



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.009/03

Uma abordagem de gauge para corpos deformáveis

Vagner Jeger Limeira de Castro

Orientador

Ruben Aldrovandi

Junho de 2003

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a meus pais e a meu irmão por todo o apoio oferecido, sem o qual eu não teria chegado até aqui.

A minha querida esposa Márcia pelo incentivo, pela motivação, pela paciência e acima de tudo pelo amor e cuidado que têm para comigo.

Ao meu orientador, Ruben Aldrovandi, pelos grandes ensinamentos e pela confiança em mim depositada.

A todos os professores do IFT.

Ao Paulo Gustavo, William Hipólito, Eduardo de Carli, Esdras Santana, Léo Gouvea, Rodrigo Cuzinato, Cassius Anderson, Márcio de Menezes, Birajara Soares, Leandro Holanda, Wanderson Wanzeller, Gian Machado, Felipe Arretche, Patrícia Soares, Ricardo Bentin, Rodolfo Casana, Victo dos Santos, Jorge Sales, Antonio Mihara, Raquel Marques, Otávio Augusto, Ricardo Farias, Igor Zolnerkevic, Urbano Lopes, Ricardo Rocamora, Wagner Paniago, Marcos Calçada, Adriano Doff, Luis Guillen, enfim, a todos os amigos que fiz no IFT durante estes últimos dois anos.

Aos funcionários do IFT.

E é claro, a CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Campos de gauge, tanto abelianos como não-abelianos, aparecem proeminentemente nas teorias modernas das interações fundamentais. Surgem também com um papel central na geometria moderna. Seria de grande utilidade encontrar estas estruturas de gauge inseridas em um contexto menos abstrato, como por exemplo em mecânica clássica. Isto é o que alguns autores chamam de “teoria de gauge da mecânica”. Neste trabalho discutiremos com certo detalhe dois modelos mecânicos, e mostraremos de uma maneira simples que campos de gauge aparecem neste contexto de uma forma natural. Mostraremos também como consequências observáveis das estruturas de gauge podem ser extraídas de tais sistemas. Um deles é o sistema composto por dois corpos rígidos planos acoplados por um pino nos seus centros de massa e o outro é um modelo para o automóvel. Através de uma geometrização do problema identificamos nele os elementos que constituem um feixe fibrado principal. O passo subsequente é o cálculo da conexão que surge quando impomos um vínculo sobre o sistema. O potencial de gauge é a conexão que assume um papel chave neste paralelo entre teorias de gauge e geometria diferencial em um contexto clássico.

Palavras Chaves: Feixes fibrados; Conexões mecânicas; Potenciais de gauge; Sistemas de controle

Áreas do conhecimento: 1.05.01.02–9; 1.01.03.01–5

Abstract

Gauge fields, both abelian and non-abelian, appear prominently in modern theories of fundamental interactions. They also arise with a central role in modern geometry. It would be useful to find such gauge structures in a less abstract context, for instance in classical mechanics. This is what some authors have called “gauge theory of mechanics”. In this work, we discuss two simple mechanical models in detail, and show in a simple way that gauge fields appear in a very natural way in ordinary mechanical problems. We also show how observable consequences of the gauge structures might be obtained for such mechanical systems. We first study a system of two rigid bodies coupled by their mass centers and then examine a model for the automobile. Through a geometrization of the problem, we identify the elements that constitute a principal fiber bundle. The subsequent step is to compute the connection that arises when we impose a constraint on the system. The gauge potential is the connection that assumes an important role in this parallel between gauge theories and differential geometry in a classical context.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Uma breve introdução histórica	1
1.2	Comentários gerais	4
1.3	Objetivos e Motivação	6
1.4	Plano de trabalho	6
2	Tópicos em Geometria Diferencial e Grupos de Lie	8
2.1	Introdução	8
2.2	Alguns Conceitos de Geometria Diferencial	8
2.2.1	Classe de Equivalência	8
2.2.2	Variedade diferenciável	9
2.2.3	Espaço tangente	9
2.2.4	Formas Lineares	10
2.2.5	Formas diferenciais	12
2.2.6	Produto exterior	12
2.2.7	Derivada exterior	14
2.3	Grupos de Simetria	16
2.3.1	O Conceito de Grupo	16
2.3.2	Grupos de Lie e Álgebras de Lie	16
2.3.3	A ação de Grupos de Lie em variedades	17
2.3.4	Órbitas	18
2.3.5	Fluxos	18
2.3.6	Fibrados tangentes	19
2.3.7	Feixes fibrados	20
2.3.8	Conexões e fibrados	23
2.3.9	Conexões e vínculos	23
3	Um potencial de gauge para um sistema de corpos rígidos acoplados	25
3.1	Introdução	25

3.2	Aspectos gerais	26
3.3	Reconhecendo o espaço e configuração do sistema como um fibrado principal	26
3.4	A conservação do momento angular como uma conexão sobre o fibrado	28
3.5	Reconstrução de $\gamma(t)$ sobre P a partir de $m(t)$ sobre M como um levantamento horizontal	29
3.6	A Curvatura	30
3.7	Campo associado	31
3.8	Comentários finais	32
4	A cinemática de um automóvel e potenciais de gauge	34
4.1	Introdução	34
4.2	Aspectos Gerais	34
4.3	Reconhecendo o espaço de configuração de um carro como um fibrado principal	35
4.4	A condição de não deslizamento da roda como uma conexão sobre $\pi : P \rightarrow M$	38
4.5	Reconstrução de $\gamma(t)$ sobre P a partir de $m(t)$ sobre M como um levantamento horizontal	39
4.6	O ciclo de estacionamento como um uso inteligente da curvatura Ω da conexão	40
4.7	Movimento do carro com o volante fixo	44
4.8	Campo associado	44
5	Considerações Finais	47
A	Referente ao capítulo 3	49
A.1	A ação do grupo $SO(2)$ sobre F (a fibra típica) e sobre P (espaço de configuração)	49
A.2	O cálculo da conexão ω	49
B	Referente ao capítulo 4	51
B.1	A ação de $E(2)$ sobre F (a fibra típica) e sobre P (espaço de configuração)	51
B.2	A Álgebra de Lie $e(2)$ do grupo $E(2)$	52
B.3	O cálculo da conexão ω	53
B.4	O cálculo da curvatura Ω	56
B.5	Comutadores, ciclos infinitesimais e curvatura	57

Capítulo 1

Introdução

1.1 Uma breve introdução histórica

No que diz respeito à longa e complexa história do desenvolvimento do modelo padrão, que descreve as interações eletrofraca e forte das partículas elementares, o princípio de invariância de gauge assume um papel chave [1, 2]. Este princípio remonta aos primórdios da eletrodinâmica. Durante a sua formulação por uma das mais incríveis gerações de cientistas (Lorenz, Maxwell, Helmholtz, Lorentz, Hertz, Heaviside, entre outros), a eletrodinâmica clássica plantou as sementes do que hoje é conhecido como teorias de gauge. Foi Maxwell que conseguiu juntar todas as informações disponíveis na época, quando da publicação de três célebres artigos entre 1855 e 1865 [3, 4, 5], nos quais estabelecia um conjunto de equações que governavam a teoria eletromagnética. No primeiro destes artigos [3] Maxwell desenvolveu uma descrição analítica da idéia intuitiva de Faraday, a de que um circuito elétrico em um campo magnético estava em um “electro-tonic state”, pronto para responder com um fluxo de corrente caso o fluxo magnético variasse no tempo. Ele identificou o potencial vetor (conceito introduzido por W. Thomson em artigos anteriores sobre magnetismo) com esta idéia, e introduziu o vetor, “electro-tonic intensity”, com divergência nula e cujo rotacional é o campo magnético \mathbf{B} . Em suas próprias palavras [3];

With respect to the history of the present theory, I may state that the recognition of certain mathematical functions as expressing the electro-tonic state of Faraday, and the use of them in determining electro-dynamic potentials and electro-motive forces is, as far as I am aware, original; but the distinct conception of the possibility of the mathematical expressions arose in my mind from the perusal of Prof. W. Thomson papers...

A principal contribuição do segundo artigo de Maxwell [4] foi a introdução da corrente de deslocamento, que tornou as suas equações completas. No terceiro artigo [5] ele juntou as equações organizando-as compactamente. Essas equações, através de suas duas simetrias, influenciaram profundamente a física teórica. Essas simetrias são as de Gauge e a de Lorentz. O potencial vetor assumia um papel muito importante no eletromagnetismo de Maxwell. A simplificação das equações foi descoberta por Hertz (1857–1894) [6] e Heaviside (1850–1925) [7] de forma independente. Eles achavam estes potenciais desnecessários e confusos. Das equações de Maxwell, o potencial vetor \mathbf{A} e o potencial escalar φ podiam ser eliminados, se uma determinada condição fosse estabelecida. Eles descobriram que diferentes formas do potencial vetor (diferindo pelo gradiente de uma função escalar (função de gauge)) eram fisicamente equivalentes, se acompanhadas por uma mudança no potencial escalar: $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' + \nabla\chi$ e $\phi \rightarrow \phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}$. Isto é o que conhecemos atualmente como transformações de gauge dos potenciais eletromagnéticos. A partir daí estabeleceu-se um dogma, devido a essa arbitrariedade na escolha dos potenciais, pelo qual estes não poderiam ter como preceito clássico significado físico real, mas eram apenas conceitos auxiliares úteis para cálculos. A simetria de Gauge foi proposta inicialmente em 1918 por Weyl na tentativa de formular uma teoria geométrica que envolvesse a Relatividade Geral e o Eletromagnetismo [8]. Weyl buscava generalizar a idéia de transporte paralelo em RG. Se um vetor transportado ao redor de uma volta fechada que retorna para sua posição original poderia mudar sua direção, ele perguntou; porque não seu comprimento? Ele propôs então um fator de comprimento variável (mudança de escala) ao longo de um percurso:

$$\exp\left[\int_P^Q d\phi\right]. \quad (1.1)$$

Essa idéia foi rejeitada por Einstein de imediato que apontou a impossibilidade de se estabelecer um padrão de medida *. Embora sua tentativa houvesse falhado, Weyl “pavimentou” o caminho para um melhor entendimento da invariância de gauge. A idéia teria sido esquecida se não fosse o fato de ter Fock, quando a mecânica quântica estava sendo desenvolvida entre 1925–1927, estabelecido uma mudança de fase na função de onda para campos quanto-mecânicos carregados [9]. Após um trabalho de 1926 sobre a equação de onda relativística para uma partícula carregada sem

*Einstein admirava a teoria de Weyl mas percebeu que era fisicamente insustentável: “Although your idea is so beautiful, I have to declare frankly that, in my opinion, it is impossible that the theory corresponds to Nature.” A discordância de Einstein sobre as idéias de Weyl resultou em uma extensa troca de correspondências entre eles, parte das quais está publicada em Vol. 8 of The Collected Papers of Albert Einstein (1987).

spin em um campo eletromagnético feito por Schrödinger, Klein e Fock, este último percebeu a invariância das equações sobre as tais transformações dos potenciais, se a função de onda fosse transformada por $\psi \rightarrow \psi' \exp[ie\chi/\hbar c]$, onde χ é a função de gauge. Extendia-se assim a já conhecida liberdade na escolha do potencial vetor em eletrodinâmica para a Mecânica Quântica. Esta transformação da função de onda é chamada de transformação de fase. Assim, a idéia original de comprimento variável tornou-se uma mudança de fase:

$$\exp \left[\frac{-ie}{c} \int_P^Q A_\mu dx^\mu \right] . \quad (1.2)$$

Este conceito seria depois generalizado. Weyl reapareceu em 1929 reinterpretando suas idéias [10], aceitando o fator de mudança de fase e proclamando essa invariância como um princípio geral, chamado de invariância de gauge. Após este artigo de Weyl sobre campos de gauge, ninguém mais mencionava a objeção de Einstein sobre a sua idéia original. Concluiu-se que certamente a diferença de fase entre dois bastões não afetaria seus comprimentos, tornando a objeção de Einstein inoperante. Mas agora ele poderia perguntar se esta diferença de fase poderia ser medida experimentalmente e com isso atribuir para o potencial vetor \mathbf{A} e o potencial escalar φ um significado mensurável em Mecânica Quântica. O experimento de Aharonov-Bohm, proposto trinta anos depois do surgimento de tais questões, solucionava este problema. Quando Aharonov e Bohm propuseram seus experimentos em 1959 [11] eles estavam aparentemente inconscientes da idéia original de Weyl sobre comprimentos variáveis e da objeção de Einstein sobre esta idéia. O que eles apontavam era uma propriedade intrínseca do Eletromagnetismo, mostrando que os potenciais vetor e escalar pareciam ter de fato consequências observáveis em mecânica quântica. Era um experimento muito difícil de se fazer. Em 1954 C. N. Yang e R. L. Mills, num famoso artigo [12], generalizam o conceito de invariância de gauge para aplicá-la na conservação do spin isotópico (isospin). Matemáticos estudavam o conceito abstrato de conexões sobre feixes fibrados desde 1940. Um grande número de artigos espalhados entre 1960 e 1970, apontavam que teorias de gauge estavam relacionadas com esse conceito. Entre estes está um artigo de A. Trautman [13]. Em 1974, o próprio Yang [14], confirmava as suspeitas. Nele, Yang estabelecia as bases matemáticas para a descrição de campos de gauge em termos de conexões sobre feixes fibrados. O fator de fase tornou-se um elemento do grupo de Lie

$$\Pi \exp[b_\mu^k(x) X_k dx^\mu] , \quad (1.3)$$

onde o produto é um produto ordenado, X_k um elemento da álgebra de Lie, e b_μ^k é a generalização do potencial vetor A . Entretanto esses artigos não criaram grande

impacto entre os matemáticos e físicos da época. Foi só em 1975, quando T. T. Wu e C. N. Yang examinavam, através do experimento de Aharonov–Bohm e da teoria de monopólo magnético de Dirac [15], o intrínseco significado do eletromagnetismo em mecânica quântica, que as implicações topológicas do eletromagnetismo tornaram-se aparentes. E assim, a idéia intuitiva de Faraday sobre um estado “electro–tonic” se transformou no sofisticado e preciso conceito matemático de conexão sobre um feixe fibrado. Esse notável desenvolvimento fornece um bom exemplo de como físicos experimentais, físicos teóricos e matemáticos podem trabalhar juntos, combinando os conceitos em ambas as áreas, para revelar a estrutura fundamental do universo físico.

1.2 Comentários gerais

Campos de gauge aparecem proeminentemente nas teorias modernas das interações fundamentais e também com um papel central na geometria moderna através do formalismo de feixes fibrados. Em seus notáveis “papers”, A. Guichardet [16] em 1984 e A. Shapere e F. Wilczek [17] em 1989, mostraram que o fenômeno de reorientação de corpos deformáveis (moléculas representadas por N massas pontuais em [16], ou gatos, mergulhadores, astronautas, dançarinos, satélites, etc. em [17]) no espaço, por um longo tempo conhecido no caso do gato cadente (the falling cat problem) como originando-se fisicamente da conservação do momento angular, poderia utilizar uma simples e poderosa descrição dentro de um contexto de teoria de conexões (estruturas de gauge). Shapere e Wilczek reuniram uma serie de artigos sobre o assunto em [18] no mesmo ano da publicação do “paper”. Entre estes estão [19] e [20]. O problema do gato cadente (mencionado acima) se tornou um exemplo clássico da aplicação de teoria de gauge para problemas em mecânica e controle. Um gato invertido, abandonado de uma certa altura sem velocidade inicial e sem nenhuma força agindo sobre ele exceto a gravidade, será capaz de manipular o seu corpo de tal forma que, conseguirá cair com os pés no chão e com isso amortecer o impacto. Isso parece violar a lei de conservação do momento angular, já que ele inicia a queda com momento angular nulo, não obstante gerencia uma reorientação no seu corpo enquanto está caindo. O mecanismo dessa atividade aparentemente paradóxica situa-se na habilidade do gato de mudar a inercia rotacional de diferentes componentes de seu torso juntamente com um momento muscular interno. Observe a figura (1.1). Este problema do gato já intrigava os físicos e matemáticos há um longo tempo. Kane e Scher em 1969 [21] propuseram um modelo mecânico a fim de explicar e entender melhor como o gato cadente se reorientava. Esse modelo consistia de dois corpos rígidos idênticos axialmente simétricos e ligados por um tipo especial



Figura 1.1: Um gato reorientado-se durante a queda. Mecanismo aparentemente paradójico.

de junta (“no twist joint”) ao longo de seus eixos de simetria. Uma versão mais arrojada deste problema foi apresentado em 1990 por R. Montgomery no qual ele apresenta um teorema (“Falling Cat Theorem”) que relaciona a reorientação do gato durante a queda à dinâmica de partículas em um campo de Yang–Mills [22]. Veja também [23]. Todo este desenvolvimento culminou com a realização de um “workshop” intitulado “The Falling Cat and Related Problems” realizado em março de 1992 em Waterloo, Ontario. Este “workshop” tinha como principal objetivo divulgar trabalhos sobre a aplicação de métodos da mecânica geométrica e teoria de controle para sistemas mecânicos não-holonômicos, até então pouco conhecidos. Um mês depois R. Montgomery publicou um trabalho [24], no qual um dicionário entre teorias de gauge e teoria de controle era apresentado. No ano seguinte, dando continuidade as suas pesquisas, ele publica um trabalho no qual ele aplica a moderna abordagem de gauge para o gato de Kane e Scher [25].

The cat flips itself right side up, even though its angular momentum is zero. It does this by changing its shape. In terms of gauge theory, the shape space of the cat forms the base space of a principal $SO(3)$ -bundle, and the statement “angular momentum equals zero” defines a connection on this bundle.

A partir daí o tema se expandiu; [26, 27, 30, 31, 29, 32]. Deste modo, a teoria matemática das conexões que já era usada com enorme sucesso em partículas

elementares, dentro de um contexto de teorias de gauge, abria o seu “leque”, inaugurando uma nova era dos potenciais de gauge: o seu aparecimento em mecânica clássica. O teorema de Montgomery (the falling cat theorem) é estendido posteriormente em um trabalho de Koon e Marsden [36] no qual introduzem uma nova prova do teorema, colocando-o no contexto geral de problemas de controle e locomoção (sistemas não-holonomicos). Este trabalho foi apresentado em 1998 em um workshop sobre locomoção animal e robótica realizado na universidade de Minnesota.

