao momento angular. Os modos assim definidos são normalizados em relação ao produto interno de Klein-Gordon. A expansão do campo $\hat{\phi}$ em termos desse conjunto completo de soluções fornece, portanto,

$$\hat{\phi}(x^\mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \int_0^{\infty} d\omega [u_{\omega lm}(x^\mu) a_{\omega lm} + h.c.]. \quad (3.3)$$

3.1 Radiação emitida por uma fonte escalar em movimento circular

Primeiramente, vamos retomar alguns resultados sobre a radiação emitida por uma única fonte no espaço-tempo de Minkowski. Uma carga pontual em movimento circular no plano equatorial com velocidade Ω constante, como medida por observadores estáticos, pode ser descrita pela densidade de carga (ver Eq. (2.19))

$$j(x^\mu) = \frac{q}{R^2\gamma} \delta(r - R) \delta(\theta - \pi/2) \delta(\phi - \Omega t), \quad (3.4)$$

onde $\gamma = 1/\sqrt{1 - R^2\Omega^2}$ e a densidade de carga é normalizada de forma que

$$\int d\sigma j(x^\mu) = q, \quad (3.5)$$

em que $d\sigma = \sqrt{-g} \epsilon_{\lambda\alpha\beta\gamma} u^\lambda dx_1^\alpha dx_2^\beta dx_3^\gamma = \sqrt{-g} \gamma \epsilon_{ijk} dx_1^i dx_2^j dx_3^k$ é o elemento de volume ortogonal à quadrivelocidade u^λ da fonte.

Seguindo os passos descritos no capítulo anterior, calculamos a amplitude de emissão a nível de árvore. Partindo da Eq. (2.22), obtemos

$$\begin{aligned} A_{\omega lm} &= \frac{iq}{R^2\gamma} \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \int dt dr d\theta d\phi r^2 \sin^2 \theta j_l(\omega r) Y_{lm}^*(\theta, \phi) e^{i\omega t} \delta(r - R) \delta(\theta - \pi/2) \delta(\phi - \Omega t) \\ &= \frac{iq}{\gamma} \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} j_l(\omega R) \int dt Y_{lm}^*(\pi/2, \Omega t) e^{i\omega t} \\ &= \frac{iq}{\gamma} \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} j_l(\omega R) Y_{lm}^*(\pi/2, 0) \int dt e^{i(\omega - m\Omega)t} \\ &= 2iq\gamma^{-1} \sqrt{\pi\omega} j_l(\omega R) Y_{lm}^*(\pi/2, 0) \delta(\omega - m\Omega). \end{aligned} \quad (3.6)$$

A delta de Dirac que aparece no cálculo acima restringe a frequência emitida a $\omega = m\Omega$. Uma vez que $\Omega > 0$ e $\omega > 0$, ondas com $m \leq 0$ não são emitidas. Com isso, o número quântico magnético m , que assume em geral valores inteiros de $-l$ a l , fica restrito ao intervalo $[1, l]$, o que será levado em conta nas somas em m à frente.

Um cálculo direto fornece, para a taxa de emissão e para a potência irradiada,

$$\Gamma_{lm} = 2q^2 m \Omega \gamma^{-2} [j_l(m\Omega R)]^2 |Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2, \quad (3.7)$$

$$W_{lm} = 2q^2 m^2 \Omega^2 \gamma^{-2} [j_l(m\Omega R)]^2 |Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2, \quad (3.8)$$

onde usamos a Eq. (2.23) e definimos a potência irradiada com números quânticos l e m como

$$W_{lm} = \int_0^\infty d\omega \omega \frac{|A_{\omega lm}|^2}{T}, \quad (3.9)$$

com T dado na Eq. (2.24).

A taxa de emissão e a potência totais são dadas pela soma em todos os números quânticos:

$$\Gamma = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l \Gamma_{lm}, \quad (3.10)$$

$$W = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l W_{lm}. \quad (3.11)$$

Notamos, aqui, que $|Y_{lm}(\pi/2, \phi)|^2 = 0$ se $l + m$ é ímpar e

$$|Y_{lm}(\pi/2, \phi)|^2 = \frac{2l + 1}{4\pi} \frac{(l + m - 1)!!(l - m - 1)!!}{(l + m)!!(l - m)!!} \quad (3.12)$$

se $l + m$ é par [19]. Notamos também que $n!! \equiv n(n - 2)\dots 1$ se n é ímpar, $n!! \equiv n(n - 2)\dots 2$ se n é par e que $(-1)!! \equiv 1$. A maior contribuição para $|Y_{lm}(\pi/2, \phi)|^2$ vem de valores de m próximos ao de l , o que pode ser visto na Figura 3.1.

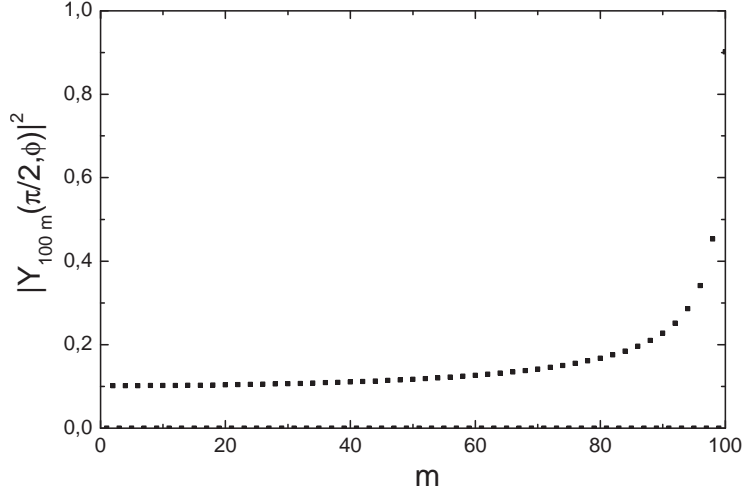


Figura 3.1: Valor de $|Y_{lm}(\pi/2, \phi)|^2$ em função de m para l fixo, $l = 100$. A maior contribuição acontece para $m = l$. Observa-se um comportamento semelhante para todo l .

Notamos também que o uso da fórmula

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l m^2 [j_l(mz)]^2 |Y_{lm}(\pi/2, \phi)|^2 = \frac{1}{24\pi} \frac{z^2}{(1-z^2)^3}, \quad (3.13)$$

válida para $|z| < 1$, e demonstrada em [4], permite verificar de forma imediata a igualdade da Eq. (3.8) e do resultado de Teoria Clássica de Campos para a potência, $W_M^{class} = q^2 a^2 / 12\pi$, com $a = \gamma^2 \Omega^2 R$ (ver Apêndice A).

Até aqui, nenhuma suposição foi feita sobre a força que mantém a partícula em órbita circular. Contudo, se desejamos uma relação entre R e Ω , somos levados a supor uma forma específica para essa força. Aqui, suporemos que a partícula se mantém em órbita circular devido à atração gravitacional de um corpo central de massa M e assumiremos a gravitação Newtoniana, utilizando a terceira lei de Kepler, $R(\Omega) = (M\Omega^{-2})^{1/3}$, para escrever R em função de Ω . Nas análises gráficas, essa relação estará implícita.

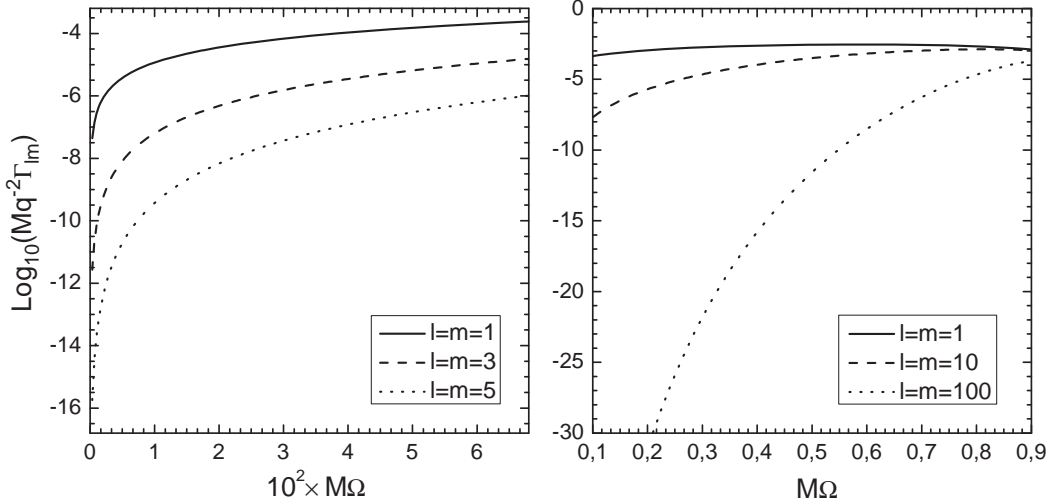


Figura 3.2: Taxa de produção de partículas em função da velocidade angular orbital para $l = m = 1, 3, 5$, no limite de baixas velocidades, e $l = m = 1, 10, 100$ para velocidades altas. No primeiro caso, $l = m = 1$ domina sobre os demais números quânticos. Porém, à medida que a velocidade angular aumenta, modos de momento angular maior são excitados.

Pode-se observar o comportamento da taxa de emissão em função da velocidade

angular da fonte na Figura 3.2. Para velocidades angulares pequenas (radiação cíclotron), apenas os primeiros números quânticos são relevantes, em particular $l = 1$. Contudo, na medida em que a velocidade angular aumenta, cada vez mais ordens superiores de l são excitadas (radiação síncrotron). Na Figura 3.3, a mesma análise é feita para a potência e um comportamento semelhante é observado.

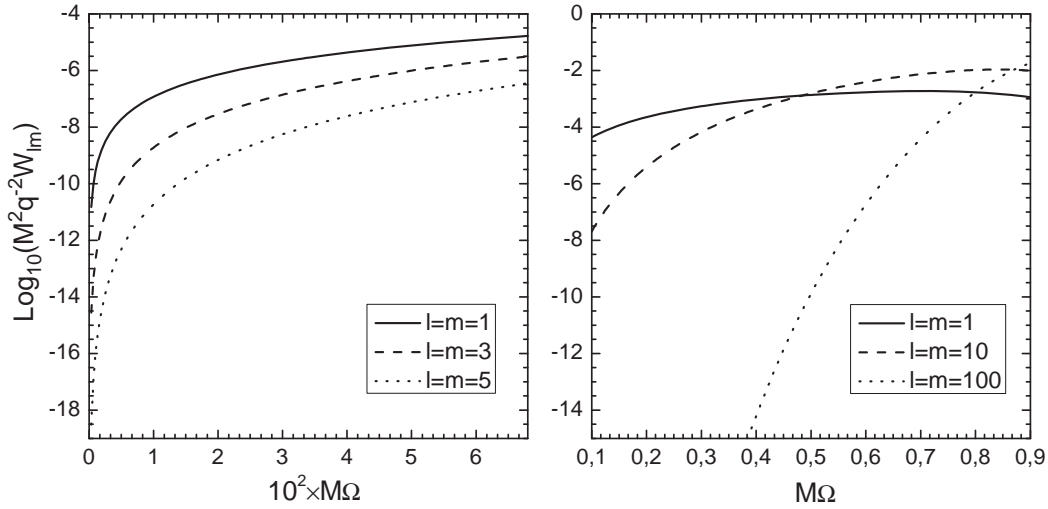


Figura 3.3: Potência irradiada função da velocidade angular orbital para $l = m = 1, 3, 5$, no limite de baixas velocidades, e $l = m = 1, 10, 100$ para velocidades altas.

Um argumento físico pode fornecer uma estimativa do número quântico m dominante que é emitido quando a fonte gira com velocidade angular Ω (como medida por observadores estáticos). De fato, as Figs. 3.2 e 3.3 mostram que, quanto maior a velocidade angular da fonte e quanto mais seu movimento aproxima-se do limite relativístico ($M\Omega \rightarrow 1$), ordens cada vez maiores dos números quânticos l e m ganham importância. Gostaríamos, assim, de obter uma estimativa para o valor dominante dessas quantidades em função de Ω . Isso também nos permitiria justificar, nas análises gráficas, o corte das somas em (3.10) e (3.11), por exemplo, em um certo valor máximo de l , para uma órbita fixa.

Vimos que a restrição do movimento das fontes a órbitas circulares implica no vínculo $\omega = m\Omega$, com Ω medido por observadores estáticos. Observadores comóveis com a fonte, por sua vez, associam um valor $\omega_0 = \omega/\gamma$ à frequência da radiação emitida. (Do ponto de vista de observadores inerciais parados no laboratório, esse

resultado pode ser interpretado da seguinte forma: os relógios que eles utilizam para medir T como o período da órbita atrasam por um fator γ quando passados para os observadores comóveis, que medem um período $T_0 = \gamma T$. Uma vez que a frequência angular é inversamente proporcional ao período, $\omega_0 = \omega/\gamma$.) Por outro lado, sabemos que um observador sobre a partícula carregada com aceleração própria a se vê imerso em um banho térmico com temperatura $T = a/2\pi$, o que pode ser interpretado em termos do efeito Unruh [21]*. Consequentemente, devido ao processo de emissão estimulada, a partícula emite radiação com energia típica da ordem de $E = \omega_0 \approx a$. Usando que $a = \gamma^2 M/R^2$, obtemos que o valor típico de m (que chamaremos de m_M) emitido por uma fonte com velocidade angular Ω é dado por

$$m_M \approx \frac{(M\Omega)^{1/3}}{(1 - (M\Omega)^{2/3})^{3/2}}. \quad (3.14)$$

A Figura 3.4 mostra o comportamento da potência emitida com números quânticos l e m , Eq. (3.8), em função de $m = l^\dagger$. Fica claro que, para uma velocidade angular Ω fixa, existe um valor de m que maximiza a potência. Na medida em que Ω aumenta, o valor dominante de m também cresce e uma faixa maior de números quânticos é excitada. Observa-se uma boa concordância entre o valor de m que maximiza a potência e o valor típico de m previsto pela fórmula (3.14), em destaque no gráfico. A Tabela 3.1 corrobora essa concordância para mais valores da velocidade angular.

$M\Omega$	0.1	0.5	0.9	0.99
m	1	4	56	1796
m_M	0.67	3.53	54.7	1826

Tabela 3.1: Comparação entre o valor típico m_M previsto pela Eq. (3.14) e o valor de m que maximiza a expressão (3.8), com $l = m$. Observa-se uma boa concordância entre os dois valores.

*Este resultado é rigorosamente válido para observadores uniformemente acelerados, seguindo as isometrias geradas pelos vetores de *boost* de Lorentz. No caso circular, o cálculo do efeito Unruh não é direto, pois não existe um vetor de Killing tipo tempo global que parametrize as órbitas de observadores em movimento circular. Contudo, a expressão usual para o efeito Unruh pode ser utilizada no caso circular para efeito de estimativa [18].

†Aqui, está sendo levado em conta que os harmônicos esféricos que aparecem na expressão da potência emitida selecionam os maiores valores de m para um dado l (ver Figura 3.1).

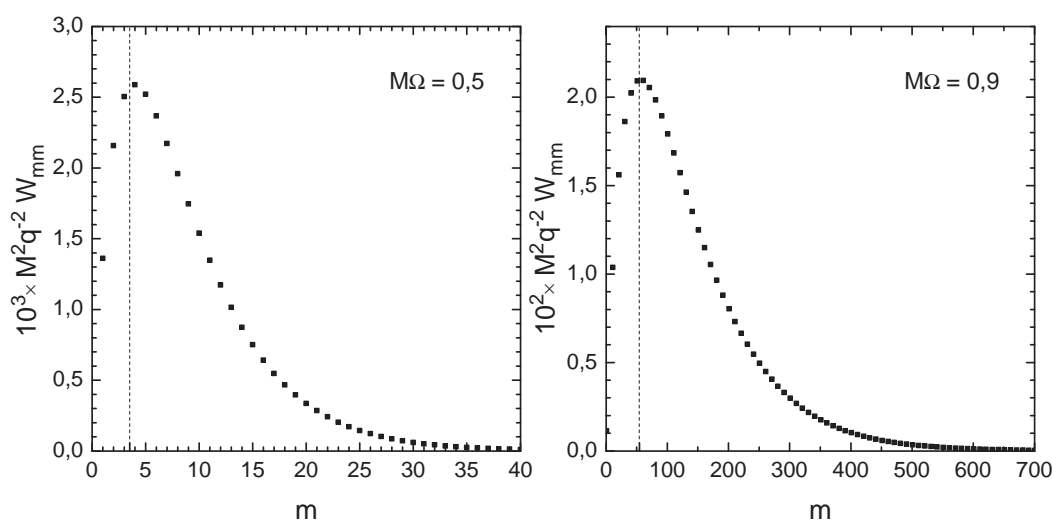


Figura 3.4: Potência irradiada nos números quânticos $l = m$ em função de m , para $m\Omega = 0.5$ e $m\Omega = 0.9$. Em destaque, o valor m_M previsto pela fórmula (3.14). Observa-se uma boa concordância desse valor com o valor de m que maximiza a potência.

Uma vez discutidos esses resultados sobre a radiação emitida por uma fonte em movimento circular em volta de um corpo central denso, vamos, a partir de agora, generalizá-los pouco a pouco, considerando, primeiramente, o caso de duas partículas separadas por uma distância arbitrária, e, posteriormente, uma configuração de N fontes escalares.

3.2 Radiação emitida por duas fontes escalares em movimento circular

Consideramos, como uma primeira generalização, o caso de de duas partículas escalares puntiformes em movimento circular no plano equatorial. As órbitas são caracterizadas pelos raios R_1 e R_2 e pelas velocidades angulares Ω_1 e Ω_2 . A corrente

que descreve o sistema é dada por

$$\begin{aligned} j(x^\mu) &= \frac{q}{R_1^2 \gamma_1} \delta(r - R_1) \delta(\theta - \pi/2) \delta(\phi - \Omega_1 t) \\ &\mp \frac{q}{R_2^2 \gamma_2} \delta(r - R_2) \delta(\theta - \pi/2) \delta(\phi - \Omega_2 t - \lambda), \end{aligned} \quad (3.15)$$

com $\gamma_i = 1/\sqrt{1 - R_i^2 \Omega_i^2}$, $i = 1, 2$, e λ representando a distância angular entre as partículas em $t = 0$. A expressão com sinal negativo descreve o caso de partículas com cargas opostas, ao passo que aquela com sinal positivo descreve o caso de partículas com mesma carga.

A amplitude de emissão é, nesse caso,

$$\begin{aligned} A_{\omega lm} &= A_{\omega lm}^1 + A_{\omega lm}^2 \\ &= 2iq\gamma_1^{-1} \sqrt{\omega\pi} j_l(\omega R_1) Y_{lm}^*(\pi/2, 0) \delta(\omega - m\Omega_1) \\ &\mp 2iq\gamma_2^{-1} \sqrt{\omega\pi} j_l(\omega R_2) Y_{lm}^*(\pi/2, \lambda) \delta(\omega - m\Omega_2). \end{aligned} \quad (3.16)$$

A taxa de emissão dessa configuração (ver Eq. (2.23)) é a soma das taxas individuais e de um termo de interferência:

$$\Gamma_{lm} = \Gamma_{lm}^1 + \Gamma_{lm}^2 + \Gamma_{lm}^{12}, \quad (3.17)$$

com (ver Eq. (3.7))

$$\Gamma_{lm}^i = 2q^2 m \Omega_i \gamma_i^{-2} [j_l(m\Omega_i R_i)]^2 |Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2, \quad i = 1, 2 \quad (3.18)$$

e

$$\begin{aligned} \Gamma_{lm}^{12} &= \int_0^\infty d\omega \frac{1}{T} (A_{\omega lm}^1 A_{\omega lm}^{2*} + A_{\omega lm}^2 A_{\omega lm}^{1*}) \\ &= \mp \frac{4\pi q^2}{\gamma_1 \gamma_2} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega}{T} j_l(\omega R_1) j_l(\omega R_2) \delta(\omega - m\Omega_1) \delta(\omega - m\Omega_2) \\ &\quad \times (Y_{lm}^*(\pi/2, 0) Y_{lm}(\pi/2, \lambda) + Y_{lm}(\pi/2, 0) Y_{lm}^*(\pi/2, \lambda)) \\ &= \mp \frac{4\pi q^2}{\gamma_1 \gamma_2} m \Omega_2 j_l(m\Omega_2 R_1) j_l(m\Omega_2 R_2) |Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2 (e^{im\lambda} + e^{-im\lambda}) \frac{\delta(m\Omega_2 - m\Omega_1)}{T} \\ &= \mp \frac{8\pi q^2}{\gamma_1 \gamma_2} m \Omega_2 j_l(m\Omega_2 R_1) j_l(m\Omega_2 R_2) |Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2 \cos(m\lambda) \frac{\delta(m\Omega_2 - m\Omega_1)}{T} \end{aligned}$$

A função $\delta(m\Omega_2 - m\Omega_1)$, que aparece no cálculo acima, implica que, para um disco fino, em que as cargas estão distribuídas apenas no plano equatorial, só ocorre

interferência entre a radiação emitida por fontes numa mesma órbita, uma vez que assumimos que $\Omega_1 \neq \Omega_2$ para $R_1 \neq R_2$. Nesse caso,

$$\Gamma_{lm}^{12} = \mp \frac{4q^2}{\gamma^2} m\Omega [j_l(m\Omega R)]^2 |Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2 \cos(m\lambda), \quad (3.19)$$

onde usou-se que

$$\lim_{\Omega_2 \rightarrow \Omega_1} \frac{\delta(m\Omega_2 - m\Omega_1)}{T} = \frac{1}{2\pi}. \quad (3.20)$$

Intuitivamente, podemos pensar que, para fontes em órbitas distintas, não existe uma relação de fase bem definida entre elas, uma vez que a distância angular varia com o tempo. Dessa forma, é natural que não haja emissão coerente e que elas emitam de forma independente quando uma média temporal em um período longo é feita. Sendo assim, na modelagem de um disco, podemos analisar cada órbita individualmente e somar a contribuição de todas elas de forma incoerente. No que segue, nos limitaremos, portanto, ao caso de partículas em uma mesma órbita circular.

A taxa de emissão total é obtida pela soma de Γ_{lm} em todos os números quânticos,

$$\Gamma = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l \frac{4q^2}{\gamma^2} m\Omega |j_l(m\Omega R)|^2 |Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2 (1 \mp \cos(m\lambda)). \quad (3.21)$$

Um cálculo inteiramente análogo leva à expressão seguinte para a potência total emitida:

$$W = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l \frac{4q^2}{\gamma^2} m^2 \Omega^2 |j_l(m\Omega R)|^2 |Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2 (1 \mp \cos(m\lambda)). \quad (3.22)$$

Para analisarmos graficamente o comportamento da potência[‡], consideramos a gravidade Newtoniana e usamos a terceira lei de Kepler para expressar R em função de Ω .

