



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.006/05

**Fluxos e Densidades de Energia Negativa em Teoria
Quântica de Campos**

Clóvis Achy Soares Maia

Orientador

Prof. Dr. George E. A. Matsas

Março de 2005

Agradecimentos

... mas também sei que qualquer canto é menor do que a vida de qualquer pessoa.

Elis Regina em letra de Belchior (*Como nossos pais*)

Acredito que todos nós temos uma história de vida que torna qualquer lista de agradecimentos incompleta e peço desculpas aos que não constem aqui. Tenham certeza que minha gratidão supera o que pode ser escrito ou falado, e apenas desejo que meus caminhos possam se cruzar de novo com todos aqueles que fazem parte do que sou.

- Em primeiro lugar meu mais grato e profundo reconhecimento aos meus pais, Clóvis e Glaci. Ao meu pai por me ensinar que o amor e a simplicidade transcendem as quedas e faz de nós verdadeiros seres humanos, e à minha mãe por ser meu primeiro e maior exemplo de vida, garra e caráter - sua dedicação e amor irrestrito à mim foi sempre meu bem mais precioso. Todas as lições que aprendi com vocês, das mais doces às mais amargas, são um legado inestimável que pretendo honrar sempre.

- Aos meus irmãos Athos e Fabrício. Sempre companheiros e amigos, sem vocês a vida não teria a menor graça.

- A Adriane, por ter dado cor à cidade, música à vida e asas, de borboleta, à felicidade. Ter você ao meu lado, dividindo alegrias, sonhos e tristezas, fez toda a diferença. A seus pais, Hugo e Sibila, por terem sempre me recebido tão bem e por colocarem no mundo uma filha tão linda e singela.

- Aos amigos da USP, Jefferson Stafusa e Rodrigo Fontana. Sua amizade sincera, Stafusa, foi sempre um chão firme e nossa convivência desde a graduação, discutindo a física ou o mundo, é insubstituível. Rodrigo, personalidade única, me ajudou mais do que imagina.

- A todos amigos do IFT. Em particular ao Evandro, amigo de todas as horas, ao Carlos e ao Júlio - valeu, pessoal, pelo tempo que moramos juntos. Ao Douglas, grande companheiro de sala, e ao Jorge Castiñeiras que me recebeu tão bem. Ao Fabiano (carioca), Fernando Gardim, Urbano, Igor e todo pessoal do futebol.

- Seria injustiça não lembrar de alguns professores da minha graduação, que fizeram diferença fundamental na minha formação. Agradeço ao Prof. Adonai Sant'Anna, que me ensinou os primeiros passos em ciência e foi sempre um grande amigo, e ao Prof. Márcio Bettega, que me orientou com paciência na iniciação científica.

- Por fim, agradeço especialmente ao Prof. George Matsas pela orientação no mestrado, por aquelas horas de fim de tarde regadas a café e física e pelas melhores aulas de relatividade geral que se pode ter. Agradeço também pelos puxões de orelha, pois sei que representam sua preocupação comigo. Sua visão da física me fascina e motiva profundamente e espero que essa dissertação sirva de reflexo, por pálido que seja, do que pude respirar dela.

- A FAPESP agradeço o suporte financeiro e o apoio nestes dois anos, sem o qual este trabalho não se realizaria.

Resumo

Sabe-se já há algum tempo que a Teoria Quântica de Campos permite violações das Condições Clássicas de Energia na forma de densidades e fluxos de energia negativa. Um exemplo contundente é o efeito Casimir, onde o estado de vácuo do campo eletromagnético entre duas placas metálicas possui densidade de energia negativa. Porém, se as leis da física não colocassem restrições sobre tais violações das Condições de Energia, aparentemente seria possível usar energias negativas para, por exemplo, produzir violações macroscópicas da segunda lei da termodinâmica, da conjectura de *cosmic censorship*, além de se proporcionar a criação de *wormholes* e possíveis máquinas do tempo. Uma linha de pesquisa desenvolvida para abordar essa questão envolve as chamadas Desigualdades Quânticas, estudadas primeiramente por L.H. Ford, que são desigualdades sobre fluxos e densidades de energia negativa que impõem restrições capazes de tornar as violações acima não observáveis macroscopicamente. Nesta dissertação apresentaremos alguns exemplos de sistemas que possuem densidades ou fluxos de energia negativa, revisaremos os teoremas de Desigualdades Quânticas e discutiremos algumas de suas aplicações. Discutiremos também algumas limitações destes teoremas apresentando sistemas que não estão sujeitos a desigualdades quânticas, dos quais um exemplo é o próprio efeito Casimir. Iremos enfim propor um modelo que introduz flutuações quânticas nas condições de contorno (e.g., nas placas metálicas) do efeito Casimir, e iremos mostrar que a introdução destes efeitos de flutuação no cálculo da energia de Casimir tem por resultado impedir que violações de leis físicas macroscópicas manifestem-se nesse sistema.

Palavras Chaves: Teoria Quântica de Campos, Desigualdades quânticas, efeito Casimir.

Áreas de conhecimento: 1.05.01.02-9, 1.05.01.03-7, 1.05.02.01-7, 1.05.03.01-3.

Abstract

It has been known for some time that Quantum Field Theory allows the violation of Classical Energy Conditions in the form of negative energy densities and fluxes. A remarkable example is the Casimir effect, where the vacuum state of the electromagnetic field between two perfectly conducting parallel plates presents negative energy density. However, if the laws of physics did not place constraints on such a violation of the Energy Conditions, it appears that it would be possible to use negative energies for producing, for example, macroscopic violation of the second law of thermodynamics, of the cosmic censorship conjecture, and also provide the creation of wormholes and time machines. A line of research which was developed to approach this question is the so called Quantum Inequalities, first studied by L.H. Ford, which are constraints over negative energy densities and fluxes with capacity to render the above violations macroscopically unobservable. We present here some examples of systems with negative energy densities or fluxes, review the Quantum Inequalities theorems and discuss some of its applications. We also discuss some limitations of these theorems showing systems where there are no quantum inequalities, being the Casimir effect one example. At last we propose a model which introduces quantum fluctuations in the description of the boundaries conditions (e.g, the conducting plates) of Casimir effect and we'll show that the introduction of these fluctuations in the calculation of Casimir energy results in the impossibility of violation of macroscopic physical laws using Casimir configuration.

Keywords: Quantum Field Theory, Quantum Inequalities, Casimir effect.

Albert Einstein said, “The Lord God is subtle but He is not malicious.” I like to turn this around by saying, “The Lord God is not malicious, but He is subtle.”

I am occasionally tempted to try writing such a [popularization] book myself, but I know that it would be terribly one-sided. I know some physics, but there is much more to “reality” than physics, and of that I am largely ignorant. So I wind up instead writing a physics treatise for specialists! The trouble with writing a popularization is that one has to be absolutely honest.

In a word, love. That is the key word, for believers and nonbelievers alike, that raises our existence above the level of farce.

Bryce DeWitt (1923-2004) em seu último artigo [*Physics Today* **58**, 32 (Jan/2005)].

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Objetivo	1
1.2	Motivação	2
1.2.1	As condições clássicas de energia	2
1.2.2	Violação das condições clássicas de energia	5
1.2.3	Condições médias de energia e desigualdades quânticas	7
2	Preliminares de teoria quântica de campos	9
2.1	O campo escalar	9
3	Como surgem energias negativas em teoria quântica de campos	13
3.1	Estado de vácuo + 2 partículas ($ 0\rangle + 2_{\mathbf{k}}\rangle$)	13
3.1.1	Densidades de energia negativa	13
3.2	Estados <i>squeezed</i>	19
3.3	Espelhos acelerados	21
3.3.1	Desigualdades para fluxos emitidos por espelhos	23
3.4	Sumário do capítulo	31
4	As desigualdades quânticas	32
4.1	Desigualdades quânticas e sua interpretação física	32
4.2	A dedução	37
5	Aplicações das desigualdades quânticas e outros exemplos de energia negativa em teoria quântica de campos	41
5.1	Espelhos acelerados e a segunda lei da termodinâmica	41
5.2	Espelhos acelerados e <i>cosmic censorship</i>	48
5.3	Densidades estáticas de energia negativa	50
5.3.1	O efeito Casimir	50
6	Cálculo de densidades de energia estática	55
6.1	Densidades de energia negativa estática	55
6.2	A divergência da energia de vácuo nas proximidades de contornos	60

7	Cálculo da energia de vácuo para contornos “flutuantes”	62
7.1	Introduzindo flutuações do contorno	62
7.1.1	Efeito Casimir e flutuações.	66
7.2	Um modelo para configuração de Casimir em primeira quantização .	69
7.2.1	Resolvendo o modelo	71
8	Conclusão	80
A	Espelhos acelerados	82

Capítulo 1

Introdução

1.1 Objetivo

Essa dissertação tem por objetivo apresentar e discutir fenômenos de energia negativa em teoria quântica de campos. Para tanto iremos:

- Apresentar, no capítulo 3, alguns exemplos de fluxos e densidades de energia negativa. Fez-se um esforço sincero para tornar esse capítulo acessível mesmo a leitores não familiarizados com teoria quântica de campos. A idéia é tornar intuitivos alguns exemplos de sistemas físicos que apresentam energias negativas.
- Apresentar e demonstrar formalmente, no capítulo 4, as chamadas “desigualdades quânticas” no espaço-tempo de Minkowski, assim como apresentar algumas aplicações e limitações dessas desigualdades no capítulo 5.
- Apresentar, no capítulo 6, o cálculo do tensor energia-momento de campos escalares sujeitos a condições de contorno (“espelhos”). Em particular, detalhar o cálculo do efeito Casimir.
- Apresentar, no capítulo 7, um tratamento de condições de contorno sujeitas a flutuações, com o objetivo de discutir efeitos de mecânica quântica sobre espelhos em uma configuração de Casimir.

A motivação para o estudo de fenômenos que envolvam energias negativas será dada a seguir. No capítulo 8 iremos resumir o exposto e enunciar nossas conclusões.

1.2 Motivação

1.2.1 As condições clássicas de energia

É uma constatação comum a de que a matéria da qual somos constituídos e que encontramos cotidianamente ao nosso redor é caracterizada por possuir uma densidade de energia positiva. Tal constatação é um exemplo dessas hipóteses que muitas vezes tomamos por trivial, a ponto de sequer pensarmos nela. No contexto da relatividade restrita - ou seja, no espaço-tempo de Minkowski - o raciocínio é o de que partículas de massa m possuem energia

$$E = mc^2, \quad (1.1)$$

e uma vez que o usual é que massa seja uma quantidade positiva, o mesmo se conclui para a energia. Podemos pensar em uma situação mais geral onde se considere a distribuição de energia e pressão de um fluido perfeito, que pode ser representado pelo tensor energia-momento

$$T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu + \frac{P}{c^2}(U_\mu U_\nu - \eta_{\mu\nu}), \quad (1.2)$$

sendo $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ a quadri-velocidade¹ do fluido. Um observador co-móvel ao fluido detecta uma densidade de energia ϵ_c

$$\epsilon_c = T_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = \rho c^2, \quad (1.3)$$

que, em situações usuais, é positiva, uma vez que o fluido é constituído de partículas que, individualmente, atendem (1.1) com $m > 0$. Um observador inercial que se movimenta pelo fluido com velocidade v - quadri-velocidade $V^\mu = \gamma(c, 0, 0, v)$, $\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2}$ - por sua vez experimenta uma densidade de energia ϵ_v

$$\epsilon_v = T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = \gamma^2(\rho c^2 + \frac{v^2}{c^2}P). \quad (1.4)$$

Na convenção adotada, pressões positivas são as que exercem força no sentido de expandir a superfície que as limita, enquanto pressões negativas exercem força no sentido de contraí-la. Se adotarmos um fluido de pressão negativa $P = -|P|$, teremos

$$\epsilon_v = T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = \gamma^2(\rho c^2 - \frac{v^2}{c^2}|P|). \quad (1.5)$$

Sendo o limite superior de $\frac{v}{c} \rightarrow 1$, (1.5) implica que para $|P| > \rho c^2$ há observadores que experimentam uma densidade de energia *negativa*². Acontece que para materiais usuais a relação $P \ll \rho c^2$ é a regra. Uma coluna de 10 metros de água,

¹Nesta seção usamos $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$ e a métrica $\eta_{\mu\nu}$ de assinatura $(c^2, -1, -1, -1)$.

²Matéria que atenda a condição $|P| > \rho c^2$ é também conhecida como “matéria exótica”.

por exemplo, apresenta $P \approx 10^5 \text{N/m}^2$ na base de seu recipiente, enquanto possui $\rho c^2 \approx 9 \times 10^{19} \text{N/m}^2$. De fato, os únicos objetos macroscópicos conhecidos que possuem uma equação de estado onde a pressão é comparável à sua densidade de energia são estrelas de nêutrons [10].

Esse sentimento geral, de que as pressões que um sistema físico é capaz de exercer somada à sua densidade de energia é uma quantidade positiva, que tem origem em nossa experiência comum, é formalizado por meio das chamadas “condições clássicas de energia”, expressas como

1. *Condição Fraca de Energia*, que é atendida se e somente se a densidade ρ e pressões P_i ($i = 1, 2, 3$) tomadas em direções ortogonais entre si satisfazem

$$\rho \geq 0 \quad e \quad \rho c^2 + P_i \geq 0. \quad (1.6)$$

2. *Condição Forte de Energia*, satisfeita caso

$$\rho \geq 0, \quad \rho c^2 + \sum_{i=1}^3 P_i \geq 0 \quad e \quad \rho c^2 + P_i \geq 0. \quad (1.7)$$

Ela é chamada de “forte” apenas no sentido de que é um requerimento mais específico que a condição fraca acima.

3. *Condição de Energia Dominante*, satisfeita caso

$$\rho \geq 0 \quad e \quad \rho c^2 \geq |P_i|. \quad (1.8)$$

Tais condições, matematicamente independentes uma da outra, são diferentes maneiras de se exigir que um material apresente um comportamento clássico, e atendê-las implicará uma densidade de energia $\epsilon_v > 0$ para qualquer observador.

Espaço-tempos curvos

Embora a discussão acima desenvolva-se no espaço-tempo de Minkowski, seu lugar natural se dá na relatividade geral, regida pela equação de Einstein

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1.9)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Riemann, $g_{\mu\nu}$ é a métrica, $R \equiv R_{\mu\nu}g^{\nu\mu}$, G é a constante de Newton e $T_{\mu\nu}$ é novamente o tensor energia-momento. A equação de Einstein basicamente nos diz que o conteúdo de matéria e energia de um objeto altera o espaço-tempo à sua volta, e vice-versa. Colocada dessa forma, sem outras condições de contorno, a equação por si só não nos diz muito - a princípio qualquer métrica poderia ser uma solução associada a alguma distribuição de matéria. Poderíamos “arquitetar” um espaço-tempo arbitrário que exibisse qualquer comportamento desejado. Logo, ao se impor limitações sobre algum termo dessa equação, estaremos

limitando a busca de soluções fisicamente realizáveis. Nesse sentido, a condição mais trivial vem das identidades de Bianchi, que implicam que

$$\nabla_{\mu}G^{\mu\nu} = 0, \quad (1.10)$$

que pela eq. de Einstein nos leva a

$$\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0, \quad (1.11)$$

que é a primeira imposição que temos para uma distribuição de energia. Parece natural impor que $T_{\mu\nu}$ deve aqui, também, seguir as condições clássicas de energia já expostas. No contexto da relatividade geral, tais condições são reescritas como:

1. Condição Fraca de Energia; dado um observador qualquer de quadri-velocidade ξ^{μ} , impõe-se que

$$T_{\mu\nu}\xi^{\mu}\xi^{\nu} \geq 0 \quad (1.12)$$

2. Condição Forte de Energia;

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right)\xi^{\mu}\xi^{\nu} \geq 0 \quad (1.13)$$

3. Condição de Energia Dominante; dado um vetor u^{μ} tipo tempo e direcionado ao futuro (de componente $u^0 > 0$), o produto $T_{\mu\nu}u^{\nu}$ deve ser um vetor tipo tempo ou tipo luz.

Uma vez que a quantidade $T_{\mu\nu}u^{\nu}$ representa a quadricorrente da densidade de energia-momento, é comum interpretar fisicamente a condição de energia dominante como um requerimento de que a velocidade do fluxo de matéria seja sempre menor que a velocidade da luz [52]. Ou seja, para um material clássico essa condição impõe que a velocidade de perturbações (som) no meio seja menor que a da luz, preservando a causalidade. Desde que $T_{\mu\nu}$ seja diagonalizável³, as definições acima são equivalentes às apresentadas em (1.6), (1.7) e (1.8).

Há ainda outras condições de energia análogas que não enunciaremos. O importante para nossa discussão é que essas condições de energia são fundamentais para muitos teoremas importantes demonstrados nas décadas de 1960 e 1970 - a chamada era de ouro dos buracos negros. Alguns exemplos:

1. A condição fraca de energia foi uma das hipóteses usadas por Penrose [11] na prova de seus teoremas de singularidades. No início do século passado, era conhecido que distribuições esféricas de matéria atingiam um limiar no qual sofriam um colapso gravitacional dando origem a um buraco negro com uma singularidade. Porém, não se sabia se o mesmo ocorreria para uma distribuição de matéria mais geral. O teorema de Penrose foi a primeira demonstração de que o mesmo ocorre para qualquer distribuição de matéria.

³Que é uma condição atendida para todas distribuições físicas de matéria conhecidas [52].

2. Seguindo os trabalhos de Penrose, Hawking [12] demonstrou por um teorema similar - que também assume condições clássicas de energia - que um universo de Friedman-Robertson-Walker aberto (nosso universo) possui uma singularidade inicial (o “Big Bang”). Mesmo hoje teoremas de singularidade têm sido demonstrados para vários espaço-tempos, tais como os encontrados em cosmologias inflacionárias [13].
3. Outro teorema demonstrado por Hawking, que se utiliza da condição forte de energia, é a chamada “segunda lei da termodinâmica para buracos negros clássicos”, que dita que a área do horizonte de eventos de um conjunto de buracos negros jamais decresce [14]. O nome se deve à associação de uma entropia à área do horizonte de eventos de um buraco negro, e a intuição é de que assim como a entropia de um sistema fechado jamais decresce, o mesmo vale para a entropia (área) de buracos negros.
4. A condição de energia dominante é usada para provar o “teorema da massa positiva”, que garante que a gravidade seja sempre uma força atrativa [15].

1.2.2 Violação das condições clássicas de energia

Colocando em perspectiva, vemos que as condições clássicas de energia não só nos permitem manter a noção comum de que a matéria à nossa volta possui densidade de energia positiva, como tem papel central em importantes teoremas da relatividade geral. É então uma coincidência interessante que, ao mesmo tempo que Penrose e Hawking publicavam seus teoremas de singularidade, Epstein, Glaser e Jaffe [16] demonstravam que em teoria quântica de campos a densidade de energia de um campo escalar *não* é uma quantidade positivo-definida. É possível encontrar estados gerais de um campo livre quantizado no qual a densidade de energia assume valores negativos por determinados períodos. Veremos no capítulo 3 alguns exemplos concretos em que esse fenômeno ocorre.

Em outras palavras, as condições clássicas de energia são *violadas* trivialmente em teoria quântica de campos. O que levanta questões interessantes pois, se não houver restrição alguma sobre tais densidades de energia negativa, podemos ingenuamente imaginar situações inusitadas provocadas por sua presença:

- Por que perturbações do campo não seriam capazes de provocar transições para estados de energia negativa com subsequente emissão de energia positiva?
- Poderíamos violar a segunda lei da termodinâmica. Ao dirigir um fluxo de energia negativa para um corpo mais frio ao mesmo tempo que um fluxo de energia positiva em direção contrária seguisse para um corpo mais quente, poderíamos transferir calor de um corpo mais frio para um mais quente *sem* aumento de entropia do sistema [1, 7]. De fato, veremos no capítulo 5 um exemplo explícito de tal paradoxo.

- No contexto da relatividade geral, uma concentração isolada de energia negativa poderia dar origem a um campo gravitacional *repulsivo* (perda do “teorema da massa positiva”).
- Poderíamos direcionar fluxos de energia negativa a um buraco negro maximal de forma a transformá-lo em uma singularidade nua, violando a *cosmic censorship*. No capítulo 5 será exposto um exemplo dessa forma.
- Como já mencionado, não havendo maiores restrições sobre $T_{\mu\nu}$, podemos a princípio “arquitetar” espaço-tempos que nos interessem. Exemplos de tal arquitetura são os buracos de minhoca (*wormholes*), que são uma espécie de ponte para ligar diferentes pontos do universo de modo a tornar eventuais viagens espaciais muito mais curtas [8]. E mais: como demonstraram Morris e Thorne [9], dada a possibilidade de se criar um buraco de minhoca, pode-se também usá-los para se criar *máquinas do tempo*. A nós interessa uma característica fundamental desses buracos de minhoca - sua construção exige matéria exótica, ou seja, matéria que viola as condições clássicas de energia. Assim, acredita-se que, se pudermos manipular à vontade quantidades arbitrarias de energia negativa, seria possível a criação de *wormholes* e máquinas do tempo.
- Há vários outros espaço-tempos capazes de facilitar viagens espaciais, tais como espaço-tempos do tipo *warpdrive* [17], ou o “tubo de Krasnikov” [18], entre outros, que exigem em sua arquitetura densidades de energia negativa.
- O que dizer também dos teoremas de singularidade de Penrose e Hawking, não valendo uma de suas hipóteses centrais?

Embora a lista de perguntas suscitadas pela existência de energias negativas seja grande, é fato que nossa experiência comum nos aponta que muitos dos problemas mencionados não ocorrem, pelo menos não freqüentemente. Assim, deve haver algum mecanismo que restrinja a produção de fluxos e densidades de energia negativa, sua magnitude, duração e/ou sua interação com outros tipos de matéria.

Um primeiro exemplo de que a teoria quântica de campos pode se auto-regular para proibir violações de leis macroscópicas foi dado pelo próprio Hawking. Sua posterior descoberta de que, ao se considerar efeitos de mecânica quântica⁴, buracos negros poderiam evaporar [19] pela emissão de radiação térmica (a radiação Hawking), foi acompanhada pelo reconhecimento de que tal efeito ocorre em conjunto com um fluxo de energia negativa direcionado ao buraco negro - o que explica sua perda de massa e torna auto-consistente sua evaporação. Ou seja, esse é um exemplo onde a existência de energias negativas invalida um teorema clássico (a “segunda lei da termodinâmica para buracos negros clássicos”), mas ao mesmo tempo oferece outra solução: a “segunda lei da termodinâmica para buracos negros clássicos” é substituída pela “segunda lei generalizada da termodinâmica” [22], que dita que a

⁴Ou seja, considerando um campo quantizado (no espaço-tempo de fundo de um buraco negro) que não atende condições clássicas de energia.

entropia associada à área de um buraco negro somada à entropia externa (o que inclui a radiação que ele emite) jamais decresce.

O que sabemos então sobre as restrições da teoria quântica de campos à existência de energias negativas?

1.2.3 Condições médias de energia e desigualdades quânticas

Condições médias de energia

Várias abordagens foram desenvolvidas nas décadas de 1970 e 1980 para se estudar a violação da condição fraca de energia por campos quantizados, com o objetivo inicial de restaurar alguns, se não todos, teoremas da relatividade geral clássica. Tipler [23] foi o primeiro a sugerir que se fizesse uma média das condições de energia sobre a geodésica de um observador, e trabalhos subsequentes [24] eventualmente deram origem ao que é hoje conhecido como a Condição Média-Fraca de Energia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle T_{\mu\nu} U^\mu U^\nu \rangle d\tau \geq 0, \quad (1.14)$$

onde U^μ é a quadri-velocidade de um observador qualquer, τ seu tempo próprio, $T_{\mu\nu}$ o tensor energia-momento de um campo quantizado e $\langle \rangle$ representa valor médio sobre o estado do campo. Outra condição estudada foi a Condição Média-Nula de Energia,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle T_{\mu\nu} K^\mu K^\nu \rangle d\lambda \geq 0, \quad (1.15)$$

onde K^μ é o vetor tangente a uma geodésica tipo luz e λ seu parâmetro afim. Intuitivamente, estas condições significam que um observador pode eventualmente experimentar energias negativas arbitrárias, mas que devem ser compensadas por energias positivas ao se considerar toda sua trajetória.

Roman [24] demonstrou que os teoremas de singularidades de Penrose continuam válidos caso se substitua a condição fraca de energia pela condição média-nula de energia. Assim resta a pergunta: campos quantizados obedecem às condições médias de energia? Wald e Yurtsever [25] demonstraram que um campo escalar no espaço-tempo de Minkowski em (3+1) dimensões atende (1.15). Porém, sabe-se que em espaço-tempos que possuam densidades de energia negativa estáticas as condições médias de energia são inválidas. Como demonstraremos no capítulo 5, por exemplo, observadores que se situem entre duas placas metálicas (o efeito Casimir) experimentam uma densidade de energia negativa por toda sua linha de mundo. Assim, as condições médias de energia não são atendidas em qualquer espaço-tempo.

Há ainda uma limitação importante nestas condições: elas nada dizem a respeito da distribuição ou magnitude da energia negativa. Podemos ainda obter quantidades arbitrárias de energia por um período arbitrário de tempo, já que se pode fazer o observador encontrar energias negativas tão separadas temporalmente quanto

se deseje da energia positiva que irá compensá-la. Dito de outro modo, tais condições não impedem que se viole leis físicas macroscópicas durante um tempo arbitrário.

Desigualdades quânticas

Outro tipo de abordagem foi desenvolvida por Ford [1, 2, 6], o que são hoje as chamadas desigualdades quânticas. Estas desigualdades expressam que a magnitude de energia negativa $\Delta E = -|\Delta E|$ acessível em um sistema é limitada pelo tempo ΔT de duração desta energia por equações da forma

$$|\Delta E|\Delta T < \hbar. \quad (1.16)$$

Embora tal equação guarde semelhança com as relações de incerteza de Heisenberg da mecânica quântica não-relativística, sua dedução ocorre de modo independente, usando-se tão somente o aparato de teoria quântica de campos.

Tais desigualdades têm se mostrado válidas para o campo livre escalar, eletromagnético e espinorial. Sua importância reside no fato de que densidades de energia negativa ficam limitadas: se sua magnitude for muito grande, seu tempo de duração é muito pequeno, e vice-versa. Intuitivamente, a idéia é que um sistema que apresente energias negativas limitadas por uma desigualdade como (1.16) não serão capazes de causar qualquer violação clássica macroscópica de leis físicas conhecidas, pois os efeitos associados à existência de energias negativas é menor que os efeitos de flutuação quântica usuais.

A demonstração das desigualdades quânticas e sua capacidade de garantir que a intuição acima seja implementada na prática tem sido objeto de estudo de vários trabalhos nas últimas duas décadas. Por ter se mostrado a forma de limitação a energias negativas mais promissora até hoje, sua discussão em maiores detalhes será nosso objetivo a partir de agora.

Capítulo 2

Preliminares de teoria quântica de campos

Para definir notação apresentaremos, seguindo as referências [20, 21], um pequeno resumo de conceitos básicos em teoria quântica de campos usando como ilustração o campo escalar. Usaremos assinatura $(+ - - -)$ e unidades naturais no restante da exposição, a não ser quando indicada explicitamente outra notação.

2.1 O campo escalar

Seja um campo escalar real $\phi(t, \mathbf{x})$, definido em todos os pontos (t, \mathbf{x}) de um espaço-tempo de Minkowski $(n+1)$ -dimensional, que possua por densidade lagrangeana $\mathcal{L}(x)$

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - \frac{m^2 \phi^2}{2}, \quad (2.1)$$

tal que sua ação, definida por

$$S = \int \mathcal{L}(x) d^{n+1}x, \quad (2.2)$$

quando sujeita ao requisito de que sua variação em relação a ϕ seja nula,

$$\delta S = 0, \quad (2.3)$$

retorne a equação de campo obedecida por $\phi(x)$

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi(x) = 0. \quad (2.4)$$

Pode-se mostrar pelo uso da eq. (2.4) que a quantidade

$$J^\mu = [\phi_1(x)\partial^\mu \phi_2^*(x) - (\partial^\mu \phi_1(x))\phi_2^*(x)] \quad (2.5)$$

possui quadri-divergência nula, $\partial_\mu J^\mu = 0$, de onde se vê que o campo escalar possui uma quantidade conservada Q

$$Q \propto \int_t [\phi_1(x) \partial_t \phi_2^*(x) - (\partial_t \phi_1(x)) \phi_2^*(x)] d^n x, \quad (2.6)$$

sendo a integral sobre uma superfície de simultaneidade tipo espaço indexada pelo tempo t , o que nos permite definir o produto escalar (ϕ_1, ϕ_2) para ϕ_1 e ϕ_2 soluções de (2.4) como

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int_t [\phi_1(x) \partial_t \phi_2^*(x) - (\partial_t \phi_1(x)) \phi_2^*(x)] d^n x. \quad (2.7)$$

Um conjunto de soluções usual para (2.4) é dado em termos das ondas planas

$$u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x})^\pm = \frac{e^{\pm i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - wt)}}{\sqrt{2w(2\pi)^n}}, \quad (2.8)$$

$$w \equiv (k^2 + m^2)^{1/2}, \quad (2.9)$$

$$k \equiv |\mathbf{k}| = \left(\sum_{i=1}^n k_i^2 \right)^{1/2}, \quad (2.10)$$

sendo o sinal (+) referente a soluções de frequência positiva com respeito a t e o sinal (-) de frequências negativas, tal nomenclatura justificando-se por tais funções serem autofunções do operador $\partial/\partial t$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{\mathbf{k}}^\pm(t, \mathbf{x}) = \mp i w u_{\mathbf{k}}^\pm(t, \mathbf{x}). \quad (2.11)$$

Note-se que em relação ao produto escalar definido em (2.7) as soluções (2.8) estão normalizadas a $(u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'}) = (2\pi)^n \delta^n(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$.