1.3 Objetivos e Motivação

Pelo que foi colocado até agora, qualquer problema que possa ser geometrizado usando as idéias de feixes fibrados pode, em princípio, ter traçado um paralelo com teorias de gauge. Esta é portanto a idéia deste trabalho: considerar exemplos em Mecânica Clássica e geometrizá-los a fim de se identificar no problema os elementos que constituem um feixe fibrado. Após a devida construção, fazer surgir as idéias inerentes a este formalismo, tais como conexões, potencial de gauge e curvatura. Em seguida verificar se os resultados obtidos possuem alguma interpretação. Em geral problemas deste tipo apresentam estruturas articuladas, como é o caso dos corpos rígidos acoplados e do automóvel, como veremos. São os chamados corpos deformáveis, daí o título do trabalho. Observa-se que estes problemas trazem interpretações peculiares, e que certamente enriquecem o entendimento do problema. Por exemplo, no caso dos corpos rígidos acoplados pode-se imaginar o sistema como sendo um satélite e um rotor, no qual este último pode ser utilizado para reorientar o conjunto. No caso do automóvel, surgem discussões da baliza como um uso da curvatura. Um dos conceitos que aparece é o de feixes fibrados (fiber bundles). Outro conceito é o de conexão sobre o feixe fibrado, que por sua vez define, como veremos, o que chamamos de potencial de gauge. Entre outros. Deste modo, visto que os conceitos envolvidos são muito abstratos, poderíamos citar como motivação para o trabalho, uma vez inseridos em um contexto menos abstrato, compreender melhor como surgem estas estruturas de gauge.

1.4 Plano de trabalho

Como acabamos de ver, a geometria diferencial, especialmente a teoria de conexões e feixes fibrado principais, fornece uma linguagem conveniente para se discutir alguns conceitos, como por exemplo o de campo de gauge, tanto no contexto de partículas elementares quanto na mecânica clássica. Em particular, essa linguagem tem mostrado ser extremamente útil no estudo de alguns sistemas mecânicos, prin-

principalmente aqueles ligados a problemas de locomoção [19], controle [28] e estabilização [33]. De satélites no espaço, gatos cadentes e movimentos de robôs e bicicletas até o movimento microfluído ondulatório da paramécia, essa nova ferramenta abre perspectivas para um melhor entendimento da mecânica, sistemas dinâmicos e teoria de controle. Veja também [34, 35]. Neste trabalho selecionamos dois exemplos de sistemas mecânicos, ambos relacionados ao controle do movimento, e mostramos de uma maneira geral (utilizando as idéias introduzidas por [16, 17]) como consequências observáveis dessas estruturas de gauge podem ser extraídas de tais sistemas, cuja formulação inicial não aparenta ter nenhuma relação com campos de gauge. O esquema formal é o seguinte: há um espaço de configuração total P que, juntamente com a ação de um grupo sobre ele, formam a estrutura de um feixe fibrado principal. O quociente de P pela ação do grupo forma o que chamamos de espaço das órbitas M , ou base do fibrado. A conexão fornece a ponte ligando o movimento nesses dois espaços, introduzindo um campo de gauge sobre o espaço reduzido do sistema. No capítulo 2 introduzimos algumas noções de geometria diferencial, que irão aparecer constantemente no decorrer do trabalho, dando “suporte” ao texto ulterior. No capítulo 3 estudamos um modelo composto de dois corpos rígidos planos acoplados em seus centros de massa. A estrutura de gauge associada origina-se da conservação do momento angular. No capítulo 4 a cinemática do movimento de um automóvel é também reformulada em termos da teoria de potenciais de gauge. Neste caso a estrutura de gauge associada origina-se do vínculo de contato não deslizante da roda com a estrada. Este exemplo em particular, é muito “rico”, pois a conexão que aparece tem curvatura não-nula. Em seguida, no capítulo 5, fazemos algumas considerações finais sobre o assunto.

Capítulo 2

Tópicos em Geometria Diferencial e Grupos de Lie

2.1 Introdução

A idéia deste capítulo é relembrar alguns conceitos e definições básicas que serão importantes no decorrer do desenvolvimento deste trabalho. Não pretendemos de forma alguma tornar este capítulo essencial para tal desenvolvimento, mas certamente será de grande serventia. O conceito de variedade diferenciável, por exemplo, envolve uma série de outros conceitos tais como, espaço de recobrimento, cartas, atlas diferenciável, homeomorfismo, etc, que iriam requerer uma maior atenção. Sendo assim, supomos que estes conceitos fundamentais sejam conhecidos. Apresentamos uma breve revisão de alguns aspectos específicos da geometria diferencial e grupos de Lie, especialmente necessários para as aplicações que temos em mente. Referências relevantes são [38] e [37]. Uma análise completa pode também ser encontrada em Kobayashi e Nomizu [39].

2.2 Alguns Conceitos de Geometria Diferencial

2.2.1 Classe de Equivalência

Para definir o conceito de classe de equivalência deve-se primeiro conhecer o que é uma relação de equivalência. Uma relação de equivalência \sim é uma relação que satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $a \sim a$.
- ii) $a \sim b$, então $b \sim a$.
- iii) $a \sim b$, e $b \sim c$ então $a \sim c$.

Considere agora um conjunto X com uma relação de equivalência \sim . Constrói-se um subconjunto de X formado por todos os elementos $x \in X$ tal que $x \sim a$. A esse subconjunto, dá-se o nome de classe, e é representado como

$$[a] \equiv \{x \in X \mid x \sim a\} . \quad (2.1)$$

O elemento a (ou qualquer outro elemento em $[a]$) é chamado de representante da classe $[a]$. Segue abaixo uma outra importante definição referente às classes de equivalência, mas que não entraremos em maiores detalhes:

• **Definição:** O conjunto de todas as classes de equivalência de um conjunto X é chamado de espaço quociente e é denotado por X/\sim .

2.2.2 Variedade diferenciável

Como já mencionamos, para definirmos o conceito de variedade diferenciável faz-se necessário um capítulo a parte. Deste modo, vamos supor o prévio conhecimento sobre variedades diferenciáveis, e de todos os conceitos relevantes para sua definição. Uma referência introdutória é encontrada em [40].

2.2.3 Espaço tangente

Considere uma curva que passa por um ponto p numa variedade M de dimensão n , descrito por $x^i = x^i(\lambda)$, onde $i = 1, 2, \dots, n$ e λ é um parâmetro real arbitrário e $f(\lambda) = f(x^1(\lambda), x^2(\lambda), \dots, x^n(\lambda))$. Derivando f em relação a λ , têm-se

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{d\lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^i} , \quad (2.2)$$

logo

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^i} , \quad (2.3)$$

onde adotou-se a convenção da soma sobre os índices repetidos. Trocando o parâmetro λ por μ têm-se de forma análoga

$$\frac{d}{d\mu} = \frac{dx^i}{d\mu} \frac{\partial}{\partial x^i} . \quad (2.4)$$

Multiplicando as expressões (2.3) e (2.4) pelas constantes c_1 e c_2 respectivamente e somando-se estes resultados em seguida, obtém-se

$$c_1 \frac{d}{d\lambda} + c_2 \frac{d}{d\mu} = \left(c_1 \frac{dx^i}{d\lambda} + c_2 \frac{dx^i}{d\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} . \quad (2.5)$$

Comparando este resultado com as equações (2.3) e (2.4), conclui-se que existe uma curva com um parâmetro θ , tal que

$$\frac{d}{d\theta} = c_1 \frac{d}{d\lambda} + c_2 \frac{d}{d\mu} . \quad (2.6)$$

Fazendo uma analogia com o espaço Euclidiano, podemos afirmar que o conjunto dos $\partial x^i / \partial \lambda$ acima expande um vetor tangente a curva $x^i(\lambda)$ no ponto p . E da expressão (2.6), conclui-se que as duas derivadas direcionais $d/d\lambda$ e $d/d\mu$ geram um espaço vetorial em p . Portanto, qualquer $d/d\theta$ pode ser escrito como uma combinação linear dos d/dx^i . Logo, o conjunto $\partial/\partial x^i$ forma uma base para o espaço dos $d/d\theta$, chamado de espaço tangente a M em p com a mesma dimensão de M , representado por T_p . Sendo assim, só se adicionam vetores em um mesmo ponto, pois vetores em pontos distintos não possuem relação entre si. A importância deste espaço para a física está no fato de as derivadas estarem associadas a algum tipo de movimento ao longo de uma curva. Dada uma curva sobre M , pode-se associar a cada ponto dela um vetor tangente, o que fornece o conceito de campo vetorial. Um conjunto de vetores linearmente independentes em T_p forma uma base. E um conjunto formado por uma base em cada T_p para todo p em M forma uma base para o campo vetorial. Uma variedade particularmente interessante é a obtida através da combinação da variedade M com todos os seus espaços tangentes T_p . Ou seja, dada uma variedade M , define-se um conjunto

$$TM = (p, v), \quad p \in M \text{ e } v \in T_p , \quad (2.7)$$

onde TM é uma estrutura diferenciável de dimensão $2n$, que é chamada de fibrado tangente. Se o sistema de coordenadas de M for dado por (x^1, x^2, \dots, x^n) , o conjunto TM pode ser reescrito como $TM = (x, \partial/\partial x)$, onde x representa o ponto da variedade que está sendo avaliado e $\partial/\partial x$ um vetor tangente. Veremos isto com mais detalhes nas próximas seções. Uma possível aplicação deste tipo de variedade na física está associada a problemas envolvendo posições e velocidades de partículas (cinemática) como no caso da mecânica Lagrangeana.

2.2.4 Formas Lineares

Considerando um espaço vetorial V de dimensão n sobre um corpo F , pode-se definir um homomorfismo $f : V \implies F$ denominado de forma linear, tal que para $x, y \in V$ e $\lambda, \mu \in F$, têm-se

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) . \quad (2.8)$$

Assumindo que f_1, f_2 e f são formas lineares em V , tem-se

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) , \quad (2.9)$$

e

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) , \quad (2.10)$$

onde $f_1 + f_2$ e λf são também formas lineares. Definindo uma forma linear nula f_3 , tal que

$$f_3(x) = 0 \quad \in F , x \in V , \quad (2.11)$$

conclui-se que o conjunto de formas lineares é um espaço vetorial. Ele é conhecido como espaço dual de V , representado por V^* , cujos elementos são chamados covetores. Tomando um conjunto de vetores base $\{\bar{e}_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ de V , tem-se para um vetor

$$x = x^i \bar{e}_i , \quad (2.12)$$

e

$$f(x) = x^i f(\bar{e}_i) . \quad (2.13)$$

Assim $f(\bar{e}_i) = f_i$ é a i -ésima componente de $f(x)$ no espaço das formas lineares e \bar{e}^i é a i -ésima direção no espaço dos f . Definindo

$$f(x) = f_i x^j \bar{e}^i(\bar{e}_j) , \quad (2.14)$$

desta maneira $\bar{e}^i(\bar{e}_j) = \delta_{ij}$ e $\{\bar{e}^i\}$ forma uma base para V^* , chamada base dual a $\{\bar{e}_j\}$. Por outro lado, percebe-se dos resultados acima que uma forma linear estabelece um isomorfismo entre dois espaços vetoriais de mesma dimensão. Este isomorfismo, quando não depende do conjunto de vetores base utilizado, é chamado de natural ou canônico. Considerando um espaço vetorial V sobre um corpo F , define-se como produto escalar ou interno entre dois vetores $\bar{u}, \bar{v} \in V$, representado por $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$, a relação que associa estes vetores a um escalar em F . Este produto deve satisfazer as seguintes propriedades

i) $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle$

ii) $\langle \bar{u}, \bar{v} + \bar{w} \rangle = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle + \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle$

iii) $\langle \lambda \bar{u}, \bar{v} \rangle = \langle \bar{u}, \lambda \bar{v} \rangle = \lambda \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle , \lambda \in F$

iv) se $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0$ para $\bar{u} \in V$, então $\bar{v} = 0$

Logo, tomando um espaço vetorial V de dimensão n e com produto interno definido, cuja base é dada por $\{\bar{e}_i\}$ e $g_{ij} = \langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle$, segue que se $\bar{u}, \bar{v} \in V$, então: $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = g_{ij} u^i v^j$, $g_{ij} = g_{ji}$ e $\det[g_{ij}] \neq 0$. Se $g_{ij} > 0$ para r valores de i e $g_{ij} < 0$ para s valores de i , então $|r - s|$ é conhecido como a assinatura da forma bilinear $g_{ij} u^i v^j$. A partir da noção de produto escalar $\langle u, v \rangle$, mostrada acima, pode-se introduzir a forma natural, escrevendo-se

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \bar{u}^*(\bar{v}), \quad (2.15)$$

onde \bar{u}^* é uma forma linear dada por $\bar{u}^* = f(\bar{u})$. Ou seja, o produto escalar de dois vetores em um espaço vetorial é dado pela contração de um destes vetores com a forma linear associada ao dual do outro. Na linguagem usual, as formas são chamadas de vetores covariantes ou covetores e os vetores de vetores contravariantes ou simplesmente vetores.

2.2.5 Formas diferenciais

No tópico anterior, foi apresentado o conceito de forma linear como uma aplicação que associa a cada vetor de um espaço vetorial, elementos em um corpo. No caso de espaços tangentes a uma variedade diferencial, uma forma linear deste tipo é também chamada 1-forma ou forma de grau 1. Considerando um ponto P na variedade M , define-se como um tensor do tipo (n, m) em P , uma função linear que toma como argumento n 1-formas e m vetores, levando-os em um número. Desta maneira um tensor T do tipo $(2, 2)$ terá seu valor dado por $T(f_1, f_2, \bar{v}, \bar{u})$, onde f_1 e f_2 são 1-formas e \bar{v} e \bar{u} são vetores.

2.2.6 Produto exterior

Dado duas 1-formas p e q , esse produto é representado por $p \wedge q$ e dado por

$$p \wedge q = p \otimes q - q \otimes p. \quad (2.16)$$

Esta 2-forma atua em dois vetores \bar{v} e \bar{w} como segue

$$p \wedge q(\bar{v}, \bar{w}) = p(\bar{w}) \otimes q(\bar{v}) - q(\bar{v}) \otimes p(\bar{w}). \quad (2.17)$$

Logo, $p \wedge q$ mapeia dois vetores em um corpo. Sendo assim, fazendo uso das propriedades das 1-formas, pode-se mostrar que $p \wedge q$ é de fato uma 2-forma. O produto exterior é então estendido para o produto de três 1-formas p, q e r como

$$p \wedge q \wedge r = p \otimes q \otimes r + q \otimes r \otimes p + r \otimes p \otimes q - q \otimes p \otimes r - r \otimes q \otimes p - p \otimes r \otimes q, \quad (2.18)$$

e conseqüentemente para o produto de um número n qualquer de formas. Ao conjunto de todas as formas de grau arbitrário equipado com a multiplicação \wedge anticomutativa, chama-se álgebra de Grassmann. A multiplicação de uma p -forma $r = r^1 \wedge r^2 \wedge \dots \wedge r^p$ por uma q -forma $s = s^1 \wedge s^2 \wedge \dots \wedge s^q$, é dada por

$$r \wedge s = (r^1 \wedge r^2 \wedge \dots \wedge r^p) \wedge (s^1 \wedge s^2 \wedge \dots \wedge s^q) . \quad (2.19)$$

A permutação de r^p com s^1 implica na troca de sinal do produto $r \wedge s$. Portanto, se r^p comuta simultaneamente com os s^1, s^2, \dots, s^q tem-se

$$r \wedge s = (-1)^q (r^1 \wedge r^2 \wedge \dots \wedge r^{p-1}) \wedge (s^1 \wedge s^2 \wedge \dots \wedge s^q) \wedge r^p . \quad (2.20)$$

Repetindo este procedimento para todos r^i ($i = 1, 2, \dots, p - 1$), obtém-se

$$r \wedge s = (-1)^{pq} s \wedge r . \quad (2.21)$$

A contração (ou produto interior) de um vetor \bar{v} com uma p -forma, é dada por

$$r(\bar{v}) = r(\bar{v}, \dots) , \quad (2.22)$$

ou

$$[r(\bar{v})]_{i_1, i_2, \dots, i_p} = r_{i_1, i_2, \dots, i_p} v^{i_1} . \quad (2.23)$$

Se o vetor \bar{v} estiver numa outra posição no argumento de r , será alterado apenas o sinal da expressão. Desta antissimetria segue que

$$[r(\bar{v})] = \frac{1}{(p-1)!} v^{i_1} r_{i_1, i_2, \dots, i_p} r^{i_1} \wedge r^{i_2} \wedge \dots \wedge r^{i_p} . \quad (2.24)$$

E tomando uma forma arbitrária s , escreve-se

$$(s \wedge r) = s(\bar{v}) \wedge r + (-1)^p r \wedge s(\bar{v}) . \quad (2.25)$$

Do conceito de formas diferenciais pode-se então inferir a definição de forma-volume, ou seja, do volume no espaço. Consideremos então uma variedade bidimensional M . Tomando nesta dois vetores \bar{a}, \bar{b} , pode-se fazer uma comparação com o \mathbb{R}^2 e estabelecer o cálculo da área delimitada por estes dois vetores como

$$A(\bar{a}, \bar{b}) = c , \quad (2.26)$$

onde c é um número e a função área A tem as propriedades de um tensor antissimétrico bilinear $(0, 2)$. Sendo assim a 2-forma A pode ser interpretada como uma forma volume no espaço das formas. Considerando, então, um conjunto de n vetores linearmente independentes em uma variedade n -dimensional M , define-se o volume

de um paralelepípedo n -dimensional como sendo o valor de uma n -forma aplicada nestes n vetores. Dividindo-se a variedade M em células infinitesimais expandidas pelas n -uplas de vetores $(\Delta x^1 \partial / \partial x^1, \Delta x^2 \partial / \partial x^2, \dots, \Delta x^n \partial / \partial x^n)$, onde (x^1, x^2, \dots, x^n) são as componentes de uma n -forma w nesta variedade, tem-se para o elemento de volume de uma única célula

$$\Delta x^1 \Delta x^2 \dots \Delta x^n = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n (\Delta x^1 \partial / \partial x^1, \Delta x^2 \partial / \partial x^2, \dots, \Delta x^n \partial / \partial x^n) . \quad (2.27)$$

Nesta expressão o termo $dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$ desempenha o papel de um elemento de volume no espaço das formas, que associa vetores infinitesimais no espaço tangente a um número. Com isto, conclui-se que a integração de uma função $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ no espaço das n -formas, é dada por

$$\int f(x^1, x^2, \dots, x^n) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n . \quad (2.28)$$

2.2.7 Derivada exterior

Chama-se derivada exterior, um operador d que realiza o mapeamento $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ de uma k -forma em uma $(k+1)$ -forma.