O caso de duas fontes em uma mesma órbita circular e separadas por um ângulo λ está representado na Figura 3.5 no limite de baixas frequências. Para partículas com *cargas opostas*, a potência emitida é máxima para $\lambda = \pi$ e vai a zero na medida em que a separação das cargas diminui. O limite $\lambda = 0$ corresponde às duas cargas sobrepostas e é natural que nada seja irradiado nessa condição. De fato, para

[‡]A taxa de emissão tem um comportamento qualitativamente semelhante ao da potência.

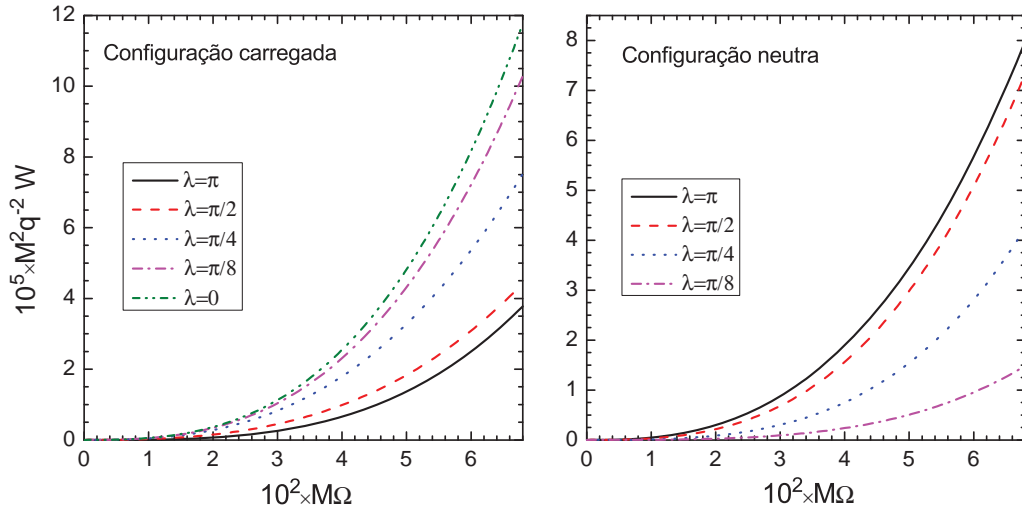


Figura 3.5: Dependência da potência irradiada com relação à velocidade angular de rotação, para configurações neutras (ângulos de separação de π , $\pi/2, \pi/4$ e $\pi/8$) e carregadas (ângulos de separação de π , $\pi/2, \pi/4$, $\pi/8$ e 0), no regime de baixas frequências.

velocidades baixas, a maior contribuição para a radiação vem da ordem dipolar ($l = m = 1$) e a potência irradiada nesse limite em geral depende da magnitude do momento de dipolo [26], que é máxima para fontes diametralmente opostas e nula para fontes sobrepostas.

Já para o caso de duas partículas de *mesma carga*, o inverso acontece: a potência é máxima no caso em que elas estão sobrepostas e chega a um mínimo quando a separação entre as fontes é máxima ($\lambda = \pi$). Nesse caso, não há uma interpretação tão direta em termos da expansão multipolar uma vez que o momento de dipolo depende da origem. Porém, considerando o centro como a origem, o momento de dipolo é máximo para as cargas sobrepostas (interferência totalmente construtiva) e diminui na medida em que as fontes são separadas. Para $\lambda = \pi$, a contribuição de dipolo é nula e domina a ordem quadrupolar. A Figura 3.6 também ilustra um pouco do limite de radiação cíclotron ($M\Omega = 0.01$), que é um pouco mais explorado no Apêndice B, onde usamos conceitos e resultados conhecidos do Eletromagnetismo clássico.

Na medida em que a velocidade angular aumenta, modos de momento angular

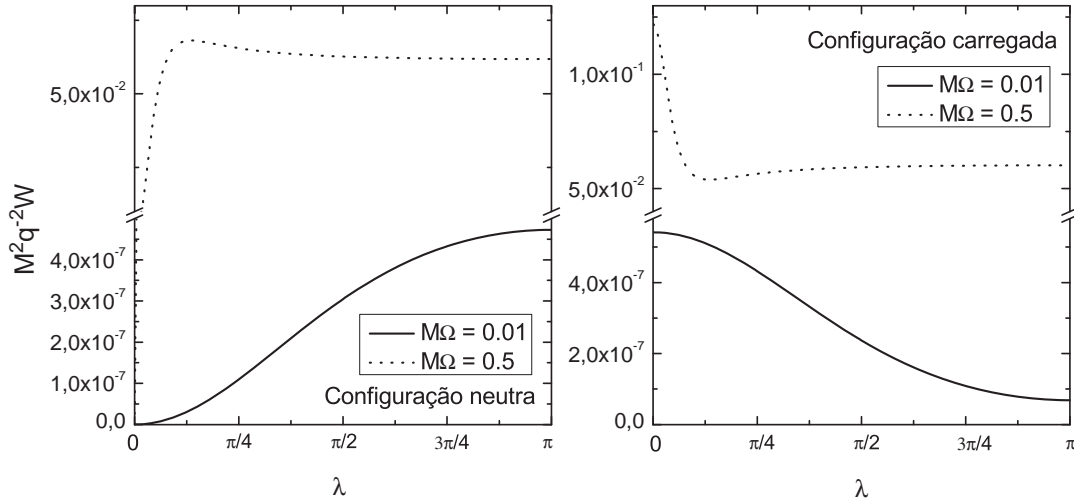


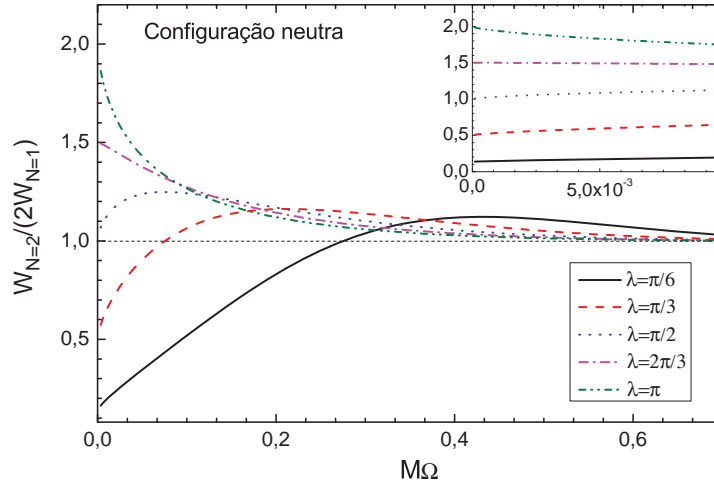
Figura 3.6: Potência irradiada em função da separação angular λ entre as cargas, para configurações neutras e carregadas com $M\Omega = 0.01$ e 0.5 .

maior são excitados, influenciando a emissão de radiação por cada configuração. O regime de velocidades angulares maiores é também ilustrado na Figura 3.6 ($M\Omega = 0.5$). Nela, nota-se o comportamento não-trivial (não-monotônico) da potência em função da separação angular na medida em que Ω aumenta, o que decorre da soma de muitas ordens multipolares em (3.22).

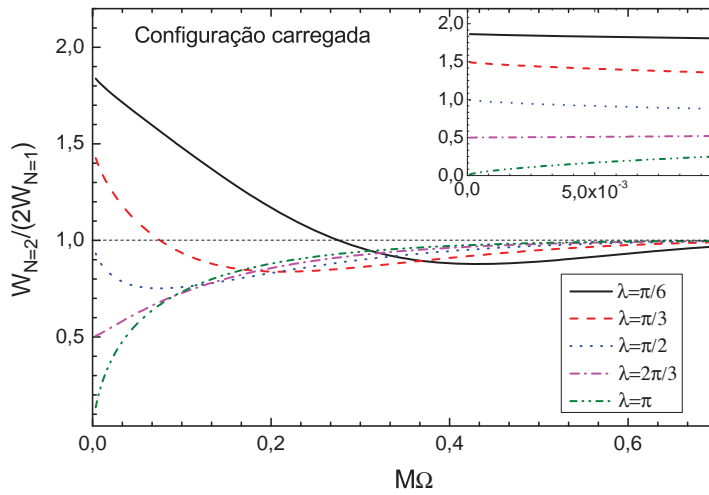
A Figura 3.7 mostra a razão $W_2/(2W_1)$ entre a potência emitida por duas partículas (com separações angulares variadas) e o dobro da potência emitida por uma partícula individualmente. Para a configuração neutra, no limite de baixas frequências, essa razão varia de 0 a aproximadamente 2, sendo que a interferência é maximamente construtiva para um ângulo $\lambda = \pi$ e totalmente destrutiva para $\lambda = 0$. Para a configuração carregada, o oposto ocorre: no regime de baixas frequências, essa razão varia de 2^{\S} , para cargas sobrepostas ($q_{total} = 2q$) a um mínimo para cargas com separação máxima ($\lambda = \pi$). Fazendo uma extrapolação para velocidades angulares mais altas, vemos que, no limite de velocidades ultrarrelativísticas, a razão

^{\S}O valor 2 para essa razão surge uma vez que a potência é proporcional a $|q|^2$:

$$\frac{W_{N=2}}{2W_{N=1}} \sim \frac{(|q| + |q|)^2}{2|q|^2}.$$



(a)



(b)

Figura 3.7: Razão entre a potência emitida por duas partículas e o dobro da potência emitida por uma única fonte em função da velocidade angular. Para “velocidades suficientemente altas”, as partículas emitem independentemente (ver discussão a seguir).

entre a potência emitida e o dobro da potência irradiada por uma única carga se aproxima de 1. Assim, nesse limite, as partículas emitem independentemente.

Um argumento de ordem física pode nos dar uma estimativa da velocidade angular a partir da qual as partículas começam a emitir independentemente, ou, equivalentemente, a velocidade angular abaixo da qual ocorre interferência. Fixado o raio da órbita (e, conseqüentemente, sua velocidade angular), as partículas começarão a se “ver”, ou seja, começará a haver interferência na radiação por elas emitida, quando o comprimento de onda emitido for da ordem da separação angular λ entre elas:

$$\omega_0^{-1} \approx L\lambda/2\pi, \quad (3.23)$$

onde ω_0^{-1} é o comprimento de onda da radiação e L é o perímetro da órbita, como medidos por observadores inerciais instantaneamente em repouso com a fonte. Em função do raio R da órbita medido por observadores inerciais, escrevemos $L = 2\pi R\gamma$, onde $\gamma = 1/\sqrt{1 - R^2\Omega^2}$. (Do ponto de vista dos observadores inerciais parados no laboratório, esse resultado pode ser interpretado da seguinte forma: as mesmas réguas que eles usam para medir $L = 2\pi R$ como o perímetro da órbita, quando passadas para observadores em movimento circular, encolhem por um fator γ , e, conseqüentemente, os observadores em rotação medem um tamanho γ vezes maior.) Pensando em termos do efeito Unruh (ver discussão anterior), pode-se estimar a energia típica emitida, no referencial da fonte, como $E = \omega_0 \approx a$. O comprimento de onda da radiação, no referencial da partícula, é, portanto, $\omega_0^{-1} = 1/a$, com $a = \gamma^2 M/R^2$. Inserindo essas relações na Eq. (3.23), e utilizando a terceira lei de Kepler para escrever o raio em função da velocidade angular Ω , obtemos

$$\lambda \approx \frac{R}{\gamma^3 M} = \frac{(1 - M/R)^{\frac{2}{3}}}{M/R} = \frac{(1 - (M\Omega)^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}{(M\Omega)^{\frac{2}{3}}}. \quad (3.24)$$

A Tabela 3.2 mostra o valor de $M\Omega$ a partir do qual partículas separadas por um ângulo λ emitem de forma aproximadamente independente.

λ	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π
$M\Omega$	0.42	0.27	0.20	0.15	0.12	0.10

Tabela 3.2: Valor de $M\Omega$ a partir do qual as partículas passam a emitir independentemente, para alguns valores da separação angular λ .

A análise da Figura 3.7 mostra que esses valores são compatíveis com os obtidos com o cálculo completo.

3.3 Radiação emitida por N fontes escalares em movimento circular

Para nos aproximarmos mais da situação física de interesse, de um disco ionizado girando ao redor de um corpo central denso, vamos considerar a órbita[¶] populada por N partículas igualmente espaçadas. Consideraremos as configurações neutra e carregada ilustradas na Figura 3.8.

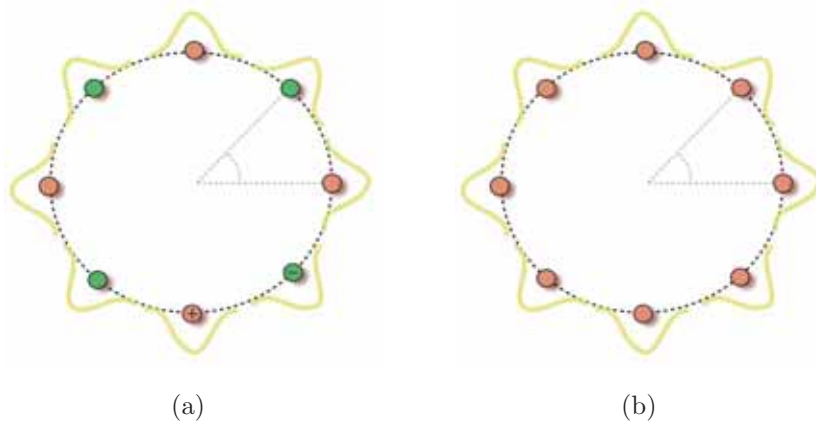


Figura 3.8: Configuração (a) neutra e (b) carregada para $N = 8$.

3.3.1 Configuração neutra

Seja, portanto, um anel com N fontes igualmente espaçadas por um ângulo λ ($N\lambda = 2\pi$, N par) e cujas cargas têm sinais trocados de forma alternada, de modo que o sistema como um todo seja neutro. As fontes estão em movimento circular, com velocidade Ω constante, como medida por observadores estáticos.

A densidade volumétrica de carga que descreve o sistema é (ver Eq. (2.19))

$$j(x^\mu) = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \frac{q}{R^2 \gamma} \delta(r - R) \delta(\theta - \pi/2) \delta(\phi - \Omega t - n\lambda), \quad (3.25)$$

[¶]A generalização para um disco, como discutido na seção anterior, é direta.

e a amplitude de radiação emitida por essa configuração é dada por (ver Eq. (2.22))

$$\begin{aligned} A_{\omega lm} &= i \sum_{n=0}^{N-1} \int d^4x \sqrt{-g} j_n(x^\mu) u_{\omega lm}^* \\ &= 2iq\gamma^{-1} \sqrt{\omega\pi} \delta(\omega - m\Omega) j_l(\omega R) Y_{lm}^*(\pi/2, 0) \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n e^{imn\lambda}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Para $N = 2$, $\lambda = \pi$ e $\sum_{n=0}^1 (-1)^n e^{imn\lambda} = 1 - e^{im\pi}$. Levando em conta que $Y_{lm}(\theta, \phi) = Y_{lm}(\theta, 0) e^{-im\phi}$, vemos que a expressão (3.26) se reduz à Eq. (3.16) para $N = 2$ e $\lambda = \pi$.

Para N arbitrário, temos, da teoria das progressões geométricas, que

$$\sum_{n=0}^N r^n = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}, \quad (3.27)$$

o que nos permite calcular a soma em n :

$$\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n e^{imn\lambda} = \frac{1 - (-e^{im\lambda})^N}{1 - (-e^{im\lambda})} = \frac{1 - e^{2\pi im}}{1 + e^{im\lambda}}, \quad (3.28)$$

onde usamos $\lambda = 2\pi/N$.

Para computarmos os observáveis de interesse físico, precisamos do módulo da amplitude ao quadrado. Como

$$\left| \frac{1 - e^{2\pi im}}{1 + e^{im\lambda}} \right|^2 = \frac{1 - \cos(2\pi m)}{1 + \cos(m\lambda)}, \quad (3.29)$$

obtemos, para a taxa de emissão e a potência irradiada,

$$\Gamma_{lm} = 2q^2 \gamma^{-2} m\Omega |j_l(m\Omega R)|^2 |Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2 \frac{1 - \cos(2\pi m)}{1 + \cos(2\pi m/N)}, \quad (3.30)$$

$$W_{lm} = 2q^2 \gamma^{-2} m^2 \Omega^2 |j_l(m\Omega R)|^2 |Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2 \frac{1 - \cos(2\pi m)}{1 + \cos(2\pi m/N)}. \quad (3.31)$$

De forma geral, podemos escrever $\Gamma_{lm} = f_{lm}^{(\Gamma)}(\Omega) g_m(N)$, e, analogamente, $W_{lm} = f_{lm}^{(W)}(\Omega) g_m(N)$, com

$$f_{lm}^{(\Gamma)}(\Omega) = 2q^2 \gamma^{-2} m\Omega |j_l(m\Omega R)|^2 |Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2, \quad (3.32)$$

$$f_{lm}^{(W)}(\Omega) = 2q^2 \gamma^{-2} m^2 \Omega^2 |j_l(m\Omega R)|^2 |Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2, \quad (3.33)$$

$$g_m(N) = \frac{1 - \cos(2\pi m)}{1 + \cos(2\pi m/N)}. \quad (3.34)$$

Nessa decomposição, os termos $f_{lm}^{(\Gamma)}(\Omega)$ e $f_{lm}^{(W)}(\Omega)$ correspondem às expressões para a taxa de emissão e a potência emitida por uma única partícula (ver Eqs. (3.7) e (3.8)), ao passo que a função $g_m(N)$ codifica a informação sobre a interferência.

O comportamento da função $f_{lm}^{(W)}(\Omega)$ pode ser observado na Figura 3.4. Como observado na Seção 3.1, $f_{mm}^{(W)}(\Omega)$ possui um máximo para m dado aproximadamente pela Eq. (3.14). A função $f_{lm}^{(\Gamma)}(\Omega)$ está ilustrada na Figura 3.9 como função de $l = m$, para alguns valores de Ω . Observa-se que a taxa de emissão cai a zero mais rapidamente que a potência emitida, mas que ambas possuem um comportamento qualitativamente semelhante.

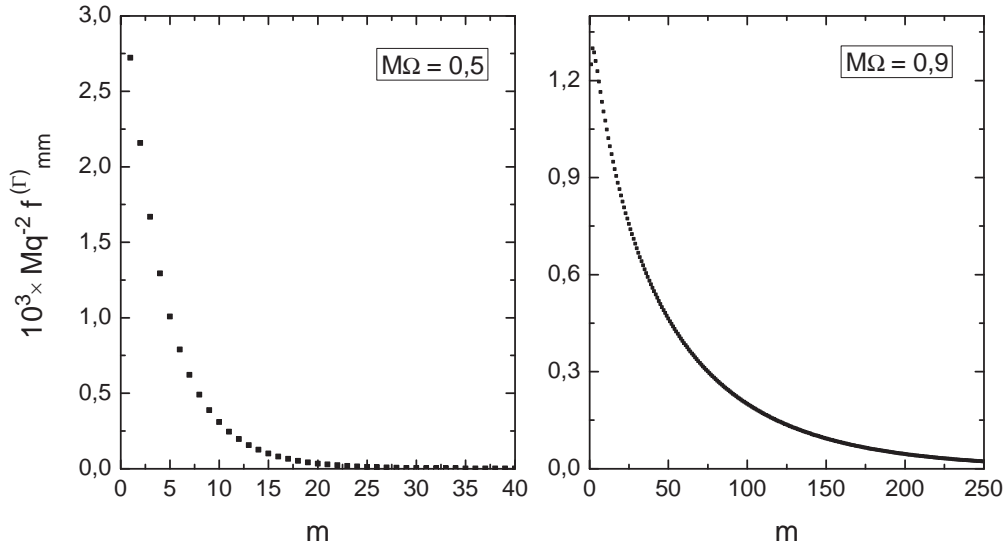


Figura 3.9: Dependência de $f_{mm}^{(\Gamma)}(\Omega)$ com relação a m para $M\Omega = 0.5$ e $M\Omega = 0.9$. Comparar com a Figura 3.4 para a potência.

Como já observado, as funções $f_{lm}^{(\Gamma)}(\Omega)$ e $f_{lm}^{(W)}(\Omega)$ são essencialmente a taxa de emissão e a potência emitida por uma única partícula e não dependem do número N de fontes no anel. A função $g_m(N)$, por sua vez, condensa toda a informação sobre a interferência. Como m é um número inteiro, o numerador de $g_m(N)$ é sempre nulo. Contudo, a expressão como um todo pode diferir de zero quando o denominador

também se anula, ou seja, quando $\cos(2\pi m/N) = -1$, ou

$$m = \frac{2k-1}{2}N, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.35)$$

Assim, para um certo valor de N , uma *regra de seleção* estabelece que apenas alguns valores específicos de m contribuirão para a potência emitida. Para tais valores de m , $g_m(N)$ fica indeterminado. Aplicando a regra de L'Hôpital, temos que

$$\lim_{m \rightarrow \frac{2k-1}{2}N} \frac{1 - \cos(2\pi m)}{1 + \cos(\frac{2\pi m}{N})} = N^2. \quad (3.36)$$

Assim, $g_m(N) = N^2$, para $m = N/2, 3N/2, 5N/2 \dots$ e é nulo caso contrário.

Levando em consideração que somente os números quânticos magnéticos dados por (3.35) contribuem para a radiação emitida e utilizando a Lei de Kepler, $R^3\Omega^2 = M$, de forma que as expressões sejam funções apenas de M e Ω , podemos escrever (ver Eqs. (2.23) e (3.9))

$$\begin{aligned} \Gamma \frac{M}{q^2} &= \sum_{l=N/2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{l}{N} + \frac{1}{2} \rfloor} 2M\Omega(1 - (M\Omega)^{2/3})(2k-1)N/2 \\ &\times |j_l((2k-1)N(M\Omega)^{1/3}/2)|^2 |Y_{l(2k-1)N/2}(\pi/2, 0)|^2 N^2, \end{aligned} \quad (3.37)$$

e

$$\begin{aligned} W \frac{M^2}{q^2} &= \sum_{l=N/2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{l}{N} + \frac{1}{2} \rfloor} 2(M\Omega)^2(1 - (M\Omega)^{2/3})((2k-1)N/2)^2 \\ &\times |j_l((2k-1)N(M\Omega)^{1/3}/2)|^2 |Y_{l(2k-1)N/2}(\pi/2, 0)|^2 N^2, \end{aligned} \quad (3.38)$$

em que $\lfloor x \rfloor$ representa o maior inteiro menor ou igual a x . Nas expressões anteriores, uma vez que, dado N , o primeiro m a contribuir é $N/2$, tomamos esse valor como o início da soma em l . A soma em $k = m/N + 1/2$ começa com $k = 1$ ($m = N/2$) e termina com o maior inteiro menor ou igual a $l/N + 1/2$ ($m = l$).

