



Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista

---

---

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.005/96

**Formalismo de Hamilton-Jacobi para Sistemas Singulares**

Randall Guedes Teixeira

Orientador

*Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar*

Agosto 1996

## Agradecimentos

À minha mãe Estelina e meus irmãos Fabrício e Thiago, por seu amor e seu apoio em minhas escolhas.

Ao professor Bruto M. Pimentel, pela sua orientação e diálogo franco dentro e fora dos assuntos acadêmicos.

Aos amigos Luciene P. Freitas, Orlando L. G. Peres, Felice Pisano e Sandro Silva e Costa, pela acolhida que me deram quando de minha chegada à São Paulo.

Aos amigos Raphael G. Furtado e Yara V. Cristo, cuja amizade é tão grande quanto a distância que hoje nos separa.

À CAPES, pelo apoio financeiro que tornou este trabalho possível.

À memória de meu pai.

“ The human understanding is of its own nature  
prone to suppose the existence of more order  
and regularity in the world than it finds.  
And though there be so many things in nature  
which are singular and unmatched,  
yet it devises for them parallels and conjugates  
and relatives which do not exist.”

Francis Bacon (1561-1626)

## Resumo

Neste trabalho apresentamos o formalismo Hamiltoniano de Dirac para sistemas singulares, analisando inclusive a construção do gerador de transformações de gauge. A seguir discutimos brevemente a generalização, já conhecida, desse formalismo para o caso de Lagrangeanos singulares de segunda ordem fazendo também uma análise da estrutura de vínculos presente em tais teorias. Desenvolvemos então o formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares fazendo sua generalização para Lagrangeanos de segunda ordem. Por último, ambos formalismos são aplicados à Eletrodinâmica de Podolsky e os resultados obtidos são comparados.

Palavras Chave: Sistemas singulares, formalismo de Hamilton-Jacobi, formalismo Hamiltoniano, Lagrangeanos de segunda ordem.

Área de conhecimento: 1.05.03.01-3

## Abstract

In this work we study Dirac's Hamiltonian formulation for singular systems including the construction of the gauge transformations generator. Next we briefly discuss the generalization, already developed, of this formalism for singular second order Lagrangians. Besides that we also make an analysis of the constrains structure present in such theories. Then we develop the Hamilton-Jacobi formalism for singular systems making its generalization for the case of second order Lagrangians. Finally, both formalisms are applied to Podolsky's Eletrodynamics and the obtained results are compared.

Keywords: Singular systems, Hamilton-Jacobi formalism, Hamiltonian formalism, second order Lagrangians.

# Índice

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Sistemas singulares</b>	<b>5</b>
1.1 Fundamentos . . . . .	5
1.2 Vínculos e simetrias . . . . .	10
<b>2 Formalismo Hamiltoniano para sistemas singulares</b>	<b>21</b>
2.1 Equações de movimento de Hamilton . . . . .	21
2.2 Igualdades fracas e fortes . . . . .	24
2.3 Condições de consistência . . . . .	33
2.4 Funções de primeira e segunda classes . . . . .	38
2.5 Parênteses de Dirac e o problema da quantização . . . . .	45
2.6 Transformações de gauge no formalismo Hamiltoniano . . . . .	55
2.7 Construção do gerador de transformações de gauge . . . . .	61
2.8 Um exemplo: Eletromagnetismo de Maxwell . . . . .	68
<b>3 Formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares</b>	<b>76</b>
3.1 Introdução . . . . .	76
3.2 Formalismo de Hamilton-Jacobi para Lagrangeanos de segunda ordem . . . . .	77
3.3 Vínculos em sistemas singulares com Lagrangeanos de segunda ordem . . . . .	83
3.4 Formulação para Lagrangeanos de segunda ordem singulares . . . . .	88
3.5 Exemplo: Eletrodinâmica generalizada de Podolsky . . . . .	94





## Introdução

A Mecânica Clássica possui diversos tratamentos para descrever sistemas físicos: as Leis de Newton, o Princípio do Trabalho Virtual, o Princípio de D'Alembert, as formulações Lagrangeana, Hamiltoniana e de Hamilton-Jacobi, entre outros. Todos esses tratamentos são equivalentes entre si, pois são obtidos uns dos outros de forma a fornecerem as equações de movimento físicas do sistema, e além disso são amplamente estudados na literatura [1, 2, 3, 4]. Contudo, cada tratamento tem suas vantagens e desvantagens no estudo de determinadas características dos sistemas físicos, o que explica a diversidade de abordagens exemplificada acima.

Dos tratamentos citados, os três últimos; as formulações Lagrangeana, Hamiltoniana e de Hamilton-Jacobi; são os mais comumente empregados no estudo da Mecânica Quântica e de Teorias de Campos e, conseqüentemente, será sob o ponto de vista dessas formulações, principalmente das duas últimas, que desenvolveremos este trabalho. Contudo examinaremos aqui apenas os aspectos básicos dessas formulações que sejam essenciais para este trabalho, mas não nos deteremos nos detalhes de seu desenvolvimento, exceto quando necessário para nossos objetivos.

Um dos motivos para que as formulações citadas acima sejam tão amplamente empregadas está relacionado com o fato de que elas têm uma ligação intrínseca com princípios de mínimo variacional [2, 4]. As formulações Lagrangeana e Hamiltoniana podem ser obtidas a partir do chamado *Princípio de Hamilton*, i.e. da minimização da

integral de ação

$$S = \int L dt,$$

onde  $L$  é a função Lagrangeana do sistema e a integração é feita sobre trajetórias ligando os mesmos pontos iniciais e finais nos mesmos instantes temporais. Já a formulação de Hamilton-Jacobi é obtida a partir da minimização da integral de ação considerando-a como função dos pontos terminais de integração e do tempo  $t$  no qual é feita a integração.

Essa relação com princípios de mínimo faz com que tais formulações sejam automaticamente compatíveis com a Relatividade Restrita ou Geral. Isso deve-se ao fato de que sua obtenção através de princípios de mínimo faz com que tais formulações sejam automaticamente independentes de quaisquer sistema de referência, bastando para isso que a função Lagrangeana seja um escalar de Lorentz. Tão importante quanto essa característica é o fato de os princípios de mínimo poderem ser facilmente aplicados a sistemas com infinitos graus de liberdade, i.e. Teorias de Campos, o que não acontece com outros tratamentos da Mecânica Clássica.

Contudo, as três formulações citadas são obtidas assumindo-se que não há vínculos ligando as coordenadas generalizadas e os momento canonicamente conjugados a elas. Sistemas físicos que satisfazem essa exigência são conhecidos como *sistemas regulares*, e é deles que trata a mecânica usual. Caso o sistema apresente vínculos entre as coordenadas e seus momentos canonicamente conjugados dizemos que tais sistemas são *singulares*.

O estudo de sistemas singulares encontra muitas aplicações na física atual pois a existência de simetrias por transformações de gauge locais para um dado sistema físico implica na singularidade do mesmo. A relação entre as simetrias de gauge e a singularidade de uma teoria foi estabelecida por Bergmann e colaboradores [5, 6, 7, 8] dentro do formalismo Lagrangeano e, tendo em vista a importância que as teorias de gauge têm na física atual, essa ligação por si só já justifica o interesse no estudo dos formalismos para sistemas singulares.

Desde seu desenvolvimento por Dirac [9, 10, 11], o formalismo Hamiltoniano para sistemas singulares tem sido o principal instrumento para o estudo dos mesmos. Recentemente porém novas abordagens para o tratamento de sistemas singulares têm sido desenvolvidas; como, por exemplo, o formalismo de Hamilton-Jacobi para tais sistemas [12]. Tal interesse é plenamente justificável pois, como já comentamos acima, cada formalismo destaca diferentes características dos sistemas físicos aos quais são aplicados. Por outro lado, tem sido cada vez maior o interesse no estudo de Teorias de Gauge cujos Lagrangeanos contêm derivadas de segunda ordem das coordenadas, ou seja, teorias com Lagrangeanos de segunda ordem; sendo que o formalismo Hamiltoniano para sistemas singulares já foi aplicado com sucesso para tais teorias.

Neste trabalho temos como objetivo principal abordar tanto o desenvolvimento de um novo formalismo (o de Hamilton-Jacobi) para o tratamento de sistemas singulares quanto a aplicação deste a teorias com Lagrangeanos de segunda ordem. Para tanto, faremos inicialmente um estudo do formalismo Hamiltoniano para sistemas singulares com Lagrangeanos contendo apenas derivadas primeiras das coordenadas de forma a fixar o conceito de sistemas singulares e analisar as propriedades que eles possuem.

Começaremos no capítulo 1 definindo as condições que implicam na singularidade de um sistema e como essa singularidade determina a existência de vínculos entre as coordenadas e os momentos a elas conjugados. Em seguida estudaremos como a simetria de um Lagrangeano sob transformações de gauge locais implica na sua singularidade.

No capítulo 2 detalharemos o formalismo Hamiltoniano para sistemas singulares mostrando como a existência de vínculos entre coordenadas e momentos pode levar à presença de funções arbitrárias do tempo nas equações de movimento de Hamilton. Analisaremos o significado das igualdades fracas definidas por Dirac e quais as restrições impostas ao sistema pelas chamadas condições de consistência: a exigência de que os vínculos sejam preservados durante a evolução temporal do sistema. Estudaremos então a classificação dos vínculos em vínculos de primeira e segunda classes e veremos como os vínculos de segunda classe podem ser usados para redefinir o parêntese de Poisson

e eliminar graus de liberdade espúrios da teoria. Veremos também a relação entre os vínculos de primeira classe e as transformações de gauge, bem como o procedimento para construir o gerador de transformações de gauge no formalismo Hamiltoniano. Encerrando esse capítulo exemplificaremos o formalismo aplicando-o ao Eletromagnetismo de Maxwell.

O capítulo 3 será dedicado ao desenvolvimento do formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares, porém faremos esse desenvolvimento generalizando-o para o caso de sistemas singulares com Lagrangeanos de segunda ordem. Em primeiro lugar obteremos a equação diferencial parcial de Hamilton-Jacobi para sistemas de segunda ordem usando o método dos Lagrangeanos equivalentes de Carathéodory. O próximo passo será analisar a estrutura de vínculos presente em sistemas singulares com Lagrangeanos de segunda ordem, além de apresentar também um breve estudo do formalismo Hamiltoniano para tais sistemas. Usando os resultados obtidos nessa análise, o formalismo de Hamilton-Jacobi será aplicado ao caso de sistemas singulares de forma a obtermos as equações de movimento do sistema como equações diferenciais totais. Encerraremos esse capítulo aplicando ambos os formalismos à Eletrodinâmica de Podolsky e comparando os resultados obtidos.

Nas *Considerações finais* discutiremos os problemas existentes em cada formalismo e que ainda demandam maiores estudos, indicando também os possíveis caminhos para solucioná-los. Comentaremos também os desenvolvimentos ainda necessários ao formalismo de Hamilton-Jacobi.

# 1. Sistemas singulares

## 1.1 Fundamentos

Um dos aspectos que merece destaque na obtenção das diferentes formulações da Mecânica Clássica é o fato de seu desenvolvimento ser usualmente apresentado numa forma que pressupõe uma forte hipótese quanto à natureza da função Lagrangeana que descreve o sistema físico. Para perceber a natureza dessa hipótese consideremos inicialmente um sistema descrito por uma função Lagrangeana, ou Lagrangeano,  $L(q, \dot{q})$  contendo apenas derivadas primeiras das  $N$  coordenadas  $q_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Por questão de simplicidade nos cálculos trabalharemos inicialmente com sistemas com finitos graus de liberdade e no momento adequado faremos a generalização para sistemas que tenham infinitos graus de liberdade. A formulação Lagrangeana baseia-se nas equações de movimento obtidas a partir do princípio de Hamilton, ou princípio da ação estacionária:

$$S = \int L dt \quad (1.1)$$

$$\delta S = \int \delta(L dt) = 0 \quad (1.2)$$

As equações de movimento obtidas, conhecidas como equações de Euler-Lagrange, formam um sistema de  $N$  equações diferenciais parciais de segunda ordem dadas por

$$L_i \equiv \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (1.3)$$

onde os  $L_i$  são conhecidos como as *derivadas de Euler* de  $L$  em relação a  $q_i$ .

As equações de Euler-Lagrange são perfeitamente análogas às equações de movimento físicas do sistema, sendo possível obter as primeiras diretamente das segundas usando coordenadas generalizadas (ver ref.[2], capítulo 5, por exemplo).

A formulação Hamiltoniana é obtida definindo-se a função Hamiltoniana  $H$  (ou Hamiltoniano) como

$$H = p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}) \quad (1.4)$$

(estamos convencionando uma somatória nos índices repetidos, exceto onde explicitamente afirmado o contrário) onde

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (1.5)$$

é o momento canonicamente conjugado a  $q_i$ . O Hamiltoniano assim definido será independente das velocidades  $\dot{q}_i$  pois  $\partial H / \partial \dot{q}_i = 0$ .

As equações de movimento nesse formalismo são conhecidas como equações de movimento canônicas (ou de Hamilton) e são dadas por:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \quad (1.7)$$

A equação (1.6) é consequência direta da definição de  $H$  enquanto a equação (1.7) decorre das equações de Euler-Lagrange. Portanto as equações de movimento de Hamilton formam um sistema de  $2N$  equações diferenciais parciais de primeira ordem, equivalente ao sistema formado pelas equações de Euler-Lagrange. Agora temos dois conjuntos de  $N$  variáveis independentes,  $q$ 's e  $p$ 's, sobre as quais devemos impor  $2N$  condições iniciais necessárias para a resolução das equações de movimento de Hamilton. Essas exigências são inteiramente análogas às das equações de Euler-Lagrange: naquele caso tínhamos  $N$  variáveis independentes e  $N$  equações de segunda ordem, o que nos obrigava a ter também  $2N$  condições iniciais, fornecidas pelos valores iniciais dos  $q$ 's e dos  $\dot{q}$ 's, para podermos resolver o sistema dado pela equação (1.3).

A equação de movimento para qualquer função  $g(q, p)$  é dada por

$$\frac{dg}{dt} = \{g, H\}, \quad (1.8)$$

onde  $\{A, B\}$  é o *parêntese de Poisson* entre  $A$  e  $B$ :

$$\{A, B\} \equiv \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \quad (1.9)$$

Um ponto fundamental da formulação Hamiltoniana é a necessidade de expressar todas as quantidades físicas em termos das coordenadas  $q$ 's e dos momentos  $p$ 's, que são as chamadas *variáveis canônicas*. Para tanto é necessário expressar as velocidades  $\dot{q}_i$  como funções das coordenadas e momentos, i.e.

$$\dot{q}_i = f_i(q, p), \quad (1.10)$$

e substituí-las em todas as grandezas físicas em que aparecem, inclusive no Hamiltoniano. Ou seja, trocamos a descrição do sistema em termos do conjunto de variáveis  $(q, \dot{q})$ ; que descreve o chamado *espaço de fase das velocidades*; pela descrição em termos do conjunto  $(q, p)$ ; que descreve o chamado *espaço de fase dos momentos*; onde os momentos conjugados  $p$  são dados pela equação (1.5). A expressão *espaço de fase* é comumente usada na literatura para designar o espaço descrito pelo segundo grupo de variáveis e será nesse sentido que a empregaremos neste trabalho.

Esse processo de troca de variáveis é conhecido na teoria das equações diferenciais parciais como *transformação de Legendre*. Não nos deteremos aqui nos detalhes formais da transformação de Legendre, para maiores detalhes pode-se consultar a literatura especializada [13]. O aspecto importante a ser notado é que, para que todo o processo seja consistente, é preciso escrever **todas** as velocidades como funções das coordenadas e momentos.

É um resultado conhecido do cálculo [14, 15] que, dadas  $n$  variáveis  $y_i$  como funções de outras  $n$  variáveis  $x_i$  ( $y_i = y_i(x_1, \dots, x_n)$ ), elas só poderão ser invertidas de forma a expressar todos  $x_i$  em função dos  $y_i$  se o determinante da matriz Jacobiana, cujos

elementos são dados por

$$J_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, \quad (1.11)$$

não se anular. Essa condição nada mais é que a exigência de que as  $n$  funções  $y_i$  sejam linearmente independentes entre si.

Aplicando essa condição ao caso em questão verificamos que, para a passagem para o formalismo Hamiltoniano ser consistente, é necessário que a matriz

$$H_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}; i, j = 1, \dots, N \quad (1.12)$$

seja não singular, ou seja, que seu determinante não se anule. A matriz  $H$  é conhecida como *matriz Hessiana* do sistema. Os sistemas físicos que satisfazem à condição

$$\det \|H_{ij}\| \neq 0 \quad (1.13)$$

são classificados (assim como seus Lagrangeanos) de regulares, do contrário são chamados de singulares. Para sistemas regulares não teremos maiores problemas na passagem para o formalismo Hamiltoniano, contudo no caso de sistemas singulares não será possível escrever as velocidades  $\dot{q}_i$  na forma mostrada pela equação (1.10).

Consideremos então o caso de um sistema cuja matriz Hessiana seja singular e tenha posto  $K = N - R$  ( $R < N$ ). Para uma matriz com essa característica é sempre possível encontrar uma sub-matriz de tamanho  $K \times K$  cujo determinante seja não nulo. Sem perda de generalidade podemos assumir que essa sub-matriz esteja no vértice inferior direito da matriz  $H$ , i.e.:

$$H_{ab} = \frac{\partial p_a}{\partial \dot{q}_b} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_a \partial \dot{q}_b}; a, b = R + 1, \dots, N \quad (1.14)$$

$$\det \|H_{ab}\| \neq 0 \quad (1.15)$$

Isso significa que podemos resolver  $K$  velocidades  $\dot{q}_a$  em função das coordenadas  $q$ 's e dos momentos  $p$ 's e das  $R$  velocidades  $\dot{q}_\alpha$  restantes, onde  $\alpha = 1, \dots, R$ :

$$\dot{q}_a = f_a(q, p_b, \dot{q}_\alpha) \quad (1.16)$$



Substituindo na definição dos momentos canonicamente conjugados temos que:

$$p_i = \tilde{g}_i(q, \dot{q}_a, \dot{q}_\alpha) = \tilde{g}_i(q, f_a(q, p_b, \dot{q}_\alpha), \dot{q}_\alpha) = g_i(q, p_b, \dot{q}_\alpha) \quad (1.17)$$

Entretanto temos que  $p_b \equiv g_b$  para  $b = R + 1, \dots, N$  e conseqüentemente as  $R$  expressões restantes para os momentos  $p_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, R$ ) não podem conter nenhuma das  $R$  velocidades  $\dot{q}_\alpha$  não resolvidas, do contrário seríamos capazes de resolver algumas delas em função dos momentos  $p_\alpha$ , o que iria contradizer o fato da matriz Hessiana ter posto  $K$ . Desse modo temos:

$$p_\alpha = g_\alpha(q, p_b) \quad (1.18)$$

$$\Phi_\alpha = p_\alpha - g_\alpha(q, p_b) = 0 \quad (1.19)$$

Isso equivale a termos  $R$  relações do tipo

$$\Phi_\alpha(q, p) = 0 \quad (1.20)$$

que atuam como vínculos aos quais o sistema está submetido. Esses vínculos são chamados *vínculos Hamiltonianos* e, a menos que seja afirmado explicitamente o contrário, será deles que estaremos falando ao nos referirmos simplesmente a vínculos.

É importante notar que a singularidade da matriz Hessiana representa um problema também na formulação Lagrangeana. As equações de movimento de Euler-Lagrange (equação (1.3)) podem ser escritas como

$$L_i = V_i(q, \dot{q}, t) - H_{ij}(q, \dot{q}, t) \ddot{q}_j = 0 \quad (1.21)$$

onde

$$V_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j \quad (1.22)$$

e  $H_{ij}$  é a matriz Hessiana.

Como os elementos da matriz Hessiana são os coeficientes das acelerações, só poderemos resolver as equações de Euler-Lagrange em termos dessas últimas se, e somente

se, a matriz Hessiana for inversível e para isso é necessário que  $\det \|H_{ij}\| \neq 0$ . Se essa condição for satisfeita então as  $N$  equações de Euler-Lagrange serão equações diferenciais de segunda ordem e funcionalmente independentes entre si. Poderemos então escrever:

$$\ddot{q}_j = \left(H^{-1}\right)_{ji} V_i(q, \dot{q}) \quad (1.23)$$

Caso a matriz Hessiana seja singular, com posto  $K = N - R$  por exemplo, teremos  $R$  autovetores com autovalor nulo, i.e.

$$u_i^\alpha H_{ij} = 0, \quad (1.24)$$

onde  $\alpha = 1, \dots, R$ . Desse modo teremos  $R$  combinações lineares das equações de Euler-Lagrange, dadas por

$$\begin{aligned} u_i^\alpha L_i &= u_i^\alpha \left( V_i(q, \dot{q}) - H_{ij}(q, \dot{q}) \ddot{q}_j \right) = 0 \\ u_i^\alpha V_i(q, \dot{q}) &= 0, \end{aligned} \quad (1.25)$$

que não contêm as acelerações. Se as expressões do tipo acima não são identicamente satisfeitas são chamadas de *vínculos Lagrangeanos*. Esses vínculos devem ser tratados por um formalismo Lagrangeano adequado que não será abordado aqui, contudo o estudo do formalismo Lagrangeano para sistemas vinculados pode ser encontrado na referência [16] e, com maiores detalhes, na referência [17].