Considerando-se uma p -forma w , e as q -formas r e s , pode-se mostrar que

i) $d(r + s) = dr + ds$

ii) $d(w \wedge r) = dw \wedge r + (-1)^p w \wedge dr$

iii) $d(dw) = 0$

A propriedade (i) é resultante da linearidade de d , (ii) representa a regra de Leibniz a menos do fator $(-1)^p$ e (iii) é obtida da antissimetria das formas. Essas propriedades definem a operação. A contração de uma 1-forma dg , onde g é uma 0-forma, com um vetor unidimensional $\partial / \partial x$, é dado por

$$dg\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial g}{\partial x} . \quad (2.29)$$

Por outro lado, usando as propriedades das formas diferenciais, pode-se inferir que as formas df compõem um espaço vetorial. Desta maneira, tem-se que uma forma df qualquer, pode ser expressa como

$$df = c_1 dx^1 + c_2 dx^2 + \dots + c_n dx^n , \quad (2.30)$$

onde n é a dimensão do espaço das formas df e $c_i = \partial f / \partial x^i$. Como uma aplicação do conceito de derivada exterior, mostraremos agora alguns resultados clássicos do

cálculo diferencial no \mathbb{R}^3 . Tomemos um vetor $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ pertencente ao \mathbb{R}^3 . A sua 1-forma associada será

$$\begin{aligned} da &= d(a_1 dx^1 + a_2 dx^2 + a_3 dx^3) \\ &= \frac{\partial a_1}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^1 + \frac{\partial a_2}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^2 + \frac{\partial a_3}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^3, \end{aligned} \quad (2.31)$$

e como $dx^j \wedge dx^j = 0$, segue que

$$da = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^1} \right) dx^2 \wedge dx^1 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x^3} - \frac{\partial a_3}{\partial x^2} \right) dx^3 \wedge dx^2 + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^3. \quad (2.32)$$

Representando o dual de uma forma diferencial df por $*df$, podemos escrever para as formas envolvidas na última expressão

$$*da = \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^j} - \frac{\partial a_j}{\partial x^i} \right) \epsilon_{ijk} \frac{d}{dx^k}. \quad (2.33)$$

A expressão mostrada na equação acima é claramente a do rotacional em três dimensões e pode ser reescrita como

$$*da = \nabla \times \bar{a}. \quad (2.34)$$

Assim o operador $*d$ representa o operador rotacional no espaço das formas diferenciais. Outra conexão importante é obtida para o operador divergente. Tomando o dual de \bar{a}

$$\begin{aligned} *\bar{a} &= *(a^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + a^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + a^3 \frac{\partial}{\partial x^3}) \\ &= a^1 *(\frac{\partial}{\partial x^1}) + a^2 *(\frac{\partial}{\partial x^2}) + a^3 *(\frac{\partial}{\partial x^3}) \\ &= \frac{1}{2} a^i \epsilon_{ijk} dx^j \wedge dx^k. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Então a derivada exterior da última equação será

$$\begin{aligned} d_*\bar{a} &= \frac{\partial a^1}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial a^2}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^3 \wedge dx^1 + \frac{\partial a^3}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\ &= \frac{\partial a^i}{\partial x^i} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \end{aligned} \quad (2.36)$$

logo, tem-se

$$d_*\bar{a} = (\nabla \cdot \bar{a})w, \quad (2.37)$$

onde $w = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ é o elemento de volume em coordenadas cartesianas. A equação (2.37) representa a divergência no espaço das formas diferenciais sobre o \mathbb{R}^3 . E o operador d_* representa o divergente no espaço das formas diferenciais. Também pode-se mostrar que

$$d_*(da) = d(da) = 0. \quad (2.38)$$

Ou seja, o divergente do rotacional de uma forma é nulo. Estes resultados podem ser generalizados para o caso n -dimensional.

2.3 Grupos de Simetria

2.3.1 O Conceito de Grupo

Um grupo K é um conjunto com uma operação binária interna. Se a e b são dois elementos de K , então o par ordenado a, b corresponde a um terceiro e único elemento $c \in K$, que pode ser escrito como $c = ab$ e é chamado produto de a por b . A lei que determina c a partir de a e b é chamada lei de composição do grupo. Esta lei obedece as seguintes propriedades:

i) Associatividade: para três elementos a, b e $c \in K$, tem-se

$$(ab)c = a(bc) .$$

ii) Identidade: existe um único elemento $e \in K$, chamado identidade, tal que para todo $a \in K$ e satisfaz a relação

$$ae = ea = a .$$

iii) Inverso: cada $a \in K$, corresponde a um único elemento $a^{-1} \in K$, chamado inverso de a , tal que

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e .$$

Se além das propriedades acima, a lei de composição for comutativa, o grupo é chamado abeliano. Um grupo pode ser composto de um número finito de elementos (grupo finito), ou de um número infinito de elementos. Neste último caso, o número de elementos do grupo pode ser infinito enumerável ou infinito não enumerável. O conjunto dos racionais (sem o zero) formam um grupo com a lei sendo a multiplicação ordinária. Já o conjunto dos inteiros forma um grupo se a lei de combinação for a adição ordinária. Dado um grupo K , denomina-se subgrupo de K , a um subconjunto K_1 de K cujos elementos formam também um grupo com a mesma lei de composição de K . Muitos dos grupos de interesse na física são contínuos. Nesse caso há uma topologia subjacente na qual o produto e a aplicação $a \rightarrow a^{-1}$ (onde a é um elemento do grupo) são contínuos.

2.3.2 Grupos de Lie e Álgebras de Lie

Através da variação de alguns parâmetros de um determinado sistema físico, é possível manter inalterados os seus aspectos gerais, como se nenhuma variação houvesse acontecido. Sempre que isto é possível podemos concluir que estamos diante

de um sistema que possui algum tipo de simetria. Logo podemos afirmar que a simetria de um sistema é a imunidade que este possui a certas variações, mantendo suas características gerais. Por outro lado, o conceito de simetria pode ser entendido através da teoria de grupos, onde as chamadas trocas são representadas pelas operações do grupo. A imunidade é verificada pela invariância do sistema com respeito a aplicação destas operações. Esta invariância está intimamente ligada com as propriedades fundamentais que caracterizam um grupo. O sistema que satisfaz estas propriedades é dito “possuir” a simetria de um determinado grupo. A vantagem de se conhecer o grupo de simetria do sistema em estudo, está na possibilidade de usar a teoria de grupos para compreendê-lo melhor. De particular interesse na física são os grupos de Lie. Estes são grupos contínuos em que o produto e a aplicação $a \rightarrow a^{-1}$ são ademais diferenciáveis. Seus elementos dependem de um conjunto de parâmetros, a exemplo do grupo $GL(n, \mathbb{R})$, formado pelas matrizes reais $n \times n$ com seus elementos parametrizados pelos n^2 termos de cada matriz. Veja [41].

2.3.3 A ação de Grupos de Lie em variedades

Um grupo de Lie pode conter transformações atuando em objetos geométricos, como por exemplo variedades diferenciais. Daí a sua importância na física. Para citar exemplos, o $SO(3)$ é o grupo das rotações atuando no espaço Euclidiano usual \mathbb{R}^3 , enquanto que o grupo de Lorentz $O(1,3)$ é um conjunto de transformações agindo no espaço-tempo de Minkowski. No nosso caso, teremos o grupo das translações e rotações agindo sobre o plano Euclidiano (\mathbb{R}^2). Vamos a seguir introduzir um pouco dessas idéias.

• **Definição:** Seja G um grupo de Lie e M uma variedade diferenciável. A ação de G sobre M deve ser entendida como um mapa diferenciável da forma $\pi : G \times M \rightarrow M$ que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $ep = p$ para qualquer $p \in M$, onde e é o elemento identidade do grupo.

ii) $g_1(g_2p) = (g_1g_2)p$.

É comum usarmos a notação $\pi(g, p)$ ao invés de gp para denotar a ação de $g \in G$ sobre $p \in M$.

Do ponto de vista matemático, faz-se uma distinção entre as várias formas que um grupo de Lie pode agir sobre uma variedade diferencial M . π é dita ser

i) **Transitiva** se, para quaisquer $p_1, p_2 \in M$, existir um elemento $g \in G$, tal que $gp_1 = p_2$.

- ii) **Livre** se todo elemento não trivial $g \neq e$ de G não apresentar pontos fixos sobre M , isto é, dado $g \in G$ tal que $gp = p$ para algum $p \in M$, então necessariamente, $g = e$.
- iii) **Efetiva** se o elemento neutro $e \in G$ for o único elemento de G que define uma ação trivial sobre M , ou seja, se $gp = p$ para todo $p \in M$, então necessariamente, $g = e$.

2.3.4 Órbitas

Dado um ponto $p \in M$, a ação de G sobre p leva p em um subconjunto de M . Podemos imaginar que os elementos de G levam o ponto $p \in M$ para “dar uma volta” em M .

- **Definição:** A órbita de p pela ação π é o subconjunto de M definido por

$$G_p := \{gp \in M \mid g \in G\} \quad (2.39)$$

Observação: Note que se a ação de G sobre M for transitiva, então a órbita de qualquer $p \in M$ é a própria variedade M , pois dado qualquer ponto $q \in M$, pela definição da ação transitiva, sempre vai haver um $g_q \in G$ tal que $g_qp = q$. Na verdade pode-se mostrar que a ação de G sobre qualquer órbita G_p é sempre transitiva.

2.3.5 Fluxos

- **Definição:** Seja M uma variedade diferencial e X um campo vetorial definido sobre M . Uma curva integral $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ de X é uma curva em M cujo vetor tangente num ponto $p \in \gamma \subset M$ é $X|_p$.

A definição de curva integral pode ser melhor entendida em termos de coordenadas locais sobre M . Considere uma carta (U, ϕ) sobre M e seja $x(t)$ um ponto de uma curva integral γ sobre M . Sejam ainda $x^\mu(t)$ a μ -ésima componente de $\phi(x(t))$ e $X = X^\mu \partial / \partial x^\mu$ uma representação local do campo vetorial X . Assim, de acordo com a definição dada acima, as componentes $x^\mu(t)$ da curva integral devem satisfazer à seguinte equação diferencial:

$$\frac{dx^\mu}{dt} = X^\mu(x(t)) \quad (2.40)$$

Podemos dizer, portanto, que achar uma curva integral de um campo vetorial X equivale à resolver o sistema de equações diferenciais (2.40). As condições iniciais são dadas por

$$x_0^\mu = x^\mu(0) \quad (2.41)$$

que correspondem às coordenadas do ponto sobre M da curva integral em $t=0$. Vamos agora introduzir o conceito de fluxo. Dado um campo vetorial X em M , faça variar as condições iniciais (2.41) obtendo assim uma família de curvas integrais sobre M . À essa família dá-se o nome de fluxo.

2.3.6 Fibrados tangentes

Um fibrado tangente TM sobre uma variedade n -dimensional M é uma variedade diferencial formada a partir da união de todos os espaços tangentes de M :

$$TM \equiv \bigcup_{p \in M} T_p M . \tag{2.42}$$

A variedade M sobre o qual TM está definido é chamado espaço base. Deixe $\{U_i\}$ ser um recobrimento de M . Se $x^\mu = \phi_i(p)$ são coordenadas sobre U_i , um elemento de

$$TU_i \equiv \bigcup_{p \in U_i} T_p M \tag{2.43}$$

é especificado por um ponto $p \in M$ e um vetor $V = V^\mu(p)\partial/\partial x^\mu|_p \in T_p M$. Notando que U_i é homeomórfico a um subconjunto $\phi_i(U_i)$ de \mathbb{R}^n e cada $T_p M$ é homeomórfico a \mathbb{R}^n , nós concluímos que TU_i pode ser identificado com o produto direto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Se $(p, V) \in TU_i$, a identificação é feita por $(p, V) \mapsto (x^\mu(p), V^\mu(p))$. TU_i é uma

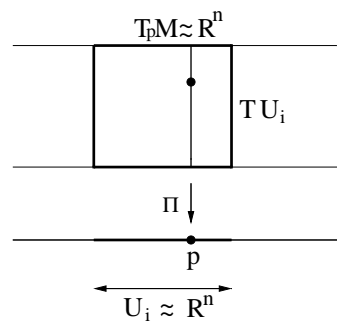


Figura 2.1: Um pedaço local $TU_i \approx \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de um fibrado tangente TM . π projeta um vetor $V \in T_p M$ em p .

variedade diferencial $2n$ -dimensional, decomposta em um produto direto $U_i \times \mathbb{R}^n$. Se escolhermos um ponto u de TU_i , nós podemos sistematicamente decompor a informação que u contém em um ponto $p \in M$ e um vetor $V \in T_p M$. Assim somos guiados ao conceito de projeção $\pi : TU_i \rightarrow U_i$. Para qualquer ponto $u \in TU_i$, $\pi(u)$ é um ponto $p \in U_i$ no qual o vetor está definido. A informação sobre o vetor é

completamente perdida com a projeção. Observe que $\pi^{-1}(p) = T_pM$. No contexto da teoria de feixes fibrados, T_pM é chamado de fibra sobre p . Pode parecer pela construção que, se $M = \mathbb{R}^n$, o fibrado tangente seja um produto direto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Contudo, esse não é o caso sempre, e a estrutura não-trivial do fibrado tangente mede a não-trivialidade topológica de M . Para observar isso nós devemos olhar não apenas para uma única carta U_i mas para outras cartas. Seja U_j uma carta tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ e seja $y^\mu = \psi(p)$ as coordenadas sobre U_j . Tome um vetor $V \in T_pM$ onde $p \in U_i \cap U_j$. V tem duas representações de coordenadas,

$$V = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p = \tilde{V}^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} \Big|_p . \quad (2.44)$$

É fácil ver que

$$\tilde{V}^\nu = \left(\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \right)_p V^\mu . \quad (2.45)$$

Para $\{x^\mu\}$ e $\{y^\nu\}$ serem bons sistemas de coordenadas, a matriz $(G_\mu^\nu) \equiv (\partial y^\nu / \partial x^\mu)$ deve ser não-singular: $(G_\mu^\nu) \in GL(n, \mathbb{R})$. Dois pontos da fibra são relacionados por um elemento de $GL(n, \mathbb{R})$. O grupo $GL(n, \mathbb{R})$ é chamado grupo de estrutura do TM , que pode ter uma estrutura topológica complicada. Note que a projeção π pode ser definida globalmente sobre M , pois $\pi(u) = p$ não depende da escolha de coordenadas. Seja X um campo vetorial sobre M . X determina um vetor $X|_p \in T_pM$ em cada ponto $p \in M$. Do nosso ponto de vista, X é considerado como um mapa $M \rightarrow TM$. Esse mapa não é completamente arbitrário, já que o ponto p deve ser mapeado com um ponto $u \in TM$ tal que $\pi(u) = p$. Define-se uma secção de TM como um mapa $\sigma : M \rightarrow TM$ tal que $\pi \circ \sigma = I$ (identidade sobre M). Se uma secção $\sigma_i : U_i \rightarrow TU_i$ está definida apenas sobre uma carta, ela é chamada secção local.

2.3.7 Feixes fibrados

Um feixe fibrado (E, π, M, F, G) consiste dos seguintes elementos:

- i) Uma variedade diferencial E chamada de espaço total.
- ii) Uma variedade diferencial M chamada de espaço base.
- iii) Uma variedade diferencial F chamada de fibra (ou fibra típica)
- iv) Uma aplicação $\pi : E \rightarrow M$ chamada de projeção. A imagem inversa $\pi^{-1}(p) \equiv F_p \cong F$ é chamada de fibra em p .
- v) Um grupo de Lie G chamado grupo de estrutura, que age sobre E .

vi) Um conjunto de abertos $\{U_i\}$ de M com um difeomorfismo $\phi_i : U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ tal que $\pi\phi_i(p, f) = p$. O mapeamento ϕ_i é chamado de trivialização local desde que ϕ_i^{-1} mapeie $\pi^{-1}(U_i)$ para o produto direto $U_i \times F$.

vii) Se nós escrevermos $\phi_i(p, f) = \phi_{i,p}(f)$, ($p \in M$ e $f \in F$) o mapeamento $\phi_{i,p} : F \rightarrow F_p$ é um difeomorfismo. Sobre $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, requeremos que $t_{ij}(p) \equiv \phi_{i,p}^{-1}\phi_{j,p} : F \rightarrow F$ seja um elemento de G . Então ϕ_i e ϕ_j estão relacionadas por um mapeamento diferenciável $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ como

$$\phi_j(p, f) = \phi_i(p, t_{ij}(p)f) , \tag{2.46}$$

onde as $\{t_{ij}\}$ são chamadas de funções de transição ou simplesmente funções transições. Vamos explicar melhor. Considere uma carta U_i do espaço base M . $\pi^{-1}(U_i)$ é um produto direto difeomórfico a $U_i \times F$, $\phi_i^{-1} : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$ sendo o difeomorfismo. Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, tem-se dois mapas ϕ_i e ϕ_j sobre $U_i \cap U_j$. Tome um ponto u tal que $\pi(u) = p \in U_i \cap U_j$. Determina-se assim dois elementos de F , um por ϕ_i^{-1} , e o outro por ϕ_j^{-1} ,

$$\phi_i^{-1}(u) = (p, f_i) \quad \phi_j^{-1}(u) = (p, f_j) . \tag{2.47}$$

Observe a figura (2.2). Existe um mapa $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ que relaciona f_i e f_j

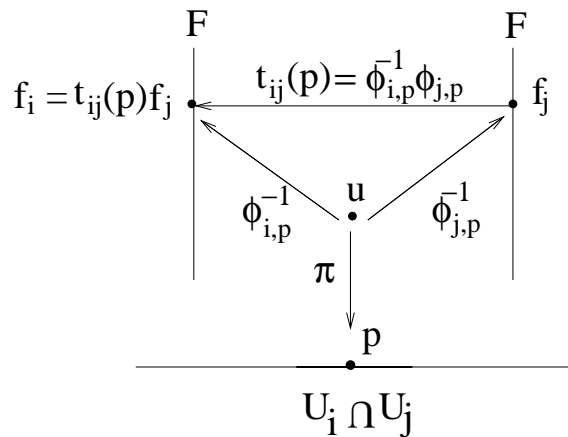


Figura 2.2: Em $U_i \cap U_j$, dois elementos f_i e $f_j \in F$ estão designados por $u \in \pi^{-1}(p)$, $p \in U_i \cap U_j$. Eles estão relacionados por $t_{ij}(p)$ como $f_i = t_{ij}(p)f_j$.

como $f_i = t_{ij}(p)f_j$. Requer-se que as funções de transição satisfaçam as seguintes condições de consistência:

- i) $t_{ii}(p) = \text{identidade} \quad (p \in U_i)$

- ii) $t_{ij}(p) = t_{ji}(p)^{-1} \quad (p \in U_i \cap U_j)$
 iii) $t_{ij}(p)t_{jk}(p) = t_{ik}(p) \quad (p \in U_i \cap U_j \cap U_k) \ .$

A menos que estas condições sejam satisfeitas, pedaços locais de um feixe fibrado não podem ser “colados” consistentemente. Se todas as funções de transição puderem ser consideradas identidades, o feixe fibrado é chamado de fibrado trivial. Um fibrado trivial é um produto direto $M \times F$. Dado um feixe fibrado (E, π, M, F, G) , o conjunto de funções transições é único. Seja $\{U_i\}$ um atlas de M e $\{\phi_i\}$ e $\{\tilde{\phi}_i\}$ dois conjuntos de trivializações locais dando origem ao mesmo feixe fibrado. As funções transições das respectivas trivializações locais são

$$\begin{aligned} t_{ij}(p) &= \phi_{i,p}^{-1} \phi_{j,p} \\ \tilde{t}_{ij}(p) &= \tilde{\phi}_{i,p}^{-1} \tilde{\phi}_{j,p} \ . \end{aligned} \tag{2.48}$$

Define-se um mapa $g_i(p) : F \rightarrow F$ em cada ponto $p \in M$ por

$$g_i(p) \equiv \phi_{i,p}^{-1} \tilde{\phi}_{j,p} \ . \tag{2.49}$$

Requer-se que $g_i(p)$ seja um homeomorfismo que pertença a G . Esta exigência deve certamente ser cumprida se $\{\phi_i\}$ e $\{\tilde{\phi}_i\}$ descreverem o mesmo feixe fibrado. É fácil ver de (2.48) e (2.49) que

$$\tilde{t}_{ij}(p) = g_i(p)^{-1} t_{ij}(p) g_j(p) \ . \tag{2.50}$$

Em situações práticas, t_{ij} são as transformações de gauge requeridas para manter as cartas locais juntas, enquanto g_i corresponde aos graus de liberdade de gauge dentro de uma carta U_i . Se um feixe fibrado é trivial, todas as funções de transição podem ser tomadas como mapas identidades. Nesse caso a forma mais geral de função transição é

$$t_{ij}(p) = g_i(p)^{-1} g_j(p) \ . \tag{2.51}$$

O exemplo mais simples de um feixe fibrado principal trivial é o caso em que o recobrimento consiste de apenas um conjunto aberto $U = M$, isto é, há apenas uma função transição $t_{ij} = I$ (identidade sobre G). Note que, se o feixe fibrado for trivial, ou seja $E \equiv M \times F$, as condições vi e vii estão automaticamente satisfeitas. Seja (E, π, M, F, G) um feixe fibrado. Uma secção $\sigma : M \rightarrow E$ é um mapa que satisfaz $\pi \circ \sigma = I_M$ (identidade sobre M). Veja que $\sigma(p) = \sigma|_p$ é um elemento de $F_p = \pi^{-1}(p)$. O conjunto das secções sobre M é denotado por $\Gamma(M, E)$. Se $U \subset M$, pode-se falar de uma secção local que está definida apenas sobre U . $\Gamma(U, E)$ denota o conjunto das secções locais sobre U . Nota: Uma referência relevante sobre o assunto é encontrada em [42].

