



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.004/03

Equação Reduzida para Ondas Curtas na Superfície da Água

Paulo Gustavo Serafim de Carvalho

Orientador

Prof. Dr. Roberto André Kraenkel

Fevereiro 2003

Agradecimentos

Gostaria de agradecer em primeiro lugar à minha mãe por esta vida, por desde os primeiros dias dela me mostrar os caminhos da escola e da ciência. Pelos seus inúmeros conselhos de coragem e pelas incontáveis noites que acordou e me colocou para dormir enquanto “devorava” os livros nas madrugadas da graduação . Ao meu pai que sempre sonhou com este dia e que hoje não pode estar conosco, mas felizmente me acompanhou pessoalmente nos primeiros dias de IFT e tenho certeza que estará comigo sempre. Agradeço também a todos os meus três irmãos que sempre dividiram os momentos de felicidade e tristeza e que hoje seguem na dura estrada científica. Ao meu tio Antônio, à Olga e à “avó substituta” Dione que me acolheram nos primeiros meses com todo carinho e apoio que uma família pode oferecer. Também quero lembrar tio Edmundo que é o exemplo mais próximo desse mundo pensante que tive e que jamais deixa de cumprir com seu compromisso de orientação nas escolhas importantes na vida da família. Não posso esquecer aqui tia Carminha, tia Ana, tio Lamartine, e os primos Renan, Ramon e Ronan que nunca deixaram de dividir a alegria da minha volta nas férias e que sempre me deram palavras de conforto para enfrentar tamanha distância. Infelizmente precisaria de muitas dissertações para agradecer todos da minha família, gostaria que todos cujos nomes não foram citados, sintam-se homenageados porque se cheguei até aqui foi porque somei os esforços de cada um para conseguir. À pessoa mais certa que poderia me aparecer na vida, à Natalia que soube me compreender desde o primeiro dia, que sempre soube me amar.

Aos grandes amigos e irmãos Wilian, Esdras, Eduardo e Vagner por sabermos conviver em paz todo esse tempo e por termos administrado nossas dores e angústias com aquela força que nos prende ao mundo fascinante da Física. Ao amigo Cassio pela ajuda computacional, aos amigos Bira, Gian, Wanderson, Carlos, Marcio, Hector, Oscar, José, Letícia, Lázia, Casana, aos da graduação Evaldo, Tiago, Rômulo, Lincoln, Carlos, Eduardo, Israel, Alessandro, Jean, Drack, Telio, Roberto, Josinaldo e tantos outros que passaram, pelas adoráveis discussões que ajudaram a encontrar e reconhecer os verdadeiros amigos.

Meu profundo agradecimento ao grande responsável pela minha aprendizagem: o professor Kraenkel por ter acreditado em mim, por saber me orientar sem nenhuma imposição , sem ser autoritário e com todo respeito que um grande cientista pode oferecer. Ao professor Miguel Manna pelas discussões e pelo incentivo nos estudos.

Ao professor Accioly pelas belas aulas de Teoria Quântica de Campos e aos demais professores que de forma indireta ou direta contribuíram para este trabalho.

Finalmente gostaria de agradecer a CAPES por ter financiado este sonho e todos os funcionários do Instituto de Física Teórica por terem sempre nos ajudado nos turnos burocráticos desta caminhada e sempre nos servir nas horas necessárias.

Ponta do Seixas

Cátia de França

Me mirando
no fundo dos teus olhos
vou trilhando
o caminho que Deus me deu

No balanço
de uma rede no quintal,
com o vento
no rosto
nas palhas do coqueiral

Esse verde que chega a doer
das águas de Tambaú se me deixa,
eu me arretiro
não brigo contigo
bem longe irei chorar,
morar na Ponta do Seixas

No amanhecer
a ponta do Cabo Branco
em ouro se torna

Como posso esquecer
suas águas em prata
o cheiro do mar
o peixe comprado na hora
o barulho das ondas
e o riso da Dora lá atrás

Um dia vou voltar...

Resumo

Estuda-se o comportamento de ondas de superfície em um fluido invíscido no limite de curtos comprimentos de onda e levando em conta efeitos não-lineares. Uma equação para este limite é obtida e algumas soluções são exibidas.

Palavras Chaves: Dinâmica de Fluidos; Green-Nagdhi; Ondas Solitárias;

Áreas do Conhecimento: Fenômenos Não-Lineares; Matéria Condensada; Física Matemática;

Abstract

The behaviour of surface-waves on a inviscid fluid is studied in the short-wave limit, taking nonlinear effects into account. An equation describing this limit is obtained and some of its solutions exhibited.

Keywords: Fluid Dynamics; Green-Nagdhi; Solitary Waves;

Índice

1	Equações que Governam a Dinâmica de Fluidos	1
1.1	Usando a Conservação da Massa	1
1.2	Usando a Conservação do Momento	3
1.3	Linha de Fluxo	5
1.4	Condições de Contorno	7
2	Ondas na Água: teoria linearizada	9
2.1	Equações Hidrodinâmicas	9
2.2	Equação Reduzida de um Fluido	10
2.3	Ondas Gravitacionais de Pequenas Amplitudes em Superfícies Livres	11
2.3.1	Ondas em Águas Rasas	14
2.3.2	Ondas em Águas Profundas	15
3	As Equações de Green-Nagdhi	16
3.1	Condições para Existência da Dinâmica Assintótica de Ondas Curtas	16
3.2	Equações de Green-Nagdhi	18
4	Ondas Curtas	23
4.1	Limite de Onda Curta	23
4.2	A Descoberta das Ondas Solitárias	25
4.3	Solução Peakon	26
4.4	Solução Compacton	27
4.5	Soluções Oscilatórias	28
4.6	Comentários Finais	28
A	Equações que Governam a Dinâmica de Fluidos	30
A.1	Usando a Conservação do Momento	30
B	Ondas na Água: teoria linearizada	31
B.1	Ondas Gravitacionais com Pequenas Amplitudes em Superfícies . . .	31

C As Equações de Green-Nagdhi	34
C.1 Condições para Existência da Dinâmica Assintótica de Ondas Curtas	34
Referências	36

Relação das Figuras

1.1	Elemento de volume numa superfície S_0	1
1.2	Representação da <i>streamline</i> num deslocamento ds	5
2.1	Tensão superficial e ação da gravidade	10
2.2	Deslocamento η da superfície não perturbada	10
3.1	Folha de fluido	19
4.1	Diagrama do experimento de Scott Russell para gerar as ondas solitárias	25

Introdução

O estudo da propagação de ondas nos fluidos, particularmente a teoria de ondas na água, tem sido uma fonte de problemas matemáticos intrigantes e de resolução complicada. Um dos primeiros nomes neste cenário foi o de **Euler**. Ele estabeleceu um sistema de equações que descrevia o comportamento e a dinâmica dos fluidos. Também outra grande contribuição foi dada por **Navier** e **Stokes** que generalizaram a equação de Euler para fluidos viscosos. A equação de **Bernoulli** é outro ponto referencial nesta trajetória. Conhecidas, porém, as equações fundamentais que descrevem a dinâmica dos fluidos, queremos extrair delas a descrição de fenômenos observáveis. De fato, gostaríamos de separar classes de fenômenos, para os quais pudessemos obter equações simplificadas.

Uma das classes mencionadas acima é composta pelos fenômenos de propagação de ondas. Em especial, será aqui o caso de ondas de superfície. Como mencionado acima, as equações fundamentais da mecânica dos fluidos são conhecidas e bem estabelecidas. Mas, para cada situação particular, não desejamos resolver o sistema completo de equações. Este contém “fenômenos demais”. Contém todas as escalas de espaço e tempo, situações transientes, efeitos de todas as ordens nos quais não estamos, num primeiro momento interessados. Assim, procuramos obter, das equações básicas, outras que retratem a situação física em questão. Para tanto, passamos por aproximações e avaliamos a importância relativa de diversos efeitos. Em suma, construímos um modelo. O que se buscará nesta dissertação é a construção de um modelo matemático descrevendo ondas de superfície de pequeno comprimento de onda.

Equações descrevendo modelos para a propagação de ondas podem ser tanto lineares quanto não-lineares, correspondendo a diferentes regimes de validade das aproximações que lhes dão origem. Mais claramente, equações lineares devem ser válidas quando amplitudes de campos são pequenas. Nesta dissertação abordaremos equações que incluem termos não-lineares no limite de onda curta. O tratamento será feito de tal forma que a linearização destas equações seja compatível com a linearização das equações básicas da fluidodinâmica.

Já mencionamos que nos ocuparemos aqui de um limite particular, o das ondas curtas. Cabe mencionar que o limite oposto, o das ondas longas é bem conhecido. Ondas longas na superfície de um fluido invíscido são descritas pela equação de Korteweg e de Vries, a popular equação de KdV. Esta equação apresenta uma solução especial, a solução solitônica, consistindo numa onda localizada que se propaga com

velocidade fixa. Uma questão que então vem se colocar naturalmente é se no limite de onda curta tal tipo de solução também existe. Assim, este trabalho destina-se ao estudo de um tipo particular de ondas na superfície de um fluido (água), possuindo pequeno comprimento de onda. Exibiremos a equação que governa a dinâmica deste sistema e quais as características das soluções que ele fornece.