## 1.2 Vínculos e simetrias

Um dos aspectos de maior interesse no estudo de sistemas singulares é a relação entre a existência de simetrias locais e a singularidade da matriz Hessiana de um sistema físico, com a conseqüente existência de vínculos. Tal relação foi estabelecida inicialmente, na formulação Lagrangeana, por P. G. Bergmann e colaboradores em uma seqüência de quatro trabalhos [5, 6, 7, 8] que talvez constituam a primeira proposição de um tratamento consistente para sistemas singulares da forma como os concebemos hoje.

Para examinarmos essa relação devemos inicialmente abordar as *transformações de simetria* de um sistema e para isso analisaremos sistemas com infinitos graus de liberdade seguindo a abordagem feita na referência [16].

Consideremos então que o sistema físico seja descrito pelas coordenadas contínuas (campos)  $\phi^A(\tau)$ ;  $A = 1, \dots, N$ ; que são funções dos parâmetros  $\tau_a$ ,  $a = 1, \dots, M$ . As equações de movimento do sistema serão dadas por

$$L_A \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A} - \partial_b \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_b \phi^A)} = 0; b = 1, \dots, M, \quad (1.26)$$

e são obtidas por meio do princípio de Hamilton a partir de uma densidade Lagrangeana  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi^A, \partial^a \phi^A, \tau)$ , i.e.

$$\delta S = 0; S[\phi] = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\phi^A, \partial^a \phi^A, \tau) d\tau, \quad (1.27)$$

onde:

$$\partial^a = \frac{\partial}{\partial \tau_a} \quad (1.28)$$

Se fizermos uma transformação nas coordenadas  $\phi^A$  e nos parâmetros  $\tau_a$  do tipo

$$\tilde{\tau}_a = \tilde{\tau}_a(\tau); \tilde{\phi}^A = \tilde{\phi}^A(\phi^A(\tau), \tau) \quad (1.29)$$

(conhecidas como transformações de ponto) teremos que, sob essa mudança de variáveis, a integral da ação será escrita como [18]

$$\tilde{S}[\tilde{\phi}] = \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\phi}^A, \tilde{\partial}^a \tilde{\phi}^A, \tilde{\tau}) d\tilde{\tau} \quad (1.30)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\phi}^A, \tilde{\partial}^a \tilde{\phi}^A, \tilde{\tau}) = J\left(\frac{\tau}{\tilde{\tau}}\right) \mathcal{L}\left(\phi^A\left(\tilde{\phi}^A, \tilde{\partial}^a \tilde{\phi}^A, \tilde{\tau}\right), \partial^a \phi^A\left(\tilde{\phi}^A, \tilde{\partial}^a \tilde{\phi}^A, \tilde{\tau}\right), \tau(\tilde{\tau})\right), \quad (1.31)$$

onde  $J(\tau/\tilde{\tau})$  é o Jacobiano da transformação  $\tau \rightarrow \tilde{\tau}$  e os campos e coordenadas antigos são escritos em função dos novos usando a transformação inversa àquela descrita pela equação (1.29).

As derivadas de Euler de  $\tilde{\mathcal{L}}$  em relação às novas variáveis  $\tilde{\phi}^A$  são:

$$\tilde{L}_A(\tilde{\tau}) \equiv \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \tilde{\phi}^A} - \tilde{\partial}_b \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \left( \tilde{\partial}_b \tilde{\phi}^A \right)} \quad (1.32)$$

$$\tilde{L}_A(\tilde{\tau}) = J \left( \frac{\tau}{\tilde{\tau}} \right) \frac{\partial \phi^B}{\partial \tilde{\phi}^A} L_B(\tau) \quad (1.33)$$

Portanto, se  $L_B = 0$  teremos  $\tilde{L}_A = 0$ . Conseqüentemente, sob as transformações de ponto descritas pela equação (1.29), as equações de Euler-Lagrange ainda descrevem a dinâmica do sistema. Isso pode ser visto diretamente da ação transformada (1.30), pois o princípio da ação estacionária nos fornece exatamente  $\tilde{L}_A(\tilde{\tau}) = 0$  como equações de movimento do sistema.

Contudo, isso não garante que a forma das equações de Euler-Lagrange seja a mesma após a transformação. Para isso será suficiente que a ação não tenha sua forma alterada, ou seja:

$$\tilde{S} \left[ \tilde{\phi} \right] \equiv S[\phi] \Rightarrow \tilde{\mathcal{L}} \left( \tilde{\phi}^A, \tilde{\partial}^a \tilde{\phi}^A, \tilde{\tau} \right) = \mathcal{L} \left( \tilde{\phi}^A, \tilde{\partial}^a \tilde{\phi}^A, \tilde{\tau} \right) \quad (1.34)$$

$$\int_{\tilde{\Omega}} \mathcal{L} \left( \tilde{\phi}^A, \tilde{\partial}^a \tilde{\phi}^A, \tilde{\tau} \right) d\tilde{\tau} \equiv \int_{\Omega} \mathcal{L} \left( \phi^A, \partial^a \phi^A, \tau \right) d\tau \quad (1.35)$$

Fazendo uma mudança de variáveis na integral à esquerda da igualdade temos

$$\int_{\tilde{\Omega}} J \left( \frac{\tilde{\tau}}{\tau} \right) \mathcal{L} \left( \tilde{\phi}^A, \tilde{\partial}^a \tilde{\phi}^A, \tilde{\tau} \right) d\tilde{\tau} \equiv \int_{\Omega} \mathcal{L} \left( \phi^A, \partial^a \phi^A, \tau \right) d\tau, \quad (1.36)$$

onde  $\mathcal{L} \left( \tilde{\phi}^A, \tilde{\partial}^a \tilde{\phi}^A, \tilde{\tau} \right)$  deve ser considerada agora uma função parametrizada por  $\phi^A$ ,  $\partial^a \phi^A$  e  $\tau$  usando as transformações (1.29).

Devemos ter portanto:

$$\int_{\tilde{\Omega}} \left[ J \left( \frac{\tilde{\tau}}{\tau} \right) \mathcal{L} \left( \tilde{\phi}^A, \tilde{\partial}^a \tilde{\phi}^A, \tilde{\tau} \right) - \mathcal{L} \left( \phi^A, \partial^a \phi^A, \tau \right) \right] d\tilde{\tau} \equiv 0 \quad (1.37)$$

Para que a última identidade se cumpra é preciso que o integrando seja uma divergência:

$$J \left( \frac{\tilde{\tau}}{\tau} \right) \mathcal{L} \left( \tilde{\phi}^A, \tilde{\partial}^a \tilde{\phi}^A, \tilde{\tau} \right) - \mathcal{L} \left( \phi^A, \partial^a \phi^A, \tau \right) = \partial^a \Lambda_a \quad (1.38)$$

Podemos também escrever a mudança de variáveis na integral à esquerda da igualdade na equação (1.35) como

$$\int_{\tilde{\Omega}} \mathcal{L} \left( \tilde{\phi}^A, \tilde{\partial}^a \tilde{\phi}^A, \tilde{\tau} \right) d\tilde{\tau} = \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{L}} \left( \phi^A, \partial^a \phi^A, \tau \right) d\tau, \quad (1.39)$$

onde usamos a inversa da transformação dada pela equação (1.31). Conseqüentemente a equação (1.35) se torna:

$$\int_{\Omega} \left[ \tilde{\mathcal{L}} \left( \phi^A, \partial^a \phi^A, \tau \right) - \mathcal{L} \left( \phi^A, \partial^a \phi^A, \tau \right) \right] d\tau \equiv 0 \quad (1.40)$$

Esse resultado implica novamente no fato de que o integrando deve ser uma divergência, portanto:

$$\tilde{\mathcal{L}} \left( \phi^A, \partial^a \phi^A, \tau \right) - \mathcal{L} \left( \phi^A, \partial^a \phi^A, \tau \right) = \partial^a \Lambda_a \quad (1.41)$$

A densidade Lagrangeana que satisfaz à igualdade acima é dita *quase-invariante*, sendo que para  $\partial^a \Lambda_a = 0$  ela é dita *invariante*. Toda transformação do tipo (1.29) para qual a densidade Lagrangeana satisfaça a expressão acima é chamada de *transformação invariante*.

As transformações invariantes são apenas um sub-conjunto das chamadas *transformações de simetria*, que são aquelas que transformam soluções das equações de movimento em soluções das novas equações de movimento. A condição (1.38), ou sua equivalente (1.41), são *condições suficientes* para que as transformações dadas por (1.29) sejam transformações de simetria e, além disso, garantem a invariância da ação e a preservação da forma das equações de movimento.

Considerando que as transformações (1.29) formam um grupo contínuo, basta examinar transformações infinitesimais:

$$\tilde{\tau}_a = \tau_a + \delta\tau_a; \tilde{\phi}^A(\tilde{\tau}) = \phi^A(\tau) + \delta\phi^A(\tau) \quad (1.42)$$

Em primeira ordem nos infinitesimais podemos considerar  $\delta\tau_a$  e  $\delta\phi^A$  como funções tanto das velhas quanto das novas variáveis, pois nas expressões

$$\delta\tau_a(\tilde{\tau}) = \delta\tau_a(\tau + \delta\tau) = \delta\tau_a(\tau) + \frac{\partial(\delta\tau_a)}{\partial\tau_b}\delta\tau_b + \dots \quad (1.43)$$

$$\delta\phi^A(\tilde{\tau}) = \delta\phi^A(\tau + \delta\tau) = \delta\phi^A(\tau) + \frac{\partial(\delta\phi^A)}{\partial\tau_b}\delta\tau_b + \dots \quad (1.44)$$

os segundos termos das expansões já são de segunda ordem e conseqüentemente, em primeira ordem,  $\delta\phi^A(\tilde{\tau}) = \delta\phi^A(\tau)$  e  $\delta\tau_a(\tilde{\tau}) = \delta\tau_a(\tau)$ .

A variação das derivadas das coordenadas é dada por:

$$\delta(\partial^a\phi^A) = \frac{\partial^a\tilde{\phi}^A}{\partial\tilde{\tau}_a} - \partial^a\phi^A = \frac{\partial\tau_b}{\partial\tilde{\tau}_a}\partial^b\tilde{\phi}^A - \partial^a\phi^A \quad (1.45)$$

Usando (1.42) teremos

$$\delta(\partial^a\phi^A) = \frac{\partial(\tilde{\tau}_b - \delta\tau_b)}{\partial\tilde{\tau}_a}\partial^b\tilde{\phi}^A - \partial^a\phi^A \quad (1.46)$$

$$\delta(\partial^a\phi^A) = \partial^a\tilde{\phi}^A - \partial^a\phi^A - \frac{\partial\delta\tau_b}{\partial\tilde{\tau}_a}\partial^b\tilde{\phi}^A \quad (1.47)$$

$$\delta(\partial^a\phi^A) = \partial^a\delta\phi^A - (\partial^a\delta\tau_b)(\partial^b\phi^A), \quad (1.48)$$

sendo que no último termo do lado direito da igualdade mantivemos apenas os termos até primeira ordem nos diferenciais. As operações  $\delta$  e  $\partial^a$  não comutam, como pode ser visto acima. Já a variação da forma  $\bar{\delta}$ , definida como

$$\bar{\delta}\phi^A = \tilde{\phi}^A(\tau) - \phi^A(\tau) = \tilde{\phi}^A(\tilde{\tau}) - \phi^A(\tau) + \tilde{\phi}^A(\tau) - \tilde{\phi}^A(\tilde{\tau}) \quad (1.49)$$

$$\bar{\delta}\phi^A = \delta\phi^A(\tau) - (\partial^a\phi^A)\delta\tau_a \quad (1.50)$$

e que compara os valores das funções novas e antigas no mesmo ponto, comuta com  $\partial^a$ . Essa propriedade pode ser facilmente verificada a partir da própria definição de  $\bar{\delta}$ :

$$\bar{\delta}(\partial^a\phi^A) = \partial^a\tilde{\phi}^A(\tau) - \partial^a\phi^A(\tau) = \partial^a(\tilde{\phi}^A(\tau) - \phi^A(\tau)) = \partial^a(\bar{\delta}\phi^A) \quad (1.51)$$

A partir de (1.50) podemos ver que a variação  $\delta$  de uma função se divide em duas partes

$$\delta\phi^A(\tau) = \bar{\delta}\phi^A + \left(\partial^a\phi^A\right)\delta\tau_a, \quad (1.52)$$

onde o primeiro termo é a variação funcional da forma de  $\phi^A$  e o segundo é a variação de  $\phi^A$  devido à mudança nos parâmetros  $\tau$ .

O Jacobiano  $J\left(\frac{\tilde{\tau}}{\tau}\right)$ , mantendo apenas os termos em primeira ordem, será:

$$J\left(\frac{\tilde{\tau}}{\tau}\right) = 1 + \partial^a(\delta\tau_a) \quad (1.53)$$

Substituindo na expressão (1.38) teremos

$$(1 + \partial^a(\delta\tau_a))\mathcal{L}\left(\tilde{\phi}^A, \tilde{\partial}^a\tilde{\phi}^A, \tilde{\tau}\right) - \mathcal{L}\left(\phi^A, \partial^a\phi^A, \tau\right) = \partial^a\delta\Lambda_a \quad (1.54)$$

onde o termo  $\Lambda_a$  presente na equação (1.38) é substituído por uma quantidade infinitesimal  $\delta\Lambda_a$ . Usando a variação  $\delta'$  de  $\mathcal{L}$ , devido apenas à variação de seu argumento e dada por

$$\delta'\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\tilde{\phi}^A, \tilde{\partial}^a\tilde{\phi}^A, \tilde{\tau}\right) - \mathcal{L}\left(\phi^A, \partial^a\phi^A, \tau\right) \quad (1.55)$$

$$\delta'\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^A}\delta\phi^A + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^a\phi^A)}\delta(\partial^a\phi^A) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tau_a}\delta\tau_a, \quad (1.56)$$

teremos em primeira ordem:

$$\delta'\mathcal{L} + \mathcal{L}\partial^a(\delta\tau_a) = \partial^a\delta\Lambda_a \quad (1.57)$$

Podemos porém escrever o termo à esquerda da igualdade, usando a equação (1.56), como:

$$\delta'\mathcal{L} + \mathcal{L}\partial^a(\delta\tau_a) = \delta'\mathcal{L} + \partial^a(\mathcal{L}\delta\tau_a) - \delta\tau_a\partial^a\mathcal{L} \quad (1.58)$$

$$\delta'\mathcal{L} + \mathcal{L}\partial^a(\delta\tau_a) = \partial^a(\mathcal{L}\delta\tau_a) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^A}\delta\phi^A + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^a\phi^A)}\delta(\partial^a\phi^A) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tau_a}\delta\tau_a - \delta\tau_a\partial^a\mathcal{L} \quad (1.59)$$

Usando

$$\delta\tau_a\partial^a\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^A}(\partial^a\phi^A)\delta\tau_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^b\phi^A)}(\partial^b\partial^a\phi^A)\delta\tau_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tau_a}\delta\tau_a \quad (1.60)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} \delta' \mathcal{L} + \mathcal{L} \partial^a (\delta \tau_a) &= \partial^a (\mathcal{L} \delta \tau_a) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A} [\delta \phi^A - (\partial^a \phi^A) \delta \tau_a] + \\ &+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^a \phi^A)} [\delta (\partial^a \phi^A) - (\partial^a \partial^b \phi^A) \delta \tau_b] \end{aligned} \quad (1.61)$$

Usando a equação (1.50) teremos:

$$\delta' \mathcal{L} + \mathcal{L} \partial^a (\delta \tau_a) = \partial^a (\mathcal{L} \delta \tau_a) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A} \bar{\delta} \phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^a \phi^A)} \bar{\delta} (\partial^a \phi^A) \quad (1.62)$$

$$\delta' \mathcal{L} + \mathcal{L} \partial^a (\delta \tau_a) = \partial^a (\mathcal{L} \delta \tau_a) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A} \bar{\delta} \phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^a \phi^A)} \partial^a \bar{\delta} \phi^A \quad (1.63)$$

$$\begin{aligned} \delta' \mathcal{L} + \mathcal{L} \partial^a (\delta \tau_a) &= \partial^a (\mathcal{L} \delta \tau_a) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A} \bar{\delta} \phi^A + \\ &+ \partial^a \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^a \phi^A)} \bar{\delta} \phi^A \right) - \partial^a \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^a \phi^A)} \right) \bar{\delta} \phi^A \end{aligned} \quad (1.64)$$

$$\delta' \mathcal{L} + \mathcal{L} \partial^a (\delta \tau_a) = \partial^a (\mathcal{L} \delta \tau_a) + L_A \bar{\delta} \phi^A + \partial^a \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^a \phi^A)} \bar{\delta} \phi^A \right) \quad (1.65)$$

Substituindo esse resultado na expressão (1.57) temos

$$L_A \bar{\delta} \phi^A + \partial^a \delta C_a = 0 \quad (1.66)$$

onde:

$$\delta C_a = \mathcal{L} \delta \tau_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^a \phi^A)} \bar{\delta} \phi^A - \delta \Lambda_a \quad (1.67)$$

A relação entre a quase-invariância da densidade Lagrangeana e leis de conservação é dada pelos dois teoremas de Noether. Um estudo detalhado desses teoremas pode ser encontrado na referência [19]. Neste trabalho nos deteremos apenas no segundo deles, que trata de transformações infinitesimais geradas por grupos contínuos infinitos, para o qual apresentaremos uma demonstração simplificada. Seu enunciado é:

**Segundo Teorema de Noether:**

Se a ação é invariante sob uma transformação infinitesimal gerada por um grupo contínuo infinito parametrizado por  $r$  funções arbitrárias, então existem  $r$  identidades, algébricas ou diferenciais, independentes entre as derivadas de Euler da função Lagrangeana.



Consideraremos transformações cuja forma é dada por

$$\delta\tau_a = \varepsilon_k(\tau)\chi_a^k(\tau); \delta\phi^A = \varepsilon_k(\tau)\Phi^{kA}(\phi, \tau) + \varepsilon_{k,a}(\tau)\Psi^{kAa}(\phi, \tau) \quad (1.68)$$

onde  $k = 1, \dots, r$  e  $\varepsilon_k$  são funções arbitrárias dependentes dos parâmetros  $\tau$  e  $\varepsilon_{k,a}$  é a derivada de  $\varepsilon_k$  em relação a  $\tau^a$ . Devido a essa dependência em  $\tau$  as transformações do tipo acima são chamadas de *transformações locais*, de *gauge locais* ou de *gauge de segundo tipo*. Em princípio, essas transformações podem envolver derivadas de  $\varepsilon_k$  de ordem maior, porém não examinaremos esse caso aqui pois as transformações do tipo acima são suficientes para obtermos os resultados desejados e, além disso, incluem a maioria dos sistemas físicos. O caso de transformações sem essa restrição foi tratado por Bergmann & Anderson [8].

A exigência de que as transformações formem um grupo implica que o comutador de duas transformações (com funções  $\varepsilon_k$  e  $\varepsilon'_k$ , por exemplo) deva ser uma transformação do mesmo tipo, ou seja:

$$(\delta_\varepsilon\delta_{\varepsilon'} - \delta_{\varepsilon'}\delta_\varepsilon)\phi^A = \varepsilon_k''\Phi^{kA} + \varepsilon_{k,a}''\Psi^{kAa} \quad (1.69)$$

Essas relações de comutação impõem restrições à forma funcional de  $\Phi^{kA}$  e  $\Psi^{kAa}$ .

Usando as transformações (1.68) na equação (1.50) temos:

$$\bar{\delta}\phi^A = \varepsilon_k\Phi^{kA} + \varepsilon_{k,a}\Psi^{kAa} - (\partial^a\phi^A)\varepsilon_k\chi_a^k \quad (1.70)$$

$$\bar{\delta}\phi^A = \varepsilon_k(\Phi^{kA} - (\partial^a\phi^A)\chi_a^k) + \varepsilon_{k,a}\Psi^{kAa} \quad (1.71)$$

Integrando a equação (1.66) e usando a expressão acima para  $\bar{\delta}\phi^A$ , teremos:

$$\int_{\Omega} L_A \bar{\delta}\phi^A d\tau = 0 \quad (1.72)$$

$$\int_{\Omega} L_A [\varepsilon_k(\Phi^{kA} - (\partial^a\phi^A)\chi_a^k) + \varepsilon_{k,a}\Psi^{kAa}] d\tau = 0 \quad (1.73)$$

Fazendo uma integração parcial no segundo termo entre colchetes obtemos

$$\int_{\Omega} [\varepsilon_k L_A (\Phi^{kA} - (\partial^a\phi^A)\chi_a^k) - \varepsilon_k \partial_a (L_A \Psi^{kAa})] d\tau + \oint_{\partial\Omega} \varepsilon_k L_A \Psi^{kAa} d\sigma_a = 0, \quad (1.74)$$

onde  $\partial\Omega$  é o contorno do espaço de integração  $\Omega$  e  $d\sigma_a$  é o elemento de área sobre esse contorno.