Quantização

Por (2.8) formar um conjunto completo de soluções podemos expandir $\phi(t, \mathbf{x})$ como

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int d^n \mathbf{k} [a(\mathbf{k}) u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) + a^\dagger(\mathbf{k}) u_{\mathbf{k}}^*(t, \mathbf{x})]. \quad (2.12)$$

Procedemos à quantização padrão pela imposição de que $\phi(t, \mathbf{x})$ passe a ser um operador e impondo as relações de comutação

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] &= 0, \\ [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] &= 0, \\ [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] &= (2\pi)^n \delta^n(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \end{aligned} \quad (2.13)$$

sobre os operadores $a(\mathbf{k})$ e $a^\dagger(\mathbf{k})$, conhecidos respectivamente como operadores de aniquilação e criação, com os quais podemos definir o estado de vácuo de Minkowski como o estado $|0\rangle$ aniquilado por $a(\mathbf{k})$,

$$a(\mathbf{k})|0\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{k}, \quad (2.14)$$

e com os quais construímos um estado de n partículas como

$$|n_{\mathbf{k}}\rangle = \frac{[a^\dagger(\mathbf{k})]^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \quad (2.15)$$

Sua ação no espaço de Fock é resumida por

$$\begin{aligned} a^\dagger(\mathbf{k})|n_{\mathbf{k}}\rangle &= (n+1)^{\frac{1}{2}}|(n+1)_{\mathbf{k}}\rangle, \\ a(\mathbf{k})|n_{\mathbf{k}}\rangle &= n^{\frac{1}{2}}|(n-1)_{\mathbf{k}}\rangle. \end{aligned} \quad (2.16)$$

O tensor energia-momento

O tensor energia-momento de um campo pode ser calculado por

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.17)$$

sendo $g^{\mu\nu}$ a métrica e $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$. Para Minkowski, em que $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ teremos para o campo escalar

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\phi\partial_\alpha\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2\eta_{\mu\nu}. \quad (2.18)$$

A densidade de energia ρ (ou densidade hamiltoniana) fica definida por

$$\rho \equiv T_{tt} = \frac{1}{2} \left[(\partial_t\phi)^2 + \sum_{i=1}^n (\partial_i\phi)^2 + m^2\phi^2 \right]. \quad (2.19)$$

Substituindo (2.12) em (2.19) podemos calcular o operador hamiltoniano do campo como sendo

$$H \equiv \int_t T_{tt} d^n x = \frac{1}{2} \int d^n \mathbf{k} (a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k})) w \underset{\text{por (2.13)}}{\equiv} \int d^n \mathbf{k} (a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + \frac{1}{2}) w. \quad (2.20)$$

Para o estado de vácuo $|0\rangle$ teremos

$$\langle H \rangle = \int d^n \mathbf{k} \frac{1}{2} w, \quad (2.21)$$

que é uma quantidade divergente. Uma vez que $\langle H \rangle$ representa a energia total do campo, esse resultado parece indicar que o vácuo possui energia infinita. A origem

do problema é que cada modo w do campo escalar contribui como se fosse um oscilador harmônico, com uma energia de $\frac{1}{2}w$. Como existem infinitos modos, obtém-se uma quantidade infinita. Enquanto nos mantemos no espaço-tempo de Minkowski, esse problema é superado por uma simples redefinição da energia - uma renormalização - pela qual descartamos o termo divergente. Podemos fazê-lo livremente pois nenhuma observável física é alterada nesse processo. Formalmente isso significa usar operadores com ordenamento normal no lugar dos operadores usuais, tal que

$$: H := \int d^n \mathbf{k} a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) w. \quad (2.22)$$

Assim, no espaço-tempo de Minkowski, quando uma configuração possuir energia negativa, a possuirá em relação a essa convenção.

É importante notar que, sendo (2.22) um operador positivo-definido, teremos que

$$\langle : H : \rangle \geq 0, \quad (2.23)$$

o que significa que para o campo escalar livre, a energia integrada em todo espaço será sempre positiva.

Campo escalar com acoplamento

Nos interessa também o caso do campo escalar não massivo de acoplamento arbitrário dado pela lagrangeana

$$\mathcal{L}_\xi = 1/2[\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \xi R \phi^2], \quad (2.24)$$

sendo R o escalar de Ricci e ξ uma constante real. Seu tensor de energia-momento, em Minkowski (onde $R = 0$) será

$$T_{\mu\nu}^\xi = (1 - 2\xi)\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + (2\xi - 1/2)\eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi - 2\xi\phi\partial_\mu \partial_\nu \phi, \quad (2.25)$$

Veja que (2.25) não se reduz a (2.18) no caso $\xi \neq 0$. Isso acontece porque no cálculo do tensor energia-momento deve-se fazer uso de (2.24) em (2.17), e depois fazer o limite $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$. Como resultado alguns termos associados ao fator $\xi R \phi^2$ contribuem para $T_{\mu\nu}$, mesmo no limite $R \rightarrow 0$. A escolha de $\xi = 1/6$ corresponde ao caso em que o campo possui invariância conforme, para o qual o tensor energia-momento

$$T_{\mu\nu}^{\xi=1/6} = \frac{2}{3}\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{6}\eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi - \frac{1}{3}\phi\partial_\mu \partial_\nu \phi. \quad (2.26)$$

é conhecido como “improved stress-energy tensor” [26, 20] na literatura. Uma das razões para este nome é que para este tensor $\langle T_{\mu\nu} \rangle = 0$ nas proximidades de um contorno plano infinito, como veremos na §6.1. É comum que $T_{\mu\nu}$ possua termos divergentes nas proximidades de contornos para $\xi \neq \frac{1}{6}$. É interessante notar que a eq. (2.18) com $m = 0$ difere de (2.26) por uma quadri-divergência, i.e.,

$$T_{\mu\nu}^{\xi=1/6} = T_{\mu\nu}^{m=0} - \frac{1}{6}[\partial_\mu(\phi\partial_\nu\phi) + \partial_\nu(\phi\partial_\mu\phi) - 2\eta_{\mu\nu}\partial^\sigma(\phi\partial_\sigma\phi)]. \quad (2.27)$$

Capítulo 3

Como surgem energias negativas em teoria quântica de campos

Nesse capítulo ilustramos como densidades e fluxos de energia negativa surgem naturalmente em teoria quântica de campos. A idéia é analisar exemplos físicos específicos e de fácil intuição, onde a origem das densidades e fluxos de energia seja clara, e introduzir gradativamente os conceitos de desigualdades quânticas que também surgem nesse contexto.

3.1 Estado de vácuo + 2 partículas ($|0\rangle + |2_{\mathbf{k}}\rangle$)

3.1.1 Densidades de energia negativa

Considere um campo escalar sem massa e acoplamento mínimo. Vamos assumir que o estado desse campo é descrito por uma superposição do estado de vácuo e o estado de duas partículas de momento \mathbf{k} , ou seja,

$$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|2_{\mathbf{k}}\rangle. \quad (3.1)$$

Excepcionalmente, nessa seção usaremos modos nomais adaptados para quantização em um cubo de aresta L ,

$$u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) = \frac{e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-wt)}}{\sqrt{2wL^3}} \quad (3.2)$$

tal que $k_i = 2\pi j_i/L$, $j_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $i = 1 \dots 3$, $w = |k|$, e para os quais as integrais $\int d^n k$ na expansão de $\phi(t, \mathbf{x})$ em termos de $u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x})$ devem ser substituídas por $(2\pi/L)^3 \sum_{\mathbf{k}}$.

Usando a eq. (3.1) em (2.19), achamos que

$$\langle\psi|T_{00}^{\text{ren}}|\psi\rangle \equiv \rho_{\psi}(t, \mathbf{x}) = \frac{w}{2L^3} \left[1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \cos[2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - wt)] \right], \quad (3.3)$$

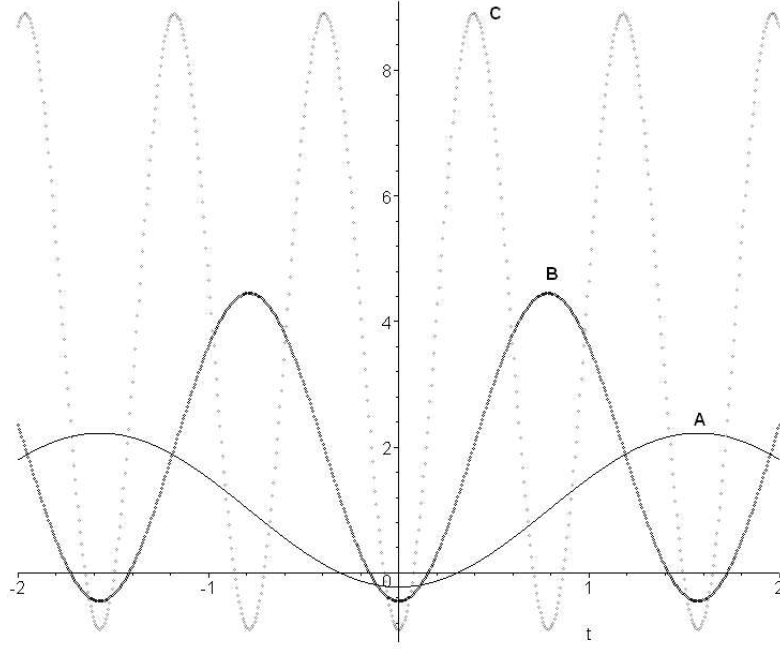


Figura 3.1: Gráfico de $\rho_\psi(t, \mathbf{0}) \cdot (2L^3)$. Curva “A”, $w = 1$; curva “B”, $w = 2$; curva “C”, $w = 4$.

de modo que a densidade de energia do campo oscila com o dobro da frequência do modo que compõe este estado. Além disso, uma vez a cada ciclo a densidade de energia torna-se negativa por um breve período de tempo, como mostra a figura 3.1. O termo responsável pelo aparecimento de uma densidade de energia negativa é justamente o de interferência entre os dois estados $|0\rangle$ e $|2_{\mathbf{k}}\rangle$. Esse fato nos indica, como confirmaremos através do próximo exemplo (ver §3.2), que energias negativas estão associadas à manifestação de aspectos quânticos do estado em que o campo se encontre.

Um primeiro exemplo de desigualdade quântica

Analisando a figura 3.1 com mais atenção, nota-se que a porção de densidade de energia negativa criada é sempre menor que a de densidade de energia positiva. Podemos nos perguntar se esse é sempre o caso para um estado geral

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|2_{\mathbf{k}}\rangle \quad , \quad (\alpha, \beta \neq 0) \quad (3.4)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1, \quad (3.5)$$

de vácuo mais duas partículas. Sem perda de generalidade assumiremos α e β reais, de modo que

$$\rho_\psi(t, \mathbf{x}) = \frac{w}{2L^3} \left[4\beta^2 - 2\sqrt{2}\alpha\beta \cos[2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - wt)] \right]. \quad (3.6)$$

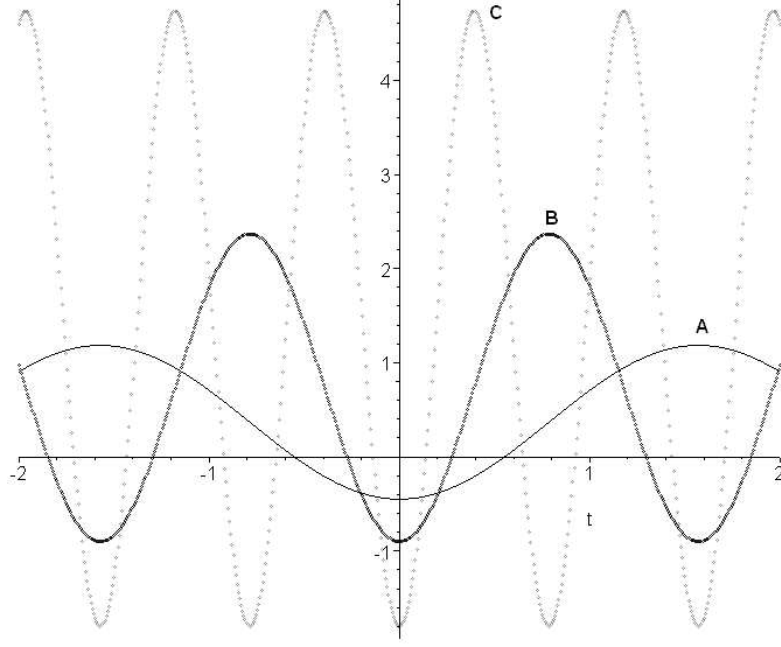


Figura 3.2: Gráfico de $\rho_{\psi,\min}(t, \mathbf{0}) \cdot (2L^3)$. Curva “A”, $w = 1$; curva “B”, $w = 2$; curva “C”, $w = 4$.

Ou seja, temos sempre a forma de um termo positivo menos um termo multiplicado por $\cos[2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - wt)]$. Assim, a integral da densidade por um período T atende

$$\int_T \rho_{\psi}(t, \mathbf{x}) dt > 0, \quad (3.7)$$

do que se vê que a área da porção de densidade negativa de um gráfico como o expresso na figura 3.1 deverá sempre ser menor que a da porção de densidade de energia positiva. Pode-se mostrar a partir da eq. (3.6) e da condição de unitariedade (3.5) que o estado com densidade de energia negativa máxima (ou seja, densidade de energia total mínima) que se pode construir é dado por $\alpha_{\min}^2 = \frac{6+2\sqrt{6}}{12}$ e $\beta_{\min}^2 = \frac{6-2\sqrt{6}}{12}$, cuja densidade de energia é

$$\rho_{\psi,\min}(\mathbf{x}) = \frac{w}{2L^3} \left[\frac{6 - 2\sqrt{6}}{3} - \sqrt{\frac{2}{3}} \cos[2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - wt)] \right], \quad (3.8)$$

com seu gráfico apresentado na figura 3.2.

Vemos então que, durante cada período, a densidade de energia negativa fica limitada de modo a tornar a energia total no período positiva. Assim se mantém a consistência com o fato de que a densidade de energia integrada em todo o tempo obedece

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \rho_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle T_{00} \rangle \geq 0, \quad (3.9)$$

como já comentado (ver §1.2.3). Porém, como já fora adiantado também, não é suficiente obtermos uma condição sobre a densidade de energia negativa para o tempo total ou mesmo para um período (já que sempre pode-se achar períodos tão grandes quanto se queira), uma vez que não se exclui a possibilidade de, no intervalo, direcionarmos tais densidades de energia de modo a provocar violações macroscópicas de leis físicas. É necessário haver uma condição que relacione o tempo de duração da densidade de energia negativa com a magnitude da mesma. Tal relação aparece de maneira simples para o exemplo que tratamos aqui. Basta reescrevermos a eq.(3.6) como

$$\begin{aligned} \rho_\psi(t, \mathbf{x}) &= \frac{w}{2L^3} \left[4\beta^2 - 2\sqrt{2}\alpha\beta \cos[2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - wt)] \right] \\ &\underbrace{\Rightarrow}_{\text{mínimo}} \frac{w}{2L^3} (4\beta^2 - 2\sqrt{2}\alpha\beta) \underbrace{=}_{\text{por (3.5)}} \frac{w}{2L^3} \left[\underbrace{(3\beta^2 + (\sqrt{2}\beta - \alpha)^2)}_{\text{positivo-definido}} - 1 \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

de onde se vê que

$$\rho_{\psi, \min} \geq -\frac{w}{2L^3}. \quad (3.11)$$

Note-se também que, pela dependência em $\cos[2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - wt)]$ da eq. (3.6), a densidade negativa pode durar, por período, no máximo um tempo

$$\Delta t = \frac{\pi}{2w}. \quad (3.12)$$

Relembrando que¹ $w \geq \frac{2\pi}{L}$, temos que $\Delta t \leq \frac{L}{4}$, o que pelas eqs. (3.12) e (3.11) implica que, se $\rho_{\psi, \min} < 0$, a magnitude máxima de densidade de energia negativa obedece

$$|\rho_{\psi, \min}| \leq \frac{\pi}{256(\Delta t)^4}, \quad (3.13)$$

que é nosso primeiro exemplo de desigualdade quântica. O significado da eq. (3.13) é simples: a magnitude máxima da densidade de energia negativa não pode ser maior que $\pi/256(\Delta t)^4$, sendo Δt o tempo de duração dessa densidade negativa.

Embora tenhamos deduzido a eq. (3.13) a partir de um estado de vácuo mais duas partículas, poderíamos chegar ao *mesmo* resultado [1] a partir de um estado muito mais geral envolvendo qualquer excitação de modo simples \mathbf{k} ,

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{n!}} (a_{\mathbf{k}}^\dagger)^n |0\rangle, \quad (3.14)$$

com os coeficientes c_n atendendo $\sum_n |c_n|^2 = 1$.

¹ $w = \frac{2\pi n}{L}, n = 1, 2, 3, \dots$

Um segundo exemplo de desigualdade quântica

A desigualdade (3.13) relaciona diretamente a densidade de energia negativa de um campo escalar à sua duração. É o caso mais simples e direto de desigualdade. Vamos porém desenvolver outra desigualdade para esse mesmo sistema, com o intuito de tornar mais familiares os teoremas de desigualdades quânticas a serem deduzidos na §4.2.

A grosso modo, é de se esperar que apenas um corpo negro (e.g., um absorvedor perfeito) possa realmente absorver uma densidade de energia como ρ_ψ . Vamos supor que iremos então usar um aparelho que não seja exatamente um absorvedor perfeito para medir a densidade de energia desse campo escalar. Iremos supor que o acoplamento desse aparelho com o campo será tal que o resultado conseguido através da medição não será exatamente a quantidade $\rho_\psi = \langle T_{00}^{ren} \rangle$ definida acima, mas sim uma quantidade

$$\rho_{\psi,f}(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \rho_\psi(t, \mathbf{x}) f(t), \quad (3.15)$$

onde $f(t)$ é uma função tal que $\int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) = 1$, cujo papel seria o de modular a densidade de energia de modo a representar a interação do aparelho com o campo.

Para ilustrar a idéia, vamos tomar um exemplo específico de um tal aparelho interagindo com o campo de vácuo mais duas partículas no estado (3.4), e assumiremos $f(t)$ uma função lorentziana

$$f(t) = L(t) = \frac{\tau}{\pi(t^2 + \tau^2)}, \quad (3.16)$$

em que τ é um parâmetro intrínseco ao aparelho de medida. A figura 3.3 mostra a função lorentziana superposta à densidade de energia $\rho_{\psi,\min}$.

Usando (3.16) e (3.6) em (3.15), obtemos que

$$\rho_{\psi,f}(\mathbf{0}) = \frac{w}{2L^3} [4\beta^2 - 2\sqrt{2}\alpha\beta e^{-2w\tau}]. \quad (3.17)$$

Tendo em vista ainda a figura 3.3 e a eq. (3.15), vemos que a introdução desse parâmetro τ dá origem a três situações distintas:

1. Modos de frequência w (período $T = 2\pi/w$) tal que $\tau \gg T$. Nesse caso a função lorentziana cobre vários períodos, em cada qual há uma densidade de energia líquida positiva, de modo que nosso aparelho de medida irá marcar uma quantidade positiva.
2. Modos de frequência w tal que $\tau \simeq T$. Nesse caso a envoltória criada pela função lorentziana mantém o perfil de $\rho_{\psi,f}$ próximo ao de ρ_ψ , e é de se esperar que aconteça com $\rho_{\psi,f}$ o que acontece com ρ_ψ , ou seja, que apresente uma densidade de energia positiva, uma vez que se está integrando em um período de ρ_ψ com uma função parecida com o próprio ρ_ψ .

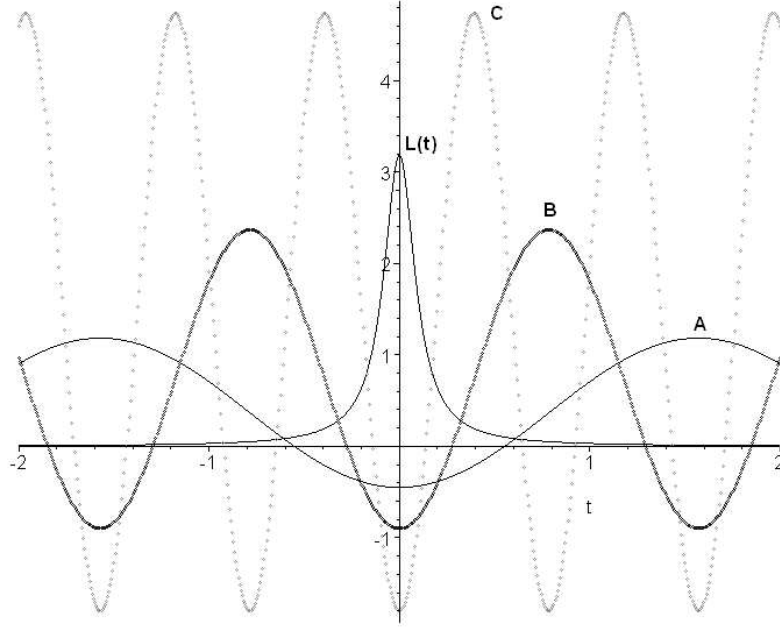


Figura 3.3: Gráfico de $\rho_{\psi,\min}(t, \mathbf{0}) \cdot (2L^3)$, eq. (3.8), e $L(t)$, eq. (3.16), com $\tau = 0.1$; curva “A”, “B” e “C”, $\rho_{\psi,\min}$ com $w = 1, 2$ e 4 respectivamente.

3. Modos de frequência w tal que $\tau \ll T$. Aqui temos uma envoltória que pode criar uma situação em que se exclui a região de energia positiva, obtendo-se para nosso aparelho de medida um valor negativo. Porém, tal valor não poderá ser arbitrariamente negativo, pois a envoltória criada é tal que, ao centrar-se só na região de energia negativa, cria-se como “efeito colateral” uma limitação à magnitude da mesma. Ou seja, cria-se um balanço entre a magnitude de densidade de energia negativa e τ (que nesse caso está certamente representando um período de tempo com energia exclusivamente negativa). Cria-se assim uma desigualdade quântica, não exatamente idêntica a conseguida em (3.13), mas que guarda relações análogas.

A intuição exposta no parágrafo (3) acima fica explícita ao provarmos diretamente uma desigualdade para $\rho_{\psi,f}$. Segundo o parágrafo citado, estamos em uma situação onde

$$\tau \ll T = \frac{2\pi}{w} \rightarrow \tau \ll L \rightarrow e^{2w\tau} \simeq 1, \quad (3.18)$$

de forma que a eq. (3.17) assume a mesma forma da segunda linha de (3.10), e por consequência atende também à eq. (3.11), ou seja,

$$\rho_{\psi,f} \geq -\frac{w}{2L^3} \underbrace{\geq}_{w \geq \frac{2\pi}{L}} -\frac{\pi}{L^4} \underbrace{\geq}_{L > \tau, \text{ pela eq. (3.18)}} -\frac{\pi}{\tau^4}. \quad (3.19)$$

Da equação acima vemos que no caso de $\rho_{\psi,f} < 0$, temos que a magnitude máxima de energia negativa atenderá

$$|\rho_{\psi,f}| \leq \frac{\pi}{\tau^4}, \quad (3.20)$$

que é nossa segunda desigualdade quântica. Veja que sua forma funcional é muito próxima a primeira desigualdade, eq. (3.13), sendo que naquela equação Δt representa expressamente o tempo máximo pelo qual pode ocorrer densidades negativas em um período do estado $|\psi\rangle$ de vácuo mais duas partículas. Já na eq. (3.20), τ é um parâmetro intrínseco ao detector que, caso seja construído de modo a ser capaz de realizar uma medida sobre a qual se encontre o estado $|\psi\rangle$ somente em densidades de energia negativa, ainda assim tal medida estará sujeita a uma desigualdade que limita a magnitude de energia que tal detector acusará. Assim, embora Δt e τ representem diferentes quantidades físicas, a desigualdade que eles atendem resultam na mesma propriedade física, a saber, a limitação da quantidade de energia negativa, em determinado tempo, que pode ser observada.

Embora, fisicamente, a desigualdade (3.20) em nada acrescente à já exposta em (3.13), veremos (cap. 4) que os teoremas gerais de desigualdades quânticas são construídos e demonstrados a partir dos mesmos conceitos usados para se chegar a (3.20). O caso exposto aqui é uma ilustração que objetiva tornar a conexão entre (3.20) e (3.13) mais clara e justificar porque os teoremas formais a serem demonstrados posteriormente possuem significado físico.

3.2 Estados *squeezed*

Estados *squeezed* em TQC também podem produzir energias negativas. Estados *squeezed* do campo eletromagnético (“squeezed light states”), por exemplo, são bem estudados em ótica quântica e realizados experimentalmente [27]. Para definir tais estados começaremos definindo dois operadores. O primeiro, introduzido inicialmente por Glauber [28] e usualmente empregado para definir os chamados estados coerentes, é o operador deslocamento

$$D_{\mathbf{k}}(z) \equiv e^{[za_{\mathbf{k}}^\dagger - z^* a_{\mathbf{k}}]} = e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{za_{\mathbf{k}}^\dagger} e^{-z^* a_{\mathbf{k}}}, \quad (3.21)$$

que satisfaz as relações de comutação

$$[a_{\mathbf{k}'}, D_{\mathbf{k}}(z)] = a_{\mathbf{k}'} + z\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (3.22)$$

$$[a_{\mathbf{k}'}^\dagger, D_{\mathbf{k}}(z)] = a_{\mathbf{k}'}^\dagger + z^*\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \quad (3.23)$$

O segundo é o operador *squeeze*

$$S_{\mathbf{k}}(\zeta) \equiv e^{\frac{1}{2}[\zeta^* a_{\mathbf{k}}^2 - \zeta (a_{\mathbf{k}}^\dagger)^2]}, \quad (3.24)$$

em que, definindo

$$\zeta = re^{i\delta}, z = se^{i\gamma}, \quad (3.25)$$

sendo r , δ , s e γ constantes reais, satisfaz as relações

$$S_{\mathbf{k}}^\dagger(\zeta)a_{\mathbf{k}}S_{\mathbf{k}}(\zeta) = a_{\mathbf{k}} \cosh(r) - a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i\delta} \sinh(r), \quad (3.26)$$

$$S_{\mathbf{k}}^\dagger(\zeta)a_{\mathbf{k}}^\dagger S_{\mathbf{k}}(\zeta) = a_{\mathbf{k}}^\dagger \cosh(r) - a_{\mathbf{k}} e^{-i\delta} \sinh(r). \quad (3.27)$$

Podemos agora definir um estado *squeezed* geral como sendo [29]

$$|\{z, \zeta\}_{\mathbf{k}}\rangle = D_{\mathbf{k}}(z)S_{\mathbf{k}}(\zeta)|0\rangle. \quad (3.28)$$

Pode-se mostrar que, para um campo escalar sem massa, o valor esperado da densidade de energia no estado *squeezed* dado acima é [30]

$$\rho \equiv \langle \{z, \zeta\}_{\mathbf{k}} | T_{00}^{\text{Ren}} | \{z, \zeta\}_{\mathbf{k}} \rangle = w [\sinh(r) \cosh(r) \cos(2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - wt) + \delta) + \sinh^2(r) + s^2(1 - \cos(2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - wt + \gamma)))] . \quad (3.29)$$

Quando $\zeta = 0$, a densidade de energia do estado *squeezed* se reduz à de um estado coerente, que é sempre positivo. Por outro lado, o caso $z = 0$, chamado de estado de vácuo *squeezed* [29], retorna uma densidade de energia

$$\rho = w \sinh(r) [\sinh(r) + \cosh(r) \cos[2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - wt) + \delta]], \quad (3.30)$$

que possui o mesmo comportamento que o estado de vácuo mais duas partículas apresentado anteriormente, com a densidade de energia atingindo valores negativos uma vez a cada ciclo se a condição

$$\cosh(r) > \sinh(r) \quad (3.31)$$

for satisfeita, o que acontece para todo $r \neq 0$. Em um estado *squeezed* geral com $r, s \neq 0$, a densidade de energia se torna negativa em algum ponto do ciclo se $s \ll r$.

Estados coerentes são interpretados como estados quânticos que descrevem excitações clássicas do campo². Estados de vácuo *squeezed*, por outro lado, resultam da criação de partículas por efeitos de mecânica quântica³. Ou seja, de novo vemos estados de energia negativa como efeitos oriundos de condições em que aspectos quânticos do campo manifestam-se.

²Por exemplo, estados coerentes de um oscilador harmônico são reconhecidos como os estados que fornecem a passagem correta do limite quântico para o clássico [31] desse oscilador.

³Por exemplo, geração de fótons em meios óticos não-lineares.

3.3 Espelhos acelerados

Discutiremos aqui como espelhos acelerados podem alterar o estado de vácuo do campo de modo a criar estados que apresentam densidades e fluxos de energia negativa. A dedução dos resultados mencionados aqui será apresentada no apêndice §A. Nesse momento estamos interessados somente em ilustrar como acontece a geração de fluxos de energia negativa por um espelho e como relações de desigualdades surgem nesse contexto.

Considere novamente um campo escalar de acoplamento mínimo, mas agora em (1+1) dimensões. Vamos considerar uma situação física que seria, em duas dimensões, o análogo de um espelho se movendo por uma dada trajetória $z(t)$, e analisemos a influência desse movimento sobre o campo. Por espelho, entende-se que há uma condição de contorno para o campo tal que

$$\phi(z(t)) = 0, \quad (3.32)$$

ou seja, sobre o espelho, que em duas dimensões reduz-se a um ponto, o campo se anula. Estaremos interessados no caso em que a velocidade inicial desse espelho é uniforme, de modo que sempre é possível encontrar um referencial no qual a sua trajetória atenderá

$$z(t) = \begin{cases} z_0 & (t < 0) \\ \text{arbitrário} & (t > 0), \end{cases} \quad (3.33)$$

sendo que uma possível trajetória está representada na figura 3.4.