No primeiro capítulo faremos uma introdução às equações que marcaram o surgimento da hidrodinâmica. Tais equações serão deduzidas baseadas na Leis de Newton e impondo condições de contorno adequadas.

No segundo capítulo estenderemos nosso estudo para o tratamento linearizado de ondas na superfície da água considerando tal fluido incompressível e irrotacional. Encontraremos a relação de dispersão para ondas de gravidade na superfície da água e faremos um estudo para descrever o comportamento destas ondas quando a profundidade é grande ou pequena.

No terceiro capítulo trataremos do estudo da dinâmica não-linear das ondas na superfície de um fluido. Sem impor que seja irrotacional, este estudo tem papel importante pela dificuldade da resolução exata das equações que regem esta dinâmica. Para tal, utilizaremos uma aproximação que foi feita pela primeira vez na década de 70 e que ficou conhecida como aproximação de Green-Naghdi. Trateremos aqui de um caso especial em que uma velocidade superficial, devido a um agente externo, está presente no tratamento e que por fim nos fornecerá um sistema de equações que denominamos *sistema de Green-Naghdi estendido*.

No último capítulo discutiremos quais as conseqüências e efeitos resultantes da inclusão da não-linearidade quando tomamos o limite de onda curta. Será deduzida uma equação que governa a dinâmica assintótica deste limite sob a ação de um agente exteno que imprime uma velocidade na superfície do fluido. Exibiremos soluções deste sistema na forma de onda solitária.

Capítulo 1

Equações que Governam a Dinâmica de Fluidos

Fenômenos ondulatórios são comumente encontrados desde a física mais básica até as fronteiras do saber . Por exemplo, encontramos ondas em sistemas tão simples quanto uma corda, e em sistemas complexos, como o oceano ou fibras óticas . Na descrição dos fenômenos mencionados existe uma prática comum de desenvolver modelos de propagação ondulatória. Nesta dissertação , ocuparemos-nos de alguns desses modelos, em situações bastante específicas. Conquanto os conceitos que apresentaremos possam ter aplicações em campos variados da física, aqui trabalharemos no âmbito da hidrodinâmica, onde os fenômenos ondulatórios da hidrodinâmica são freqüentes e importantes. Antes de começarmos algumas considerações mais aprofundadas no campo da hidrodinâmica, vamos expor alguns conceitos básicos visando um embasamento suficiente para o entendimento dos resultados.

Para estabelecermos nossas equações, vamos usar conceitos simples e notação vetorial. Partiremos das Leis de Newton.

1.1 Usando a Conservação da Massa

Vamos supor um fluido com volume arbitrário, limitado por uma superfície S_0 .

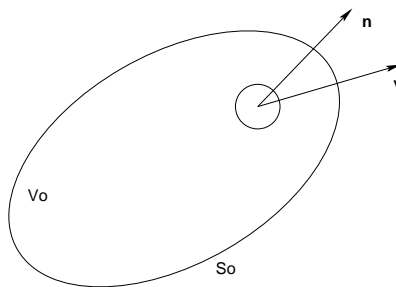


Figura 1.1: Elemento de volume numa superfície S_0

Se definirmos $\rho(x, t)$ como a densidade deste fluido, a massa M no volume V_0 será:

$$M = \int_{V_0} \rho dV \quad , \quad (1.1)$$

lembrando que a integral em V_0 corresponde a integral nas componentes x, y e z . Seja agora \vec{n} um vetor unitário normal e apontando para fora da superfície S_0 , conforme a figura anterior.

A massa total do fluido fluindo por unidade de tempo dt , no volume V_0 , correspondendo ao fluxo através de S_0 da corrente de massa ou a densidade do fluxo de massa $\rho\vec{v}$ será:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = - \int_{S_0} \rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \quad , \quad (1.2)$$

- $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t) \rightarrow$ velocidade de uma partícula no fluido;
- $\vec{n} \rightarrow$ vetor unitário que define a normal ao elemento de superfície ds ;

Lembrando que o produto escalar será positivo quando o fluido sai da superfície e negativo quando entra, de (1.1) e (1.2) encontra-se que:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho dV = - \int_{S_0} \rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \quad . \quad (1.3)$$

Sabemos que, do Teorema de Gauss [1] resulta:

$$\int_{S_0} \rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_{V_0} \nabla \cdot (\rho\vec{v}) dV \quad . \quad (1.4)$$

Substituindo (1.4) em (1.3) obtem-se:

$$\int_{V_0} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) \right] dV = 0 \quad . \quad (1.5)$$

Para que esta relação seja verdadeira, deveremos ter:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0 \quad . \quad (1.6)$$

Neste ponto encontramos uma das mais importante equações da dinâmica dos fluidos. Esta é a **equação da continuidade**, ela estabelece que um fluxo saindo de um volume qualquer resulta no decréscimo da densidade no interior deste volume.

1.2 Usando a Conservação do Momento

Vamos observar a mesma figura anterior. Considerando agora que a única força que age sobre o fluido seja a pressão $p = p(x, y, z, t)$, a força total agindo em V_0 é a integral da pressão sobre a superfície S_0 .

$$\vec{F} = - \int p \vec{n} dS \quad . \quad (1.7)$$

O Teorema de Gauss estabelece que:

$$\int_{S_0} \phi \vec{n} dS = \int_{V_0} \nabla \phi dV \quad . \quad (1.8)$$

Comparando (1.8) com (1.7), obtem-se:

$$- \int_{S_0} p \vec{n} dS = - \int_{V_0} (\nabla p) dV \quad . \quad (1.9)$$

Se $\vec{F} = - \int_{V_0} (\nabla p) dV$, teremos:

$$d\vec{F} = -(\nabla p) dV \quad . \quad (1.10)$$

De acordo com a Segunda Lei de Newton:

“A razão da mudança do momento linear de um corpo é igual a força externa resultante agindo neste corpo”

Então:

$$\frac{d(M\vec{v})}{dt} = \vec{F} \quad . \quad (1.11)$$

Mas,

$$\frac{d\vec{F}}{dV} = \frac{d}{dV} \frac{d(M\vec{v})}{dt} \quad , \quad (1.12)$$

$$\frac{d\vec{F}}{dV} = \frac{dM}{dV} \frac{d\vec{v}}{dt} + M \frac{d}{dV} \frac{d\vec{v}}{dt} \quad . \quad (1.13)$$

O último termo desta equação é nulo porque a velocidade não depende do volume. A densidade é $\frac{dM}{dV}$, desta forma:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p \quad . \quad (1.14)$$

A velocidade \vec{v} é função das coordenadas de espaço e tempo. A mudança da velocidade $d\vec{v}$ de uma partícula no fluido pode ser escrita como:

$$d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} dz \quad . \quad (1.15)$$

Dividindo cada termo desta última equação por dt e depois de alguma álgebra chega-se em:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \quad . \quad (1.16)$$

Substituindo (1.16) em (1.14), obtem-se:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p \quad . \quad (1.17)$$

Encontramos a **Equação de Movimento de Euler dos Fluidos Mecânicos**. Como vimos, ela é resultado da aplicação da Lei de Newton para um fluido sem viscosidade. Se tivermos ainda, a ação de uma força externa \vec{F} , esta equação pode ser generalizada como:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{F} \quad . \quad (1.18)$$

Esta equação nos obriga a dizer que a “fundação” da hidrodinâmica foi feita por Euler (1707-1783); as equações que ele escreveu sobrevivem até os dias atuais. De acordo com Lagrange, Euler não contribuiu para a hidrodinâmica, ele a criou.

Vários nomes estão presentes na história de sua criação. Podemos citar Euler, Lagrange, Bernoulli etc; cada um destes com sua contribuição particular. Não podemos deixar de citar **C. L. Navier** (1785-1836) e **G. G. Stokes** (1819-1903) que adicionaram seu tratamento de fluidos viscosos através da equação de Navier-Stokes. Esta é uma das fundamentais equações da hidrodinâmica, porém sua resolução é geralmente muito complicada sob dadas condições. Apenas em muitos poucos casos pode haver uma integração exata do movimento de um fluido.

Ela é escrita como [2]:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{F} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{v} \quad .$$

Percebe-se agora o aparecimento de mais um termo que é denominado por $\frac{\mu}{\rho}$. Este termo é chamado de *viscosidade cinemática*, onde μ é o coeficiente de viscosidade.

Ocuparemos-nos nesta dissertação do caso de fluidos não-viscosos. No que tange ao estudo de ondas de superfície, na água, por exemplo negligenciar a viscosidade é em geral uma aproximação aceitável. Assim, conseqüentemente, adotaremos daqui para a frente a equação de Euler (1.18) como a equação básica de nossos estudos.