A Figura 3.10 mostra o comportamento da potência irradiada em função do número de cargas N no regime de baixas e altas frequências. Mostra também, nesses dois regimes, a razão $W_N/(NW_1)$ entre a potência emitida por N fontes e N vezes a potência emitida individualmente. Para baixas velocidades angulares, vê-se que a interferência rapidamente suprime a potência emitida por número grande de cargas. Por outro lado, é possível que configurações com muitas cargas emitam significativamente para uma velocidade angular suficientemente alta (ver discussão na subseção 3.3.3).

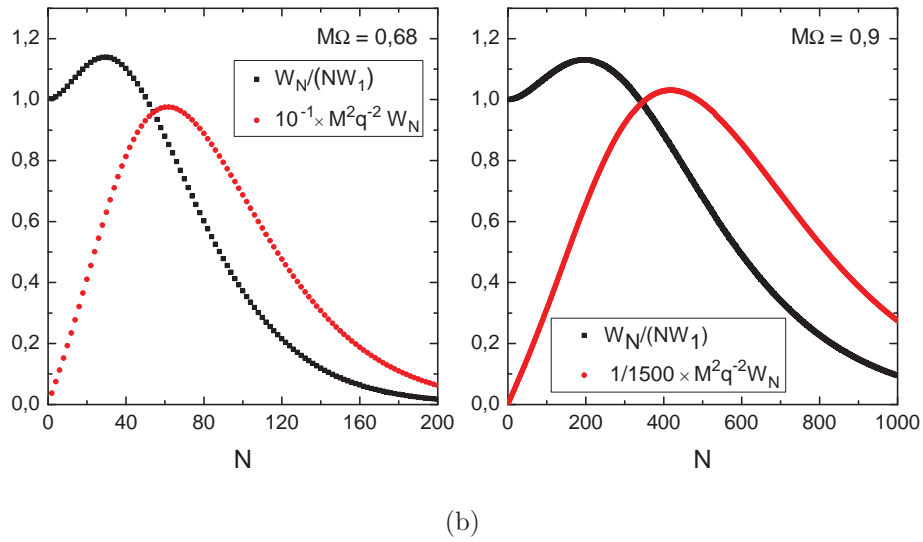
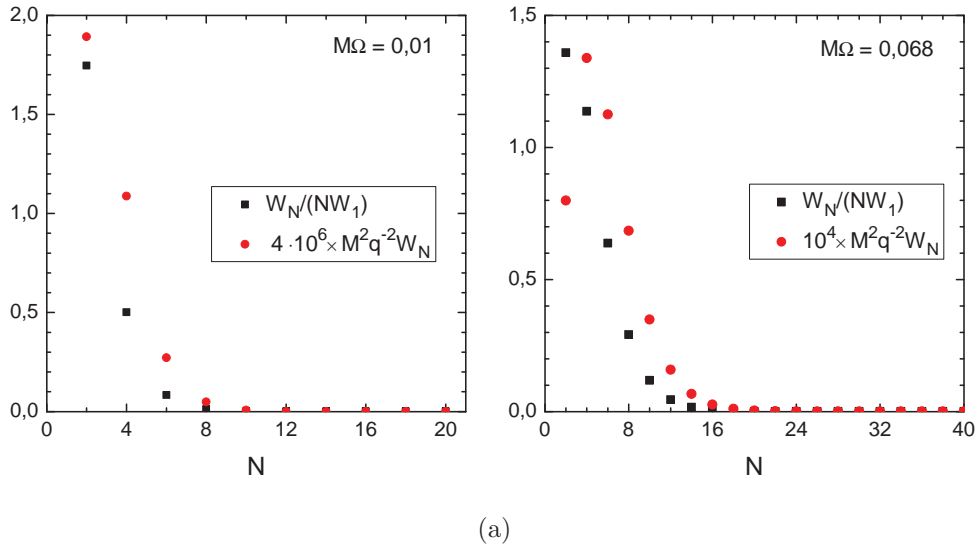


Figura 3.10: Gráficos da potência total W_N emitida por uma configuração de N cargas e da razão $W_N/(NW_1)$ (potência total por N vezes a potência emitida por uma única carga), para uma configuração neutra no limite de (a) baixas ($M\Omega = 0.01$ e 0.068) e (b) altas ($M\Omega = 0.68$ e 0.9) frequências.

3.3.2 Configuração carregada

Para um anel constituído de cargas de mesmo sinal, o cálculo é essencialmente o mesmo. Nesse caso, a corrente é dada por

$$j(x^\mu) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{q}{R^2 \gamma} \delta(r - R) \delta(\theta - \pi/2) \delta(\phi - \Omega t - n\lambda), \quad (3.39)$$

e a somatória que aparece na equação (3.26) envolve apenas termos positivos:

$$A_{\omega lm} = 2iq\gamma^{-1} \sqrt{\omega\pi} \delta(\omega - m\Omega) j_l(\omega R) Y_{lm}^*(\pi/2, 0) \sum_{n=0}^{N-1} e^{imn\lambda}. \quad (3.40)$$

Usando a expressão (3.27), calculamos

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{imn\lambda} = \frac{1 - e^{2\pi im}}{1 - e^{im\lambda}}. \quad (3.41)$$

Nesse caso, portanto, podemos escrever para a taxa de emissão e a potência irradiada $\Gamma_{lm}^+ = f_{lm}^{(\Gamma)}(\Omega) g_m^+(N)$ e $W_{lm}^+ = f_{lm}^{(W)}(\Omega) g_m^+(N)$, respectivamente, com

$$g_m^+(N) = \frac{1 - \cos(2\pi m)}{1 - \cos(2\pi m/N)} \quad (3.42)$$

e $f_{lm}^{(\Gamma)}(\Omega)$ e $f_{lm}^{(W)}(\Omega)$ definidos nas Eqs. (3.32) e (3.33).

Da mesma forma que no caso neutro, o numerador de $g_m^+(N)$ é sempre nulo e a expressão como um todo pode assumir valores diferentes de zero apenas quando o denominador também se anula. Isso acontece quando $\cos(2\pi m/N) = 1$, ou seja,

$$m = Nk, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.43)$$

Nesses casos, a expressão também tende ao limite

$$\lim_{m \rightarrow kN} \frac{1 - \cos(2\pi m)}{1 - \cos(\frac{2\pi m}{N})} = N^2. \quad (3.44)$$

A taxa de emissão e a potência total irradiada podem ser escritas como

$$\Gamma \frac{M}{q^2} = \sum_{l=N}^{\infty} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{l}{N} \rfloor} 2M\Omega (1 - (M\Omega)^{\frac{2}{3}})^{N^3 k} |j_l(Nk(M\Omega)^{\frac{1}{3}})|^2 |Y_{lNk}(\pi/2, 0)|^2, \quad (3.45)$$

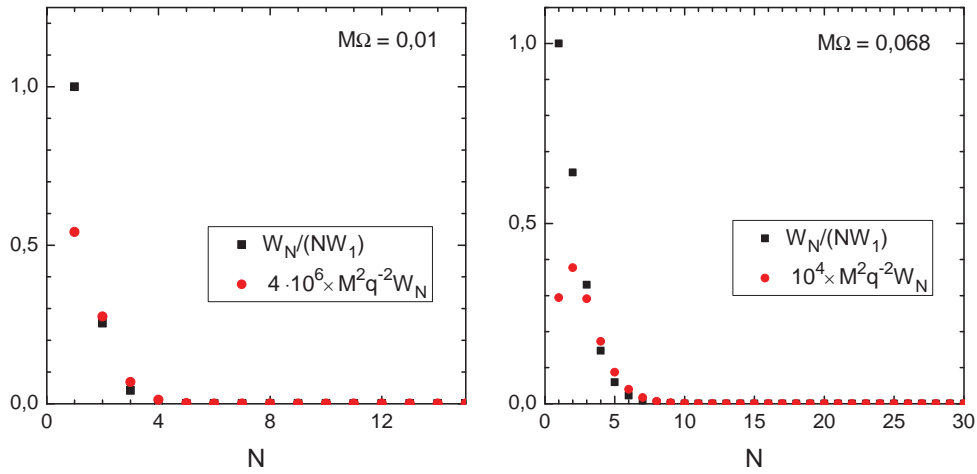
$$W \frac{M^2}{q^2} = \sum_{l=N}^{\infty} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{l}{N} \rfloor} 2(M\Omega)^2 (1 - (M\Omega)^{\frac{2}{3}}) (N^2 k)^2 |j_l(Nk(M\Omega)^{\frac{1}{3}})|^2 |Y_{lNk}(\pi/2, 0)|^2. \quad (3.46)$$

A Figura 3.11 mostra o comportamento da potência irradiada e da razão $\frac{W_N}{NW_1}$ em função do número de cargas no regime de baixas e altas frequências. Observa-se que a potência emitida por uma configuração de N fontes de mesma carga é inferior àquela emitida pela configuração neutra analisada na subseção 3.3.1 (ver discussão a seguir).

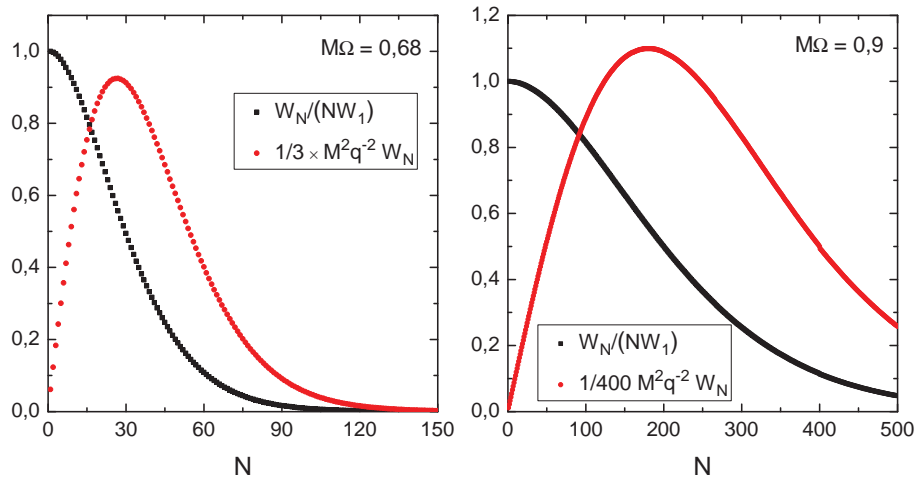
3.3.3 Análise gráfica

Uma interpretação física das Figuras 3.10 e 3.11 pode ser feita como se segue. Quando a velocidade angular das partículas é pequena, a radiação emitida tem frequência baixa (uma vez que $\omega = m\Omega$) e, por conseguinte, grande comprimento de onda. Com isso, à medida que povoamos a órbita, rapidamente as cargas começam a se “enxergar”, ou seja, começa a haver sobreposição dos pacotes de onda, e a interferência suprime a potência irradiada por muitas cargas. No caso de velocidades angulares maiores, a frequência da radiação emitida é mais alta, seu comprimento de onda é menor e, se a órbita é povoada com um número de cargas suficientemente pequeno, elas emitem independentemente ($W_N/(NW_1) \approx 1$). Contudo, à medida que o número de partículas na órbita aumenta, ocorre interferência, primeiramente de forma construtiva ($W_N/(NW_1) > 1$) - no caso da configuração neutra - e então de forma destrutiva ($W_N/(NW_1) < 1$), de forma que, para um número suficientemente grande de partículas, a energia liberada para o infinito é arbitrariamente pequena. As Figuras 3.10 e 3.11 também mostram que, fixado o número de cargas N na órbita, a configuração neutra irradia em geral uma potência superior à emitida por uma configuração carregada. Esse comportamento pode ser entendido com base nas fórmulas (3.35) e (3.43). Fixado N , a configuração neutra admite os números quânticos $m = N/2, 3N/2, \dots$, ao passo que a carregada admite $m = N, 2N, \dots$. Assim, como as ordens multipolares mais baixas em geral contribuem mais, a emissão da configuração neutra é em geral maior do que a da carregada.

Quando analisamos a potência emitida por um anel de cargas em função do número de partículas, vemos que, fixada a velocidade angular, existe um valor de N que maximiza a potência. Um raciocínio de base física semelhante ao exposto na



(a)



(b)

Figura 3.11: Gráficos da potência total W_N emitida por uma configuração de N cargas e da razão $W_N/(NW_1)$, para uma configuração carregada no limite de (a) baixas ($M\Omega = 0.01$ e 0.068) e (b) altas ($M\Omega = 0.68$ e 0.9)

seção 3.2 pode nos dar uma estimativa desse N . Fixado o raio da órbita (e, consequentemente, sua velocidade angular), a interferência começa a acontecer quando

$$\omega_0^{-1}N \approx L, \quad (3.47)$$

onde ω_0^{-1} é o comprimento de onda da radiação emitida e L é o perímetro da órbita, como medidos no referencial da partícula. Como visto na seção 3.2, podemos escrever

$$L = 2\pi R\gamma, \quad (3.48)$$

com $\gamma = 1/\sqrt{1 - R^2\Omega^2}$. Além disso, vimos que observadores comóveis com uma partícula carregada com aceleração própria a observam emissão de radiação preferencialmente com frequência $\omega_0 = a$, o que pode ser interpretado em termos do efeito Unruh. Inserindo (3.48) e

$$\omega_0 \approx a = \gamma^2 M/R^2 \quad (3.49)$$

na Eq. (3.47) e utilizando a terceira lei de Kepler para escrever R em termos de $M\Omega$, obtemos

$$N_{apr} = \frac{2\pi(M\Omega)^{2/3}}{(1 - (M\Omega)^{2/3})^{3/2}}. \quad (3.50)$$

$M\Omega$	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95
N_0	26	34	42	54	70	96	140	222	428	1232
N_+	11	14	18	23	30	41	59	95	188	625
N_{medio}	18.5	24	30	36.5	50	68.5	99.5	159	308	929
N_{apr}	17.6	22.4	28.8	37.8	50.9	71.1	105	171	332	985
erro	5%	7%	4%	4%	2%	4%	6%	8%	8%	6%

Tabela 3.3: Valor de N que maximiza a potência emitida em função da velocidade angular. Aqui, N_0 corresponde à configuração neutra, N_+ à carregada, $N_{medio} = (N_0 + N_+)/2$, N_{apr} é dado pela Eq. (3.50) e erro = $|N_{apr} - N_{medio}|/N_{medio}$.

A Tabela 3.3 compara o valor de N que maximiza a potência emitida como obtido através dos cálculos e aquele advindo da Eq. (3.50), e mostra a consistência do argumento acima.

Capítulo 4

Espaço-tempo de Schwarzschild

A solução das equações de Einstein descoberta por Schwarzschild em 1916 descreve o campo gravitacional exterior a um corpo estático e esfericamente simétrico. Descreve também, como será de interesse aqui, a geometria espaço-temporal após o colapso de um corpo sem carga ou momento angular em um buraco negro. O elemento de linha de Schwarzschild é dado por

$$ds^2 = f(r)dt^2 - f(r)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2, \quad (4.1)$$

com

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} \quad (4.2)$$

e M sendo a massa do buraco negro*. Na região exterior ao buraco negro, $r > 2M$, o espaço-tempo definido pela métrica (4.1) é globalmente hiperbólico e admite um vetor de Killing tipo-tempo global. Essa propriedade, associada à estaticidade dessa geometria, permite que a quantização de um campo escalar, real e não massivo no espaço-tempo de Schwarzschild seja uma aplicação direta do formalismo desenvolvido no Capítulo 2.

4.1 Modos normais

Tomamos, assim, um campo escalar real e não massivo $\hat{\phi}$ em um *background* descrito pela métrica (4.1). O campo pode ser decomposto, como na Eq. (2.9), em um

*As geodésicas circulares nesse espaço-tempo são estudadas brevemente no Apêndice C.

conjunto $\{u_i, u_i^*\}$ de modos de frequência positiva e negativa, que satisfazem

$$\nabla_\mu \nabla^\mu u_i = 0, \quad (4.3)$$

com a derivada covariante dada em termos da métrica (4.1). Explorando a simetria esférica da métrica de Schwarzschild, podemos escrever os modos normais[†] de frequência positiva como

$$u_{\omega lm}(t, r, \theta, \phi) = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \frac{\psi_{\omega l}(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi) e^{-i\omega t}, \quad (4.4)$$

em que $\omega \geq 0$, $l \geq 0$ ($l \in \mathbb{N}$) e $m \in [-l, l]$ são os números quânticos de frequência e momento angular que caracterizam os modos e o fator $\sqrt{\omega/\pi}$ é introduzido por conveniência algébrica. Inserindo esse *ansatz* na Eq.(4.3), obtemos a equação diferencial satisfeita pelas funções radiais $\psi_{\omega l}(r)$:

$$\left[-f(r) \frac{d}{dr} \left(f(r) \frac{d}{dr} \right) + V_S(r) \right] \psi_{\omega l}(r) = \omega^2 \psi_{\omega l}(r), \quad (4.5)$$

para o potencial efetivo

$$V_S(r) = f(r) \left[\frac{2M}{r^3} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right], \quad (4.6)$$

com a função $f(r)$ dada em (4.2). Uma ilustração desse potencial pode ser vista na Figura 4.1, na qual o potencial em Minkowski, $V_M(r) = l(l+1)/r^2$ é também representado para comparação.

A solução da Eq. (4.5) em termos de funções especiais não é conhecida (ver [27], por exemplo), mas podemos analisar o seu comportamento em alguns limites adequados. No que segue, estudaremos primeiramente as formas assintóticas dessa solução e, em seguida, os limites de baixas e altas frequências, usando aproximações analíticas convenientes.

4.1.1 Formas assintóticas

Nas proximidades do horizonte de eventos, $r \approx 2M$, e no limite de $r \rightarrow \infty$, os modos radiais $\psi_{\omega l}(r)$ podem ser expressos de forma simples. Para tanto, reescrevemos primeiramente a Eq. (4.5) em termos da coordenada de tartaruga

$$x \equiv r/2M + \ln(r/2M - 1), \quad (4.7)$$

[†]A normalização dos modos é feita de acordo com o produto interno de Klein-Gordon, Eqs. (2.15) e (2.16).

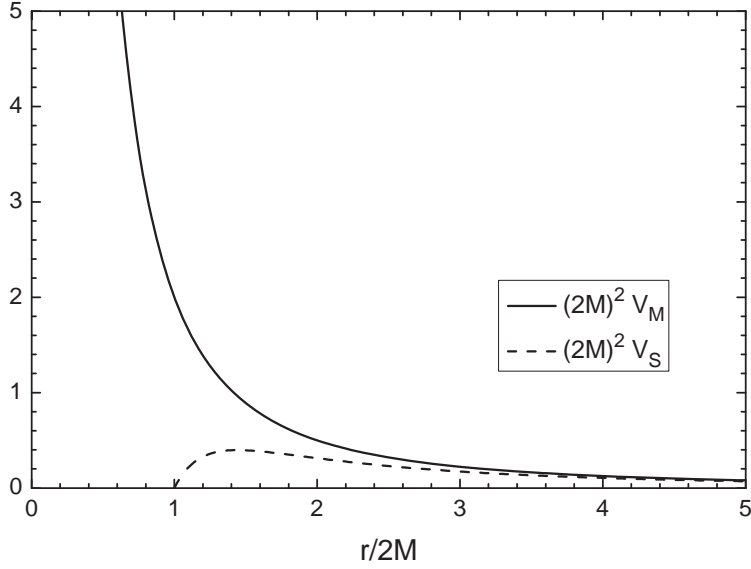


Figura 4.1: Potenciais de espalhamento, V_M e V_S , em função de $r/2M$ para $l = 1$. O potencial V_S está definido apenas fora do horizonte de eventos, $r > 2M$, ao passo que a mesma restrição não existe para V_M . Assintoticamente, os potenciais coincidem.

na forma

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + 4M^2 V_S[r(x)] \right] \psi_{\omega l}(x) = 4M^2 \omega^2 \psi_{\omega l}(x). \quad (4.8)$$

Podemos associar as duas soluções dessa equação, de forma conveniente, a modos $\psi_{\omega l}^{\rightarrow}(x)$ puramente incidentes do horizonte branco passado, \mathcal{H}^- , e modos $\psi_{\omega l}^{\leftarrow}(x)$ puramente incidentes do infinito nulo passado, \mathcal{I}^- . Os modos assim escolhidos são ortogonais pelo produto interno de Klein-Gordon. Isso pode ser visto escolhendo uma folheação $\Sigma_t = \mathcal{H}^- \cup \mathcal{I}^-$ na Eq. (2.15) e notando que $\psi_{\omega l}^{\rightarrow}(x)$ e $\psi_{\omega l}^{\leftarrow}(x)$ se anulam em \mathcal{I}^- e \mathcal{H}^- , respectivamente.