O primeiro a apontar que espelhos acelerados emitem radiação foi Moore, em 1970 [3]. O cálculo do valor esperado do tensor energia-momento do campo submetido à condição de contorno (3.32) foi feito por Fulling e Davies [4, 5], que conseguiram o célebre resultado de que espelhos *não-uniformemente* acelerados emitem fluxos de energia negativa. Mais especificamente, tomando por base ainda a figura 3.4, é possível mostrar que um observador comóvel ao espelho irá vê-lo emitir um fluxo de energia $F_{c,D}$ à sua direita dado por

$$F_{c,D} = -\frac{1}{12\pi} \frac{da}{d\tau} \quad (3.34)$$

e um fluxo de energia $F_{c,E}$ à sua esquerda dado por

$$F_{c,E} = \frac{1}{12\pi} \frac{da}{d\tau}, \quad (3.35)$$

sendo a a aceleração própria do espelho e τ seu tempo próprio. Vemos então que, dependendo do sinal de $\frac{da}{d\tau}$, observadores “montados” sobre o espelho que “olhem” à direita ou à esquerda do mesmo vêem um fluxo de energia que depende de como sua aceleração própria varia em seu tempo próprio; e quando tal fluxo é positivo para um (o que “olha” à direita, por exemplo), é negativo para o outro. Igualmente, a classe de observadores inerciais “parados” (que mantenham posição constante no sistema de coordenadas usado na figura 3.4), abreviada aqui por COI, observarão um fluxo provindo do espelho dado por

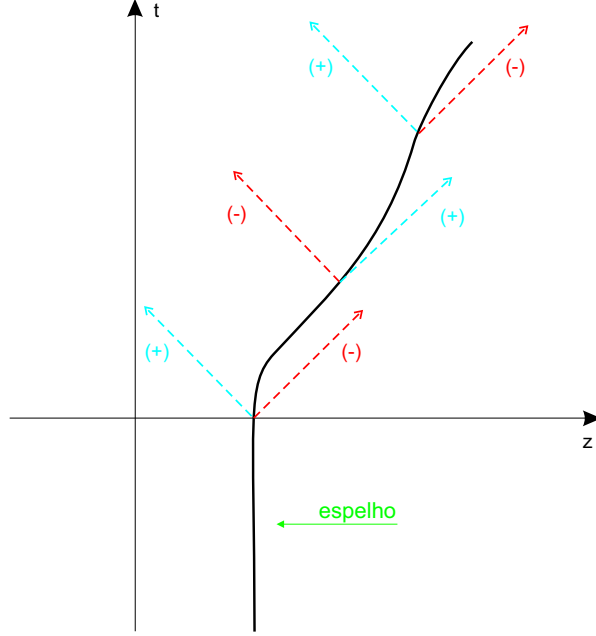


Figura 3.4: Diagrama representando a trajetória (3.33). As linhas segmentadas representam emissão de fluxos de energia de sinal correspondente ao símbolo em parênteses.

$$F_D = -\frac{1}{12\pi} \frac{(1-v^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-v)^2} \frac{d}{dt} \left[\frac{\dot{v}}{(1-v^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = -\frac{1+v}{1-v} \frac{1}{12\pi} \frac{da}{d\tau} \quad (3.36)$$

se estão à sua direita, e

$$F_E = \frac{1}{12\pi} \frac{(1-v^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+v)^2} \frac{d}{dt} \left[\frac{\dot{v}}{(1-v^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = \frac{1-v}{1+v} \frac{1}{12\pi} \frac{da}{d\tau} \quad (3.37)$$

se estão à esquerda, onde v é a velocidade do espelho em relação a essa classe de observadores, t o tempo próprio dos mesmos e $\dot{v} \equiv \frac{dv}{dt}$. Esse último resultado guarda estreita relação com o anterior: note que o termo em colchetes nas eqs. (3.36) e (3.37), $\frac{\dot{v}}{(1-v^2)^{\frac{3}{2}}}$, é justamente a aceleração própria a do espelho, sendo que os termos multiplicativos presentes representam o redshift/blueshit ao qual o fluxo emitido está submetido como visto pela COI. Note ainda que a dependência funcional do fluxo com $\frac{da}{d\tau}$ nos permite fazer uma comparação com a radiação de cargas aceleradas, pois no seu limite não relativístico a força de reação à radiação originada pela emissão de espelhos será proporcional a \ddot{v} , assim como a força de reação à radiação de cargas pontuais. Mas, ao contrário da carga pontual clássica, o espelho irradia somente quando sua aceleração *muda*.

Podemos resumir o exposto até aqui da seguinte forma. Espelhos acelerados não-uniformemente emitem fluxos de energia. Observadores comóveis ao espelho, que olhem para a direção definida por sua aceleração, observam a emissão de um fluxo de valor absoluto $\frac{1}{12\pi} \frac{da}{d\tau}$ que é negativo quando a aceleração aumenta, e positivo quando a aceleração diminui, valendo o contrário para observadores comóveis que olhem para a direção oposta à da aceleração. Já os observadores inerciais constataam um fluxo emitido pelo espelho que depende igualmente da variação no tempo da aceleração do espelho, corrigido ainda por um fator que representa o redshift ou blueshift que o movimento do espelho (como visto pelos observadores inerciais) introduz na emissão de fluxos de energia. Essa é a descrição básica de como espelhos acelerados geram fluxos de energia.

3.3.1 Desigualdades para fluxos emitidos por espelhos

Resta agora a pergunta: se espelhos podem gerar fluxos de energia negativa como descrito acima, podemos usá-los para violar alguma lei física? Afinal, se acelerarmos um espelho de maneira conveniente, podemos gerar um fluxo de energia negativa de duração e magnitude arbitrária, a princípio, e direcionar tal fluxo para usá-lo nos experimentos mentais mencionados (ver §1.2.2), correto? Não exatamente. Há detalhes que ainda precisam ser esclarecidos.

Voltemos ao exemplo expresso na figura 3.4. Um observador inercial que esteja à direita do espelho irá ver um fluxo de energia negativa emitido em cada ponto da trajetória dado por

$$F_D = -\frac{1}{12\pi} \frac{(1-v^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-v)^2} \frac{d}{dt} \left[\frac{\dot{v}}{(1-v^2)^{\frac{3}{2}}} \right], \quad (3.38)$$

e a energia total que ele terá recebido após o término do movimento acelerado do espelho pode ser escrita, mediante integração por partes, como

$$E_{tot} = \int_{t_i}^{t_f} F_D dt = \frac{a_f}{12\pi} \frac{\sqrt{1-v_f^2}}{(1-v_f)^2} - \frac{a_i}{12\pi} + \frac{1}{12\pi} \int_{t_i}^{t_f} a^2 \frac{1+v}{(1-v)^2} (2-v-v^2) dt, \quad (3.39)$$

sendo t_i e t_f o tempo de início e término, respectivamente, do movimento acelerado como medido por COI, $a_f \equiv |a(t_f)|$ e $a_i \equiv |a(t_i)|$, lembrando que a é a aceleração própria do espelho tal que, escrita em termos das observáveis usadas pela COI, $a = \dot{v}/(1-v^2)^{3/2}$.

Através da eq. (3.39) podemos distinguir duas situações diferentes. A primeira, quando a aceleração do espelho for limitada, será tratada a seguir. A segunda, o caso de acelerações não limitadas, será comentada posteriormente.

Produção de fluxos de energia negativa por acelerações limitadas

Nesse caso, o espelho deverá aumentar sua aceleração durante um certo tempo para produzir um fluxo de energia negativo. Por ilustração, suponha que o espelho está inicialmente parado e a partir de certo momento sofre uma aceleração para a direita. Enquanto tal aceleração aumentar ($\frac{da}{d\tau} > 0$), um fluxo de energia negativa será dirigido a um observador inercial que esteja à direita do espelho. Porém, para que não haja colisão entre o espelho e o observador (ou mesmo porque acelerações que se mantenham indefinidamente são fisicamente não realizáveis), a aceleração do espelho terá que ser suspensa em algum momento, o que implicará um fluxo de energia positivo ($\frac{da}{d\tau} < 0$). Supondo que a função $a(t)$ seja suave, e como tomamos um exemplo em que $a_f \geq a_i$, podemos ver da eq. (3.39) que

$$E_{tot} \geq \frac{a_f}{12\pi} \left[\frac{\sqrt{1-v_f^2}}{(1-v_f)^2} - 1 \right] + \frac{1}{12\pi} \int_{t_i}^{t_f} a^2 \frac{1+v}{(1-v)^2} (2-v-v^2) dt \geq 0, \quad (3.40)$$

a segunda desigualdade se justificando pelo fato que $v < 1$ sempre. Então estamos mostrando aqui que para acelerações limitadas

$$E_{tot} \geq 0, \quad (3.41)$$

e.g., a energia total que observadores inerciais à direita do espelho detectam será sempre positiva. Intuitivamente, isto se deve ao fato de que o fluxo de energia positivo emitido pelo espelho se dará após um tempo em que o espelho teve sua aceleração aumentando, logo, possui velocidades maiores. Por consequência, os fluxos emitidos pelo espelho estarão submetidos a um *blueshift* maior como visto pela COI à direita. Assim, mesmo que $a(t)$ seja uma função simétrica (com o espelho acelerando e desacelerando da mesma forma), a energia total detectada pela COI será positiva porque no período em que o espelho emitiu fluxos de energia positiva sua velocidade era maior. Veja que para observadores *comóveis* a um espelho submetido à $a(t)$ simétrica, a emissão durante o período de aceleração e desaceleração será, por (3.34), idêntica e para ele o fluxo total emitido será $\int_{t_i}^{t_f} F_{c,D} = 0$. Porém, devido aos termos de blueshift presentes em (3.36), a classe de observadores inerciais à direita do espelho detectará um fluxo total positivo.

E quanto à classe de observadores inerciais à esquerda? Estes detectam um fluxo de energia positivo provindo do espelho durante o período de $\frac{da}{d\tau} > 0$, e um fluxo negativo durante o período $\frac{da}{d\tau} < 0$. Porém, agora o fluxo de energia negativo estará submetido a um *redshift* maior, pois ele é emitido durante o período em que o espelho afasta-se com maior velocidade. Assim, pode-se mostrar que a COI à esquerda do espelho também detectará um fluxo total positivo.

Resumindo o exposto acima vemos que, para um espelho que mantenha aceleração por tempo finito, a energia emitida pelo mesmo (como medida por observadores inerciais) será positiva. Isso significa que, mesmo que tal espelho emita fluxos

de energia negativa, tais fluxos deverão ser seguidos ou precedidos por fluxos de energia positiva que os compensem. Lembramos agora que, assim como nos casos anteriores, a positividade da energia no período total, representada por (3.41), não é garantia de que o fluxo de energia gerado por esse sistema não possa ser usado de modo a violar leis físicas. Ainda precisamos de uma desigualdade, que no caso de espelhos acelerados surge da seguinte forma.

Como exposto no parágrafo anterior, fluxos de energia negativa emitidos por esse sistema serão sempre seguidos ou precedidos por fluxos positivos. Assim, a melhor configuração para que se possa isolar os fluxos de energia negativa será a exposta na figura 3.5. Nela, um espelho inicialmente inercial na posição $z_0 < 0$ sofre, em $t = 0$, uma rápida aceleração em direção a um observador A situado na origem (emitindo um pulso de energia negativa em sua direção) seguida por um período de aceleração própria a constante (durante o qual nenhuma radiação é emitida), para depois de um tempo t_f sofrer uma rápida desaceleração (emitindo um pulso de energia positiva na direção de A). Tal trajetória é descrita como

$$z(t) = \begin{cases} z_0 & (t < 0) \\ z_0 - 1/a + (1/a^2 + t^2)^{1/2} & (0 < t < t_f) \\ z_0 - 1/a + (1/a^2 + t_f^2)^{1/2} + \frac{t_f}{(1/a^2 + t_f^2)^{1/2}}(t - t_f) & (t_f < t). \end{cases} \quad (3.42)$$

Na aproximação de que o movimento de aceleração em $t = 0$ e desaceleração em $t = t_f$ sejam representados por funções delta de Dirac, e usando a eq. (3.36), temos que, em relação à COI, o primeiro pulso de energia negativo ΔE_n dado por

$$\Delta E_n = -\frac{a}{12\pi}, \quad (3.43)$$

chega ao observador A na origem após um tempo t_1 , e um segundo pulso positivo ΔE_p dado por

$$\Delta E_p = \frac{a}{12\pi} \frac{\sqrt{1 - v_f^2}}{(1 - v_f)^2}, \quad (3.44)$$

chega na origem após um tempo t_2 , sendo $v_f \equiv v(t_f)$. Assim, o intervalo de tempo entre a recepção de um pulso de energia negativa e outro de energia positiva será $T = t_2 - t_1$, como se vê na figura 3.5. Da mesma figura pode-se obter também uma relação que é bem conhecida para trajetórias hiperbólicas como (3.42), a saber

$$T < \frac{1}{a}. \quad (3.45)$$

Essa relação vem do fato que a assíntota de uma trajetória hiperbólica é uma trajetória tipo luz cuja intersecção com o eixo z é deslocada de $1/a$. Assim, qualquer raio de luz emitido por um objeto que siga a trajetória hiperbólica deve estar confinado por essa trajetória tipo-luz assintótica - esse confinamento é o que dá origem ao chamado “Rindler wedge”.

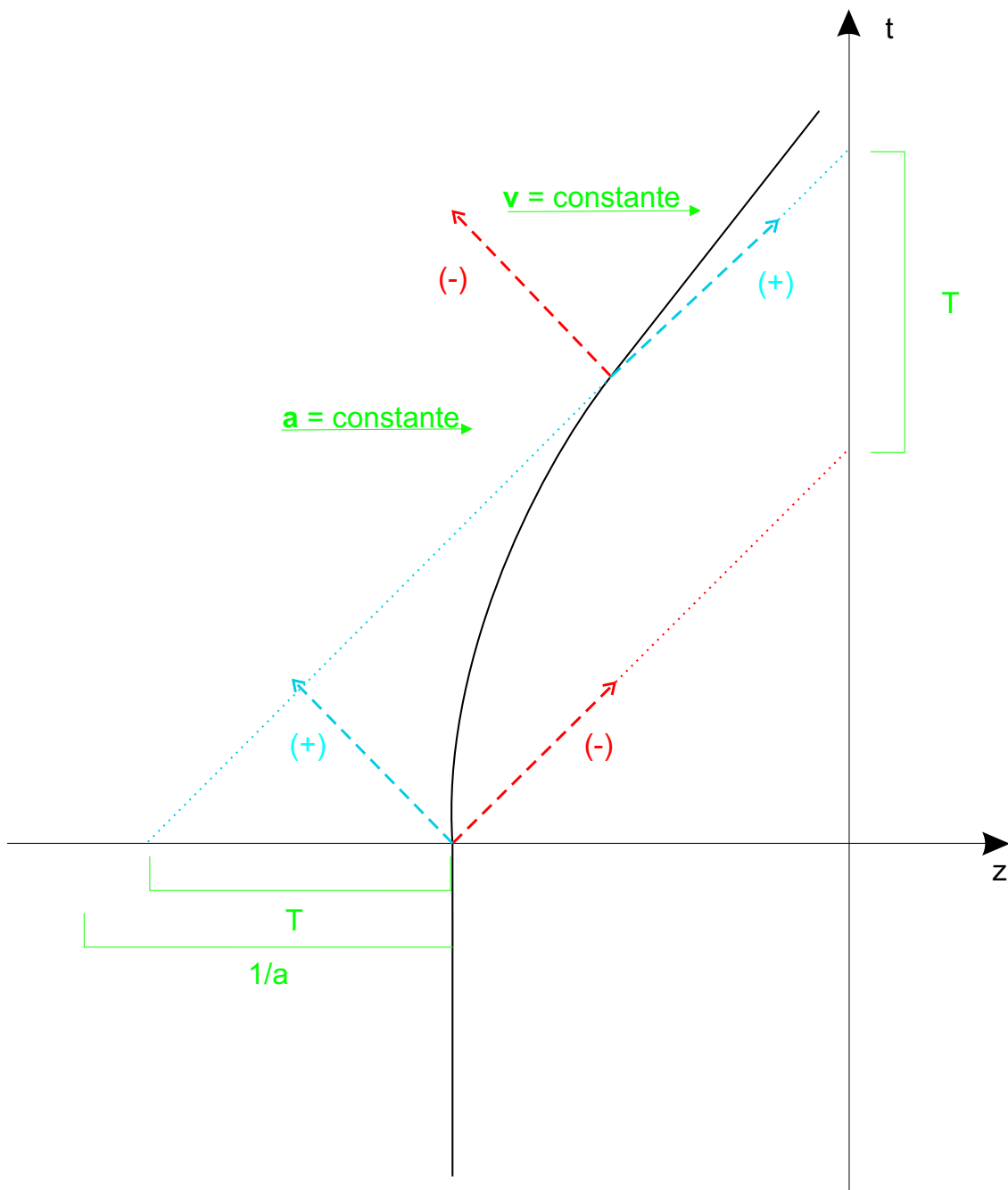


Figura 3.5: Diagrama representando a trajetória (3.42).

Aplicando (3.43) em (3.45) chegamos finalmente à desigualdade desejada,

$$|\Delta E_n|T < \frac{1}{12\pi}, \quad (3.46)$$

que é análoga às desigualdades encontradas antes. Assim, vemos que para espelhos acelerados na configuração em que se pode conseguir o máximo de fluxos de energia negativa separados espacial e temporalmente de fluxos positivos, há uma desigualdade que limita sua magnitude e tempo de duração.

O papel do espelho

Pelo exposto acima, vemos que fluxos de energia negativa de espelhos sujeitos a acelerações limitadas possuem as mesmas restrições dos exemplos anteriores no que se refere a sua capacidade de violar leis físicas. Não é coincidência o fato desse sistema apresentar a desigualdade (3.46) análoga a (3.13), e de sua energia total integrada no tempo ser positiva [vide eq. (3.41)] em analogia à eq. (3.7). Como evidenciado pelos exemplos do estado *squeezed* e do estado de vácuo combinado com o de 2 partículas, estados do campo escalar livre que apresentam densidades de energia negativa sempre existem. O papel do espelho é simplesmente o de fazer estados “normais” (com densidades de energia não negativa) evoluírem dinamicamente para estados que apresentam densidade de energia negativa. Em particular, no caso tratado aqui, o espelho transforma o estado inicial de vácuo $|0\rangle$ (de zero partículas) em um estado mais geral $\sum_{n,k} c_{nk}|n_k\rangle$ (com número de partículas diferente de zero) que, devido a termos de interferência entre diferentes autoestados $|n\rangle$ (como no caso de vácuo + 2 partículas), dá origem a energias negativas. Antes do espelho iniciar o movimento acelerado, e após o seu término, o campo submetido à condição de contorno pode ser descrito por estados do campo livre. Dito de outra forma, o sistema descrito por espelhos (em 1+1 dimensões) de aceleração *limitada* possui o mesmo espaço de Hilbert⁴ de soluções que o campo escalar livre. Logo, é de se esperar que as desigualdades quânticas que valem para um sejam também verdade para o outro. Como provaremos no capítulo 3, o campo escalar livre está sujeito a uma desigualdade quântica geral que independe do estado particular $\sum_{n,k} c_{nk}|n_k\rangle$ no qual se encontre. Por esse ponto de vista, é natural que tenhamos encontrado o resultado de que espelhos de aceleração limitada estão sempre sujeitos a (3.46).

É necessário frisar que na discussão acima estamos falando de produção de fluxos de energia. A conexão entre produção de fluxos de energia e produção de partículas não é trivial. Em particular, o espelho acelerado descrito acima não produz fluxos de energia durante seu período de aceleração constante, mas nesse mesmo período *há produção de partículas*: no período acelerado uniformemente o valor esperado do número de partículas $\langle N \rangle$ já não é mais 0. O fato dessa produção de partículas não ser acompanhada de um fluxo de energia se deve a efeitos de correlação

⁴Especificamente, falamos aqui do espaço de Hilbert de soluções do operador densidade de energia.

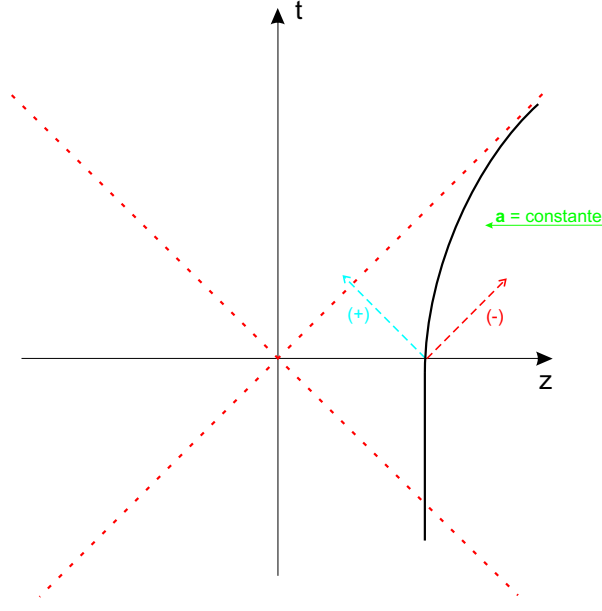


Figura 3.6: Diagrama representando uma trajetória inercial até $t = 0$ e que entra em um período de aceleração própria a constante para todo $t > 0$.

[5]: as partículas criadas estão correlacionadas entre si, de tal modo a gerar um fluxo de energia nulo. É possível mostrar que para a trajetória (3.42) as correlações do operador $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ aumentam após a emissão de um fluxo de energia negativo, e diminuem após a emissão de um pulso positivo [32]. Isso é só mais um indicativo de como energias negativas estão associadas a aspectos quânticos do campo e de que o presenciado para espelhos de aceleração limitada é análogo aos exemplos anteriores.

O caso de acelerações não limitadas

Podemos nos perguntar agora o que acontece caso o espelho tenha aceleração ilimitada. No caso específico que analisamos acima, podemos fazer com que o espelho inicialmente inercial seja acelerado rapidamente para entrar em seguida em um período de aceleração constante, como descrito na figura 3.6, do qual não sairá mais. Pela figura vemos que após $t = 0$ a trajetória do espelho estará contida no “Rindler wedge”.

Haverá um pulso de energia negativa à direita do espelho, e outro positivo à esquerda, ambos associados ao ponto em que o espelho inicia sua aceleração em $t = 0$. Uma vez que no período de aceleração constante não há emissão de radiação, o pulso de energia negativa é o único recebido por observadores à direita do espelho, de modo que $E_{tot} < 0$, o que também pode ser visto usando a eq. (3.39). Além disso, fazendo-se a aceleração necessária, tal pulso pode ser tão grande quanto se queira. Ou seja, para observadores à direita do espelho, há a recepção de um pulso de energia negativa, de magnitude arbitrária, sem nenhum subsequente pulso positivo para

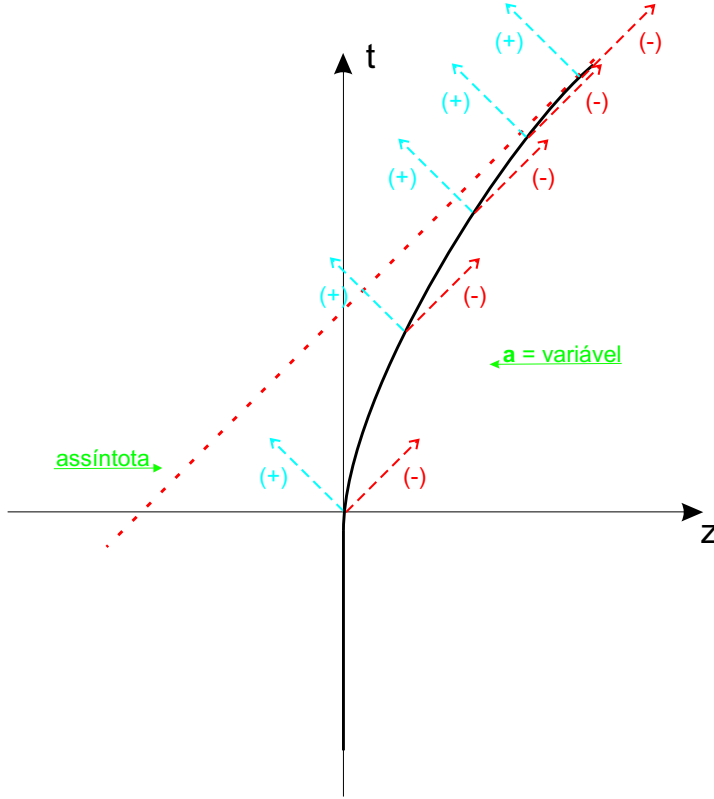


Figura 3.7: Diagrama representando a trajetória (3.47).

compensá-lo - em outras palavras, *não há desigualdades quânticas para acelerações ilimitadas*. Na trajetória da fig. 3.6, embora a energia total contabilizada pela COI (contando observadores à direita e à esquerda do espelho) seja zero (pois o pulso inicial negativo à direita é igual, em magnitude, ao positivo emitido à esquerda), podemos achar inúmeras outras trajetórias de aceleração ilimitada na qual a energia total para COI seja *negativa*. Um exemplo é a seguinte trajetória

$$z(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \ln \cosh(t) & (t > 0), \end{cases} \quad (3.47)$$

representada na figura 3.7. Em tal trajetória o espelho possui $\frac{da}{d\tau} > 0$ para $\tau \rightarrow \infty$, de modo que a configuração assintótica é a de contínua emissão de energia negativa à direita (e positiva à esquerda), porém, com a negativa sendo maior que a positiva, como medido pela COI⁵.

É importante notar que no presente caso o campo escalar sob a condição de contorno $\phi(z(t)) = 0$ só pode ser descrito pelo campo livre (sem condições de contorno impostas) antes do espelho iniciar seu movimento. Não haverá uma situação posterior, como no caso de acelerações limitadas, em que os estados do campo sub-

⁵O que pode ser visto pelas eqs. (3.36), (3.37).

metido a ação do espelho poderão ser descritos em termos do campo livre. Em outras palavras, agora o espaço de Hilbert de soluções do caso com o espelho não é o mesmo do caso sem o espelho. Portanto, as desigualdades que sabemos serem válidas para o campo escalar livre não necessitam o serem para o sistema submetido ao espelho. Outro modo de enxergar isso é notar que trajetórias confinadas ao “Rindler wedge” possuem seu vetor de Killing tipo tempo ξ_{rindler} dado pelos geradores de sua trajetória hiperbólica no espaço-tempo de Rindler. Porém, $\xi_{\text{rindler}} \neq \xi_{\text{minkowski}}$, sendo $\xi_{\text{minkowski}}$ o vetor de Killing dos observadores inerciais, que gera as translações temporais padrão. Como é bem conhecido na literatura [20], tal fato leva a diferentes procedimentos de quantização, portanto é natural que as soluções do campo escalar confinado ao “Rindler wedge”, como vistas para observadores inerciais, não estejam submetidas às desigualdades quânticas provadas para campos escalares no espaço-tempo de Minkowski.

Pode-se argumentar que o espelho submetido a acelerações arbitrárias seja uma configuração não física, tanto pelo fato de haver uma aceleração por tempo infinito (o que demanda energia infinita para mantê-la) como pelo fato de que, eventualmente, todos observadores à direita do espelho colidirão com o mesmo. Porém, configurações de aceleração ilimitada tem sua importância para espaço-tempos mais gerais. É possível mostrar que o fluxo de energia produzido pela trajetória (3.47) tem, para tempos tardios ($t \rightarrow \infty$), um espectro Planckiano, ou seja, trata-se de radiação térmica. Assim, um espelho que seja acelerado dessa maneira irá emitir um fluxo térmico de energia positiva à sua esquerda e um fluxo térmico de energia negativa à sua direita. Com a peculiaridade de que os observadores inerciais à esquerda detectarão um fluxo de energia térmico eternamente, enquanto o fluxo negativo à direita se concentrará na assíntota da trajetória. Esse é exatamente o análogo da emissão de radiação Hawking por estrelas colapsando - na verdade, esse modelo é matematicamente idêntico ao modelo padrão pelo qual se deduz a radiação Hawking [5, 20], a menos de efeitos de curvatura que não alteram tal descrição. Enquanto aqui o fluxo de energia negativo se concentra na assíntota, e o fluxo positivo abrange toda a região à esquerda do espelho, no caso de buracos negros temos uma emissão de radiação térmica (a radiação Hawking), e um fluxo de energia negativa direcionado ao buraco negro. Tal fluxo negativo é o que explica a perda de massa pelo buraco negro e torna seu processo de emissão de energia auto-consistente.

No que concerne à criação de partículas, trajetórias que geram fluxos de energia térmico também geram um fluxo de partículas de espectro Planckiano. Pode-se mostrar que as partículas em diferentes modos emitidas à esquerda na figura 3.7 não estão correlacionadas entre si, o mesmo valendo para as emitidas à direita⁶. Assim, nesse caso específico vale a idéia tradicional de que emissão de partículas corresponde a fluxos de energia, pois as partículas chegam a um observador assintótico como entidades independentes e não-correlacionadas. Cada modo nomeado por w carregará energia w , pois sem a ocorrência de efeitos de interferência o fluxo de

⁶Nesse caso, a correlação que existe é entre partículas emitidas à direita e esquerda - cada partícula emitida para direita estará correlacionada a uma outra emitida para esquerda.

energia se comporta como um feixe de partículas clássicas.

Vemos assim que espelhos acelerados de forma ilimitada não são mera curiosidade acadêmica. Enquanto se trate de um espelho de aceleração ilimitada no espaço de Minkowski, não é necessário preocupar-se com desigualdades quânticas, devido ao aspecto não físico de um sistema de aceleração eterna. Mas, em se tratando de situações mais gerais, em espaço-tempos curvos, deve-se analisar com mais cuidado suas propriedades.

3.4 Sumário do capítulo

Discutimos aqui três exemplos de configurações de um campo escalar não-massivo quantizado que apresenta densidades ou fluxos de energia negativa. Mostramos também como desigualdades quânticas surgem nesse contexto. Destacamos em particular que: (i) energias negativas estão associadas a aspectos de mecânica quântica, e.g. correlações e interferência entre autoestados, que manifestam-se no campo, e (ii) exemplos que não apresentam desigualdades quânticas, e.g. espelhos de aceleração ilimitada, são intrínsecamente diferentes do campo escalar livre, onde desigualdades quânticas surgem naturalmente (como demonstraremos no capítulo seguinte). No capítulo 5 exploraremos outra configuração que não apresenta desigualdades quânticas.

Capítulo 4

As desigualdades quânticas

Apresentaremos e deduziremos aqui os teoremas de desigualdades quânticas para campos escalares com massa e acoplamento mínimo no espaço-tempo de Minkowski.