1.3 Linha de Fluxo

Para definirmos a linha de fluxo [3], ou “streamline”, vamos idealizar a seguinte situação: Dizemos que num tempo t , num dado fluxo, todas as partículas têm uma dada velocidade \vec{v} e uma direção definida. A linha instantânea paralela a velocidade é chamada de *Streamline*. Para um fluxo estacionário (\vec{v} constante no tempo), o padrão da *streamline* permanece o mesmo, ao contrário de um fluxo não estacionário. Na figura abaixo, seja dx , dy e dz as componentes do comprimento do arco ao longo da *streamline*. Vamos denotar as componentes do vetor velocidade por:

$$u = \frac{dx}{dt}, v = \frac{dy}{dt}, w = \frac{dz}{dt} \quad . \quad (1.19)$$

Ao longo da *streamline* devemos ter:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad . \quad (1.20)$$

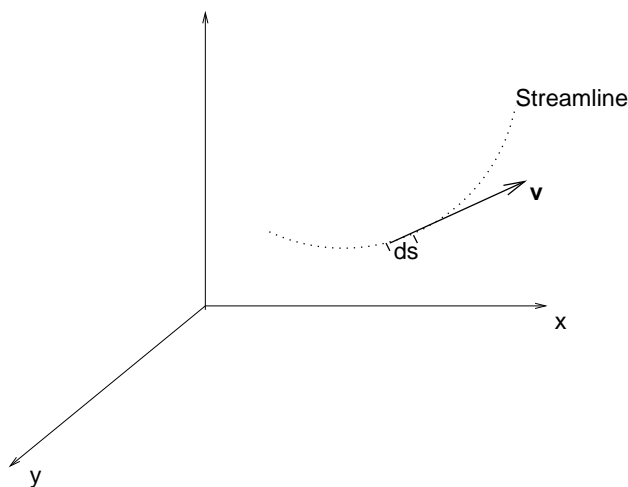


Figura 1.2: Representação da *streamline* num deslocamento ds

Desta forma, conhecer a integração das componentes da velocidade seria o mesmo que conhecer a equação da *streamline*. Observando a equação da continuidade e considerando que a densidade permanece constante no tempo, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) &= 0 \\ \nabla \vec{v} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (1.21)$$

Também estamos assumindo que o fluido é irrotacional, ou seja, a vorticidade é igual a zero, ou seja:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} = 0 \quad . \quad (1.22)$$

Substituindo em (1.18) obtem-se:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \vec{v}^2 = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{F} \quad . \quad (1.23)$$

Supondo a vorticidade nula, $\nabla \times \vec{v} = 0$, podemos representar \vec{v} por:

$$\vec{v} = \nabla \cdot \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k}, \quad \text{pois } \nabla \times (\nabla \phi) = 0 \quad . \quad (1.24)$$

Substituindo (1.24) em (1.21), obtem-se:

$$\begin{aligned} \nabla \vec{v} &= \nabla (\nabla \phi) \\ \Delta \phi &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (1.25)$$

Esta é a **Equação de Laplace para um Fluido Incompressível**. Ela pode ser simplesmente escrita como:

$$\Delta \phi = \nabla^2 \phi = 0 \quad . \quad (1.26)$$

Substituindo (1.24) em (1.18) obtem-se:

$$\nabla \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{p}{\rho} \right] = \vec{F} \quad . \quad (1.27)$$

Para forças gravitacionais ($\vec{F} = \vec{g}$), pode-se escrever de acordo com (1.27):

$$\nabla \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{p}{\rho} + gz \right] = 0 \quad , \quad (1.28)$$

onde a direção do vetor \vec{g} foi tomada no eixo z . Depois da integração obtém-se:

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{p - p_0}{\rho} + gz \right] = c(t) \quad , \quad (1.29)$$

onde p_0 é uma constante e $c(t)$ é uma função arbitrária do tempo que pode ser tomada como zero sem perda de generalidade. A equação encontrada é chamada de **Equação de Bernouli** para um fluido.

Sem perda de generalidade, podemos trocar ϕ por um gauge do tipo $\phi + f \left[c(t) + \frac{p_0}{\rho} \right] dt$ [4]. Substituindo esta relação em (1.29) obtém-se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{p}{\rho} + gz = 0 \quad . \quad (1.30)$$

1.4 Condições de Contorno

Ainda não determinamos todas as equações necessárias para nosso estudo. As equações restantes serão determinadas com a imposição das condições de contorno.

Vamos observar as equações (1.30) e (1.25) para aplicarmos as condições de contorno. Estas condições serão fundamentais para resolução de qualquer problema. Neste específico iremos aplicar as condições na superfície superior livre do fluido e na superfície horizontal rígida. Trataremos aqui de um sistema limitado inferiormente por uma placa horizontal rígida (“o fundo”) e superiormente por uma superfície livre, em contato com um gás inerte (“o ar”). Não há limites laterais, ou seja, consideramos o sistema infinito nas direções (x, y) , normais à direção da gravidade.

Na superfície superior teremos:

$$z = \eta(x, y, t) \quad . \quad (1.31)$$

Numa situação de equilíbrio ou numa superfície não perturbada, $\eta = 0$. Diferenciando agora (1.31) em relação a t :

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{dt}{dt} ; \quad \text{ou} \\ w &= \frac{\partial \eta}{\partial x} u + \frac{\partial \eta}{\partial y} v + \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad . \end{aligned} \quad (1.32)$$

Observando (1.24), escreveremos cada componente da velocidade como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u \quad ; \quad (1.33)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = k \quad ; \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = w \quad . \quad (1.35)$$

Comparando com (1.32), obtem-se:

$$\phi_z = \eta_x \phi_x + \eta_y \phi_y + \eta_t \quad . \quad (1.36)$$

Esta condição de contorno é chamada **condição cinemática**.

Para obter a segunda condição de contorno, tomaremos o caso de não existir tensão superficial entre o fluido e o ar. Na superfície livre a pressão deve ser a pressão atmosférica. Na superfície $z = \eta$, (1.30) torna-se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{p_{atm}}{\rho} + g\eta = 0 \quad . \quad (1.37)$$

Vamos assumir que $\phi \rightarrow \phi - \frac{p_{atm}}{\rho} t$. Desta forma:

$$\vec{v} = \nabla \phi = \nabla \left(\phi - \frac{p_{atm}}{\rho} t \right) \quad . \quad (1.38)$$

Substituindo em (1.37), obtem-se:

$$\phi_t + \frac{1}{2} (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) + g\eta = 0 \quad . \quad (1.39)$$

Esta é chamada **condição dinâmica**.

Finalmente, no “fundo”, localizado em $z = -h$, devemos ter:

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad . \quad (1.40)$$

Capítulo 2

Ondas na Água: teoria linearizada

Muitas das idéias sobre ondas dispersivas se originaram em problemas de ondas na água. Este é um tema de estudo fascinante porque a os fenômenos observados são matematicamente tratáveis e comumente passíveis de um possível tratamento numérico. Neste capítulo daremos uma breve introdução sobre as equações encontradas no tratamento de ondas na superfície de um fluido, por exemplo a água e o comportamento de ondas na superfície da água em grandes e pequenas profundidades.

2.1 Equações Hidrodinâmicas

Como modelo mais simples de movimento ondulatório unidimensional temos a seguinte equação:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad (2.1)$$

onde $u(x, t)$ é a amplitude da onda e c é uma constante positiva. Esta é a equação que governa a dinâmica de uma onda e que tem a tão conhecida solução no caso mais geral:

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad , \quad (2.2)$$

onde f e g são funções arbitrárias. Cada uma delas representa uma direção de propagação desta onda.

Particularmente, estamos interessados em ondas na superfície de um fluido. Adotaremos este fluido como sendo a água e para uma maior fundamentação, vamos dividir as ondas em sua superfície em dois tipos:

Ondas de Gravidade: Como o próprio nome sugere, são aquelas formadas pela ação \vec{g} da aceleração da gravidade em uma certa massa d'água. A aceleração

\vec{g} sempre tenta deixar a superfície da água reta provocando deslocamentos de água que envolvem em ondas.

Ondas Capilares: São formadas por um princípio semelhante ao das ondas de gravidade, porém o agente formador é a tensão superficial. Este tipo de onda é muito comum quando temos gotas de chuva numa superfície.

Abaixo temos uma representação da ação da aceleração da gravidade e da tensão superficial na superfície da água:

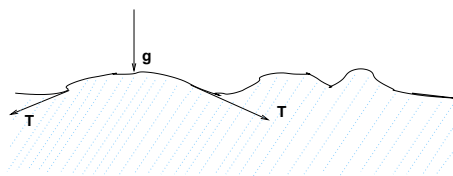


Figura 2.1: Tensão superficial e ação da gravidade

2.2 Equação Reduzida de um Fluido

As ondas definidas acima podem ser matematicamente modeladas através de equações que governam sua dinâmica.

Vamos considerar o movimento das ondas na superfície da água, com ar acima desta e desprezar os efeitos da tensão superficial. O líquido é assumido ser limitado abaixo por uma superfície horizontal rígida, de profundidade h . Vamos escolher o sistema de coordenadas, tal que o eixo z aponta para cima e o plano xy coincide com a superfície não perturbada do fluido.