2.3.8 Conexões e fibrados

Conexões estão associadas com certos mapeamentos que projetam espaços maiores para espaços menores. O espaço maior é chamado de fibrado e o espaço menor é chamado de base. As direções no espaço mais largo que são projetadas para o zero (elemento neutro) são chamadas verticais. Uma conexão é a especificação de um conjunto de direções, chamadas horizontais, em cada ponto, complementar ao espaço das direções verticais. Para um movimento cíclico na base o movimento horizontal sofrerá um desvio, chamado frequentemente “desvio de fase”, entre o começo e o fim de sua trajetória. A magnitude desse desvio dependerá da curvatura da conexão e da área que está encerrada pelo caminho no espaço base. Esse deslocamento no elemento vertical é dado por um elemento de um grupo, tal como um grupo de rotações ou translações, e é chamado de “fase geométrica”. Nos exemplos a serem discutidos adiante, o espaço base é o espaço de controle, no sentido de que o caminho neste espaço pode ser escolhido previamente. Dado qualquer caminho no espaço de controle (base do fibrado), há um caminho associado no espaço fibrado ou completo, chamado levantamento horizontal, que independe da parametrização temporal do caminho e da posição vertical inicial do sistema. Seguindo o caminho levantado ao longo de uma curva fechada no espaço das formas, obtém-se uma variação na posição vertical ao longo da fibra. Essa variação é justamente a fase geométrica.

2.3.9 Conexões e vínculos

Em alguns sistemas mecânicos, há “vínculos” sobre as velocidades permitidas ao sistema. Nos casos que examinaremos aparecem dois tipos fundamentalmente diferentes de vínculos: aqueles dados por leis de conservação e aqueles gerados por interações do tipo fricção com o meio. O problema dos corpos rígidos acoplados (que será apresentado no capítulo 3) fornece um exemplo do primeiro caso e o problema do automóvel (que será apresentado no capítulo 4) fornece um exemplo do segundo. Cada vínculo define o espaço horizontal de uma conexão. A conexão nesses dois casos é chamada de conexão mecânica. O movimento de um sistema mecânico no espaço de controle está relacionado à teoria da redução. Essa teoria torna o espaço de fase de um sistema mecânico menor, usando simetrias para eliminar algumas variáveis. Simetrias para sistemas mecânicos frequentemente manifestam-se como invariâncias do sistema dinâmico com respeito a translações e rotações. A teoria da redução se aproveita da invariância, para fornecer uma análise simplificada em termos do espaço base. Observar o movimento nesse espaço é equivalente a assistir a uma mudança da forma com relação a um observador fixo no objeto em questão. O problema de encontrar o caminho original completo (no espaço total) é o mesmo

de encontrar o caminho horizontal acima dele. Isto é chamado de problema de reconstrução. Note que a geração de fase geométrica está intimamente relacionado a este problema da reconstrução (levantamento horizontal).

Capítulo 3

Um potencial de gauge para um sistema de corpos rígidos acoplados

3.1 Introdução

Neste capítulo iremos considerar um sistema composto por dois corpos rígidos planos acoplados por um pino nos seus centros de massa, e abordá-lo sob a ótica de potenciais de gauge. Devido à conservação do momento angular, o movimento de um dos corpos induz um movimento do outro. Veja [43, 44, 45, 46]. Para entender melhor como esta reorientação ocorre, fazemos uma análise mais aprofundada do assunto, mostrando que esta reorientação está relacionada ao que os geômetras chamam de conexão. Na linguagem dos geômetras, esse efeito é um exemplo da holonomia de uma conexão natural sobre o fibrado principal associado com a redução simplética. O esquema formal é o seguinte: há um espaço de configuração total P que juntamente com a ação do grupo $SO(2)$ sobre ele (que consiste em movimentos rígidos do sistema como um todo) formam a estrutura de um feixe fibrado principal. Essa ação do grupo sobre o espaço P forma o espaço reduzido M , ou base do fibrado. Este espaço é também chamado de espaço das formas ou espaço de controle. Lembramos aqui que o nome “espaço das formas” pode se prestar a alguma confusão. Este nome não tem nenhuma relação com formas diferenciais, e sim com a forma (disposição) do sistema como um todo. Se o sistema representa uma estação espacial mais um rotor interno, o espaço reduzido representa a parte diretamente controlável do espaço total P . A conexão fornece a ponte ligando o movimento nesses dois espaços, e carrega com ela o vínculo que expressa a conservação do momento angular. Obviamente este exemplo é bastante simples para utilizarmos toda esta ferramenta matemática, ou seja, não precisamos da geometria das conexões para entendê-lo. No entanto ele serve como um exemplo simples no qual podemos testar as idéias. Para exemplos mais complexos, como é o caso do gato cadente, este estudo da geometria das conexões sem dúvida é bastante útil.

3.2 Aspectos gerais

Considere dois corpos rígidos planos acoplados por um pino em seus centros de massa, como mostra a figura (3.1). Observa-se que o sistema como um todo pode ser imaginado como um único corpo deformável. Estabelecemos três conjuntos de eixos referenciais: um fixado em cada corpo rígido e o terceiro fixo no espaço externo (referencial inercial). Os ângulos θ_1 e θ_2 são definidos como sendo os ângulos que cada corpo faz com a direção inercial fixa. Note que (θ_1, θ_2) trazem informações sobre a orientação do sistema com relação ao referencial inercial fixo.

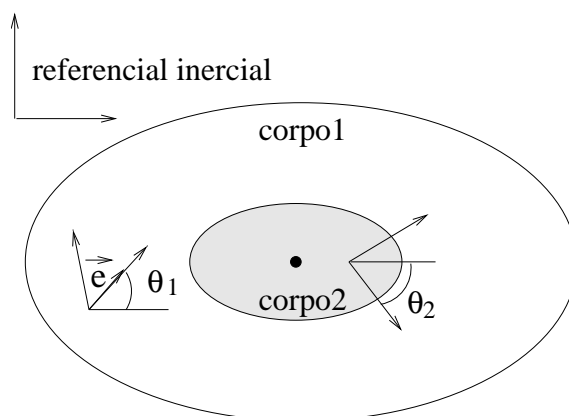


Figura 3.1: Um sistema de corpos rígidos acoplados

3.3 Reconhecendo o espaço e configuração do sistema como um fibrado principal

Para o modelo de corpos rígidos acoplados como estabelecido na seção anterior, há três espaços abstratos que podem ser idealizados. O espaço das configurações \mathbf{P} (espaço total), o espaço das formas \mathbf{M} (base do fibrado) e o espaço \mathbf{F} das orientações do corpo 1. Esta escolha para o espaço \mathbf{F} é totalmente arbitrária (poderíamos ter escolhido para o espaço \mathbf{F} as orientações do corpo 2). O espaço de configuração do sistema composto por dois corpos rígidos acoplados é o espaço de todas as orientações possíveis que este pode adotar, com respeito ao referencial inercial. O conjunto de coordenadas (θ_1, θ_2) descrevem pontos neste espaço. O espaço das formas é o espaço cujos pontos dão a forma do sistema, e carrega consigo informações sobre a orientação relativa dos dois corpos rígidos. O espaço das formas M é o círculo S^1 parametrizado pelo ângulo $\psi = \theta_2 - \theta_1$. As orientações do corpo 1 serão dadas

por θ_1 . Observe que $M, F \subset P$, e que o conhecimento da configuração $p \in P$ é equivalente (globalmente) ao conhecimento do par ordenado $(m, f) \in M \times F$, com $m \in M$ e $f \in F$. O espaço total P será portanto o produto direto $P \equiv M \times F$ da base M e a fibra F , constituindo um feixe fibrado trivial. Há um tipo de ação sobre os elementos do espaço P , consistindo em movimentos rígidos do sistema (quando os dois corpos giram juntos), que deixam a forma do sistema invariante. Esta ação age sobre P (pela esquerda), e constitui a estrutura de grupo do fibrado. Este grupo é o $SO(2)$, grupo das rotações no plano Euclidiano. Isso equivale a dizer que no espaço das configurações, parametrizado pelos ângulos θ_1, θ_2 , todas as configurações que diferem por um deslocamento rígido do sistema como um todo, corresponderão a um único ponto no espaço das formas. Em outras palavras, duas configurações serão ditas equivalentes quando a diferença entre os ângulos θ_1 e θ_2 , ou seja, sua orientação relativa, for a mesma. Esta ação forma portanto uma classe de equivalência em P . Vamos tomar o seguinte mapeamento

$$\pi : P \rightarrow M , \quad (3.1)$$

que determina para um conjunto de configurações equivalentes sua forma em M , isto é $m = \pi(p)$. Em coordenadas escreve-se

$$\pi : (\theta_1, \theta_2) \rightarrow (\psi = \theta_2 - \theta_1) . \quad (3.2)$$

Os pontos de M formam uma classe de equivalência em P , e será por isso denotado como sendo o espaço quociente $P/SO(2)$ (ver capítulo 1 – secção (2.2.1)). O conjunto $\pi^{-1} \subset P$ formado por todas as configurações equivalentes será chamado de fibra sobre m . Define-se uma *secção* do fibrado $\pi : P \rightarrow M$ como sendo um mapeamento $\sigma : M \rightarrow P$, obedecendo $\pi \circ \sigma = I$. Esta secção localiza para cada ponto do espaço M , um ponto correspondente no espaço P :

$$\sigma : M \rightarrow P . \quad (3.3)$$

Esse ponto correspondente irá constituir um ponto de referência $\sigma(m)$ na fibra sobre m . Vamos escolher arbitrariamente como pontos de referência, aquelas configurações no qual o corpo 1 está em uma orientação fixa, digamos $\theta_1 = 0$. Em coordenadas tem-se

$$\sigma : (\psi = \theta_2 - \theta_1) \rightarrow (\theta_1 = 0, \theta_2) . \quad (3.4)$$

A secção é portanto, composta de formas padrões. Podemos imaginar esta secção como formando o espaço das orientações relativas entre o corpo 1 e o corpo 2. Fazendo uma analogia, como se o sistema fosse uma estação espacial (corpo 1) e um rotor interno (corpo 2), a secção pode ser interpretada como sendo o ponto de vista

do astronauta: ele está parado com respeito ao seu sistema de referência (eixos fixos sobre o corpo 1), observando apenas a mudança do rotor (corpo 2). Qualquer outra escolha de uma secção (outro gauge) corresponde a um observador diferente (outro sistema de referência). Estes pontos de referência (formas padrões) constituem um subespaço $P_0 \subset P$ que estabelece as orientações relativas dos dois corpos.

3.4 A conservação do momento angular como uma conexão sobre o fibrado

Até agora verificamos que o espaço das configurações 2-dimensional de um sistema de corpos rígidos acoplados pode ser tratado como o espaço total de um fibrado principal (trivial) $\pi : P \rightarrow M$, onde $P \equiv SO(2) \times SO(2)$ e $M \equiv SO(2)$. Considere o modelo da figura (3.1). Vamos começar recordando alguns fundamentos da mecânica. Em primeiro lugar, o momento angular para um corpo rígido é o momento de inércia vezes a velocidade angular. Em segundo lugar, o momento angular para uma estrutura articulada é a soma dos momentos angulares de suas partes rígidas. Cada parte tem sua própria velocidade angular. Seja I_1 e I_2 os momentos de inércia dos corpos 1 e 2, respectivamente, e θ_1 e θ_2 os ângulos que eles fazem com uma direção inercial fixa. Considerando a conservação do momento angular chegamos a uma relação que traduz o seguinte fato: uma mudança na orientação de um dos corpos induz uma mudança na orientação do outro. Esta relação é dada por $I_1\dot{\theta}_1 + I_2\dot{\theta}_2 = \mu = \text{constante}$. Podemos parametrizar o espaço de configuração do sistema por θ_1 e θ_2 ou por $\theta = \theta_1$ e $\psi = \theta_2 - \theta_1$. Vamos por conveniência e sem perda de generalidade escolher esta última parametrização. Então a conservação do momento angular fica

$$I_1\dot{\theta} + I_2(\dot{\theta} + \dot{\psi}) = \mu ; \text{ isto é } d\theta + \frac{I_2}{I_1 + I_2}d\psi = \frac{\mu}{I_1 + I_2}dt . \quad (3.5)$$

Suponha que o momento angular total seja zero; $\mu = 0$ ($J=0$). Da equação (3.5) tem-se

$$d\theta + \frac{I_2}{I_1 + I_2}d\psi = 0 . \quad (3.6)$$

O cálculo da conexão é feito no apêndice B. O resultado é

$$w = d\theta + \frac{I_2}{I_1 + I_2}d\psi . \quad (3.7)$$

Portanto, o potencial de gauge (no gauge σ) é dado por

$$\mathcal{A} := \sigma^*\omega = \frac{I_2}{I_1 + I_2}d\psi . \quad (3.8)$$

3.5 Reconstrução de $\gamma(t)$ sobre P a partir de $m(t)$ sobre M como um levantamento horizontal

A ação do controlador do rotor é representado por uma curva $m(t) \equiv \pi(\gamma(t))$ sobre M (uma sequência de formas parametrizadas pelo tempo). Da condição de conservação do momento angular, um movimento no espaço M está associado a um movimento no espaço de configuração P . Isto é, podemos controlar a orientação do sistema por uma mudança na sua forma. Por esse motivo o espaço das formas é também chamado de espaço de controle. Esta trajetória resultante sobre P é o levantamento horizontal da curva $m(t)$, isto é, a curva $m^h(t)$ sobre P que tem as seguintes propriedades:

- i) $\pi(m^h(t)) = m(t) \longleftrightarrow m^h(t)$ está sempre exatamente “sobre” $m(t)$.
- ii) $\dot{m}^h \equiv \mathbf{v}$ seu vetor tangente (vetor velocidade) - está sempre na horizontal, isto é, ele aniquila w . Ou ainda, $w(\mathbf{v}) = 0$.

Deixe nos expressar essas condições em coordenadas. Se

$$m(t) \longleftrightarrow (\psi(t) = \theta_2(t) - \theta(t)) \quad (3.9)$$

é dado, então seu levantamento horizontal é

$$m^h \longleftrightarrow (\theta(t), \psi(t)) . \quad (3.10)$$

Note que ψ será o mesmo, e que θ será determinado. Sendo assim

$$\mathbf{v} = \dot{m}^h = \dot{\theta}(t)\partial_\theta + \dot{\psi}(t)\partial_\psi . \quad (3.11)$$

onde ∂_θ e ∂_ψ formam uma base no espaço de configuração P . Mas

$$\begin{aligned} \langle w, \dot{m}^h(t) \rangle = 0 &\Rightarrow \left(d\theta + \frac{I_2}{I_1 + I_2} d\psi \right) \left(\frac{d}{dt} \right) = 0 \\ d\theta \left(\frac{d}{dt} \right) + \frac{I_2}{I_1 + I_2} d\psi \left(\frac{d}{dt} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

ou seja

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) + \frac{I_2}{I_1 + I_2} \dot{\psi}(t) &= 0 \\ \dot{\theta}(t) &= -\frac{I_2}{I_1 + I_2} \dot{\psi}(t) . \end{aligned} \quad (3.13)$$

Substituindo (3.13) em (3.11), tem-se

$$\begin{aligned} \dot{m}^h &= -\frac{I_2}{I_1 + I_2} \dot{\psi}(t) \partial_\theta + \dot{\psi}(t) \partial_\psi \\ &= \dot{\psi}(t) \left(\partial_\psi - \frac{I_2}{I_1 + I_2} \partial_\theta \right) . \end{aligned} \quad (3.14)$$

Entretanto, \dot{m}^h pode ser escrito também como

$$\dot{m}^h = \dot{\psi}(t) H_\psi . \quad (3.15)$$

onde H_ψ é o levantamento horizontal do vetor base sobre M . Então comparando a equação (3.14) com a (3.15), tem-se que

$$H_\psi = \partial_\psi - \frac{I_2}{I_1 + I_2} \partial_\theta \quad (3.16)$$

A equação de 1^o ordem linear (3.13) resolve o problema da reconstrução: dado $\psi(t)$ para $t \in \langle t_i, t_f \rangle$ (sequência de pontos no espaço das formas) e $\theta(t_i)$ (a posição inicial na fibra sobre $m(t_i)$ isto é, a posição inicial do corpo 1), ela provê a informação restante sobre o movimento do sistema, que é a sequência das posições do corpo 1 correspondente a sequência dada de formas. A configuração transportada paralelamente é então por definição a configuração $m^h(t_f)$.