Na vizinhança do horizonte de eventos, $r \approx 2M$, vemos que $x \rightarrow -\infty$ e o potencial efetivo tende a zero, $V_S(r) \approx 0$, ao passo que, longe do horizonte, $r \gg 2M$, $x \gg 1$, e o potencial tende a $V_S(r) \approx l(l+1)/r^2$. Isso nos permite escrever, para os modos vindos do horizonte branco passado,

$$\psi_{\omega l}^{\rightarrow}(x) \approx A_{\omega l} \begin{cases} e^{2iM\omega x} + \mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow} e^{-2iM\omega x} & (x < 0, |x| \gg 1) \\ 2i^{l+1} \mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow} M\omega x h_l^{(1)}(2M\omega x) & (x \gg 1) \end{cases} \quad (4.9)$$

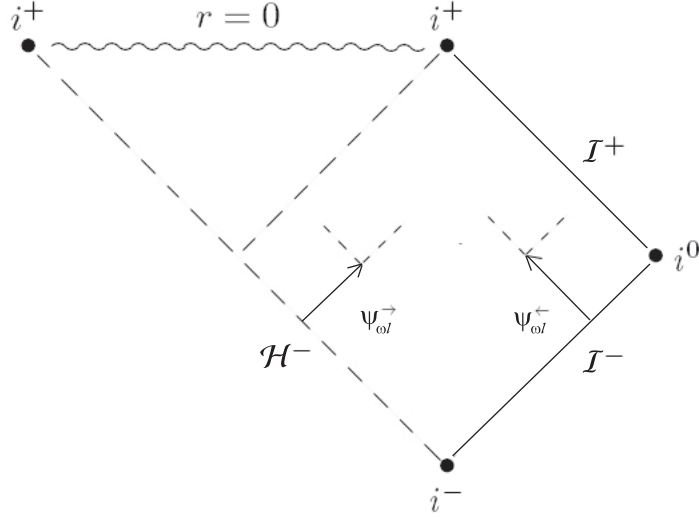


Figura 4.2: Diagrama de Penrose para o espaço-tempo de Schwarzschild e ilustração esquemática dos modos puramente incidentes do horizonte branco passado e do infinito nulo passado.

e, para os modos vindos do infinito nulo passado,

$$\psi_{\omega l}^{\leftarrow}(x) \approx B_{\omega l} \begin{cases} \mathcal{T}_{\omega l}^{\leftarrow} e^{-2iM\omega x} & (x < 0, |x| \gg 1) \\ 2M\omega x [(-i)^{l+1} h_l^{(1)}(2M\omega x)^* + i^{l+1} \mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow} h_l^{(1)}(2M\omega x)] & (x \gg 1) \end{cases} \quad (4.10)$$

onde $h_l^{(1)}(x)$ é a função de Hankel esférica de primeira espécie [20], cujo comportamento assintótico, para $|x| \gg 1$, é dado por $h_l^{(1)}(x) = (-i)^{l+1} e^{ix}/x$. Os coeficientes de reflexão e transmissão obedecem às condições de conservação de probabilidade na forma usual: $|\mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow}|^2 + |\mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow}|^2 = 1$ e $|\mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow}|^2 + |\mathcal{T}_{\omega l}^{\leftarrow}|^2 = 1$. Além disso, esses coeficientes satisfazem $|\mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow}|^2 = |\mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow}|^2$ e $|\mathcal{T}_{\omega l}^{\leftarrow}|^2 = |\mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow}|^2$.

As constantes de normalização $A_{\omega l}$ e $B_{\omega l}$ são obtidas (a menos de uma fase arbitrária) pela exigência de que os modos (4.4) sejam normalizados em relação ao produto interno de Klein-Gordon, Eqs. (2.15) e (2.16). Usando a Eq. (4.8), a integral nas expressões do produto interno pode ser transformada em um termo de superfície,

$$\frac{1}{\omega - \omega'} \left[\psi_{\omega l}(x) \frac{d}{dx} \psi_{\omega' l}^*(x) - \psi_{\omega' l}^*(x) \frac{d}{dx} \psi_{\omega l}(x) \right] \Bigg|_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow +\infty} = \frac{2\pi M}{\omega} \delta(\omega - \omega'), \quad (4.11)$$

e, inserindo nessa expressão as soluções assintóticas (4.9) e (4.10), obtemos $A_{\omega l} =$

$$B_{\omega l} = 1/(2\omega).$$

4.1.2 Regime de baixas frequências

É possível encontrar aproximações analíticas para os modos radiais em alguns limites adequados; aqui, estaremos interessados em aproximações de baixas e altas frequências. O limite de baixas frequências é caracterizado por $2M\omega|x| \ll 1$. Nesse limite, podemos tomar $\omega \approx 0$ na Eq. (4.5) e, fazendo uso das mudanças de variáveis $y \equiv r/2M$ e $z \equiv 2y - 1$, podemos reescrever essa equação como a equação de Legendre para $\psi_{\omega l}(y)/y$,

$$\frac{d}{dz} \left[(1 - z^2) \frac{d}{dz} \left(\frac{\psi_{\omega l}(y)}{y} \right) \right] + l(l + 1) \left(\frac{\psi_{\omega l}(y)}{y} \right) = 0. \quad (4.12)$$

Essa equação admite duas soluções linearmente independentes, dadas pelas funções de Legendre de primeira e segunda espécie, $Q_l(z)$ e $P_l(z)$:

$$\psi_{\omega l}^I(y) \equiv C_{\omega}^I y Q_l[2y - 1], \quad (4.13)$$

$$\psi_{\omega l}^{II}(y) \equiv C_{\omega}^{II} y P_l[2y - 1], \quad (4.14)$$

onde C_{ω}^I e C_{ω}^{II} são constantes de normalização. Para determiná-las, devemos impor consistência entre as soluções (4.13) e (4.14) e os limites assintóticos (4.9) e (4.10), da forma que segue [22]:

Para determinar $\mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow}$, notamos que, para $2M\omega|x| \ll 1$,

$$\begin{aligned} \psi_{\omega l}^{\rightarrow}(x) &\approx (2\omega)^{-1} (e^{2iM\omega x} + \mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow} e^{-2iM\omega x}) \\ &\approx (2\omega)^{-1} (1 + 2iM\omega x + \mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow} - i\mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow} 2M\omega x) \\ &\approx Mx \left[\frac{1 + \mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow}}{2M\omega x} + i(1 - \mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow}) \right]. \end{aligned}$$

Para que essa solução seja bem comportada quando $\omega \approx 0$, devemos impor $\mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow} \approx -1 + O(\omega)$ e, conseqüentemente,

$$\psi_{\omega l}^{\rightarrow}(x) \approx 2iMx \quad (x < 0, |x| \gg 1). \quad (4.15)$$

Como modos de baixa frequência vindos do horizonte branco passado devem ser preferencialmente refletidos pelo potencial do buraco negro, devemos associar $\psi_{\omega l}^{\rightarrow}$ a $\psi_{\omega l}^I$, pois essa solução decresce assintoticamente, uma vez que $Q_l(z) \approx z^{-l-1}$ para z

grande, ao passo que $P_l(z) \approx z^l$ nesse regime. Fazemos, portanto, $C^{II} = 0$ e fixamos C^I da seguinte forma: primeiramente escrevemos

$$Q_l(z) = \frac{P_l(z)}{2} \ln \frac{z+1}{z-1} - \sum_{k=1}^l \frac{1}{k} P_{k-1}(z) P_{l-k}(z). \quad (4.16)$$

Quando $r \approx 2M$, $z \approx 1$ e temos que $P_l(z) \approx 1$ e

$$\begin{aligned} \psi_{\omega l}^I &\approx C^I \left(\frac{1}{2} \ln \frac{y}{y-1} - \sum_{k=1}^l \frac{1}{k} \right) \\ &\approx C^I \left(\frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \ln(y-1) - \sum_{k=1}^l \frac{1}{k} \right) \\ &\approx C^I \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2} - \sum_{k=1}^l \frac{1}{k} \right). \end{aligned}$$

Assim, para $x < 0$ e $|x| \gg 1$, $\psi_{\omega l}^I \approx -C^I x/2$ e, comparando com a solução assintótica, temos que $C^I = -4lM$ e

$$\psi_{\omega l}^I(r) = 2rQ_l(r/M - 1), \quad (4.17)$$

a menos de uma fase arbitrária.

Para determinar a constante C^{II} , notamos que os modos de baixa frequência vindos do infinito nulo passado, \mathcal{I}^- , devem ser refletidos para \mathcal{I}^+ . Como $Q_l(z) \approx -\ln|z-1|^{1/2}$ quando $z \approx 1$, devemos impor $C^I = 0$. Por outro lado, para $x \gg 1$ e ω pequeno ($2M\omega x \ll 1$) notamos que

$$j_l(2M\omega x) \approx \frac{2^l l!}{(2l+1)!} (2M\omega x)^l, \quad (4.18)$$

$$\eta_l(2M\omega x) \approx -\frac{(2l)!}{2^l l!} (2M\omega x)^{-(l+1)}, \quad (4.19)$$

e $\psi_{\omega l}^{\leftarrow}(x)$ se escreve como

$$\begin{aligned} \psi_{\omega l}^{\leftarrow}(x) &\approx \frac{1}{\omega} (-i)^{l+1} M\omega x \left(\frac{2^l l!}{(2l+1)!} (2M\omega x)^l + i \frac{(2l)!}{2^l l!} (2M\omega x)^{-(l+1)} \right) \\ &+ \frac{1}{\omega} i^{l+1} \mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow} M\omega x \left(\frac{2^l l!}{(2l+1)!} (2M\omega x)^l - i \frac{(2l)!}{2^l l!} (2M\omega x)^{-(l+1)} \right). \end{aligned}$$

Para o coeficiente de reflexão, impomos $\overline{\mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow}} \approx (-1)^{l+1}$ para ω pequeno, de forma que $\psi_{\omega l}^{\leftarrow}(x)$ se comporte como x^{l+1} no domínio especificado de x . Assim,

$$\psi_{\omega l}^{\leftarrow}(x) \approx \frac{2^{2l+1}(-i)^{l+1}l!\omega^l(Mx)^{l+1}}{(2l+1)!}. \quad (4.20)$$

Por outro lado, para $z \gg 1$,

$$P_l(z) \approx \frac{(2l)!}{2^l(l!)^2} z^l \quad (4.21)$$

e, tomando $z = 2y + 1 \approx 2y$, temos que

$$\psi_{\omega l}^{II} \approx C^{II} \frac{(2l)!}{(l!)^2} y^{l+1}. \quad (4.22)$$

Comparando as expressões para $\psi_{\omega l}$ e $\psi_{\omega l}^{II}$ e notando que $x \approx y$ no infinito, obtemos

$$C^{II} = \frac{2^{2l+1}(-i)^{l+1}(l!)^3\omega^l M^{l+1}}{(2l+1)!(2l)!}. \quad (4.23)$$

Portanto,

$$\psi_{\omega l}^{II}(r) = \frac{2^{2l}(-i)^{l+1}(l!)^3(M\omega)^l}{(2l+1)!(2l)!} r P_l(r/M - 1). \quad (4.24)$$

As Eqs. (4.17) e (4.24) caracterizam, assim, a parte radial dos modos (4.4) no limite de baixas frequências.

4.1.3 Regime de altas frequências

Uma boa aproximação para as funções radiais, em especial no limite de frequências altas ($2M\omega|x| \gg 1$), é dada pelo método WKB (ver, por exemplo, [24]). Aqui, não vamos abordar esse método de forma exaustiva, mas apenas recordar algumas das principais ideias nele envolvidas.

Notamos, primeiramente, que a equação para os modos radiais,

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi_{\omega l}(x) - 4M^2(\omega^2 - V_S(x))\psi_{\omega l}(x) = 0, \quad (4.25)$$

assemelha-se à equação de Schrödinger unidimensional com ω^2 fazendo o papel de energia efetiva.

Se o potencial $V_S(x)$ é constante, essa equação tem como soluções $e^{\pm ik_{\omega l}x}$ (com $k_{\omega l} = 2M\sqrt{\omega^2 - V_S}$); se ele varia lentamente, podemos considerar soluções da forma $e^{\pm iu_{\omega l}(x)}$. Inserindo esse *ansatz* na Eq. (4.8) e definindo

$$k_{\omega l}(x) \equiv 2M\sqrt{\omega^2 - V_S(x)}, \quad (4.26)$$

obtemos a seguinte equação diferencial para $u_{\omega l}(x)$:

$$i\frac{d^2 u_{\omega l}}{dx^2} - \left(\frac{du_{\omega l}}{dx}\right)^2 + [k_{\omega l}(x)]^2 = 0. \quad (4.27)$$

Em ordem zero, despreza-se o termo de derivada segunda e obtém-se, simplesmente,

$$u_{\omega l}^{(0)}(x) = \pm \int^x k_{\omega l}(x) dx + C. \quad (4.28)$$

Iterações sucessivas fornecem aproximações cada vez melhores para a solução. Em primeira ordem, obtemos a aproximação WKB, dada por [24]

$$\psi_{\omega l}(x) \approx e^{\pm iu_{\omega l}^{(1)}(x)} = \frac{1}{\sqrt{k_{\omega l}(x)}} \exp\left(\pm i \int^x k_{\omega l}(x) dx\right). \quad (4.29)$$

O método WKB é válido na medida em que o potencial varia lentamente em relação ao comprimento de onda efetivo $\lambda = 1/k_{\omega l}$; em outras palavras, quando o potencial é aproximadamente constante em uma região $L \gg \lambda$. Matematicamente, essa condição pode ser expressa como

$$k_{\omega l}^{-1} d(\ln k_{\omega l})/dx \ll 1. \quad (4.30)$$

Essa aproximação claramente não é válida nas vizinhanças de um ponto de retorno clássico, em que a energia efetiva se iguala ao potencial ($\omega^2 = V_S(x)$), uma vez que $1/k_{\omega l}$ diverge nesses pontos. Um aspecto crucial do método WKB é, portanto, a conexão das soluções definidas em regiões separadas por pontos singulares desse tipo. As fórmulas de conexão são obtidas pela linearização do potencial nas vizinhanças do ponto de retorno. A equação para $k_{\omega l}(x)$ assume, então, a forma da equação de Airy e, pela análise das formas assintóticas das soluções dessa equação, determinam-se os coeficientes que tornam contínua a solução em todo o espaço.

Para um potencial como o representado na Figura 4.3, com pontos de retorno x_- e x_+ , as fórmulas de conexão das regiões com $x < x_-$ e $x_- < x < x_+$ são [24]

$$\frac{1}{\sqrt{k_{\omega l}}} \left(\frac{B}{2} - iA\right) e^{i \int_{x_-}^{x-} k_{\omega l} dx + \frac{i\pi}{4}} + \frac{1}{\sqrt{k_{\omega l}}} \left(\frac{B}{2} + iA\right) e^{-i \int_{x_-}^{x-} k_{\omega l} dx - \frac{i\pi}{4}}$$

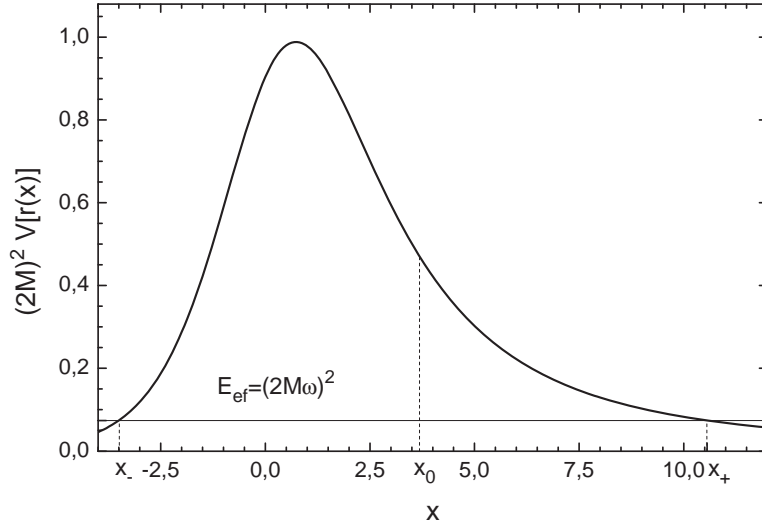


Figura 4.3: Ilustração do potencial $V_S(r(x))$ (Eq.(4.6)) em função de x para $l = 2$. No gráfico, representamos o ponto x_0 relativo à órbita com $R = 6M$, a energia efetiva $E_{ef} \equiv (2M\omega)^2 = (2mM\Omega)^2 \approx (2lM\Omega)^2$ associada a essa órbita e momento angular e os pontos de retorno clássicos $x_- \approx -3.5$ e $x_+ \approx 10.6$, em que $V_S = \omega^2$.

$$\iff \frac{A}{\sqrt{\kappa_{\omega l}}} e^{-\int_{x_-}^x \kappa_{\omega l} dx} + \frac{B}{\sqrt{\kappa_{\omega l}}} e^{\int_{x_-}^x \kappa_{\omega l} dx} \quad (4.31)$$

e, das regiões com $x_- < x < x_+$ e $x > x_+$,

$$\begin{aligned} & \frac{A}{\sqrt{\kappa_{\omega l}}} e^{-\int_{x_-}^x \kappa_{\omega l} dx} + \frac{B}{\sqrt{\kappa_{\omega l}}} e^{\int_{x_-}^x \kappa_{\omega l} dx} \iff \\ & \frac{1}{\sqrt{k_{\omega l}}} \left(\frac{A}{2} e^{-\int_{x_-}^{x_+} \kappa_{\omega l} dx} - \imath B e^{\int_{x_-}^{x_+} \kappa_{\omega l} dx} \right) e^{\imath \int_{x_+}^x k_{\omega l} dx + \frac{\imath\pi}{4}} \\ & + \frac{1}{\sqrt{k_{\omega l}}} \left(\frac{A}{2} e^{-\int_{x_-}^{x_+} \kappa_{\omega l} dx} + \imath B e^{\int_{x_-}^{x_+} \kappa_{\omega l} dx} \right) e^{-\imath \int_{x_-}^x k_{\omega l} dx - \frac{\imath\pi}{4}}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

com $k_{\omega l}$ dado por (4.26) para $\omega^2 > V_S(x)$ e $\kappa_{\omega l}$ definido como

$$\kappa_{\omega l}(x) \equiv 2M \sqrt{V_S(x) - \omega^2} = \imath k_{\omega l}(x), \quad \omega^2 < V_S(x). \quad (4.33)$$

Notamos que as duas constantes, A e B , necessárias para a caracterização completa da solução, devem ser determinadas por meio das condições de contorno adequadas ao problema em questão.

Para aplicarmos o método WKB na aproximação das funções $\psi_{\omega l}$, notamos, primeiramente, que a energia efetiva, ω^2 , é sempre menor do que o máximo do potencial (4.6) para as órbitas circulares permitidas no espaço-tempo de Schwarzschild [10]. Nas regiões em que $V_S(x) < \omega^2$, ou seja, $(-\infty, x_-)$ e (x_+, ∞) , podemos escrever, desde que a condição (4.30) seja satisfeita,

$$\psi_{\omega l}^{\leftarrow}(x) \approx \frac{A_{\omega}^{\leftarrow}}{\sqrt{k_{\omega l}}} \begin{cases} \mathcal{T}_{\omega l}^{\leftarrow} e^{-i(\sigma_{\omega l}(x)-\pi/4)} & (x < 0, |x| \gg 1) \\ e^{-i(\rho_{\omega l}(x)+\pi/4)} + \mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow} e^{i(\rho_{\omega l}(x)+\pi/4)} & (x \gg 1) \end{cases} \quad (4.34)$$

e

$$\psi_{\omega l}^{\rightarrow}(x) \approx \frac{A_{\omega}^{\rightarrow}}{\sqrt{k_{\omega l}}} \begin{cases} \mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow} e^{-i(\sigma_{\omega l}(x)-\pi/4)} + e^{i(\sigma_{\omega l}(x)-\pi/4)} & (x < 0, |x| \gg 1) \\ \mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow} e^{i(\rho_{\omega l}(x)+\pi/4)} & (x \gg 1) \end{cases}, \quad (4.35)$$

onde definimos

$$\sigma_{\omega l}(x) \equiv \int_{x_-}^x k_{\omega l}(x') dx' \quad (4.36)$$

e

$$\rho_{\omega l}(x) \equiv \int_{x_+}^x k_{\omega l}(x') dx'. \quad (4.37)$$

As constantes de normalização A_{ω}^{α} são determinadas pela comparação das expressões fornecidas pelo método WKB com as formas assintóticas dadas pelas Eqs. (4.9) e (4.10). Podemos reescrever estas expressões como

$$\psi_{\omega l}^{\leftarrow}(x) \approx \frac{1}{2\omega} \begin{cases} \mathcal{T}_{\omega l}^{\leftarrow} e^{-i\omega r} & (r \rightarrow 2M) \\ e^{-i\omega r} + \mathcal{R}_{\omega l}^{\leftarrow} e^{i\omega r} & (r \rightarrow \infty) \end{cases} \quad (4.38)$$

e

$$\psi_{\omega l}^{\rightarrow}(x) \approx \frac{1}{2\omega} \begin{cases} e^{i\omega r} + \mathcal{R}_{\omega l}^{\rightarrow} e^{-i\omega r} & (r \rightarrow 2M) \\ \mathcal{T}_{\omega l}^{\rightarrow} e^{i\omega r} & (r \rightarrow \infty) \end{cases} \quad (4.39)$$

Uma comparação direta com as Eqs. (4.9) e (4.10) nos permite deduzir que $|A_{\omega}^{\alpha}| = \sqrt{M/2\omega}$, $\alpha = \rightarrow, \leftarrow$.

Tomando, agora, o caso em que $V(x) > \omega^2$, que ocorre no intervalo (x_-, x_+) , podemos escrever, no limite de validade do método WKB,

$$\psi_{\omega l}^{\leftarrow}(x) \approx -i \frac{A_{\omega}^{\leftarrow}}{\sqrt{\kappa_{\omega l}}} e^{-\xi_{\omega l}(x)} \quad (4.40)$$

e

$$\psi_{\omega l}^{\rightarrow}(x) \approx -i \frac{A_{\omega}^{\rightarrow}}{\sqrt{\kappa_{\omega l}}} e^{\xi_{\omega l}(x) - \Theta_{\omega l}}, \quad (4.41)$$

onde definimos

$$\xi_{\omega l}(x) \equiv \int_x^{\tilde{x}^+} \kappa_{\omega l}(x') dx' \quad (4.42)$$

e o fator de barreira

$$\Theta_{\omega l} \equiv \int_{x_-}^{\tilde{x}^+} \kappa_{\omega l}(x) dx. \quad (4.43)$$

Os coeficientes de transmissão e reflexão, $|\mathcal{T}_{\omega l}^\alpha|^2$ e $|\mathcal{R}_{\omega l}^\alpha|^2$, podem ser facilmente calculados a partir das fórmulas de conexão (4.31) e (4.32). Para uma barreira larga, em que o fator de barreira é grande ($\Theta_{\omega l} \gg 1$), eles são dados por

$$|\mathcal{T}_{\omega l}^\alpha|^2 \approx e^{-2\Theta_{\omega l}} \quad (4.44)$$

e, conseqüentemente, $|\mathcal{R}_{\omega l}^\alpha|^2 \approx 1 - e^{-2\Theta_{\omega l}}$.

Como já foi dito, pode-se mostrar que o raio das órbitas circulares no espaço-tempo de Schwarzschild, $R = (M\Omega^{-2})^{\frac{1}{3}}$, está em geral entre os pontos de retorno clássicos r_- e r_+^{\ddagger} (ver Figura 4.3) [10]. Assim, sempre que a condição (4.30) é satisfeita, as funções de onda radiais podem ser aproximadas pelas expressões (4.40) e (4.41), com $|A_\omega^\alpha| = \sqrt{M/2\omega}$.