4.1 Desigualdades quânticas e sua interpretação física

Consideremos um campo escalar, no espaço-tempo de Minkowski $(n+1)$ -dimensional,

$$(\partial_\mu \partial^\mu - m^2)\Phi = 0. \quad (4.1)$$

Expandimos o campo em ondas planas

$$\Phi(x) = \int_0^\infty \frac{d^n \mathbf{k}}{(2\pi)^n \sqrt{2w(\mathbf{k})}} (a(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{ik \cdot x}), \quad (4.2)$$

onde $w(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$, o $(n+1)$ -vetor de onda k^μ possui componentes $(w(\mathbf{k}), \mathbf{k})$, e os operadores $a(\mathbf{k})$ e $a^\dagger(\mathbf{k})$ obedecem as relações de comutação canônicas. A densidade de energia desse campo é dada por

$$\rho = T_{00} = \frac{1}{2} \left[(\partial_0 \Phi)^2 + \sum_{i=1}^n (\partial_i \Phi)^2 + m^2 \Phi^2 \right], \quad (4.3)$$

que através da substituição de (4.2) em (4.3), com o procedimento de renormalização padrão, retorna a densidade de energia renormalizada do campo na posição $(t, \mathbf{0})$ como sendo

$$\begin{aligned}
T_{00}^{ren}(t, \mathbf{0}) &= \int_0^\infty \frac{d^n \mathbf{k} d^n \mathbf{k}'}{(2\pi)^{2n}} \left[\frac{w(\mathbf{k})w(\mathbf{k}') + \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{4\sqrt{w(\mathbf{k})w(\mathbf{k}')}} [a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}')e^{i(w(\mathbf{k})-w(\mathbf{k}'))t} \right. \\
&- a(\mathbf{k})a(\mathbf{k}')e^{-i(w(\mathbf{k})+w(\mathbf{k}'))t}] \\
&+ \frac{m^2}{4\sqrt{w(\mathbf{k})w(\mathbf{k}')}} [a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}')e^{i(w(\mathbf{k})-w(\mathbf{k}'))t} \\
&+ a(\mathbf{k})a(\mathbf{k}')e^{-i(w(\mathbf{k})+w(\mathbf{k}'))t}] + C.C. \left. \right], \tag{4.4}
\end{aligned}$$

com $C.C.$ significando o complexo conjugado.

Agora podemos enunciar a desigualdade quântica obedecida pelo campo (4.2), cuja demonstração será apresentada na §4.2. Seja $\rho_{f,\psi}$, definido por

$$\rho_{f,\psi} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle T_{00}^{ren}(t, \mathbf{0}) \rangle_\psi f(t), \tag{4.5}$$

o valor esperado da densidade média de energia como medida por um observador estático no ponto $\mathbf{0}$, onde $f(t)$ é uma função teste (“sampling function”) positiva semi-definida de integral unitária, $\int dt f(t) = 1$, e $\langle \rangle_\psi$ o valor esperado sobre um estado quântico $|\psi\rangle$. Dada uma função teste suave que decai rapidamente no infinito provaremos que (ver §4.2)

$$\rho_{f,\psi} \geq -\frac{1}{2^n (\pi)^{n/2+1} \Gamma(n/2)} \int_m^\infty du (\widehat{f^{1/2}}(u))^2 \int_m^u dv (v^2 - m^2)^{n/2-1} v^2, \tag{4.6}$$

onde $\widehat{f^{1/2}}$ é a transformada de Fourier de $\sqrt{f(t)}$. Por exemplo, para $n = 3$ (Minkowski (3+1) dimensões), um campo sem massa ($m = 0$) e uma função teste do tipo lorentziana

$$f(t) = L(t) = \frac{\tau}{\pi(t^2 + \tau^2)}, \tag{4.7}$$

a eq. (4.6) retorna

$$\rho_{L,\psi} \geq -\frac{27}{2048\pi^2\tau^4}. \tag{4.8}$$

Veja que τ é um parâmetro da função lorentziana tal que para $t \gg \tau$, $L(t) \rightarrow 0$.

Fisicamente, a consequência principal de uma desigualdade como (4.8) é que a densidade de energia negativa de um determinado volume *não pode ser arbitrariamente grande por um período arbitrário de tempo*. Ou seja, essa desigualdade, de modo um tanto análogo às desigualdades expressas no princípio de incerteza de Heisenberg de mecânica quântica não-relativística, limitam a quantidade de energia que um dado observador pode ver em um determinado período de tempo próprio. Note-se, porém, que tal desigualdade é obtida exclusivamente no contexto de teoria quântica de campos, não fazendo uso de princípios de incerteza obtidos em mecânica quântica não-relativística.

A função teste

As desigualdades acima *não* representam diretamente o valor médio da densidade de energia $\langle \rho \rangle_\psi$ calculada pela equação do tensor de energia momento, mas sim uma média temporal $\langle \rho_f \rangle_\psi$ cujo peso é a função teste $f(t)$. O significado físico dessa função teste não é, a priori, definido na literatura [2, 6]. Intuitivamente, ela pode representar de algum modo a interação do aparelho de medida utilizado para se detectar a densidade de energia do campo, em que, voltando ao exemplo da função lorentziana acima, a quantidade τ faria o papel natural de um tempo característico sobre o qual dura a interação. Porém, τ e $f(t)$ não precisam necessariamente ter esse significado. Desde que seja suave e tenda a 0 para $t \rightarrow \infty$, a função teste pode ter qualquer aspecto: lorentziana, gaussiana, etc. Apesar de não haver maiores limitações sobre $f(t)$, não é qualquer função teste que irá nos interessar. Uma vez que o objetivo dessas desigualdades é limitar a densidade de energia negativa de modo a proibir possíveis violações macroscópicas de leis físicas, e.g, a segunda lei da termodinâmica, o interessante é procurar por funções teste que nos dêem limites superiores. Ou seja, em uma desigualdade do tipo $\rho_{f,\psi} \geq -H(f)$, onde H é um funcional de $f(t)$, estamos interessados na classe de funções $f(t)$ que tornem H o mais próximo possível de 0. É claro que, da mesma maneira, é sempre possível tornar H tão negativo quanto se queira, mas nesse caso as desigualdades tornam-se desinteressantes, já que nada dizem a respeito da limitação imposta sobre as densidades de energia negativa.

Uma ilustração do papel da função teste foi apresentada na §3.1.1. Por aquele exemplo fica claro como desigualdades para $\langle \rho_f \rangle_\psi$ pode nos dar informações a respeito das desigualdades para $\langle \rho \rangle_\psi$ mediante a escolha de funções teste apropriadas. Mais será dito a respeito de diferentes escolhas para $f(t)$ no que segue.

Exemplos em 2 e 4 Dimensões

Para deixar mais clara a influência da massa do campo sobre a desigualdade, reescreveremos a eq. (4.6) como

$$\rho_{f,\psi} \geq -\frac{1}{(n+1)2^n(\pi)^{n/2+1}\Gamma(n/2)} \int_m^\infty du (\widehat{f^{1/2}}(u))^2 u^{n+1} Q_n(u/m), \quad (4.9)$$

onde

$$Q_n(x) = (n+1)x^{-(n+1)} \int_1^x dy y^2 (y^2 - 1)^{n/2-1}, \quad (4.10)$$

sendo que $Q_n(1) = 0$ e $Q_n(x) \rightarrow 1$ quando $x \rightarrow \infty$. Assim, a dependência de $\rho_{f,\psi}$ com a massa fica explícita na função $Q_n(x)$. Antes de se calcular $\rho_{f,\psi}$, podemos usar alguma intuição física para prever que o caso de massa nula deve, a princípio, nos dar o melhor limite para a desigualdade. Uma vez que a massa do campo introduz uma densidade de energia positiva a mais em relação ao caso sem massa, espera-se que

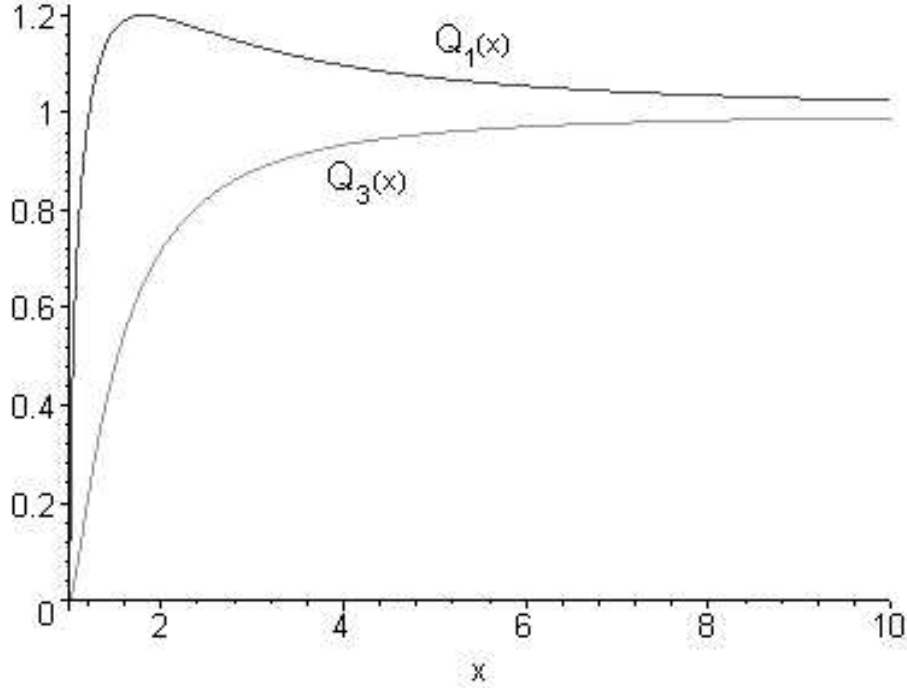


Figura 4.1: Gráfico de $Q_1(x)$ e $Q_3(x)$.

conforme se aumenta a massa, menos negativo torne-se o limite no lado direito da eq. (4.6). Em outras palavras, estados do campo com densidade de energia mais negativa devem ser mais facilmente atingidos com um campo sem massa. Para verificar se isso de fato acontece, verifiquemos $\rho_{f,\psi}$ para 2 e 4 dimensões. As expressões são dadas por

$$\rho_{f,\psi}^{2D} \geq -\frac{1}{4\pi^2} \int_m^\infty du u^2 (\widehat{f^{1/2}})^2 Q_1(u/m), \quad (4.11)$$

com

$$Q_1(x) = (1 - x^{-2})^{1/2} + x^{-2} \log(x + (x^2 - 1)^{1/2}), \quad (4.12)$$

e

$$\rho_{f,\psi}^{4D} \geq -\frac{1}{16\pi^3} \int_m^\infty du u^4 (\widehat{f^{1/2}})^2 Q_3(u/m), \quad (4.13)$$

com

$$Q_3(x) = (1 - x^{-2})^{1/2} \left(1 - \frac{1}{2x^2}\right) - \frac{1}{2x^4} \log(x + (x^2 - 1)^{1/2}). \quad (4.14)$$

A figura (4.1) apresenta o gráfico das funções $Q_1(x)$ e $Q_3(x)$. Podemos ver que para o caso quadri-dimensional, o argumento intuitivo apresentado acima se

confirma: $Q_3(x)$ varia entre 1 ($x \rightarrow \infty$, correspondente a $m \rightarrow 0$) e 0 ($x \rightarrow 0$, correspondente a $m \rightarrow \infty$). Para o caso bi-dimensional o mesmo padrão se repete, com uma diferença significativa: $Q_1(x)$ possui um máximo em aproximadamente $x = 1,8$, para o qual $Q_1(1,8) \approx 1,2$. Ou seja, não podemos excluir a possibilidade de que campos massivos em duas dimensões possam apresentar densidades de energia negativa ligeiramente maiores, em módulo, que campos sem massa. Se esse comportamento é de fato algo intrínseco à física bi-dimensional ou um artefato de nossa dedução (como defende Ford [6]) é uma pergunta em aberto. Uma análise mais detalhada mostra que para dimensões maiores ou iguais a 3 o comportamento é análogo ao caso quadri-dimensional, ou seja, acontece o esperado segundo o argumento heurístico exposto.

O caso de massa nula

Analisaremos com mais detalhes o caso sem massa afim de deduzir algumas relações que serão usadas em discussões posteriores sobre efeitos e conseqüências das desigualdades quânticas.

No caso bi-dimensional, substituindo $m = 0$ na eq. (4.11) obtemos

$$\rho_{f,\psi,m=0}^{2D} \geq -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty du u^2 (\widehat{f^{1/2}}(u))^2, \quad (4.15)$$

que pode ainda ser reescrita, usando o fato de que seu integrando é par, como

$$\rho_{f,\psi,m=0}^{2D} \geq -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty dt [(f^{1/2}(t))']^2 = -\frac{1}{16\pi} \int_{-\infty}^\infty dt \frac{[(f(t))']^2}{f(t)}, \quad (4.16)$$

sendo que a linha ' na eq. acima significa derivar a função pelo seu argumento.

Um resultado muito próximo à eq. (4.16) foi conseguido por Flanagan [33], a saber

$$\rho_{f,\psi,m=0}^{2D, \text{Flanagan}} \geq -\frac{1}{24\pi} \int_{-\infty}^\infty dt \frac{[(f(t))']^2}{f(t)}, \quad (4.17)$$

ou seja, uma diferença de $\frac{3}{2}$ para o deduzido aqui. Um aspecto interessante no trabalho de Flanagan reside no fato de que se provou ali que esse é um limite otimizado, no sentido de que a eq. (4.17) é o limite máximo obedecido por uma desigualdade quântica para o campo escalar sem massa em duas dimensões. O resultado deduzido aqui não tem o compromisso de apresentar limites otimizados, dada a estrutura da dedução utilizada não conter requisitos de otimização. Por outro lado a dedução de Flanagan depende de detalhes específicos do campo escalar em duas dimensões e não pôde ser generalizada para dimensões maiores.

Para o campo escalar em 4 dimensões obtemos, pela eq. (4.13), que

$$\rho_{f,\psi,m=0}^{4D} \geq -\frac{1}{16\pi^3} \int_0^\infty du (\widehat{f^{1/2}})^2 u^4 = -\frac{1}{16\pi^2} \int_{-\infty}^\infty dt [(f^{1/2}(t))'']^2. \quad (4.18)$$

Voltando a discussão do papel da função teste $f(t)$ na desigualdade, vemos que a presença de derivadas nas eqs. (4.16) e (4.18) permite que se veja facilmente que certas funções teste não resultam em um limite inferior definido. Por exemplo, a escolha de $f(t)$ tal que $f(t)''$ possua descontinuidades (e.g., $f(t)$ sendo um pulso quadrado) leva a uma desigualdade do tipo

$$\rho_{f,\psi} \geq -\infty, \quad (4.19)$$

que não nos dá nenhuma informação a respeito dos estados de densidade de energia negativa do campo. Assim, voltamos a sublinhar que, embora a escolha de $f(t)$ contenha um alto grau de arbitrariedade, a escolha de um $f(t)$ próximo ao perfil da densidade de energia do campo (por exemplo, pela escolha de uma função teste cujo tempo característico seja próximo ao da duração da densidade de energia negativa) é importante para tornar a desigualdade uma ferramenta útil. Enfim, quando a função teste for apropriada, nos dará uma informação confiável a respeito das desigualdades obedecidas pela densidade de energia. Quando a função teste não for apropriada, apenas não teremos informação alguma.

4.2 A dedução

Um breve histórico

A primeira dedução dessas desigualdades foi feita por L. Ford [1, 2] para campos escalares sem massa no espaço-tempo de Minkowski de duas e quatro dimensões. Posteriormente extensões desse teorema foram feitas por Ford e colaboradores para campos escalares massivos e o campo eletromagnético [6]. Resultados análogos foram também demonstrados para campos de Dirac [34]. As deduções contidas nos trabalhos iniciais [2, 6] utilizavam-se de condições pouco gerais (tais como funções teste específicas) e de métodos que as tornavam mais trabalhosas. Uma dedução muito mais simples e geral foi posteriormente apresentada por Fewster e Eveson [35], da qual nos utilizamos na apresentação que segue.

Preliminares

Seja f uma função suave, par¹ e positivo-definida em \mathfrak{R} que decaia rapidamente no infinito (incluindo a possibilidade que f tenha suporte compacto, e.g., $f(t) = 0$ a partir de um certo $t > \tau$). Primeiro definiremos \hat{f} como sendo a transformada de Fourier de f

$$\hat{f}(w) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-iwt}. \quad (4.20)$$

¹Em nossa dedução assumiremos f par, mas é possível realizar uma demonstração sem essa condição [36].

Usando $f^{1/2}$ para denotar \sqrt{f} , definimos a função g

$$g(w) = \frac{\widehat{f^{1/2}}(w)}{\sqrt{2\pi}} \quad (4.21)$$

em \mathfrak{R} , sendo a mesma suave, real, par e com a propriedade de também decair no infinito. Definindo a operação de convolução \otimes por

$$(h_1 \otimes h_2)(w) = \int_{-\infty}^{\infty} dw' h_1(w - w') h_2(w'), \quad (4.22)$$

é possível verificar que g satisfaz

$$g \otimes g = \widehat{f}. \quad (4.23)$$

Seja agora p uma função real em \mathfrak{R}^n , que cresça no máximo de modo polinomial. Usaremos os operadores de criação e destruição do campo escalar no espaço de Minkowski $(n+1)$ -dimensional para definir duas famílias $\{O_w^\pm | w \in \mathfrak{R}^+\}$ de operadores no espaço de Fock como

$$O_w^\pm = \int \frac{d^n \mathbf{k}}{(2\pi)^n} [g(w - w(\mathbf{k})) a(\mathbf{k}) \pm g(w + w(\mathbf{k})) a^\dagger(\mathbf{k})] p(\mathbf{k}). \quad (4.24)$$

Usando as relações de comutação e simetrizando o integrando em \mathbf{k} e \mathbf{k}' , temos que²

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dw \quad O_w^{\pm\dagger} O_w^\pm &= \int_0^\infty dw \int \frac{d^n \mathbf{k} d^n \mathbf{k}'}{(2\pi)^{2n}} [g(w - w(\mathbf{k})) g(w - w(\mathbf{k}')) a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}')] \\ &+ g(w + w(\mathbf{k})) g(w + w(\mathbf{k}')) a(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{k}') \\ &\pm g(w - w(\mathbf{k})) g(w + w(\mathbf{k}')) a^\dagger(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{k}') \\ &\pm g(w + w(\mathbf{k})) g(w - w(\mathbf{k}')) a(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}')] p(\mathbf{k}) p(\mathbf{k}') \\ &= S^\pm + \int_0^\infty dw \int \frac{d^n \mathbf{k}}{(2\pi)^{2n}} g(w + w(\mathbf{k}))^2 p(\mathbf{k})^2 \mathbb{I}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

onde

$$\begin{aligned} S^\pm &= \frac{1}{2} \int \frac{d^n \mathbf{k} d^n \mathbf{k}'}{(2\pi)^{2n}} [F(\mathbf{k}, \mathbf{k}') (a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}') + a^\dagger(\mathbf{k}') a(\mathbf{k})) \\ &\pm G(\mathbf{k}, \mathbf{k}') (a^\dagger(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{k}') + a(\mathbf{k}') a(\mathbf{k}))] p(\mathbf{k}) p(\mathbf{k}'), \end{aligned} \quad (4.26)$$

com as funções F e G definidas por

$$F(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \int_0^\infty dw g(w - w(\mathbf{k})) g(w - w(\mathbf{k}')) + g(w + w(\mathbf{k})) g(w + w(\mathbf{k}')) \quad (4.27)$$

²As integrais múltiplas $\int d^n \mathbf{k}$ significam $\int_0^\infty dk_1 \int_0^\infty dk_2 \dots \int_0^\infty dk_n$.

e

$$G(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \int_0^\infty dw g(w - w(\mathbf{k}))g(w + w(\mathbf{k}')) + g(w + w(\mathbf{k}))g(w + w(\mathbf{k}')). \quad (4.28)$$

As expressões para F e G podem ser simplificadas usando o fato de que g é par, obtendo-se

$$F(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \int_{-\infty}^\infty dw g(w - w(\mathbf{k}))g(w - w(\mathbf{k}')) = (g \otimes g)(w(\mathbf{k}) - w(\mathbf{k}')) = \widehat{f}(w(\mathbf{k}) - w(\mathbf{k}')) \quad (4.29)$$

e

$$G(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = (g \otimes g)(w(\mathbf{k}) + w(\mathbf{k}')) = \widehat{f}(w(\mathbf{k}) + w(\mathbf{k}')). \quad (4.30)$$

Uma vez que o lado esquerdo da equação (4.25) deve ser, formalmente, um operador positivo-definido, concluímos que o valor esperado $\langle S^\pm \rangle_\psi$ obedece

$$\langle S^\pm \rangle_\psi \geq - \int_0^\infty dw \int \frac{d^n \mathbf{k}}{(2\pi)^n} g(w + w(\mathbf{k}))^2 p(\mathbf{k})^2. \quad (4.31)$$

Essa última equação é o resultado chave para a desigualdade quântica.

A desigualdade para o campo escalar

Seja f como definido na seção anterior, e

$$T_f \equiv \int_{-\infty}^\infty T_{00}^{ren}(t, \mathbf{0}) f(t) dt, \quad (4.32)$$

de modo que $\rho_{f,\psi} = \langle T_f \rangle_\psi$. Pela eq. (4.4), e usando a paridade de f , temos que

$$\begin{aligned} T_f &= \frac{1}{2} \int \frac{d^n \mathbf{k} d^n \mathbf{k}'}{(2\pi)^{2n+1} (w(\mathbf{k})w(\mathbf{k}'))^{1/2}} [(w(\mathbf{k})w(\mathbf{k}') + \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') [F(\mathbf{k}, \mathbf{k}') (a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}')) \\ &+ a^\dagger(\mathbf{k}')a(\mathbf{k})] - G(\mathbf{k}, \mathbf{k}') (a^\dagger(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}') + a(\mathbf{k}')a(\mathbf{k}))] + m^2 [F(\mathbf{k}, \mathbf{k}') (a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}')) \\ &+ a^\dagger(\mathbf{k}')a(\mathbf{k})] + G(\mathbf{k}, \mathbf{k}') (a^\dagger(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}') + a(\mathbf{k}')a(\mathbf{k}))], \end{aligned} \quad (4.33)$$

em que F e G são dados pelas eqs. (4.29) e (4.30). Da eq. (4.33), vemos que T_f está escrito como uma soma finita de operadores da forma S^\pm . Aplicando então a eq. (4.31) com os casos

$$p^2(\mathbf{k}) = \frac{w(\mathbf{k})}{\sqrt{2}}, p^2(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}}{2w(\mathbf{k})}, p^2(\mathbf{k}) = \frac{m^2}{2w(\mathbf{k})}, \quad (4.34)$$

e somando os resultados, obtemos que

$$\begin{aligned}
\rho_{f,\psi} &\geq -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dw \int \frac{d^n \mathbf{k}}{(2\pi)^n} w(\mathbf{k}) [\widehat{f^{1/2}}(w + w(\mathbf{k}))]^2 \\
&= -\frac{1}{2^n \pi^{n/2+1} \Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty dw \int_m^\infty dw' [\widehat{f^{1/2}}(w+w')]^2 w'^2 (w'^2 - m^2)^{\frac{n}{2}-1}. \quad (4.35)
\end{aligned}$$

Mediante a mudança de variável

$$u = w + w', v = w', \quad (4.36)$$

obtemos a forma final desejada para a desigualdade quântica

$$\rho_{f,\psi} \geq -\frac{1}{2^n \pi^{n/2+1} \Gamma(\frac{n}{2})} \int_m^\infty du (\widehat{f^{1/2}}(u))^2 \int_m^u dv v^2 (v^2 - m^2)^{n/2-1}, \quad (4.37)$$

o que finaliza nossa dedução.

Capítulo 5

Aplicações das desigualdades quânticas e outros exemplos de energia negativa em teoria quântica de campos

Na seção §1.2.2 mencionamos alguns paradoxos e situações inusitadas levantadas pela existência de densidades de energia negativa: violações da segunda lei da termodinâmica e da *cosmic censorship* foram alguns exemplos citados. Sendo esses fenômenos a motivação inicial para o estudo das desigualdades quânticas, resta a pergunta: essas desigualdades são suficientes para impedir paradoxos provindos da existência de energias negativas? Nesse capítulo nos dispomos a responder essa pergunta à luz do exposto até aqui.

Cada um dos exemplos citados em §1.2.2 são temas de vários trabalhos publicados na literatura [1, 7, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48], de forma que uma exposição técnica onde todas afirmações sejam deduzidas torna-se imprópria. Optamos por uma discussão qualitativa com o objetivo de apresentar algumas aplicações das desigualdades quânticas. Também será exposto outro exemplo de sistema físico no qual surge densidades e fluxos de energia negativa - e para o qual não existe desigualdade quântica.

5.1 Espelhos acelerados e a segunda lei da termodinâmica

Vamos primeiro resumir o exposto em §3.3.1: naquela seção discutimos um espelho inicialmente em repouso que é levado a um período de aceleração própria constante e subsequente volta ao movimento inercial (de velocidade constante). Pro-

vamos que fluxos de energia estão associados a seu período de aceleração não uniforme (para sair do repouso) e desaceleração (para voltar ao movimento inercial). Mostramos ainda que o espelho irá emitir fluxos de energia negativa e positiva, e a emissão dos fluxos de energia negativa estará sujeita à eq. (3.46): $|\Delta E_n|T < 1/12\pi$, que é um exemplo de desigualdade quântica. Vejamos que papel essa desigualdade pode ter com a segunda lei da termodinâmica.

A figura 5.1 representa uma configuração de espelhos com a qual tentaremos, por meio de um *gedankenexperiment*, violar a segunda lei da termodinâmica. A forma na qual o apresentamos é uma variação do proposto inicialmente por Davies [7].

O espelho O, de área A , será acelerado de maneira análoga ao espelho descrito pela trajetória (3.42), sendo que seu movimento está representado no diagrama da figura 5.2.

Saindo da posição z_0 , será submetido a um empurrão¹ na direção \hat{z} que o retira do repouso (parte (i) da figura 5.2), seguido por um período de aceleração própria constante $a = |a|\hat{z}$ e uma posterior desaceleração (parte (ii) da figura) que o devolve ao movimento inercial, a determinada velocidade constante. Subsequentemente, haverá outro empurrão - mas de sentido contrário (parte (iii))- seguido de um período de aceleração própria constante $a = -|a|\hat{z}$ e uma posterior desaceleração no momento em que sua velocidade volta a ser nula (parte (iv)), de forma que o espelho encerre o movimento em repouso na posição z_1 . Todo o processo pode ser retomado agora na direção inversa, de modo que o espelho volte a z_0 e feche o ciclo. Os espelhos S têm a função de separar os pulsos de energia emitidos durante os empurrões e desacelerações, de modo que os fluxos de energia negativa sejam sempre direcionados ao receptor R^- na figura 5.1, e os de energia positiva ao receptor R^+ . Para tanto eles irão se reposicionar, por meio de simples rotações, durante o período de aceleração constante de O, quando nenhum fluxo é emitido. Feito assim, criamos um aparelho que separa por completo os fluxos de energia negativa dos de energia positiva.

A segunda lei da termodinâmica nos diz que no ciclo total a variação ΔS da entropia deve atender

$$\Delta S \geq 0. \quad (5.1)$$

Podemos violar essa lei no experimento acima?

Analisemos primeiro o balanço de energia do ciclo. Tendo em vista as eqs. (3.36) e (3.37), é possível concluir que:

1. Os fluxos de energia emitidos após o empurrão inicial em (i) levam a R^- uma quantidade de energia $\frac{-a}{12\pi}$; R^+ recebe $\frac{+a}{12\pi}$.
2. Durante o período de aceleração própria constante os espelhos S reposicionam-se. Na desaceleração subsequente (ii) o fluxo emitido corresponderá a uma quantidade de energia $\frac{-a}{12\pi} \frac{\sqrt{1-v_f^2}}{(1-v_f)^2}$ para R^- e $\frac{a}{12\pi} \frac{\sqrt{1-v_f^2}}{(1+v_f)^2}$ para R^+ .

¹Por “empurrão” entende-se que podemos aproximar o período em que a aceleração própria do espelho vai de 0 a a por uma delta de Dirac.

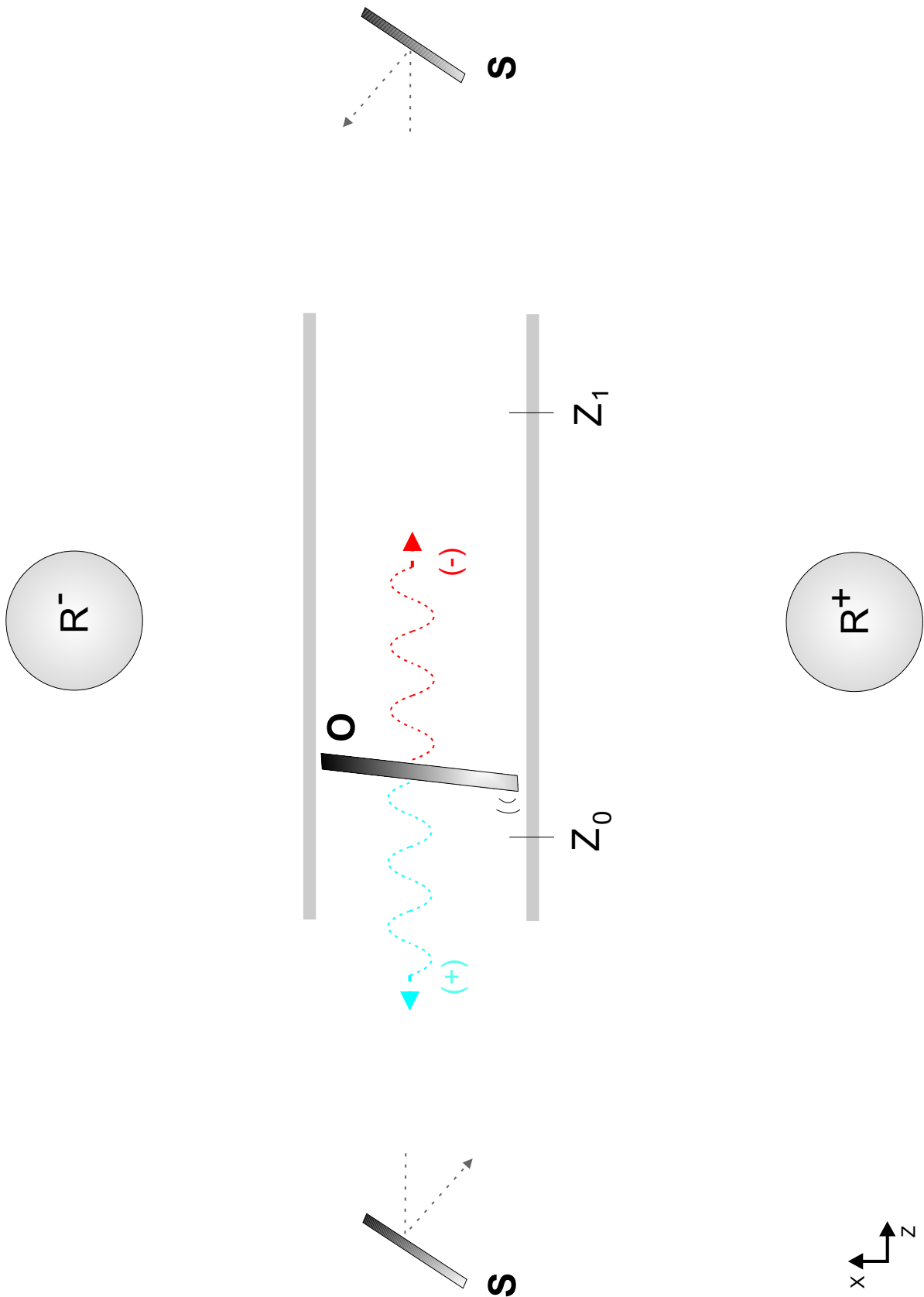


Figura 5.1: *Gedankenexperiment* de Davies.