3.6 A Curvatura

Como acabamos de mostrar, a conexão nos leva (no gauge escolhido) a um potencial de gauge. A esta conexão, temos associado também uma curvatura, dada por

$$\Omega^a = dw^a + \frac{1}{2} c_{bc}^a w^b \wedge w^c , \quad (3.17)$$

onde c_{bc}^a são as constantes de estrutura do grupo. Acontece que, neste caso, o grupo é unidimensional. E assim a curvatura reduz-se a

$$\Omega^a = dw^a . \quad (3.18)$$

E como a conexão é dada por

$$w = d\theta + \frac{I_2}{I_1 + I_2} d\psi . \quad (3.19)$$

então a curvatura associada a ela é nula.

3.7 Campo associado

Os potenciais de gauge $\mathcal{A} \equiv \sigma^*\omega$ (e as intensidades de campo $\mathcal{F} \equiv \sigma^*\Omega$, para o caso em que a curvatura seja não nula) não formam os únicos blocos constituintes da teoria de gauge de partículas elementares. Há também campos de partículas ou campos fonte; partículas interagem via campos de gauge (bósons). Neste modelo de corpos rígidos acoplados, usamos apenas a parte da teoria que envolve conexões. A questão que surge é: há um objeto neste modelo que é descrito matematicamente por um campo de partícula? Se a resposta for positiva, qual seria este objeto e, nesse contexto, faz sentido algum cálculo com ele? Se V é um espaço vetorial na qual a representação ρ age, então um campo de partículas do tipo ρ é uma função Ψ sobre P , que assume valores sobre o espaço vetorial V , que se transforma de acordo com a representação ρ com respeito a ação de G sobre P ; em nosso modelo isso significa

$$\Psi : P \rightarrow V \quad (3.20)$$

tal que

$$\Psi(Rp) = \rho(R^{-1})\Psi(p) . \quad (3.21)$$

Vamos dar a seguir um exemplo simples. Deixe $V = \mathbb{R}^2$ e defina a função Ψ sobre P

$$\Psi : (\theta, \psi) \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} . \quad (3.22)$$

Então $\Psi(p)$ fornece justamente as componentes do vetor unitário \vec{e} (fixo sobre o referencial do corpo 1 e dirigido ao longo do eixo y), projetadas sobre o referencial inercial. Ver figura (3.1). A ação de $SO(2)$ tem a forma explícita

$$(\theta, \psi) \mapsto R(\theta, \psi) \equiv (\theta + \Theta, \psi) \quad (3.23)$$

e assim, se

$$\Psi(p) \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

então

$$\Psi(Rp) \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos(\theta + \Theta) \\ \sin(\theta + \Theta) \end{pmatrix} = \quad (3.25)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} =: \rho(R^{-1}) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

onde a representação ρ de $SO(2)$ em $V \equiv \mathbb{R}^2$ é dado pela rotação

$$\rho(R) \equiv \begin{pmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta \\ -\sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix} . \quad (3.27)$$

Sendo assim nosso Ψ é o campo da partícula do tipo ρ dado por (3.27). Deixe o movimento em M ser dado por $m(t) \leftrightarrow (\psi(t))$. Então a mudança $\delta\vec{e}$ do vetor \vec{e} entre t e $t + \delta t$ pode ser calculada como

$$\delta\vec{e} \leftrightarrow \delta t \dot{m}^h \Psi = -\delta t \frac{I_2}{I_1 + I_2} \dot{\psi} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

onde $\dot{m}^h = \dot{\psi}(t)H_\psi$ e $H_\psi = \partial_\psi - \frac{I_2}{I_1+I_2}\partial_\theta$.

Note que $\begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$ é justamente o vetor unitário ortogonal a \vec{e} .

Podemos escrever $\delta\vec{e}$ também como

$$\delta\vec{e} \leftrightarrow = \begin{pmatrix} -\sin \theta \delta\theta \\ \cos \theta \delta\theta \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

e assim, comparando as expressões (3.28) e (3.29), o ângulo “líquido” de rotação do vetor \vec{e} será

$$\delta\theta \equiv -\delta t \frac{I_2}{I_1 + I_2} \dot{\psi} \equiv -\frac{I_2}{I_1 + I_2} \delta\psi \quad (3.30)$$

que é exatamente a condição de conservação do momento angular, dada por (3.6).

O mesmo ângulo pode ser calculado dentro da fixação de gauge σ , fazendo uso da derivada covariante de

$$\Phi := \sigma^* \Psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow e_1^{\vec{}} \quad (3.31)$$

que é

$$\delta\Phi = \delta t \nabla_{\dot{m}}(\sigma^* \Psi) = \delta t \langle \sigma^* D\Psi, \dot{m} \rangle = -\delta\psi \frac{I_2}{I_1 + I_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow -\delta\psi \frac{I_2}{I_1 + I_2} e_2^{\vec{}} \quad (3.32)$$

ou

$$\delta e_1^{\vec{}} = -\delta\psi \frac{I_2}{I_1 + I_2} e_2^{\vec{}} \quad (3.33)$$

em concordância com (3.30).

3.8 Comentários finais

Dada a condição

$$d\theta = -\frac{I_2}{I_1 + I_2} d\psi \quad (3.34)$$

estabelecida pela conservação do momento angular, integrando-a temos

$$\Delta\theta = -\frac{I_2}{I_1 + I_2} \int_0^{2\pi} d\psi . \quad (3.35)$$

Em particular, se pensarmos no corpo 1 (maior) como uma estação espacial e o corpo 2 como um rotor interno a esta estação, o resultado acima mostra que manipulando o rotor, podemos controlar a orientação da estação. Observe que se quisermos girar o corpo 1 (estação espacial) por um ângulo $-2\pi KI_2/(I_1 + I_2)$ radianos, onde K é um número inteiro, tudo o que precisamos fazer é girar o corpo 2 (rotor) ao redor de si mesmo, K vezes. A conexão plana para um fibrado principal (trivial) $\pi : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$ dado por $\pi(\theta, \psi) = \psi$ estabelece uma ponte entre o movimento no espaço “controlável” \mathbf{M} e o espaço \mathbf{F} . Ela é dada por $\omega = d\theta + \frac{I_2}{I_1 + I_2} d\psi$, e foi obtida de uma interpretação geométrica. A conexão reflete a afirmação dada acima, sobre o fato de que manipulando o movimento do rotor, podemos controlar a orientação da estação espacial. Em outras palavras, o potencial de gauge obtido $\mathcal{A} := \sigma^*\omega = \frac{I_2}{I_1 + I_2} d\psi$, significa que a estação (corpo 1) está num “estado” pronto para responder com um movimento, caso o rotor (corpo 2) gire.

Capítulo 4

A cinemática de um automóvel e potenciais de gauge

4.1 Introdução

Para ilustrar melhor as idéias introduzidas até agora, fornecemos neste capítulo mais um exemplo da abordagem de gauge para sistemas mecânicos. Desta vez, iremos reformular em termos da teoria de potenciais de gauge, a cinemática do movimento de um carro. Nesse caso o grupo de gauge é o $E(2)$, o grupo Euclidiano das translações e rotações no plano 2-dimensional. A idéia principal será mantida: mostrar como as técnicas da matemática de campos de gauge podem ser usadas dentro de um contexto clássico. O esquema formal também será o mesmo. Há um espaço de configuração total P que juntamente com a ação do grupo $E(2)$ sobre ele (que consiste em movimentos rígidos do carro (translações e rotações)) formam a estrutura de um feixe fibrado principal. Essa ação do grupo sobre o espaço P forma o que pode ser chamado de espaço das órbitas M , ou base do fibrado, e representa a parte diretamente controlável do espaço total P . Do mesmo modo que ocorre no capítulo anterior, a conexão fornece a ponte ligando o movimento nesses dois espaços, diferindo entretanto na sua origem física. Neste caso a conexão carrega consigo os vínculos que expressam a condição de contato não deslizante da roda do carro com a estrada. Outra diferença deste exemplo para o do capítulo anterior, é que este apresenta a curvatura associada a conexão diferente de zero, sendo portanto um exemplo mais completo.

4.2 Aspectos Gerais

Considere o modelo da figura (4.1). As coordenadas (x, y) são as coordenadas cartesianas do centro do eixo frontal, φ é o ângulo entre o eixo x_1 e o eixo do carro (eixo principal), fornecendo a orientação do veículo, β é o ângulo formado pelo eixo

frontal e o eixo principal, e α mede o deslocamento da roda frontal ou em outras palavras mede a orientação da roda com respeito ao seu eixo. Lembramos aqui que as rodas dianteiras (assim como as traseiras) de um carro não giram com a mesma velocidade angular em geral (é necessário um dispositivo chamado diferencial que compensa essa diferença). Sendo assim quando nos referimos ao ângulo α como sendo o ângulo que mede a orientação da roda frontal, na verdade estamos considerando um ângulo médio. Ou, equivalentemente, calculando tudo como se o carro fosse um triciclo (e assim α é o ângulo da roda frontal). Mas isto é apenas um detalhe técnico, pois os cálculos levando em consideração as duas rodas podem ser feitos, entretanto não trazem nenhum conceito novo. Note que (x, y, φ) trazem informações sobre a posição do eixo principal no plano x_1x_2 sem levar em conta a forma exata do carro e α e β determinam a forma do carro indiferentemente da posição do eixo principal no plano x_1x_2 .

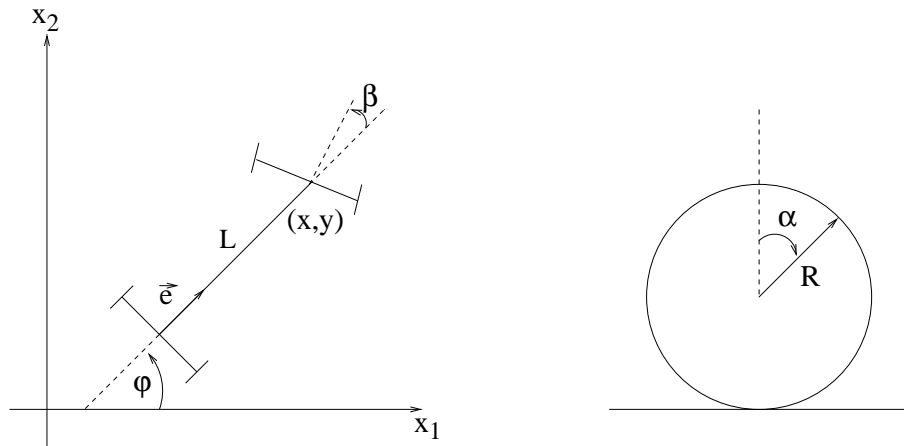


Figura 4.1: Uma configuração instantânea do automóvel no plano x_1x_2 e da roda com respeito a seu eixo.

4.3 Reconhecendo o espaço de configuração de um carro como um fibrado principal

Para o modelo de um carro no plano x_1x_2 como estabelecido acima, há três espaços abstratos que podem ser naturalmente idealizados. O espaço das configurações \mathbf{P} (espaço total), o espaço das formas \mathbf{M} e o espaço das localizações do eixo principal \mathbf{F} . O espaço das configurações de um carro é o espaço de todas as formas possíveis que este pode adotar no plano, levando em consideração a localização do eixo principal.

O espaço das formas de um carro é o espaço cujos pontos estabelecem o formato do carro, entretanto sem considerar a posição do eixo principal no plano x_1x_2 . O terceiro e último espaço fornece exclusivamente a localização do eixo principal no plano x_1x_2 . Portanto, com tudo o que foi dito até agora, podemos afirmar que: o conjunto de coordenadas $(\alpha, \beta, x, y, \varphi)$ constitui o espaço das configurações P , os ângulos α e β representam pontos no espaço das formas M (espaço de controle) e por último (x, y, φ) , representam pontos no espaço F . Observe que $M, F \subset P$, e que o conhecimento da configuração $p \in P$ é equivalente (globalmente) ao conhecimento do par ordenado $(m, f) \in M \times F$ com $m \in M$ e $f \in F$. Ou seja, o espaço total P é o produto direto $P = M \times F$ da base M e a fibra típica F , constituindo assim um feixe fibrado trivial. Há um tipo de ação sobre os elementos do espaço P , consistindo em movimentos rígidos do carro (translações e rotações), que deixam o formato do carro invariante. Esta ação constitui um grupo de estrutura. Este grupo é o grupo euclideo das translações e rotações no plano 2-dimensional, ou seja, o grupo $E(2)$. Deste modo, duas configurações p e p' são ditas serem equivalentes, se diferem uma da outra apenas por um movimento rígido do $E(2)$, formando uma classe de equivalência em P . Imagine que p pertença a uma determinada classe de equivalência em P . Vamos tomar o seguinte mapeamento

$$\pi : P \rightarrow M \tag{4.1}$$

que determina para um conjunto de configurações equivalentes sua forma em M , ou seja $m = \pi(p)$. Em coordenadas, escreve-se

$$\pi : (\alpha, \beta, x, y, \varphi) \rightarrow (\alpha, \beta) . \tag{4.2}$$

Como os pontos de M formam por construção uma classe de equivalência em P , denota-se M como sendo o espaço quociente $P/E(2)$. O conjunto $\pi^{-1}(m) \subset P$ formado por todas as configurações equivalentes será a fibra sobre m . Duas fibras quaisquer $\pi^{-1}(m)$ e $\pi^{-1}(m')$ são mutuamente difeomórficas e seu modelo abstrato, a fibra típica, é um exemplar do espaço F que por sua vez é difeomórfica ao grupo $E(2)$. Como vimos o espaço dos fibrados total P é dado pelo produto $M \times F$, isto é

$$P = M \times F , \tag{4.3}$$

sendo portanto um fibrado trivial. Logo π é interpretado como uma projeção π_1

$$\pi_1 : M \times F \rightarrow M \quad (m, f) \mapsto m . \tag{4.4}$$

Define-se uma secção do fibrado $\pi : P \rightarrow M$ como sendo um mapeamento

$$\sigma : M \rightarrow P , \tag{4.5}$$

obedecendo

$$\pi \circ \sigma = I_M \text{ (identidade sobre } M \text{)} . \quad (4.6)$$

Ou seja, a secção localiza cada ponto do espaço M em algum lugar no plano x_1x_2 . A secção trivial é dada em coordenadas por

$$\sigma : (\alpha, \beta) \mapsto (\alpha, \beta, 0, 0, 0) . \quad (4.7)$$

Esta secção portanto define (para todo $m \in M$) o ponto de referência $\sigma(m)$ na fibra sobre m . Esse ponto é (por definição) rotulado pelas coordenadas $(\alpha, \beta, 0, 0, 0)$. Então um ponto arbitrário p na mesma fibra adquire as coordenadas $(\alpha, \beta, x, y, \varphi)$ se o elemento $(B, b) \in E(2)$ com

$$R = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

e

$$b = (x, y) \quad (4.9)$$

é necessário para se obter p de $\sigma(m)$ via a ação do grupo.

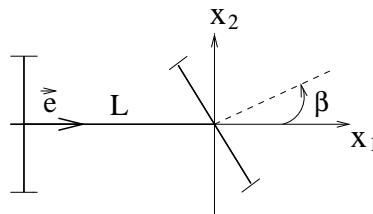


Figura 4.2: A fixação do gauge σ .

A secção trivial é portanto composta de formatos padrões. Podemos imaginar esta secção como formando o espaço das orientações relativas entre o eixo principal e o eixo frontal, levando em consideração é claro a disposição da roda. Ou ainda, interpretá-la como sendo o ponto de vista do motorista: com respeito a seu sistema de referência (eixos x_1 e x_2) o eixo principal está sempre na origem e dirigido para frente ($x = y = \varphi = 0$), ou seja, ele observa apenas a mudança do eixo frontal (volante) e do pedal (acelerador), o qual faz a roda (α) girar. Qualquer outra escolha de uma secção (outro gauge) corresponde a um observador diferente (outro sistema de referência).

4.4 A condição de não deslizamento da roda como uma conexão sobre $\pi : P \rightarrow M$

Até agora verificamos que o espaço das configurações 5-dimensional de um carro pode ser tratado naturalmente como o espaço total de um fibrado principal (trivial) $\pi : P \rightarrow M$, $P \equiv M \times F$. Um movimento do carro sobre a estrada (plano x_1x_2) é dada por uma curva $\gamma(t) \equiv (m(t), f(t))$ sobre $P \equiv M \times F$. A projeção desta curva para o espaço de controle $m(t) \equiv \pi \circ \gamma(t)$ resulta em uma curva nesse espaço. Esta curva (projeção) entretanto, está sob o controle direto do motorista ($\alpha(t)$ – acelerador; $\beta(t)$ – volante). [Por esse motivo, o espaço das formas é chamado espaço de controle.] Não obstante, a real intenção do motorista é mudar a posição do eixo principal, ou seja, mover-se ao longo de uma curva desejada $f(t)$ na fibra típica F do fibrado. A “ponte” necessária entre o “movimento” nesses dois espaços, M e F , é dada por um sistema de vínculos diferenciais (anolonômicos) representado fisicamente pela condição de contato não-deslizante das rodas com a estrada. Resumindo, a atividade do motorista representado pela curva $m(t)$ sobre M é transformada na curva $f(t)$ sobre F ou, equivalentemente, $\gamma(t) \equiv (m(t), f(t))$ sobre P . Como veremos, o procedimento de reconstrução da curva completa $\gamma(t)$ sobre P a partir de sua projeção $m(t)$ sobre M é justamente o levantamento horizontal $m \mapsto m^h \equiv \gamma$, onde a estrutura necessária para isso, é a conexão no fibrado principal $\pi : P \rightarrow M$ (estrutura de gauge sobre M). O vínculo de contato pode ser interpretado em termos da conexão sobre P . Em geral uma conexão sobre um feixe fibrado principal $\pi : P \rightarrow M$ com um grupo G é dada por uma 1-forma (forma diferencial) que assume valores na álgebra de Lie (\mathcal{G}) do grupo G . No nosso caso ela é uma matriz 3×3 de 1-formas sobre P decomposta com respeito a base (geradores) e_0, e_1, e_2 da álgebra de Lie $e(2)$ do grupo $E(2)$

$$w = w^a e_a = w^0 e_0 + w^1 e_1 + w^2 e_2 \quad (4.10)$$

$$w = \begin{pmatrix} 0 & w^0 & 0 \\ -w^0 & 0 & 0 \\ w^1 & w^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

onde w^0, w^1, w^2 são 1-formas sobre P . Então a condição de horizontabilidade

$$w = 0 \quad \text{isto é} \quad w^0 = w^1 = w^2 = 0 \quad (4.12)$$

representa justamente 3 relações independentes entre as diferenciais $d\alpha, d\beta, dx, dy, d\varphi$, possibilitando expressar as mudanças infinitesimais $\delta x, \delta y, \delta\varphi$ das coordenadas do eixo principal em termos das mudanças dadas $\delta\alpha, \delta\beta$ das coordenadas da forma do

carro. O cálculo da expressão explícita para a forma da conexão é feita no apêndice B (referente a este capítulo). O resultado é

$$\begin{aligned} w^0 &= d\varphi - \frac{R}{L} \sin \beta d\alpha \\ w^1 &= dx + yw^0 - R \cos(\beta + \varphi) d\alpha \\ w^2 &= dy - xw^0 - R \sin(\beta + \varphi) d\alpha \end{aligned} \quad (4.13)$$

Se fixa-se o gauge pela escolha da secção σ , o potencial de gauge (no gauge σ) é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{A} := \sigma^* \omega &= \mathcal{A}^a e_a = \mathcal{A}^0 e_0 + \mathcal{A}^1 e_1 + \mathcal{A}^2 e_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A}^0 & 0 \\ -\mathcal{A}^0 & 0 & 0 \\ \mathcal{A}^1 & \mathcal{A}^2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{R}{L} \begin{pmatrix} 0 & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & 0 & 0 \\ L \cos \beta & L \sin \beta & 0 \end{pmatrix} d\alpha. \end{aligned} \quad (4.14)$$

4.5 Reconstrução de $\gamma(t)$ sobre \mathbf{P} a partir de $m(t)$ sobre \mathbf{M} como um levantamento horizontal

Como vimos a atividade do motorista é representado por uma curva $m(t) \equiv \pi(\gamma(t))$ sobre \mathbf{M} (uma sequência de formas parametrizadas pelo tempo), e a trajetória resultante $\gamma(t)$ sobre \mathbf{P} é o levantamento horizontal da curva $m(t)$ sobre \mathbf{M} . Este levantamento horizontal é a única curva $m^h(t)$ sobre \mathbf{P} desfrutando das duas seguintes propriedades:

- i) $\pi(m^h(t)) = m(t) \longleftrightarrow m^h(t)$ está sempre exatamente “sobre” $m(t)$.
- ii) $\dot{m}^h \equiv$ seu vetor tangente (vetor velocidade) - está sempre na horizontal, isto é, ele aniquila w^a , $a = 0, 1, 2$. Ou ainda, $w(\mathbf{v}) = 0$.