Como as funções  $\varepsilon_k$  são arbitrárias podemos escolhê-las de forma que elas e suas derivadas se anulem sobre o contorno  $\partial\Omega$ . Com essa escolha teremos:

$$\int_{\Omega} \varepsilon_k \left[ L_A \left( \Phi^{kA} - \left( \partial^a \phi^A \right) \chi_a^k \right) - \partial_a \left( L_A \Psi^{kAa} \right) \right] d\tau = 0 \quad (1.75)$$

Novamente usamos o fato de as funções  $\varepsilon_k$  serem arbitrárias para escrever:

$$L_A \left( \Phi^{kA} - \left( \partial^a \phi^A \right) \chi_a^k \right) - \partial_a \left( L_A \Psi^{kAa} \right) = 0 \quad (1.76)$$

Essas identidades são válidas independentemente do fato de o sistema estar ou não na trajetória física determinada por  $L_A = 0$ , caso no qual elas são satisfeitas trivialmente, e são as  $r$  identidades mencionadas no segundo teorema de Noether. As relações (1.76) são também conhecidas como *identidades de Bianchi generalizadas* (nome originado da Relatividade Geral) e indicam que as equações de Euler-Lagrange não são independentes entre si.

Consideremos agora as derivadas de Euler (1.26) escritas, de forma semelhante a (1.21), como

$$L_A = V_A(\phi, \partial\phi, \tau) - H_{AB}^{ab}(\phi, \partial\phi, \tau) \partial_a \partial_b \phi^B, \quad (1.77)$$

onde:

$$V_A(\phi, \partial\phi, \tau) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial (\partial_b \phi^A) \partial \tau^b} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial (\partial_b \phi^A) \partial \phi^B} \partial_b \phi^B \quad (1.78)$$

$$H_{AB}^{ab} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial (\partial_b \phi^A) \partial (\partial_b \phi^B)} \quad (1.79)$$

Substituindo na expressão (1.76) temos:

$$L_A \left( \Phi^{kA} - \left( \partial^a \phi^A \right) \chi_a^k - \partial_a \Psi^{kAa} \right) - \Psi^{kAa} \partial_a L_A = 0 \quad (1.80)$$

$$L_A \left( \Phi^{kA} - \left( \partial^a \phi^A \right) \chi_a^k - \partial_a \Psi^{kAa} \right) - \Psi^{kAa} \partial_a \left( V_A - H_{AB}^{cb} \partial_c \partial_b \phi^B \right) = 0 \quad (1.81)$$

$$\begin{aligned} L_A \left( \Phi^{kA} - \left( \partial^a \phi^A \right) \chi_a^k - \partial_a \Psi^{kAa} \right) - \Psi^{kAa} \partial_a V_A + \\ + \Psi^{kAa} \partial_a \left( H_{AB}^{cb} \right) \partial_c \partial_b \phi^B + \Psi^{kAa} H_{AB}^{cb} \partial_a \partial_c \partial_b \phi^B = 0 \end{aligned} \quad (1.82)$$

Na expressão acima apenas o último termo contém derivadas terceiras dos  $\phi^B$  e essas derivadas aparecem linearmente, conseqüentemente esse termo deve se anular independentemente dos outros. Portanto devemos ter:

$$\Psi^{kAa} H_{AB}^{cb} \partial_a \partial_c \partial_b \phi^B = 0 \quad (1.83)$$

Como essa expressão deve ser válida para cada derivada terceira  $\partial_a \partial_c \partial_b \phi^B$  e estas são totalmente simétricas nos índices  $a, b, c$ ; teremos

$$\left\{ \Psi^{kAa} H_{AB}^{cb} \right\}_{(a,b,c)} = 0 \quad (1.84)$$

onde  $\{ \dots \}_{(a,b,c)}$  indica a simetrização em relação aos índices  $a, b, c$ . Se  $\tau_0$  for o parâmetro de evolução temporal  $H_{AB}^{00}$  será a matriz Hessiana do sistema:

$$H_{AB}^{00} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi^A) \partial (\partial_0 \phi^B)} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^A \partial \dot{\phi}^B} \quad (1.85)$$

A expressão (1.84) torna-se

$$\Psi^{kA0} H_{AB}^{00} = 0 \quad (1.86)$$

e indica que, se todos os  $\Psi^{kA0}$  não forem identicamente nulos, eles serão as componentes de  $r$  autovetores da matriz Hessiana com autovalores nulos.

Mesmo que todos os  $\Psi^{kAa}$  fossem nulos haverá tais autovetores, pois nesse caso a equação (1.82) se reduz a:

$$L_A \left( \Phi^{kA} - \left( \partial^a \phi^A \right) \chi_a^k \right) = 0 \quad (1.87)$$

$$\left( V_A - H_{AB}^{cb} \partial_c \partial_b \phi^B \right) \left( \Phi^{kA} - \left( \partial^a \phi^A \right) \chi_a^k \right) = 0 \quad (1.88)$$

$$V_A \Phi^{kA} - V_A \left( \partial^a \phi^A \right) \chi_a^k - H_{AB}^{cb} \partial_c \partial_b \phi^B \left( \Phi^{kA} - \left( \partial^a \phi^A \right) \chi_a^k \right) = 0 \quad (1.89)$$

Apenas o último termo da expressão acima contém derivadas segundas dos  $\phi^B$  e novamente a dependência é linear, portanto esses termos devem se anular independentemente e conseqüentemente:

$$\left(\Phi^{kA} - \left(\partial^a \phi^A\right) \chi_a^k\right) H_{AB}^{cb} \partial_c \partial_b \phi^B = 0 \quad (1.90)$$

Como a derivada segunda é simétrica nos índices  $c$  e  $b$  devemos ter:

$$\left\{ \left(\Phi^{kA} - \left(\partial^a \phi^A\right) \chi_a^k\right) H_{AB}^{cb} \right\}_{(c,b)} = 0 \quad (1.91)$$

Para  $c = b = 0$  temos

$$\left(\Phi^{kA} - \left(\partial^a \phi^A\right) \chi_a^k\right) H_{AB}^{00} = 0 \quad (1.92)$$

e portanto as expressões  $\left(\Phi^{kA} - \left(\partial^a \phi^A\right) \chi_a^k\right)$  são as componentes de  $r$  autovetores da matriz Hessiana com autovalor nulo.

Os resultados obtidos acima nos mostram que o fato de a ação ser invariante, ou equivalentemente, de a densidade Lagrangeana ser quase-invariante sob transformações de gauge locais implica na singularidade da matriz Hessiana. Ou seja:

Um sistema cuja ação seja invariante sob uma transformação de gauge local é necessariamente singular e conseqüentemente apresentará vínculos.

A inversa dessa afirmação *não é verdadeira* pois existem sistemas com vínculos cuja densidade Lagrangeana não é quase-invariante sob transformações de gauge locais. Veremos no próximo capítulo como determinar se um vínculo está ou não relacionado com simetrias sob transformações de gauge locais.

## 2. Formalismo Hamiltoniano para sistemas singulares

Apresentaremos agora o formalismo Hamiltoniano para sistemas singulares, também conhecido como formalismo de Dirac pois foi este quem desenvolveu seus fundamentos [9, 10, 11]. Atualmente esse formalismo constitui a abordagem mais utilizada no tratamento de sistemas vinculados e o estudaremos aqui de forma a comparar seus procedimentos e resultados com o formalismo de Hamilton-Jacobi que será apresentado a seguir. Neste capítulo trabalharemos novamente com sistemas com finitos graus de liberdade usando a mesma notação da seção 1.1.

### 2.1 Equações de movimento de Hamilton

A existência de vínculos da forma  $\Phi_\alpha(q, p) = 0$  mostrada na equação (1.20) não nos permitirá escrever as equações de movimento de Hamilton da forma usualmente feita na Mecânica Clássica e para contornar esse problema será necessário levarmos explicitamente em conta a existência dos vínculos. Temos, de acordo com o exemplo usado na primeira seção,  $R$  vínculos e  $R$  velocidades não resolvidas  $\dot{q}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, R$ , correspondentes às coordenadas cujos momentos canonicamente conjugados  $p_\alpha$  são expressos segundo a equação (1.18). Adotaremos inicialmente a seguinte notação: os índices gregos irão se referir às  $R$  coordenadas, especificadas acima, cujas velocidades não são resolvidas, os índices latinos irão se referir às  $K$  coordenadas cujas velocidades  $\dot{q}_a$  são

resolvidas da forma mostrada na equação (1.16); exceção feita às letras  $i$ ,  $j$  e  $n$  serão usadas para especificar todas as  $N$  coordenadas.

Levando em conta as considerações acima o Hamiltoniano definido na equação (1.4), e que passaremos a chamar de Hamiltoniano canônico, será dado por:

$$H_c = g_\alpha(q, p_b) \dot{q}_\alpha + p_a f_a(q, p_b, \dot{q}_\alpha) - L(q, \dot{q}_\alpha = f_a(q, p_b, \dot{q}_\alpha), \dot{q}_\alpha) \quad (2.1)$$

Derivando parcialmente em relação aos  $q$ 's, aos  $p_a$  e às velocidades não resolvidas  $\dot{q}_\alpha$  e usando a definição dos momentos, teremos:

$$\frac{\partial H_c}{\partial q_i} = \dot{q}_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial q_i} + p_a \frac{\partial f_a}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial f_a}{\partial q_i} = \dot{q}_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial H_c}{\partial p_a} = f_a + p_b \frac{\partial f_b}{\partial p_a} + \dot{q}_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial p_a} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b} \frac{\partial f_b}{\partial p_a} = f_a + \dot{q}_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial p_a} = \dot{q}_\alpha + \dot{q}_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial p_a} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial H_c}{\partial \dot{q}_\alpha} = g_\alpha + p_b \frac{\partial f_b}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b} \frac{\partial f_b}{\partial \dot{q}_\alpha} = g_\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0 \quad (2.4)$$

A última das equações acima nos mostra que o Hamiltoniano canônico **não possui dependência explícita nas velocidades não resolvidas**. Além disso, usando as equações de Euler-Lagrange (1.3) junto com a definição dos momentos, podemos escrever as equações (2.2) e (2.3) como:

$$\dot{p}_i = - \left( \frac{\partial H_c}{\partial q_i} - \dot{q}_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial q_i} \right) = - \frac{\partial H_c}{\partial q_i} + \dot{q}_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial q_i} \quad (2.5)$$

$$\dot{q}_a = \frac{\partial H_c}{\partial p_a} - \dot{q}_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial p_a} \quad (2.6)$$

Se esquecermos por um instante que  $\Phi_\alpha$  é nulo e usarmos a definição dos vínculos, dada pela equação (1.19), temos:

$$\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial p_a} = \frac{\partial p_\alpha}{\partial p_a} - \frac{\partial g_\alpha}{\partial p_a} = - \frac{\partial g_\alpha}{\partial p_a} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_i} = \frac{\partial p_\alpha}{\partial q_i} - \frac{\partial g_\alpha}{\partial q_i} = - \frac{\partial g_\alpha}{\partial q_i} \quad (2.8)$$

Podemos então reescrever (2.5) e (2.6) como

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H_P}{\partial q_i} \quad (2.9)$$

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H_P}{\partial p_\alpha} \quad (2.10)$$

onde

$$H_P = H_c + \dot{q}_\alpha \Phi_\alpha \quad (2.11)$$

é chamado de *Hamiltoniano primário*.

Usando o fato de que a igualdade

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H_P}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\beta \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\beta \delta_{\alpha\beta} = \dot{q}_\alpha \quad (2.12)$$

é identicamente satisfeita, podemos reescrever a equação (2.10) como:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_P}{\partial p_i} \quad (2.13)$$

Sendo novamente pouco rigorosos, já que nem todos os momentos são variáveis independentes e portanto o espaço de fase não será bem definido, podemos usar o parêntese de Poisson para escrever a equação de movimento de qualquer função  $F(q, p)$  como:

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H_P\} \quad (2.14)$$

Devemos entretanto chamar a atenção para alguns aspectos importantes desse procedimento. Em primeiro lugar, a equação de movimento (2.12) para as coordenadas  $q_\alpha$  é trivial e, junto com o fato de o Hamiltoniano canônico não depender das velocidades  $\dot{q}_\alpha$ , implica que estas velocidades são variáveis arbitrárias nesse formalismo Hamiltoniano para sistemas singulares. As equações de movimento fisicamente relevantes são apenas as  $N + K$  (2.9) e (2.10) e não mais as  $2N$  equações de movimento (1.6) e (1.7) do caso não singular.

Em segundo lugar, o parêntese de Poisson não é bem definido, como dissemos acima, pois **as variáveis canônicas não são independentes entre si** devido à presença dos

vínculos e portanto o espaço de fase não está bem definido. Por último, é importante notar que, para obter os resultados corretos, **não** usamos o fato de os vínculos  $\Phi_\alpha$  serem nulos nas equações de movimento de Hamilton (2.9) e (2.13) **antes** de calcularmos as derivadas e, conseqüentemente, devemos fazer o mesmo na equação (2.14) **antes** de calcularmos o parêntese de Poisson.

O primeiro a usar esse método foi Dirac [9] que partiu do princípio de que o Hamiltoniano canônico  $H_c$  não pode ser fisicamente distinguível do Hamiltoniano primário  $H_P$ , definido na equação (2.11), pois eles diferem apenas numa combinação arbitrária dos vínculos já que as velocidades  $\dot{q}_\alpha$  são arbitrárias. Contudo, para que  $H_c$  e  $H_P$  não forneçam resultados trivialmente idênticos, é necessário não usar os vínculos antes de calcular os parênteses de Poisson. Dirac definiu então as *igualdades fracas*, simbolizadas por " $\approx$ ", como sendo aquelas que não devem ser usadas até que sejam calculados os parênteses de Poisson. Desse modo, os vínculos devem ser reescritos como:

$$\Phi_\alpha(q, p) \approx 0 \tag{2.15}$$

Veremos agora um tratamento consistente que justifique a definição das igualdades fracas e como elas permitem utilizar os parênteses de Poisson de forma coerente nas equações de movimento apesar de as variáveis canônicas não serem independentes entre si. Para essa finalidade seguiremos a abordagem usada na referência [17].

## 2.2 Igualdades fracas e fortes

Devido à existência dos vínculos  $\Phi_\alpha$  o movimento do sistema não se realiza mais em todo espaço de fase  $2N$  dimensional, mas sim numa hipersuperfície  $U$  de dimensão  $N + K = 2N - R$  definida pelos  $R$  vínculos e que chamaremos de *hipersuperfície dos vínculos*. O Hamiltoniano canônico estará definido apenas nessa hipersuperfície pois ao fazermos as substituições das equações (1.16) e (1.18) no Hamiltoniano canônico estamos na verdade nos restringindo a  $U$ .



Contudo, para podermos definir relações como o parêntese de Poisson, será necessário trabalharmos com uma função definida em todo o espaço de fase, calcular suas derivadas em relação aos  $q's$  e  $p's$  e só então restringir as variáveis canônicas à hipersuperfície dos vínculos. Na verdade só é preciso lidar com funções definidas numa "casca" de espessura finita (tão pequena quanto se queira) envolvendo a hipersuperfície dos vínculos [9].

Consideremos duas funções  $z(q, p)$  e  $s(q, p)$  definidas numa vizinhança finita de  $U$ . Elas serão *fracamente iguais* quando seus valores sobre  $U$ , obtidos fazendo-se uso da equação (1.18), forem iguais. Essa igualdade fraca será representada por:

$$z(q, p) \approx s(q, p) \quad (2.16)$$

Quando além disso os "gradientes" no espaço de fase, cujas componentes são dadas por  $(\partial z/\partial q_i, \partial z/\partial p_i)$  para  $z$  e por  $(\partial s/\partial q_i, \partial s/\partial p_i)$  para  $s$ , também forem iguais sobre  $U$ , diremos que as funções são *fortemente iguais* e representaremos essa igualdade por:

$$z(q, p) \simeq s(q, p) \quad (2.17)$$

É importante notar que primeiro calcula-se os gradientes considerando todos os  $q's$  e  $p's$  independentes e somente depois restringimos seus valores a  $U$  usando a expressão (1.18). As igualdades "=" usuais serão usadas para indicar o desenvolvimento das equações ou resultados obtidos a partir das definições.

A hipersuperfície dos vínculos é definida por igualdades fracas pois, considerando os  $\Phi_\alpha$  como funções  $\Phi_\alpha = p_\alpha - g_\alpha(q, p_b)$  definidas em todo espaço de fase, podemos definir  $U$  a partir das igualdades fracas:

$$\Phi_\alpha = p_\alpha - g_\alpha(q, p_b) \approx 0 \quad (2.18)$$

Por outro lado, como as funções  $g_\alpha$  não dependem dos  $p_\alpha$  teremos que

$$\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial p_\beta} = \frac{\partial p_\alpha}{\partial p_\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad (2.19)$$

e portanto o gradiente de  $\Phi_\alpha$  nunca se anula sobre  $U$ , conseqüentemente  $\Phi_\alpha$  não pode ser fortemente nulo.

Além disso, se uma função  $w$  é o produto de duas funções  $z$  e  $s$  que são fracamente nulas, ou seja  $w = z \cdot s$  e  $s \approx z \approx 0$ , então essa função será fortemente nula. Para verificar isso consideremos a derivada de  $w$  em relação a qualquer uma das variáveis canônicas,  $q_i$  por exemplo:

$$\frac{\partial w}{\partial q_i} = \frac{\partial z}{\partial q_i} s + z \frac{\partial s}{\partial q_i} \quad (2.20)$$

Como  $s \approx z \approx 0$  temos que  $\partial w / \partial q_i \approx 0$ . O mesmo argumento é válido para  $\partial w / \partial p_i$  e portanto o gradiente de  $w$  é fracamente nulo. Isso significa que seu valor se anula sobre  $U$ , o que implica em  $w \simeq 0$  por definição.