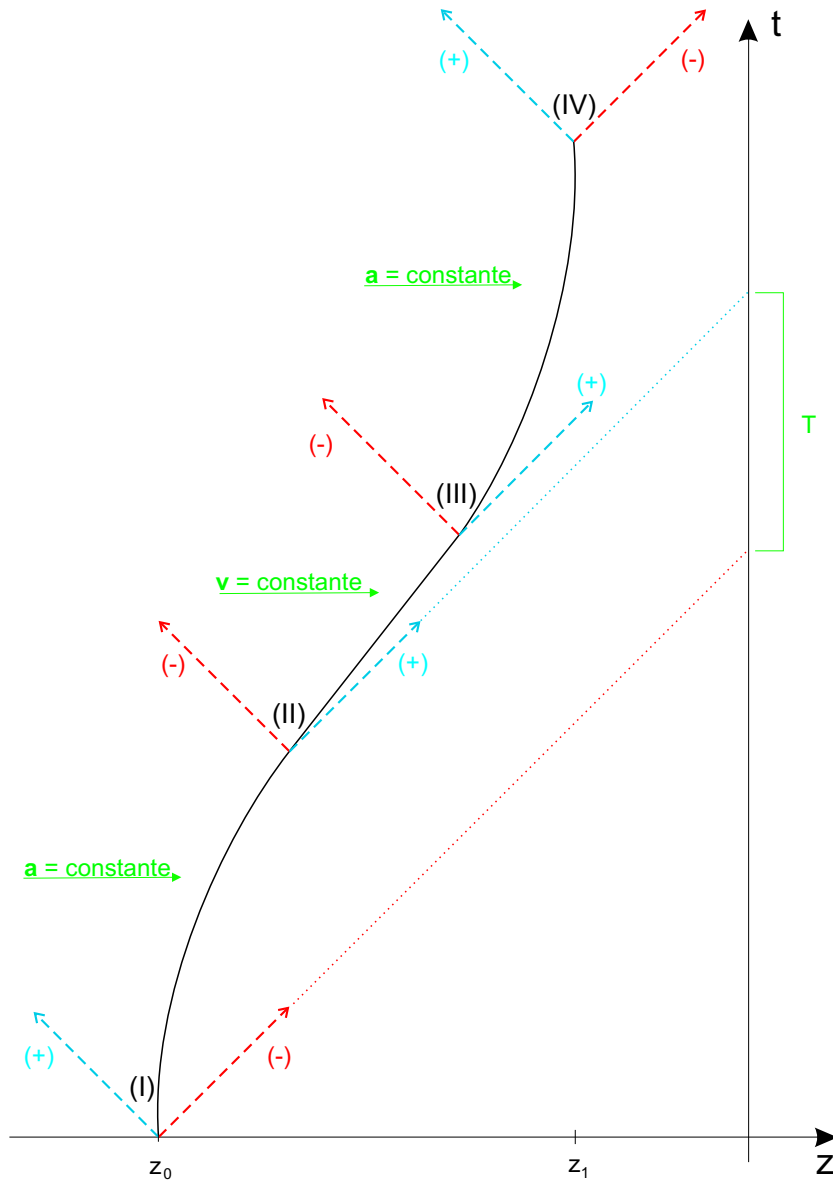


Figura 5.2: Diagrama representando a trajetória do espelho entre z_0 e z_1 .

3. O próximo empurrão (iii) resultará no mesmo balanço de energia do item 2 acima.
4. Durante o período de aceleração própria constante os espelhos S reposicionam-se. À desaceleração (iv) corresponderá balanço de energia idêntico ao item 1 acima.
5. O trabalho para rotacionar os espelhos S pode ser ignorado, já que este pode ser feito tão pequeno quanto se queira, colocando-os a uma distância grande o suficiente (de modo que a rotação necessária seja tão pequena quanto se queira). Esse cuidado também nos permite desconsiderar qualquer emissão de radiação associada ao movimento dos espelhos S. Igualmente, o trabalho realizado para manter o período de aceleração própria constante pode ser ignorado, por duas diferentes razões: a massa do espelho pode ser tão pequena quanto necessária, e/ou pode-se usar um mecanismo tal que o trabalho realizado para manter a aceleração quando no sentido \hat{z} seja compensado pelo realizado quando no sentido $-\hat{z}$.

Somando as contribuições acima vê-se que a passagem do espelho de z_0 a z_1 soma uma energia de $-2\frac{a}{12\pi} \left[1 + \frac{\sqrt{1-v_f^2}}{(1+v_f)^2} \right]$ para R^- e $2\frac{a}{12\pi} \left[1 + \frac{\sqrt{1-v_f^2}}{(1-v_f)^2} \right]$ para R^+ . Para completar o ciclo, reposicionamos os espelhos S novamente, repetimos os passos (1)-(4) acima para levar O de z_1 para z_0 e, após um último reposicionamento de S, todos espelhos voltam a sua configuração inicial, tendo os receptores acumulado uma energia

$$E^- = -\frac{a}{3\pi} \left[1 + \frac{\sqrt{1-v_f^2}}{(1+v_f)^2} \right], \quad (5.2)$$

$$E^+ = +\frac{a}{3\pi} \left[1 + \frac{\sqrt{1-v_f^2}}{(1-v_f)^2} \right]. \quad (5.3)$$

O paradoxo

Como proposto por Davies, o paradoxo segue dessa linha de raciocínio: A energia total emitida pelo espelho é

$$E_{em} = E^+ + E^- = \frac{a}{3\pi} \left[\frac{4v_f}{(1-v_f^2)^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (5.4)$$

Assim, é necessário alimentar o sistema com uma energia E_{em} para compensar a perda de energia por radiação - ou seja, E_{em} é a energia que o agente que movimenta o espelho O gasta fazendo trabalho contra a força de reação à radiação. *Assumindo* que a energia que chega ao receptor R^+ possa ser absorvida e ficar acessível ao agente

que realiza trabalho em O, teremos que a energia total E_{tot} contabilizada por esse agente ao final do ciclo será E^+ , menos a energia E_{em} gasta contra a força de reação à radiação:

$$E_{\text{tot}} = E^+ - E_{\text{em}} \underbrace{=}_{\text{por (5.4)}} -E^- = +\frac{a}{3\pi} \left[1 + \frac{\sqrt{1 - v_f^2}}{(1 + v_f)^2} \right]. \quad (5.5)$$

Ou seja, ao final do ciclo *sobra* energia, quando contabilizada a gasta pelo agente e a recebida por R^+ . A idéia é que parte da energia absorvida em R^+ seja usada para “pagar” a gasta pelo agente, sendo o restante armazenada em R^+ , e.g., na forma de calor. Agora, construindo o sistema de modo que R^+ seja de início um corpo com temperatura T^+ e R^- com temperatura T^- tal que $T^+ > T^-$, e *assumindo* também que o efeito total de um fluxo de energia negativa sobre um corpo seja o de baixar sua temperatura (e igualmente que o efeito do fluxo de energia positiva seja o aumento da temperatura), acabamos com uma máquina que é capaz de *transferir temperatura de um corpo mais frio para um corpo mais quente sem exercer trabalho em um ciclo total*. Ou seja, *viola-se* a segunda lei da termodinâmica, já que a impossibilidade de tal máquina existir é uma das formas de enunciar essa lei.

As fórmulas (3.36) e (3.37), usadas para deduzir (5.3) e as demais equações do enunciado, foram deduzidas em §3.3.1 e no apêndice A para espelhos em (1+1) dimensões, e não em (3+1) dimensões como apresentado aqui. Assim, a forma funcional de (5.3) serve apenas de motivação para apresentar o paradoxo de maneira didática. Veja que a única propriedade necessária para chegar as conclusões enunciadas é a capacidade do espelho de emitir fluxos de energia negativa em uma direção ao mesmo tempo que emite um fluxo positivo na direção contrária. A radiação de espelhos em (3+1) dimensões não é conhecida analiticamente: apenas alguns poucos casos especiais [49, 50], conseguidos por aproximações, foram calculados na literatura. Porém, essas aproximações indicam que um espelho plano [49] em (3+1) apresenta também emissão de fluxos de energia negativa associado a $da/d\tau > 0$, como no caso bi-dimensional. Ou seja, o paradoxo mantém-se em (3+1) dimensões.

A desigualdade

Ilustraremos com um argumento heurístico o que a desigualdade (3.46) traz à discussão acima. Convertendo-a para nosso exemplo (3+1)-dimensional (e recuperando unidades do S.I.) teremos

$$|\Delta E_n|T < \hbar, \quad (5.6)$$

sendo ΔE_n a energia emitida pelos fluxos negativos (e recebida em R^-) e T o tempo disponível para os espelhos S se reposicionarem (durante o período em que O se movimenta com aceleração própria constante). Agora, *assumindo* que o mecanismo responsável por “ligar” o sistema de rotação dos espelhos S funcione segundo as

regras de mecânica quântica não-relativística, temos que ele deve operar atendendo à desigualdade

$$\Delta E_s T > \hbar, \quad (5.7)$$

onde ΔE_s é a energia intrínseca do mecanismo². Eliminando T pelas eqs. (5.6) e (5.7), temos que

$$\Delta E_s > |\Delta E_n|. \quad (5.8)$$

Ou seja, cada reposicionamento dos espelhos S custa uma quantidade de energia maior que o módulo da energia negativa emitida entre esses reposicionamentos, o que implica ao final do ciclo que

$$E_s > -E^-. \quad (5.9)$$

Mas, pela eq. (5.5), $-E^-$ é justamente a quantidade de energia que sobra ao agente que opera O quando este tem acesso a energia armazenada em R^+ , da qual ele usaria parte para “pagar” por seu funcionamento e criar o paradoxo. Uma vez que agora se gastará *mais* do que essa energia armazenada para operar o mecanismo que “liga” o aparelho que movimenta os espelhos S, está desfeito o paradoxo.

Em resumo, a introdução da desigualdade quântica nesse sistema, *somada* à suposição de que o mecanismo que opera S funciona sob mecânica quântica de Schrödinger, inviabiliza que a configuração de espelhos acelerados viole a segunda lei da termodinâmica.

Por fazer uso de algo externo à teoria quântica de campos, essa não é uma solução de todo satisfatória. É possível ver que essa solução se encaixa dentro de uma conjectura lançada por Helfer [44, 46]: a “Condição de Energia Operacional”, que afirma que, localmente, a energia de um campo, somada à energia de um aparelho isolado que mede ou armazena a energia do campo, deve ser não negativa. Intuitivamente, tal conjectura defende que sempre que se tente separar as componentes de energia negativa e positiva de um estado quântico (que é justamente a origem do paradoxo de Davies acima), a energia gasta para realizar tal separação levará a energia total do sistema a ser não negativa.

Tal conjectura foi provada somente em alguns poucos casos onde, assim como no exemplo discutido acima, lança-se mão de que o aparelho de medida é regido por mecânica quântica não-relativística, e.g., atende (5.7). Assim, trata-se de uma conjectura de papel secundário dentro do programa das desigualdades quânticas, que tem por objetivo investigar que limites a teoria quântica de campos impõe a si mesma sem hipóteses adicionais.

Em resumo, vemos que a desigualdade quântica não é suficiente para resolver o paradoxo de Davies, embora adicione outros elementos à sua análise.

²Note-se que é a energia do mecanismo que dá início às rotações (algo como um “timer”), e não do aparelho que realiza tais rotações - a energia deste último está sendo desconsiderada, como já apontado.

5.2 Espelhos acelerados e *cosmic censorship*

Suponha um espelho nas imediações de um buraco negro de massa M , carregado com carga Q , maximal (solução de Reissner-Nordstrom com $M = Q$), cuja métrica é

$$ds^2 = -f dt^2 + \frac{1}{f} dr^2, \quad (5.10)$$

$$f = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \underbrace{=}_{\text{para } M=Q} \left(1 - \frac{M}{r}\right)^2. \quad (5.11)$$

Se acelerarmos esse espelho de forma a dirigir fluxos de energia negativa ao buraco negro, sabemos que tais fluxos serão absorvidos pelo mesmo e, por conservação de energia, sua massa deverá diminuir, ocasionando $M < Q$. Um buraco negro maximal é justamente um que se encontra no limite da *cosmic censorship*, uma conjectura formulada por Penrose [51] que afirma que os objetos astrofísicos encontrados na natureza devem ter suas singularidades “escondidas” por um horizonte de eventos. Uma solução de Reissner-Nordstrom que possua $M < Q$ viola *cosmic censorship*, pois nesse tipo de buraco negro é possível a um observador encontrar primeiro a singularidade do buraco negro antes de passar por seu horizonte de eventos. Pois usando um espelho acelerado, aparentemente somos capazes de transformar um buraco negro maximal em um buraco negro que viola *cosmic censorship*.

A validade da *cosmic censorship* tem sido disputada de várias maneiras [53], e foge de nosso tema discuti-la em maiores detalhes aqui. Para nós interessa apenas dizer que, independentemente dessa conjectura ser verdadeira ou não, ela expressa um sentimento comum: o de que objetos astrofísicos macroscópicos que a violem são improváveis. Portando, a situação em que o simples movimento de um espelho pode provocar tão grande mudança no espaço-tempo de um buraco negro macroscópico soa inusitada.

A aplicação das desigualdades quânticas a esse problema foi uma das primeiras feitas por Ford [38, 40]. Apresentá-la em todos os detalhes nos levaria a uma longa discussão, e preferimos apenas indicar sua solução, já que podemos fazê-lo facilmente usando o já exposto em §3.3.1.

Embora a exposição de §3.3.1 trate de espelhos acelerados em (1+1) dimensões no espaço-tempo de Minkowski, o mesmo cálculo para *qualquer* espaço-tempo bi-dimensional é conhecido [54]. Pode-se provar que [38, 54] em qualquer espaço-tempo o resultado (3.34), (3.35) continua válido, ou seja, que um observador comóvel a um espelho verá um fluxo de energia ser emitido pelo mesmo de acordo com $F_c = \pm \frac{1}{12\pi} \frac{da}{d\tau}$, caso o observador comóvel olhe para o sentido da aceleração (−) ou o sentido contrário (+). A analogia continua: usando o sistema de coordenadas (r^*, t) , onde

$$r^* \equiv \int^r \frac{1}{f(r)} dr, \quad (5.12)$$

é possível mostrar [38] que um observador estático nesse sistema de coordenadas de

posição $r_e^* = r_e^*(r_e)$ irá detectar um fluxo produzido pelo espelho dado por

$$F_{e,D} = -\frac{1}{12\pi f(r_e)} \frac{(1-v^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-v)^2} \frac{d}{dt} \left[\frac{\dot{v}}{(1-v^2)^{\frac{3}{2}}} \right], \quad (5.13)$$

se está à sua direita (além do espelho e do buraco negro) e

$$F_{e,E} = \frac{1}{12\pi f(r_e)} \frac{(1-v^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+v)^2} \frac{d}{dt} \left[\frac{\dot{v}}{(1-v^2)^{\frac{3}{2}}} \right], \quad (5.14)$$

se está à sua esquerda (entre o espelho e o buraco negro), sendo

$$v \equiv \frac{dr^*}{dt}, \quad (5.15)$$

a velocidade do espelho nas coordenadas (r^*, t) . É evidente a relação entre (5.13), (5.14) e (3.36), (3.37). Esse resultado significa que a radiação intrínseca emitida por espelhos em espaço-tempos da forma (5.10), quando expressos em termos de (5.15), é semelhante à emissão de espelhos em Minkowski, que descrevemos na §3.3.1. Sendo assim, valem as propriedades: (i) para um espelho que tenha acelerações limitadas - e aqui trata-se da aceleração $\tilde{a} = \dot{v}/(1-v^2)^{\frac{3}{2}}$, e não da aceleração própria a do espelho - a energia total emitida durante sua trajetória será positiva. Logo, um pulso inicial de energia negativa será acompanhado de um pulso posterior positivo. Assim, ao acelerarmos o espelho em direção ao buraco negro (emitindo um pulso de energia negativa), à posterior desaceleração, necessária para que o espelho não “caia” no buraco negro³, corresponderá um pulso positivo de módulo maior que o negativo. Sendo assim, se podemos transformar o buraco negro tal que $M < Q$ (e violar *cosmic censorship*), só o podemos fazer durante um tempo T entre estes pulsos. (ii) Assim como feito na §3.3.1, a separação máxima entre os pulsos é a conseguida com espelhos de aceleração \tilde{a} constante, de modo que somente haverá pulsos associados ao empurrão que inicia seu movimento acelerado (aproximado por uma delta de Dirac) e sua posterior desaceleração. Tal espelho possuirá um digrama $(t \times r^*)$ análogo à figura 3.5, e se assumirmos que o espelho inicia seu movimento longe do horizonte (tal que $f(r_e) \approx 1$) é possível ver que ele atenda à *mesma* desigualdade (3.46) que relaciona a energia $|\Delta E_n|$ do pulso negativo a T : $|\Delta E_n|T < 1/12\pi$. Uma vez que $\Delta E_n = \Delta M$, sendo ΔM a variação da massa do buraco negro, encontramos que

$$|\Delta M|T < \frac{1}{12\pi}. \quad (5.16)$$

Proseguimos agora com um primeiro argumento de Ford e Roman [38]: O espaço-tempo de um buraco negro deve, em última análise, estar sujeito a flutuações

³É necessário impedir sua queda para que não tenhamos que contar sua energia ao se discutir a conversão do buraco negro em $M < Q$.

quânticas de sua métrica. Embora a descrição dessas flutuações dependam de um teoria quântica da gravitação completa, é razoável supor que um critério para que se observe uma singularidade seja a de que

$$|\Delta M|T > 1. \quad (5.17)$$

Comparando-se (5.16) e (5.17), fica claro que a radiação de espelhos acelerados não é capaz de tornar a singularidade do buraco negro visível por tempo suficiente para que sua observação seja *não ambígua*.

O argumento acima, que depende de (5.17), está baseado na interpretação comum do princípio da incerteza para energia e tempo segundo a qual a medição da energia de um sistema com precisão δE exige um tempo mínimo ΔT dado por $\Delta T > 1/(\delta E)$. Nesse sentido essa solução à violação de *cosmic censorship* é análoga à encontrada para o paradoxo de Davies na seção anterior. Porém, em um trabalho posterior [40], Ford e Roman apontam uma solução mais geral. Enquanto a discussão aqui ficou restrita a fluxos de energia negativa produzidos por espelhos bi-dimensionais à volta de buracos negros bi-dimensionais, em [40] prova-se que (5.16) é válida para um campo escalar não-massivo quantizado no *background* de uma solução de Reissner-Nordstrom em (3+1) dimensões. Mostra-se ainda que a singularidade nua ocasionada por fluxos de energia negativa (qualquer fluxo, não só os gerados por espelhos) não é observável porque a relação (5.16) indica que a variação da massa do buraco negro causada por tais fluxos é menor que flutuações métricas induzidas por efeitos de gravidade quântica - conclusão essa que independe da relação (5.17).

Enfim, pode-se dizer que a desigualdade quântica (5.16) encontrada para esse sistema efetivamente resolve a suposta violação de *cosmic censorship* apontada no início, sem hipóteses adicionais.

5.3 Densidades estáticas de energia negativa

No capítulo 3 introduzimos alguns exemplos de sistemas com densidades de energia negativa, todos com uma característica comum: sua densidade de energia negativa surge como um efeito de interferência entre diferentes auto-estados do campo, sendo dependente do tempo. Há porém outra maneira de se obter energias negativas: como um efeito estático de polarização do vácuo, do qual alguns exemplos serão introduzidos a seguir. Iremos mostrar também que estes exemplos nos oferecem um desafio - neles é possível achar classes de observadores para os quais não há desigualdades quânticas.

5.3.1 O efeito Casimir

O efeito Casimir consiste em uma configuração onde duas placas condutoras perfeitas e infinitas são aproximadas de modo a ficarem a uma distância L uma da outra, como visto na figura 5.3.

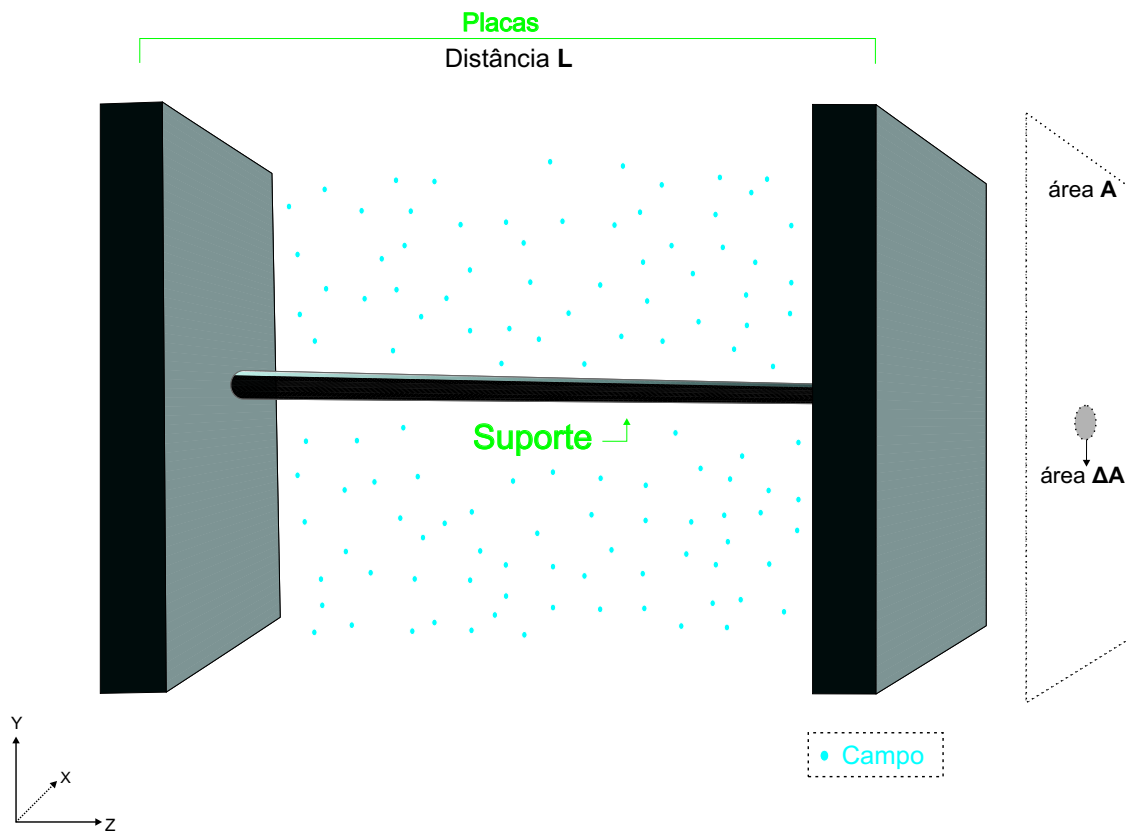


Figura 5.3: Configuração do efeito Casimir. As placas possuem área A e a seção transversal do suporte área ΔA , sendo a distância entre as placas L .

São condutoras perfeitas no sentido de que impõem condições de contorno que tornam o campo nulo sobre as mesmas, funcionando assim como os espelhos utilizados no cap. 3. Essa configuração gera uma densidade de energia negativa *estática* para o campo entre as placas, e induz uma força de atração entre elas. Uma possível interpretação desse resultado, do ponto de vista físico, é o de que essas condições de contorno limitam os modos normais associado ao estado de vácuo do campo entre as placas, enquanto na região externa às placas não há limitação alguma. Esse maior número de modos normais na região externa às placas gera então uma pressão que tende a uni-las.

Assumindo as placas no plano X-Y, iremos deduzir no cap. 6 que o tensor energia momento associado a um campo escalar não massivo de acoplamento conforme sujeito à condição de contorno das placas é dado por⁴

$$T_{\mu\nu} = \frac{-\pi^2}{1440L^4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Theta_1 + \begin{pmatrix} \rho_{\text{sup}}\Theta_2 + \rho_{\text{pl}}\Theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{\text{sup}}\Theta_2 \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

onde L é a distância entre as placas e as funções Θ_1 , Θ_2 e Θ_3 localizam espacialmente a região do campo entre as placas e a região das próprias placas e suporte, respectivamente, e ρ_{sup} e ρ_{pl} representam a densidade de energia do suporte e das placas. P_{sup} representa a pressão que o suporte necessita fazer para contrabalançar a força de atração entre as placas.

O primeiro termo no lado direito de (5.18) é que é o tensor energia-momento que se calcula para o campo nas condições apontadas, e ao qual dedicaremos o próximo capítulo. O segundo termo trata-se de um modelo simples que assumimos para representar as placas e o suporte necessário para tornar a configuração estática. O requisito de que o somatório de forças seja nulo nos permite calcular P_{sup} como

$$P_{\text{sup}}\Delta A - \frac{3\pi^2 A}{1440L^4} = 0 \rightarrow P_{\text{sup}} = \frac{3\pi^2 A}{1440L^4\Delta A}. \quad (5.19)$$

Nos concentraremos agora em demonstrar que para tal configuração há observadores que detectam fluxos de energia negativa que não estão sujeitos a desigualdades quânticas. É claro que um observador estático entre as placas, com quadrivelocidade $U^\mu = (1, \mathbf{0})$ irá detectar uma densidade de energia negativa ρ_{est} dada por

$$\rho_{\text{est}} = T_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = T_{00} = \frac{-\pi^2}{1440L^4}, \quad (5.20)$$

⁴Assumiremos que efeitos da placa possuir área finita A , como na figura 5.3, podem ser desconsiderados no limite de $A/L \gg 1$ e que em primeira aproximação a interação do suporte dielétrico com o campo possa ser desconsiderada.

por todo seu tempo próprio, de modo que não há limitações que relacionem a magnitude da densidade de energia pelo seu tempo de duração para este observador. Logo, ele não atende a nenhuma desigualdade quântica. Em referência à seção anterior, podemos imaginar um outro experimento mental onde a energia negativa criada pela configuração de Casimir seja usada: por exemplo, suponha que várias “caixas” como a da figura 5.3 sejam enfileiradas e direcionadas a um buraco negro. Se a energia total do sistema (Placas + Campo) for negativa, isso equivaleria a um fluxo de energia negativo ao buraco negro que poderia ser usado de modo análogo a um fluxo gerado por um espelho (ver §5.2) - com a diferença de nenhuma desigualdade limitar sua ação sobre o buraco negro. Ou seja, aparentemente configurações de Casimir de energia total negativa poderiam ser usadas para violar, por exemplo, *cosmic censorship*.

Analisemos então como se dá a interação de um observador que tenha uma quadri-velocidade $V^\mu = \gamma(1, 0, 0, v)$, com $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, de modo a cruzar por toda a extensão de uma “caixa” tal como a da figura 5.3, sendo que o vetor unitário da seção espacial perpendicular a sua trajetória será $X^\mu = -\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(v, 0, 0, 1)$. O fluxo F_v detectado por ele será

$$F_v = -T_{\mu\nu}V^\mu X^\nu = \gamma^2 v \left[-\frac{4\pi^2\Theta_1}{1440L^4} + (\rho_{\text{sup}} + \frac{3\pi^2 A}{1440L^4\Delta A})\Theta_2 + \rho_{pl}\Theta_3 \right], \quad (5.21)$$

e a energia total E_{tot} detectada em toda sua trajetória será

$$E_{\text{tot}} = \tau \int F dA, \quad (5.22)$$

sendo $\tau = \frac{L}{\gamma v}$ o tempo próprio que o observador leva para atravessar a caixa. Se exigirmos que a energia total que esse observador detecta seja negativa, chegaremos a

$$E_{\text{tot}} < 0 \rightarrow \rho_{\text{sup}} < \frac{\pi^2 A}{1440L^4\Delta A} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{pela eq. (5.19)}} \quad \rho_{\text{sup}} < \frac{P_{\text{sup}}}{3}. \quad (5.23)$$

Ou seja, achamos que $E_{\text{tot}} < 0 \rightarrow \rho_{\text{sup}} < P_{\text{sup}}$, que significa que *uma configuração de Casimir terá energia total negativa caso o material do suporte que a compõe viole as condições clássicas de energia*.

A visualização física do resultado acima é que no modelo usado, a densidade do vácuo aumenta na razão de $1/L^4$ conforme se diminua a distância L entre as placas. A densidade das placas e do suporte, porém, mantem-se constante. Em algum momento, a energia (negativa) de vácuo entre as placas supera então a energia (positiva) do suporte e das placas. Entretanto, aumenta também a força (desempenhada pelo suporte) necessária para compensar a força de Casimir. O sistema atinge um estado de energia negativa total quando a pressão no suporte supera sua densidade de energia (violando as condições clássicas de energia).

É claro que o material que compõe placas e suporte, nos experimentos usuais de efeito Casimir, atende às condições clássicas de energia, e não se espera conseguir com eles uma configuração de energia total negativa. De fato, como apontado na §1.2.1, a velocidade de propagação de perturbações em um material clássico que viole a condição dominante de energia é maior do que a velocidade da luz no vácuo - ou seja, tal material (sendo clássico) violaria causalidade. Assim, o que o resultado acima nos indica é que a análise de uma configuração de Casimir que trate as placas e o suporte como objetos clássicos é ingênua - o que podemos ver por um cálculo heurístico de ordens de grandeza: Retomando unidades S.I., vemos que energia de Casimir total E_{cas} do vácuo entre as placas é $E_{\text{cas}} = \frac{\pi^2 \hbar c A}{1440 L^3}$, e a do suporte é $E_{\text{sup}} = mc^2 = \Delta A L \rho_{\text{sup}} c^2$, de onde se deduz que se impormos $E_{\text{cas}} \approx E_{\text{sup}}$ com $A \approx 1\text{m}^2$, $\Delta A \approx 10^{-4}\text{m}^2$, $\rho_{\text{sup}} \approx 1\text{kg/m}^3$ teremos que $L \approx 10^{-11}\text{m}$; ou seja, a medida que a energia de vácuo torna-se da ordem da energia do suporte a escala do problema atinge valores aos quais, normalmente, associamos a emergência de fenômenos quânticos.