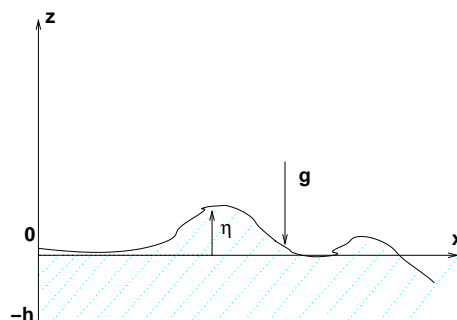


Figura 2.2: Deslocamento η da superfície não perturbada

Vamos tomar a densidade ρ do líquido incompressível como sendo constante. Sob todas estas considerações, as equações para o estudo de ondas gravitacionais são as **Equações de Euler** para um fluxo irrotacional de um fluido incompressível com a superfície livre:

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0, \quad \text{em } -h < z < \eta(x, y, t) \quad ; \quad (2.3)$$

$$\phi_z = \eta_x\phi_x + \phi_z + \eta_y\phi_y + \eta_t, \quad \text{em } z = \eta(x, y, t) \quad ; \quad (2.4)$$

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) + g\eta = 0, \quad \text{em } z = \eta(x, y, t) \quad ; \quad (2.5)$$

$$\phi_z = 0, \quad \text{em } z = -h \quad . \quad (2.6)$$

2.3 Ondas Gravitacionais de Pequenas Amplitudes em Superfícies Livres

Vamos agora considerar pequenas perturbações numa superfície livre do fluido. Isto pode ser feito tomando η e ϕ pequenos. Desconsideraremos, conseqüentemente os termos não-lineares. Então (2.4) e (2.5) ficam:

$$\eta_t - \phi_z = 0, \quad z = \eta \quad . \quad (2.7)$$

$$\phi_t + g\eta = 0, \quad z = \eta \quad . \quad (2.8)$$

Se η é pequeno, podemos expandir ϕ_z numa série de Taylor [1]:

$$(\phi_z)_\eta = (\phi_z)_0 + \eta(\phi_{zz})_0 + \dots \quad . \quad (2.9)$$

Diferenciando (2.8) em relação ao tempo, obtêm-se:

$$\phi_{tt} + g\eta_t = 0 \quad . \quad (2.10)$$

Substituindo (2.7) em (2.10) chega-se em:

$$\phi_{tt} + g\phi_z = 0, \quad z = 0 \quad . \quad (2.11)$$

Este procedimento reduz, em vista (2.9), o problema de condições livres para um problema de condições de contorno fixas. É agora um problema linear. Reescrevendo nossas equações obtem-se:

$$\Delta\phi = 0, \quad -h < z < 0 \quad ; \quad (2.12)$$

$$\phi_{tt} + g\phi_z = 0, \quad z = 0 \quad ; \quad (2.13)$$

$$\phi_z = 0, \quad z = -h \quad . \quad (2.14)$$

Para ter uma idéia da solução deste problema, vamos fazer uma restrição à um problema unidimensional, isto é, consideraremos ondas se propagando ao longo do eixo x , as quais são uniformes na direção y . Experimentalmente, ondas na superfície da água se comportam como “senos”. Baseado nestas condições, vamos sugerir a seguinte solução:

$$\phi = q(x, y) \sin(kx - \omega t) \quad , \quad (2.15)$$

onde ω , é por enquanto, indeterminado.

Substituindo (2.15) em (2.12) chega-se em:

$$\sin(kx - \omega t) \left[\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - qk^2 + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \right] + \cos(kx - \omega t) \left[2k \frac{\partial q}{\partial x} \right] = 0 \quad . \quad (2.16)$$

Esta equação só será satisfeita se os coeficientes dos termos *seno* e *coseno* forem nulos. Anulando-os chega-se em:

$$q(z) = Ae^{-kz} + Be^{kz} \quad , \quad (2.17)$$

onde A e B são constantes de integração. Agora, o potencial velocidade pode ser expresso como:

$$\phi(z) = (Ae^{-kz} + Be^{kz}) \sin(kx - \omega t) \quad (2.18)$$

Utilizando a condição de contorno (2.14) e inserindo este resultado na expressão (2.18), obtem-se:

$$\phi = (2Ae^{-kh}) \cosh[k(z + h)] \sin(kx - \omega t) \quad . \quad (2.19)$$

Diferenciando (2.19) em relação a z e comparando com (2.7) obtem-se o deslocamento da superfície livre:

$$\eta = \frac{2A}{\omega} ke^{-kh} \cos(kx - \omega t) \sinh(kz + kh) \quad . \quad (2.20)$$

Podemos ainda simplificar esta expressão definindo uma nova amplitude:

$$a_m = \frac{2A}{\omega} k e^{-kh} \sinh(kz + kh) \quad . \quad (2.21)$$

E agora:

$$\eta = a_m \cos(ks - \omega t) \quad . \quad (2.22)$$

O potencial velocidade agora se torna:

$$\phi = \omega a_m \frac{\cosh[k(z + h)]}{k \sinh[k(z + h)]} \sin(kx - \omega t) \quad . \quad (2.23)$$

Utilizando (2.13), encontra-se facilmente a seguinte expressão:

$$\omega^2 = gk \tanh(kh) \quad . \quad (2.24)$$

Acabamos de encontrar a expressão fundamental do nosso estudo. Encontramos a **relação de dispersão para ondas de gravidade de pequenas amplitudes na superfície da água**. Esta relação é válida somente quando a tensão superficial não é considerada.

A velocidade de fase descreve como a superfície de fase constante se move, podemos ainda dizer que ela descreve o movimento de cada componente individual da onda. Já a velocidade de grupo dá a medida de quão rápido o volume da onda se propaga, também dizemos que é a velocidade do pacote de ondas ou a velocidade de propagação da energia.

A velocidade de fase é definida [4] como:

$$v_f = \frac{\omega}{k} \quad ,$$

e a velocidade de grupo [4] por:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad .$$

Podemos encontrar a velocidade de fase e a velocidade de grupo desta onda como:

$$v_f = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)} \quad ; \quad (2.25)$$

$$v_g = \frac{v_f}{2} \left[1 + \frac{2kh}{2 \sinh(2kh)} \right] \quad . \quad (2.26)$$

Observamos que em (2.25) e (2.26) existe uma dependência em h . Isto sugere uma análise cuidadosa dos casos em que este h é relevante ou não. Vamos então considerar dois casos assintóticos:

2.3.1 Ondas em Águas Rasas

O primeiro caso analisado é aquele em que a magnitude de h é pequena comparada com o comprimento de onda. Para tanto, consideraremos $kh \ll 1$ e faremos a expansão:

$$\tanh(kh) \approx kh - \frac{(kh)^3}{3} \dots \quad (2.27)$$

Substituindo (2.27) em (2.24) obtem-se:

$$\omega^2 = gk \left(kh - \frac{(kh)^3}{3} \right) \quad (2.28)$$

Se $c = \sqrt{gh}$, então:

$$\omega = ck \left[1 - \frac{(kh)^2}{3} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.29)$$

Lembrando que $kh \ll 1$, vemos que ω compõe-se de um termo, ck , mais uma correção pequena, dependente de kh .

Tal dependência diz-nos que ondas com diferentes número de onda propagam-se com diferentes velocidades. A tal fenômeno é dado o nome de **dispersão**. Coerentemente, dizemos que tratamos de ondas dispersivas. No caso em questão, dado que $kh \ll 1$, temos ondas com fraca dispersão. No limite de dispersão nula, ou seja, não tomando em conta a presença do termo em kh na equação (2.29), temos ademais:

$$\begin{aligned} \omega &\approx ck \quad , \\ v_f = \frac{\omega}{k} &\approx c \quad , \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$v_f \approx \sqrt{gh} \quad (2.31)$$

Esta expressão nos dá um importante resultado, o qual diz que para uma onda harmônica com um λ muito grande, comparado com a profundidade, a dispersão pode ser desconsiderada e a velocidade de fase c é independente de λ , mas varia com a raiz quadrada da profundidade.

Embora tenhamos feito esta análise para ondas com um comprimento de onda grande comparado com a profundidade do meio, iremos tratar este ponto com bastante cuidado nos próximos capítulos. Perceberemos que a situação é completamente diferente quando consideramos ondas com um comprimento de onda muito pequeno.

2.3.2 Ondas em Águas Profundas

Agora temos o caso contrário ao anterior, qual seja $kh \gg 1$.

Observamos que $\tanh(\theta) = 1$, para θ muito grande. Desta forma, podemos aproximar (2.24) e (2.25) por:

$$\begin{aligned}\omega &\approx \sqrt{gk} \quad , \\ v_f &\approx \sqrt{\frac{g}{k}} \approx \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad .\end{aligned}\tag{2.32}$$

Agora, mesmo na ordem mais baixa, há dispersão, ao contrário do caso anterior. Nesta mesma aproximação, podemos obter o potencial de velocidade, ϕ como sendo:

$$\phi = \frac{a_m\omega}{k} e^{kz} \sin(kx - \omega t) \quad .\tag{2.33}$$

Isto significa que ϕ diminui quando vamos para o interior do fluido. Em outras palavras, os efeitos da velocidade na superfície tendem a desaparecer a medida que avançamos na profundidade do fluido, como é intuitivamente esperado. Basta observar as componentes da velocidade.

$$\phi_x = u = \frac{d\phi}{dx} = \frac{a_m\omega}{k} e^{kz} \cos(kx - \omega t) \quad ;\tag{2.34}$$

$$\phi_z = w = \frac{d\phi}{dz} = a_m\omega e^{kz} \sin(kx - \omega t) \quad .\tag{2.35}$$

Todas elas, inclusive a nova expressão para o potencial velocidade, apresentam uma dependência em a_m . Esta nova amplitude tem um termo proporcional à uma exponencial de $-h$. Isto implica que com o crescimento de h , o termo de nova amplitude tenha um valor cada vez menor.