Uma questão pode ser logo colocada: se duas funções  $z$  e  $s$  são fracamente iguais qual é a igualdade forte que pode ser estabelecida entre elas? Para respondê-la consideremos dois pontos **sobre** a hipersuperfície  $U$  com diferenças infinitesimais  $\delta q$  e  $\delta p$  entre as variáveis canônicas de cada um. Como estamos sobre  $U$  as relações (1.18) são válidas e apenas os  $\delta q_i$  e os  $\delta p_a$  serão independentes, sendo os  $\delta p_\alpha$  dados por:

$$\delta p_\alpha = \frac{\partial g_\alpha}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial g_\alpha}{\partial p_a} \delta p_a \quad (2.21)$$

Como os pontos estão sobre  $U$  temos  $z = s$  e isso implica em  $\delta z = \delta s$ . Usando as expressões para  $\delta z$  e  $\delta s$  dadas por

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial z}{\partial p_a} \delta p_a + \frac{\partial z}{\partial p_\alpha} \delta p_\alpha \quad (2.22)$$

$$\delta z = \left( \frac{\partial z}{\partial q_i} + \frac{\partial z}{\partial p_\alpha} \frac{\partial g_\alpha}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left( \frac{\partial z}{\partial p_a} + \frac{\partial z}{\partial p_\alpha} \frac{\partial g_\alpha}{\partial p_a} \right) \delta p_a \quad (2.23)$$

e

$$\delta s = \frac{\partial s}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial s}{\partial p_a} \delta p_a + \frac{\partial s}{\partial p_\alpha} \delta p_\alpha \quad (2.24)$$

$$\delta s = \left( \frac{\partial s}{\partial q_i} + \frac{\partial s}{\partial p_\alpha} \frac{\partial g_\alpha}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left( \frac{\partial s}{\partial p_a} + \frac{\partial s}{\partial p_\alpha} \frac{\partial g_\alpha}{\partial p_a} \right) \delta p_a \quad (2.25)$$

(nas quais usamos a igualdade (2.21)) obtemos:

$$\frac{\partial z}{\partial q_i} + \frac{\partial z}{\partial p_\alpha} \frac{\partial g_\alpha}{\partial q_i} = \frac{\partial s}{\partial q_i} + \frac{\partial s}{\partial p_\alpha} \frac{\partial g_\alpha}{\partial q_i} \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial z}{\partial p_a} + \frac{\partial z}{\partial p_\alpha} \frac{\partial g_\alpha}{\partial p_a} = \frac{\partial s}{\partial p_a} + \frac{\partial s}{\partial p_\alpha} \frac{\partial g_\alpha}{\partial p_a} \quad (2.27)$$

Podemos reescrever essas equações em termos das funções  $\Phi_\alpha = p_\alpha - g_\alpha$ , lembrando que ainda não restringimos as funções à hipersuperfície  $U$  e portanto os momentos  $p_\alpha$  ainda estão sendo tratados como variáveis independentes. A partir da expressão (2.26) obtemos:

$$\frac{\partial z}{\partial q_i} - \frac{\partial z}{\partial p_\alpha} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_i} = \frac{\partial s}{\partial q_i} - \frac{\partial s}{\partial p_\alpha} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_i} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \left( z - \Phi_\alpha \frac{\partial z}{\partial p_\alpha} \right) + \Phi_\alpha \frac{\partial^2 z}{\partial q_i \partial p_\alpha} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left( s - \Phi_\alpha \frac{\partial s}{\partial p_\alpha} \right) + \Phi_\alpha \frac{\partial^2 s}{\partial q_i \partial p_\alpha} \quad (2.29)$$

Do mesmo modo, a partir de (2.27) obtemos:

$$\frac{\partial z}{\partial p_a} - \frac{\partial z}{\partial p_\alpha} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial p_a} = \frac{\partial s}{\partial p_a} - \frac{\partial s}{\partial p_\alpha} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial p_a} \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_a} \left( z - \Phi_\alpha \frac{\partial z}{\partial p_\alpha} \right) + \Phi_\alpha \frac{\partial^2 z}{\partial p_a \partial p_\alpha} = \frac{\partial}{\partial p_a} \left( s - \Phi_\alpha \frac{\partial s}{\partial p_\alpha} \right) + \Phi_\alpha \frac{\partial^2 s}{\partial p_a \partial p_\alpha} \quad (2.31)$$

Ao nos restringirmos à hipersuperfície dos vínculos os termos proporcionais a  $\Phi_\alpha$  irão se anular e, a partir da definição de igualdade fraca e das equações (2.29) e (2.31), podemos escrever:

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \left( z - \Phi_\alpha \frac{\partial z}{\partial p_\alpha} \right) \approx \frac{\partial}{\partial q_i} \left( s - \Phi_\alpha \frac{\partial s}{\partial p_\alpha} \right) \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_a} \left( z - \Phi_\alpha \frac{\partial z}{\partial p_\alpha} \right) \approx \frac{\partial}{\partial p_a} \left( s - \Phi_\alpha \frac{\partial s}{\partial p_\alpha} \right) \quad (2.33)$$

Mas podemos generalizar a última equação trocando o índice  $a$  (que vai de  $R+1$  a  $N$ ) por  $i$  (que cobre todas os  $N$  valores possíveis) se repararmos que a igualdade (2.19) faz com que ambos os lados se anulem fracamente quando usamos um dos  $p_\beta$  no lugar dos  $p_a$ . Fazendo essa mudança no lado esquerdo da igualdade (2.33) temos

$$\frac{\partial}{\partial p_\beta} \left( z - \Phi_\alpha \frac{\partial z}{\partial p_\alpha} \right) = \frac{\partial z}{\partial p_\beta} - \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial p_\beta} \frac{\partial z}{\partial p_\alpha} - \Phi_\alpha \frac{\partial^2 z}{\partial p_\beta \partial p_\alpha} \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_\beta} \left( z - \Phi_\alpha \frac{\partial z}{\partial p_\alpha} \right) = \frac{\partial z}{\partial p_\beta} - \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial z}{\partial p_\alpha} - \Phi_\alpha \frac{\partial^2 z}{\partial p_\beta \partial p_\alpha} = -\Phi_\alpha \frac{\partial^2 z}{\partial p_\beta \partial p_\alpha} \approx 0, \quad (2.35)$$

sendo que um resultado semelhante pode ser obtido para o lado direito da igualdade (2.33). Desse modo, ela pode ser reescrita de uma forma mais geral como:

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \left( z - \Phi_\alpha \frac{\partial z}{\partial p_\alpha} \right) \approx \frac{\partial}{\partial p_i} \left( s - \Phi_\alpha \frac{\partial s}{\partial p_\alpha} \right) \quad (2.36)$$

A expressão acima, junto com a equação (2.32), implica que

$$z - \Phi_\alpha \frac{\partial z}{\partial p_\alpha} \simeq s - \Phi_\alpha \frac{\partial s}{\partial p_\alpha} \quad (2.37)$$

como conseqüência da própria definição de igualdade forte. Acabamos portanto de demonstrar o seguinte teorema, que é a resposta à questão formulada a pouco:

Se duas funções são fracamente iguais então elas diferem fortemente apenas por uma combinação linear dos vínculos.

Podemos então enunciar o seguinte corolário:

Se uma função se anula fracamente então ela é fortemente igual a uma combinação linear dos vínculos.

Esse corolário pode ser facilmente demonstrado pois fazendo  $s = 0$  temos que  $z \approx 0$  e como conseqüência do teorema acima temos:

$$z \simeq \Phi_\alpha \frac{\partial z}{\partial p_\alpha} \quad (2.38)$$

Com esse formalismo o Hamiltoniano canônico  $H_c$  dado pela equação (2.1), e que só é definido sobre  $U$ , pode ser estendido para todo espaço de fase, ou ao menos para uma vizinhança finita de  $U$ , por uma função  $H'$  que seja fracamente igual a  $H_c$ , ou seja, que se iguale a  $H_c$  sobre a hipersuperfície  $U$ . É importante lembrar que, apesar de  $H_c$  ser independente dos momentos  $p_\alpha$ ,  $H'$  pode depender dessas variáveis.

O fato de termos  $H' \approx H_c$  implicará, de acordo com as equações (2.32) e (2.36) e levando em conta a independência de  $H_c$  em relação aos momentos  $p_\alpha$ , nas igualdades:

$$\frac{\partial H_c}{\partial q_i} \approx \frac{\partial}{\partial q_i} \left( H' - \Phi_\alpha \frac{\partial H'}{\partial p_\alpha} \right) \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial H_c}{\partial p_i} \approx \frac{\partial}{\partial p_i} \left( H' - \Phi_\alpha \frac{\partial H'}{\partial p_\alpha} \right) \quad (2.40)$$

Usando nas expressões acima as equações (2.5) e (2.6) junto com o fato de que  $g_\alpha = p_\alpha - \Phi_\alpha$ , teremos:

$$\dot{p}_i \approx -\frac{\partial}{\partial q_i} \left( H' - \Phi_\alpha \frac{\partial H'}{\partial p_\alpha} \right) - \dot{q}_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_i} \quad (2.41)$$

$$\dot{q}_\alpha \approx \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \left( H' - \Phi_\alpha \frac{\partial H'}{\partial p_\alpha} \right) + \dot{q}_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial p_\alpha} \quad (2.42)$$

Repare que a última equação é válida apenas para as coordenadas  $q_\alpha$  cujas velocidades são resolvidas em função das outras variáveis. Isso é devido ao fato de a equação (2.6) só ser válida para essas coordenadas, apesar de ser válida em todo o espaço de fase e não apenas sobre a hipersuperfície  $U$ . Contudo, podemos estender a equação (2.42) para o restante das coordenadas  $q_\alpha$ , cujas velocidades não podem ser resolvidas, pois ela será trivialmente satisfeita ao usarmos a igualdade (2.19) e o fato dos  $\Phi_\alpha$  serem fracamente nulos:

$$\frac{\partial}{\partial p_\beta} \left( H' - \Phi_\alpha \frac{\partial H'}{\partial p_\alpha} \right) + \dot{q}_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial p_\beta} = \frac{\partial H'}{\partial p_\beta} - \Phi_\alpha \frac{\partial^2 H'}{\partial p_\beta \partial p_\alpha} - \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial p_\beta} \frac{\partial H'}{\partial p_\alpha} + \delta_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_\beta} \left( H' - \Phi_\alpha \frac{\partial H'}{\partial p_\alpha} \right) + \dot{q}_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial p_\beta} = -\Phi_\alpha \frac{\partial^2 H'}{\partial p_\beta \partial p_\alpha} + \delta_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \approx \dot{q}_\beta \quad (2.44)$$

Podemos escrever então:

$$\dot{q}_i \approx \frac{\partial}{\partial p_i} \left( H' - \Phi_\alpha \frac{\partial H'}{\partial p_\alpha} \right) + \dot{q}_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial p_i} \quad (2.45)$$

Devemos notar que o termo entre parênteses nas equações (2.41) e (2.45), que chamaremos apenas de  $H$  e é dado por

$$H = H' - \Phi_\alpha \frac{\partial H'}{\partial p_\alpha}, \quad (2.46)$$

é uma função arbitrária, definida em todo espaço de fase, cuja única restrição é ser fortemente igual a  $H_c$ , como pode ser visto a partir da própria definição de igualdade forte e das equações (2.39) e (2.40). Entretanto devemos notar que, enquanto  $H_c$

é independente dos  $p_\alpha$ ,  $H$  depende de todos as variáveis canônicas. Usando  $H$  e a definição do parêntese de Poisson obtemos, a partir das equações (2.41) e (2.45), o seguinte formato para as equações de movimento:

$$\dot{p}_i \approx \{p_i, H\} + \dot{q}_\alpha \{p_i, \Phi_\alpha\} \quad (2.47)$$

$$\dot{q}_i \approx \{q_i, H\} + \dot{q}_\alpha \{q_i, \Phi_\alpha\} \quad (2.48)$$

Observe que as velocidade não resolvíveis continuam presentes no formalismo, porém são indeterminadas e podem ser encaradas como multiplicadores de Lagrange. Podemos usar o próprio Hamiltoniano canônico  $H_c$  no lugar de  $H$  nas equações de movimento acima já que, apesar de  $H$  não ser completamente definido, ele é fortemente igual a  $H_c$ . Temos então:

$$\dot{p}_i \approx \{p_i, H_c\} + \dot{q}_\alpha \{p_i, \Phi_\alpha\} \quad (2.49)$$

$$\dot{q}_i \approx \{q_i, H_c\} + \dot{q}_\alpha \{q_i, \Phi_\alpha\} \quad (2.50)$$

Usando o Hamiltoniano primário definido na equação (2.11) temos:

$$\dot{p}_i \approx \{p_i, H_P\} \quad (2.51)$$

$$\dot{q}_i \approx \{q_i, H_P\} \quad (2.52)$$

Esse resultado é completamente equivalente às equações (2.9) e (2.13) que foram obtidas sem maiores preocupações com o rigor matemático. A variação temporal de uma função  $F(q, p)$  será dada por

$$\frac{dF}{dt} \approx \{F, H_P\}, \quad (2.53)$$

um resultado equivalente ao da equação (2.14). Contudo, esses últimos resultados foram obtidos por meio de um desenvolvimento rigoroso e nos ajudam a perceber o verdadeiro significado das igualdades fracas.

Fica claro então por que **não** se deve usar os vínculos antes de calcular o parêntese de Poisson na equação de movimento acima: o cálculo do parêntese de Poisson nos

fornece uma função que, ao ser restringida à hipersuperfície  $U$  pelo uso dos vínculos, se torna igual à derivada da função  $F$ . Usar os vínculos antes de calcular os parênteses de Poisson irá fornecer resultados errados devido ao fato de que, se uma função se anula fracamente, seu parêntese de Poisson com outra função arbitrária não irá, em geral, se anular fracamente.

Como dissemos anteriormente, as velocidades  $\dot{q}_\alpha$  são parâmetros arbitrários no formalismo Hamiltoniano para sistemas singulares. As equações de movimento (2.51) e (2.52) podem ser obtidas a partir do problema variacional de extremizar o funcional

$$S = \int (p_i \dot{q}_i - H_c) dt \quad (2.54)$$

submetido aos vínculos  $\Phi_\alpha$ . Nesse caso as velocidades  $\dot{q}_\alpha$  desempenham o papel de multiplicadores de Lagrange.

Nas expressões (2.5) e (2.6) ou (2.9) e (2.10) da seção anterior temos apenas  $2N - R$  equações de movimento e, em princípio, precisaremos de um número igual de condições iniciais, dadas pelos valores dos  $p_i$  e  $q_a$  no instante  $t = 0$ , para podermos resolvê-las. As  $R$  velocidades  $\dot{q}_\alpha$  permanecem como funções arbitrárias do tempo que devem ser escolhidas e substituídas nas equações de movimento.

Já nas equações de movimento definidas em todo espaço de fase pelas igualdades fracas (2.51) e (2.52), temos  $2N$  equações de movimento e  $R$  funções arbitrárias do tempo. Precisaríamos então de  $2N$  condições iniciais para resolver essas equações, uma aparente contradição com as equações (2.9) e (2.10). Contudo, a existência de  $R$  vínculos  $\Phi_\alpha(q, p)$  faz com que apenas  $2N - R$  das condições iniciais sejam independentes eliminando qualquer contradição.

Analisando de outro modo, as  $2N$  variáveis  $q_n$  e  $\dot{q}_n$  do espaço de fase das velocidades são expressas em termos de  $2N + R$  variáveis  $p_n$  e  $q_n$  e  $\dot{q}_\alpha$ . Mas a existência dos  $R$  vínculos  $\Phi_\alpha(q, p)$  faz com que apenas  $2N$  dessas últimas variáveis sejam independentes entre si e portanto não podemos ter mais nenhuma relação entre elas pois, do contrário, as variáveis  $q_n$  e  $\dot{q}_n$  não seriam independentes entre si.

No formalismo Lagrangeano para sistemas singulares pode ocorrer a interdependência entre as variáveis  $q_n$  e  $\dot{q}_n$  devido à existência dos vínculos Lagrangeanos (1.25). Contudo, no formalismo Hamiltoniano, esse caso surge devido a condições de consistência que devem ser satisfeitas pelo sistema físico e não tem relação com os vínculos Hamiltonianos primários.

Não abordaremos aqui a relação entre os vínculos Lagrangeanos e Hamiltonianos, contudo tal assunto já foi bastante estudado na literatura e pode-se mostrar [20, 21] que os vínculos primários do formalismo Hamiltoniano são decorrência direta da singularidade da matriz Hessiana e não correspondem a nenhum dos vínculos do formalismo Lagrangeano fornecidos pela equação (1.25). Os vínculos Lagrangeanos podem ser obtidos a partir das condições de consistência dos vínculos Hamiltonianos primários, que serão estudadas na próxima seção, e portanto somente os novos vínculos Hamiltonianos que surgem dessas condições (chamados de vínculos secundários) corresponderão a algum vínculo Lagrangeano.

Essas condições de consistência (que fornecem vínculos Hamiltonianos correspondentes aos vínculos Lagrangeanos) poderão determinar algumas das velocidades  $\dot{q}_\alpha$ , contudo até agora não tratamos dessas condições e portanto as velocidades  $\dot{q}_\alpha$  devem ser independentes dos  $p$ 's e  $q$ 's e das outras velocidades não resolvidas [9]. Devemos também lembrar que, no desenvolvimento realizado até aqui, qualquer dependência das velocidades  $\dot{q}_\alpha$  em relação às variáveis canônicas contradiz o fato da matriz Hessiana ter posto  $R$ .

Contudo é exatamente o fato de não termos considerado a necessidade de que os vínculos, uma vez estabelecidas as condições iniciais, sejam preservados no desenvolvimento temporal do sistema que faz com que a argumentação apresentada acima seja válida apenas em princípio. Essa necessidade implica no fato de que as derivadas temporais dos vínculos  $\Phi_\alpha(q, p)$  devem ser fracamente nulas e, caso essas condições de consistência não sejam cumpridas identicamente, podemos ter novas restrições sobre as condições iniciais do sistema físico (novos vínculos) ou então podemos ser capazes de



expressar algumas das velocidades  $\dot{q}_\alpha$  em termos das variáveis canônicas.

Como veremos na seção 2.5, a existência de relações entre os  $\dot{q}_\alpha$  e as variáveis canônicas irá indicar a existência de graus de liberdade sem significado físico que poderão ser eliminados da teoria.

### 2.3 Condições de consistência

Como foi dito no fim da seção anterior, uma condição essencial para que o formalismo desenvolvido até agora seja autoconsistente é que os vínculos sejam respeitados a qualquer tempo. Para tanto, ao fazermos  $F = \Phi_\alpha$  na equação de movimento (2.53), devemos ter:

$$\dot{\Phi}_\alpha \approx \{\Phi_\alpha, H_c\} + \dot{q}_\beta \{\Phi_\alpha, \Phi_\beta\} \approx 0 \quad (2.55)$$

Temos então um total de  $R$  equações (uma para cada  $\Phi_\alpha$ ) a serem satisfeitas. Essas equações são chamadas *condições de consistência* e podem nos levar a contradições do tipo  $1 \approx 0$ , mas nesse caso temos uma indicação de que a função Lagrangeana escolhida leva a equações de movimento inconsistentes. Desconsiderando esse tipo de situação podemos ter as seguintes opções:

1 - A equação (2.55) se reduz a  $0 \approx 0$ , ou seja, é identicamente satisfeita com o uso dos vínculos existentes e não precisaremos mais considerá-la.

2 - A equação resultante é independente das velocidades  $\dot{q}_\alpha$  e envolve apenas as variáveis canônicas, mas não se anula fracamente com o uso dos vínculos pois, do contrário, teríamos novamente o caso 1. Desse modo é uma equação do tipo

$$\chi(q, p) \approx 0 \quad (2.56)$$

que define um novo vínculo.

3 - A equação resultante envolve também as velocidades  $\dot{q}_\alpha$  e portanto impõe condições sobre estas.

As equações do tipo (2.56) surgidas no caso 2 significam que temos novos vínculos impostos às variáveis canônicas. Esses vínculos, que chamaremos de *vínculos secundários*, só surgem após a aplicação das equações de movimento. Os vínculos  $\Phi_\alpha$ ; que se originam da própria definição dos momentos, sem o uso das equações de movimento; passarão a ser chamados de *vínculos primários*.

Com o surgimento dos vínculos secundários teremos novas condições de consistência a serem atendidas, uma vez que devemos exigir que a derivada temporal de  $\chi$  satisfaça:

$$\dot{\chi} \approx \{\chi, H_c\} + \dot{q}_\beta \{\chi, \Phi_\beta\} \approx 0 \quad (2.57)$$

Essa condição pode resultar novamente num dos três casos descritos acima, podendo portanto gerar novos vínculos (que também são chamados de vínculos secundários) e que conseqüentemente irão gerar novas condições de consistência a serem atendidas. Prosseguindo o processo até não surgirem novos vínculos secundários teremos como resultado um certo número desses vínculos e uma série de condições a serem impostas às velocidades  $\dot{q}_\alpha$ .

Considerando que tenhamos um total de  $M$  vínculos secundários após satisfeitas todas as condições de consistência, iremos designá-los pela seguinte notação:

$$\chi_a(q, p) \approx 0; a = 1, \dots, M \quad (2.58)$$

A partir desse ponto estamos abandonando a notação de índices definida no início deste capítulo e passaremos a indicar explicitamente a faixa de variação dos índices de cada tipo de variável. O conjunto total dos  $T = R + M$  vínculos, tanto primários quanto secundários, será designado por

$$\Theta_a(q, p) \approx 0; a = 1, \dots, T; \quad (2.59)$$

onde os  $R$  primeiros vínculos são primários e os seguintes secundários, ou seja:

$$\Theta_a = \Phi_a; a = 1, \dots, R \quad (2.60)$$

$$\Theta_a = \chi_{(a-R)}; a = R + 1, \dots, T \quad (2.61)$$

É importante notar que a cada novo vínculo secundário que surge há uma redução na dimensão da hipersuperfície dos vínculos. Inicialmente tínhamos uma hipersuperfície  $U$  definida pelos  $R$  vínculos primários com dimensão  $K = N - R$ . Cada novo vínculo secundário reduz de uma unidade a dimensão da hipersuperfície dos vínculos e, ao final do processo de obtenção dos vínculos secundários, o sistema físico estará restrito a uma nova hipersuperfície  $U'$ , definida pelo conjunto total dos vínculos primários e secundários, e que terá dimensão  $N - T$ . É sobre essa hipersuperfície  $U'$  que devem ser, de agora em diante, definidas as igualdades fracas e fortes. Portanto, os vínculos secundários devem ser tratados da mesma forma que os primários em relação aos parênteses de Poisson: devemos primeiro calcular os parênteses de Poisson e depois usar os vínculos, sejam eles primários ou secundários.