Em resumo, podemos concluir do exposto que: (i) uma “caixa” de Casimir de energia total negativa exige que o material das placas e suporte viole as condições clássicas de energia; (ii) a exigência de matéria exótica por tal modelo nos mostra que estamos indo além de seu domínio de validade, fazendo-se necessário um modelo mais completo.

Os próximos capítulos serão voltados à discussão desta segunda afirmação.

Capítulo 6

Cálculo de densidades de energia estática

Esse capítulo tem por objetivo detalhar o cálculo da densidade de energia de campos escalares sujeitos a condições de contorno. Tais configurações dão origem a densidades de energia negativa estática, que diferem daquelas apresentadas no cap. 3, onde as densidades e fluxos tinham dependência temporal. Como argumentado anteriormente (§5.3.1), embora o campo escalar livre esteja sujeito a desigualdades quânticas, é possível achar configurações para as quais *não* há desigualdades quânticas quando se usam campos com condições de contorno impostas.

Como veremos, tais configurações dão origem também a densidades de energia negativa que *divergem* sobre o contorno. Então, o segundo objetivo desse capítulo será apresentar tais divergências e apontar sua origem. Veremos que tais divergências são não-físicas, e portanto não possuem papel direto na nossa discussão principal.

6.1 Densidades de energia negativa estática

Revisaremos aqui o cálculo da energia de vácuo para campos escalares sem massa sob condições de contorno, seguindo uma abordagem próxima da ref. [20]. Para facilitar a leitura, repetiremos algumas expressões já expostas no cap. 2. Estamos interessados no campo escalar com acoplamento arbitrário, dado pela Lagrangeana

$$\mathcal{L} = 1/2[\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \xi\phi^2R], \quad (6.1)$$

que implica em um tensor de energia-momento

$$T_{\mu\nu} = (1 - 2\xi)\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + (2\xi - 1/2)\eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\partial_\rho\phi\partial_\sigma\phi - 2\xi\phi\partial_\mu\partial_\nu\phi. \quad (6.2)$$

Nosso objetivo é calcular a energia do estado de vácuo desse campo. Para tal, poderíamos agora inserir a expansão dos modos para o campo ϕ na expressão do tensor

energia-momento acima e então tomar seu valor esperado, achando uma densidade de energia positiva infinita que, ao ser subtraída, nos daria a densidade de energia renormalizada para um campo escalar livre em Minkowski. Porém, há outra maneira de fazer o mesmo cálculo que nos será mais útil, mediante o uso da função de Wightman definida como

$$D^+(x, x') = \langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle \quad (6.3)$$

e através da qual podemos calcular o valor esperado de $T_{\mu\nu}$ pela expressão¹

$$\langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle = \lim_{x' \rightarrow x} [(1 - 2\xi) \partial_\mu \partial'_\nu + (2\xi - 1/2) \eta_{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial'_\sigma - 2\xi \partial_\mu \partial'_\nu] D^+(x, x'). \quad (6.4)$$

De modo geral, o processo de renormalização envolve a remoção de qualquer infinito pela subtração do infinito equivalente em Minkowski. Podemos então renormalizar a função de Wightman antes de atuarmos sobre a mesma com o operador derivativo para achar o valor esperado de $T_{\mu\nu}$; assim a função de Wightman renormalizada fica definida por

$$D_{\text{Ren}}^+(x, x') = D^+(x, x') - D_{\text{Minkowski}}^+(x, x'). \quad (6.5)$$

Por essa definição vemos que a energia do vácuo de Minkowski renormalizada é zero. Dessa maneira, chegamos a um procedimento geral para achar o valor esperado de $T_{\mu\nu}$ sujeito a condições de contorno arbitrárias: primeiro encontramos sua função de Wightman e, depois de renormalizá-la, aplicamos a eq. (6.4) sobre $D_{\text{Ren}}^+(x, x')$ ao invés de aplicá-la sobre $D^+(x, x')$.

Energia de vácuo para “espelhos”

Consideremos como primeiro exemplo o caso de um espaço-tempo de Minkowski bi-dimensional, no qual a função de Wightman para um campo escalar sem massa é dada por

$$D_{\text{Minkowski}_2D}^+(x, x') = -(1/4\pi) \ln[(t - t')^2 - (z - z')^2]. \quad (6.6)$$

Colocando-se agora um espelho na origem, onde assim como no caso eletromagnético um “espelho” significará tão somente um contorno onde o campo se anula², é de se esperar que a função de Wightman seja diferente da exposta acima, pois os modos normais do campo serão alterados de maneira que se anulem na superfície do espelho. Uma vez que o espaço-tempo ainda é plano, diferindo de Minkowski apenas por um contorno, a função de Wightman pode ser encontrada pelo método das imagens, imaginando-se que há uma “fonte” no ponto x' e que o “ponto de observação” é x , de modo completamente análogo às soluções construídas por imagem na eletrostática - a

¹Essa expressão é um caso especial do método de “point-splitting” [20].

²Estaremos, por simplicidade, considerando apenas condições de contorno de Dirichlet.

analogia é justificada pelo fato de que lá, também, as soluções da equação de Poisson são dadas em termos de uma função de Green (análoga a função de Wightman usada aqui). Desse modo chegamos à seguinte função de Wightman para o caso de um espelho presente na origem:

$$D^+(x, x') = -\frac{1}{4\pi} \ln[(t - t')^2 - (z - z')^2] + \frac{1}{4\pi} \ln[(t - t')^2 - (z + z')^2]. \quad (6.7)$$

Para renormalizar essa função de Wightman, subtraímos dela a função de Wightman de Minkowski obtendo

$$D_{\text{Ren}}^+(x, x') = \frac{1}{4\pi} \ln[(t - t')^2 - (z + z')^2]. \quad (6.8)$$

Inserindo $D_{\text{Ren}}^+(x, x')$ na eq. (6.4) obtemos que

$$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{2D} = \frac{\xi}{2\pi z^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

de onde se vê que a densidade de energia do vácuo (a componente $\langle 0|T_{00}|0\rangle$) é não-nula para qualquer $\xi \neq 0$, e *diverge* quando se aproxima do espelho ($z \rightarrow 0$). Note-se que o sinal da densidade de energia depende de ξ , de modo que podem ocorrer densidades de energia negativa ou positiva. Note-se também que para grandes distâncias a densidade de energia tende a zero. O fato de haver uma divergência da densidade de energia sobre o espelho sem dúvida é um fato singular, e nos concentraremos nesse detalhe posteriormente.

Resultados similares seguem no espaço-tempo de Minkowski em 4 dimensões, onde a função de Wightman para um campo livre de contornos é dada por

$$D_{\text{Minkowski}_{4D}}^+(x, x') = \frac{-1}{4\pi^2} [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 - (t - t')^2]^{-1} \quad (6.10)$$

e, novamente pelo uso do método de imagens, achamos que a função de Wightman mediante a presença de um espelho na superfície $z = 0$ modifica-se para

$$D_{4D}^+(x, x') = -\frac{1}{4\pi^2} [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 - (t - t')^2]^{-1} - \frac{1}{4\pi^2} [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2 - (t - t')^2]^{-1}, \quad (6.11)$$

que, após renormalizada através da subtração de $D_{\text{Minkowski}_{4D}}^+$ nos dá

$$D_{\text{Ren}_{4D}}^+(x, x') = \frac{-1}{4\pi^2} [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2 - (t - t')^2]^{-1}, \quad (6.12)$$

que introduzida na eq. (6.4) retorna

$$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{4D} = \frac{1-6\xi}{16\pi^2 z^4} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.13)$$

Assim como no caso bi-dimensional, a densidade de energia diverge conforme aproxima-se do espelho, com exceção do caso $\xi = 1/6$ que é o de acoplamento conforme. Para $\xi < 1/6$ a densidade de energia é positiva e as pressões transversas são negativas, enquanto que para $\xi > 1/6$ a densidade de energia é negativa e as pressões transversas positivas. Em todos os casos a pressão na direção z (que é perpendicular ao espelho) anula-se, o que era de se esperar dada a simetria da configuração.

A diferença marcante que existe entre o caso de acoplamento conforme e o de acoplamento mínimo ($\xi = 0$), caracterizada pela divergência ao aproximar-se do espelho, já induziu diversas discussões na literatura [55, 56, 57]. Para frisar a importância de se entender melhor essa divergência sobre o espelho, vamos mostrar que ela não se restringe ao campo escalar discutido até aqui. Provaremos a seguir que a densidade de energia do campo eletromagnético atende $\rho^{\text{eletromag}} = 0$. De maneira geral, os resultados conseguidos para o tensor energia-momento do campo escalar conforme são análogos aos de um campo eletromagnético, a menos de um fator 2 devido aos dois graus de liberdade deste (correspondentes à polarização). Embora a densidade de energia do campo eletromagnético seja nula nessa configuração, vejamos como se comportam $\langle 0|\mathbf{E}^2|0\rangle$ e $\langle 0|\mathbf{B}^2|0\rangle$ na presença de contornos.

A função de dois pontos para o campo eletromagnético A^μ é dada por

$$D^{\mu\nu}(x, x') = \langle 0|A^\mu(x)A^\nu(x')|0\rangle, \quad (6.14)$$

que na presença do espelho deve ser renormalizada

$$D_{\text{Ren}}^{\mu\nu}(x, x') = D^{\mu\nu}(x, x') - D_{\text{Minkowski}}^{\mu\nu}(x, x'). \quad (6.15)$$

Tomando uma escolha particular de calibre, podemos expressar $D_{\text{Ren}}^{\mu\nu}(x, x')$ por [57]

$$D_{\text{Ren}}^{\mu\nu}(x, x') = -(\eta^{\mu\nu} + 2n^\mu n^\nu)D_{\text{Ren}}^+(x, x'), \quad (6.16)$$

onde $n^\mu = (0, 0, 0, 1)$. Ou seja, a função de dois pontos do campo eletromagnético pode ser expressa em termos da função de dois pontos do campo escalar. Sendo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, segue que

$$\langle E_i(x)E_j(x')\rangle = \langle F_{0i}(x)F_{0j}(x')\rangle = \partial_0\partial_{0'}\langle A_i(x)A_j(x')\rangle + \partial_i\partial_{j'}\langle A_0(x)A_0(x')\rangle, \quad (6.17)$$

de onde se deduz que

$$\langle \mathbf{E}^2 \rangle = \lim_{t', \mathbf{x}' \rightarrow t, \mathbf{x}} (\partial_0\partial_{0'} - \nabla \cdot \nabla') \langle D_{\text{Ren}}^+(x, x') \rangle = -\langle \eta_{\mu\nu} T_{\xi=0}^{\nu\mu} \rangle, \quad (6.18)$$

onde $T_{\xi=0}^{\nu\mu}$ é o tensor energia momento do campo escalar de acoplamento mínimo, eq. (6.13) com $\xi = 0$. Ou seja, mostramos que

$$\langle 0|\mathbf{E}^2|0\rangle = -\langle 0|\mathbf{B}^2|0\rangle = \frac{3}{16\pi^2 z^4}, \quad (6.19)$$

de onde verifica-se que

$$\langle 0|\rho^{\text{eletromag}}|0\rangle = \frac{1}{2}(\langle 0|\mathbf{E}^2|0\rangle + \langle 0|\mathbf{B}^2|0\rangle) = 0. \quad (6.20)$$

Colocado dessa forma, vemos que entender porque a densidade de energia do campo escalar acoplado minimamente diverge nas proximidades do espelho é equivalente a entender porque o valor esperado do campo elétrico (ou magnético) diverge na mesma região, como mostra a eq. (6.19).

O Efeito Casimir

Repetiremos os passos delineados até aqui para uma configuração ligeiramente diferente: temos agora dois espelhos, separados por uma distância L sobre o eixo Z , e vamos calcular $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$ para a região entre os espelhos. A função de Wightman renormalizada, também encontrada pelo método das imagens, é

$$D_{\text{Ren}}^+(x, x') = -\frac{1}{4\pi^2} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - (z - z' - mL)^2} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - (z + z' - mL)^2} \right], \quad (6.21)$$

onde o somatório com $'$ significa que o termo $m = 0$ é descartado (pois ele é o termo que é subtraído na renormalização) e $\Delta x \equiv (x - x')$. Usando a eq. (6.4) pode-se mostrar que

$$\langle 0|T_{\mu\nu}^{\text{conforme}}|0\rangle = \frac{-\pi^2}{1440L^4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (6.22)$$

para acoplamento conforme, que é justamente a eq. (5.18), e

$$\langle 0|T_{\mu\nu}^{\text{mínimo}}|0\rangle = \langle 0|T_{\mu\nu}^{\text{conforme}}|0\rangle - \frac{\pi^2}{48L^4} \frac{3 - 2\sin^2(\pi z/L)}{\sin^4(\pi z/L)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.23)$$

para acoplamento mínimo. Assim como nos casos anteriores, encontramos uma densidade de energia que diverge sobre os espelhos para o caso de acoplamento mínimo, como ilustrado na figura 6.1.

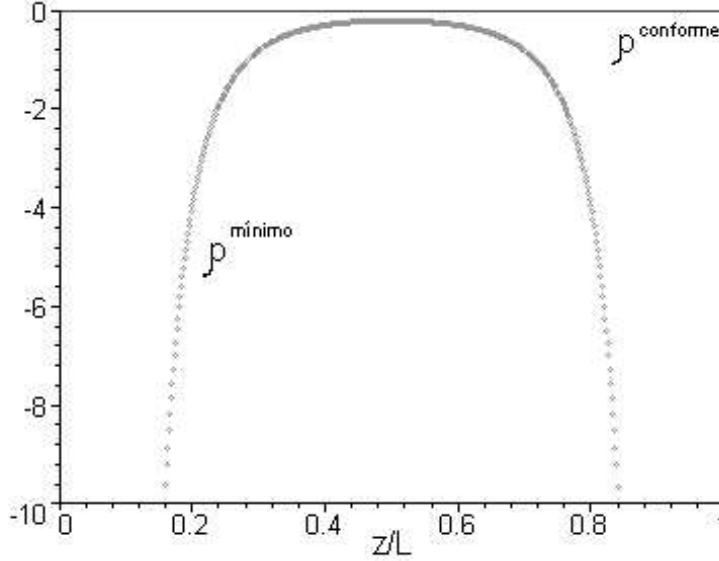


Figura 6.1: Gráfico de T_{00}^{minimo} e T_{00}^{conforme} para configuração de Casimir.

Igualmente pode-se mostrar que o cálculo da mesma configuração para um campo eletromagnético resultaria em uma densidade de energia $\langle 0|T_{00}^{\text{eletromag}}|0\rangle = 2\langle 0|T_{00}^{\text{conforme}}|0\rangle$ (que não diverge), porém com valores de $\langle 0|\mathbf{E}^2|0\rangle$ e $\langle 0|\mathbf{B}^2|0\rangle$

$$\langle 0|\mathbf{E}^2|0\rangle = -\langle 0|\mathbf{B}^2|0\rangle = -3\langle 0|T_{00}^{\text{minimo}}|0\rangle, \quad (6.24)$$

que divergem sobre os espelhos. Então, o que podemos dizer a respeito dessa divergência?

6.2 A divergência da energia de vácuo nas proximidades de contornos

As divergências sobre o contorno, vistas acima, são conhecidas há muito tempo. Se por um lado são um resultado um tanto incômodo, por outro não despertam maiores preocupações por resultarem de um cálculo que em certo sentido é não-físico: não esperamos que a condição de contorno seja válida para comprimentos de onda arbitrários dos modos normais do campo. Para comprimentos de onda muito menores que um λ_p característico do plasma que compõe placas e espelhos reais e macroscópicos, espera-se que os modos normais propaguem-se livremente; ou seja, não existem condutores perfeitos. Dessa maneira, a divergência sobre o espelho resulta de não incorporarmos isso aos cálculos.

Correções que levem em conta as características dielétricas do material, efeitos de teoria quântica de campos a temperaturas finitas e outros aspectos podem ser encontrados em [58] e demais referências contidas ali. Em todos os casos nos quais

os efeitos acima são considerados, resultados livres de divergências são encontrados. A ocorrência de densidades de energia negativa, porém, segue inalterada pela introdução destes efeitos [58, 59, 60], e sob determinadas condições o tensor energia-momento dado pela eq. (6.22) segue sendo uma boa aproximação na região mais distante das placas.

Por outro lado, como apresentado em §5.3.1, as configurações tipo Casimir que mais nos interessam são as que apresentam placas cujos parâmetros nos levam a um regime no qual, possivelmente, efeitos quânticos manifestam-se sobre o próprio material que compõe as placas e o suporte. Somente a partir desse regime seria razoável a possibilidade de uma “caixa” de Casimir de energia total negativa. Podemos então nos perguntar como, nesse regime, efeitos de mecânica quântica sobre a própria placa afetam o cálculo da energia de vácuo. Em outras palavras, como altera-se a eq. (6.22) pela introdução de efeitos associados às placas (e suporte) desviarem de seu comportamento clássico?

Ford e Svaiter [57] trataram de um problema próximo: procurando analisar especificamente como efeitos quânticos das placas alteram a divergência do campo sobre o contorno, de modo a complementar as abordagens que introduzem efeitos dielétricos, de temperatura finita e etc., eles desenvolveram um procedimento que leva em conta a flutuação a qual o contorno está sujeito quando a indeterminação da posição, um efeito de mecânica quântica, faz-se presente. Como veremos, esse formalismo pode ser adaptado para nossa discussão, fornecendo uma maneira de responder à pergunta feita acima.

Sendo assim, nos dedicaremos no próximo capítulo a revisar o trabalho de Ford e Svaiter, e mostrar sua adaptação para descrever como efeitos de mecânica quântica alteram os sistemas com densidades de energia negativa estática apresentados aqui.

Capítulo 7

Cálculo da energia de vácuo para contornos “flutuantes”

7.1 Introduzindo flutuações do contorno

De modo resumido, pode-se dizer que a idéia básica consiste em permitir flutuações por parte do contorno e calcular que efeito isso traz à densidade de energia do campo submetido a essas condições de contorno. A origem dessa idéia reside no fato de que a incerteza intrínseca na posição medida de um objeto é o efeito mais básico que a mecânica quântica traz à dinâmica de um sistema. Intuitivamente, esperamos que tentativas de medir a energia de vácuo de um campo sujeito a um espelho quantizado causem flutuações quânticas no estado desse espelho, flutuações estas que não podem ser ignoradas no cálculo da energia total do sistema.

Vejamos como realizar essa idéia mediante um exemplo específico. A eq. (6.12) representa a função de Wightman para um espelho na origem. Generalizando-a para um espelho numa posição q arbitrária teremos

$$D_{\text{Ren}}^+(x, x') = \frac{1}{4\pi^2} [(t - t')^2 - (x - x')^2 - (y - y')^2 - (z + z' - 2q)^2]^{-1}. \quad (7.1)$$

Lembrando que $D^+(x, x') = \langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle$, vemos que no limite de coincidência $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$ obtemos o valor esperado de ϕ^2 como

$$\langle 0 | \phi^2 | 0 \rangle = D_{\text{Ren}}^+(x, x) = \frac{-1}{16\pi^2(z - q)^2}. \quad (7.2)$$

Percebemos que aqui também há uma divergência sobre o espelho quando $z \rightarrow q$, que está intimamente relacionada com a mesma divergência para a densidade de energia, uma vez que esta é calculada a partir daquela. Iremos tratar então do efeito de flutuação em ϕ^2 , e depois analisaremos a densidade de energia.

Assumindo que a placa possa ser descrita por uma função de onda normalizada $\psi(q)$ de modo que haja uma distribuição de probabilidade para sua posição dada por $f(q) = |\psi(q)|^2$, onde

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(q) dq = 1, \quad (7.3)$$

teremos que o valor médio (sobre a posição) de uma função $G(q)$ qualquer será

$$\langle G \rangle_q = \int_{-\infty}^{\infty} G(q) f(q) dq, \quad (7.4)$$

onde $\langle \rangle_q$ significará sempre a média sobre a posição q e deve-se tomar cuidado para não confundir com o valor esperado sobre o estado de vácuo do campo $\langle 0|0 \rangle$ introduzido antes. Dadas essas definições, a estratégia a ser cumprida será a de considerar não mais as quantidades como $D^+(x, x')$, $\langle 0|\rho|0 \rangle$, etc., mas sim os valores médios sobre a variável q destas quantidades: $\langle D^+(x, x') \rangle_q$, $\langle \langle 0|\rho|0 \rangle \rangle_q$, etc. Para tornar a notação mais clara, quando houver médias tanto sobre q como sobre o estado fundamental do campo $\langle \langle \rangle \rangle_q$, iremos omitir a média sobre o estado fundamental, e.g.

$$\langle \langle 0|\rho|0 \rangle \rangle_q \equiv \langle \rho \rangle_q. \quad (7.5)$$

Começaremos então tratando da eq. (7.1) para $\langle D_{ren}^+(x, x') \rangle_q$, que será escrito em termos de sua transformada de Fourier para facilitar os cálculos,

$$\langle D^+(x, x') \rangle_q = \frac{-1}{2(2\pi)^3} \text{Re} \left(\int \frac{d^3k}{w} e^{i\mathbf{k}_t \cdot (\mathbf{x}_t - \mathbf{x}'_t)} e^{-iw(t-t')} e^{ik_z(z+z')} \langle e^{-2ik_z q} \rangle_q \right), \quad (7.6)$$

onde \mathbf{k}_t e \mathbf{x}_t denotam as componentes de \mathbf{k} e \mathbf{x} perpendiculares ao espelho e $w = |\mathbf{k}|$. Adotando como exemplo uma distribuição de probabilidade particular, e.g, uma gaussiana centrada em $q = 0$

$$f(q) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha q^2}, \quad (7.7)$$

obtemos

$$\langle e^{-2ik_z q} \rangle_q = e^{-2k_z^2 \langle q^2 \rangle_q}, \quad (7.8)$$

com $\langle q^2 \rangle_q = \frac{1}{2\alpha}$. Levando isso à integral na eq. (7.6) e fazendo-se $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$ é possível mostrar que

$$\begin{aligned} \langle D^+(t, t') \rangle_q = & - \frac{i\sqrt{2\pi}}{8(2\pi)^2(t-t')\Delta} \left[e^{-(2z-t+t')^2/(8\Delta^2)} \Phi \left(i \frac{t-t'-2z}{\sqrt{8}\Delta} \right) \right. \\ & \left. + e^{-(2z+t-t')^2/(8\Delta^2)} \Phi \left(i \frac{t-t'+2z}{\sqrt{8}\Delta} \right) \right], \end{aligned} \quad (7.9)$$

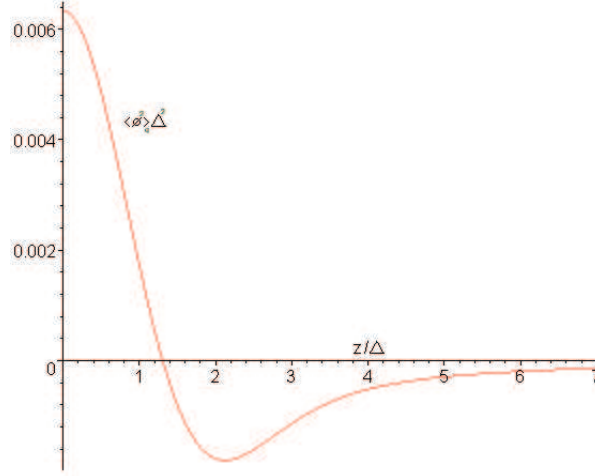


Figura 7.1: Gráfico de $\langle \phi^2 \rangle_q \Delta^2$ por z/Δ .

sendo Φ a Função Erro e $\Delta \equiv \sqrt{\langle q^2 \rangle_q}$. Fazendo-se $t \rightarrow t'$ obtemos uma quantidade finita dada por ¹

$$\langle D^+(z) \rangle_q = \frac{\sqrt{2}z}{32\sqrt{\pi^3}\Delta^3} e^{-z^2/(2\Delta^2)} i\Phi\left(i\frac{z}{\sqrt{2}\Delta}\right) + \frac{1}{16\pi^2\Delta^2}, \quad (7.10)$$

que para $|z| \gg \Delta$ tem a forma de

$$\langle D^+(z) \rangle_q \sim -\frac{1}{16\pi^2 z^2} - \frac{3\Delta^2}{16\pi^2 z^4} + \dots \quad (7.11)$$

enquanto que para $z \rightarrow 0$

$$\langle D^+ \rangle_q \rightarrow \frac{1}{16\pi^2\Delta^2}, \quad (7.12)$$

ou seja, é finito. Assim vemos que o efeito da flutuação é o de tornar $\langle \phi^2 \rangle_q$ finito para todo z , como pode ser visto pela figura 7.1.

Para calcular a densidade de energia para o campo escalar com acoplamento mínimo, usaremos que

$$\langle \rho \rangle_q = \frac{1}{2} \lim_{\mathbf{x}', t' \rightarrow \mathbf{x}, t} (\partial_t \partial_{t'} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}'}) \langle D^+(x, x') \rangle_q, \quad (7.13)$$

e uma repetição do procedimento usado acima nos leva a

$$\langle \rho \rangle_q = \frac{-1}{2(2\pi)^3} \lim_{\mathbf{x}', t' \rightarrow \mathbf{x}, t} \text{Re} \left(\int \frac{d^3k}{w} (w^2 - k_z^2) e^{i\mathbf{k}_t \cdot (\mathbf{x}_t - \mathbf{x}'_t)} e^{-iw(t-t')} e^{ik_z(z+z')} \langle e^{-2ik_z q} \rangle_q \right), \quad (7.14)$$

¹Notemos que essa expressão é real, pois $\Phi(ix) = \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$.

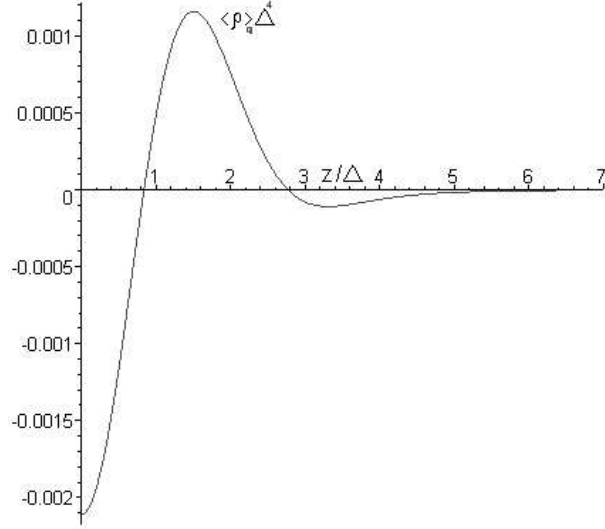


Figura 7.2: Gráfico de $\langle \rho \rangle_q \Delta^4$ por z/Δ .

onde a escolha de uma função gaussiana para $f(q)$ nos leva, após uma integração parecida com a feita anteriormente, a

$$\langle \rho \rangle_q = \frac{1}{192\pi^2\Delta^7} \left[\sqrt{2\pi}z(z^2 - 3\Delta^2)e^{-z^2/(2\Delta^2)}i\Phi\left(i\frac{z}{\sqrt{2}\Delta}\right) + 2\Delta(z^2 - 2\Delta^2) \right], \quad (7.15)$$

que longe do espelho ($z \gg \Delta$) assume a forma

$$\langle \rho \rangle_q \sim -\frac{1}{16\pi^2z^4} + \dots \quad (7.16)$$

e perto do espelho ($z \rightarrow 0$) é *finito*:

$$\langle \rho \rangle_q \rightarrow -\frac{1}{48\pi^2\Delta^4}. \quad (7.17)$$

O comportamento de $\langle \rho \rangle_q$ para z arbitrário está descrito na figura 7.2. Assim, vemos que a consideração da flutuação do contorno no cálculo da energia de vácuo elimina a divergência que ocorria sobre o espelho no cálculo padrão (cap. 6), mantendo ainda esse resultado padrão para distâncias grandes em comparação ao desvio médio da posição do espelho. Esse é o resultado principal do trabalho de Ford e Svaiter.

Veja que de certa forma ocorre uma reconciliação entre o resultado para o campo escalar de acoplamento mínimo com flutuações na posição do contorno e o resultado para o campo de acoplamento conforme (que já não apresentava divergências mesmo sem considerar flutuações) no sentido de que pode-se mostrar pela eq. (7.15) que

$$\int_0^\infty dz \langle \rho_{\text{mínimo}} \rangle_q = \int_0^\infty dz \rho_{\text{conforme}} = 0. \quad (7.18)$$

É certo que a massa de espelhos reais em situações usuais é grande o suficiente para fazer com que a incerteza Δ na posição seja muito pequena. Nesse caso é de se esperar que o “cutoff” para comprimentos de onda menores que λ_p , o comprimento de onda característico do plasma, seja o efeito dominante, e que o tratamento destes espelhos seja melhor descrito por métodos que levem em conta as propriedades dielétricas do material. Assim, enquanto $\lambda_p \gg \Delta$, os efeitos de flutuação podem ser ignorados. Porém, se pudéssemos preparar um espelho em um estado quântico tal que $\Delta > \lambda_p$, é razoável supor que o tratamento proposto aqui se torne um efeito importante. Como posto no início, nosso interesse principal no estudo desse método é analisar espelhos, mais especificamente configurações de Casimir, que se encontrem justamente na interface entre algo clássico e quântico, que é onde a discussão sobre a energia total toma maior importância. Então nos dedicaremos agora a mostrar como tratar o efeito Casimir com flutuações.