Capítulo 3

As Equações de Green-Nagdhi

O estudo da dinâmica não-linear de ondas na superfície de um fluido é um capítulo importante da hidrodinâmica. Sua dificuldade advem da impossibilidade de resolver exatamente as equações básicas regendo a dinâmica dos fluidos.

Assim sendo, devemos proceder através de aproximações, envolvendo suposições sobre os valores relativos de diversas grandezas físicas. Tais aproximações, permitindo obter resultados por meio de expansões perturbativas, tem conseqüentemente limites de validade.

Trataremos aqui de uma destas aproximações, que possibilitará o estudo do limite onda-curta das equações da hidrodinâmica. Referimo-nos à **aproximação de Green-Nagdhi**.

3.1 Condições para Existência da Dinâmica Assintótica de Ondas Curtas

Vamos considerar um sistema unidimensional não-linear e dispersivo. No caso mais simples ele poderá ser representado por uma equação de evolução não-linear em um campo $u(x, t)$ com uma parte linear e dispersiva e tendo x e t , respectivamente, as variáveis de espaço e tempo.

A solução mais simples da parte linear é uma onda plana progressiva dada por:

$$u(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} \quad , \quad (3.1)$$

onde:

$A \rightarrow$ Amplitude

$k \rightarrow$ Número de onda

$\omega \rightarrow$ Frequência que satisfaz a seguinte relação de dispersão $\omega = W(k)$.

O número de onda é um termo que está relacionado com o comprimento de onda l por: $k = 2\pi/l$.

Também vamos considerar $W(k)$ como uma função somente do parâmetro k . Note que k é arbitrário em (3.1), desta forma são admitidos todos os comprimentos de ondas como solução do sistema, tanto ondas longas como ondas curtas.

Ondas curtas são aquelas para as quais $kh \gg 1$. Para passarmos desta condição, para uma condição formulada a partir das coordenadas de espaço e tempo, introduzimos $\epsilon \ll 1$, e coordenadas:

$$\zeta = \frac{x}{\epsilon} \quad , \quad (3.2)$$

$$\tau = \epsilon t \quad , \quad (3.3)$$

que, naturalmente descrevem fenômenos ocorrendo numa escala de espaços pequena e em tempos longes [5].

Estas novas variáveis são de boa escolha para descrevermos o comportamento assintótico no tempo porque ζ e τ são da ordem de um quando x é muito pequeno e t é muito grande.

Ademais, devemos impor condições para a existência mesmo do limite de onda-curta. Para tanto vamos supor que $\omega(k)$ possa ter no máximo um pólo simples em $k \rightarrow \infty$.

Esta série resulta em:

$$W(k) = ak + \frac{b}{k} + \frac{c}{k^3} + \dots \quad . \quad (3.4)$$

Definindo a velocidade de fase e a velocidade de grupo, respectivamente por:

$$v_p = \frac{W(k)}{k} \quad ,$$

$$v_g = \frac{\partial W}{\partial k} \quad .$$

Tem-se no limite de ondas curtas:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{W(k)}{k} = a \quad ,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial W}{\partial k} = a \quad . \quad (3.5)$$

Este resultado nos garante que a característica geométrica e a energia se propagam linearmente na mesma velocidade a na ordem ϵ . Pode-se ver que a existência de pólos de ordem superior geraria velocidades infinitas no limite $k \rightarrow \infty$.

3.2 Equações de Green-Nagdhi

Vimos nos capítulos anteriores que a teoria clássica das ondas gravitacionais unidimensionais superficiais na água tem uma relação de dispersão dada por:

$$W(k) = \sqrt{[gk \tanh(kh)]} \quad . \quad (3.6)$$

Esta equação é problemática no limite de ondas curtas, visto que (3.6) não pode ser escrita na forma (3.4) no limite $k \rightarrow \infty$.

Por outro lado, a relação de dispersão é determinada completamente pelas condições as quais o sistema é linearizado. Isto nos dá a opção de questionarmos se existe uma linearização alternativa do problema de ondas na superfície da água que nos conduza a uma relação de dispersão “bem comportada”. A resposta é sim, mas o preço a se pagar é o abandono das condições clássicas de linearização (pequenas perturbações na superfície, ausência de tensão superficial, potencial velocidade pequeno etc).

Vejam agora quais modificações podem ser introduzidas na derivação das equações clássicas da teoria de ondas na água, de tal forma que possamos formular consistentemente um modelo de propagação de ondas curtas não-lineares. Para tanto faremos duas hipóteses físicas. A primeira delas é sobre o modelo mesmo que estamos tratando. Vamos supor que a superfície do fluido possa mover-se com uma dada velocidade c_0 , induzida pela presença de um agente externo, por exemplo, o vento.

O modelo idealizado corresponde portanto a uma camada de fluido que sofre, na superfície, uma descontinuidade da velocidade tangencial. Antes de formular a segunda hipótese que nos levará a um modelo aceitável para a propagação não-linear de ondas curtas, vejamos as conseqüências desta primeira hipótese.

Vamos estudar perturbações para um fluido ideal, sem viscosidade, incompressível, homogêneo, com densidade ρ e sem tensão superficial.

Sejam as partículas deste meio contínuo identificadas por um sistema cartesiano retangular, de centro 0 e eixos (x, y, z) com Oz apontando para cima:

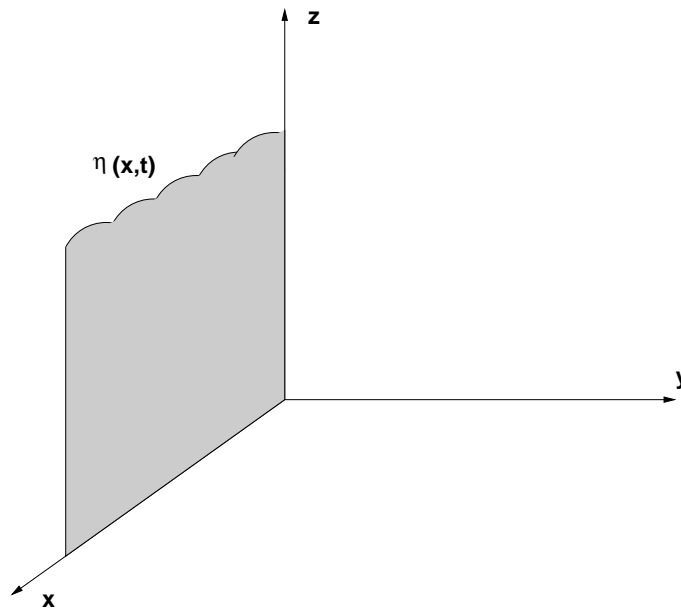


Figura 3.1: Folha de fluido

Vamos assumir simetria no eixo y e apenas considerarmos uma folha de fluido no plano xz . Esta folha de fluido está se movendo de tal forma que o em $z = 0$ temos um “fundo rígido” e uma superfície livre em superior em $z = \eta(x, t)$. Introduziremos também um vetor velocidade $\vec{v} = (u, w)$.

Relembrando a equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad .$$

Se o fluido é incompressível e homogêneo a equação acima se reduz em:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) &= 0 \quad , \\ \nabla \cdot \vec{v} &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{3.7}$$

Relembrando a equação de movimento de Euler para um fluido sob gravidade g e $0 \leq z \leq \eta(x, t)$, tem-se:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \vec{F} \quad .$$

No nosso caso, estamos tomando o caso específico de força e uma velocidade dada por:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (u, 0, w) \quad , \\ \vec{F} &= (0, 0, -g) \quad ,\end{aligned}\tag{3.8}$$

ou seja, temos:

$$\rho \dot{u} = -p_x^*(x, z, t) \quad .\tag{3.9}$$

$$\rho \dot{w} = -p_z^*(x, z, t) - \rho g \quad .\tag{3.10}$$

onde $p_i^* = \nabla_i p$.

As condições de contorno na superfície são as condições cinemáticas e dinâmica (2.4) e (2.5) modificadas para levar em conta a presença de um agente externo (vento) que faz com que a superfície do fluido mova-se com uma velocidade dada c_0 . Isso nos leva a uma modificação da condição cinemática, que agora se escreve como.

$$\eta_t + u\eta_x - w + c_0\eta_x = 0 \quad .\tag{3.11}$$

A condição (2.5) não se modifica.