Devemos agora analisar quais condições serão impostas sobre as velocidades  $\dot{q}_\alpha$  pelo caso 3. Tratando essas velocidades como incógnitas consideremos o sistema não homogêneo de equações lineares, cujos coeficientes são funções das variáveis canônicas, e que é obtido a partir das equações de movimento para todos os  $T$  vínculos:

$$\dot{\Theta}_a \approx \{\Theta_a, H_P\} \approx 0 \quad (2.62)$$

$$\{\Theta_a, H_C\} + \dot{q}_\alpha \{\Theta_a, \Phi_\alpha\} \approx 0 \quad (2.63)$$

Esse sistema deve ter uma solução do tipo

$$\dot{q}_\alpha \approx U_\alpha(q, p) \quad (2.64)$$

pois caso contrário as condições de consistência gerariam contradições e estamos assumindo que todas foram satisfeitas. Além disso podemos acrescentar a essa solução todas as soluções do sistema homogêneo associado a (2.63) e dado por:

$$V_\alpha \{\Theta_a, \Phi_\alpha\} \approx 0 \quad (2.65)$$

Considerando que o sistema acima possua  $A \leq R$  soluções independentes, a solução geral do sistema (2.63) será dada por

$$\dot{q}_\alpha \approx U_\alpha + v_a V_{(a)\alpha}; a = 1, \dots, A, \quad (2.66)$$

onde o índice  $(a)$  indexa as diferentes soluções  $V_{(a)\alpha}$  do sistema homogêneo (2.65) e  $v_a$  são coeficientes arbitrários. Com esses resultados a equação de movimento (2.53) se torna:

$$\frac{dF}{dt} \approx \{F, H_P\} = \{F, H_c\} + \dot{q}_\alpha \{F, \Phi_\alpha\} \quad (2.67)$$

$$\frac{dF}{dt} \approx \{F, H_c\} + (U_\alpha + v_a V_{(a)\alpha}) \{F, \Phi_\alpha\} \quad (2.68)$$

$$\frac{dF}{dt} \approx \{F, H_c + U_\alpha \Phi_\alpha + v_a V_{(a)\alpha} \Phi_\alpha\} \quad (2.69)$$

Na passagem da equação (2.68) para a equação (2.69) foi desconsiderado o termo  $\Phi_\alpha \{F, U_\alpha\}$  pois ele é fracamente nulo. Fazendo

$$H' = H_c + U_\alpha \Phi_\alpha \quad (2.70)$$

$$\Phi'_a = V_{(a)\alpha} \Phi_\alpha, \quad (2.71)$$

podemos reescrever o Hamiltoniano primário como:

$$H_P = H' + v_a \Phi'_a \quad (2.72)$$

Temos agora todas as condições de consistência satisfeitas e nas equações de movimento nos resta um número  $A \leq R$  de coeficientes arbitrários. Como foi dito no final da última seção, a dependência de alguma das velocidades  $\dot{q}_\alpha$  em relação às variáveis canônicas implica no fato do sistema físico ter graus de liberdade sem significado físico. Veremos de que forma isso ocorre mais adiante, contudo já podemos examinar um aspecto do Hamiltoniano primário expresso na equação (2.72): as condições de consistência fazem com que apenas um número  $A$  de combinações lineares das velocidades

$\dot{q}_\alpha$ , os  $v_a$  da equação (2.72), continuem completamente arbitrárias no formalismo Hamiltoniano para sistemas singulares. Por outro lado um total de  $R - A$  combinações lineares dos  $\dot{q}_\alpha$  são determinados em termos das variáveis canônicas.

O número  $A$  de coeficientes arbitrários no Hamiltoniano primário  $H_P$  é dado pelo número de soluções do sistema homogêneo (2.65), que depende do posto da matriz  $T \times R$  dada por:

$$B = \|\{\Theta_a, \Phi_\alpha\}\| \quad (2.73)$$

O número de soluções independentes do sistema (2.65) será igual a  $R - \text{posto}(B)$ , onde o posto da matriz  $B$  (assim como o posto de qualquer matriz que envolva os vínculos) é calculado sobre a hipersuperfície  $U$ , ou seja, é calculado fracamente. Se  $B$  tiver seu posto máximo ( $\text{posto}(B) \approx R$ ) o sistema (2.65) não terá soluções além da trivial e não teremos coeficientes arbitrários nas equações de movimento. Nesse caso todas as velocidades  $\dot{q}_\alpha$  são determinadas univocamente pelo sistema não homogêneo (2.63).

Caso o posto de  $B$  tenha um valor  $R' < R$  teremos  $A = R - R'$  soluções não triviais independentes para o sistema (2.65) e conseqüentemente  $A$  coeficientes arbitrários  $v_a$  nas equações de movimento, correspondentes às combinações lineares das velocidades  $\dot{q}_\alpha$  que permanecem arbitrárias.

Temos então uma característica fundamental que diferencia o formalismo Hamiltoniano para sistemas singulares de sua versão da dinâmica elementar: a presença de coeficientes arbitrários nas equações de movimento, indicando que estamos usando um formalismo matemático que possui elementos arbitrários, como um sistema de coordenadas que possa ser escolhido de alguma forma arbitrária ou então graus de liberdade de gauge. Esse aspecto do formalismo será abordado com maior detalhe na seção 2.6.

## 2.4 Funções de primeira e segunda classes

A existência de soluções não triviais para o sistema homogêneo (2.65) faz com que apareçam nas equações de movimento combinações lineares dos vínculos primários, dadas pelas equações (2.71), que terão a importante propriedade de ter parênteses de Poisson fracamente nulos com todos os outros vínculos (tanto primários quanto secundários). Podemos verificar diretamente esse fato pois

$$\{\Theta_b, \Phi'_a\} = V_{(a)\alpha} \{\Theta_b, \Phi_\alpha\} + \{\Theta_b, V_{(a)\alpha}\} \Phi_\alpha \approx 0 \quad (2.74)$$

( $a = 1, \dots, A$  e  $b = 1, \dots, T$ ) devido ao fato de  $V_{(a)\alpha}$  ser solução do sistema dado pela equação (2.65).

Classificamos qualquer função que possua parênteses de Poisson fracamente nulos com **todos** os vínculos de uma teoria como sendo uma *função de primeira classe*. Uma função que não satisfaça a essa condição é dita de *segunda classe*.

Uma combinação linear de vínculos é novamente um vínculo e, mais especificamente, uma combinação linear de vínculos primários é um novo vínculo primário. Por outro lado, qualquer combinação linear dos vínculos que contenha algum dos vínculos secundários será necessariamente um vínculo secundário devido ao fato desses serem linearmente independentes dos vínculos primários. Os vínculos de uma teoria podem ser substituídos por um número igual de novos vínculos, formados por combinações linearmente independentes dos vínculos originais, pois esses novos vínculos definirão a mesma hipersuperfície  $U'$  definida pelos vínculos originais.

Portanto os  $\Phi'_a$  definidos pela equação (2.71) são **vínculos primários de primeira classe**.

É importante observar também que o  $H'$  definido na equação (2.70) é uma função de primeira classe, pois:

$$\{H', \Theta_a\} = \{H_c + U_\alpha \Phi_\alpha, \Theta_a\} = \{H_c, \Theta_a\} + \{U_\alpha \Phi_\alpha, \Theta_a\} \quad (2.75)$$

$$\{H', \Theta_a\} = \{H_c, \Theta_a\} + U_\alpha \{\Phi_\alpha, \Theta_a\} + \{U_\alpha, \Theta_a\} \Phi_\alpha \quad (2.76)$$

$$\{H', \Theta_a\} = -(\{\Theta_a, H_c\} + U_\alpha \{\Theta_a, \Phi_\alpha\}) + \{U_\alpha, \Theta_a\} \Phi_\alpha \quad (2.77)$$

O lado direito da igualdade acima se anula fracamente. Isso pode ser facilmente verificado pois o termo entre parênteses se anula fracamente devido ao fato de  $U_\alpha$  ser solução do sistema (2.63) enquanto o último termo é linear em  $\Phi_\alpha$  e portanto é fracamente nulo. Conseqüentemente

$$\{H', \Theta_a\} \approx 0 \quad (2.78)$$

e portando  $H'$  é uma função de primeira classe. Desse modo, a equação (2.72) nos fornece o Hamiltoniano primário  $H_P$  em termos de um "Hamiltoniano"  $H'$  de primeira classe e uma combinação arbitrária dos vínculos primários de primeira classe [11]. O número de parâmetros arbitrários nas equações de movimento será dado pelo número de vínculos primários de primeira classe, número esse que é completamente determinado pelo número de autovetores com autovalor nulo que a matriz  $B$ , dada pela equação (2.73), possui.

É possível escrever também combinações lineares de vínculos secundários que sejam funções de primeira classe. Para isso consideremos a matriz quadrada  $T \times T$

$$B' = \|\{\Theta_a, \Theta_b\}\| = \left\| \begin{array}{cc} \{\Phi_\alpha, \Phi_\beta\} & \{\Phi_\alpha, \chi_d\} \\ \{\chi_c, \Phi_\beta\} & \{\chi_c, \chi_d\} \end{array} \right\| \quad (2.79)$$

onde  $a, b = 1, \dots, T$  indexam **todos** os vínculos;  $\alpha, \beta = 1, \dots, R$  indexam os vínculos primários e  $c, d = R + 1, \dots, T$  indexam os vínculos secundários. Se essa matriz possui  $A'$  autovetores  $V'_{(a)b}$  ( $a = 1, \dots, A'$ ;  $b = 1, \dots, T$ ) com autovalores fracamente nulos então teremos

$$V'_{(a)b} \{\Theta_b, \Theta_c\} \approx 0 \quad (2.80)$$

$$\{\Theta'_a, \Theta_c\} \approx 0 \quad (2.81)$$

$$\Theta'_a = V'_{(a)b} \Theta_b \quad (2.82)$$

e portanto os novos vínculos  $\Theta'_a$  serão vínculos de primeira classe.

Mas a matriz  $B'$  possui pelo menos  $A$  autovetores com autovalor nulo. Esses autovetores são obtidos dos autovetores  $V_{(a)\alpha}$  da matriz  $B$  dada pela equação (2.73) fazendo-se:

$$V'_{(a)b} = (V_{(a)\alpha}, 0); \alpha = 1, \dots, R; b = 1, \dots, T \quad (2.83)$$

Os vínculos fornecidos por esses autovetores são os vínculos primários de primeira classe já obtidos na equação (2.71). Se a matriz  $B'$  tiver posto  $T' < T$  teremos  $A' = T - T'$  autovetores com autovalor nulo e portanto um total de  $A'$  vínculos de primeira classe, sendo que  $A$  desses vínculos devem ser os vínculos primários de primeira classe fornecidos pela equação (2.71).

É interessante analisarmos dois casos distintos dependentes do posto da matriz  $B$ , que determina o número dos vínculos primários de primeira classe.

O primeiro caso é aquele em que a matriz  $B$  tenha posto máximo  $R$  e portanto todos vínculos primários serão de segunda classe. Nesse caso a matriz  $B'$  pode ter seu posto máximo  $T$  ou não. Se  $B'$  tiver posto máximo **todos** os vínculos serão de segunda classe, inclusive todos os vínculos secundários. Contudo, se o posto de  $B'$  for menor que  $T$  haverá vínculos de primeira classe e eles serão necessariamente secundários.

O segundo caso ocorre quando  $B$  tem posto  $R' = R - A$ , o que implica na existência de  $A$  vínculos primários de primeira classe. O posto de  $B'$  poderá ser no máximo  $T' = T - A$  pois  $B$  é uma sub-matriz de  $B'$  e portanto  $B'$  tem ao menos o mesmo número de autovetores com autovalor nulo que  $B$ . Se  $B'$  tiver esse posto máximo permitido todos os vínculos secundários serão de segunda classe. Mas caso contrário, se  $T' = T - A'$ ,  $A' > A$ , teremos também  $M' = A' - A$  vínculos secundários de primeira classe.

Esses dois casos destacam o fato de que podemos fazer a divisão dos vínculos secundários em vínculos de primeira e segunda classes independentemente da divisão dos vínculos primários nessas duas categorias. Temos portanto uma nova classificação dos vínculos, em vínculos de primeira e segunda classes, que é totalmente independente da classificação em vínculos primários e secundários.



As funções de primeira classe possuem ainda uma importante propriedade que apresentamos como o seguinte teorema:

O parêntese de Poisson entre duas funções de primeira classe é também uma função de primeira classe.

A demonstração desse teorema é direta. Se  $F$  e  $W$  forem funções de primeira classe teremos

$$\{F, \Theta_a\} \approx 0; \{W, \Theta_a\} \approx 0 \quad (2.84)$$

e conseqüentemente

$$\{F, \Theta_a\} \equiv f_{aa'} \Theta_{a'}; \{W, \Theta_a\} \equiv w_{aa'} \Theta_{a'} \quad (2.85)$$

( $a, a' = 1, \dots, T$ ) pois toda função fracamente nula é fortemente igual a uma combinação linear dos vínculos. Usando a identidade de Jacobi para o parêntese de Poisson temos:

$$\{\{F, W\}, \Theta_a\} + \{\{W, \Theta_a\}, F\} + \{\{\Theta_a, F\}, W\} \equiv 0 \quad (2.86)$$

$$\{\{F, W\}, \Theta_a\} \equiv \{\{F, \Theta_a\}, W\} - \{\{W, \Theta_a\}, F\} \quad (2.87)$$

$$\{\{F, W\}, \Theta_a\} \equiv \{f_{aa'} \Theta_{a'}, W\} - \{w_{aa'} \Theta_{a'}, F\} \quad (2.88)$$

$$\{\{F, W\}, \Theta_a\} \equiv f_{aa'} \{\Theta_{a'}, W\} + \{f_{aa'}, W\} \Theta_{a'} - w_{aa'} \{\Theta_{a'}, F\} - \{w_{aa'}, F\} \Theta_{a'} \quad (2.89)$$

O primeiro e terceiro termos à direita da igualdade na equação acima são fracamente nulos pois  $W$  e  $F$  são de primeira classe enquanto o segundo e terceiro termos são combinações lineares dos vínculos. Temos portanto:

$$\{\{F, W\}, \Theta_a\} \approx 0 \quad (2.90)$$

Como essa igualdade é válida para qualquer um dos vínculos o parêntese de Poisson entre  $F$  e  $W$  é uma função de primeira classe, o que completa a demonstração.

Para finalizar esta seção demonstraremos uma propriedade dos vínculos secundários de uma teoria que será de grande importância na próxima seção. Adotaremos a seguinte

notação: os vínculos primários de primeira classe serão escritos como  $\Phi'_a$ ,  $a = 1, \dots, A$ , e os de segunda classe como  $\Phi''_b$ ,  $b = 1, \dots, R - A$ . Já os vínculos secundários de primeira classe serão escritos como  $\chi'_c$ ,  $c = 1, \dots, M'$ ; enquanto os vínculos secundários de segunda classe serão representados como  $\chi''_d$ ,  $d = 1, \dots, M - M'$ . O conjunto total de vínculos de primeira classe será designado por  $\theta_t$ ,  $t = 1, \dots, A' = (A + M')$ ; enquanto o conjunto dos vínculos de segunda classe será escrito como  $\xi_s$ ,  $s = 1, \dots, S = (T - A')$ .

Quando tivermos colocado o maior número possível de vínculos na categoria de vínculos de primeira classe, seguindo o procedimento descrito acima, teremos como consequência o seguinte teorema:

A matriz  $\Delta$ , cujos elementos são os parênteses de Poisson entre os vínculos de segunda classe, é não singular na hipersuperfície dos vínculos  $U'$  quando já tivermos o maior número possível de vínculos escritos como vínculos de primeira classe.

Isso significa que o determinante da matriz  $\Delta$  não se anula, nem mesmo fracamente, quando for satisfeita a hipótese de que o maior número possível de vínculos já esteja na forma de vínculos de primeira classe.

Demonstraremos esse teorema por contradição assumindo inicialmente que a matriz

$$\Delta = \|\{\xi_i, \xi_t\}\|, \quad (2.91)$$

de dimensões  $S \times S$  seja singular, o que implica que ela terá um posto  $S' < S$ .

Tomemos então uma matriz  $\Delta'$  de dimensões  $(S' + 1) \times (S' + 1)$ , onde  $S' + 1 \leq S$ , e dada por:

$$\Delta' = \left\| \begin{array}{ccccccc} \xi_1 & 0 & \{\xi_1, \xi_2\} & \cdots & \{\xi_1, \xi_{S'}\} \\ \xi_2 & \{\xi_2, \xi_1\} & 0 & & \{\xi_2, \xi_{S'}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{S'+1} & \{\xi_{S'+1}, \xi_1\} & \{\xi_{S'+1}, \xi_2\} & \cdots & \{\xi_{S'+1}, \xi_{S'}\} \end{array} \right\| \quad (2.92)$$

Escolhamos agora um vínculo  $\Theta_a$  qualquer, de primeira ou segunda classe, cujo

parêntese de Poisson com  $|\Delta'|$  será dado por:

$$\{\Theta_a, |\Delta'|\} = \left\{ \Theta_a, \begin{vmatrix} \xi_1 & 0 & \{\xi_1, \xi_2\} & \cdots & \{\xi_1, \xi_{S'}\} \\ \xi_2 & \{\xi_2, \xi_1\} & 0 & & \{\xi_2, \xi_{S'}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{S'+1} & \{\xi_{S'+1}, \xi_1\} & \{\xi_{S'+1}, \xi_2\} & \cdots & \{\xi_{S'+1}, \xi_{S'}\} \end{vmatrix} \right\} \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned} \{\Theta_a, |\Delta'|\} = & \begin{vmatrix} \{\Theta_a, \xi_1\} & 0 & \{\xi_1, \xi_2\} & \cdots & \{\xi_1, \xi_{S'}\} \\ \{\Theta_a, \xi_2\} & \{\xi_2, \xi_1\} & 0 & & \{\xi_2, \xi_{S'}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \{\Theta_a, \xi_{S'+1}\} & \{\xi_{S'+1}, \xi_1\} & \{\xi_{S'+1}, \xi_2\} & \cdots & \{\xi_{S'+1}, \xi_{S'}\} \end{vmatrix} + \\ & + \begin{vmatrix} \xi_1 & 0 & \{\xi_1, \xi_2\} & \cdots & \{\xi_1, \xi_{S'}\} \\ \xi_2 & \{\Theta_a, \{\xi_2, \xi_1\}\} & 0 & & \{\xi_2, \xi_{S'}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{S'+1} & \{\Theta_a, \{\xi_{S'+1}, \xi_1\}\} & \{\xi_{S'+1}, \xi_2\} & \cdots & \{\xi_{S'+1}, \xi_{S'}\} \end{vmatrix} + \dots + \\ & + \begin{vmatrix} \xi_1 & 0 & \{\xi_1, \xi_2\} & \cdots & \{\Theta_a, \{\xi_1, \xi_{S'}\}\} \\ \xi_2 & \{\xi_2, \xi_1\} & 0 & & \{\Theta_a, \{\xi_2, \xi_{S'}\}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{S'+1} & \{\xi_{S'+1}, \xi_1\} & \{\xi_{S'+1}, \xi_2\} & \cdots & \{\Theta_a, \{\xi_{S'+1}, \xi_{S'}\}\} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.94)$$

A expressão acima pode ser obtida fazendo-se a expansão cofatorial do determinante  $|\Delta'|$  em termos dos elementos da primeira coluna de  $\Delta'$ , que são vínculos de segunda classe. Tal expansão, definida em álgebra linear, irá nos fornecer o determinante  $|\Delta'|$  como uma soma de termos constituídos, a menos de um sinal, pelo produto de um elemento da primeira coluna da matriz  $\Delta'$  multiplicado pelo determinante de uma sub-matriz de  $\Delta'$ . Cada sub-matriz é obtida pela eliminação em  $\Delta'$  da linha e coluna que contém o elemento que a multiplica na expansão cofatorial. É importante notar que, devido à forma como foi definida a matriz  $\Delta'$ , as sub-matrizes que aparecem nessa decomposição do determinante  $|\Delta'|$  são também sub-matrizes da matriz  $\Delta$ , ou

seja, o determinante  $|\Delta'|$  é escrito em termos dos elementos da primeira coluna de  $\Delta'$  multiplicados pelos determinantes de sub-matrizes da matriz  $\Delta$ .

Será sempre possível construir a matriz  $\Delta'$  de forma que os determinantes dessas sub-matrizes presentes na expansão cofatorial não sejam todos nulos. Isso deve-se ao fato de que, se  $\Delta$  tem posto  $S'$ , será sempre possível encontrar uma submatriz  $S' \times S'$  de  $\Delta$  cujo determinante não se anule e portanto podemos escolher os vínculos de segunda classe presentes em  $\Delta'$  de modo que os coeficientes dos elementos de sua primeira coluna na expansão cofatorial de seu determinante não sejam todos nulos.

A consequência mais importante dessa decomposição, para o teorema que queremos demonstrar, é que podemos escrever  $|\Delta'|$  como uma combinação linear dos vínculos de segunda classe.

Calculando-se o parêntese de Poisson, obtêm-se então dois grandes grupos de termos: um envolve termos compostos por parênteses de Poisson entre  $\Theta_a$  e os  $\xi's$  multiplicando os determinantes de sub-matrizes de  $\Delta$ . Esse grupo pode ser reagrupado sob a forma do primeiro determinante à direita da igualdade na equação (2.94). O outro grupo envolve termos compostos pelos  $\xi's$  multiplicando parênteses de Poisson entre  $\Theta_a$  e os determinantes de sub-matrizes de  $\Delta$ . Aplicando aos determinantes nesses termos o mesmo procedimento acima, e fazendo-o sucessivamente a cada nova seqüência de termos que surge, obtemos os outros determinantes na equação (2.94).