4.2 Radiação emitida por uma fonte escalar em movimento circular

Uma vez obtidas expressões para os modos normais, vamos revisitar alguns resultados sobre a radiação emitida por uma fonte escalar em movimento circular geodésico no plano equatorial da geometria de Schwarzschild (veja, por exemplo, [8, 9, 10] para uma abordagem clássica e [4, 5] para uma abordagem semiclássica). Tal fonte pode ser descrita pela corrente normalizada

$$j(x^\mu) = \frac{q}{\sqrt{-g}u^0} \delta(r - R) \delta(\theta - \pi/2) \delta(\phi - \Omega t). \quad (4.45)$$

Aqui, Ω representa a velocidade angular da partícula, como medida por observadores estáticos no infinito, e u^0 é a componente zero da quadrivelocidade da fonte,

$$u^\mu = (f(R) - R^2\Omega^2)^{-1/2} (1, 0, 0, \Omega). \quad (4.46)$$

[‡]Quando $r \rightarrow 3M$, porém, $r_+ \rightarrow 3M$ (tomando também $l \rightarrow \infty$).

A quadriaceleração da partícula é dada por $a^\mu = u^\nu \nabla_\nu u^\mu$, ou, explicitamente,

$$a^\mu = -\frac{f(R)}{f(R) - R^2\Omega^2} \left(0, R\Omega^2 - \frac{M}{R^2}, 0, 0 \right). \quad (4.47)$$

Uma vez que o movimento é geodésico, o escalar $a = \sqrt{a^\mu a_\mu}$ deve se anular, o que implica em uma relação entre os valores possíveis para o raio da órbita e a velocidade angular[§]:

$$R^3\Omega^2 = M. \quad (4.48)$$

A implementação do acoplamento da fonte (4.45) e do campo escalar é feita via a ação de interação (2.21). A amplitude de emissão a nível de árvore, Eq. (2.22), é dada, nesse caso, por[¶]

$$A_{\omega lm} = 2iq\sqrt{\omega\pi}\sqrt{f(R) - R^2\Omega^2}\frac{\psi_{\omega l}(R)}{R}Y_{lm}(\pi/2, 0)\delta(\omega - m\Omega). \quad (4.49)$$

Também aqui, a frequência emitida é dada em termos da velocidade angular da fonte e do número quântico magnético m por $\omega = m\Omega$, o que implica em que apenas são emitidas ondas com $m > 0$.

A taxa de emissão e a potência emitida são obtidas diretamente da amplitude:

$$\Gamma_{lm} = 2q^2m\Omega[f(R) - R^2\Omega^2]|\psi_{m\Omega, l}(R)/R|^2|Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2, \quad (4.50)$$

$$W_{lm} = 2q^2m^2\Omega^2[f(R) - R^2\Omega^2]|\psi_{m\Omega, l}(R)/R|^2|Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2. \quad (4.51)$$

Como detalhado no Apêndice C, a geometria de Schwarzschild comporta órbitas circulares estáveis até $R = 6M$. As velocidades angulares alcançadas nessa região são relativamente pequenas e a aproximação de baixas frequências pode ser usada com alguma acurácia. Já entre $R = 6M$ e $R = 3M$, órbitas circulares ainda são possíveis, mas sem estabilidade. Em particular, a órbita geodésica em $R = 3M$ é tipo-luz. Assim, nessa região, velocidades altas podem ser alcançadas e entramos em um regime de altas frequências. Nas subseções seguintes, usaremos os modos obtidos nas seções anteriores para estudar a emissão de radiação cíclotron (baixas frequências) e síncrotron (altas frequências) por uma fonte escalar no espaço-tempo de Schwarzschild.

[§]No Apêndice C, pode-se encontrar outra derivação dessa expressão, que surge ao estudarmos as geodésicas no espaço-tempo de Schwarzschild.

[¶]Cabe notar que, para o cálculo da amplitude de emissão, o estado $|0\rangle$ utilizado na Eq. (2.22) foi o vácuo de Boulware [25]. Se o vácuo empregado tivesse sido o de Unruh ou de Hartle-Hawking [21, 28], a Eq. (4.49) estaria associada à radiação líquida emitida pela fonte, uma vez que as taxas de absorção e emissão estimulada (induzidas pela presença de fluxos térmicos) são iguais.

4.2.1 Radiação cíclotron

O regime de radiação cíclotron corresponde ao limite de baixas frequências, caracterizado por $M\omega \ll 1$, com $\omega = m\Omega$. Nesse caso, utilizamos os modos (4.17) e (4.24) para escrever a taxa de emissão de partículas com números quânticos l e m como $\Gamma_{lm} = \Gamma_{lm}^{\rightarrow} + \Gamma_{lm}^{\leftarrow}$, com

$$\begin{aligned}\Gamma_{lm}^{\rightarrow}(\Omega) &\approx 8q^2 m \Omega (f(R) - R^2 \Omega^2) |Q_l(R/M - 1)|^2 |Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2 \quad \text{e} \quad (4.52) \\ \Gamma_{lm}^{\leftarrow}(\Omega) &\approx \frac{2^{4l+1} q^2 (l!)^6 M^{2l} (m\Omega)^{2l+1}}{[(2l)!]^2 [(2l+1)!]^2} (f(R) - R^2 \Omega^2) |P_l(R/M - 1)|^2 |Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2.\end{aligned}\quad (4.53)$$

Para a potência irradiada, temos $W_{lm} = W_{lm}^{\rightarrow} + W_{lm}^{\leftarrow}$, com

$$\begin{aligned}W_{lm}^{\rightarrow}(\Omega) &\approx 8q^2 m^2 \Omega^2 (f(R) - R^2 \Omega^2) |Q_l(R/M - 1)|^2 |Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2 \quad \text{e} \quad (4.54) \\ W_{lm}^{\leftarrow}(\Omega) &\approx \frac{2^{4l+1} q^2 (l!)^6 m^{2l+2} M^{2l} \Omega^{2l+2}}{[(2l)!]^2 [(2l+1)!]^2} (f(R) - R^2 \Omega^2) |P_l(R/M - 1)|^2 |Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2.\end{aligned}\quad (4.55)$$

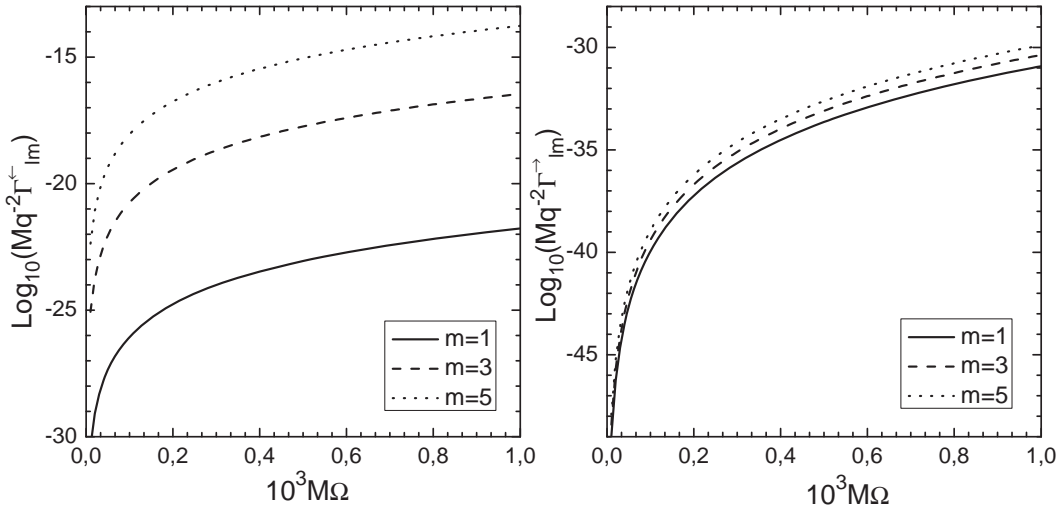


Figura 4.4: Taxa de produção de partículas Γ_{lm}^{α} em função da velocidade angular Ω para $l = 5$ e diferentes valores de m . A maior contribuição é a de $m = l$.

Nas análises gráficas, utilizamos a relação $R(\Omega) = (M\Omega^{-2})^{1/3}$ para expressar R em função de M e Ω , de forma que os observáveis sejam funções apenas dessas quantidades, que são medidas por observadores estáticos no infinito.

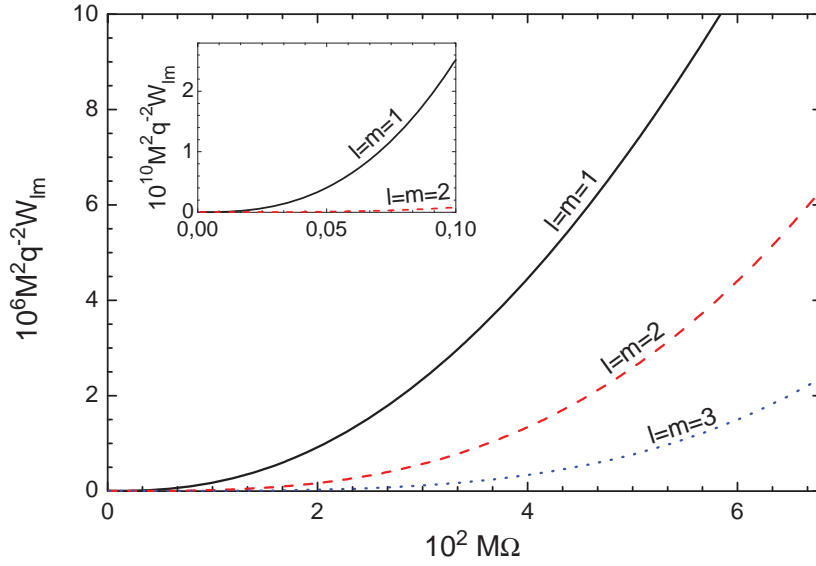


Figura 4.5: Potência irradiada, W_{lm} , em função da velocidade angular da fonte para $0 < M\Omega < 0.068$, sendo que o valor máximo considerado, $M\Omega = 0.068$, corresponde à órbita com $R = 6M$, última órbita circular estável permitida na geometria de Schwarzschild. Na construção deste gráfico, foi utilizada a aproximação de baixas frequências para os modos normais.

As Figuras 4.4 e 4.5 ilustram algumas propriedades da radiação cíclotron escalar. Na Figura 4.4, vemos que a contribuição dos modos com $\alpha = \leftarrow$ é substancialmente maior do que a dos modos $\alpha = \rightarrow$ no intervalo de velocidades considerado. Além disso, vemos que a maior contribuição vem do número quântico $l = m$, como observado anteriormente (ver Figura 3.1 e a discussão que a precede). Da Figura 4.5, vemos que, até a última órbita estável do espaço-tempo de Schwarzschild, $R = 6M$, predominam os modos de momento angular mais baixo. Para velocidades angulares suficientemente pequenas, apenas o modo com $l = 1$ contribui significativamente para a radiação emitida.

Por fim, na Figura 4.6 se compara a emissão de radiação no espaço-tempo de Schwarzschild e de Minkowski, no limite de baixas frequências. Vemos que a razão W_S/W_M entre a potência total calculada assumindo o espaço-tempo de Schwarzschild e aquela assumindo o espaço-tempo de Minkowski com gravitação Newtoniana tende a 1 para velocidades angulares baixas e diminui à medida que a

velocidade angular aumenta. O limite $W_S/W_M \rightarrow 1$ para $M\Omega \rightarrow 0$ está de acordo com o fato de o espaço-tempo de Schwarzschild ser essencialmente plano para comprimentos de onda muito maiores que o raio de Schwarzschild.

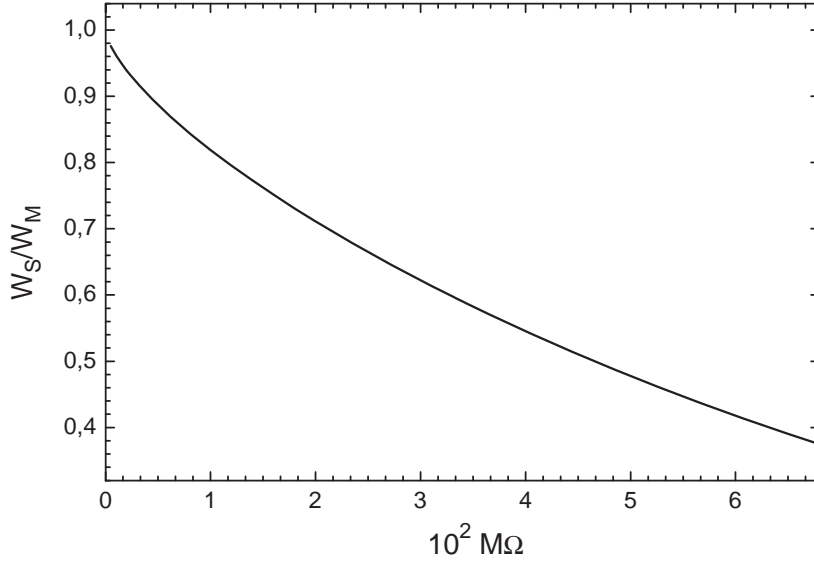


Figura 4.6: Razão W_S/W_M entre a potência emitida no espaço-tempo de Schwarzschild e de Minkowski em função da velocidade angular da fonte no limite de baixas frequências. As aproximações (4.17) e (4.24) foram utilizadas para as funções radiais. Uma análise semelhante usando também cálculos numéricos pode ser encontrada em [4] (ver Figura 3 dessa referência).

4.2.2 Radiação síncrotron

O regime de radiação síncrotron é caracterizado por altas velocidades angulares e é alcançado, no espaço-tempo de Schwarzschild, nas proximidades da órbita fotônica em $R = 3M$. Nesse regime, usamos a aproximação WKB para as funções de onda radiais^{||}. Inserindo os modos radiais (4.40) e (4.41) na expressão (4.50) para a taxa

^{||}Uma análise numérica da radiação síncrotron emitida por uma fonte em órbita ultrarrelativística ao redor de um buraco negro de Schwarzschild pode ser encontrada em [5]. Uma comparação da análise numérica e do método WKB é feita em [6]: o que se conclui é que esse método fornece uma boa aproximação para as funções de onda radiais em especial no limite de altas frequências.

de emissão, obtemos $\Gamma_{lm} = \Gamma_{lm}^{\rightarrow} + \Gamma_{lm}^{\leftarrow}$, com

$$\Gamma_{lm}^{\rightarrow}(\Omega) \approx q^2 M(f(R) - R^2 \Omega^2) R^{-2} \kappa_{lm}^{-1}(R) e^{2(\xi_{lm}(R) - \Theta_{lm}(R))} |Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2, \quad (4.56)$$

$$\Gamma_{lm}^{\leftarrow}(\Omega) \approx q^2 M(f(R) - R^2 \Omega^2) R^{-2} \kappa_{lm}^{-1}(R) e^{-2\xi_{lm}(R)} |Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2, \quad (4.57)$$

e $\xi_{\omega l}(R)$ e $\Theta_{\omega l}(R)$ definidos em (4.42) e (4.43). De forma análoga, escrevemos, para a potência emitida (Eq. (4.51)), $W_{lm} = W_{lm}^{\rightarrow} + W_{lm}^{\leftarrow}$, com

$$W_{lm}^{\rightarrow}(\Omega) \approx q^2 M m \Omega (f(R) - R^2 \Omega^2) R^{-2} \kappa_{lm}^{-1}(R) e^{2(\xi_{lm}(R) - \Theta_{lm}(R))} |Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2, \quad (4.58)$$

$$W_{lm}^{\leftarrow}(\Omega) \approx q^2 M m \Omega (f(R) - R^2 \Omega^2) R^{-2} \kappa_{lm}^{-1}(R) e^{-2\xi_{lm}(R)} |Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2. \quad (4.59)$$

A potência total é dada pela soma em todos os números quânticos. Contudo, ao contrário do regime de baixas frequências, em que praticamente toda a radiação emitida escapa para o infinito, neste caso uma boa parte da radiação pode ser absorvida pelo buraco (cerca de 50% quando a órbita tende à órbita fotônica [6]). Aqui, porém, não levaremos essa perda explicitamente em conta e trabalharemos com a potência *total* emitida e não com a potência *observada* no infinito.

A radiação síncrotron é caracterizada pela excitação de altos valores de l e m , altas frequências (uma vez que $\omega = m\Omega$) e por uma forte colimação no plano da órbita [26, 10]. Algumas dessas propriedades ficam explícitas na análise gráfica abaixo.

Na Figura 4.7, vemos que, para órbitas próximas à órbita fotônica, modos com valores maiores de momento angular ganham importância. Dessa figura, nota-se que, quanto maior é o valor de $l = m$, maior é o valor máximo assumido pela potência, $W_{lm}^{\alpha \max}(\Omega)$, e maior é a velocidade angular Ω associada a esse máximo. A contribuição de altos múltiplos de l e m pode ser mais claramente vista na Figura 4.8, que mostra a potência W_{lm} emitida em função do número quântico l ($m = l$) para alguns valores de Ω no limite de altas frequências. Quanto mais a trajetória se aproxima da órbita fotônica, maior é a faixa de números quânticos l e m excitados e maior é o valor de $m = l$ que fornece o máximo para a potência.

Além disso, notamos que, fixados l e m , a contribuição dos modos vindos do infinito nulo passado ($\alpha = \leftarrow$) é maior que aquela dos modos vindos do horizonte branco passado ($\alpha = \rightarrow$) para quase todas as órbitas circulares, com exceção daquelas muito próximas de $R = 3M$, o que pode ser observado mais claramente na Figura 4.9.

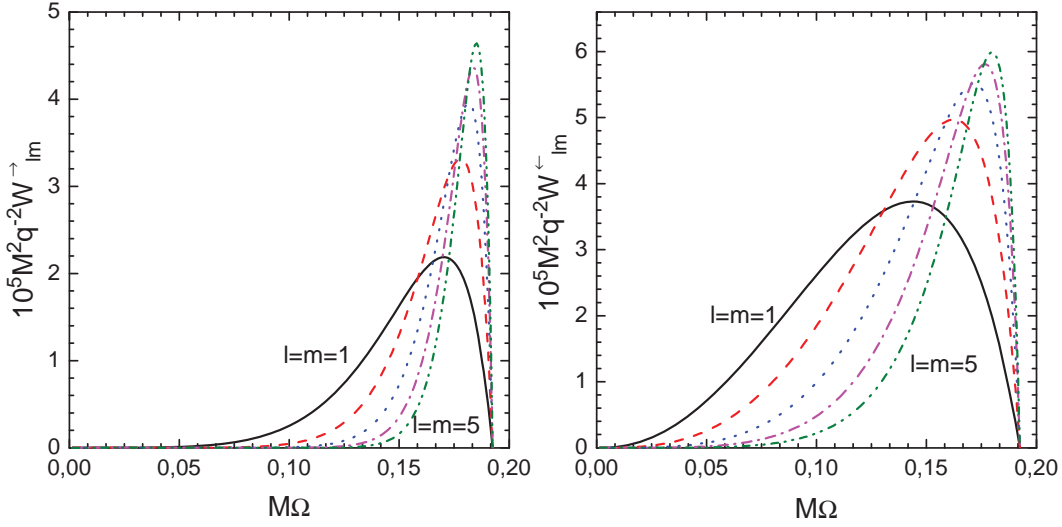


Figura 4.7: Potência emitida, W_{lm}^α , em função da velocidade angular Ω para $l = m$ variando de 1 a 5. A aproximação WKB foi utilizada para os modos radiais na construção deste e dos demais gráficos desta seção.

Uma comparação da emissão de radiação no espaço-tempo de Minkowski e de Schwarzschild, no limite de altas frequências, pode ser vista na Figura 4.10. Para velocidades angulares altas (e, conseqüentemente, comprimentos de onda pequenos da radiação emitida), a curvatura espaço-temporal passa a exercer um papel fundamental. Em órbitas ultrarrelativísticas, próximas à órbita fotônica em $R = 3M$, as partículas emitidas podem ser altamente energéticas. De fato, para $R \rightarrow 3M$, o valor dominante de $m = l$ aumenta irrestritamente, bem como a frequência das partículas emitidas, $\omega = m\Omega$ (ver Figura 4.8 e a discussão que acompanha a Eq. (4.63) a seguir). Assim, a razão W_S/W_M deve divergir nesse limite, o que é indicado pela Figura 4.10.

Estimativa do valor dominante de m

A Figura 4.8 sugere que, quanto maior é a velocidade angular da fonte, maior é o número quântico magnético predominantemente emitido. Uma estimativa desse número é importante, por exemplo, para se justificar a escolha de um certo valor de corte nas somas em l e m no cálculo da potência *total*. Em [10], podemos encontrar

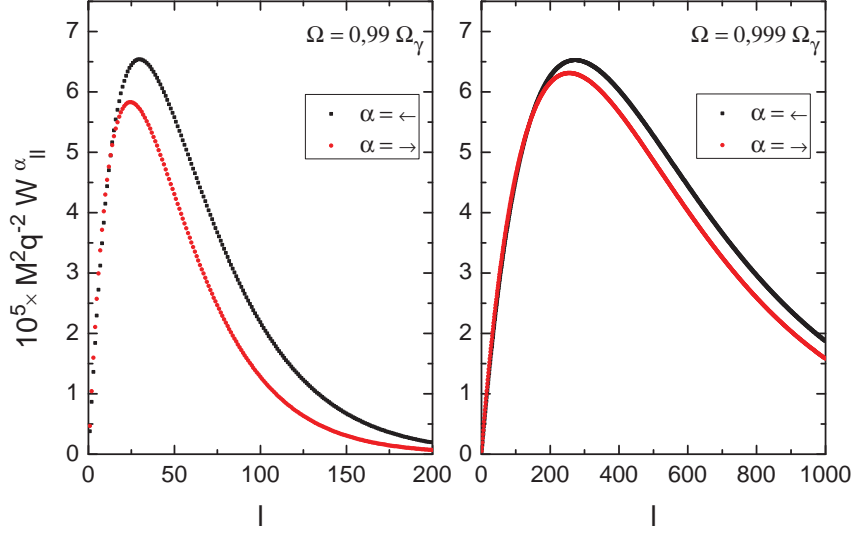


Figura 4.8: Potência emitida em função de $l = m$, para $\Omega = 0.99\Omega_\gamma$ e $\Omega = 0.999\Omega_\gamma$, onde Ω_γ é a velocidade angular que corresponde à órbita fotônica ($M\Omega_\gamma \approx 0.19245$). Quanto maior a velocidade angular, maiores os números quânticos l e m excitados.

uma estimativa de um valor crítico de m a partir do qual as contribuições são significativamente menores que a do termo dominante. Para isso, lembramos que o modo $\psi_{\omega l}^\leftarrow$ pode ser escrito, na aproximação WKB, como (ver Eq. (4.40))

$$\psi_{\omega l}^\leftarrow(x) = -iA_\omega^\leftarrow \kappa_{lm}^{-1}(x) \exp[-\xi_{lm}(x)].$$

Perto da órbita fotônica, podemos escrever $R = (3 + \delta)M$, com $\delta \ll 1$. Nesse limite, modos de número quântico l grande são excitados, e podemos escrever o potencial (4.6) como

$$V_S(r) \approx \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{l(l+1)}{r^2} + O(l^0). \quad (4.60)$$

O máximo do potencial assim escrito ocorre para $r = 3M$; assim, para órbitas próximas dessa, podemos aproximar o potencial por uma parábola. Ao integrar a Eq. (4.42) com o potencial assim simplificado e tomar $l = m$, obtemos

$$\xi_{mm}(x) = \frac{\pi}{4}(1 + m\delta). \quad (4.61)$$

Pode-se, então, introduzir um valor m_{crit} de corte, a partir do qual as contribuições sejam menores por um fator de e^2 ($e \approx 2,718$) do que o termo fundamental (no caso,

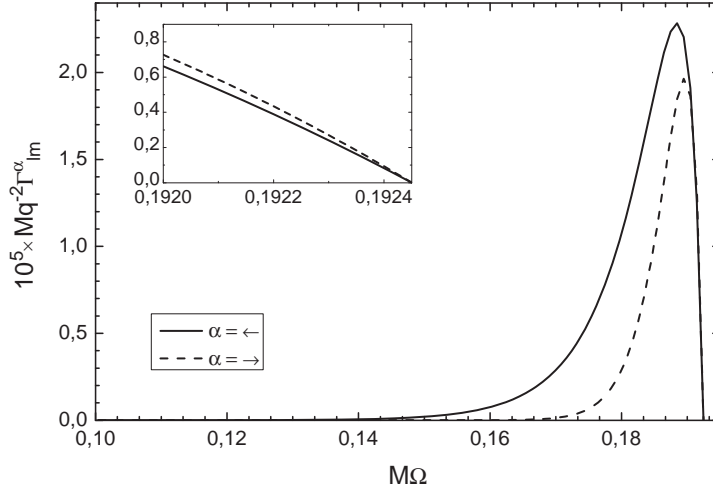


Figura 4.9: Taxa de emissão de partículas em função da velocidade angular, para $l = m = 15$, no limite de altas frequências.