Agora podemos introduzir a segunda hipótese física necessária para obter o adequado à propagação de ondas curtas. Adotaremos a aproximação usada por Green e Nagdhi que consiste em assumir u independente de z , ou seja, $u = u(x, t)$. Esta hipótese é conhecida como **hipótese colunar** [6], ou simplesmente considerar a componente vertical w sendo uma função linear de z . Ela implica em w ser somente uma função linear. Ou seja, teremos simplesmente:

$$\begin{aligned}w &= z\xi(x, t) \quad , \\ \xi(x, t) &= -u_x \quad .\end{aligned}\tag{3.12}$$

Com $\xi(x, t)$ arbitrária. Tais expressões obedecem a:

$$\nabla \cdot \vec{v} = u_x(x, z, t) + w_z(x, z, t) = 0$$

Agora integramos (3.9) em z de $z = 0$ até η :

$$\int_0^{\eta(x,t)} \sigma \frac{d}{dt} u(x, z, t) dz = - \int_0^{\eta(x,t)} \frac{\partial}{\partial x} p^*(x, z, t) dz \quad . \quad (3.13)$$

Aqui é necessário usar a fórmula de integração de Leibniz [1] porque os limites de integração possuem variáveis que são as mesmas em que a integral está sendo feita, qual seja:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} f(x, \alpha) dx &= \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) dx + f(h(\alpha), \alpha) \frac{dh(\alpha)}{d\alpha} \\ &\quad - f(g(\alpha), \alpha) \frac{dg(\alpha)}{d\alpha} \quad . \end{aligned} \quad (3.14)$$

A integração em detalhes está mostrada no apêndice C. Como resultado, obtém-se a seguinte expressão:

$$\rho(u_t + uu_x)\eta = -p_x \quad . \quad (3.15)$$

Agora, vamos multiplicar (3.10) por z e integrar de $z = 0$ até η . Como resultado, obtém-se:

$$\rho(\xi^2 + \dot{\xi}) \frac{\eta^3}{3} + \sigma g \frac{\eta^2}{2} = p \quad . \quad (3.16)$$

O procedimento utilizado aqui segue o mesmo raciocínio da integral de Leibniz, conforme apêndice.

Derivando (3.16) em relação a x e subtraindo em (3.15) vem:

$$u_t + uu_x + g\eta_x = \eta\eta_x(u_{xt} + uu_{xx} - (u_x)^2) + \frac{\eta^2}{3}(u_{xt} + uu_{xx} - (u_x)^2)_x \quad . \quad (3.17)$$

Lembrando que a condição de contorno cinemática é:

$$\eta_t + u\eta_x - w + c_0\eta_x = 0 \quad .$$

Em vista da hipótese colunar, (3.12), segue-se que:

$$\eta_t + (\eta u)_x + c_0\eta_x = 0 \quad . \quad (3.18)$$

O sistema composto por (3.17) e (3.18) é um sistema de equações para η e u , fechado. Se $c_0 = 0$ obtem-se o **sistema de equações de Green-Nagdhi** [7]. Com a presença de c_0 é conhecido como **sistema de Green-Nagdhi estendido**.

Estas equações estendidas de Green-Nagdhi descrevem a interação não-linear entre duas formas separadas de movimento: um movimento ondulatório associado à resposta elástica do fluido para uma dada perturbação e um movimento superficial gerado por um agente externo como o vento, por exemplo.

Este sistema é de fundamental importância porque temos um resultado bastante curioso na relação de dispersão obtida. A relação de dispersão $W(k)$ do sistema de equações é obtida assumindo:

$$\eta(x, t) = h + e^{i[kx - W(k)t]} \quad , \quad (3.19)$$

$$u(x, t) = Ae^{i(kx - W(k)t)} \quad , \quad (3.20)$$

onde h é profundidade não perturbada do fluido e A uma dada amplitude.

Substituindo (3.19) e (3.20) em (3.13) e (3.14) e ainda considerando apenas os termos em primeira potência da exponencial, obtem-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -WA + gk - \frac{h^2k^2}{3}WA = 0 \\ -W + kc_0 + Akh = 0 \end{cases}$$

Este sistema nos leva facilmente ao seguinte polinômio de segunda ordem:

$$W^2(k) - W(k)c_0k - \frac{3k^2hg}{3 + k^2h^2} = 0 \quad . \quad (3.21)$$

Uma das duas soluções de (3.21) tem o comportamento assintótico de onda curta [8] dado por:

$$W(k) = -\frac{3g}{c_0h} \left(\frac{1}{k}\right) + \frac{3}{c_0h^2} \left(\frac{3g}{h} + \frac{3g^2}{c_0^2}\right) \left(\frac{1}{k^3}\right) + O\left(\frac{1}{k^5}\right) \quad . \quad (3.22)$$

Esta relação de dispersão se comporta bem para o limite de $k \rightarrow \infty$ mesmo para ordens superiores de k .

Capítulo 4

Ondas Curtas

4.1 Limite de Onda Curta

Vimos no capítulo anterior que o sistema de equação que denominamos de **Equações de Green-Naghdi estendido** possui uma relação de dispersão bem comportada no limite de pequenos comprimentos de onda, ou seja, sabemos que o limite linear desta equação descreve ondas curtas.

O que se passa, no entanto, se “ligarmos” a não-linearidade? Como se alteram as características das ondas quando levamos em conta efeitos não-lineares? O que queremos portanto saber é como o sistema de equações de Green-Naghdi estendido se comporta no limite de onda curta, levando em conta as contribuições de termos não-lineares. A isto chamamos de limite assintótico de onda curta. No entanto, tal limite não pode ser obtido sem fazer hipótese sobre a magnitude dos efeitos não-lineares, ou seja, sobre a amplitude dos campos envolvidos. Estes serão supostos pequenos, e conseqüentemente estaremos estudando um limite dito de fraca não-linearidade.

Para estudar o limite de onda-curta vamos supor que todas as variáveis dependentes do problema dependem da variável espacial x através da combinação :

$$\zeta = \frac{x}{\epsilon} \quad , \quad (4.1)$$

onde $\epsilon \ll 1$. Aqui ϵ faz o papel análogo ao comprimento de onda.

Vamos também introduzir uma variável temporal reescalada:

$$\tau = \epsilon t \quad . \quad (4.2)$$

Para entender o porquê deste reescalamento lembremos que o limite não-linear que buscamos encontrar deve possuir, ele mesmo, um novo limite linear, o qual, por sua vez, deve coincidir com o limite linear do sistema de Green-Naghdi estendido

estudado no capítulo anterior. Este por sua vez, possui soluções dependendo apenas da variável:

$$\Theta = kx - W(k)t \quad . \quad (4.3)$$

Se agora $k \sim \frac{1}{\epsilon}$ e $W(\frac{1}{\epsilon}) \sim \epsilon$ então $\Theta \sim \frac{x}{\epsilon} - \epsilon t$, o que leva às definições (4.1) e (4.2) acima.

A dinâmica não-linear das ondas curtas de pequena amplitude, em relação a h , é encontrada através das expansões do tipo [9]:

$$\phi = h + \epsilon^2 H_0 + \epsilon^4 H_2 + \epsilon^4 H_4 + \dots \quad , \quad (4.4)$$

$$u = \epsilon^2 U_0 + \epsilon^4 U_2 + \epsilon^6 U_4 + \dots \quad . \quad (4.5)$$

Onde H_i e U_i são funções de ζ e τ . Substituindo estas duas expansões e a nova definição dos operadores nas equações (3.13) e (3.14) obtém-se:

$$h(U_0)_\zeta + c_0(H_0)_\zeta = 0 \quad , \quad (4.6)$$

$$g(H_0)_\zeta = \frac{h^2}{3} \{ (U_0)_{\tau\zeta} + U_0(U_0)_{\zeta\zeta} - (U_0)_\zeta^2 \}_\zeta \quad . \quad (4.7)$$

Substituindo a primeira na segunda e integrando em ζ , vem que:

$$\frac{-gh}{c_0}(U_0) = \frac{h^2}{3} \{ (U_0)_{\tau\zeta} + U_0(U_0)_{\zeta\zeta} - (U_0)_\zeta^2 \} \quad . \quad (4.8)$$

Por fim, se voltarmos para as variáveis originais τ e ζ , e escrevermos $U_0 = \frac{1}{\epsilon^2} u$ teremos:

$$u_{xt} = \frac{3g}{hc_0} u - uu_{xx} + (u_x)^2 \quad . \quad (4.9)$$

Esta é a equação que governa a dinâmica assintótica de ondas curtas sob ação do vento no limite de fraca não-linearidade. Ela contém um termo linear dispersivo e dois termos não-lineares de sinais opostos. Esta equação foi obtida na menor ordem da expansão em potências de ϵ . Observa-se que sua parte linear tem uma relação de dispersão dada por:

$$W(k) = \frac{-3g}{c_0 h} \left(\frac{1}{k} \right) \quad , \quad (4.10)$$

coerente com o obtido na secção anterior.