Deixe nos expressar essas condições em coordenadas. Se

$$m(t) \longleftrightarrow (\alpha(t), \beta(t)) \quad (4.15)$$

é dado, então seu levantamento horizontal é

$$m^h \longleftrightarrow (\alpha(t), \beta(t), x(t), y(t), \varphi(t)). \quad (4.16)$$

Note que α e β são os mesmos, e que x , y e φ serão determinados. Sendo assim

$$\mathbf{v} = \dot{m}^h = \dot{\alpha}(t) \partial_\alpha + \dot{\beta}(t) \partial_\beta + \dot{x}(t) \partial_x + \dot{y}(t) \partial_y + \dot{\varphi}(t) \partial_\varphi \quad (4.17)$$

e já que $w^a(\dot{m}^h(t)) = 0$, ou seja

$$\langle w^a, \dot{m}^h(t) \rangle = 0 \quad a = 0, 1, 2 \quad (4.18)$$

então

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \dot{\alpha} \frac{R}{L} \sin \beta \\ \dot{x} &= \dot{\alpha} R \cos(\beta + \varphi) \\ \dot{y} &= \dot{\alpha} R \sin(\beta + \varphi) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Além disso

$$\dot{m}^h = \dot{\alpha}(t)H_\alpha + \dot{\beta}(t)H_\beta \quad (4.20)$$

onde

$$H_\alpha \equiv \partial_\alpha^h := \partial_\alpha + R \cos(\beta + \varphi) \partial_x + R \sin(\beta + \varphi) \partial_y + \frac{R}{L} \sin \beta \partial_\varphi \quad (4.21)$$

$$H_\beta \equiv \partial_\beta^h := \partial_\beta \quad (4.22)$$

são os levantamentos horizontais da base vetorial de coordenadas sobre M .

O sistema de equações de 1º ordem linear (4.19) (as equações de transporte paralelo) resolve o problema da reconstrução: dados $\alpha(t), \beta(t)$ para $t \in \langle t_i, t_f \rangle$ (sequência de pontos no espaço das formas) e $(x(t_i), y(t_i), \varphi(t_i))$ (a posição inicial na fibra sobre $m(t_i)$ isto é, a posição inicial do carro sobre a estrada), ele provê a informação restante sobre o movimento do carro, que é a sequência das posições do eixo principal correspondente a sequência dada de formas. A configuração transportada paralelamente é então por definição a configuração $m^h(t_f)$. Note que as equações (4.19) são invariantes (como é o caso geral para as equações de transporte paralelo) com respeito a reparametrização – a velocidade de sequência dos pontos no espaço das formas é irrelevante, pois o que importa é apenas a trajetória correspondente a $m(t)$ no espaço F .

4.6 O ciclo de estacionamento como um uso inteligente da curvatura Ω da conexão

Para sair de uma vaga de estacionamento extremamente apertada, uma translação pura do eixo principal perpendicular a este, seria útil (a fim de não batermos no carro vizinho). Isto significa (infinitesimalmente)

$$(x, y, \varphi) \mapsto (x - \epsilon \sin \varphi, y + \epsilon \cos \varphi, \varphi) \quad (4.23)$$

com $\epsilon \ll 1$. Ver figura (4.3).

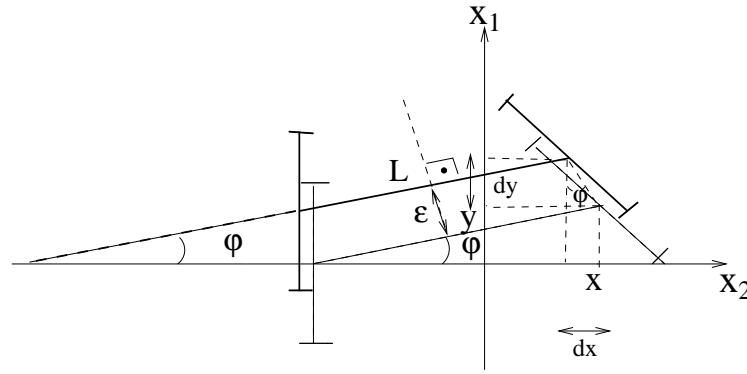


Figura 4.3: Uma translação infinitesimal perpendicular ao eixo principal.

Entretanto, este movimento perpendicular ao eixo principal não é permitido pois viola o vínculo de contato não deslizante, ou em outras palavras, apenas os movimentos gerados por algum levantamento horizontal m^h são possíveis (permitidos pelos vínculos). Isto é

$$(x, y, \varphi) \mapsto (x + \epsilon \cos(\varphi + \beta), y + \epsilon \sin(\varphi + \beta), \varphi + \frac{\epsilon}{L} \sin \beta) \quad (4.24)$$

($\epsilon = \dot{\alpha} R \delta t \ll 1$).

Em nenhum caso especial (4.24) reduz-se a (4.23): (4.24) consiste de ambos translação e rotação exceto para o caso $\beta = 0$, quando entretanto, a translação é justamente ao longo do eixo principal. Então parece que estamos sem sorte e teremos que esperar o carro da frente sair. Essa conclusão é precipitada, já que ainda não usamos o algoritmo básico de estacionamento conhecido por qualquer motorista, que é um ciclo no espaço M . Deixe nos estudar por um momento o resultado de um ciclo infinitesimal com a seguinte estrutura:

- i)** Vá para a frente ($\alpha \mapsto \alpha + \epsilon$).
- ii)** Gire o volante para a esquerda ($\beta \mapsto \beta + \epsilon$).
- iii)** Vá para trás (a mesma quantidade) ($\alpha + \epsilon \mapsto \alpha$).
- iv)** Gire o volante (o mesmo ângulo) de volta para a direita ($\beta + \epsilon \mapsto \beta$).

Claramente nós terminamos exatamente no mesmo ponto em M ; a configuração completa $p \equiv (m, f)$, contudo, muda: $p \equiv (m, f) \mapsto (m, f') \equiv p'$, e até termos de segunda ordem em ϵ o resultado é o seguinte

$$(\alpha, \beta, x, y, \varphi) \mapsto (\alpha, \beta, x - \epsilon^2 R \sin(\varphi + \beta), y + \epsilon^2 R \cos(\varphi + \beta), \varphi + \epsilon^2 \frac{R}{L} \cos \beta) \quad (4.25)$$

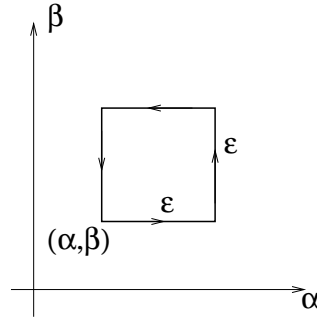


Figura 4.4: Diagrama de um ciclo infinitesimal completo no espaço das formas.

Embora essa ainda não seja a condição desejada, há algo interessante aqui que retornará como sendo essencial para a solução do problema do estacionamento. Isto é, se interpretarmos (4.25) como um passo direto de p para p' , ele é proibido pois viola os vínculos. Deste modo o fato de vital importância é que um ciclo composto exclusivamente de passos permitidos pode resultar em um movimento proibido. Isso significa que embora tenhamos concluído que (4.23) não possa ser realizada diretamente (como um passo único), há uma esperança de produzir efetivamente, como um resultado de ciclos de “passos simples” permitidos, o movimento desejado. A ferramenta mais conveniente para estudar os efeitos de ciclos é a linguagem de campos vetoriais. O ciclo i)–iv) acima é justamente o ciclo infinitesimal gerado por H_α e H_β . Então o movimento resultante (4.25) segue da fórmula

$$\chi_{-\epsilon}^{H_\beta} \circ \chi_{-\epsilon}^{H_\alpha} \circ \chi_\epsilon^{H_\beta} \circ \chi_\epsilon^{H_\alpha} = \chi_{-\epsilon^2}^{[H_\alpha, H_\beta]} \quad (4.26)$$

onde o comutador é dado por

$$[H_\alpha, H_\beta] = R\{\sin(\varphi + \beta)\partial_x - \cos(\varphi + \beta)\partial_y - \frac{1}{L}\cos\beta\partial_\varphi\} . \quad (4.27)$$

Desde que (4.25) não é o bastante, podemos tentar os comutadores de “ordem mais alta” (iterados). Há dois deles para serem calculados e os resultados são:

$$[H_\alpha, [H_\alpha, H_\beta]] = \frac{R^2}{L}(\cos\varphi\partial_y - \sin\varphi\partial_x) , \quad (4.28)$$

e

$$[H_\beta, [H_\alpha, H_\beta]] = H_\alpha - \partial_\alpha \equiv \partial_\alpha^h - \partial_\alpha . \quad (4.29)$$

Ambos os resultados merecem atenção. Primeiro, note que o lado direito de (4.28) gera exatamente o movimento esperado (4.23). Mais detalhadamente, a identidade

$$\chi_{-\epsilon}^{H_\beta} \circ \chi_{-\epsilon}^{H_\alpha} \circ \chi_\epsilon^{H_\beta} \circ \chi_\epsilon^{H_\alpha} \circ \chi_{-\epsilon^2}^{H_\alpha} \circ \chi_{-\epsilon}^{H_\alpha} \circ \chi_{-\epsilon}^{H_\beta} \circ \chi_\epsilon^{H_\alpha} \circ \chi_\epsilon^{H_\beta} \circ \chi_\epsilon^{H_\alpha} = \chi_{-\epsilon^4}^{[H_\alpha, [H_\alpha, H_\beta]]} \quad (4.30)$$

conta-nos que o ciclo iterado estável sobre o lado esquerdo de (4.26) resulta em

$$(x, y, \varphi) \mapsto \left(x + \epsilon^4 \frac{R^2}{L} \sin \varphi, y - \epsilon^4 \frac{R^2}{L} \cos \varphi, \varphi\right) \quad (4.31)$$

que é justamente uma translação pura perpendicular ao eixo principal. Note que esse tipo de movimento é muito lento e trabalhoso: é necessário realizar 10 passos simples (da ordem de ϵ ou ϵ^2) para produzir efetivamente um passo único (que é da ordem de ϵ^4) na direção certa. O mesmo tratamento aplicado a (4.29) guia-nos a seguinte identidade

$$\chi_{-\epsilon}^{H_\beta} \circ \chi_{-\epsilon}^{H_\alpha} \circ \chi_\epsilon^{H_\beta} \circ \chi_\epsilon^{H_\alpha} \circ \chi_{-\epsilon^2}^{H_\beta} \circ \chi_{-\epsilon}^{H_\alpha} \circ \chi_{-\epsilon}^{H_\beta} \circ \chi_\epsilon^{H_\alpha} \circ \chi_\epsilon^{H_\beta} \circ \chi_{\epsilon^2}^{H_\beta} = \chi_{-\epsilon^4}^{[H_\beta, [H_\alpha, H_\beta]]} \quad (4.32)$$

que mostra que realizando o ciclo iterado (estável) sobre o lado esquerdo de (4.32), o carro se move justamente como se o motorista simplesmente tirasse o carro para fora (da vaga), mas a roda dianteira não girasse (nenhuma mudança de α). A possibilidade de produzir movimentos “proibidos” por meio de ciclos compostos de passos “permitidos” inclina-se fortemente sobre o fato de que a curvatura da conexão em questão não se anula (\leftrightarrow o levantamento horizontal das coordenadas da base vetorial não comutam). A curvatura, que aparece como sendo a medida dessa não-comutatividade, é calculada no apêndice B (utilizando a fórmula $\Omega^a = d\omega^a + \frac{1}{2}c_{bc}^a \omega^b \wedge \omega^c$) e o resultado é dado por

$$\begin{aligned} \Omega &\equiv \text{hor } d\omega = \Omega^a e_a = \Omega^0 e_0 + \Omega^1 e_1 + \Omega^2 e_2 = \\ \Omega &= \begin{pmatrix} 0 & \Omega^0 & 0 \\ -\Omega^0 & 0 & 0 \\ \Omega^1 & \Omega^2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde

$$\begin{aligned} \Omega^0 &= \frac{R}{l} \cos \beta d\alpha \wedge d\beta \\ \Omega^1 &= \{-R \sin(\beta + \varphi) + \frac{R}{L} y \cos \beta\} d\alpha \wedge d\beta \\ \Omega^2 &= \{R \cos(\beta + \varphi) - \frac{R}{L} x \cos \beta\} d\alpha \wedge d\beta \end{aligned} \quad (4.34)$$

Se um fixa o gauge pela escolha da secção σ , a intensidade de campo (no gauge σ) é dado como

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &:= \sigma^* \Omega = \mathcal{F}^a e_a = \mathcal{F}^0 e_0 + \mathcal{F}^1 e_1 + \mathcal{F}^2 e_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{F}^0 & 0 \\ -\mathcal{F}^0 & 0 & 0 \\ \mathcal{F}^1 & \mathcal{F}^2 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{R}{L} \begin{pmatrix} 0 & \cos \beta & 0 \\ -\cos \beta & 0 & 0 \\ -L \sin \beta & L \cos \beta & 0 \end{pmatrix} d\alpha \wedge d\beta. \end{aligned} \quad (4.35)$$

4.7 Movimento do carro com o volante fixo

No caso do volante fixo ($\beta(t) = \beta_0 = \text{constante}$) as equações de transporte paralelo (4.19) são

$$\begin{aligned}\varphi'(\alpha) &= \frac{R}{L} \sin \beta_0 \\ x'(\alpha) &= R \cos(\beta_0 + \varphi(\alpha)) \\ y'(\alpha) &= R \sin(\beta_0 + \varphi(\alpha))\end{aligned}\tag{4.36}$$

onde $\varphi'(\alpha) \equiv \frac{d\varphi}{d\alpha}, \dots$. Estas equações são facilmente resolvidas. Se $\beta_0 \neq 0$, então

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha) &= \varphi_0 + \alpha \frac{R}{L} \sin \beta_0 \\ x(\alpha) &= x_0 + \frac{L}{\sin \beta_0} (\sin(\varphi(\alpha) + \beta_0) - \sin(\varphi_0 + \beta_0)) \\ y(\alpha) &= y_0 + \frac{L}{\sin \beta_0} (\cos(\varphi(\alpha) + \beta_0) - \cos(\varphi_0 + \beta_0))\end{aligned}\tag{4.37}$$

e conseqüentemente

$$(x(\alpha) - x_c)^2 + (y(\alpha) - y_c)^2 = r_c^2\tag{4.38}$$

onde

$$\begin{aligned}r_c &\equiv \frac{L}{\sin \beta_0} \\ x_c &\equiv x_0 - r_c \sin(\varphi_0 + \beta_0) \\ y_c &\equiv x_0 + r_c \cos(\varphi_0 + \beta_0).\end{aligned}\tag{4.39}$$

Então, como esperado, a roda dianteira desenha um círculo de raio r_c e centro (x_c, y_c) . Se $\beta_0 = 0$, as equações (4.36) fornecem

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha) &= \varphi_0 \\ x(\alpha) &= x_0 + \alpha R \cos \varphi_0 \\ y(\alpha) &= y_0 + \alpha R \sin \varphi_0\end{aligned}\tag{4.40}$$

que é uma linha reta na direção do eixo principal.

4.8 Campo associado

De maneira análoga ao que foi feito no capítulo anterior, vamos procurar um objeto neste modelo que seja descrito matematicamente, como em partículas elementares, por um campo fonte (campo de partícula). Se V é um espaço vetorial na qual a

representação ρ age, então um campo de partícula do tipo ρ é uma função Ψ sobre P , que assume valores sobre o espaço vetorial V e que se transforma de acordo com a representação ρ com respeito a ação de G sobre P ; em nosso modelo isso significa que

$$\Psi : P \rightarrow V \quad (4.41)$$

tal que

$$\Psi(R_{\mathcal{B}}p) = \rho(\mathcal{B}^{-1})\Psi(p) \quad (4.42)$$

Aqui nós damos um simples exemplo de tal Ψ . Deixe $V = \mathbb{R}^2$ e defina a função Ψ sobre P

$$\Psi : (\alpha, \beta, x, y, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (4.43)$$

Então $\Psi(p)$ fornece justamente as componentes do vetor unitário \vec{e} (fixo sobre o carro e dirigido ao longo do eixo principal), projetadas sobre o plano x_1x_2 . Ver figura (4.1). A ação de $E(2)$ tem a forma explicita

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta, x, y, \varphi) &\mapsto R_{\mathcal{B}}(\alpha, \beta, x, y, \varphi) \equiv \\ &\equiv (\alpha, \beta, x \cos \Theta - y \sin \Theta + b_1, x \sin \Theta + y \cos \Theta + b_2, \varphi + \Theta) \end{aligned} \quad (4.44)$$

e assim, se

$$\Psi(p) \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

então

$$\begin{aligned} \Psi(R_{\mathcal{B}}p) &\leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \Theta) \\ \sin(\varphi + \Theta) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} =: \rho(\mathcal{B}^{-1}) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.46)$$

onde a representação ρ de $E(2)$ em $V \equiv \mathbb{R}^2$ é dado por

$$\rho(\mathcal{B}) \equiv \rho((B(\Theta), b)) = \begin{pmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta \\ -\sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix}. \quad (4.47)$$

Sendo assim nosso Ψ é o campo associado (campo de partícula) do tipo ρ dado por (4.47). Deixe o movimento em M ser dado por $m(t) \leftrightarrow (\alpha(t), \beta(t))$. Então a mudança $\delta\vec{e}$ do vetor \vec{e} entre t e $t + \delta t$ pode ser calculada como

$$\delta\vec{e} \leftrightarrow \delta t m^h \Psi = \frac{\delta t \dot{\alpha} R}{L} \sin \beta \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (4.48)$$

onde $\dot{m}^h = \dot{\alpha}(t)H_\alpha + \dot{\beta}(t)H_\beta$, $H_\alpha \equiv \partial_\alpha^h := \partial_\alpha + R \cos(\beta + \varphi)\partial_x + R \sin(\beta + \varphi)\partial_y + \frac{R}{L} \sin \beta \partial_\varphi$ e $H_\beta \equiv \partial_\beta$.