7.1.1 Efeito Casimir e flutuações.

A função de Wightman para o efeito Casimir, eq. (6.21), assumia dois espelhos separados por uma distância L ; generalizando-a para uma configuração em que um espelho está na posição η e outro em σ , obteremos

$$D_{\text{Ren}}^+(x, x') = -\frac{1}{4\pi^2} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - [z - z' + 2m(\sigma - \eta)]^2} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - [z + z' + 2m\sigma - 2(m+1)\eta]^2} \right] \quad (7.19)$$

Seguindo os passos conhecidos, escrevemos $D_{\text{Ren}}^+(x, x')$ em termos de sua transformada de Fourier

$$D_{\text{Ren}}^+(x, x') = \frac{1}{2(2\pi)^3} \text{Re} \int \frac{d^3k}{w} e^{i\mathbf{k}_t \cdot (\mathbf{x}_t - \mathbf{x}'_t)} e^{-iw(t-t')} \times \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' e^{ik_z[z - z' + 2m(\sigma - \eta)]} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{ik_z[z + z' + 2m\sigma - 2(m+1)\eta]} \right]. \quad (7.20)$$

Assumindo que os dois espelhos constituam um sistema interagente descrito por uma função de onda $\Psi(\eta, \sigma)$, sua distribuição de probabilidades será dada por

$$f(\eta, \sigma) = |\Psi(\eta, \sigma)|^2 \quad (7.21)$$

com $\int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma |\Psi(\eta, \sigma)|^2 = 1$, e uma função qualquer $G(\eta, \sigma)$ terá seu valor médio sobre a posição dado por

$$\langle G(\eta, \sigma) \rangle_{\eta, \sigma} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta d\sigma G(\eta, \sigma) f(\eta, \sigma). \quad (7.22)$$

Assim, o valor médio da função de Wightman será dado por

$$\langle D_{\text{Ren}}^+(x, x') \rangle_{\eta, \sigma} = \frac{1}{2(2\pi)^3} \text{Re} \int \frac{d^3k}{w} e^{i\mathbf{k}_t \cdot (\mathbf{x}_t - \mathbf{x}'_t)} e^{-iw(t-t')} \\ \times \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \langle e^{ik_z[z-z'+2m(\sigma-\eta)]} \rangle_{\eta, \sigma} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \langle e^{ik_z[z+z'+2m\sigma-2(m+1)\eta]} \rangle_{\eta, \sigma} \right]. \quad (7.23)$$

Usando novamente a eq. (7.13), e omitindo várias passagens trabalhosas, achamos a densidade de energia de Casimir para uma função de distribuição de probabilidade arbitrária:

$$\langle \rho \rangle_{\eta, \sigma} = \langle \rho_1 \rangle_{\eta, \sigma} + \langle \rho_2 \rangle_{\eta, \sigma} \quad (7.24)$$

onde

$$\langle \rho_1 \rangle_{\eta, \sigma} = -\frac{1}{1440\pi^2} \left\langle \frac{1}{(\sigma - \eta)^4} \right\rangle_{\eta, \sigma} \quad (7.25)$$

e

$$\langle \rho_2 \rangle_{\eta, \sigma} = -\frac{\pi^2}{48} \left\langle \frac{3 - 2 \sin^2 \left[\frac{\pi(z+\sigma+\eta)}{\sigma-\eta} \right]}{(\sigma - \eta)^4 \sin^4 \left[\frac{\pi(z+\sigma+\eta)}{\sigma-\eta} \right]} \right\rangle_{\eta, \sigma}, \quad (7.26)$$

que são o resultado central para nossa discussão.

Veja que a forma funcional das eqs. (7.25) e (7.26) guarda estreita semelhança com a eq.(6.23). É claro que para uma distribuição de probabilidade tipo delta de Dirac $f(\eta, \sigma) = \delta(\sigma)\delta(\eta - L)$ recuperamos exatamente a eq.(6.23),

$$\langle \rho_1 \rangle_{\eta, \sigma} = -\frac{1}{1440\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} d\eta d\sigma \frac{\delta(\sigma)\delta(\eta - L)}{(\sigma - \eta)^4} = -\frac{1}{1440\pi^2 L^4}. \quad (7.27)$$

É claro que uma distribuição de probabilidade tipo delta de Dirac é um limite no qual as flutuações das placas são suprimidas. O fato desse limite nos retornar ao resultado padrão é um indicativo de consistência do procedimento adotado aqui para se incorporar flutuações ao cálculo da energia de vácuo do campo.

Regularização da densidade de energia. Há uma sutileza na realização da integral na eq. (7.27) que precisa ser melhor esclarecida. O resultado expresso nessa equação utiliza-se tão somente da “regra” padrão para se realizar integrais com funções delta de Dirac,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) = f(0), \quad (7.28)$$

regra essa que tem sua justificação formal na Teoria de Distribuições [61]. Basicamente, deve-se tomar o cuidado de não interpretar $\delta(x)$ como uma função ordinária

que esteja sujeita a uma medida de integração Riemanniana, e sim como um limite de funções $F_n(x)$, tal que uma integral como $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)$ deva ser entendida como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)F_n(x). \quad (7.29)$$

Para funções $f_a(x)$ analíticas, esse procedimento resultará na regra (7.28) de modo trivial. Porém, para funções $f_p(x)$ que possuam polos no limite de integração, é necessário ter cuidados adicionais. É possível que o limite (7.29) nesses casos retorne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_p(x)F_n(x) = f(0) + \mathcal{D}, \quad (7.30)$$

onde \mathcal{D} é uma quantidade que diverge. A origem dessa divergência se deve ao fato de que as funções $F_n(x)$, cujo limite representam $\delta(x)$, possuem um contradomínio que intercepta a região dos polos de $f_p(x)$.

Assim, se fizermos a integral (7.27) utilizando um procedimento como (7.29), chegaremos ao resultado padrão mais um termo que diverge. Para conciliar esse resultado com a regra de Dirac (7.28), temos que descartar esse termo divergente. Colocando a questão de outra forma, estamos utilizando integrais, como nas eqs. (7.25), (7.26), que tem sua origem em um procedimento aparentemente natural, porém ainda sim arbitrário, de se incorporar flutuações do contorno ao cálculo da energia de vácuo. Como resultado, chegamos a integrais que possuem polos e divergem. Para compatibilizar tal procedimento com o cálculo padrão (sem flutuações do contorno), devemos proceder a uma “regularização”². Em última análise, a justificativa para tal é *física* - reobter resultados conhecidos a partir do procedimento que adotamos. Vemos assim que a imposição da equação (7.27) é um vínculo pelo qual tornamos todo o procedimento apresentado aqui consistente.

A discussão acima pode parecer despropositada em se tratando de um exemplo simples como o tomado na eq. (7.27), mas sua importância se torna clara para outras distribuições de probabilidade $f(\sigma, \eta)$ mais gerais, pois nesse caso as divergências mencionadas se manifestariam explicitamente.

Uma maneira prática de se realizar a regularização de (7.25), (7.26) é usar o teorema do Valor Principal Generalizado [57, 62] para polos de ordem maior que 1. Em resumo, isso significa que usamos identidades da forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\eta \frac{f(\eta)}{(\eta - L)^4} = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \frac{f'(\eta)}{(\eta - L)^3} = \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \frac{f''(\eta)}{(\eta - L)^2} = \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \frac{f'''(\eta)}{(\eta - L)}, \quad (7.31)$$

sendo que sobre a última integral, que tem polo simples, podemos usar o teorema do valor principal [61]. Note que na equação acima assumimos que $f(\eta)$ é de classe C^3 . Nas aplicações apresentadas aqui, essa será uma condição fácil de se atender

²Tomamos o nome emprestado do procedimento análogo comum em cálculos de teoria quântica de campos ao se regularizar integrais divergentes.

tendo em vista que tais distribuições de probabilidade terão origem em soluções da equação de Schrödinger (ver §7.2).

Temos, enfim, o resultado de que para o efeito Casimir sujeito a flutuações do contorno, a densidade de energia é dada pelas eqs. (7.25) e (7.26). Mostramos logo acima, com exemplos específicos, que o efeito das flutuações para o caso de espelhos simples é o de retirar a divergência que ocorre sobre o contorno. Esse resultado, a eliminação das divergências pela flutuação, é a conclusão final do trabalho de Ford e Svaiter. Porém, interessa-nos ainda a questão da densidade de energia estática negativa, que a princípio continua a existir mesmo com a flutuação. Para poder abordar esse problema, precisamos adotar um modelo específico que descreva a configuração de Casimir, do qual se possa obter uma distribuição de probabilidade para o cálculo das eqs. (7.25) e (7.26). Iremos nos dedicar agora a apresentar tal modelo.

7.2 Um modelo para configuração de Casimir em primeira quantização

Desde que introduzimos o conceito de contornos sujeitos a flutuações espaciais, na seção anterior, o fizemos usando a idéia de que tais flutuações seriam descritas por uma distribuição de probabilidade $f(q)$. A conexão desse modelo com mecânica quântica se faz no momento em que se assume que tal distribuição seja dada por uma função de onda $\Psi(q)$ que atenda a equação de Schrödinger, de modo que

$$f(q) = |\Psi(q)|^2. \quad (7.32)$$

Colocando em perspectiva o discutido antes, lembramos que as desigualdades quânticas são obtidas tão somente no contexto de teoria quântica de campos livres. Para campos interagentes, não se conhece teoremas de desigualdades quânticas. Sabemos, porém, como demonstrado em §5.3.1, que em um modelo que misture um campo quantizado, mas com placas e suporte descritos classicamente, não há desigualdades. O que estamos fazendo então é um passo além em relação ao modelo de §5.3.1: estamos mantendo um campo em “segunda quantização”, ou seja, com o aparato de teoria quântica de campos por inteiro, mas assumimos agora um sistema de placas e suporte em “primeira quantização”, ou seja, descritos por mecânica quântica não-relativística. Assim, nossa tarefa é achar um modelo clássico que descreva a placa e o suporte, para então quantizá-lo.

Vamos assumir que as placas e o suporte possam ser representados por duas partículas de massa m , de posição η e σ que interagem por meio de um potencial quadrático (um oscilador harmônico). Pode-se visualizar esse sistema através da figura 5.3, com o suporte substituído por uma “mola”.

O potencial de interação é dado por

$$V = \frac{mw_s^2}{2}((\sigma - \eta) - a)^2, \quad (7.33)$$

sendo w_s a frequência característica de uma “mola” que representa a interação, a o seu comprimento natural onde o potencial é mínimo, e assumimos sua massa da ordem da massa das placas. Como a força de Casimir tende a unir as placas, vemos que o deslocamento da “mola” de seu comprimento natural cria uma força que permite ao sistema chegar a uma situação de equilíbrio de forças. Assim, o potencial faz o papel do suporte, e as partículas em η e σ o papel das placas. A escolha desse modelo se justifica por: (i) embora simples, possui o comportamento necessário para gerar o equilíbrio, (ii) a sua quantização pode ser feita facilmente.

A Hamiltoniana desse sistema será

$$\mathcal{H} = \frac{P_\eta^2 + P_\sigma^2}{2m} + \frac{mw_s^2}{2}((\sigma - \eta) - a)^2 + E_{\text{vacuo}}(\sigma - \eta), \quad (7.34)$$

sendo P_η e P_σ o momento associado às placas e $E_{\text{vacuo}}(\sigma - \eta)$ a energia de vácuo do campo entre as placas (ver discussão abaixo), que por argumentos de simetria só pode ser função da distância entre as placas. Podemos fazer uma mudança de variáveis

$$\begin{aligned} \sigma - \eta &= x, \\ \sigma + \eta &= y, \end{aligned} \quad (7.35)$$

tal que

$$\mathcal{H} = \frac{P_x^2 + P_y^2}{2m_t} + \frac{mw_s^2}{2}(x - a)^2 + E_{\text{vacuo}}(x), \quad (7.36)$$

com $m_t = 2m$. Vemos que o sistema é separável em uma Hamiltoniana de uma partícula livre (que representa o centro de massa das placas) e de um sistema ligado. Ao quantizá-lo mediante a regra padrão (para coordenadas cartesianas) $P_i \rightarrow \hat{P}_i = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}$ teremos uma função $\Psi(x, y)$ que obedece à equação de Schrödinger independente do tempo

$$H\Psi(x, y) = E\Psi(x, y), \quad (7.37)$$

$$H = H_{\text{C.M.}} + H_l, \quad (7.38)$$

sendo

$$H_{\text{C.M.}} = \frac{\hat{P}_y^2}{2m_t}, \quad (7.39)$$

$$H_l = \frac{\hat{P}_x^2}{2m_t} + \frac{mw_s^2}{2}(x - a)^2 + E_{\text{vacuo}}(x). \quad (7.40)$$

O fato do sistema ser separável implica em

$$\Psi(x, y) = K(y)\psi(x), \quad (7.41)$$

onde $K(y)$ obedece à eq. de Schrödinger de uma partícula livre

$$-\frac{1}{2m_t} \frac{\partial^2}{\partial y^2} K(y) = E_{\text{cin}} K(y), \quad (7.42)$$

$$E_{\text{cin}} = \frac{P_y^2}{2m_t}, \quad (7.43)$$

de modo que $K(y)$ pode ser descrita por ondas planas, e $\psi(x)$ atende

$$\left[-\frac{1}{2m_t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{mw_s^2}{2} (x-a)^2 + E_{\text{vacuo}}(x) \right] \psi(x) = E_l \psi(x). \quad (7.44)$$

A energia total será a soma da cinética e do estado ligado

$$E = E_l + E_{\text{cin}}, \quad (7.45)$$

onde, adotando o referencial do centro de massa do sistema, podemos sem perda de generalidade considerar $E_{\text{cin}} = 0$.

Resolver o modelo então se resume agora a achar soluções para eq. (7.44). Para tanto temos que tocar em uma questão que postergamos até aqui: o que exatamente representa E_{vacuo} ? É claro que se trata da energia de vácuo do campo sujeito a condição de contorno. Porém, o objetivo do modelo apresentado aqui é justamente o de se achar uma função de onda para podermos *calcular* E_{vacuo} . Assim, criamos um sistema não linear de difícil solução, no qual precisamos de E_{vacuo} para calcular $\psi(x)$ na equação (7.44), ao mesmo tempo em que precisamos de $\psi(x)$ para calcularmos a densidade de energia na eq. (7.25), que integrada no espaço retorna E_{vacuo} . Colocando a questão de outro modo, e tomando de exemplo um campo de acoplamento conforme (cuja densidade de energia é dada somente pela eq. (7.25)), temos que a solução do modelo resume-se a resolver a equação integro-diferencial

$$\left[-\frac{1}{2m_t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{mw_s^2}{2} (x-a)^2 - \frac{A}{1440\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\psi(\xi)|^2}{\xi^4} d\xi \right] \psi(x) = E_l \psi(x), \quad (7.46)$$

lembrando que A é a área das placas em nosso modelo. Uma possível solução é adotar um procedimento iterativo, no qual se parte, por exemplo, de um dado E_{vacuo} , que inserido em (7.44) nos fornece uma primeira forma para $\psi(x)$, cuja inserção na eq. (7.25) nos retorna outro E_{vacuo} , de onde se pode recomeçar todo processo.

7.2.1 Resolvendo o modelo

Ainda assumindo um campo escalar de acoplamento conforme, note-se que sua densidade de energia de Casimir, sem consideração de flutuações, é dada por

$$\langle 0|\rho|0\rangle = -\frac{1}{1440\pi^2\xi^4}, \quad (7.47)$$

enquanto sua densidade de energia com consideração de flutuações $\langle \rho_c \rangle_{\eta, \sigma}$, após cálculo análogo ao realizado para o campo de acoplamento mínimo que resultou nas eqs. (7.25), (7.26), é dada por

$$\langle \rho_c \rangle_{\eta, \sigma} = -\frac{1}{1440\pi^2} \left\langle \frac{1}{(\sigma - \eta)^4} \right\rangle_{\eta, \sigma}. \quad (7.48)$$

Veja que, embora os passos seguidos para se chegar às eqs. (7.25), (7.26), (7.48) - que basicamente resumiu-se a usar $\langle D_{ren}^+(x, x') \rangle_{\sigma, \eta}$ ao invés de $D_{ren}^+(x, x')$ - sejam próprios do procedimento delineado por Ford e Svaiter, o resultado a que chegamos guarda analogia com um resultado bem conhecido de teoria de perturbações em mecânica quântica: dado um hamiltoniano $H = H_0 + H_p$ em que H_0 é o hamiltoniano de um sistema de solução $|\Psi_0\rangle$ conhecida com energia E_0 e H_p uma perturbação, a primeira correção E_1 à energia total do sistema $E = E_0 + E_1$ será dada por $E_1 = \langle \Psi_0 | H_p | \Psi_0 \rangle$.

Tal analogia nos motiva a adotar o seguinte procedimento. Resolveremos o sistema expresso pela eq. (7.46) desconsiderando o termo de energia de vácuo, ou seja, resolveremos o sistema

$$\left[-\frac{1}{2m_t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{mw_s^2}{2}(x - a)^2 \right] \psi(x) = E_l \psi(x), \quad (7.49)$$

e com a função de onda obtida calcularemos a energia de Casimir sujeita a flutuações, eq. (7.48). Isso corresponde, dentro do procedimento iterativo mencionado acima, a adotar a solução da eq. (7.49) como a iteração inicial. Note-se que, além da analogia mencionada acima, há outra justificativa para adotar essa abordagem. Se ignorarmos por um momento a introdução de efeitos de flutuação, teremos que a energia de Casimir padrão contribuirá da seguinte maneira

$$\left[-\frac{1}{2m_t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{mw_s^2}{2}(x - a)^2 - \frac{A}{1440\pi^2 x^3} \right] \psi(x) = E_l \psi(x). \quad (7.50)$$

Da qual pode-se definir um potencial efetivo V_{ef} como

$$V_{ef} = \frac{mw_s^2}{2}(x - a)^2 - \frac{A}{1440\pi^2 x^3} = \left[\frac{mw_s^2}{2}(x - a)^2 - \frac{A\hbar c}{1440\pi^2 x^3} \right]_{\text{S.I.}}, \quad (7.51)$$

onde retomamos unidades S.I. no lado direito. A situação que nos interessa é aquela em que não somente possa haver equilíbrio estável de forças, mas também aquela em que os parâmetros m e w_s tornem o potencial harmônico comparável ao que varia com $1/x^3$. É nessa situação que manifestam-se efeitos devido a descrição quantizada das placas e do suporte. Assim, se partirmos de um oscilador harmônico (que representa placas e suporte) clássico, e.g. de comprimento de de Broglie desprezível nas escalas do problema, e formos adaptando sua massa (ou seja, seu comprimento de de Broglie) até chegarmos a um regime em que os potenciais harmônico e de Casimir sejam comparáveis, estaremos em uma situação onde o potencial efetivo tomará a forma da figura 7.3. Por tal figura, fica explícito que na região do mínimo local, que

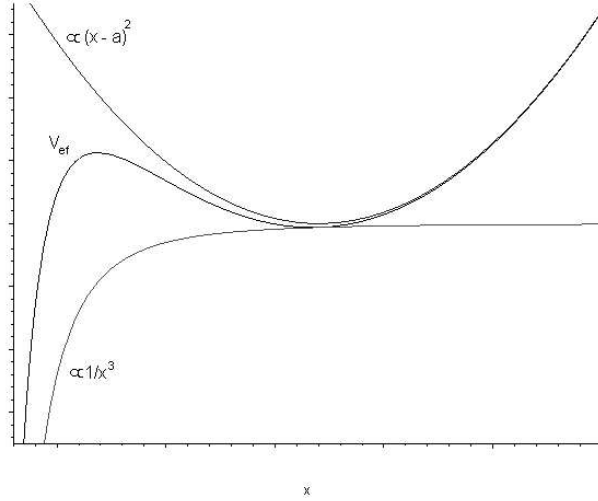


Figura 7.3: Esquema de V_{ef} na região em que o potencial harmônico e o de Casimir (ver 7.51) são comparáveis.

corresponde ao equilíbrio, é razoável que se possa ajustar um potencial harmônico como aproximação, justificando o uso da eq. (7.49) como primeira aproximação para $|\psi(x)\rangle$.

A solução da eq. (7.49) é simplesmente a de um oscilador harmônico deslocado da origem por uma distância a ,

$$\psi_n(x) = \frac{e^{-\frac{(x-a)^2}{2d}}}{\sqrt{n!2^n d\pi^{\frac{1}{2}}}} H_n\left(\frac{x-a}{d}\right), \quad (7.52)$$

onde

$$d \equiv \sqrt{\frac{1}{mw_s}} \equiv_{\text{s.i.}} \sqrt{\frac{\hbar}{mw_s}}, \quad (7.53)$$

e $H_n(\frac{x-a}{d})$ são polinômios de Hermite de ordem n , tal que n enumera os auto-estados de energia do oscilador harmônico $E_0 = \hbar w_s(n + 1/2)$.

Cálculo da energia de vácuo sob flutuações

Inserindo a eq. (7.52) em (7.48), obtemos enfim uma primeira expressão para a densidade de energia do vácuo sujeito às flutuações do contorno induzidas por nosso modelo,

$$\langle \rho_c(n) \rangle_{n,\sigma} = -\frac{1}{1440\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{|\psi(x)|^2}{x^4} = -\frac{1}{1440\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-\frac{(x-a)^2}{d}}}{x^4 n! 2^n d\pi^{\frac{1}{2}}} H_n^2\left(\frac{x-a}{d}\right). \quad (7.54)$$

Note-se que há uma dependência explícita de $\langle \rho_c(n) \rangle_{\eta, \sigma}$ com o estado n de energia do oscilador que representa as placas, o que é de se esperar, uma vez que diferentes auto-estados representam diferentes flutuações do contorno.

Antes de se realizar o cálculo da integral, é importante olhar novamente a figura 7.3 e rever as aproximações usadas para se chegar à eq. (7.54). Fica claro que o oscilador deve manter-se perto do seu estado fundamental para que tais aproximações continuem válidas, uma vez que um oscilador muito excitado explora as regiões mais distantes do mínimo do potencial com mais frequência - região essa que não está representada ao tomar-se a eq. (7.52) como solução inicial de (7.46). Assim, é de se esperar que enquanto nos concentramos no estado fundamental, não é necessário realizar mais iterações para melhor aproximar-se das verdadeiras soluções de (7.46). Outro motivo para manter-se no estado fundamental é o fato de que estamos interessados aqui em configurações que, embora contenham efeitos quânticos, ainda mantenham-se próximas da visualização que fazemos do efeito Casimir: duas placas condutoras separadas por alguma distância. Lembrando que a coordenada $x = \sigma - \eta$ acima representa a distância entre duas placas de posição σ e η , é razoável escolher um estado $\psi(x)$ cuja distribuição de probabilidade esteja majoritariamente na região próxima de a , o comprimento natural da “mola”. Sendo assim, nos concentraremos no estado $n = 0$.³ Veja que para este estado o valor médio de x é

$$\langle x \rangle = a. \quad (7.55)$$

A eq. (7.54) especializa-se para

$$\langle \rho_c(n = 0) \rangle_{\eta, \sigma} = -\frac{1}{1440\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-\frac{(x-a)^2}{d^2}}}{d\pi^{\frac{1}{2}}x^4}, \quad (7.56)$$

pois $H_0(x) = 1$. É claro agora que (7.56) possui polos e, aparentemente, diverge, o que já havia sido antecipado em §7.1.1. Usaremos então o teorema do valor principal generalizado, pelo uso de (7.31), para separar a divergência não-física dessa integral, de modo a obter que

$$\langle \rho_c \rangle_{\eta, \sigma} = \frac{1}{1440\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 e^{-\frac{(x-a)^2}{d^2}} (x-a)(2x^2 - 4xa + 2a^2 - 3d^2)}{d^7 \sqrt{\pi} x} dx. \quad (7.57)$$

Resolvendo essa integral teremos que

³Como estamos interessados no regime semi-clássico do modelo, o leitor mais atento poderia argumentar que a escolha natural do estado $\psi(x)$ seria um estado coerente, que é a representação usual para o limite clássico do osc. harmônico [31]. Porém, estados coerentes são dependentes do tempo, e estamos interessados no efeito Casimir *estático*. Além disso, montar um estado coerente aqui faria uso de auto-funções com $n \gg 0$, sendo inconsistente com as aproximações usadas para derivar (7.52).

$$\langle \rho_c \rangle_{\eta, \sigma} = -\frac{1}{1440\pi^2} \left[\frac{4}{3} \frac{1}{d^4} - \frac{4}{3} \frac{a^2}{d^6} + \frac{2e^{-\frac{a^2}{d^2}} a \sqrt{\pi} i \Phi(i\frac{a}{d})}{d^5} - \frac{4}{3} \frac{e^{-\frac{a^2}{d^2}} a^3 \sqrt{\pi} i \Phi(i\frac{a}{d})}{d^7} \right]. \quad (7.58)$$

Essa equação é nosso resultado principal nessa seção. Lembrando, a é um parâmetro intrínseco do modelo, que para $\psi(x)$ escolhido nos dá exatamente a distância média entre as placas. Uma configuração de Casimir padrão (sem flutuações do contorno) que possua a como distância entre suas placas apresenta densidade de energia

$$\rho_{\text{pad}} = -\frac{1}{1440\pi^2 a^4}, \quad (7.59)$$

que deve ser comparada com (7.58). Veja que (7.58) possui um parâmetro a mais em relação a (7.59), $d = \sqrt{\frac{\hbar}{mw_s}}$, que é o que nos dá a escala do modelo. Algumas restrições a d devem ser impostas, pois a aproximação de um modelo em primeira quantização para o sistema de placas e suporte tem limites de validade. Por exemplo, definindo uma frequência w_p associada à energia inercial do sistema $E \cong mc^2 = \hbar w_p$, sabe-se que o modelo primeiro-quantizado só deve ser válido enquanto $w_s \ll w_p$, o que pela eq. (7.53) implica que

$$d \gg \frac{\hbar}{mc}. \quad (7.60)$$

Embora a e d sejam, a priori, parâmetros independentes, é justamente a relação a/d que qualifica a passagem do modelo de seu regime clássico para o quântico. Para ver isso, note-se que

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \frac{d}{\sqrt{2}}, \quad (7.61)$$

e que nossa imagem do efeito Casimir padrão envolve duas placas distanciadas entre si. Para que essa imagem tenha algum significado em um modelo quantizado, é necessário que o valor médio da distância entre as placas seja maior que o desvio médio dessa distância. Caso contrário a própria idéia de duas placas separadas perde sentido. Ou seja, o efeito Casimir padrão deve ser recuperado por

$$\langle x \rangle \gg \Delta x \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{por (7.55), (7.61)}} \quad a \gg d \rightarrow \frac{a}{d} \gg 1. \quad (7.62)$$

Veja que levar essa condição à eq. (7.56) é equivalente a tomar umas das possíveis representações da função delta de Dirac [61], de modo que naturalmente o resultado (7.59) é recuperado.

Em última análise, a dependência em $1/a^4$ de (7.59) é a responsável pelo resultado encontrado em §5.3.1, ou seja, o fato de se conceber configurações tipo Casimir capazes de possuírem energia total negativa advém do caráter ilimitado

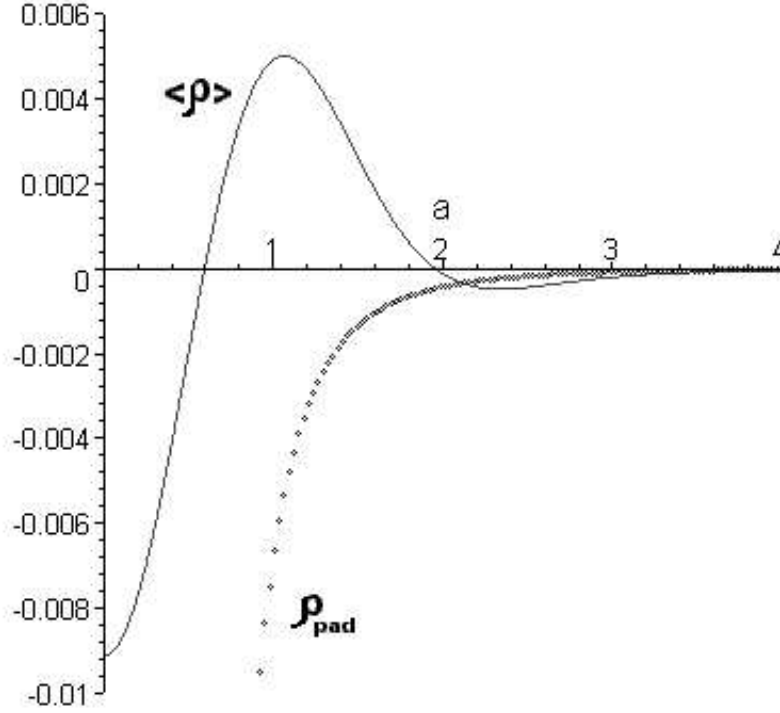


Figura 7.4: Gráfico de $\langle \rho_c \rangle_{\eta, \sigma}$, eq. (7.58) com $d = 1$, e ρ_{pad} , eq. (7.59).

que $1/a^4$ assume no limite $a \rightarrow 0^4$, superando qualquer energia positiva que tenha origem na massa das placas e suporte. O objetivo de toda análise apresentada aqui é tentar entender o que efeitos quânticos podem trazer a essa discussão. Tentaremos responder essa questão por duas diferentes maneiras:

1. Podemos adotar a posição de que a massa m e a frequência característica do suporte w_s são parâmetros fixos externos ao problema, logo d é fixado desde o início. Na figura 7.4 fixamos $d = 1$, sem perda de generalidade, e variamos a . Veja que distinguem-se claramente dois comportamentos. Para $a \gg 1$ (que na figura corresponde à região $a \geq 4$), a dependência funcional da densidade de energia sujeita a flutuações, eq. (7.58), aproxima-se cada vez mais da de (7.59), o que se vê analisando em maiores detalhes a região $a \geq 4$, como visto na figura 7.5, onde o resultado padrão de Casimir emerge gradualmente.

Para a região em que $a \approx 1$, que corresponde justamente ao regime semi-clássico onde efeitos quânticos emergem, temos que a dependência funcional de (7.58) não só difere muito de (7.59), como pode assumir inclusive valores

⁴Note-se que essa constatação nada tem haver com a discussão de divergências contida no trabalho inicial de Ford e Svaiter. Lá tratavam-se de divergências da densidade de energia quando z aproximava-se das placas. Agora, aqui, falamos de densidades de energia *finitas* para todo z , mas cuja dependência com o fator $1/a^4$ as tornam ilimitadas para $a \rightarrow 0$.