$m = 1$, uma vez que ondas com $m = 0$ não são emitidas). Para isso, exigimos que

$$\xi_{mm}|_{m=m_{crit}} = \xi_{mm}|_{m=1} + 1. \quad (4.62)$$

Com isso, obtemos

$$m_{crit} \approx \frac{4}{\pi\delta}. \quad (4.63)$$

Os valores de m_{crit} correspondentes às órbitas consideradas na Figura 4.8 são $m_{crit} \approx 190$ e $m_{crit} \approx 1910$.

Argumentos de ordem física podem fornecer uma outra estimativa para o valor típico (que chamaremos de m_S) do número quântico m irradiado. Uma aproximação para essa quantidade pode ser obtida por meio da fórmula

$$m_S \approx \sqrt{\frac{M}{R} \frac{1 - 2M/R}{1 - 3M/R}}. \quad (4.64)$$

Na Tabela 4.2.2, m_S é comparado com o valor de $m = l$ que maximiza a potência emitida e com a estimativa obtida de [10] para um valor de corte para m (Eq. (4.63)). Observa-se uma boa concordância, que se mantém na medida em que as órbitas se aproximam do limite de $R = 3M$.

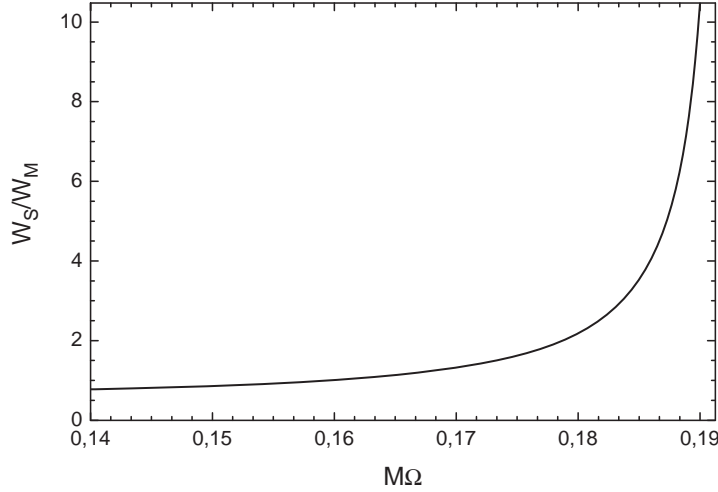


Figura 4.10: Razão W_S/W_M entre a potência emitida no espaço-tempo de Schwarzschild e de Minkowski em função da velocidade angular da fonte no limite de altas frequências. As somas em l necessárias para a computação da potência total foram feitas até $l = 300$ e a aproximação WKB foi utilizada. No limite fotônico, essa razão diverge.

4.3 Radiação emitida por duas fontes escalares em movimento circular

Assim como no Capítulo anterior, vamos considerar como uma primeira generalização o caso de duas partículas-teste em movimento circular no plano equatorial. As órbitas são caracterizadas pelos raios R_1 e R_2 , pelas velocidades angulares Ω_1 e Ω_2 e pelas quadrivelocidades

$$u_i^\mu = (f(R_i) - R_i^2\Omega_i^2)^{-1/2}(1, 0, 0, \Omega_i), \quad i = 1, 2. \quad (4.65)$$

O sistema é descrito pela corrente normalizada

$$j(x^\mu) = \frac{q}{\sqrt{-gu_1^0}}\delta(r - R_1)\delta(\theta - \pi/2)\delta(\phi - \Omega_1 t) \quad (4.66)$$

$$\mp \frac{q}{\sqrt{-gu_2^0}}\delta(r - R_2)\delta(\theta - \pi/2)\delta(\phi - \Omega_2 t - \lambda). \quad (4.67)$$

A expressão com sinal negativo descreve partículas de cargas de sinal oposto, enquanto a com sinal positivo descreve partículas de mesma carga. A quantidade λ

$M\Omega$	$0.5M\Omega_\gamma$	$0.9M\Omega_\gamma$	$0.99M\Omega_\gamma$	$0.999M\Omega_\gamma$	$0.9999M\Omega_\gamma$
m	1	3	27	264	2623
m_S	0.72	3.1	29	289	2874
m_{crit}	0.72	5.8	63	636	6336

Tabela 4.1: Comparação entre o valor de m que dá a maior contribuição para $W_{lm} = W_{lm}^{\rightarrow} + W_{lm}^{\leftarrow}$ (com $l = m$) e as aproximações m_S e m_{crit} obtidas das fórmulas (4.64) e (4.63).

representa a distância angular entre as partículas em $t = 0$.

A amplitude de emissão é, nesse caso,

$$A_{\omega lm} = 2iq\sqrt{\omega\pi}\sqrt{f(R_1) - R_1^2\Omega_1^2}\frac{\psi_{\omega l}(R_1)}{R_1}Y_{lm}(\pi/2, 0)\delta(\omega - m\Omega_1) \quad (4.68)$$

$$\mp 2iq\sqrt{\omega\pi}\sqrt{f(R_2) - R_2^2\Omega_2^2}\frac{\psi_{\omega l}(R_2)}{R_2}Y_{lm}(\pi/2, \lambda)\delta(\omega - m\Omega_2). \quad (4.69)$$

A taxa de emissão é calculada de forma análoga ao que foi feito na Seção 3.2 e pode ser escrita como a soma das taxas de emissão individuais e um termo de interferência:

$$\Gamma_{lm} = \Gamma_{lm}^1 + \Gamma_{lm}^2 + \Gamma_{lm}^{12}, \quad (4.70)$$

com (ver Eq. (4.50))

$$\Gamma_{lm}^i = 2q^2m\Omega_i[f(R_i) - R_i^2\Omega_i^2]|\psi_{m\Omega_i, l}(R_i)/R_i|^2|Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2, \quad i = 1, 2 \quad (4.71)$$

e

$$\begin{aligned} \Gamma_{lm}^{12} = & \mp 8\pi q^2 m\Omega_2 \sqrt{f(R_1) - R_1^2\Omega_1^2} \sqrt{f(R_2) - R_2^2\Omega_2^2} \frac{\psi_{m\Omega_2, l}(R_1)}{R_1} \frac{\psi_{m\Omega_2, l}(R_2)}{R_2} \\ & \times |Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2 \cos(m\lambda) \frac{\delta(m\Omega_2 - m\Omega_1)}{T}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

A função delta de Dirac que aparece na expressão acima implica que só ocorre interferência para a radiação emitida por fontes numa mesma órbita. Nesse caso,

$$\Gamma_{lm} = 4q^2m\Omega[f(R) - R^2\Omega^2]|\psi_{m\Omega, l}(R)/R|^2|Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2(1 \mp \cos(m\lambda)). \quad (4.73)$$

Para a potência irradiada, um cálculo análogo fornece

$$W_{lm} = 4q^2m^2\Omega^2[f(R) - R^2\Omega^2]|\psi_{m\Omega, l}(R)/R|^2|Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2(1 \mp \cos(m\lambda)). \quad (4.74)$$

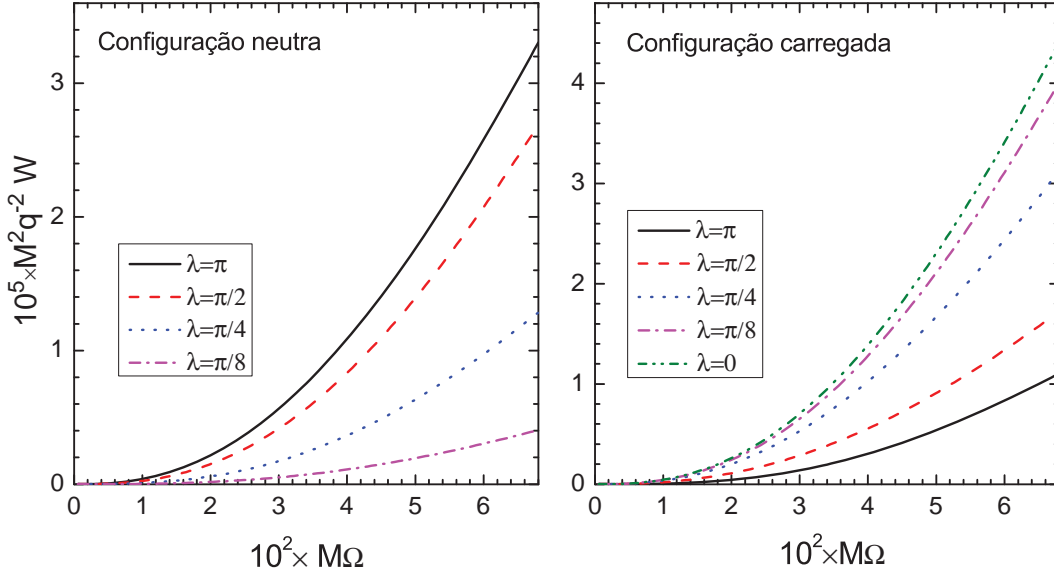


Figura 4.11: Dependência da potência irradiada em relação à velocidade angular de rotação, para configurações neutras e carregadas, no regime de baixas frequências. O valor máximo de $M\Omega$ considerado (0.068) corresponde à última órbita estável na geometria de Schwarzschild. Na construção do gráfico, utilizou-se a aproximação de baixas frequências para as funções radiais. Comparar com a Figura 3.5, referente ao espaço-tempo de Minkowski.

Como, na modelagem de um disco fino, podemos analisar cada órbita individualmente e somar todas as contribuições de forma incoerente, restringiremos as nossas considerações a fontes em uma mesma órbita circular.

Na Figura 4.11, vemos o comportamento da potência emitida em função da velocidade angular das fontes para algumas separações angulares no regime de baixas frequências. O gráfico é qualitativamente análogo à Figura 3.5 para o espaço-tempo de Minkowski. Para frequências suficientemente baixas há uma concordância também quantitativa entre os gráficos, o que é consistente com o fato de que, como já foi dito, para comprimentos de onda muito maiores que $R = 2M$, a curvatura do espaço-tempo de Schwarzschild não é sensivelmente percebida. Para frequências maiores, nesse regime, a potência emitida em Schwarzschild é inferior àquela emitida em Minkowski, o que está de acordo com a Figura 4.6.

Discussão: interferência em espaços curvos

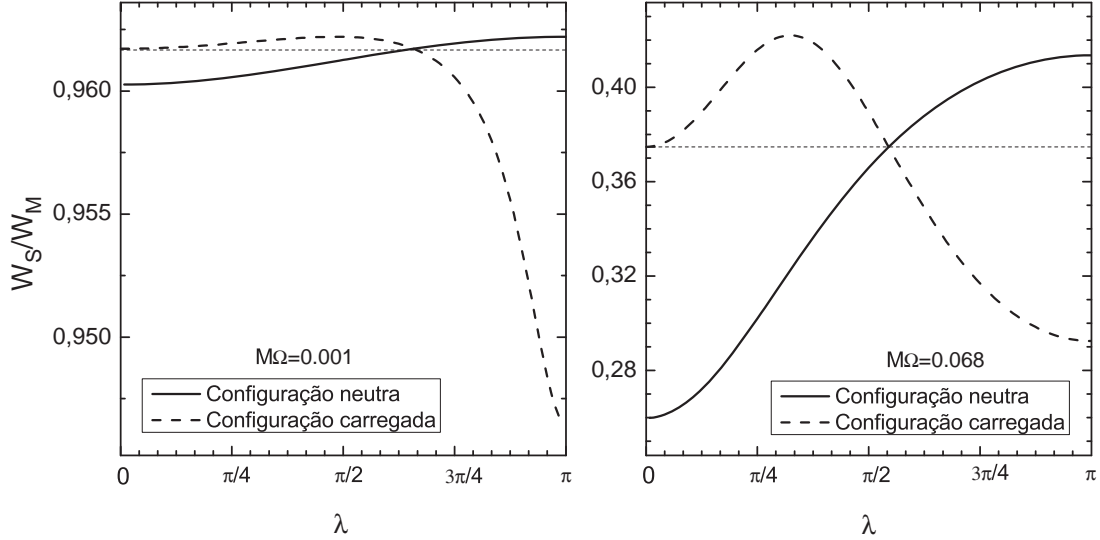


Figura 4.12: Razão W_S/W_M entre a potência irradiada por duas fontes no espaço-tempo de Schwarzschild e de Minkowski em função da distância angular λ entre as fontes, no regime de baixas frequências ($M\Omega = 0.001$ e 0.068). A linha tracejada representa o valor dessa razão para *uma* carga, 0.962 e 0.375 (ver Figura 4.6). A dispersão das curvas em relação a esse valor aponta para a influência da curvatura espaço-temporal sobre a interferência.

Aqui, gostaríamos de investigar a influência da curvatura espaço-temporal sobre a interferência. Vimos que se a emissão das duas partículas é independente, a potência total é simplesmente a soma das potências individuais e a razão $W_S^{N=2}/(2W_S^{N=1})$ é igual a 1. Se existe interferência, essa razão pode nos dar uma medida de sua intensidade. Assim, se a interferência fosse independente da geometria espaço-temporal, essa razão deveria ser a mesma tanto no espaço-tempo de Schwarzschild quanto no de Minkowski, ou seja, deveria valer que:

$$\frac{W_S^{N=2}(M\Omega, \lambda)}{2W_S^{N=1}(M\Omega)} = I(M\Omega, \lambda) = \frac{W_M^{N=2}(M\Omega, \lambda)}{2W_M^{N=1}(M\Omega)}. \quad (4.75)$$

Desse modo, uma forma de captar a influência da geometria espaço-temporal sobre a interferência é comparar essa razão no caso curvo e plano ou, alternativamente,

estudar o comportamento da curva $W_S^{N=2}/W_M^{N=2}$ em função de λ e compará-la com o valor dessa razão para $N = 1$: a oscilação da curva W_S/W_M (para $N = 2$) em relação ao valor dessa razão para $N = 1$ aponta, portanto, para a influência da geometria espaço-temporal sobre a interferência.

A Figura 4.12 representa a razão W_S/W_M em função de λ no limite de baixas frequências, para $M\Omega = 0.001$ e $M\Omega = 0.068$. No primeiro caso, essa razão varia em torno de 96%; no segundo, tem um mínimo de aproximadamente 26% e um máximo de cerca de 42%. De fato, o termo que codifica a interferência nas expressões (4.74) e (3.22) é o mesmo, $(1 \mp \cos(m\lambda))$, uma vez que a estrutura angular das métricas de Minkowski e Schwarzschild, que é relevante para a derivação desse termo, é a mesma. Porém, no cálculo da taxa de emissão e da potência *totais*, a soma no número quântico m acopla esse termo às funções radiais específicas de cada caso. Para velocidades angulares suficientemente baixas, somente o número quântico $l = 1$ é relevante, e tal acoplamento é muito fraco, como acontece no caso em que $M\Omega = 0.001$ na Figura 4.12**. Para $M\Omega = 0.068$, ordens um pouco maiores de l e m são excitadas, o que se reflete na Figura 4.12 em uma maior variação das curvas, indicando uma dependência maior da interferência em relação à métrica empregada.

Quando o raio da órbita circular aproxima-se de $R = 3M$, os efeitos da curvatura espaço-temporal sobre a interferência tornam-se mais acentuados. A Figura 4.13 ilustra a razão entre a potência emitida em Schwarzschild e em Minkowski em função da separação angular entre as cargas para $M\Omega = 0.16$ e 0.18 . No primeiro caso, essa razão oscila entre 0.72 e 1.16 para a configuração carregada e entre 3.5 e 0.9 para a neutra. No segundo, entre 1.17 e 2.63 para fontes de mesma carga e entre 31 e 1.9 para fontes de cargas opostas. A flutuação mais acentuada decorre do acoplamento do termo de interferência com as funções radiais específicas de cada caso por meio da soma em m .

Na Seção 3.2, obtivemos uma estimativa da distância angular a partir da qual duas partículas em uma órbita circular no espaço-tempo de Minkowski emitem independentemente. Essa estimativa, dada pela Eq. (3.24), foi obtida com base na argumentação física de que a interferência ocorre quando o comprimento de onda característico da radiação emitida é maior ou da ordem da distância entre as fontes.

**A queda da curva associada à configuração carregada quando $\lambda \rightarrow \pi$ ocorre porque, nesse caso, a contribuição de dipolo é nula e a primeira ordem a contribuir é a quadrupolar.

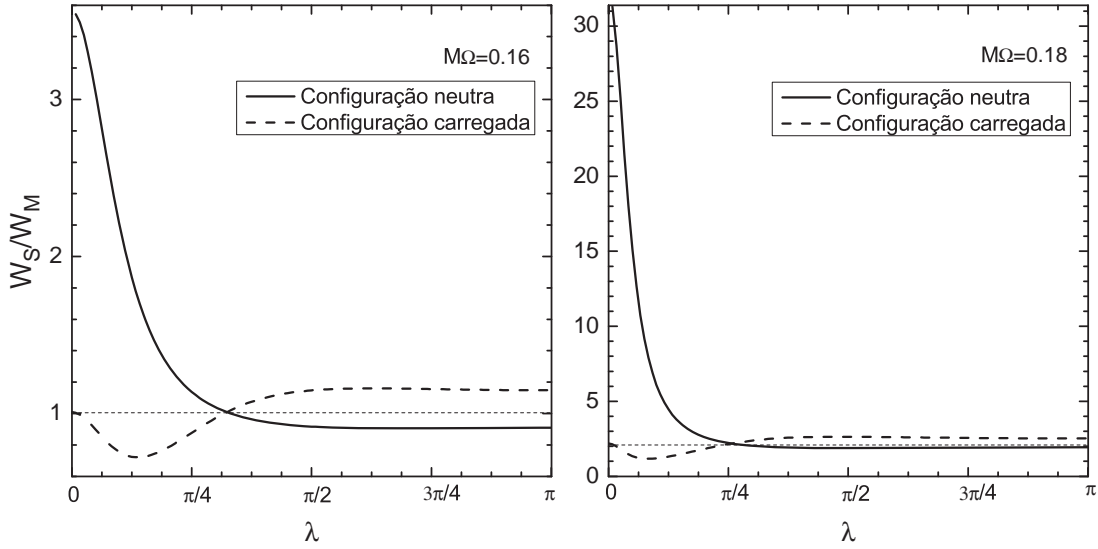


Figura 4.13: Razão W_S/W_M entre a potência irradiada por duas fontes no espaço-tempo de Schwarzschild e de Minkowski em função da distância angular λ entre as fontes, para $M\Omega = 0.16$ e 0.18 (esses valores correspondem, respectivamente, a 83.1 e 93.5% da velocidade angular da órbita fotônica). A linha tracejada representa o valor dessa razão para *uma* carga, dado por 1.01 no primeiro caso e 2.19 no segundo (ver Figura 4.10). Na construção desse gráfico, a aproximação WKB foi utilizada no cálculo dos modos radiais.

Um argumento semelhante no espaço-tempo de Schwarzschild leva a

$$\lambda \approx \frac{1 - 3(M\Omega)^{2/3}}{(M\Omega)^{2/3}(1 - 2(M\Omega)^{2/3})^{1/2}}. \quad (4.76)$$

Essas aproximações podem ser usadas, em particular, para se interpretar o grande aumento da razão W_S/W_M para a configuração neutra quando a separação angular entre as partículas diminui. De fato, para $M\Omega = 0.18$, a Eq. (3.24) indica que, para separações angulares maiores que 1.76 radianos, as partículas emitem de forma aproximadamente independente no espaço-tempo de Minkowski. Para separações angulares menores que essa, a interferência passa a ser importante, de forma que, para as partículas sobrepostas ($\lambda = 0$), a potência emitida se anula. No espaço-tempo de Schwarzschild, a potência emitida também vai a zero quando $\lambda \rightarrow 0$, mas mais lentamente: da Eq. (4.76), vemos que, para $M\Omega = 0.18$, as partículas emitem

independentemente a partir de $\lambda = 0.23$ e apenas para distâncias inferiores a essa começa a haver interferência. Como a potência emitida por partículas de cargas opostas vai para zero mais rapidamente no espaço-tempo de Minkowski do que no de Schwarzschild para órbitas próximas a $R = 3M$, a razão W_S/W_M aumenta de forma significativa para λ pequeno nesse regime.

Finalmente, notamos que os resultados para a emissão de radiação por uma carga encontrados na literatura (ver [4, 5, 6, 10], por exemplo) podem ser diretamente generalizados para duas ou mais cargas apenas quando a emissão é independente (separação angular superior à fornecida pela Eq. (4.76)).