Note que $\begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$ é justamente o vetor unitário ortogonal a \vec{e} .

Podemos escrever $\delta\vec{e}$ também como

$$\delta\vec{e} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -\sin \varphi \delta\varphi \\ \cos \varphi \delta\varphi \end{pmatrix}, \quad (4.49)$$

e assim, comparando as expressões (4.48) e (4.49), o ângulo “líquido” de rotação do vetor \vec{e} será

$$\delta\varphi \equiv \frac{\delta t \dot{\alpha} R}{L} \sin \beta \equiv \frac{\delta\alpha R}{L} \sin \beta \quad (4.50)$$

que traduz exatamente a condição de contato não deslizante da roda com a estrada. Isto pode ser checado por uma rápida inspeção da figura (B.1) no apêndice B.

O mesmo ângulo pode ser calculado dentro da fixação de gauge σ , fazendo uso da derivada covariante de

$$\Phi := \sigma^* \Psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow e_1^{\vec{}} \quad (4.51)$$

que é

$$\delta\Phi = \delta t \nabla_{\dot{m}}(\sigma^* \Psi) = \delta t \langle \sigma^* D\Psi, \dot{m} \rangle = \frac{\delta\alpha R}{L} \sin \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{\delta\alpha R}{L} \sin \beta e_2^{\vec{}} \quad (4.52)$$

ou

$$\delta e_1^{\vec{}} = \frac{\delta\alpha R}{L} \sin \beta e_2^{\vec{}} \quad (4.53)$$

em concordância com (4.50).

Capítulo 5

Considerações Finais

Neste trabalho utilizamos dois exemplos mecânicos para traçar um paralelo com teorias de gauges. Um deles é o sistema composto por dois corpos rígidos planos acoplados por um pino nos seus centros de massa e o outro é um modelo para o automóvel, sendo este último um exemplo mais completo pois apresenta uma curvatura não trivial. Para tanto, utilizamos a noção de um feixe fibrado dotado de um grupo de estrutura. Primeiro constrói-se o modelo determinando seus graus de liberdade, depois considera-se um determinado grupo de simetria (grupo de Lie) que age sobre este espaço de configuração e cujas órbitas constituem o espaço base (espaço de controle). A escolha do gauge corresponde a designar um ponto padrão sobre a fibra para que se possa estabelecer a secção do fibrado. Uma vez reconhecido os elementos que constituem um feixe fibrado principal, calcula-se a conexão impondo um determinado vínculo, que pode ser proveniente tanto de uma lei de conservação quanto de uma restrição ao movimento do sistema. No caso dos corpos rígidos acoplados o vínculo vem da conservação do momento angular e no caso do automóvel o vínculo restringe o movimento da roda. Do ponto de vista da geometria diferencial a conexão fornece a ponte que relaciona um movimento (uma curva integral) no espaço de controle a um movimento no espaço de configuração. A curva no espaço de configuração, que fornece o movimento desejado, é o levantamento horizontal da curva no espaço de controle. Neste contexto, o potencial de gauge é a conexão da qual a intensidade de campo é a curvatura. A conexão sobre o fibrado principal portanto tem uma grande importância. O campo associado é determinado como um campo vetorial V na qual uma representação ρ age. Este campo é uma função sobre o espaço de configuração P , que assume valores em um espaço vetorial. Nos modelos estudados considerou-se o espaço vetorial como sendo o \mathbb{R}^2 , e representação do grupo das rotações e do grupo euclideo no plano. O objetivo do trabalho, que era estabelecer um paralelo entre teorias de gauge e geometria diferencial em um contexto clássico foi alcançado e a motivação, que era

uma melhor compreensão do formalismo de feixes fibrados, foi satisfeita. De fato, os resultados não só fazem sentido, como ajudam no entendimento mais detalhado do problema e além disso, trazem uma interpretação que pode sugerir idéias sobre possíveis aplicações. Este paralelo entre teorias de gauge e mecânica clássica tem mostrado ser extremamente útil no estudo de sistemas ligados à locomoção, controle e estabilização. Encontrar a estrutura geométrica de um feixe fibrado principal inserida em um contexto do cotidiano, como no caso do automóvel, é bastante surpreendente e mostra que a geometria diferencial fornece não apenas uma linguagem poderosa para desenvolver as idéias de teoria de controle envolvidas nesse problema mas também uma ferramenta que pode ser usada efetivamente para resolvê-lo.

Apêndice A

Referente ao capítulo 3

A.1 A ação do grupo $SO(2)$ sobre F (a fibra típica) e sobre P (espaço de configuração)

O grupo $SO(2)$ é o grupo das matrizes ortogonais 2×2 reais com determinante igual a 1. Seja $R \in SO(2)$ dada por

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SO(2). \quad (\text{A.1})$$

Geometricamente, esta transformação representa uma rotação ao redor de um eixo por um ângulo θ . Vamos considerar uma rotação infinitesimal de um ângulo $\delta\theta \ll 1$. Isto significa que

$$R = \begin{pmatrix} \cos \delta\theta & \sin \delta\theta \\ -\sin \delta\theta & \cos \delta\theta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & \delta\theta \\ -\delta\theta & 1 \end{pmatrix} = I + \delta\theta J \quad (\text{A.2})$$

onde J é o gerador do grupo, dado por

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

A.2 O cálculo da conexão ω

Em geral uma conexão relacionada a $SO(2)$ pode ser escrita como

$$\omega = \mathcal{R}^{-1} \bar{\omega} \mathcal{R} + \mathcal{R}^{-1} d\mathcal{R} \quad (\text{A.4})$$

onde $\bar{\omega} = \bar{\omega}^a e_a$ ($a=1$) é uma 1-forma (ainda desconhecida) sobre M e que assume valores sobre a álgebra de Lie $so(2)$ do grupo, e

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SO(2). \quad (\text{A.5})$$

Logo

$$d\mathcal{R} = \begin{pmatrix} -\sin\theta d\theta & \cos\theta d\theta \\ -\cos\theta d\theta & -\sin\theta d\theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

e

$$\mathcal{R}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Em particular nos pontos da secção $\sigma(M) \subset P$, correspondente a posição “padrão” do sistema (isto é $\theta_1 = \theta = 0$) tem-se $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1} = 1$ (identidade) e assim

$$\omega_{\mathcal{R}=1} = \bar{\omega} + (d\mathcal{R})_{\mathcal{R}=1}. \quad (\text{A.8})$$

Então

$$\omega_{\mathcal{R}=1} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\omega} \\ -\bar{\omega} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & d\theta \\ -d\theta & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

A forma ω define a direção horizontal pelas equação $\omega = 0$. Portanto, a equação $\omega_{\mathcal{R}=1} = 0$ (por definição) separa a direção horizontal para $\theta = 0$.

$$\bar{\omega} = -d\theta. \quad (\text{A.10})$$

Porém da condição de conservação do momento angular temos que

$$d\theta = -\frac{I_2}{I_1 + I_2} d\psi. \quad (\text{A.11})$$

Comparando as equações (A.10) e (A.11) temos

$$\bar{\omega} = \frac{I_2}{I_1 + I_2} d\psi \quad (\text{A.12})$$

ou seja

$$\bar{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{I_2}{I_1 + I_2} d\psi \\ -\frac{I_2}{I_1 + I_2} d\psi & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

Retornando para a equação (A.4) ficamos com

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & d\theta + \frac{I_2}{I_1 + I_2} d\psi \\ -(d\theta + \frac{I_2}{I_1 + I_2} d\psi) & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

mas

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & w \\ -w & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.15})$$

ou seja

$$w = d\theta + \frac{I_2}{I_1 + I_2} d\psi. \quad (\text{A.16})$$

Portanto, o vínculo diferencial para uma configuração geral é ($\omega = 0$)

$$d\theta = -\frac{I_2}{I_1 + I_2} d\psi. \quad (\text{A.17})$$

Apêndice B

Referente ao capítulo 4

B.1 A ação de $E(2)$ sobre F (a fibra típica) e sobre P (espaço de configuração)

Deixe $B \in SO(2)$ e $b \equiv (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$. Define-se a transformação do ponto $\chi \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ (plano do automóvel) pela dupla (B, b) como

$$\chi \mapsto \chi B + b =: \mathcal{R}_{(B,b)}\chi . \quad (\text{B.1})$$

Geometricamente, esta transformação representa uma rotação ao redor da origem por um ângulo Θ seguido por uma translação (b_1, b_2) . Representa-se esta transformação Euclidiana do ponto χ por $(B, b) \in E(2)$. A regra descrita pela equação (B.1) pode ser escrita numa forma matricial usando a seguinte notação: deixe-nos associar a matriz \mathcal{B} (3×3) e o vetor $\boldsymbol{\eta}$ com a dupla (B, b) e o vetor χ respectivamente de acordo com

$$\mathcal{B} := \begin{pmatrix} B & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\eta} := (\chi, 1) \equiv (x_1, x_2, 1) . \quad (\text{B.2})$$

Então a multiplicação matricial de $\boldsymbol{\eta}$ por \mathcal{B} nos dá

$$\boldsymbol{\eta}' = \boldsymbol{\eta}\mathcal{B} = (\chi B + b, 1) \equiv (\mathcal{R}_{(B,b)}\chi, 1) \quad (\text{B.3})$$

isto é, a regra (B.1) é reproduzida da multiplicação das quantidades auxiliares $\boldsymbol{\eta}$ e \mathcal{B} . A ação dada por (B.1) ou (B.3) transforma o plano- x_1x_2 rigidamente, isto é, todas as distâncias são preservadas ($\mathcal{R}_{\mathcal{B}} \equiv \mathcal{R}_{(B,b)}$ é uma isometria). Então define-se a ação $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ de $E(2)$ sobre o espaço F das localizações do eixo principal, simplesmente como uma transformação $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ que age apenas nas extremidades do eixo principal. Se as coordenadas (x, y, φ) são introduzidas para designar o espaço F , de acordo com a figura (4.1), obtém-se

$$(x, y, \varphi) \mapsto (x \cos \Theta - y \sin \Theta + b_1, x \sin \Theta + y \cos \Theta + b_2, \varphi + \Theta) \equiv \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{B}}(x, y, \varphi) . \quad (\text{B.4})$$

Note que uma posição arbitrária (x, y, φ) do eixo principal pode ser obtida da posição de referência $(0, 0, 0)$ (o eixo principal situado sobre o eixo x_1 à esquerda da origem) por meio de uma única transformação $\hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{B}}$:

$$\hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{B}}(0, 0, 0) = (x, y, \varphi) , \quad (\text{B.5})$$

com

$$B = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} , \quad \text{e } b = (x, y) . \quad (\text{B.6})$$

Isso significa que a ação $\hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{B}}$ é transitiva e livre e então F é o próprio fibrado principal (ver capítulo 1 – secção (2.3.3)). Isto é a equação acima dá o difeomorfismo de F e do grupo $E(2)$. Finalmente a ação $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ sobre $P = M \times F$ é dada por

$$(m, f) \mapsto (m, \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{B}}f) =: \mathcal{R}_{\mathcal{B}}(m, f) \quad (\text{B.7})$$

ou em coordenadas

$$\begin{aligned} & (\alpha, \beta, x, y, \varphi) \mapsto \mathcal{R}_{\mathcal{B}}(\alpha, \beta, x, y, \varphi) \equiv \\ & \equiv (\alpha, \beta, x \cos \Theta - y \sin \Theta + b_1, x \sin \Theta + y \cos \Theta + b_2, \varphi + \Theta) . \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

B.2 A Álgebra de Lie $e(2)$ do grupo $E(2)$

Como acabamos de ver, o grupo $E(2)$ pode ser imaginado como formado de matrizes

$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$, onde $B \in SO(2)$ e $b \equiv (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$. Ou seja, podemos escrever

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ x & y & 1 \end{pmatrix} \in E(2) . \quad (\text{B.9})$$

Vamos considerar uma transformação infinitesimal, ou seja, uma rotação infinitesimal de um ângulo $\delta\varphi \ll 1$ seguido de uma translação infinitesimal na direção x ($\delta x \ll 1$) e de uma translação infinitesimal na direção y ($\delta y \ll 1$). Essa transformação infinitesimal nos dá

$$\mathcal{B} \equiv \begin{pmatrix} \cos \delta\varphi & \sin \delta\varphi & 0 \\ -\sin \delta\varphi & \cos \delta\varphi & 0 \\ \delta x & \delta y & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & \delta\varphi & 0 \\ -\delta\varphi & 1 & 0 \\ \delta x & \delta y & 1 \end{pmatrix} = I + \delta\varphi e_0 + \delta x e_1 + \delta y e_2 \quad (\text{B.10})$$

onde I é a matriz identidade e

$$e_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad (\text{B.11})$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

e

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \quad (\text{B.13})$$

As matrizes e_0 , e_1 e e_2 formam portanto a base (geradores) de $e(2)$, e juntas formam a álgebra de Lie do grupo; $[e_i, e_j] = c_{bc}^a e_k$, onde c_{bc}^a são as constantes de estrutura do grupo. Estas relações de comutação são

$$\begin{cases} [e_0, e_1] = -e_2 \\ [e_0, e_2] = e_1 \\ [e_1, e_2] = 0 . \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

e assim as constantes de estrutura são

$$c_{10}^2 = -c_{01}^2 = c_{02}^1 = -c_{20}^1 = 1 \quad (\text{B.15})$$

e

$$c_{12}^0 = c_{21}^0 = 0 \quad (\text{B.16})$$

B.3 O cálculo da conexão ω

O procedimento utilizado é análogo ao que foi feito no apêndice anterior, para o modelo dos corpos rígidos acoplados. Em geral uma conexão pode ser escrita como

$$\omega = \mathcal{B}^{-1} \bar{\omega} \mathcal{B} + \mathcal{B}^{-1} d\mathcal{B} \quad (\text{B.17})$$

onde $\bar{\omega} = \bar{\omega}^a e_a$ ($a=0,1,2$) é uma 1-forma (ainda desconhecida) sobre M e que assume valores sobre a álgebra de Lie $e(2)$ do grupo, e

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ x & y & 1 \end{pmatrix} \in E(2) . \quad (\text{B.18})$$

Logo

$$d\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi d\varphi & \cos \varphi d\varphi & 0 \\ -\cos \varphi d\varphi & -\sin \varphi d\varphi & 0 \\ dx & dy & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.19})$$

e

$$\mathcal{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ -x \cos \varphi - y \sin \varphi & x \sin \varphi - y \cos \varphi & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.20})$$

Em particular nos pontos da secção $\sigma(M) \subset P$, correspondente a posição “padrão” do carro (isto é $x = y = \varphi = 0$) tem-se $\mathcal{B} = \mathcal{B}^{-1} = 1$ (identidade) e assim

$$\omega_{\mathcal{B}=1} = \bar{\omega} + (d\mathcal{B})_{\mathcal{B}=1}. \quad (\text{B.21})$$

Então

$$\omega_{\mathcal{B}=1} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\omega}^0 & 0 \\ -\bar{\omega}^0 & 0 & 0 \\ \bar{\omega}^1 & \bar{\omega}^2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & d\varphi & 0 \\ -d\varphi & 0 & 0 \\ dx & dy & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.22})$$

que pode ser escrita como

$$\omega_{\mathcal{B}=1} = (d\varphi + \bar{\omega}^0)e_0 + (dx + \bar{\omega}^1)e_1 + (dy + \bar{\omega}^2)e_2. \quad (\text{B.23})$$

A forma ω define a direção horizontal pelas equações $\omega^a = 0$, $a = 0, 1, 2$. Portanto, a equação $\omega_{\mathcal{B}=1} = 0$ (por definição) separa a direção horizontal para $x = y = \varphi = 0$.

$$\begin{aligned} d\varphi &= -\bar{\omega}^0 \\ dx &= -\bar{\omega}^1 \\ dy &= -\bar{\omega}^2 \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Por outro lado o vínculo de contato não-deslizante para a posição padrão $x = y = \varphi = 0$ pode ser facilmente traduzida da figura (B.1): Para $\delta\alpha \ll 1 \Rightarrow \delta S = R\delta\alpha$. Sendo assim

$$\sin \beta = \frac{dx_2}{Rd\alpha} \Rightarrow dx_2 = Rd\alpha \sin \beta \quad (\text{B.25})$$

e

$$\cos \beta = \frac{dx_1}{Rd\alpha} \Rightarrow dx_1 = Rd\alpha \cos \beta \quad (\text{B.26})$$

Portanto concluímos que:

- se $\alpha \mapsto \alpha + \delta\alpha$ ($\delta\alpha \ll 1$), então $(x, y) \equiv (0, 0) \mapsto (\delta x_1, \delta x_2) = (\delta\alpha R \cos \beta, \delta\alpha R \sin \beta)$, $(-L, 0) \mapsto (-L + dx_1, 0) = (-L + \delta\alpha R \cos \beta, 0)$. Observe que

$$\sin \delta\varphi = \frac{dx_2}{L} = \frac{\delta\alpha R \sin \beta}{L} \quad (\text{B.27})$$

mas $\sin \delta\varphi = \delta\varphi$ para $\delta\varphi \ll 1$. Ou seja $\delta\varphi = \frac{\delta\alpha R \sin \beta}{L} \Rightarrow \varphi \mapsto \varphi + \delta\alpha \frac{R}{L} \sin \beta$;

- se $\beta \mapsto \beta + \delta\beta$ ($\delta\beta \ll 1$), então $(x, y, \varphi) \mapsto (x, y, \varphi)$. Resumindo, tem-se

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{R}{L} \sin \beta d\alpha \\ dx &= R \cos \beta d\alpha \\ dy &= R \sin \beta d\alpha \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

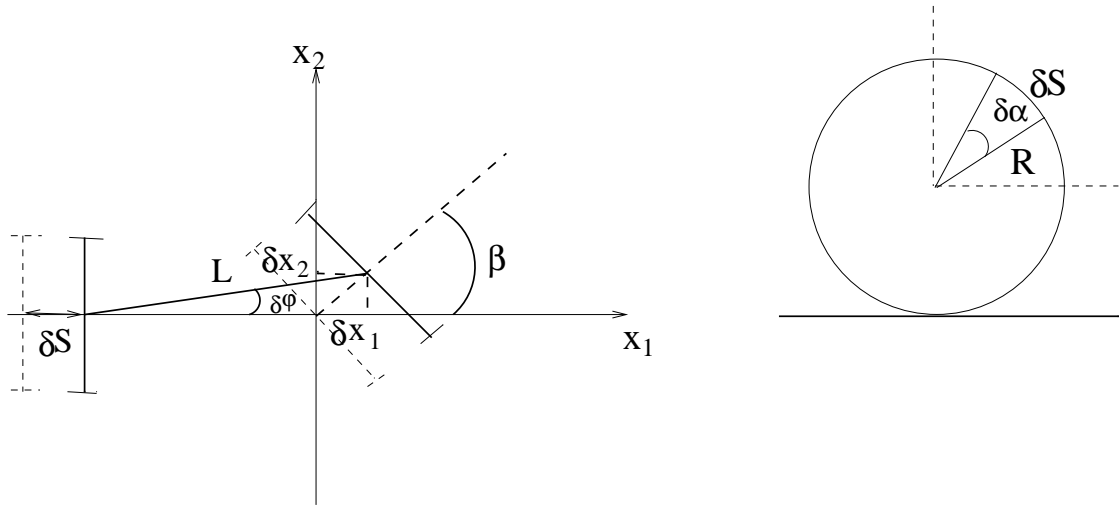


Figura B.1: Um deslocamento infinitesimal da roda e o correspondente deslocamento infinitesimal do veículo.