Podemos ver agora que todos os determinantes do lado direito da igualdade (2.94) são fracamente nulos. Se  $\Theta_a$  for um vínculo de primeira classe, a primeira coluna do primeiro determinate será fracamente nulo e portanto todo determinante será fracamente nulo. Se  $\Theta_a$  for de segunda classe o primeiro determinate é o determinante de uma sub-matriz de  $\Delta$  com dimensões  $(S' + 1) \times (S' + 1)$  e como  $\Delta$  tem posto  $S'$  esse determinante será nulo. Já os outros determinantes à direita da igualdade na equação (2.94) serão fracamente nulos pois a primeira coluna de todos eles é fracamente nula.

Temos portanto que o parêntese de Poisson entre qualquer um dos vínculos e  $|\Delta'|$  se anula fracamente, o que implica no fato de  $|\Delta'|$  ser uma função de primeira classe. Mas

havíamos mostrado que  $|\Delta'|$  pode ser escrito como uma combinação linear dos vínculos de segunda classe. Isso significa que temos uma combinação linear dos vínculos de segunda classe que é de primeira classe, o que contraria nossa hipótese inicial de que tínhamos o maior número possível de vínculos de primeira classe. Conseqüentemente o determinante de  $\Delta$  não pode se anular sobre  $U'$ , fato esse que prova o teorema enunciado anteriormente.

A decorrência imediata desse teorema é que a matriz  $\Delta$  definida na equação (2.91) tem a propriedade de ser sempre inversível quando tivermos o maior número possível de vínculos de primeira classe, propriedade essa que será usada na próxima seção.

Além disso, o número de vínculos de segunda classe será necessariamente par. Isso é conseqüência do fato de  $\Delta$  ser antissimétrica, devido à antissimetria do parêntese de Poisson, e do fato conhecido em álgebra linear de uma matriz antissimétrica com um número ímpar de linhas e colunas ter determinante identicamente nulo, o que iria contra o teorema que acabamos de demonstrar.

## 2.5 Parênteses de Dirac e o problema da quantização

Voltemos agora à situação que tínhamos após calcularmos as condições de consistência. Havíamos chamado a atenção para o fato de que apenas  $A$  combinações lineares das velocidades  $\dot{q}_\alpha$  não resolvidas permaneciam arbitrárias no Hamiltoniano primário e que essas combinações lineares apareciam no formalismo como os coeficientes  $v_a$  multiplicando os vínculos primários de primeira classe  $\Phi'_a$  na expressão (2.72).

As combinações lineares de velocidades  $\dot{q}_\alpha$  que foram determinadas em termos das variáveis canônicas pelas condições de consistência foram incorporadas à função  $H'$  de primeira classe presente na expressão (2.72). Iremos agora escrever explicitamente essas combinações lineares, que são determinadas pelo sistema (2.63) gerado pelas condições de consistência. Para tanto, usaremos o fato de que qualquer conjunto de  $T$  combinações linearmente independentes dos vínculos irá constituir um novo conjunto de vínculos que

gera a mesma hipersuperfície de vínculos  $U'$ . Portanto a troca dos vínculos originais por esses novos vínculos não mudará em nada o formalismo desenvolvido. Desse modo, substituiremos o conjunto original de vínculos pelo conjunto de vínculos de primeira e segunda classes que podem ser obtidos a partir dos primeiros. Podemos então reescrever o Hamiltoniano primário definido na equação (2.11) fazendo a substituição

$$\dot{q}_\alpha \Phi_\alpha = v_a \Phi'_a + u_b \Phi''_b, \quad (2.95)$$

onde os  $v_a$  e  $u_b$  são combinações linearmente independentes das velocidades  $\dot{q}_\alpha$  e  $\Phi'_a$  e  $\Phi''_b$  são os vínculos primários de primeira e segunda classes respectivamente (conforme a notação da seção anterior). O Hamiltoniano primário passa a ser então:

$$H_P = H_c + v_a \Phi'_a + u_b \Phi''_b \quad (2.96)$$

Com esse novo conjunto de vínculos o sistema (2.63) gerado pelas condições de consistência passa a ser:

$$\begin{aligned} \{\Phi'_a, H_c\} &\approx 0 \\ \{\chi'_s, H_c\} &\approx 0 \\ \{\Phi''_b, H_c\} + u_d \{\Phi''_b, \Phi''_d\} &\approx 0 \\ \{\chi''_g, H_c\} + u_d \{\chi''_g, \Phi''_d\} &\approx 0 \end{aligned} \quad (2.97)$$

Devido ao fato dos coeficientes  $v_a$  multiplicarem vínculos de primeira classe eles não aparecem nas equações acima e portanto continuam inteiramente arbitrários. Além disso, o sistema de equações acima é completamente equivalente ao sistema dado pela equação (2.63) e portanto não pode gerar nenhum novo vínculo, conseqüentemente as duas primeiras equações acima descrevem uma propriedade do Hamiltoniano canônico e dos vínculos de primeira classe sem impor nenhuma nova condição sobre eles.

Os coeficientes  $u_b$  que multiplicam os vínculos primários de segunda classe serão determinados, em termos das variáveis canônicas, pelas duas últimas equações do sistema acima. Para tanto devemos escrever a matriz  $\Delta$  explicitamente em termos dos

vínculos primários e secundários de segunda classe:

$$\Delta = \left\| \begin{array}{cc} \{\Phi''_b, \Phi''_d\} & \{\Phi''_b, \chi''_D\} \\ \{\chi''_B, \Phi''_d\} & \{\chi''_B, \chi''_D\} \end{array} \right\| \quad (2.98)$$

Estamos supondo que já temos o maior número possível de vínculos como vínculos de primeira classe de forma que, como demonstrado na seção anterior, a matriz  $\Delta$  será inversível. A forma como ela foi escrita acima é exatamente a mesma definida na equação (2.91), a única mudança foi escrever explicitamente quais são os vínculos primários e quais são os secundários. Os índices minúsculos ( $b$  e  $d$ ) indexam todos os  $(R - A)$  vínculos primários de segunda classe e os índices maiúsculos ( $B$  e  $D$ ) indexam todos os  $(M - M')$  vínculos secundários de segunda classe. A matriz inversa de  $\Delta$ , que chamaremos de  $C$ , pode ser escrita como

$$C = \left\| \begin{array}{cc} C_{bd} & C_{bD} \\ C_{Bd} & C_{BD} \end{array} \right\| \quad (2.99)$$

onde:

$$\begin{aligned} C_{bd} \{\Phi''_d, \Phi''_e\} + C_{bD} \{\chi''_D, \Phi''_e\} &\approx \delta_{be} \\ C_{bd} \{\Phi''_d, \chi''_E\} + C_{bD} \{\chi''_D, \chi''_E\} &\approx 0 \\ C_{Bd} \{\Phi''_d, \Phi''_e\} + C_{BD} \{\chi''_D, \Phi''_e\} &\approx 0 \\ C_{Bd} \{\Phi''_d, \chi''_E\} + C_{BD} \{\chi''_D, \chi''_E\} &\approx \delta_{BE} \end{aligned} \quad (2.100)$$

Usando a primeira das equações acima nas duas últimas equações (2.97) obtemos a forma explícita dos coeficientes  $u$ :

$$u_d \approx -C_{db} \{\Phi''_b, H_c\} - C_{dB} \{\chi''_B, H_c\} \quad (2.101)$$

Por outro lado, a substituição da terceira das equações (2.100) nas duas últimas equações (2.97) nos fornece:

$$C_{Db} \{\Phi''_b, H_c\} + C_{DB} \{\chi''_B, H_c\} \approx 0 \quad (2.102)$$

Substituindo a expressão (2.101) para os coeficientes  $u_d$  na expressão (2.96) para o Hamiltoniano primário, podemos escrever a equação de movimento (2.53) como:

$$\frac{dF}{dt} \approx \{F, H_P\} = \{F, H_c + v_a \Phi'_a + u_d \Phi''_d\} \quad (2.103)$$

$$\frac{dF}{dt} \approx \{F, H_c\} + v_a \{F, \Phi'_a\} + u_d \{F, \Phi''_d\} \quad (2.104)$$

$$\frac{dF}{dt} \approx \{F, H_c\} + v_a \{F, \Phi'_a\} - \{F, \Phi''_d\} C_{db} \{\Phi''_b, H_c\} - \{F, \Phi''_d\} C_{dB} \{\chi''_B, H_c\} \quad (2.105)$$

Na passagem da equação (2.103) para a equação (2.104) não consideramos o termo  $\{F, u_d\} \Phi''_d$  pois ele é fracamente nulo. A expressão acima é assimétrica nos vínculos primários e secundários de segunda classe, contudo podemos usar a equação (2.102) para escrever

$$- \{F, \chi''_D\} C_{Db} \{\Phi''_b, H_c\} - \{F, \chi''_D\} C_{DB} \{\chi''_B, H_c\} \approx 0 \quad (2.106)$$

e portanto, somando esse termo à direita da equação de movimento (2.105), podemos reescrevê-la como

$$\frac{dF}{dt} \approx \{F, H_c\} + v_a \{F, \Phi'_a\} - \{F, \xi_s\} C_{sg} \{\xi_g, H_c\}, \quad (2.107)$$

onde usamos os índices  $s$  e  $g$  para indexar todos os vínculos de segunda classe.

Podemos definir agora o *Hamiltoniano total*  $H_T$  como sendo:

$$H_T = H_c + v_a \Phi'_a \quad (2.108)$$

Usando então o fato de os vínculos  $\Phi'_a$  serem de primeira classe, tendo portanto parênteses de Poisson fracamente nulos com todos os outros vínculos, podemos escrever:

$$\frac{dF}{dt} \approx \{F, H_T\} - \{F, \xi_s\} C_{sg} \{\xi_g, H_T\} \quad (2.109)$$

É importante frisar a diferença entre os Hamiltonianos primário e total. Enquanto o primeiro contem **todos os vínculos primários**, inclusive os de segunda classe, multiplicados pelos coeficientes dados na equação (2.101), o segundo contem **apenas os vínculos primários de primeira classe** multiplicados por coeficientes arbitrários.



Definimos agora o *parêntese de Dirac* entre duas funções  $F$  e  $W$  como sendo

$$\{F, W\}_D = \{F, W\} - \{F, \xi_s\} C_{sg} \{\xi_g, W\} \quad (2.110)$$

e desse modo a equação de movimento para uma função  $F$  pode ser escrita como:

$$\frac{dF}{dt} \approx \{F, H_T\}_D \quad (2.111)$$

O parêntese de Dirac tem todas as propriedades usuais do parêntese de Poisson, inclusive a identidade de Jacobi [9], contudo o primeiro possui uma propriedade essencial: o parêntese de Dirac de qualquer função  $F$  com um dos vínculos de segunda classe é identicamente nulo. Essa propriedade pode ser verificada por substituição direta ao usarmos o fato de que  $C$  é a inversa da matriz  $\Delta$  definida na equação (2.91):

$$\{F, \xi_t\}_D = \{F, \xi_t\} - \{F, \xi_s\} C_{sg} \{\xi_g, \xi_t\} \quad (2.112)$$

$$\{F, \xi_t\}_D = \{F, \xi_t\} - \{F, \xi_s\} \delta_{st} = 0 \quad (2.113)$$

Isso significa que não faz diferença se o fato de os vínculos secundários serem nulos for usado antes ou depois de calcularmos os parênteses de Dirac. Assim, enquanto trabalharmos exclusivamente com o parêntese de Dirac, os vínculos secundários podem ser tratados como igualdades fortes:

$$\xi_t \equiv 0 \quad (2.114)$$

Esse fato nos permite eliminar completamente da teoria tantas variáveis canônicas quanto for o número de vínculos de segunda classe. Para isso, usamos o fato de que sempre podemos encontrar um conjunto de variáveis canônicas tal que os vínculos de segunda classe possam ser resolvidos com respeito a um conjunto de  $S/2$  pares de variáveis canonicamente conjugadas  $q_k$  e  $p_k$  na forma

$$q_k - Q_k(q^*, p^*) \approx 0; p_k - P_k(q^*, p^*) \approx 0, \quad (2.115)$$

onde  $(q^*, p^*)$  indica as  $2N - S$  variáveis canônicas restantes [22]. Quando usamos o parêntese de Dirac e tratamos as igualdades acima como igualdades fortes os pares de variáveis canônicas  $q_k$  e  $p_k$  podem ser eliminados de todas as equações.

No final da segunda seção deste capítulo já havíamos chamado a atenção para o fato de que a existência de relações entre as velocidades não resolvidas  $\dot{q}_\alpha$  e as variáveis canônicas iria indicar a existência de graus de liberdade espúrios na teoria. Nas duas seções anteriores a esta mostramos que as condições de consistência do formalismo podiam determinar combinações lineares dos  $\dot{q}_\alpha$  em termos das variáveis canônicas e que o número dessas combinações era igual ao número de vínculos primários de segunda classe. O fato de cada um desses vínculos primários de segunda classe permitir eliminar uma variável canônica da teoria comprova a afirmação feita, no final da segunda seção, a respeito da eliminação de graus de liberdade. Contudo devemos lembrar que **todos** os vínculos de segunda classe permitirão eliminar variáveis canônicas, inclusive os vínculos secundários de segunda classe.

Um caso interessante ocorre quando os  $S$  vínculos de segunda classe têm a forma

$$q_k \approx 0; p_k \approx 0 \quad (2.116)$$

com as variáveis  $q_k$  e  $p_k$  sendo pares de variáveis canonicamente conjugadas e o índice  $k$  assumindo  $S/2$  valores. Nesse caso, a matriz  $\Delta$  dos vínculos de segunda classe se torna a matriz identidade  $I$  de dimensões  $S \times S$ .

Ao usarmos o parêntese de Dirac definido na equação (2.110) e fazermos dos vínculos acima igualdades fortes, eliminando as variáveis  $q_k$  e  $p_k$  da teoria, obtemos

$$\{F, W\}_D = \{F, W\} - \{F, q_k\} \delta_{kj} \{p_j, W\} - \{F, p_k\} \delta_{kj} \{q_j, W\} \quad (2.117)$$

$$\{F, W\}_D = \{F, W\} + \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial W}{\partial q_k} - \frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial W}{\partial p_k} \quad (2.118)$$

$$\{F, W\}_D = \frac{\partial F}{\partial q_i^*} \frac{\partial W}{\partial p_i^*} - \frac{\partial F}{\partial p_i^*} \frac{\partial W}{\partial q_i^*}, \quad (2.119)$$

onde os índices  $k$  e  $j$  assumem  $S/2$  valores, indexando as variáveis correspondentes aos vínculos de segunda classe dados pela equação (2.116), e o índice  $i$  assume  $N - S/2$

valores, indexando as  $2N - S$  variáveis canônicas  $(q^*, p^*)$  que restam após a eliminação das variáveis  $q_k$  e  $p_k$ .

A equação (2.119) nos mostra que, quando os vínculos de segunda classe de uma teoria têm a forma dada na equação (2.116), o parêntese de Dirac definido na equação (2.110) se reduz ao parêntese de Poisson usual nas variáveis canônicas restantes  $(q^*, p^*)$ .

Para qualquer teoria com vínculos de segunda classe é sempre possível encontrar um conjunto de variáveis canônicas que, ao menos localmente, permite escrever os vínculos de segunda classe na forma dada pela equação (2.116). A demonstração dessa propriedade pode ser encontrada na página 82 da referência [16] ou no apêndice B da referência [22]. Entretanto tal procedimento é em geral difícil e nem sempre é interessante fazê-lo pois pode esconder as simetrias do sistema físico.

Temos então o seguinte panorama para a dinâmica de um sistema singular: as equações de movimento (2.111) são expressas usando o parêntese de Dirac e o Hamiltoniano total (2.108), que contem um número de coeficientes arbitrários igual ao número de vínculos primários de primeira classe. Além disso, os vínculos de segunda classe podem ser tratados como igualdades fortes e permitem eliminar  $S/2$  pares de variáveis canônicas, reduzindo a dimensão do espaço de fase das  $2N$  dimensões iniciais para  $2N - S$ . As equações de movimento para as  $2N - S$  variáveis canônicas  $(q^*, p^*)$  restantes serão:

$$\dot{q}_i^* \approx \{q_i^*, H_T\}_D \quad (2.120)$$

$$\dot{p}_i^* \approx \{p_i^*, H_T\}_D \quad (2.121)$$

Os  $A'$  vínculos de primeira classe diminuem ainda mais a dimensão do espaço de fase ao imporem restrições à escolha das condições iniciais necessárias para a resolução das equações de movimento acima. Escolhendo os valores iniciais das variáveis canônicas  $q^*$  e  $p^*$  de forma a satisfazer os vínculos  $\theta_t$  de primeira classe no instante de tempo  $t = 0$  esses vínculos serão satisfeitos durante toda a evolução temporal do sistema (pois todas as condições de consistência já foram satisfeitas) e o sistema estará restrito

à hipersuperfície por eles definida. Desse modo, a dinâmica do sistema se desenvolve sobre uma hipersuperfície  $2N - T$  dimensional, imersa num espaço  $2N - S$  dimensional, onde  $T = S + A'$  é número total de vínculos.

É interessante notar que, apesar de haver uma simetria no tratamento dos vínculos primários e secundários de segunda classe (todos entram na definição do parêntese de Dirac), o mesmo não ocorre com os vínculos primários e secundários de primeira classe. Apenas os vínculos primários de primeira classe entram na definição (2.108) do Hamiltoniano total. Por motivos relacionados com propriedades das transformações de gauge, que analisaremos na próxima seção, Dirac [11] propôs que os vínculos secundários de primeira classe  $\chi'_c$  fossem tratados da mesma forma que os vínculos primários de primeira classe  $\Phi'_a$  nas equações de movimento e que portanto deveríamos trabalhar com um novo Hamiltoniano, que chamaremos de *Hamiltoniano estendido*  $H_E$ , definido como

$$H_E = H_c + v_a \Phi'_a + w_c \chi'_c, \quad (2.122)$$

onde tanto  $v_a$  quanto  $w_c$  são coeficientes arbitrários. Teríamos então tantos coeficientes arbitrários nas equações de movimento quantos forem os vínculos de primeira classe.

Para encerrar esta seção é interessante apresentar o contexto em que Dirac apresentou a definição (2.110) do parêntese que hoje leva seu nome, que foi o da quantização de sistemas singulares. A quantização canônica é feita utilizando-se o Princípio de Correspondência: as variáveis canônicas são substituídas por operadores cujas relações de comutação são obtidas substituindo-se os parênteses de Poisson por comutadores segundo a seguinte regra

$$\{A, B\} \rightarrow \frac{[\hat{A}, \hat{B}]}{i\hbar}, \quad (2.123)$$

onde  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são operadores obtidos a partir das funções clássicas pela substituição das variáveis canônicas por seus respectivos operadores.

Dirac [11], partindo do Hamiltoniano primário (2.72), considerou então a dinâmica

do sistema dada por uma equação tipo Schrödinger

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = \hat{H}' \psi$$

obtida durante o processo de quantização, onde  $\psi$  é o vetor de estado do sistema e  $\hat{H}'$  é o operador correspondente ao Hamiltoniano  $H'$  definido na equação (2.70). Os vínculos, por sua vez, impõem condições suplementares sobre o vetor de estado:

$$\hat{\Theta}_a \psi = 0 \tag{2.124}$$

Entretanto, para que essas condições sejam quanticamente autoconsistentes deveremos ter

$$\left[ \hat{\Theta}_a, \hat{\Theta}_b \right] \psi = 0, \tag{2.125}$$

o que implica que, para não ser necessário impor novas condições sobre os vetores de estado, devemos ter

$$\left[ \hat{\Theta}_a, \hat{\Theta}_b \right] = C_{abc} \hat{\Theta}_c, \tag{2.126}$$

de modo que as condições dadas pela equação (2.125) sejam apenas conseqüências das condições (2.124). No caso dos vínculos de primeira classe  $\theta_t$  essa condição é facilmente satisfeita pois o parêntese de Poisson entre dois deles é sempre fracamente nulo, sendo então fortemente igual a uma combinação linear dos vínculos. Conseqüentemente, o Princípio de Correspondência sempre nos fornecerá comutadores com a propriedade exigida na equação (2.126).

O único problema será o de ordenamento de operadores pois, ao definir os operadores  $\hat{\theta}_t$  a partir dos vínculos de primeira classe, devemos fazê-lo de forma a obter a expressão (2.126) para o comutador entre dois deles tendo sempre os coeficientes  $C$  à esquerda dos  $\hat{\Theta}_c$ .

Já para os vínculos de segunda classe  $\xi_s$  não será possível obter comutadores com a propriedade (2.126) pois o parêntese de Poisson entre dois deles não é fracamente nulo e portanto o Princípio de Correspondência não permite obter comutadores com a propriedade desejada, gerando uma contradição.