4.2 A Descoberta das Ondas Solitárias

Um *sóliton* é uma onda localizada que viaja sem mudar sua forma ou espalhando elásticamente. Um das equações mais famosas da física matemática que estuda esse fenômeno é a equação de KdV [10]. É uma equação não-linear que pode ser escrita tomando como base o fenômeno de não-linearidade e dispersão e ainda apresenta sólitons como solução. Sua expressão é apresentada como:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + 6u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} = 0$$

Entretanto, a equação de KdV não é de interesse apenas matemático mas é também importante observá-la do ponto de vista prático. Para tal, vamos ver como a onda solitária apareceu pela primeira vez no cenário científico.

A onda solitária, então chamada porque ocorre como uma entidade localizada, foi primeiro observada por **J. Scott Russell** em Endinburgh, no canal de Glasgow - 1834. Ele a chamou de *onda grande de translação*. Depois de alguns experimentos em laboratório, Russel gerou uma onda solitária utilizando um peso e um canal com água de acordo com a figura abaixo:

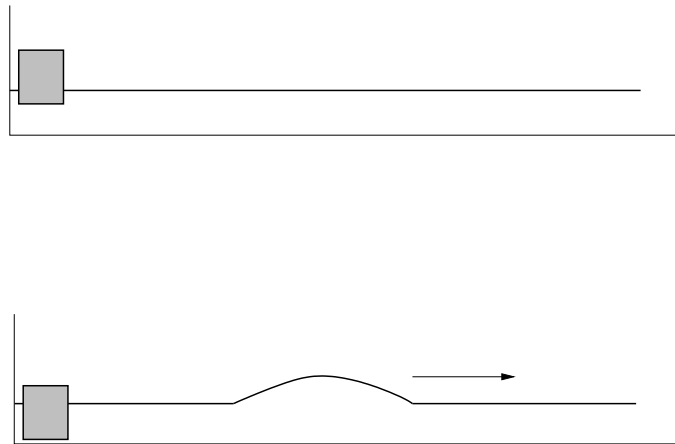


Figura 4.1: Diagrama do experimento de Scott Russell para gerar as ondas solitárias

Ele deduziu empiricamente que o volume de água na onda era igual ao volume de água deslocada, e que a velocidade c de deslocamento da onda solitária era obtida de [11]:

$$c^2 = g(h + a) \quad , \quad (4.11)$$

onde a era a amplitude da onda, h a profundidade de água não-perturbada e g a aceleração da gravidade. Desta forma, a onda solitária é uma *onda de gravidade*. Da equação (4.11) percebe-se que ondas grandes se deslocam com velocidade alta. Para colocar as observações de Russel numa base mais concreta, Boussinesq (1871) e Lord Rayleigh (1876) assumiram que uma onda solitária tem uma escala de comprimento muito maior que a profundidade da água. Eles deduziram, partindo das equações de movimento para um fluido sem viscosidade e incompressível, que a forma de onda era:

$$\zeta(x, t) = a \operatorname{sech}^2 \beta(x - ct) \quad , \quad (4.12)$$

onde, $\beta^{-2} = 4h^2(h + a)/3a$ para qualquer $a > 0$. Entretanto, eles não escreveram uma equação que admitisse (4.12) como solução. Isto só foi feito em 1895 por Korteweg e de Vries, levando à equação de KdV. Tal equação foi muito estudada. Sabe-se que ela é integrável, possuindo soluções multi-solitárias que descrevem a interação de vários sólitons. Não é o nosso intuito tratarmos disto aqui. O ponto da discutir agora é outro: existirá no limite de onda curta alguma solução semelhante, ou seja, uma solução do tipo onda solitária? Existem sólitons curtos?

4.3 Solução Peakon

Vamos lembrar que considerando uma onda de superfície unidirecional $u(x, t)$, se propagando na direção x num fluido e sob ação do vento com velocidade c_0 , nos fornece uma equação através de métodos perturbativos a equação não-linear:

$$u_{xt} = -\frac{3g}{hc_0}u - uu_{xx} + (u_x)^2 \quad , \quad (4.13)$$

Ela nos fornece várias soluções interessantes correspondentes às ondas solitárias. Podemos destacar duas soluções denominadas **solução peakon** e **solução compacton**.

Vamos procurar soluções sobre a equação (4.13) que dependam de x e t através da combinação $X = x - vt$. Desta forma:

$$-vu_{XX} = -\frac{3g}{hc_0}u - uu_{XX} + (u_X)^2 \quad . \quad (4.14)$$

Inspirados em resultados de Camassa e Holm [6], postulamos a forma da solução como sendo:

$$u = Ae^{-\left|\frac{x}{\lambda}\right|} \quad . \quad (4.15)$$

Substituindo em (4.14) obtemos, com uso da identidade $(1 - \partial_{XX})e^{-|X|} = 2\delta(X)$ [12], relações entre A , λ e v , que resultam em:

$$v = A = -\frac{3g}{hc_0}\lambda^2 \quad , \quad (4.16)$$

ou seja,

$$u(x, t) = -\alpha\lambda^2 \exp\left(-\left|\frac{x + \alpha\lambda^2 t}{\lambda}\right|\right), \quad \alpha = -\frac{3g}{hc_0} \quad . \quad (4.17)$$

Esta solução representa uma onda solitária de amplitude positiva que tem decaimento exponencial ao redor de um “pico”, cuja posição é dada por $x_p = -2\alpha\lambda^2 t$.

Tal solução é semelhante à aquela encontrada por Camassa e Holm [12] para a equação que hoje leva os seus nomes:

$$\eta_t + 2\kappa\eta_x - \eta x x t + 3\eta\eta_x = 2\eta_x\eta_{xxt} + \eta\eta_{xxx} \quad (4.18)$$

Note-se porém que a equação de Camassa-Holm é uma equação para grandes comprimentos de onda, ao contrário da equação (4.14), válida no limite assintótico oposto.

A solução (4.17) apresenta algumas características típicas de ondas solitárias em sistemas não-lineares. Há uma relação entre amplitude, número de onda e velocidade. Somente um deles pode ser escolhido arbitrariamente, os outros ficando determinados em função do escolhido.

4.4 Solução Compacton

É igualmente possível procurar soluções de (4.13) de um outro tipo, ditas **compacton**. O nome vem do fato de terem suporte compacto. Elas foram inicialmente estudadas por Rosenau e Hyman [13] em equações de KdV generalizadas.

A solução compacton no nosso caso é:

$$u = \begin{cases} -8\alpha\lambda^2 \cos^2\left(\frac{x}{4\lambda}\right), & \text{se } \left|\frac{x}{\lambda}\right| < 2\pi \\ 0, & \text{nos demais casos} \end{cases}$$

onde $\alpha = -\frac{3g}{hc_0}$, e λ é arbitrário.

A particularidade desta solução é evidentemente o fato de ser estática, $v = 0$.

4.5 Soluções Oscilatórias

Nosso objetivo neste capítulo é saber se existem ondas solitárias no limite de onda curta. Cabe porém comentar que a equação (4.13) tem soluções em forma de onda sinusoidal com:

$$u = A \exp[i(kx - \Omega t)] \quad , \quad (4.19)$$

com $\Omega = \frac{3g}{khc_0}$, k e A arbitrários.

Não deixa de ser surpreendente que isto exista, em se tratando de uma equação não-linear. Mesmo quando ondas sinusoidais existem, como no caso da equação de Schrödinger não-linear, há uma relação entre a amplitude e o número de onda. Não é o caso aqui.

4.6 Comentários Finais

Vimos portanto que o sistema de Green-Naghdi estendido possui um limite de onda curta bem definido e que este limite é descrito por uma equação que admite soluções em forma de ondas solitárias. Tais ondas solitárias apresentam picos. Efetivamente, em águas profundas sob ação do vento, ondas de superfície tendem a formar picos. É claro que estamos longe do que poderíamos chamar de confirmação experimental da teoria aqui apresentada, mas não deixa de ser intrigante e animador.

A equação não-linear (4.13), para a qual apresentamos algumas soluções mereceria ser estudada em mais profundidade. Questões naturais que se colocam na perspectiva de uma continuação da investigação aqui empreendida são de duas ordens. A primeira é sobre a integrabilidade de (4.13). Sobre isso nada se sabe presentemente, e tampouco é tarefa fácil. A segunda questão é o estudo numérico das soluções da equação (4.13), em que se procuraria identificar as soluções atratoras do sistema e a estabilidade dos “peakons”.

Por fim, há ainda que se comentar que o efeito do vento é modelado de forma sobre-simplificada. Um modelo hidrodinâmico de interação ar-fluido deveria poder fornecer uma justificativa para a introdução de uma superfície movendo-se a veloci-

dade c_0 , como no presente estudo. Isto são, no entanto, questões que escapam ao âmbito da presente dissertação .

Apêndice A

Equações que Governam a Dinâmica de Fluidos

A.1 Usando a Conservação do Momento

Partindo da equação (1.15) e dividindo cada termo por dt , obtem-se:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad , \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} &= \left[(v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \right] \vec{v} \quad , \\ &= \left(v_x \frac{\partial\vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial\vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial\vec{v}}{\partial z} \right) \vec{v} \quad , \\ &= \frac{dx}{dt} \frac{\partial\vec{v}}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial\vec{v}}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial\vec{v}}{\partial z} \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Desta forma, chega-se em (1.16).