Numa comparação com (B.24) tem-se

$$\begin{aligned}\bar{\omega}^0 &= -\frac{R}{L} \sin \beta d\alpha \\ \bar{\omega}^1 &= -R \cos \beta d\alpha \\ \bar{\omega}^2 &= -R \sin \beta d\alpha\end{aligned}\tag{B.29}$$

$$\bar{\omega} \equiv \bar{\omega}^a e_a = -\frac{R}{L} \begin{pmatrix} 0 & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & 0 & 0 \\ L \cos \beta & L \sin \beta & 0 \end{pmatrix} d\alpha.\tag{B.30}$$

Inserindo este resultado em (B.17) tem-se

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\omega}^0 + d\varphi & 0 \\ -(\bar{\omega}^0 + d\varphi) & 0 & 0 \\ y(\bar{\omega}^0 + d\varphi) + \bar{\omega}^1 \cos \varphi - \bar{\omega}^2 \sin \varphi + dx & -x(\bar{\omega}^0 + d\varphi) + \bar{\omega}^1 \sin \varphi + \bar{\omega}^2 \cos \varphi + dy & 0 \end{pmatrix}.$$

e assim

$$\begin{aligned}w^0 &= d\varphi - \frac{R}{L} \sin \beta d\alpha \\ w^1 &= dx + yw^0 - R \cos(\beta + \varphi) d\alpha \\ w^2 &= dy - xw^0 - R \sin(\beta + \varphi) d\alpha\end{aligned}\tag{B.31}$$

Portanto os vínculos diferenciais para uma configuração geral serão ($\omega^a = 0$)

$$\begin{cases} d\varphi = \frac{R}{L} \sin \beta d\alpha \\ dx = R \cos(\beta + \varphi) d\alpha \\ dy = R \sin(\beta + \varphi) d\alpha. \end{cases}\tag{B.32}$$

Note a ausência da diferencial $d\beta$ no lado direito das equações acima. Isso reflete o fato de que ao girar o volante com o carro parados o resultado é um movimento do eixo principal.

B.4 O cálculo da curvatura Ω

Como acabamos de ver, os coeficientes da conexão são dados por

$$\begin{aligned} w^0 &= d\varphi - \frac{R}{L} \sin \beta d\alpha \\ w^1 &= dx + yw^0 - R \cos(\beta + \varphi) d\alpha \\ w^2 &= dy - xw^0 - R \sin(\beta + \varphi) d\alpha \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

A curvatura será dada por $\Omega = \Omega^a e_a$ onde $\Omega^a = dw^a + \frac{1}{2} c_{bc}^a w^b \wedge w^c$. c_{bc}^a é a constante de estrutura do grupo.

O cálculo de Ω^0 :

$$\Omega^0 = dw^0 + \frac{1}{2} [c_{12}^0 w^1 \wedge w^2 + c_{21}^0 w^2 \wedge w^1] \quad (\text{B.34})$$

mas

$$c_{12}^0 = c_{21}^0 = 0 \quad (\text{B.35})$$

então

$$\begin{aligned} \Omega^0 &= d[d\varphi - \frac{R}{L} \sin \beta d\alpha] \\ &= d(d\varphi) - \frac{R}{L} \cos \beta d\beta \wedge d\alpha - \frac{R}{L} \sin \beta d(d\alpha) \end{aligned}$$

isto é

$$\Omega^0 = \frac{R}{L} \cos \beta d\beta \wedge d\alpha \quad (\text{B.36})$$

O cálculo de Ω^1 :

$$\Omega^1 = dw^1 + \frac{1}{2} [c_{02}^1 w^0 \wedge w^2 + c_{20}^1 w^2 \wedge w^0] \quad (\text{B.37})$$

mas

$$c_{02}^1 = -c_{20}^1 = 1 \quad (\text{B.38})$$

e

$$w^0 \wedge w^2 = -w^2 \wedge w^0 \quad (\text{B.39})$$

(ver capítulo 1 – secção (2.2.6))

então

$$\Omega^1 = dw^1 + w^0 \wedge w^2 \quad (\text{B.40})$$

$$\begin{aligned}
 \Omega^1 &= d[dx + y(d\varphi - \frac{R}{L} \sin \beta d\alpha) - R \cos(\beta + \varphi)d\alpha] + (d\varphi - \frac{R}{L} \sin \beta d\alpha) \wedge (dx \\
 &\quad - x(d\varphi - \frac{R}{L} \sin \beta d\alpha) - R \sin(\beta + \varphi)d\alpha) \\
 &= d(dx) + d[y(d\varphi - \frac{R}{L} \sin \beta d\alpha)] - d[R \cos(\beta + \varphi)d\alpha] + (d\varphi - \frac{R}{L} \sin \beta d\alpha) \wedge (dx \\
 &\quad - x(d\varphi - \frac{R}{L} \sin \beta d\alpha) - R \sin(\beta + \varphi)d\alpha)
 \end{aligned}$$

ou seja

$$\Omega^1 = -R \sin(\beta + \varphi) + \frac{R}{L} y \cos \beta d\alpha \wedge d\beta \quad (\text{B.41})$$

e de maneira análoga podemos mostrar que

$$\Omega^2 = R \cos(\beta + \varphi) - \frac{R}{L} x \cos \beta d\alpha \wedge d\beta \quad (\text{B.42})$$

Resumindo temos

$$\begin{cases}
 \Omega^0 = \frac{R}{L} \cos \beta d\beta \wedge d\alpha \\
 \Omega^1 = -R \sin(\beta + \varphi) + \frac{R}{L} y \cos \beta d\alpha \wedge d\beta \\
 \Omega^2 = R \cos(\beta + \varphi) - \frac{R}{L} x \cos \beta d\alpha \wedge d\beta .
 \end{cases} \quad (\text{B.43})$$

B.5 Comutadores, ciclos infinitesimais e curvatura

Dados dois campos vetoriais U e V sobre uma variedade M , $[U, V]$ seu comutador (parêntese de Lie) e χ_t^U , χ_t^V e $\chi_t^{[U, V]}$ os correspondentes fluxos (χ_t^U é um mapeamento $M \rightarrow M$ que envia cada ponto $x \in M$ a uma distância t (parâmetro) ao longo da curva integral de U (ver capítulo 1–Fluxos); está assegurado que $\chi_{(t+s)}^U = \chi_t^U \circ \chi_s^U = \chi_s^U \circ \chi_t^U$). Então um cálculo mostra que a menos de termos de segunda ordem em $\epsilon \ll 1$, a seguinte identidade é válida:

$$\chi_{-\epsilon}^V \circ \chi_{-\epsilon}^U \circ \chi_{\epsilon}^V \circ \chi_{\epsilon}^U = \chi_{-\epsilon^2}^{[U, V]} , \quad (\text{B.44})$$

ou equivalentemente

$$\chi_{\epsilon^2}^{[U, V]} \circ \chi_{-\epsilon}^V \circ \chi_{-\epsilon}^U \circ \chi_{\epsilon}^V \circ \chi_{\epsilon}^U = \text{identidade sobre } M . \quad (\text{B.45})$$

Dessa fórmula deduz-se a interpretação padrão para o comutador de dois campos vetoriais: o ciclo infinitesimal gerado por U e V (lado esquerdo de (B.44)) não termina no ponto de partida dentro de uma precisão de ϵ^2 (embora o faça dentro de uma precisão de ϵ) mas ao invés disso adiciona um passo de ordem menor ao longo de $[U, V]$ para fechar a volta (lado esquerdo de (B.45)). Mas se V for por sua vez um comutador, $V = [W, Z]$, a variedade (2–dimensional) usada em (B.44) fornece

$$\chi_{-\epsilon}^Z \circ \chi_{-\epsilon}^W \circ \chi_{\epsilon}^Z \circ \chi_{\epsilon}^W \circ \chi_{-\epsilon^2}^U \circ \chi_{-\epsilon}^W \circ \chi_{-\epsilon}^Z \circ \chi_{\epsilon}^W \circ \chi_{\epsilon}^Z \circ \chi_{\epsilon^2}^U = \chi_{-\epsilon^4}^{[U, [W, Z]]} . \quad (\text{B.46})$$

Então o cálculo dos comutadores $[U, V]$ e $[U, [W, Z]]$ nos diz qual é o resultado de um ciclo simples (4 passos) e iterado (4 passos, sendo dois deles resultado de 4 passos, formando assim 10 passos simples ao todo) respectivamente. Tudo o que foi dito até agora é válido para qualquer campo vetorial sobre qualquer variedade. No caso em que os campos vetoriais em questão são levantamentos horizontais, o comutador resultante pode ser expresso em termos da curvatura da conexão. Para fazer isso, necessitamos primeiro do conceito de campo fundamental de ação $R_{\mathcal{B}}$. Por definição o campo $\xi_{\mathcal{C}}$, $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}^a e_a \in e(2)$, gera o movimento de qualquer ponto p sob a ação do subgrupo de um único parâmetro $\mathcal{B}(\lambda) = e^{\lambda \mathcal{C}}$, isto é para $p(\lambda) := R_{\mathcal{B}(\lambda)} p$

$$\xi_{\mathcal{C}}(p) := \dot{p}(0) \quad (\text{B.47})$$

Nota:

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_0 & 0 \\ -\lambda_0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad (\text{B.48})$$

é o gerador do grupo $E(2)$, isto é, $\mathcal{B}(\epsilon) = I + \epsilon \mathcal{C} \in E(2)$.

Para os elementos da base $e_0, e_1, e_2 \in e(2)$ obtemos explicitamente

$$\begin{aligned} \xi_0 &\equiv \xi_{e_0} = -y\partial_x + x\partial_y + \partial_\varphi \\ \xi_1 &\equiv \xi_{e_1} = \partial_x \\ \xi_2 &\equiv \xi_{e_2} = \partial_y \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

e em geral

$$\xi_{\mathcal{C}} \equiv \xi_{\mathcal{C}^a e_a} = \mathcal{C}^a \xi_{e_a} = \mathcal{C}^a \xi_a. \quad (\text{B.50})$$

Esses campos são puramente verticais (dirigido ao longo da fibra), já que (por definição) a ação é vertical (p e $R_{\mathcal{B}} p$ situam-se na mesma fibra para todo p e \mathcal{B}). O comutador de H_α e H_β pode ser escrito como

$$[H_\alpha, H_\beta] = \xi_{-\Omega(H_\alpha, H_\beta)} = -\Omega^a(H_\alpha, H_\beta) \xi_a \quad (\text{B.51})$$

onde Ω é a curvatura. A fórmula (B.51) mostra que

i) $[H_\alpha, H_\beta]$ é não nulo se e somente se Ω é não nulo.

ii) $[H_\alpha, H_\beta]$ é puramente vertical \Rightarrow o correspondente ciclo gera movimento proibido.

Referências

- [1] J. D. Jackson and L. B. Okun, “Historical roots of gauge invariance”, *Rev. Mod. Phys.* 73 (7), 663–680 (2001).
- [2] L. O’Raifeartaigh and N. Straumann, “Gauge theory: Historical origins and some modern developments”, *Rev. Mod. Phys.* 72 (1), 01–23 (2000).
- [3] J. C. Maxwell, “On Faraday’s Lines of Force.”, *Cambridge Philos. Trans.* 10, 27–83, (1856); *Scientific Papers* (reprinted by Dover, New York), Vol. 1, pp. 155-129.
- [4] J. C. Maxwell, “A Dynamical Theory of the Eletromagnetic Field.”, *Philos. Trans. R. Soc. London* 155, 459–512 (1865); *Scientific Papers* (reprinted by Dover, New York), Vol. 1, pp. 526-597.
- [5] J. C. Maxwell, 1861–1862, “On a Method of Making a Direct Comparison of Electrostatic and Electromagnetic Force; with a Note on the Electromagnetic Theory of light.”, *Philos. Trans. R. Soc. London* 158, 643–657 (1868); *Scientific Papers* (reprinted by Dover, New York), Vol. 2, pp. 125–143.
- [6] H. Hertz, *Untersuchungen ueber die Ausbreitung der elektrischen Kraft*, J. A. Barth, Leipzig, (1892); traduzido por D. E. Jones *Electric Waves*, Macmillan, London, (1893).
- [7] O. Heaviside, *Eletromagnetic Theory*, Dover Publications Inc. New York, (1893).
- [8] H. Weyl, “Gravitation und Elektrizitüt”, *Sitzungsber. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, Klossefü...* pp. 465–480, (1918).
- [9] V. Fock, “Über die invariante Form der Wellen under Bewegungsgleichungen füreinengeladenen Massenpunkt.” *Z. Phys.* 39, 226–232 (1926).
- [10] H. Weyl, “Gravitation and the electron.” *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* 15, 323–334, (1929).

- [11] Y. Aharonov and D. Bohm, “Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory”, *Phys. Rev.*, 115, 485– , (1959).
- [12] C. N. Yang and R. L. Mills, “Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance”, *Phys. Rev.*, 96, 191– , (1954).
- [13] A. Trautman: “Fibre Bundles Associated with Space–Time”, *Rep. Math. Physics*, 29 (1) (1970).
- [14] C. N. Yang: “Integral Formalism for gauge Fields”, *Phys. Rev. Letters*, 33, 445 (1974).
- [15] T. T. Wu and C. N. Yang, “Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields”, *Phys. Rev. D*, 12, 3845– , (1975).
- [16] A. Guichardet: “On rotation and vibration motions of molecules”, *Ann. Inst. Henri Poincar. Vol. 40, n.3, p.329–342*, (1984).
- [17] A. Shapere, F. Wilczek: “Gauge Kinematics of deformable bodies”, *Am. J. Phys.* 57 (6), 514–518, June (1989).
- [18] A. Shapere, F. Wilczek, *Geometric Phases in Physics*, World Scientific, (1989).
- [19] A. Shapere, F. Wilczek: “Geometry of Self–Propulsion at Low Reynolds number”, *J. Fluid. Mech.* 198, 557–585 (1989).
- [20] F. Wilczek, A. Zee: “Appearance of Gauge Structure in Simple Dynamical System”, *Phys. Rev. Letters*, Vol 52, N^o 24, 141–144, junho (1984).
- [21] T. R. Kane and M. P. Scher, “A Dynamical Explanation of the Falling Cat Phenomenon”, *Int’l J. Solids and Structures*, 5, 663-670, (1969).
- [22] R. Montgomery, “Isoholonomic Problems and Some Applications”, *Commun. Math. Phys.* 128, 565-592.(1990).
- [23] R. Montgomery, “Canonical Formulations of a Particle in a Yang-Mills Field and Wong’s Equations”, *Lett. Math Phys.*, 8, 59-67.(1984).
- [24] R. Montgomery [1992], “Gauge Theory and Optimal Control, in Nonholonomic Control”, conference proceedings of the IEEE Robotics Conference, Sacramento CA, 1991, Li and Canny ed.
- [25] R. Montgomery: “Gauge theory of the Falling Cat”, *Fields Institute Communications*, Vol. 1 (1993)

- [26] J. E. Marsden, Lectures on Mechanics, London Math. Soc. Lecture Note. 174 (1992).
- [27] J. E. Marsden and J. Ostrowski: “Symmetries in Motion: Geometric Foundations of Motion Control”, Nonlinear Sci. Today; <http://link.springer-ny.com>.
- [28] M. J. Enos, *Dynamics and Control of Mechanical Systems—The Falling Cat and Related Problems*, Fields Institute Communications (1993).
- [29] M. Fecko: “U(1)–gauge structure associated with a motion of a guitar string”, Acta Physica Slovaca vol. 44, N^o 6, 445–449 (1994) (diponível em <http://xxx.lanl.gov> como physics/970201)
- [30] M. Fecko: “Falling cat” connections and the momentum map, J. Math. Phys. 36 (12) 6709–6719 (1995).
- [31] M. Fecko: “Gauge–Potencial Approach to the Kinematics of a Moving car”, preprint physics/9703016.
- [32] R. G. Littlejohn and M. Reinsch: “Gauge fields in the separation of rotations and motions in the n–body problem”, Rev. Mod. Phys. 69 (7), 213–275 (1997).
- [33] N. E. Leonard, J. E. Marsden: “Stability and drift of underwater vehicle dynamics: mechanical systems with rigid motion symmetry”, Physica D, 105, 130–162, (1997)
- [34] R. Montgomery, *Optimal Control of Deformable Bodies and Its Relation to Gauge Theory in the Geometry of Hamiltonian Systems*, T. Ratiu ed., Springer–Verlag, (1991).
- [35] P. S. Krishnaprasad, R. Yang and W. Dayawansa “Control problems on principal bundles and nonholonomic mechanics”, Proc. 30th CDC, 1133–1138 (1991).
- [36] W. S. Koon and J. E. Marsden, “Optimal control for holonomic and nonholonomic mechanical systems with symmetry and Lagrangian reduction”, SIAM J. Control and Optim., 35, 901–929, (1997).
- [37] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *An Introduction to Geometrical Physics*, World Scientific, Singapore, (1995).
- [38] B.F.Schutz, *Geometrical methods of mathematical physics*, Cambridge University Press, (1980)

-
- [39] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol. 1, Interscience pub., (1963).
- [40] H. Flanders, *Differential Forms*, Academic Press, New York, (1963)
- [41] D. H. Sattinger and O. L. Weaver, *Lie Groups and Algebras with applications to Physics, Geometry, and Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [42] D. Husemoller, *Fibre Bundles*, Springer-Verlag, New York, (1975).
- [43] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1968.
- [44] J. L. McCauley, *Classical Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [45] H. C. Corben and Philip Stehle, *Classical Mechanics*, Dover, New York, 1994.
- [46] Herbert Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1982.