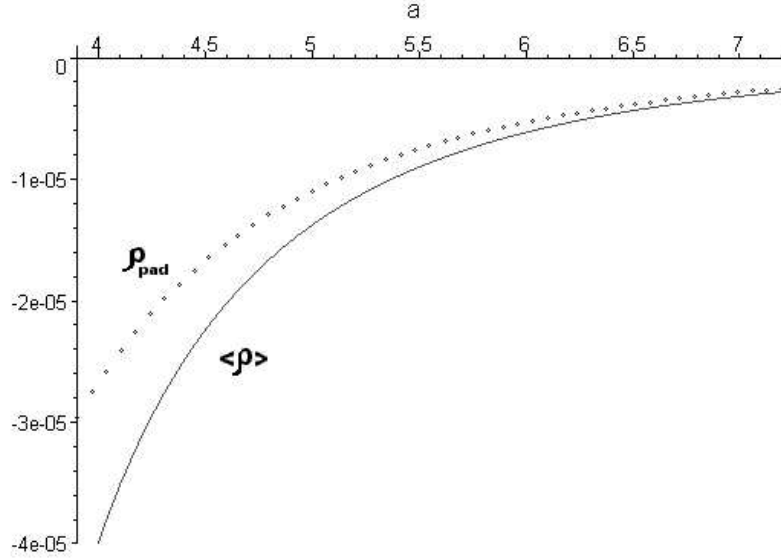


Figura 7.5: Ampliação da figura 7.4.

positivos. Assim, conforme efeitos de flutuação das placas tornam-se presentes, o caráter ilimitado que o resultado padrão de Casimir possuía vai se desfigurando.

O regime $a \ll 1$ já pertence a uma região exclusivamente quântica que, a princípio, não deve ser muito bem descrita por nosso modelo, como evidenciado, por exemplo, por limites tais como (7.60). Porém, vale notar que o modelo indica que a tendência dessa região é a de abordar um limite fixo, que é o oposto do comportamento de (7.59), como explícito na figura 7.4.

2. Embora nosso modelo assumira a e d como parâmetros independentes, essa é uma suposição não necessariamente verdadeira no caso geral. De fato, é possível supor que para uma “mola” macroscópica comum seu comprimento natural guarde relações com sua massa e frequência característica. Modelar tais relações já é um problema de física de materiais em separado, e encontrar um modelo quantizado com tais propriedades iria muito além da proposta simples que apresentamos aqui. Porém, ao menos como aproximação heurística, é possível simular tal efeito ao colocar-se d em função de a . Da maneira mais simples, podemos fazer

$$d(a) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\hbar}{mw_s}} & (a \leq a_0) \\ Ka & (a > a_0), \end{cases} \quad (7.63)$$

em que K e a_0 sejam constantes. Espera-se que para $K \ll 1$ recuperemos o efeito Casimir padrão. A figura 7.6 compara as eqs. (7.58) e (7.59), para diferentes valores de K . Vemos que conforme d se torna menor que a , o resultado padrão emerge, enquanto que para $d \approx a$, que é a região onde efeitos semi-clássicos manifestam-se, a densidade de energia sujeita a flutuações adquire

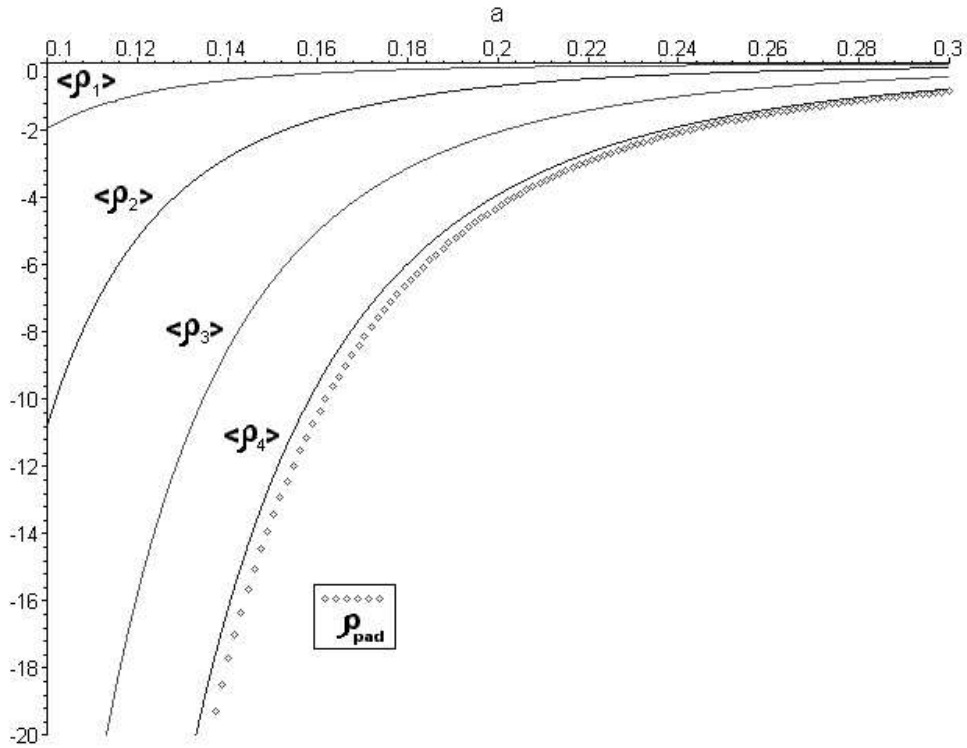


Figura 7.6: Comparação entre $\langle \rho_c \rangle_{\eta, \sigma}$, com $d(a)$ dado por (7.63) com diferentes valores de K , e ρ_{pad} . Cada $\langle \rho_i \rangle$ ($i = 1, 2, 3, 4$) corresponde a $K = 1/1.96, 1/1.98, 1/2.03$ e $1/2.1$, respectivamente. Por ilustração fez-se $a_0 = 0.1$.

caráter limitado. Assim, vemos que por essa outra abordagem chegamos às mesmas conclusões do item 1 acima.

Enfim, encerramos essa discussão enfatizando o resultado conseguido através de (7.58): A introdução de efeitos de mecânica quântica, em primeira quantização, na descrição das placas e do suporte altera o efeito Casimir de modo a *impedir* que se consiga uma configuração tipo Casimir de energia total negativa. Na análise em que placas e suporte são tratados classicamente, a energia de vácuo entre as placas, negativa, tem a propriedade de ser capaz de superar a energia positiva das placas conforme se diminua a distância entre as mesmas. Nossa análise em primeira quantização feita aqui demonstra que essa é uma visão ingênua, que deve ser substituída pela imagem de que, conforme a distância entre as placas diminua ao ponto em que efeitos de mecânica quântica manifestem-se - o mais simples desses efeitos, a flutuação da posição das placas - a energia de vácuo do campo é alterada de forma a impossibilitar energias negativas ilimitadas. Essa conclusão parece ser confiável ao menos no regime semi-clássico do modelo e, ao nosso conhecimento, como apresentada aqui, é uma contribuição própria.

Em comparação com os teoremas de desigualdades quânticas desenvolvidos no capítulo 4, nosso resultado é mais fraco no sentido de que estamos misturando um modelo que trata o campo escalar em segunda quantização enquanto mantém as placas e suporte em primeira quantização. Porém, tal aproximação já se mostra suficiente para eliminar eventuais paradoxos que poderiam ser construídos usando-se um conjunto de “caixas de Casimir”.

Capítulo 8

Conclusão

Vamos colocar em perspectiva o exposto nos capítulos anteriores. Podemos dividir a apresentação em duas partes: (i) A primeira, que compreende os capítulos 3, 4 e 5, introduz sistemas físicos que apresentam densidades ou fluxos de energia negativa, e esclarece como alguns desses sistemas dão origem a desigualdades quânticas que limitam suas energias negativas. Alguns exemplos de como essas desigualdades quânticas podem limitar a violação de leis físicas foram fornecidos, assim como foram apresentados exemplos de sistemas que não atendem a nenhuma forma de desigualdade quântica. Não houve a pretensão de se dar uma exposição completa ao tema das desigualdades quânticas, mas sim de colocá-lo em um contexto geral, cujo objetivo é entender como energias negativas manifestam-se e como tais manifestações podem (ou não) serem limitadas pela própria teoria. (ii) A segunda parte, que compreende os capítulos 7 e 8, teve por objetivo atacar, por outros meios, um sistema físico que não apresenta desigualdades quânticas: o efeito Casimir. Como visto, as desigualdades quânticas mostram-se válidas para campos livres, mas não se conhecem resultados análogos para campos interagentes. Em última instância, espera-se que o efeito Casimir seja resultado final de uma interação entre o campo eletromagnético e campos fermiônicos (que representem as placas). Não sendo conhecidas desigualdades quânticas para sistemas interagentes, nada pode-se dizer do efeito Casimir por primeiros princípios (ou seja, usando-se somente teoria quântica de campos). Assim, abordamos o problema pelo uso de um modelo que mistura TQC (para descrever o campo entre as placas) e mecânica quântica não relativística (para descrever as placas). O resultado encontrado foi o de que nesse modelo não há energias negativas ilimitadas. Nesse sentido, a resposta encontrada é análoga à solução do paradoxo de Davies apresentado em §5.1, onde também foram usados tanto elementos de TQC como de mecânica quântica padrão.

Assim, do exposto acima, concluímos que as desigualdades quânticas são uma ferramenta poderosa na limitação de efeitos de energia negativa, mas que há ainda a necessidade de se empregar outros meios no estudo destes efeitos.

Impressões finais

A contínua capacidade que a mecânica quântica tem de nos surpreender é a impressão final obtida aqui. Para fazer um paralelo, lembremos o efeito Einstein-Podolski-Rosen (EPR).

No efeito EPR, a mecânica quântica parece, em uma primeira análise, violar a causalidade - por sua capacidade de determinar “instantaneamente” propriedades físicas de uma partícula distante, e.g. a polarização de um fóton distante através da medida de um fóton irmão (*twin photon*) localmente. Porém, numa análise mais cuidadosa descobrimos que no efeito EPR a causalidade não é violada em momento algum, sendo salva por outro efeito que a mecânica quântica introduz - sua aleatoriedade na determinação da polarização dos fótons (representada pela natureza probabilística da mecânica quântica). Ou seja, não há como mandar sinais superluminais usando o efeito EPR: muito embora se possa determinar a polarização do fóton distante instantaneamente ao se fazer uma medida sobre o fóton local, não se pode de antemão saber qual será o resultado da medida sobre o fóton local, o que impede a construção de algum “código de sinais” que permita usar essa determinação instantânea da polarização para transmitir informações de modo superluminal. Dito de outro modo, o que a mecânica quântica deu com uma mão, retirou com a outra, e o efeito final é a causalidade sobressair intacta.

No caso da geração de energias negativas que a mecânica quântica traz ao ser introduzida na teoria de campos, acontece algo parecido. Se por um lado ela gera energias negativas que possuem a capacidade de violar leis físicas macroscópicas, por outro ela limita essas energias negativas por meio de desigualdades que impedem a manifestação macroscópica dessas violações. Mostramos aqui que, no caso em que os fluxos e densidades de energia negativa são gerados a partir do campo escalar livre (ou por meio de um sistema que tenha em comum o mesmo espaço de Hilbert de suas soluções), desigualdades quânticas provadas formalmente surgem de maneira a impedir qualquer violação. Pretendemos sugerir, ao menos com um exemplo específico, que mesmo em casos onde as desigualdades quânticas não valem, e.g., densidades de energia estáticas como as do efeito Casimir, a mecânica quântica ainda assim salva-se por seus próprios meios. No caso discutido aqui, vimos que no efeito Casimir a característica probabilística da mecânica quântica manifesta-se por meio de flutuações na posição das placas, e o efeito que isso introduz no cálculo da densidade de energia do campo entre essas placas é o suficiente para impedir o surgimento de energias negativas arbitrárias. Assim como no efeito EPR, o resultado final é a conservação de leis físicas macroscópicas, mesmo com energias negativas presentes.

Essa capacidade que a mecânica quântica tem de andar no limite entre o permitido e o proibido nos surpreende de todos os ângulos pela qual a olhamos. Nos surpreende e nos maravilha.

Apêndice A

Espelhos acelerados

Deduziremos aqui o valor esperado do fluxo emitido por espelhos acelerados mencionado na §3.3, eqs. (3.36) e (3.37), resultado que se deve a Fulling e Davies [4, 5]. Porém, para tornar os cálculos aqui análogos aos realizados no capítulo 6, nos utilizaremos de uma demonstração própria. É aconselhável haver por parte do leitor familiaridade com os cálculos presentes naquele capítulo para o que segue.

Estamos interessados em calcular o fluxo emitido à direita de um espelho representado pela condição de contorno

$$\phi(t, q(\tau)) = 0, \quad (\text{A.1})$$

em que $q(\tau)$ é uma função geral que representa a trajetória do espelho (e τ a coordenada temporal que a parametriza), e $\phi(t, x)$ é o campo escalar não-massivo em (1+1) dimensões que obedece à equação

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi(t, x) = 0. \quad (\text{A.2})$$

Os modos normais que são soluções de (A.2) sujeitos à condição de contorno (A.1) não são mais dados por (2.8), mas sim por

$$u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) = \frac{e^{-iw(t+x)} - e^{-iw(t-x+2q(\tau))}}{\sqrt{2w(2\pi)}}, \quad (\text{A.3})$$

de onde se verifica trivialmente que $u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x})|_{(x=q(\tau))} = 0$. Assim $\phi(t, x)$ será dado por

$$\phi(t, x) = \int_0^\infty \frac{dw}{2\pi\sqrt{2w}} (e^{-iw(t+x)} - e^{-iw(t-x+2q(\tau))}) a(\mathbf{k}) + (e^{iw(t+x)} - e^{iw(t-x+2q(\tau))}) a^\dagger(\mathbf{k}), \quad (\text{A.4})$$

da qual podemos calcular a função de Wightman $D^+(x, x') = \langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle$ [vide eq. (6.3)] como sendo

$$D^+(x, x') = \int_0^\infty \frac{dw}{4\pi w} \left[e^{-iw[(t-t')+(x-x')]} - e^{-iw[(t-t')+(x+x')-2q'(\tau')]} \right. \\ \left. - e^{-iw[(t-t')-(z+z')+2q(t',x')]} + e^{-iw[(t-t')-(z-z')+2q(\tau)-2q'(\tau')]} \right], \quad (\text{A.5})$$

e realizando essa integral obtemos

$$D^+(x, x') = \frac{1}{4\pi} \{ \ln[(t' - t) + (x' - x)] + \ln[(t' - t) - (x' - 2q'(\tau')) + (x - 2q(\tau))] \\ - \ln[(t' - t) + (x' + x - 2q(\tau))] - \ln[(t' - t) - (x' + x - 2q'(\tau'))] \} \quad (\text{A.6})$$

Note que caso o espelho esteja estacionário na origem ($q(\tau) = q'(\tau') = 0$) recuperamos o resultado (6.7). De fato, o procedimento usado para se chegar a (A.6) - achar as soluções de (A.2) sujeitas à condição de contorno e o cálculo compreendido pelas eqs. (A.4) e (A.5) - é justamente o procedimento que se usaria para achar as funções de Wightman representadas em (6.7), (6.11), (7.1), (6.21) e (7.19), caso não as tivéssemos obtido por argumentos de simetria.

Assim como explicado no capítulo 6, temos que proceder à renormalização de (A.6) mediante a subtração da função de Wightman de Minkowski (não sujeita a condições de contorno), dada por [vide eq. (6.6)]

$$D_{\text{Minkowski}_2D}^+(x, x') = -(1/4\pi) \ln[(t - t')^2 - (z - z')^2], \quad (\text{A.7})$$

de modo que obtemos $D_{\text{Ren}}^+(x, x') = D^+(x, x') - D_{\text{Minkowski}_2D}^+(x, x')$ como sendo

$$D_{\text{Ren}}^+(x, x') = \frac{1}{4\pi} \{ \ln[(t' - t) - (x' - x)] - \ln[(t' - t) - (x' - 2q'(\tau')) + (x - 2q(\tau))] \\ + \ln[(t' - t) + (x' + x - 2q(\tau))] + \ln[(t' - t) - (x' + x - 2q'(\tau'))] \} \quad (\text{A.8})$$

Para calcular o fluxo precisaremos da componente T_{01} do tensor energia-momento desse campo escalar, eq. (2.18), dada por $T_{01} = \partial_t \phi \partial_x \phi$. O cálculo do valor esperado $\langle T_{01} \rangle$ se dá pelo uso do método de “point-splitting” [20] [ver cap. 6], através da equação

$$\langle T_{01} \rangle = \lim_{x', t' \rightarrow x, t} \partial_t \partial_{x'} D_{\text{Ren}}^+(x, x'). \quad (\text{A.9})$$

Vamos realizar a operação (A.9) por partes. Primeiro calculamos

$$4\pi \partial_t \partial_{x'} D_{\text{Ren}}^+(x, x') = -\frac{1}{[(t' - t) - (x' - x)]^2} + \frac{(1 + 2\frac{\partial q(\tau)}{\partial t})(1 - 2\frac{\partial q'(\tau')}{\partial x'})}{[(t' - t) - (x' - 2q'(\tau')) + (x - 2q(\tau))]^2} \\ + \frac{1 + 2\frac{\partial q(\tau)}{\partial t}}{(t' - t) + (x' + x - 2q(\tau))]^2} - \frac{1 - 2\frac{\partial q'(\tau')}{\partial x'}}{[(t' - t) - (x' + x - 2q'(\tau'))]^2}, \quad (\text{A.10})$$

e sobre a qual realizaremos uma transformação de variáveis para facilitar o cálculo do limite $x', t' \rightarrow x, t$. Passamos a equação acima para coordenadas tipo-luz (u, v) e (u', v') dadas por

$$v = t + x, \quad u = t - x, \quad (\text{A.11})$$

$$v' = t' + x', \quad u' = t' - x', \quad (\text{A.12})$$

obtendo então

$$4\pi\partial_t\partial_{x'}D_{\text{Ren}}^+(x, x') = -\frac{1}{[u' - u]^2} + \frac{(1 + 2\frac{dq(u_\tau)}{du})(1 + 2\frac{dq'(u'_\tau)}{du'})}{[u' - u + 2(q'(u'_\tau) - q(u_\tau))]^2} \\ + \frac{1 + 2\frac{dq(u_\tau)}{du}}{[v' - u - 2q(u_\tau)]^2} - \frac{1 + 2\frac{dq'(u'_\tau)}{du'}}{[u' - v + 2q'(u'_\tau)]^2}, \quad (\text{A.13})$$

sendo u_τ [presente em $q(u_\tau)$] a coordenada u tomada em $u = \tau - q(\tau)$ ¹ e onde assumimos que $q(u, v) = q(u) = q(t - x)$, ou seja, que a trajetória do espelho é função somente de u , o que equivale a exigir que o movimento do espelho influencie o campo de modo causal². Agora podemos realizar o limite $x', t' \rightarrow x, t$ mediante

$$u' = u + \epsilon, \quad (\text{A.14})$$

$$v' = v + \epsilon, \quad (\text{A.15})$$

em que depois de introduzir (A.14) e (A.15) em (A.13) e expandir em potências de ϵ , faz-se $\epsilon \rightarrow 0$. Após um cálculo trabalhoso mas direto constata-se que os termos que sobram resultam em

$$\langle T_{01} \rangle = \frac{1}{12\pi} \left[\frac{\frac{d^3q(u_\tau)}{du^3}}{1 + 2\frac{dq(u_\tau)}{du}} - 3 \left(\frac{\frac{d^2q(u_\tau)}{du^2}}{1 + 2\frac{dq(u_\tau)}{du}} \right)^2 \right]_{|_{(u=u_\tau)}}. \quad (\text{A.16})$$

Reescreveremos essa última equação em termos de $(\tau, q(\tau))$ novamente. Para tanto, devemos lembrar que

$$u_\tau = \tau - q(\tau), \quad (\text{A.17})$$

de onde obtemos as relações

$$\frac{du_\tau}{d\tau} = \left(\frac{d\tau}{du_\tau} \right)^{-1} = 1 - V, \quad (V \equiv \frac{dq(\tau)}{d\tau}), \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{dq(u_\tau)}{du_\tau} = \frac{d\tau}{du_\tau} - 1 \underbrace{\equiv}_{\text{por (A.18)}} \frac{V}{1 - V}, \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{d^2q(u_\tau)}{du_\tau^2} = \frac{\dot{V}}{(1 - V)^3}, \quad (\dot{V} \equiv \frac{dV}{d\tau}), \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{d^3q(u_\tau)}{du_\tau^3} = \frac{\ddot{V}(1 - V) + 3\dot{V}^2}{(1 - V)^5}, \quad (\ddot{V} \equiv \frac{d\dot{V}}{d\tau}), \quad (\text{A.21})$$

resultando, finalmente, que

$$\langle T_{01} \rangle = \frac{1}{12\pi} \frac{\sqrt{1 - V^2}}{(1 - V)^2} \frac{d}{dt} \left[\frac{\dot{V}}{(1 - V^2)^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (\text{A.22})$$

¹Ou seja, u_τ é a coordenada tipo-luz u tomada no ponto de “intersecção de um raio de luz com o espelho”.

²O que é procedimento análogo à tomarmos as soluções retardadas de uma função de Green, como se faz usualmente no eletromagnetismo por exemplo.

Como definido na eq. (5.21), o fluxo detectado por um observador de quadrivelocidade U^μ e vetor unitário tipo-espaço X^μ perpendicular à quadrivelocidade é dado por $F = -T_{\mu\nu}V^\mu X^\nu$, de modo que para um observador inercial de $U^\mu = (1, 0)$ e $X^\mu = (0, 1)$ teremos

$$F = -\langle T_{01} \rangle, \quad (\text{A.23})$$

que é a eq. (3.36), o que finaliza nossa dedução. Para obter-se o fluxo para observadores à esquerda do espelho, eq. (3.37), realiza-se cálculo análogo em que $u \rightarrow v'$ e $v \rightarrow u'$. Ou, de maneira mais direta, substitui-se $V \rightarrow -V$ na eq. (A.22).

Referências Bibliográficas

- [1] L.H. Ford, *Quantum coherence effects and the second law of thermodynamics*, Proc. R. Soc. London **A364**, 227 (1978).
- [2] L.H. Ford, *Constraints on negative-energy fluxes*, Phys. Rev. D, **43**, 3972 (1991).
- [3] G.T. Moore, *Quantum theory of electromagnetic field in a variable-length one-dimensional cavity*, J. Math. Phys. **11**, 2679 (1970).
- [4] S.A. Fulling e P.C.W Davies, *Radiation from a moving mirror in two dimensional space-time: conformal anomaly*, Proc. R. Soc. London **A348**, 393 (1976).
- [5] P.C.W. Davies e S.A. Fulling, *Radiation from moving mirrors and from black holes*, Proc. R. Soc. London **A356**, 237 (1977).
- [6] L.H. Ford e T.A. Roman, *Restrictions on negative energy density in flat spacetime*, Phys. Rev. D **55**, 2082 (1997).
- [7] P.C.W. Davies, *Can moving mirrors violate the second law of thermodynamics?*, Phys. Lett. **113B**, 215 (1982).
- [8] M. Morris e K. Thorne, *Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel*, Am. J. Phys. **56**, 395 (1988).
- [9] M. Morris, K. Thorne e Y. Yurtsever, *Wormholes, time machines, and the weak energy condition*, Phys. Rev. Lett. **61**, 1446 (1988).
- [10] Pg. 405 de [8].
- [11] R. Penrose, *Gravitational collapse and space-time singularities*, Phys. Rev. Lett. **14**, 57 (1965).
- [12] S.W. Hawking, *Occurrence of singularities in open universes*, Phys. Rev. Lett. **15**, 689 (1965).
- [13] A. Borde e A. Vilenkin, *Eternal inflation and the initial singularity*, Phys. Rev. Lett. **72**, 3305 (1994).

- [14] S.W. Hawking, *Particle creation by black holes*, Commun. Math. Phys. **25**, 152 (1975).
- [15] G.W. Gibbons, S.W. Hawking, G.T. Horowitz e M.J. Perry, *Positive mass theorems for black-holes*, Comm. Math. Phys. **88**, 295 (1983).
- [16] H. Epstein, V. Glaser e A. Jaffe, *Nonpositivity of the energy density in quantized field theories*, Il Nuovo Cim. **36**, 1016 (1965).
- [17] M. Alcubierre, *The warp drive: hyper-fast travel within general relativity*, Class. Quantum Grav. **11**, L73 (1994).
- [18] S.V. Krasnikov, *Hyperfast travel in general relativity*, Phys. Rev. D **57**, 4760 (1998).
- [19] S.W. Hawking, *Particle creation by black holes*, Comm. Math. Phys. **43**, 199 (1975).
- [20] N.D. Birrel e P.C.W. Davies, *Quantum Field Theory in Curved Space*, Cambridge University Press, Cambridge (1982).
- [21] G.E.A. Matsas, *Notas de teoria quântica de campos em espaços curvos*, (não publicadas).
- [22] R.M. Wald, *The thermodynamics of black holes*, em Living Reviews (<http://www.livingreviews.org>).
- [23] F.J. Tipler, *Energy conditions and spacetime singularities*, Phys. Rev. D **17**, 2521 (1978).
- [24] T.A. Roman, *On the “averaged weak energy condition” and Penrose’s singularity theorem*, Phys. Rev. D **37**, 546 (1988).
- [25] R. Wald e U. Yurtsever, *General proof of the averaged null energy condition for a massless scalar field in two-dimensional curved spacetime*, Phys. Rev. D **44**, 403 (1991).
- [26] C.G. Callan, S. Coleman e R. Jackiw, *A new improved stress-energy tensor*, Ann. Phys. **59**, 42 (1970).
- [27] Ling-An Wu, H.J. Kimble, J.L. Hall e Huifa Wu, *Generation of Squeezed States by Parametric Down Conversion*, Phys. Rev. Lett. **57**, 2520 (1986).
- [28] R.J. Glauber, *Coherent and incoherent states of the radiation field*, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963).
- [29] C.M. Caves, *Quantum-mechanical noise in an interferometer*, Phys. Rev. D **23**, 1693 (1981).

- [30] C.I. Kuo e L.H. Ford, *Semiclassical gravity theory and quantum fluctuations*, Phys. Rev. D **47**, 4510 (1993).
- [31] J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, New York (1994).
- [32] L.H. Ford e T.A. Roman, *Energy flux correlations and moving mirrors*, Phys. Rev. D **70**, 125008 (2004).
- [33] E. Flanagan, *Quantum inequalities in two-dimensional Minkowski spacetime*, Phys. Rev. D **56**, 4922 (1997).
- [34] D.N. Vollick, *Quantum inequalities in curved two-dimensional spacetimes*, Phys. Rev. D **61**, 084022 (2000).
- [35] C.J. Fewster, S.P. Eveson, *Bounds on negative energy densities*, Phys. Rev. D, **58**, 084010 (1998).
- [36] C.J. Fewster, *A general worldline quantum inequality*, Class. Quantum Grav. **17**, 1897 (2000).
- [37] D. Deutsch, A.C. Ottewill e D.W. Sciama, *Negative energy radiation and the second law of thermodynamics*, Phys. Lett. **119B**, 72 (1982).
- [38] L.H. Ford e T.A. Roman, *Moving mirror, black holes, and cosmic censorship*, Phys. Rev. D **41**, 3662 (1990).
- [39] L.H. Ford, P.G. Grove e A.C. Ottewill, *Macroscopic detection of negative-energy fluxes*, Phys. Rev. D **46**, 4566 (1992).
- [40] L.H. Ford e T.A. Roman, *“Cosmic flashing” in four dimensions*, Phys. Rev. D **46**, 1328 (1992).
- [41] L.H. Ford e T.A. Roman, *Averaged energy conditions and evaporating black holes*, Phys. Rev. D **53**, 1988 (1996).
- [42] L.H. Ford e T.A. Roman, *Quantum field theory constrains traversable wormhole geometries*, Phys. Rev. D **53**, 5496 (1996).
- [43] M.J. Pfenning e L.H. Ford, *The unphysical nature of “warpdrive”*, Class. Quantum Grav. **14**, 1743 (1997).
- [44] A.D. Helfer, *“Operational” energy conditions*, Class. Quantum Grav. **15**, 1169 (1998).
- [45] L.H. Ford e T.A. Roman, *The quantum interest conjecture*, Phys. Rev. D **60**, 104018 (1999).

- [46] A.D. Helfer, *Moving mirrors and the thermodynamics paradoxes*, Phys. Rev. D **63**, 025016 (2000).
- [47] P.C.W. Davies e A.C. Ottewill, *Detection of negative energy: 4-dimensional examples*, Phys. Rev. D **65**, 104014 (2002).
- [48] L.H. Ford, *The classical singularity theorems and their quantum loopholes*, Int. J. Theor. Phys. **42**, 1219 (2003).
- [49] L.H. Ford e A. Vilenkin, *Quantum radiation by moving mirrors*, Phys. Rev. D **25**, 2569 (1982).
- [50] W.G. Anderson e W. Israel, *Quantum flux from a moving spherical mirror*, Phys. Rev. D **60**, 084003 (1999).
- [51] R.M. Wald, *General Relativity*, pg. 302, The University of Chicago Press, Chicago (1984).
- [52] Pg. 219 de [51].
- [53] C.J.S. Clarke, *A Review of Cosmic Censorship*, Class. Quantum Grav. **11**, 1375 (1994).
- [54] A. Ottewill e S. Takagi, *Radiation by moving mirrors in curved space-time*, Prog. Theor. Phys. **79**, 429 (1988).
- [55] D. Deutsch e P. Candelas, *Boundary effects in quantum field theory*, Phys. Rev. D **20**, 3063 (1979).
- [56] G. Kennedy, R. Critchley e S. Dowker, *Finite temperature-field theory with boundaries - stress tensor and surface action renormalization*, Ann. Phys. **125**, 346 (1980).
- [57] L.H. Ford e N.F. Svaiter, *Vacuum energy density near fluctuating boundaries*, Phys. Rev. D **58**, 065007 (1998).
- [58] M. Bordag, U. Mohideen e V.M. Mostepanenko, *New developments in the Casimir effect*, Phys. Rep. **353**, 1 (2001).
- [59] V. Sopova e L.H. Ford, *Energy density in the Casimir effect*, Phys. Rev. D **66**, 045026 (2002).
- [60] A.D. Helfer e A. Lang, *The electromagnetic field near a dielectric half-space*, J. Phys. A **32**, 1937 (1999).
- [61] G.B. Arfken e H.J. Weber, *Mathematical methods for physicists*, Academic Press (2001).

- [62] K.T.R. Davies e R.W. Davies, *Evaluation of a class of integrals occurring in mathematical physics via a higher order generalization of the principal value*, Can. J. Phys. **67**, 759 (1989).