Em (1.18) temos o seguinte termo: $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$

Este termo poder ser algebricamente trabalhado até a seguinte forma:

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) \quad . \quad (\text{A.3})$$

Quando este termo é substituído em (1.18), obtem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f} \quad , \\ \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 + \vec{\omega} \times \vec{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f} \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Esta foi a equação encontrada anteriormente.

Apêndice B

Ondas na Água: teoria linearizada

B.1 Ondas Gravitacionais com Pequenas Amplitudes em Superfícies

Vamos mostrar como foram encontradas algumas equações deste primeiro capítulo. Observando a equação (2.15) tem-se:

$$\phi = q(x, y) \sin(kx - \omega t) \quad . \quad (\text{B.1})$$

Observando (2.3), tem-se:

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}, \quad \text{com } -h < z < \eta(x, y, t) \quad . \quad (\text{B.2})$$

Observando (2.12), tem-se:

$$\Delta\phi = 0, \quad -h < z < 0 \quad . \quad (\text{B.3})$$

Comparando as duas equações, percebe-se que:

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \quad . \quad (\text{B.4})$$

Substituindo (2.15) nesta última equação, encontra-se que:

$$\Delta\phi = \sin(kx - \omega t) \left[\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - qk^2 + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \right] + \cos(kx - \omega t) \left[2k \frac{\partial q}{\partial x} \right] = 0 \quad . \quad (\text{B.5})$$

Esta equação somente seria satisfeita se os coeficientes do “seno” e “cosseno” fosse nulos. Isto implica em:

$$2k \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad , \quad (\text{B.6})$$

e também

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - qk^2 + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} = 0 \quad , \quad (\text{B.7})$$

$$-qk^2 + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} = 0 \quad . \quad (\text{B.8})$$

Integrando esta última equação:

$$q(z) = Ae^{-kz} + Be^{kz} \quad , \quad (\text{B.9})$$

onde A e B são constantes de integração.

Desta forma, expressamos (2.18) como:

$$\phi(z) = (Ae^{-kz} + Be^{kz}) \sin(kx - \omega t) \quad . \quad (\text{B.10})$$

Vimos também que de (2.14) podemos ter:

$$\phi_z = Ake^{-kz} + Bke^{-kz} = 0 \quad B = Ae^{-2kh}, \quad \text{onde } z = h \quad . \quad (\text{B.11})$$

Substituindo em (2.18) chega-se em:

$$\begin{aligned} \phi &= (2Ae^{-kh}) \sin(kx - \omega t) \quad , \\ \phi_z &= (2Ae^{-kh}) \cosh[k(z + h)] \sin(kx - \omega t) \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Observando agora (2.7), tem-se:

$$\eta_t - \phi_z = 0, \quad z = \eta \quad . \quad (\text{B.13})$$

Diferenciando (2.19) em relação a z , obtem-se:

$$\phi_z = 2Ake^{-kh} \sin(kx - \omega t) \sinh(kz + kh) \quad . \quad (\text{B.14})$$

Substituindo em (2.7), obtem-se:

$$\eta = \frac{2A}{\omega} ke^{-kh} \cos(kx - \omega t) \sinh(kz + kh) \quad . \quad (\text{B.15})$$

Cuja nova amplitude a_m foi definida como:

$$a_m = \frac{2A}{\omega} ke^{-kh} \sinh(kz + kh) \quad . \quad (\text{B.16})$$

Agora, para encontrarmos a relação de dispersão (2.24) deriva-se em relação ao tempo duas vezes e obtem-se:

$$\phi_{tt} = 2Ake^{-h} \sinh(kz + kh) \sin(kx - \omega t) \quad . \quad (\text{B.17})$$

Substituindo agora ϕ_{tt} e ϕ_z em (2.13) obtem-se a relação de dispersão:

$$\omega^2 = gk \tanh(kz + kh) \quad . \quad (\text{B.18})$$

Agora vamos encontrar a velocidade de fase e de grupo desta onda.

A velocidade de fase é definida como:

$$v_f = \frac{\omega}{k} \quad .$$

Mas, de acordo com a relação de dispersão:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{gk}{k^2} \tanh(kz + kh) \quad . \quad (\text{B.19})$$

O número de onda k é:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad . \quad (\text{B.20})$$

Substituindo k e ω na equação A.19 chega-se em:

$$v_f = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi}{\lambda}z + \frac{2\pi}{\lambda}h\right)} \quad . \quad (\text{B.21})$$

Que é a velocidade de fase.

Para a velocidade de grupo, temos que:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad . \quad (\text{B.22})$$

Derivando ω em relação a k , obtem-se:

$$v_g = \frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{k \tanh(kh + kz)}} \left[\tanh(kz + kh) + kh \operatorname{sech}^2(kz + kh) \right] \quad ,$$

$$v_g = \frac{v_f}{2} \left[1 + \frac{2(kh + kz)}{2 \sinh(2kh + 2kz)} \right] \quad . \quad (\text{B.23})$$

Que é a velocidade de grupo da onda.

Apêndice C

As Equações de Green-Nagdhi

C.1 Condições para Existência da Dinâmica Assintótica de Ondas Curtas

Vamos mostrar como utilizar a fórmula de integração de Leibniz para obter a equação (3.16).

De acordo com a equação (3.9):

$$\sigma \dot{u} = -p_x^*(x, z, t) \quad . \quad (\text{C.1})$$

Relembrando a fórmula de Leibniz (3.14):

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} f(x, \alpha) dx &= \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) dx + f(h(\alpha), \alpha) \frac{d}{d\alpha} h(\alpha) \\ &\quad - f(g(\alpha), \alpha) \frac{d}{d\alpha} g(\alpha) \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Integrando o lado esquerdo de (C.1) obtem-se:

$$\int_0^{\phi(x,t)} \sigma \frac{d}{dt} u(x, z, t) dz \quad . \quad (\text{C.3})$$

Mas $u = u(x, t)$, logo:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{dt} \quad , \\ \frac{du}{dt} &= u_x u + u_t \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Substituindo em (C.3) resulta:

$$\begin{aligned} \int_0^{\phi(x,t)} \sigma(u_x u + u_t) dz & , \\ & = \sigma(u_x u + u_t) \phi \quad . \end{aligned} \tag{C.5}$$

Agora observando a integral do lado esquerdo de (C.1)

$$- \int_0^{\phi(x,t)} \frac{\partial}{\partial x} p^*(x, z, t) dz \quad . \tag{C.6}$$

Aqui a fórmula de integração de Leibniz se faz útil. Substituindo os termos correspondentes obtem-se:

$$\begin{aligned} \int_0^{\phi(x,t)} \frac{\partial}{\partial x} p(x, z, t) dz & = \frac{d}{dx} \int_0^{\phi(x,t)} p(x, z, t) dz - \\ & p(x, \phi(x, t), t) \frac{d}{dx} \phi(x, t) + p(x, 0, t) \frac{d0}{dt} \quad . \end{aligned} \tag{C.7}$$

Chamando o último fator desta equação de p_0 , chega-se em:

$$p(x, t) = \int_0^{\phi(x,t)} p(x, z, t) dz - p_0 \phi(x, t) \quad . \tag{C.8}$$

Finalmente, substituindo este último resultado em (C.6):

$$\int_0^{\phi(x,t)} \frac{\partial}{\partial x} p(x, z, t) dz = \frac{d}{dx} p(x, t) = p_x \quad . \tag{C.9}$$

Igualando agora (C.8) e (C.5), obtem-se:

$$\sigma(u_x u + u_t) \phi = -p_x \quad . \tag{C.10}$$

Referências

- [1] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press, 1985).
- [2] R. S. Johnson, *A modern Introduction to the Mathematical Theory of Water Waves* (Cambridge Texts in Applied Mathematics, 1997).
- [3] M. Remoissenet, *Waves Called Solitons, Concepts and Experiments* (Springer-Verlag, 1994).
- [4] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves* (Wiley, New York, 1974).
- [5] M. A. Manna 2001 *J. Phys. A.* **34** 4475-4491.
- [6] R. Camassa, D. D. Holm and J. M. Hyman 1994 *Adv. Appl. Mech.* **31** 1.
- [7] A. E. Green, N. Laws and P. M. Naghdi 1974 *Proc. R. Soc. A* **338** 43.
- [8] M. A. Manna and V. Merle 1997 *Phys. Rev. E* **57** 6206-6209.
- [9] R. A. Kraenkel, M. A. Manna and V. Merle 1998 *Phys. Rev. E* **60** 2418-2420.
- [10] M. Toda, *Nonlinear Waves and Solitons* (Kluwer Academic Publishers, 1983).
- [11] P. G. Drazin and R. S. Johnson, *Solitons: An Introduction* (Cambridge Texts in Applied Mathematics, 1989).
- [12] R. Camassa and D. D. Holm 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 1661-1664.
- [13] P. Rosenau and J. M. Hyman 1992 *Phys. Rev. Lett.* **70** 564-567.