Para exemplificar, considere o par de vínculos de segunda classe  $q_1 \approx 0$  e  $p_1 \approx 0$ . Para esses vínculos as condições suplementares (2.124) serão:

$$\hat{q}_1 \psi = 0; \hat{p}_1 \psi = 0 \quad (2.127)$$

A condição de consistência (2.126) será:

$$\left[ \hat{q}_1, \hat{p}_1 \right] = 0 \quad (2.128)$$

Mas classicamente o parêntese de Poisson é  $\{q_1, p_1\} = 1$  e o Princípio de Correspondência nos fornece

$$\left[ \hat{q}_1, \hat{p}_1 \right] = i\hbar \quad (2.129)$$

em flagrante contradição com o resultado (2.128).

Foi para contornar esse problema que Dirac introduziu o parêntese definido na equação (2.110). A quantização será feita usando-se o Princípio de Correspondência entre os parênteses de Dirac e os comutadores quânticos e não mais entre os parênteses de Poisson e os comutadores, ou seja:

$$\{A, B\}_D \rightarrow \frac{\left[ \hat{A}, \hat{B} \right]}{i\hbar} \quad (2.130)$$

Desse modo, os vínculos de segunda classe, que passaram a ser igualdades fortes, tornam-se identidades operatoriais na quantização e não mais condições suplementares sobre os vetores de estado. Todos os vínculos restantes são de primeira classe e portanto não teremos problemas com as condições de consistência quânticas (2.126).

Esse processo de quantização para sistemas singulares ficou conhecido como *quantização de Dirac* e foi com o objetivo de torná-lo possível que o parêntese de Poisson foi modificado, assumindo a forma que é hoje conhecida como parêntese de Dirac [9].

## 2.6 Transformações de gauge no formalismo Hamiltoniano

No primeiro capítulo deste trabalho havíamos chamado a atenção para o fato de que sistemas invariantes sob transformações de gauge locais são necessariamente sistemas singulares. Nesta seção examinaremos com maiores detalhes como as transformações de gauge surgem no contexto do formalismo Hamiltoniano para sistemas singulares seguindo o procedimento adotado originalmente por Dirac [11]. Para tanto, iremos partir da equação de movimento (2.67) para sistemas singulares

$$\frac{dF}{dt} \approx \{F, H_P\}, \quad (2.131)$$

onde o Hamiltoniano primário  $H_P$  é expresso pela equação (2.72) em termos do Hamiltoniano de primeira classe  $H'$  definido na equação (2.70), dos vínculos primários de primeira classe  $\Phi'_\alpha$  e de coeficientes  $v_\alpha$  arbitrários de forma que a equação de movimento acima se torna:

$$\frac{dF}{dt} \approx \{F, H' + v_\alpha \Phi'_\alpha\} \quad (2.132)$$

Se especificarmos as condições iniciais  $q_0$  e  $p_0$  em  $t = 0$  das variáveis canônicas do sistema físico de modo que todos os vínculos sejam satisfeitos no instante inicial, eles serão automaticamente satisfeitos durante toda a evolução temporal do sistema pois a equação de movimento na forma dada por (2.132) foi obtida exatamente a partir das condições de consistência para os vínculos. A condição inicial  $F_0$  para uma função  $F$  das variáveis canônicas será dada então por  $F_0 = F(q_0, p_0)$  de modo que, após um intervalo de tempo  $\delta t$ , o valor de  $F$  será:

$$F(\delta t) = F_0 + \dot{F} \delta t \approx F_0 + \{F, H_P\} \delta t \quad (2.133)$$

$$F(\delta t) \approx F_0 + (\{F, H'\} + v_\alpha \{F, \Phi'_\alpha\}) \delta t \quad (2.134)$$

Mas os coeficientes  $v_\alpha$  são funções totalmente arbitrárias, de forma que poderíamos usar um outro valor qualquer  $v'_\alpha$  para os coeficientes arbitrários, o que resultaria num

novo valor para  $F(\delta t)$ :

$$F'(\delta t) \approx F_0 + (\{F, H'\} + v'_\alpha \{F, \Phi'_\alpha\}) \delta t \quad (2.135)$$

A diferença entre os dois valores será:

$$\Delta F(\delta t) = F(\delta t) - F'(\delta t) \approx \delta t (v_\alpha - v'_\alpha) \{F, \Phi'_\alpha\} \quad (2.136)$$

$$\Delta F(\delta t) \approx \varepsilon_\alpha \{F, \Phi'_\alpha\}; \varepsilon_\alpha = \delta t (v_\alpha - v'_\alpha) \quad (2.137)$$

Na expressão acima  $\varepsilon_\alpha$  é um valor infinitesimal arbitrário pois  $\delta t$  é infinitesimal e tanto  $v_\alpha$  quanto  $v'_\alpha$  são arbitrários. Desse modo, a expressão (2.137) implica que cada um dos vínculos  $\Phi'_\alpha$  é o gerador de uma transformação canônica infinitesimal, ou transformação infinitesimal de contato, conectando duas configurações do sistema físico que evoluem a partir das mesmas condições iniciais.

Temos portanto uma situação na qual, partindo de um mesmo estado inicial definido pelos valores em  $t = 0$  das variáveis canônicas, podemos chegar, após um intervalo  $\delta t$ , a diferentes configurações para as variáveis canônicas do sistema (com diferentes valores para as funções  $F(q, p)$ ) dependendo das escolhas feitas para os coeficientes arbitrários presentes no Hamiltoniano primário, sendo que essas configurações são conectadas por transformações canônicas geradas pelos vínculos  $\Phi'_\alpha$ .

O argumento usado por Dirac [11] é que não podemos ser capazes de distinguir as diferentes configurações obtidas a partir das mesmas condições iniciais já que os diferentes valores para o Hamiltoniano primário, correspondendo a diferentes escolhas dos parâmetros arbitrários  $v_\alpha$ , não podem ser fisicamente distinguíveis. Conseqüentemente, **todas** as configurações das variáveis canônicas que evoluem a partir das mesmas condições iniciais devem obrigatoriamente corresponder ao mesmo estado físico.

A transformação canônica infinitesimal (2.137) gerada pelos  $\Phi'_\alpha$  conecta duas configurações das variáveis canônicas (com seus correspondentes valores para as funções  $F(q, p)$ ) que evoluem a partir das mesmas condições iniciais e que, como foi dito acima,



representam o mesmo estado físico do sistema. Portanto a transformação (2.137) é uma transformação de gauge e os vínculos  $\Phi'_\alpha$  são seus geradores. Como os  $\Phi'_\alpha$  são os vínculos primários de primeira classe, temos o seguinte (e importante) resultado:

Os vínculos primários de primeira classe  $\Phi'_\alpha$  são geradores de transformações de gauge.

Se aplicarmos sucessivamente duas transformações de gauge do tipo (2.137) teremos, após a primeira transformação,

$$F' \approx F + \varepsilon_\alpha \{F, \Phi'_\alpha\}, \quad (2.138)$$

e após a segunda:

$$F'' \approx F + \varepsilon_\alpha \{F, \Phi'_\alpha\} + \gamma_\beta \{F + \varepsilon_\alpha \{F, \Phi'_\alpha\}, \Phi'_\beta\} \quad (2.139)$$

Aplicando agora as mesmas transformações na ordem inversa teremos:

$$F''' \approx F + \gamma_\beta \{F, \Phi'_\beta\} + \varepsilon_\alpha \{F + \gamma_\beta \{F, \Phi'_\beta\}, \Phi'_\alpha\} \quad (2.140)$$

Tomando a diferença entre os resultados (2.139) e (2.140) obtemos:

$$\Delta F \approx -\varepsilon_\alpha \gamma_\beta \left( \{ \{ \Phi'_\alpha, F \}, \Phi'_\beta \} + \{ \{ F, \Phi'_\beta \}, \Phi'_\alpha \} \right) \quad (2.141)$$

Usando a identidade de Jacobi, a expressão acima se reduz a:

$$\Delta F \approx \varepsilon_\alpha \gamma_\beta \left\{ F, \{ \Phi'_\alpha, \Phi'_\beta \} \right\} \quad (2.142)$$

Essa variação em  $F$  deve corresponder a uma mudança nas variáveis canônicas que não altera o estado físico do sistema já que as duas transformações de gauge que usamos têm essa propriedade. Desse modo, a equação (2.142) permite concluir que o parêntese de Poisson  $\{ \Phi'_\alpha, \Phi'_\beta \}$  entre dois vínculos primários de primeira classe é um gerador de transformações de gauge.

O parêntese de Poisson entre dois vínculos primários de primeira classe é, pela própria definição de funções de primeira classe, igual a uma combinação linear dos

vínculos mas além disso, como foi mostrado na seção 2.4, o parêntese de Poisson entre duas funções de primeira classe é também uma função de primeira classe. Como uma combinação linear de vínculos é também um vínculo temos como conseqüência que o gerador de transformação de gauge dado por  $\{\Phi'_\alpha, \Phi'_\beta\}$  é um vínculo de primeira classe. Mas o vínculo de primeira classe resultante do parêntese de Poisson  $\{\Phi'_\alpha, \Phi'_\beta\}$  não é necessariamente um vínculo primário e como conseqüência a equação (2.142) nos indica que podem existir vínculos secundários de primeira classe que geram transformações de gauge. Tais vínculos serão aqueles obtidos por meio do cálculo explícito dos parênteses de Poisson  $\{\Phi'_\alpha, \Phi'_\beta\}$  entre todos os vínculos primários de primeira classe.

Por outro lado, podemos ainda obter novos vínculos secundários de primeira classe que gerem transformações de gauge. Para tanto, consideremos a transformação gerada por **todos** os vínculos de primeira classe que geram transformações de gauge, tanto os vínculos primários quanto os vínculos secundários obtidos usando  $\{\Phi'_\alpha, \Phi'_\beta\}$ . Ela será dada por

$$F' \approx F + \gamma_\alpha \{F, \Psi_\alpha\}, \quad (2.143)$$

onde  $\Psi_\alpha$  indica não apenas os vínculos primários de primeira classe mas todos os vínculos de primeira classe, obtidos até aqui, que gerem transformações de gauge. Aplicando essa transformação ao  $F(\delta t)$  dado pela equação (2.134) obtemos:

$$F''(\delta t) \approx F_0 + (\{F, H'\} + v_\beta \{F, \Psi_\beta\}) \delta t + \gamma_\alpha \{[F_0 + (\{F, H'\} + v_\beta \{F, \Psi_\beta\}) \delta t], \Psi_\alpha\} \quad (2.144)$$

$$F''(\delta t) \approx F_0 + \{F, H'\} \delta t + v_\beta \delta t \{F, \Psi_\beta\} + \gamma_\alpha \{F_0, \Psi_\alpha\} + \gamma_\alpha \delta t \{\{F, H'\}, \Psi_\alpha\} + \gamma_\alpha v_\beta \delta t \{\{F, \Psi_\beta\}, \Psi_\alpha\} \quad (2.145)$$

Por outro lado, fazendo primeiro a transformação de gauge (2.143) e depois a evolução temporal, teremos:

$$F'''(\delta t) \approx F_0 + \gamma_\alpha \{F_0, \Psi_\alpha\} + (\{F + \gamma_\alpha \{F, \Psi_\alpha\}, H'\} + v_\beta \{F + \gamma_\alpha \{F, \Psi_\alpha\}, \Psi_\beta\}) \delta t \quad (2.146)$$

$$F'''(\delta t) \approx F_0 + \gamma_\alpha \{F_0, \Psi_\alpha\} + \{F, H'\} \delta t + \gamma_\alpha \delta t \{\{F, \Psi_\alpha\}, H'\} + v_\beta \delta t \{F, \Psi_\beta\} + \gamma_\alpha v_\beta \delta t \{\{F, \Psi_\alpha\}, \Psi_\beta\} \quad (2.147)$$

Subtraindo a equação (2.147) de (2.145) obtemos:

$$\Delta F(\delta t) \approx \gamma_\alpha \delta t (\{\{F, H'\}, \Psi_\alpha\} + \{\{\Psi_\alpha, F\}, H'\}) + \gamma_\alpha v_\beta \delta t (\{\{F, \Psi_\beta\}, \Psi_\alpha\} + \{\{\Psi_\alpha, F\}, \Psi_\beta\}) \quad (2.148)$$

Usando a identidade de Jacobi, a última expressão se reduz a:

$$\Delta F(\delta t) \approx \gamma_\alpha \delta t \{F, \{H', \Psi_\alpha\}\} + \gamma_\alpha v_\beta \delta t \{F, \{\Psi_\beta, \Psi_\alpha\}\} \quad (2.149)$$

Novamente devemos ter uma variação em  $F$  causada por uma mudança nas variáveis canônicas que não altera o estado físico do sistema, ou seja, uma nova transformação de gauge. No segundo termo à direita da igualdade temos os parênteses de Poisson  $\{\Psi_\beta, \Psi_\alpha\}$  que, como vimos anteriormente, são geradores de transformações de gauge e portanto, para que a transformação (2.149) seja uma transformação de gauge, será necessário que o parêntese de Poisson  $\{H', \Psi_\alpha\}$  também seja um gerador de tais transformações. Como tanto  $H'$  quanto  $\Psi_\alpha$  são funções de primeira classe o parêntese de Poisson  $\{H', \Psi_\alpha\}$  será uma combinação linear de vínculos de primeira classe e portanto será um vínculo de primeira classe que não necessariamente é um dos vínculos de primeira classe  $\Psi_\alpha$  que já sabíamos gerarem transformações de gauge. Dessa forma, os parênteses de Poisson  $\{H', \Psi_\alpha\}$  podem nos fornecer novos vínculos secundários de primeira classe que gerem transformações de gauge e que portanto devem ser incluídos no conjunto  $\Psi_\alpha$ . Devemos repetir todo o processo com os novos geradores de transformações de gauge até não obtermos mais nenhum novo vínculo secundário que gere uma nova transformação de gauge.

Todos os geradores de transformações de gauge obtidos até aqui têm a importante propriedade de manter o sistema na hipersuperfície dos vínculos pois, dado um vínculo  $\Theta_a$  qualquer, a variação

$$\delta \Theta_a \approx v_\alpha \{\Theta_a, \Psi_\alpha\} \quad (2.150)$$

será igual a uma combinação linear dos vínculos já que todos os geradores  $\Psi_\alpha$  são vínculos de primeira classe.

A questão que se coloca é quantos dos vínculos secundários de primeira classe seriam geradores de transformações de gauge. Na incapacidade de encontrar exemplos de vínculos secundários de primeira classe que não fossem geradores de transformações de gauge, Dirac [11] formulou uma conjectura que é atualmente conhecida como *conjectura de Dirac*:

Todos os vínculos secundários de primeira classe devem ser incluídos entre os geradores de transformações de gauge.

Assumindo a validade dessa conjectura, Dirac propôs que a evolução temporal do sistema deveria permitir todas as variações possíveis na configuração das variáveis canônicas que não alterem o estado físico do sistema. Para tanto, os vínculos secundários de primeira classe também devem ser acrescentados ao Hamiltoniano total, definido na equação (2.108), pois eles geram transformações canônicas que não alteram o estado físico do sistema. Conseqüentemente, será o Hamiltoniano estendido definido na equação (2.122), e que contém todos os vínculos de primeira classe multiplicados por coeficientes arbitrários, que fornecerá a mais geral evolução temporal fisicamente permitida. Portanto, do ponto de vista do formalismo Hamiltoniano, não haveria por que distinguir entre os vínculos primários e secundários e sim entre os vínculos de primeira e segunda classes.

A conjectura de Dirac têm sido tema de muito debate na literatura [23, 24, 25, 26, 27, 28, 29] e não nos parece que se esteja próximo de um consenso a respeito de sua validade ou não. Entretanto, não abordaremos esse assunto neste trabalho. Devemos apenas chamar a atenção para o fato de que, para todas as principais teorias físicas já estudadas, a conjectura de Dirac tem se mostrado válida: é sempre necessário incluir todos os vínculos secundários de primeira classe entre os geradores de transformações de gauge de forma a obter a transformação de gauge correta. Os questionamentos levantados

contra essa conjectura vêm de modelos *artificiais* no sentido de não corresponderem a nenhum sistema físico conhecido.

## 2.7 Construção do gerador de transformações de gauge

O gerador  $G$  das transformações de gauge de uma teoria será formado pela combinação linear dos vínculos de primeira classe  $\Psi_\alpha$ , obtidos pelo processo descrito na seção anterior, que geram transformações de gauge. Explicitamente,  $G$  será dado por

$$G = \varepsilon_\alpha \Psi_\alpha \tag{2.151}$$

onde os coeficientes  $\varepsilon_\alpha$  são funções arbitrárias do tempo. Entretanto, como veremos através de um exemplo na próxima seção, o gerador obtido dessa forma normalmente fornece transformações mais gerais do que as transformações de gauge obtidas no formalismo Lagrangeano, sendo preciso um ajuste **a mão** dos coeficientes  $\varepsilon_\alpha$  de forma a obter uma concordância com o formalismo Lagrangeano.

Uma forma matematicamente elegante de incluir no formalismo esse ajuste dos coeficientes  $\varepsilon_\alpha$  no formalismo têm sido objeto de estudos por parte de diversos autores [28, 30, 31, 32, 33, 42] mas ainda não há um algoritmo adequado bem estabelecido para realizar esse procedimento. Seguiremos aqui o procedimento adotado por Castellani [30] e para tanto consideremos o sistema **antes** de calcularmos as condições de consistência, ou seja, a dinâmica é dada pela equação (2.53) de modo que as equações de movimento para as variáveis canônicas (ver equações (2.51) e (2.52)) são

$$\dot{q}_i \approx \{q_i, H_P\} \tag{2.152}$$

$$\dot{p}_i \approx \{p_i, H_P\}, \tag{2.153}$$

onde  $H_P$  é definido pela equação (2.11). É importante lembrar que a igualdade fraca é relativa apenas aos vínculos primários  $\Phi_\alpha$ , pois estamos considerando que ainda não temos as condições de consistência analisadas.

Usando a notação das seções 2.1 e 2.2, na qual  $\dot{q}_\alpha$  são as  $R$  velocidades não resolvidas em função das variáveis canônicas e  $\dot{q}_a$  são as  $N - R$  velocidades resolvidas, podemos reescrever as equações acima como (ver equações (2.49) e (2.50)):

$$\dot{q}_i \approx \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \dot{q}_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial p_i} \quad (2.154)$$

$$\dot{p}_i \approx -\frac{\partial H_c}{\partial q_i} - \dot{q}_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_i} \quad (2.155)$$

As igualdades fracas devem ser mantidas pois ainda não completamos o cálculo dos parênteses de Poisson, o que só acontece após calcularmos as derivadas nas expressões acima. Além da trajetória  $(q_i, p_i)$  consideremos agora uma trajetória variada  $(q_i + \eta_i, p_i + \xi_i)$ , que difere da primeira apenas por quantidades infinitesimais  $\eta_i$  e  $\xi_i$ , e cujas equações de movimento são:

$$\dot{q}_i + \dot{\eta}_i \approx \frac{\partial H_c}{\partial p_i}(q_i + \eta_i, p_a + \xi_a) + (\dot{q}_\alpha + \dot{\eta}_\alpha) \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial p_i}(q_i + \eta_i, p_i + \xi_i) \quad (2.156)$$

$$\dot{p}_i + \dot{\xi}_i \approx -\frac{\partial H_c}{\partial q_i}(q_i + \eta_i, p_a + \xi_a) - (\dot{q}_\alpha + \dot{\eta}_\alpha) \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_i}(q_i + \eta_i, p_i + \xi_i) \quad (2.157)$$

Expandindo essas equações até primeira ordem nas variações  $\eta_i$  e  $\xi_i$  obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i + \dot{\eta}_i \approx & \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \frac{\partial^2 H_c}{\partial q_j \partial p_i} \eta_j + \frac{\partial^2 H_c}{\partial p_a \partial p_i} \xi_a + \dot{q}_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial p_i} + \dot{\eta}_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial p_i} + \\ & + \dot{q}_\alpha \frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial q_j \partial p_i} \eta_j + \dot{q}_\alpha \frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial p_j \partial p_i} \xi_j \end{aligned} \quad (2.158)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_i + \dot{\xi}_i \approx & -\frac{\partial H_c}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 H_c}{\partial q_j \partial q_i} \eta_j - \frac{\partial^2 H_c}{\partial p_a \partial q_i} \xi_a - \dot{q}_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_i} - \dot{\eta}_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_i} - \\ & - \dot{q}_\alpha \frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial q_j \partial q_i} \eta_j - \dot{q}_\alpha \frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial p_j \partial q_i} \xi_j \end{aligned} \quad (2.159)$$

O uso das equações de movimento (2.154) e (2.155) para a trajetória  $(q_i, p_i)$  na expressão (2.158) resulta em:

$$\frac{\partial^2 H_c}{\partial q_j \partial p_i} \eta_j + \frac{\partial^2 H_c}{\partial p_a \partial p_i} \xi_a + \dot{\eta}_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial p_i} + \dot{q}_\alpha \frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial q_j \partial p_i} \eta_j + \dot{q}_\alpha \frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial p_j \partial p_i} \xi_j - \dot{\eta}_i \approx 0 \quad (2.160)$$

$$\frac{\partial^2 H_P}{\partial q_j \partial p_i} \eta_j + \frac{\partial^2 H_P}{\partial p_a \partial p_i} \xi_a + \dot{\eta}_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial p_i} - \dot{\eta}_i \approx 0 \quad (2.161)$$

Por sua vez a equação (2.159) fornece:

$$-\frac{\partial^2 H_c}{\partial q_j \partial q_i} \eta_j - \frac{\partial^2 H_c}{\partial p_a \partial q_i} \xi_a - \dot{\eta}_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_i} - \dot{q}_\alpha \frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial q_j \partial q_i} \eta_j - \dot{q}_\alpha \frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial p_j \partial q_i} \xi_j - \dot{\xi}_i \approx 0 \quad (2.162)$$

$$-\frac{\partial^2 H_P}{\partial q_j \partial q_i} \eta_j - \frac{\partial^2 H_P}{\partial p_a \partial q_i} \xi_a - \dot{\eta}_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_i} - \dot{\xi}_i \approx 0 \quad (2.163)$$

Para obter as expressões (2.161) e (2.163) usamos o fato de que

$$\frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial p_\beta \partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_\beta \partial p_i} [p_\alpha - g_\alpha(q, p_a)] \equiv 0 \quad (2.164)$$

e

$$\frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial p_\beta \partial q_i} = \frac{\partial}{\partial p_\beta \partial q_i} [p_\alpha - g_\alpha(q, p_a)] \equiv 0, \quad (2.165)$$

devido à própria forma dos vínculos  $\Phi_\alpha$  dada pela equação (1.19).