4.4 Radiação emitida por N fontes escalares em movimento circular

Como discutido na Introdução, sabemos, do Eletromagnetismo, que uma carga em movimento circular uniforme irradia ondas eletromagnéticas, uma vez que está acelerada, e que, ao adicionarmos mais cargas à órbita, a potência em geral aumenta. Contudo, no limite do contínuo, quando temos um aro carregado em rotação, a corrente é estacionária (Magnetostática) e não deve haver emissão de radiação. Como estamos interessados em um disco de material ionizado, composto de um número finito mas muito grande de partículas, é importante analisar se a potência irradiada por essa configuração é significativa e em que situações isso ocorre. Para isso, estudaremos, nesta seção, a emissão de radiação por um anel de cargas em rotação no espaço-tempo de Schwarzschild. Mostraremos que, para órbitas circulares estáveis, $R > 6M$, as velocidades angulares atingidas são relativamente pequenas e a potência irradiada por um número maior de cargas rapidamente tende a zero. Contudo, para órbitas circulares instáveis, $3M < R < 6M$, a potência irradiada por um número grande de cargas pode ser significativa se a velocidade de rotação for suficientemente alta.

4.4.1 Configuração neutra

Consideramos, primeiramente, um anel formado de N cargas igualmente espaçadas, de um ângulo λ ($N\lambda = 2\pi$, N par), e com sinais trocados de forma alternada, de modo que o sistema como um todo seja neutro (ver Figura 3.8). As cargas estão em

movimento circular no espaço-tempo de Schwarzschild, com velocidade Ω constante, como medida por observadores assintóticos. A densidade volumétrica de carga que descreve o sistema é

$$j(x^\mu) = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \frac{q}{\sqrt{-g}u^0} \delta(r - R) \delta(\theta - \pi/2) \delta(\phi - \Omega t - n\lambda), \quad (4.77)$$

onde u^0 é a componente temporal da quadrivelocidade das partículas,

$$u^\mu(\Omega, R) = (f(R) - R^2\Omega^2)^{-1/2}(1, 0, 0, \Omega). \quad (4.78)$$

Um cálculo semelhante ao realizado na Seção 3.3.2 fornece, para a taxa de emissão e para a potência irradiada, $\Gamma_{lm} = f_{lm}^{(\Gamma)}(\Omega)g_m(N)$ e $W_{lm} = f_{lm}^{(W)}(\Omega)g_m(N)$, com

$$f_{lm}^{(\Gamma)}(\Omega) = 2 \frac{q^2}{(u^0)^2} m\Omega \frac{|\psi_{m\Omega,l}(R)|^2}{R^2} |Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2, \quad (4.79)$$

$$f_{lm}^{(W)}(\Omega) = 2 \frac{q^2}{(u^0)^2} (m\Omega)^2 \frac{|\psi_{m\Omega,l}(R)|^2}{R^2} |Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2 \quad (4.80)$$

e

$$g_m(N) = \begin{cases} N^2, & m = \frac{2k-1}{2}N, \quad k \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.81)$$

Vale notar que a dependência desses observáveis em relação ao número de cargas, N , que é codificada na função $g_m(N)$, é a mesma que aparece no espaço-tempo de Minkowski. Isso se deve ao fato de que a métrica de Schwarzschild difere da de Minkowski apenas em sua dependência radial (e temporal), preservando a mesma estrutura angular, que, por sua vez, determina a dependência dos observáveis com N (ver Eq. (4.77)). Como notamos anteriormente, contudo, no cálculo da taxa de emissão e potência *totais*, a soma em m acopla a função $g_m(N)$ às funções $f_{lm}^{(\Gamma)}$ e $f_{lm}^{(W)}$, que são específicas a cada caso, introduzindo uma relação não-trivial entre a interferência e a geometria do espaço-tempo em questão.

4.4.2 Configuração carregada

Consideramos, também, o caso de uma configuração carregada, com N partículas de mesma carga. Para isso, reescrevemos a densidade de corrente (4.77) apenas com termos positivos,

$$j(x^\mu) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{q}{\sqrt{-g}u^0} \delta(r - R) \delta(\theta - \pi/2) \delta(\phi - \Omega t - n\lambda), \quad (4.82)$$

com u^μ dada por (4.78). Assim como na seção 3.3.2, escrevemos $\Gamma_{lm}^+ = f_{lm}^{(\Gamma)}(\Omega)g_m^+(N)$ e $W_{lm}^+ = f_{lm}^{(W)}(\Omega)g_m^+(N)$, com $f_{lm}^{(\Gamma)}$ e $f_{lm}^{(W)}$ dados pelas Eqs. (4.79) e (4.80) e

$$g_m^+(N) = \begin{cases} N^2, & m = Nk, \quad k \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.83)$$

Novamente, a dependência dos observáveis Γ_{lm} e W_{lm} com o número de partículas N é a mesma que a encontrada no espaço-tempo de Minkowski. A curvatura não-trivial do espaço-tempo de Schwarzschild introduz, porém, uma modulação distinta, que se acopla com o termo de interferência na computação da taxa de emissão e potência *totais*.

4.4.3 Análise gráfica

Radiação cíclotron

No limite de $M\omega \ll 1$, podemos utilizar os modos (4.17) e (4.24) nas equações (4.79) e (4.80). Para interpretarmos os resultados, analisamos graficamente a dependência desses observáveis com relação ao número de partículas N , para configurações neutra e carregada.

Na Figura 4.14 a potência emitida no espaço-tempo de Minkowski (com gravitação Newtoniana) é comparada com aquela emitida em Schwarzschild (com aproximação de baixas frequências) em função do número de cargas N . Aqui, a órbita é fixa, com $M\Omega = 0.068$, o que equivale à última órbita circular estável, e onde a nossa aproximação de baixas frequências ainda deve ser razoavelmente boa.

Vemos que, para baixas frequências, a potência prevista para o espaço-tempo de Minkowski (com gravitação Newtoniana) tem uma amplitude maior que aquela prevista para o espaço-tempo de Schwarzschild. A dependência com o número de cargas, contudo, é semelhante: para essas frequências baixas, o comprimento de onda da radiação emitida é grande e a interferência faz a potência emitida por um número maior de cargas tender rapidamente para zero.

Radiação síncrotron

No limite de altas frequências, o método WKB fornece uma boa aproximação para os modos normais e podemos substituir nas Eqs. (4.79) e (4.80) as expressões (4.40) e (4.41).

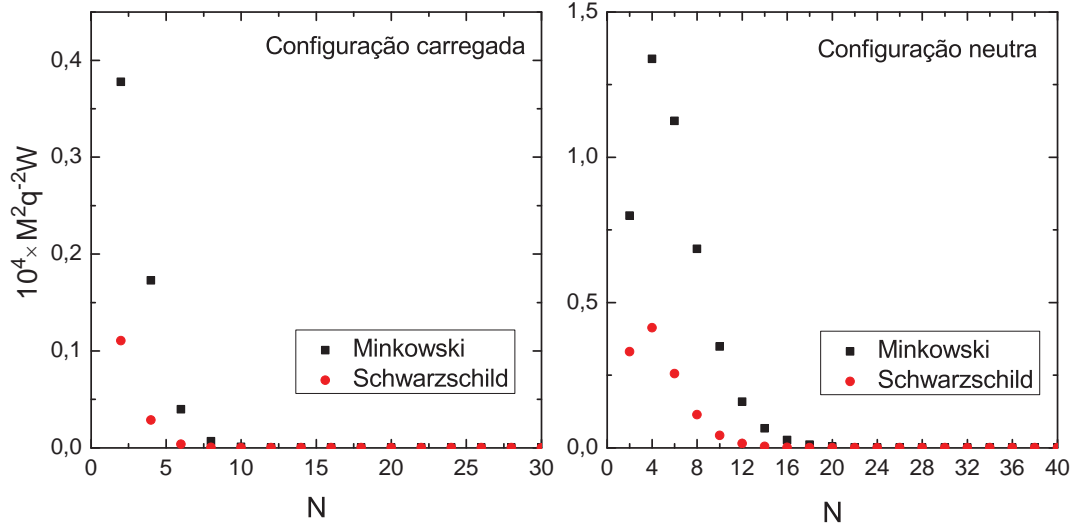


Figura 4.14: Potência total emitida no espaço-tempo de Minkowski e de Schwarzschild em função do número de cargas N , para configurações neutra e carregada, assumindo $M\Omega = 0.068$.

A partir das Figs. 4.15 e 4.16, percebemos que o comportamento da potência irradiada no espaço-tempo de Schwarzschild em função do número de cargas é semelhante àquele encontrado no espaço-tempo de Minkowski (comparar com as Figs. (3.10) e (3.11)). No limite de altas velocidades angulares (e altos momentos angulares, como vimos), a frequência da radiação emitida é alta ($\omega = m\Omega$) e, se a órbita é povoada com um número suficientemente pequeno de cargas, elas emitem independentemente ($W_N/(NW_1) \approx 1$). Se mais cargas são adicionadas à órbita, as partículas começam a se “enxergar”, ou seja, começa a haver interferência na radiação por elas emitida. No caso da configuração neutra, a interferência é inicialmente construtiva e, da Figura 4.15, vemos que existe um valor de $N > 1$ que maximiza a razão $W_N/(NW_1)$ para uma certa órbita. Já no caso da configuração carregada, a interferência é sempre destrutiva e o máximo dessa razão acontece sempre para $N = 1$. Assim como no espaço-tempo de Minkowski, fixada uma órbita, a configuração carregada irradia uma potência inferior àquela emitida pela configuração neutra, o que está diretamente relacionado aos números quânticos permitidos para cada uma delas (ver discussão na Seção 3.3.3).

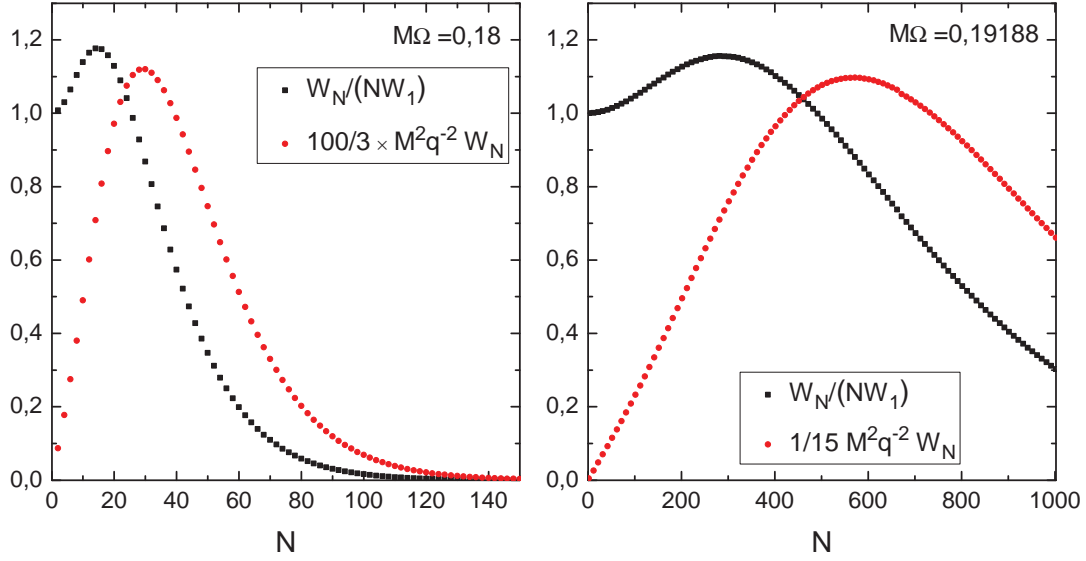


Figura 4.15: Potência total (W_N) emitida por uma configuração de N cargas e razão $W_N/(NW_1)$ entre a potência total e N vezes a potência emitida por uma única carga, para a configuração neutra e $M\Omega = 0.18$ e 0.19188 (93.5 e 99.7% da velocidade angular da órbita fotônica, respectivamente).

Intuitivamente, podemos pensar que começa a haver interferência quando o comprimento de onda da radiação emitida é da ordem da distância entre as partículas. Usando uma argumentação física desse tipo, pode-se obter uma estimativa do número N de cargas a partir do qual começa a haver interferência em uma órbita caracterizada pela velocidade angular $\Omega^{\dagger\dagger}$:

$$N_{apr} = 2\pi(M\Omega)^{2/3} \frac{1 - 2(M\Omega)^{2/3}}{1 - 3(M\Omega)^{2/3}}. \quad (4.84)$$

Essa quantidade naturalmente diverge quando $R \rightarrow 3M$, uma vez que, nesse limite, a emissão é independente. Para as velocidades angulares consideradas nas Figuras 4.15 e 4.16, $N_{apr} \approx 17$ ($M\Omega = 0.18$) e $N_{apr} \approx 354$ ($M\Omega = 0.19188$).

^{††}Comparar com a Eq. (3.50) para o espaço-tempo de Minkowski com gravitação Newtoniana.

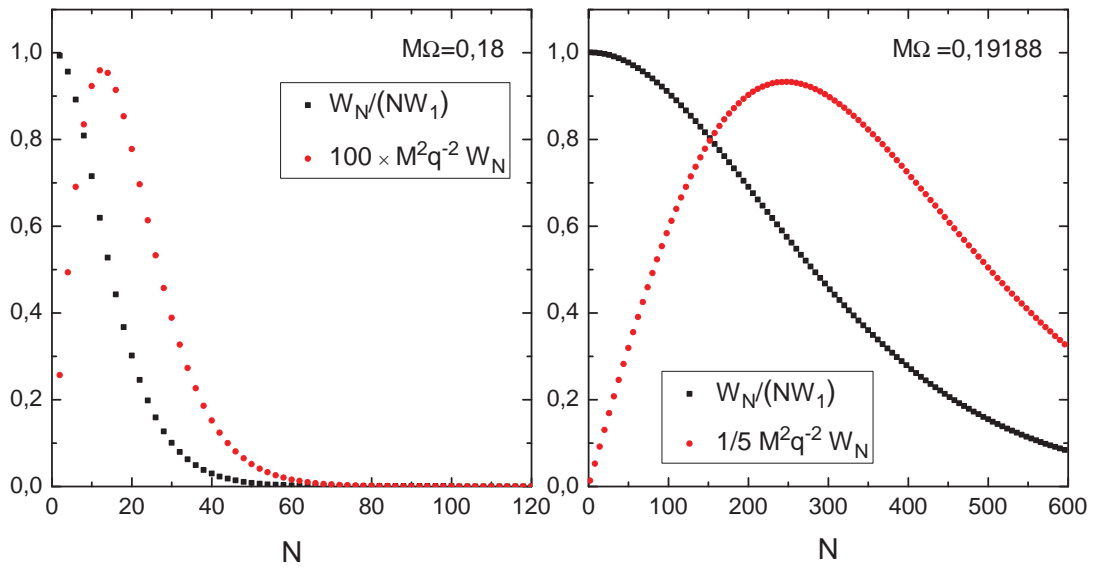


Figura 4.16: Potência total (W_N) emitida por uma configuração de N cargas e razão $W_N/(NW_1)$ entre a potência total e N vezes a potência emitida por uma única carga, para a configuração carregada e $M\Omega = 0.18$ e 0.19188 (93.5 e 99.7% da velocidade angular da órbita fotônica, respectivamente).

Capítulo 5

Discussão e conclusões

Nesta dissertação, utilizamos as ferramentas da Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos para estudar o problema da emissão de radiação por um conjunto de cargas em rotação ao redor de um corpo central denso. Nossa motivação é discutir a contribuição desse efeito para discos de acreção e, também, entender como se dá a interferência e como ela é afetada pela curvatura espaço-temporal.

Primeiramente, construímos as bases necessárias da teoria e retomamos alguns resultados sobre a emissão de radiação por uma fonte em órbita circular. A partir daí, consideramos o caso de duas fontes separadas por uma distância angular arbitrária. Se as fontes estão em órbitas distintas, vimos que o termo de interferência se anula: de fato, nesse caso não existe uma relação de fase bem definida ao longo do tempo entre as fontes e, como a média temporal é feita em um período longo, é natural que a emissão não seja coerente. Sendo assim, na modelagem de um disco fino, podemos analisar cada órbita individualmente e somar a contribuição de todas elas de forma incoerente.

Consideramos, portanto, duas fontes em uma mesma órbita circular separadas por uma distância angular arbitrária. Se a velocidade de rotação é baixa, somente as primeiras ordens na expansão multipolar são relevantes, em particular a ordem de dipolo elétrico. Assim, se as fontes têm cargas opostas, a potência emitida é máxima se elas estão diametralmente opostas e nula se estão sobrepostas. Por outro lado, para fontes de mesma carga, a emissão é máxima se elas estão sobrepostas e mínima se estão diametralmente opostas (ver Seção 3.2 e Apêndice B). Porém, entrando no limite de radiação síncrotron (altas velocidades angulares), a emissão

passa a ser independente. Nesse caso, o comprimento de onda da radiação emitida é pequeno e, sendo ele menor que a distância angular entre as fontes, a interferência não é significativa. Essas considerações se aplicam a ambos os casos estudados - espaço-tempo plano com gravitação Newtoniana e espaço-tempo de Schwarzschild.

Mas de que forma a interferência depende da geometria espaço-temporal? De fato, o termo de interferência que aparece na potência emitida com números quânticos l e m é o mesmo, $1 \mp \cos(m\lambda)$, uma vez que a estrutura angular das duas métricas, que é relevante para a derivação desse termo, é a mesma. Porém, no cálculo da taxa de emissão e potência *totais*, a soma em m acopla esse termo às funções radiais específicas de caso caso. Em outras palavras, os termos de interferência são os mesmos, mas com pesos diferentes, o que leva a uma dependência não-trivial da interferência com a geometria do espaço-tempo. Isso pode ser visto mais claramente nas Figuras 4.12 e 4.13 e na discussão que as acompanha.

Para nos aproximarmos mais da situação física de interesse, de discos de material ionizado, consideramos, então, o caso de N cargas igualmente espaçadas em uma mesma órbita circular. Consideramos configurações neutras, de partículas alternadamente positivas e negativas, e carregadas, de partículas de mesma carga. Nesses casos, podemos escrever a potência emitida como $W_{lm}(\Omega, N) = f_{lm}^{(W)}(\Omega)g_m(N)$, onde $f_{lm}^{(W)}(\Omega)$ é a potência emitida por uma única fonte e

$$g_m(N) = \begin{cases} N^2, & m = \frac{2k-1}{2}N, \quad k \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.1)$$

para a configuração neutra e

$$g_m(N) = \begin{cases} N^2, & m = Nk, \quad k \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.2)$$

para a carregada. Assim, vemos que existe uma regra de seleção que restringe os números quânticos magnéticos possíveis a $m = (2k - 1)N/2$, no caso neutro, e a $m = kN$, no caso carregado. Assim, para N grande, por um lado a potência aumenta com N^2 e, por outro, apenas ordens multipolares muito específicas contribuem.

Para órbitas circulares estáveis, $r \geq 6M$, as velocidades angulares alcançadas são pequenas e apenas os números quânticos mais baixos contribuem para a frequência. Nesse caso, a interferência suprime rapidamente a potência emitida por muitas cargas. Contudo, no regime de velocidades altas, que acontece para órbitas instáveis

próximas à órbita fotônica ($r \lesssim 3M$), modos de momento angular alto são excitados e a potência irradiada por um número grande de cargas pode ser significativa se a velocidade angular for suficientemente alta.

Em [10], podemos encontrar uma estimativa numérica para a potência total emitida por uma fonte escalar em órbita circular ultrarrelativística no espaço-tempo de Schwarzschild. Escrevendo o raio da órbita como $R = (3 + \delta)M$, essa potência é estimada como

$$W = \left(\frac{q}{M}\right)^2 4.75 \times 10^{56} \frac{1}{\delta} \text{ ergs/s.} \quad (5.3)$$

Quando temos N fontes escalares em órbita circular, podemos dizer, a grosso modo, que a potência emitida é N vezes a dada pela Eq. (5.3) se N é menor do que o valor estimado na Eq. (4.84) e vai a zero para um número de cargas superior a este*.

Dessa forma, para situações realísticas, a emissão de radiação devido ao movimento global de muitas cargas só é expressiva para órbitas próximas ao limite fotônico. Essas órbitas, contudo, não são estáveis, e a aproximação de órbitas circulares, feita aqui, pode não ser adequada. Podemos dizer, porém, que a emissão de radiação por muitas fontes é relevante sempre que elas alcançam velocidades relativísticas em sua queda rumo ao buraco.

Generalizações possíveis

Uma comparação dos resultados obtidos no espaço-tempo de Minkowski e daqueles derivados para a geometria de Schwarzschild, no contexto da TQCEC, torna evidente que, em processos nos quais o comprimento de onda associado ao campo é menor ou da ordem do raio de Schwarzschild, a correção relativística é essencial e deve ser considerada para uma descrição fiel de tais fenômenos.

Uma generalização importante deste trabalho seria o estudo de buracos negros de Kerr. Além de ser astrofisicamente mais interessante, a dependência não-trivial da métrica de Kerr em relação às coordenadas angulares geraria uma forma completamente distinta para a interferência nesse espaço-tempo. Também são possíveis generalizações para campos de spin 1 e 2, que descrevem as situações mais realistas de emissão de ondas eletromagnéticas e gravitacionais.

*Os detalhes da emissão (interferência inicialmente construtiva no caso neutro, etc.) são capturados apenas pelo cálculo completo.

Apêndice A

Emissão de radiação escalar: alguns resultados em Teoria Clássica de Campos

Neste capítulo, obteremos o equivalente à fórmula de Larmor para um campo escalar e apontaremos a equivalência dos resultados advindos da Teoria Clássica de Campos e daqueles obtidos com a abordagem adotada no Capítulo 3. A análise aqui segue os mesmos passos daquela usualmente feita no estudo da radiação eletromagnética (ver [26], por exemplo).

A equação dinâmica obtida por meio do acoplamento de um campo escalar não massivo ϕ , descrito pela lagrangeana $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$, e uma fonte descrita pela corrente j é dada por

$$\square\phi = -j. \quad (\text{A.1})$$

A solução dessa equação em termos da função de Green retardada é

$$\phi(x) = \int d^4x' G_R(x, x') j(x'), \quad (\text{A.2})$$

com $G_R(x, x')$ dada por [26]:

$$G_R(x, x') = \frac{1}{4\pi|\vec{R}|} \theta(t - t') \delta(t - t' - |\vec{R}|), \quad (\text{A.3})$$

onde definimos o vetor tipo luz $R^\mu = (|\vec{R}|, |\vec{R}|)$, com $|\vec{R}| = |\vec{x} - \vec{x}'|$. Inserindo essa

expressão em (A.2), obtemos o resultado análogo ao conhecido no Eletromagnetismo,

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{j(t - |\vec{R}|, \vec{x}')}{|\vec{R}|}. \quad (\text{A.4})$$

Assim, dada uma corrente escalar $j(x^\mu)$, o campo gerado por ela pode em princípio ser determinado pelo cálculo da integral (A.4). No estudo da emissão de radiação, estamos interessados, contudo, apenas nos campos liberados para o infinito. Sabemos, do Eletromagnetismo, que a emissão de radiação está relacionada com a aceleração das cargas. Assim, considerando que j varia periodicamente com o tempo, com frequência característica ω , a “zona de radiação” é definida pelo limite em que

$$d \ll \lambda \ll r, \quad (\text{A.5})$$

onde d dá a ordem da dimensão da fonte, $\lambda = \omega^{-1}$ é o comprimento de onda associado a ω e r é a distância do observador à fonte.

Uma partícula seguindo a linha de mundo $z(\tau)$ é descrita pela densidade normalizada de carga

$$j(x') = \frac{q}{u^0} \delta^3[\vec{x}' - \vec{z}(\tau)], \quad (\text{A.6})$$

onde u^0 é a componente temporal da quadrivelocidade $u^\mu = dz^\mu/d\tau$ e q determina a magnitude do acoplamento. Avaliada no tempo retardado, $t' = t - |\vec{R}|$, essa densidade de carga pode ser escrita como

$$j(t - |\vec{R}|, \vec{x}') = \frac{q}{\gamma(1 - \vec{v} \cdot \hat{R})} \delta^3[\vec{x}' - \vec{z}(\tau(t))], \quad (\text{A.7})$$

onde usamos que $u^0|_{ret} = dt/d\tau - d|\vec{R}|/d\tau = \gamma(1 - \vec{v} \cdot \hat{R})|_{ret}$, com $\vec{v} = d\vec{R}/dt = d\vec{x}'/dt$ e $\hat{R} = \vec{R}/|\vec{R}|$ (ret = avaliado no tempo t'). O campo ϕ , em (A.4), fica dado, portanto, por

$$\phi(t, \vec{x}) = \frac{q}{4\pi} \frac{1}{\gamma(|\vec{R}| - \vec{v} \cdot \vec{R})|_{ret}}. \quad (\text{A.8})$$

Ao campo escalar não-massivo está associado o tensor de energia-momento

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial^\rho \phi \partial_\rho \phi. \quad (\text{A.9})$$

As componentes do vetor de Poynting \vec{S} para o campo escalar podem ser identificadas com as componentes T^{0i} do tensor de energia-momento, de forma que

$$\vec{S} = -\nabla \phi \partial_t \phi. \quad (\text{A.10})$$

Uma vez que o vetor de Poynting está relacionado ao fluxo de energia do campo, a potência associada é dada pela integral na superfície de interesse,

$$W = \int dS \partial_t \phi \hat{n} \cdot \nabla \phi. \quad (\text{A.11})$$

Uma vez que nosso interesse é analisar a emissão de radiação por uma fonte em movimento, calculamos $\partial_t \phi$ e $\partial_i \phi$ a partir da Eq. (A.8), mantendo apenas termos de ordem $|\vec{R}|^{-1}$ para o campo de radiação. Assim, obtemos

$$\partial_\nu \phi = -\frac{q(x_\nu - z_\nu)}{4\pi\gamma^3(|\vec{R}| - \vec{R} \cdot \vec{v})^3} (\vec{R} \cdot \dot{\vec{v}} - \gamma^4 |\vec{R}| \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}) \quad (\text{A.12})$$

Inserindo essa expressão na equação (A.11), obtemos o equivalente escalar da fórmula de Larmor*:

$$W = \frac{q^2}{12\pi} a^\mu a_\mu. \quad (\text{A.14})$$

Usando a fórmula

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l m^2 [j_l(mz)]^2 |Y_{lm}(\pi/2, \phi)|^2 = \frac{1}{24\pi} \frac{z^2}{(1-z^2)^3}, \quad |z| < 1, \quad (\text{A.15})$$

demonstrada em [4], e escrevendo a aceleração como $a = (a_\mu a^\mu)^{\frac{1}{2}} = R\Omega^2\gamma^2$, vemos que a expressão (3.8), obtida com o formalismo de Teoria Quântica de Campos, é equivalente ao resultado (A.14) derivado aqui.

*O resultado eletromagnético é (em unidades CGS)

$$W = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} |\dot{\vec{v}}|^2. \quad (\text{A.13})$$

Apêndice B

Considerações sobre radiação cíclotron no Eletromagnetismo

Gostaríamos de retomar, aqui, a discussão realizada na Seção 3.2 sobre a radiação emitida por duas fontes em movimento circular, no contexto do Eletromagnetismo clássico. Para velocidades não-relativísticas, apenas os primeiros termos na expansão multipolar da potência são relevantes, em particular o termo de dipolo elétrico.

Sabe-se que, para uma fonte arbitrária, a contribuição de dipolo elétrico para a potência emitida é dada, no Eletromagnetismo, por [26]

$$W^{DE} = \frac{2}{3} \left[\frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2} \right]^2 \quad (\text{B.1})$$

onde \mathbf{p} é o momento de dipolo do sistema.

No caso de uma única partícula com carga q em órbita circular, podemos pensar no momento de dipolo em relação ao centro da órbita como sendo dado por

$$\mathbf{p}(t) = p_0 [\cos(\Omega t) \hat{\mathbf{x}} + \sin(\Omega t) \hat{\mathbf{y}}], \quad (\text{B.2})$$

onde Ω é a velocidade angular da fonte e $p_0 = qR$, com R sendo o raio da órbita. Nesse caso, portanto, $d^2 \mathbf{p}/dt^2 = -\Omega^2 p_0 [\cos(\Omega t) \hat{\mathbf{x}} + \sin(\Omega t) \hat{\mathbf{y}}]$ e $[d^2 \mathbf{p}/dt^2]^2 = (p_0 \Omega^2)^2 = q^2 R^2 \Omega^4$. Inserindo na Eq. (B.1), obtemos a potência irradiada,

$$W^{DE} = \frac{2q^2 R^2 \Omega^4}{3}, \quad (\text{B.3})$$

que está de acordo com a Eq. (A.13), com $|\dot{\mathbf{v}}| = R\Omega^2\gamma^2$ e $\gamma \rightarrow 1$.

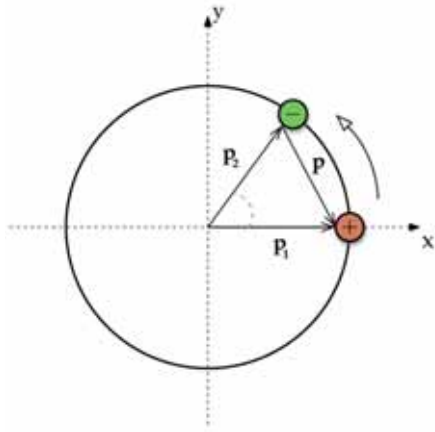


Figura B.1: Montagem esquemática

Considerando, agora, o caso de duas fontes de cargas opostas separadas por um ângulo λ , podemos definir

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_1 &= p_0[\cos(\Omega t)\hat{\mathbf{x}} + \sin(\Omega t)\hat{\mathbf{y}}] \\ \mathbf{p}_2 &= p_0[\cos(\Omega t + \lambda)\hat{\mathbf{x}} + \sin(\Omega t + \lambda)\hat{\mathbf{y}}],\end{aligned}$$

e escrevemos o momento de dipolo do sistema (ver Figura B.1) como

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 = p_0[(\cos(\Omega t) - \cos(\Omega t + \lambda))\hat{\mathbf{x}} + (\sin(\Omega t) - \sin(\Omega t + \lambda))\hat{\mathbf{y}}] \quad (\text{B.4})$$

A contribuição de dipolo elétrico para a potência irradiada é encontrada, depois de um cálculo direto, como sendo*

$$W^{DE} = \frac{4}{3}q^2R^2\Omega^4(1 - \cos \lambda). \quad (\text{B.6})$$

Assim, a potência não é simplesmente o dobro daquela emitida individualmente, mas é introduzido um termo de interferência proporcional a $-2 \cos \lambda$. A Figura B.2 compara a potência emitida em todos os números quânticos (Eq. (3.22)) com a

*O equivalente escalar dessa expressão é obtido simplesmente por um ajuste de coeficientes ($4/3 \rightarrow 1/6\pi$, conforme mostrado no Apêndice A):

$$W_{esc}^{DE} = \frac{1}{6\pi}q^2R^2\Omega^4(1 - \cos \lambda). \quad (\text{B.5})$$

contribuição de dipolo elétrico para a potência (Eq. (B.5)) em função de λ . Para velocidades angulares suficientemente baixas, a semelhança entre as curvas indica que, de fato, a emissão é basicamente devido à contribuição de dipolo elétrico. Porém, à medida que Ω aumenta, ordens de multipolo maiores vão sendo emitidas, fazendo que as curvas se distanciem. Para velocidades relativísticas, o comportamento não-monotônico e não-trivial da potência em função de λ (observado na Figura 3.6, para $M\Omega = 0.5$, por exemplo) indica a grande relevância das ordens multipolares mais altas.

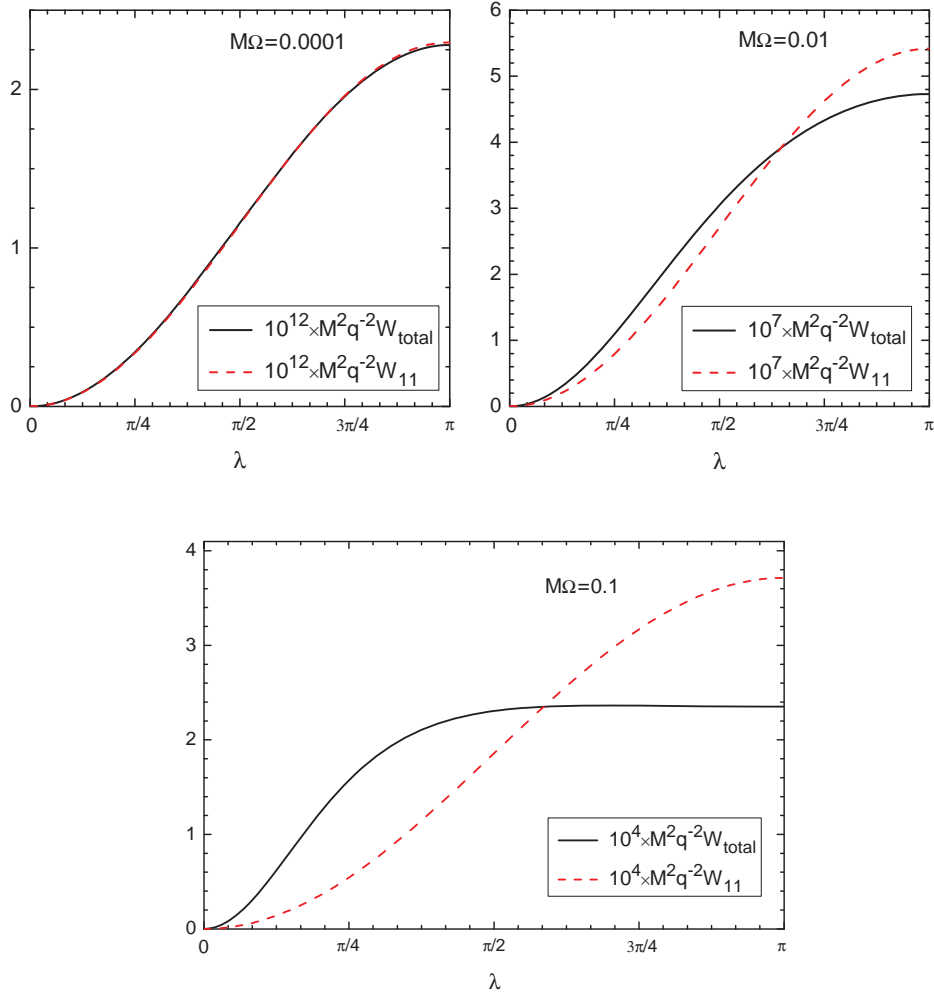


Figura B.2: Comparação da potência total emitida (em todas os números quânticos) com a contribuição de dipolo para a potência em função de λ , para $M\Omega = 0.0001$, $M\Omega = 0.01$ e $M\Omega = 0.1$.

Apêndice C

Órbitas circulares no espaço-tempo de Schwarzschild

O espaço-tempo de Schwarzschild é a solução estática e esfericamente simétrica das equações de Einstein, e é descrito pela métrica

$$ds^2 = (1 - 2M/r)dt^2 - (1 - 2M/r)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (\text{C.1})$$

Essa métrica é assintoticamente plana e aparentemente possui “singularidades” em $r = 0$ e $r = 2M$. Contudo, uma mudança de coordenadas pode deixar claro que a singularidade em $r = 2M$ é uma patologia do sistema de coordenadas adotado e não do espaço-tempo, ao contrário daquela em $r = 0$, que é uma singularidade essencial, ou física, uma vez que, nela, todos os escalares de curvatura são divergentes. A hipersuperfície nula em $r = 2M$ define o horizonte de eventos, a fronteira da qual fótons e demais partículas que ali adentram não podem escapar, ao menos classicamente.

A métrica de Schwarzschild caracteriza a geometria do espaço-tempo exterior a uma estrela esférica ou a geometria de um buraco negro sem carga e momento angular, caracterizado apenas por sua massa M . Partículas-teste ou fótons movendo-se livremente nesse espaço-tempo descrevem geodésicas tipo tempo e tipo luz, que analisaremos brevemente a seguir (mais detalhes na Ref. [29]).

Devido à simetria esférica, o movimento de partículas e raios de luz está sempre confinado a um único plano, que podemos escolher como sendo o equatorial ($\theta = \pi/2$). Se u^μ é a quadrivelocidade de uma partícula em movimento geodésico, temos

que

$$K = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = (1 - 2M/r)\dot{t}^2 - (1 - 2M/r)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2, \quad (\text{C.2})$$

com $K = 1$ ou 0 para partículas massivas e não-massivas, respectivamente. O ponto (\cdot) indica derivação em relação ao tempo próprio τ (ou parâmetro afim λ). A simetria esférica e a estaticidade da geometria de Schwarzschild na região exterior ao horizonte de eventos implicam que $\xi^\alpha = (\partial_t)^\alpha = (1, 0, 0, 0)$ e $\psi^\alpha = (\partial_\phi)^\alpha = (0, 0, 0, 1)$ são campos de Killing e que, portanto,

$$E = g_{\mu\nu}u^\mu \xi^\nu = (1 - 2M/r)\dot{t} = cte \quad (\text{C.3})$$

e

$$L = -g_{\mu\nu}u^\mu \psi^\nu = r^2\dot{\phi} = cte \quad (\text{C.4})$$

são constantes de movimento. Essas quantidades são interpretadas como a energia e o momento angular por unidade de massa atribuídos a uma partícula por um observador no infinito com $u = \partial_t$ (ou como a energia e momento angular atribuídos à partícula não massiva pela mesma classe de observadores). Inserindo essas relações na Eq. (C.2), obtemos a seguinte equação básica para as órbitas:

$$\dot{r}^2 = E^2 - (1 - 2M/r)(L^2/r^2 + K). \quad (\text{C.5})$$

Esta equação, que determina o movimento geodésico de uma partícula no espaço-tempo de Schwarzschild, pode também ser vista como a equação de movimento de uma partícula de massa unitária, com energia $E^2/2$, sujeita ao potencial efetivo

$$V_S(r) = \frac{1}{2}(1 - 2M/r)(K + L^2/r^2), \quad (\text{C.6})$$

de acordo com as leis usuais da Mecânica. No caso de uma órbita circular, $\dot{r} = 0$ e

$$E^2 = (1 - 2M/r)(L^2/r^2 + K). \quad (\text{C.7})$$

Além disso, derivando ambos os lados da equação da geodésica com relação ao tempo próprio τ (ou parâmetro afim λ , para trajetórias tipo luz) obtemos $\ddot{r} = -dV_S/dr$, que é o análogo em Relatividade Geral à segunda lei de Newton, $ma = -\nabla\phi$, com ϕ o potencial para alguma força. Fica claro, dessa expressão, que uma órbita circular ($r = cte$) só é possível em um mínimo ou máximo de V_S . Desenvolvendo $dV_S/dr = 0$, obtemos

$$MKr^2 - L^2r + 3ML^2 = 0. \quad (\text{C.8})$$

Resolvendo essa equação para r , obtemos

$$R_{\pm} = L^2/2M \pm (L^4/4M^2 - 3L^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{C.9})$$

para $K = 1$ e

$$R = 3M \quad (\text{C.10})$$

para $K = 0$. No primeiro caso, vemos que só existem órbitas circulares estáticas para partículas com momento angular $L^2 \geq 12M^2$. Se $L^2 > 12M^2$, há dois raios de equilíbrio possíveis, R_- (órbita instável) e R_+ (órbita estável)*. O menor valor possível de R_+ é obtido quando $L^2 = 12M^2$, e é $R = 6M$. Para partículas não massivas, a órbita circular (instável) ocorre sempre em $R = 3M$. A frequência angular medida por um observador no infinito é dada por

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} \frac{d\tau}{dt} = \frac{L(1 - 2M/r)}{r^2 E} \quad (\text{C.11})$$

No caso de órbitas circulares, segue, da Eq.(C.8), para $K = 1$, que $L^2 = Mr/(1 - 3M/r)$. Inserindo essa expressão na Eq.(C.7), obtemos

$$E = (1 - 2M/r)(1 - 3M/r)^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{C.12})$$

Com essas expressões, podemos simplificar algumas fórmulas de interesse, eliminando E e L e reescrevendo-as apenas em função da variável radial. Em particular, a Eq.(C.11) torna-se (“Lei de Kepler”)

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \left(\frac{M}{R^3} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{C.13})$$

e $u^0 = dt/d\tau$ se reduz a

$$\frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{3M}{R} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{C.14})$$

*A estabilidade da órbita ocorre se e somente se $d^2V_S(R)/dr^2 \geq 0$.

Referências Bibliográficas

- [1] L. Parker, “Particle Creation in Expanding Universes”, *Phys. Rev. Lett.* **21**, 562 (1968).
- [2] S. W. Hawking, “Black Hole Explosion?”, *Nature* **248**, 30 (1974).
- [3] S. W. Hawking, “Particle Creation by Black Holes?”, *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975).
- [4] L. C. B. Crispino, A. Higuchi e G. E. A. Matsas, “Scalar Radiation emitted from a source rotating around a black hole”, *Class. Quantum Grav.* **17**, 19 (2000).
- [5] L. C. B. Crispino, “Synchrotron scalar radiation from a source in ultrarelativistic circular orbits around a Schwarzschild black hole”, *Phys. Rev D* **77**, 047503 (2008).
- [6] A. R. R. da Silva, G. E. A. Matsas e L. C. B. Crispino, “Scalar Radiation emitted from a rotating source around a Reissner-Nordström black hole”, *Phys. Rev D* **79**, 024004 (2009).
- [7] I.D. Novikov e K.S. Thorne, *Astrophysics of Black Holes* (Gordon and Breach, Paris, 1973).
- [8] C. W. Misner, R. A. Breuer, D. R. Brill, P. L. Chrzanowski, H. G. Hughes III e C. M. Pereira, “Gravitational Synchrotron Radiation in the Schwarzschild Geometry”, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 998 (1972).
- [9] R. A. Breuer, P. L. Chrzanowski, H. G. Hughes III e C. W. Misner, “Geodesic Synchrotron Radiation”, *Phys. Rev. D* **8**, 4309 (1973).

- [10] R. A. Breuer, *Gravitational Perturbation Theory and Synchrotron Radiation*, Lecture Notes in Physics (Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 1975).
- [11] J. Weber, “Evidence for Discovery of Gravitational Radiation”, *Phys. Rev. Lett.* **22**, 1320 (1969), “Gravitational Radiation Experiments”, *Phys. Rev. Lett.* **24**, 276 (1970) e “Anisotropy and Polarization in the Gravitational-Radiation Experiments”, *Phys. Rev. Lett.* **25**, 180 (1970).
- [12] A. H. Cook, *Interference of Electromagnetic Waves*, (Clarendon Press, Oxford, 1971).
- [13] N. D. Birrel e P. C. W. Davies, *Quantum Fields in curved space* (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).
- [14] R. M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics (Chicago Lectures in Physics)* (University of Chicago Press, Chicago, 1994).
- [15] S. A. Fulling, “Nonuniqueness of Canonical Field Quantization in Riemannian Space-Time”, *Phys. Rev. D*, **7**, 2850 (1973).
- [16] C. Itzykson e J-B. Zuber, *Quantum Field Theory* (Dover Publications, Inc., Mineola, New Yorker, 2005).
- [17] A. Higuchi, G. E. A. Matsas, C. B. Peres, “Uniformly accelerated finite-time detectors”, *Phys. Rev. D* **48**, 3731 (1993).
- [18] L. C. B. Crispino, A. Higuchi, G. E. A. Matsas, “The Unruh effect and its applications”, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 787 (2008).
- [19] I. S. Gradshteyn e I M Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products* (New York: Academic, 1980).
- [20] M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (New York: Dover, 1965)
- [21] Unruh, W. G., “Notes on black-hole evaporation”, *Phys. Rev. D* **14**, 870 (1976).

- [22] A. Higuchi, G. E. A. Matsas e D. Sudarsky, “Interaction of Hawking radiation with static sources outside a Schwarzschild black hole”, *Phys. Rev. D* **58**, 104021 (1998).
- [23] J. Castiñeiras e G. E. A. Matsas, “Low-energy sector quantization of a massless scalar field outside a Reissner-Nordström black hole and static sources”, *Phys. Rev. D* **62**, 064001 (2000).
- [24] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics* (John Wiley, New York, 1998).
- [25] D. G. Boulware, “Quantum field theory in Schwarzschild and Rindler spaces”, *Phys. Rev. D* **11**, 1404 (1975).
- [26] J. D. Jackson 1975 *Classical Electrodynamics* 3^a edição (New York: Wiley, 1999);
- [27] B. P. Jensen e P. Candelas, “Schwarzschild radial functions”, *Phys. Rev. D* **33**, 1590 (1986); “Erratum: Schwarzschild radial functions”, *Phys. Rev. D* **35**, 4041 (1987).
- [28] J. B. Hartle e S. W. Hawking, “Path-integral derivation of black-hole radiance”, *Phys. Rev. D* **13**, 2188 (1976).
- [29] R. M. Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, Chicago, USA, 1984).
- [30] D. Fregolente, G. E. A. Matsas e D. A. T. Vanzella, “Semiclassical approach to the decay of photons in circular motion under the influence of gravitational fields”, *Phys. Rev. D* **74**, 045032 (2006).