Escrevendo as expressões (2.161) e (2.163) separadamente para as variáveis canônicas  $q_a$  e  $p_a$  obtemos

$$\frac{\partial^2 H_P}{\partial q_j \partial p_b} \eta_j + \frac{\partial^2 H_P}{\partial p_a \partial p_b} \xi_a - \dot{\eta}_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial p_b} - \dot{\eta}_b \approx 0 \quad (2.166)$$

$$-\frac{\partial^2 H_P}{\partial q_j \partial q_b} \eta_j - \frac{\partial^2 H_P}{\partial p_a \partial q_b} \xi_a + \dot{\eta}_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial q_b} - \dot{\xi}_b \approx 0, \quad (2.167)$$

enquanto que, para  $q_\alpha$  e  $p_\alpha$ , temos

$$\frac{\partial^2 H_P}{\partial q_j \partial p_\beta} \eta_j + \frac{\partial^2 H_P}{\partial p_a \partial p_\beta} \xi_a + \dot{\eta}_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial p_\beta} - \dot{\eta}_\beta = \frac{\partial^2 H_P}{\partial q_j \partial p_\beta} \eta_j + \frac{\partial^2 H_P}{\partial p_a \partial p_\beta} \xi_a \approx 0 \quad (2.168)$$

$$-\frac{\partial^2 H_P}{\partial q_j \partial q_\beta} \eta_j - \frac{\partial^2 H_P}{\partial p_a \partial q_\beta} \xi_a + \dot{\eta}_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial q_\beta} - \dot{\xi}_\beta \approx 0, \quad (2.169)$$

onde usamos novamente a forma específica dos vínculos primários  $\Phi_\alpha$  dada pela equação (1.19). É importante notar que, devido à equação (2.168), não há condições impostas a  $\dot{\eta}_\alpha$ , a derivada temporal da variação  $\eta_\alpha$  das coordenadas  $q_\alpha$  não resolvidas em termos das coordenadas canônicas. Isso é perfeitamente esperado pois, no final da seção 2.2,

já havíamos chamado a atenção para o fato das velocidades  $\dot{q}_\alpha$  serem funções totalmente arbitrárias do tempo se não considerarmos as condições de consistência, o que é exatamente a situação em questão.

Uma outra condição a ser obedecida pelas variações  $\eta_i$  e  $\xi_i$  é fornecida pelos vínculos primários  $\Phi_\alpha \approx 0$  pois devemos ter:

$$p_\alpha + \xi_\alpha \approx g_\alpha(q_i + \eta_i, p_a + \xi_a) \quad (2.170)$$

Expandido em primeira ordem nos diferenciais obtemos:

$$p_\alpha + \xi_\alpha \approx g_\alpha + \frac{\partial g_\alpha}{\partial q_i} \eta_i + \frac{\partial g_\alpha}{\partial p_a} \xi_a \quad (2.171)$$

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial q_i} \eta_i + \frac{\partial g_\alpha}{\partial p_a} \xi_a - \xi_\alpha \approx 0 \quad (2.172)$$

As equações (2.166)-(2.169) e (2.172) são condições para que a trajetória variada seja fisicamente equivalente à trajetória de original.

Consideremos agora que a variação seja gerada por uma função das variáveis canônicas  $G$  com a seguinte forma

$$G = \varepsilon_\rho^{(n)} G_{n\rho}, \quad (2.173)$$

onde

$$\varepsilon_\rho^{(n)} = \frac{d^n \varepsilon_\rho}{dt^n} \quad (2.174)$$

e  $n$  varia de 0 a um certo valor  $k$  para cada valor do índice  $\rho$ . Ou seja, a função geradora das transformações de gauge será formada, do modo mostrado acima, pela combinação de funções das variáveis canônicas  $G_{n\rho}$  multiplicadas por parâmetros  $\varepsilon_\rho$  e suas derivadas temporais. Essa hipótese pode parecer demasiado forte, mas é uma hipótese razoável diante dos exemplos fornecidos por diversas teorias físicas, além de ser uma generalização, para o espaço de fase, de uma propriedade semelhante do gerador de transformações de gauge no formalismo Lagrangeano [8]. É importante notar também



que **não** estamos fazendo nenhuma afirmação sobre quem são as funções  $G_{n\rho}$  presentes em  $G$ .

As variações  $\eta_i$  e  $\xi_i$  serão fornecidas pela transformação canônica gerada por  $G$ , portanto:

$$\eta_i \approx \varepsilon_\rho^{(n)} \{q_i, G_{n\rho}\} = \varepsilon_\rho^{(n)} \frac{\partial G_{n\rho}}{\partial p_i} \quad (2.175)$$

$$\xi_i \approx \varepsilon_\rho^{(n)} \{p_i, G_{n\rho}\} = -\varepsilon_\rho^{(n)} \frac{\partial G_{n\rho}}{\partial q_i} \quad (2.176)$$

Para  $\dot{\eta}_i$  e  $\dot{\xi}_i$  temos:

$$\dot{\eta}_i \approx \frac{d\varepsilon_\rho^{(n)}}{dt} \frac{\partial G_{n\rho}}{\partial p_i} + \varepsilon_\rho^{(n)} \left\{ \frac{\partial G_{n\rho}}{\partial p_i}, H_P \right\} = \varepsilon_\rho^{(n+1)} \frac{\partial G_{n\rho}}{\partial p_i} + \varepsilon_\rho^{(n)} \left\{ \frac{\partial G_{n\rho}}{\partial p_i}, H_P \right\} \quad (2.177)$$

$$\dot{\xi}_i \approx -\frac{d\varepsilon_\rho^{(n)}}{dt} \frac{\partial G_{n\rho}}{\partial q_i} - \varepsilon_\rho^{(n)} \left\{ \frac{\partial G_{n\rho}}{\partial q_i}, H_P \right\} = -\varepsilon_\rho^{(n+1)} \frac{\partial G_{n\rho}}{\partial q_i} - \varepsilon_\rho^{(n)} \left\{ \frac{\partial G_{n\rho}}{\partial q_i}, H_P \right\} \quad (2.178)$$

Substituindo esses resultados na expressão (2.166) teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_P}{\partial q_j \partial p_b} \varepsilon_\rho^{(n)} \frac{\partial G_{n\rho}}{\partial p_j} - \frac{\partial^2 H_P}{\partial p_a \partial p_b} \varepsilon_\rho^{(n)} \frac{\partial G_{n\rho}}{\partial q_a} - \left( \varepsilon_\rho^{(n+1)} \frac{\partial G_{n\rho}}{\partial p_\alpha} + \varepsilon_\rho^{(n)} \left\{ \frac{\partial G_{n\rho}}{\partial p_\alpha}, H_P \right\} \right) \frac{\partial g_\alpha}{\partial p_b} - \\ - \left( \varepsilon_\rho^{(n+1)} \frac{\partial G_{n\rho}}{\partial p_b} + \varepsilon_\rho^{(n)} \left\{ \frac{\partial G_{n\rho}}{\partial p_b}, H_P \right\} \right) \approx 0 \end{aligned} \quad (2.179)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\rho^{(n)} \left\{ \frac{\partial H_P}{\partial p_b}, G_{n\rho} \right\} + \varepsilon_\rho^{(n)} \frac{\partial^2 H_P}{\partial p_b \partial p_\alpha} \frac{\partial G_{n\rho}}{\partial q_\alpha} - \varepsilon_\rho^{(n)} \frac{\partial g_\alpha}{\partial p_b} \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \{G_{n\rho}, H_P\} + \\ + \varepsilon_\rho^{(n)} \left\{ G_{n\rho}, \frac{\partial H_P}{\partial p_\alpha} \right\} \frac{\partial g_\alpha}{\partial p_b} - \varepsilon_\rho^{(n+1)} \frac{\partial G_{n\rho}}{\partial p_\alpha} \frac{\partial g_\alpha}{\partial p_b} - \varepsilon_\rho^{(n+1)} \frac{\partial G_{n\rho}}{\partial p_b} - \\ - \varepsilon_\rho^{(n)} \frac{\partial}{\partial p_b} \{G_{n\rho}, H_P\} + \varepsilon_\rho^{(n)} \left\{ G_{n\rho}, \frac{\partial H_P}{\partial p_b} \right\} \approx 0 \end{aligned} \quad (2.180)$$

Usando o fato de

$$\dot{q}_\alpha \approx \frac{\partial H_P}{\partial p_\alpha} \quad (2.181)$$

não ser função das variáveis canônicas mas sim um parâmetro arbitrário, temos:

$$\varepsilon_\rho^{(n)} \frac{\partial g_\alpha}{\partial p_b} \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \{G_{n\rho}, H_P\} + \varepsilon_\rho^{(n+1)} \frac{\partial G_{n\rho}}{\partial p_\alpha} \frac{\partial g_\alpha}{\partial p_b} + \varepsilon_\rho^{(n+1)} \frac{\partial G_{n\rho}}{\partial p_b} + \varepsilon_\rho^{(n)} \frac{\partial}{\partial p_b} \{G_{n\rho}, H_P\} \approx 0 \quad (2.182)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial p_b} + \frac{\partial g_\alpha}{\partial p_b} \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \right) \left( \varepsilon_\rho^{(n)} \{G_{n\rho}, H_P\} + \varepsilon_\rho^{(n+1)} G_{n\rho} \right) \approx 0 \quad (2.183)$$

De modo análogo, o uso das equações (2.175)-(2.178) nas equações (2.167) e (2.169) nos fornece:

$$\left( \frac{\partial}{\partial q_i} + \frac{\partial g_\alpha}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \right) \left( \varepsilon_\rho^{(n)} \{G_{n\rho}, H_P\} + \varepsilon_\rho^{(n+1)} G_{n\rho} \right) \approx 0 \quad (2.184)$$

Por fim, o uso das equações (2.175) e (2.176) em (2.172) resulta em:

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial q_i} \varepsilon_\rho^{(n)} \frac{\partial G_{n\rho}}{\partial p_i} - \frac{\partial g_\alpha}{\partial p_a} \varepsilon_\rho^{(n)} \frac{\partial G_{n\rho}}{\partial q_a} + \varepsilon_\rho^{(n)} \frac{\partial G_{n\rho}}{\partial q_\alpha} \approx 0 \quad (2.185)$$

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial q_i} \frac{\partial G_{n\rho}}{\partial p_i} - \frac{\partial g_\alpha}{\partial p_a} \frac{\partial G_{n\rho}}{\partial q_a} + \frac{\partial G_{n\rho}}{\partial q_\alpha} \approx 0 \quad (2.186)$$

Usando

$$\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_i} \equiv \frac{\partial g_\alpha}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial p_i} \equiv \frac{\partial g_\alpha}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial p_\beta} \equiv \delta_{\alpha\beta} \quad (2.187)$$

podemos escrever a equação (2.186) como:

$$\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_i} \frac{\partial G_{n\rho}}{\partial p_i} - \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial p_i} \frac{\partial G_{n\rho}}{\partial q_i} = \{\Phi_\alpha, G_{n\rho}\} \approx 0 \quad (2.188)$$

A equação acima, junto com as expressões (2.183) e (2.184), são condições necessárias para que  $G$  seja gerador de transformações de gauge.

Além disso, as equações (2.183) e (2.184) implicam em

$$\varepsilon_\rho^{(n)} \{G_{n\rho}, H_P\} + \varepsilon_\rho^{(n+1)} G_{n\rho} \approx 0 \quad (2.189)$$

$$\varepsilon_\rho^{(n)} \left( \{G_{n\rho}, H_P\} + G_{(n-1)\rho} \right) \approx 0 \quad (2.190)$$

mas como os coeficientes  $\varepsilon_\rho$  são arbitrários devemos ter:

$$\{G_{n\rho}, H_P\} + G_{(n-1)\rho} \approx 0 \quad (2.191)$$

A princípio poderíamos ter

$$\varepsilon_\rho^{(n)} \{G_{n\rho}, H_P\} + \varepsilon_\rho^{(n+1)} G_{n\rho} \approx C + K(t) \quad (2.192)$$

onde  $C$  é uma constante e  $K(t)$  uma função temporal arbitrária. Mas a expressão à esquerda da igualdade fraca é exatamente a derivada temporal de  $G$  e a exigência de que essa derivada seja estacionária justifica a expressão (2.189).

Esses resultados implicam na seguinte cadeia de relações de recorrência:

$$\begin{aligned}
 \{G_{0\rho}, H_P\} &\approx 0 \\
 \{G_{1\rho}, H_P\} + G_{0\rho} &\approx 0 \\
 \{G_{2\rho}, H_P\} + G_{1\rho} &\approx 0 \\
 &\vdots \\
 \{G_{k\rho}, H_P\} + G_{(k-1)\rho} &\approx 0 \\
 G_{k\rho} &\approx 0
 \end{aligned} \tag{2.193}$$

Lembrando que ainda não foram analisadas as condições de consistência, e portanto **as igualdades fracas referem-se apenas aos vínculos primários**, temos o seguinte resultado: o termo  $G_{k\rho}$  do gerador de transformações de gauge correspondente a  $\varepsilon_\rho^{(k)}$  é um vínculo primário, conseqüentemente o **negativo** do termo  $G_{(k-1)\rho}$ , correspondente a  $\varepsilon_\rho^{(k-1)}$ , é o vínculo secundário que será produzido pela condição de consistência de  $G_{k\rho}$  e assim sucessivamente até o último termo  $G_{0\rho}$  que corresponde ao coeficiente  $\varepsilon_\rho$  e é o último vínculo secundário da cadeia iniciada pelo vínculo primário  $G_{k\rho}$  a menos de um sinal dado por  $(-1)^k$ . Portanto, assumir que a seqüência apresentada pelas equações (2.193) seja finita será equivalente a assumir que há um número finito  $k$  de vínculos secundários gerados pelo vínculo primário  $G_{k\rho}$ .

A equação (2.188), por sua vez, implica que os vínculos primários  $G_{k\rho}$  devem ter parênteses de Poisson fracamente nulos com todos os outros vínculos primários. Após trabalhadas as condições de consistência será necessário exigir também que os  $G_{k\rho}$  tenham parênteses de Poisson nulos com **todos** os vínculos (primários ou secundários) de modo que a transformação por eles gerada não tire o sistema da hipersuperfície dos vínculos. Desse modo, os vínculos  $G_{k\rho}$  serão vínculos primários de primeira classe. Restam ainda duas questões: primeiro, saber se os vínculos secundários gerados a partir de um vínculo primário de primeira classe serão também de primeira classe e segundo, saber se todos os vínculos secundários de primeira classe são obtidos a partir

das condições de consistência para os vínculos primários de primeira classe.

A resposta a essas questões é, em geral, negativa. Nada impede de termos um vínculo secundário de segunda classe sendo gerado pelas condições de consistência de um vínculo primário de primeira classe e, nesse caso, o procedimento desenvolvido acima não será válido pois vínculos de segunda classe não geram transformações de gauge. Podemos também ter um vínculo secundário de primeira classe sendo gerado por um vínculo primário de segunda classe o que novamente invalida o procedimento aqui estudado pois alguns dos geradores de transformações de gauge não entrariam nas relações de recorrência.

Entretanto o procedimento aqui apresentado é perfeitamente válido para teorias em que as cadeias de condições de consistência envolvendo vínculos de segunda classe sejam total separadas das cadeias envolvendo vínculos de primeira classe. Ou, de uma forma ainda mais restritiva, o procedimento será válido para teorias que possuam apenas vínculos de primeira classe.

Resumindo, para as teorias em que o procedimento de Castellani seja válido, temos a seguinte situação: o coeficiente  $\epsilon$  que multiplica um vínculo de primeira classe  $\theta_t$  no gerador das transformações de gauge  $G$  deve ser **o negativo** da derivada temporal do coeficiente  $\epsilon'$  que multiplica o vínculo de primeira classe  $\theta_s$  obtido a partir da condição de consistência para  $\theta_t$ . Ou seja, se  $\theta_s \approx \dot{\theta}_t$  então  $\epsilon = -\epsilon'$ .

## 2.8 Um exemplo: Eletromagnetismo de Maxwell

Examinaremos agora um exemplo de sistema singular de forma a tornar mais claros os procedimentos e conceitos apresentados até aqui.

Entretanto, usaremos como exemplo um sistema com infinitos graus de liberdade descrito por uma densidade Lagrangeana dependente das variáveis de campo e de suas derivadas até primeira ordem:  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \partial\psi)$ . Adotaremos a métrica  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ , com os índices gregos indexando as componentes dos quadri-

vetores e variando de 0 a 3. As componentes dos tri-vetores serão indexadas por índices latinos variando de 1 a 3. A generalização dos formalismos apresentados anteriormente é direta, sendo apenas necessário considerar que o Lagrangeano do sistema passa a ser

$$L = \int \mathcal{L}(\psi, \partial\psi) d^3x, \quad (2.194)$$

e as equações de movimento, obtidas através do princípio de Hamilton

$$\frac{\delta S}{\delta \psi^a} = 0; S = \int L dt = \int \mathcal{L}(\psi, \partial\psi) d^4x, \quad (2.195)$$

são dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^a} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^a)} \right) = 0 \quad (2.196)$$

O momento conjugado a  $\psi^a$  será dado por

$$p_a = \frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}^a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^a} \quad (2.197)$$

e portanto a matriz Hessiana é:

$$H_{ab}(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{\delta^2 L}{\delta \dot{\psi}^a(\vec{x}) \delta \dot{\psi}^b(\vec{x}')} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^a \partial \dot{\psi}^b} \delta^3(\vec{x}' - \vec{x}) \quad (2.198)$$

A singularidade do sistema é determinada pela matriz ordinária de índices discretos em  $H_{ab}$ .

Com essas modificações, analisemos o caso da Eletrodinâmica de Maxwell, que tem a seguinte densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.199)$$

onde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  e  $A^\mu = (\varphi, \vec{A})$ , sendo  $\varphi$  o potencial escalar e  $\vec{A}$  o potencial vetor. Desse modo as componentes do tensor do campo eletromagnético  $F^{\mu\nu}$  serão

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.200)$$

onde  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são os campo elétrico e magnético, respectivamente.

As coordenadas que usaremos são as componentes  $A^\mu$  do quadri-potencial de modo que, rigorosamente falando, teremos não 4 mas sim infinitas ( $4 \cdot \infty^3$ ) coordenadas já que o valor de cada componente  $A^\mu$  em cada ponto do espaço é uma coordenada independente.

Os momentos canonicamente conjugados às coordenadas serão dados por:

$$\Pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^\mu} = -\frac{1}{2} F_{\lambda\alpha} \frac{\partial F^{\lambda\alpha}}{\partial \dot{A}^\mu} \quad (2.201)$$

$$\Pi_\mu = -F_{0\mu} \quad (2.202)$$

Os parênteses de Poisson fundamentais entre as variáveis canônicas são:

$$\{A^\mu(\vec{x}), \Pi_\nu(\vec{x}')\} = \delta_\mu^\nu \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.203)$$

A matriz Hessiana será:

$$H_{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^\alpha \partial \dot{A}^\beta} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.204)$$

$$H_{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{x}') = (-\eta_{\beta\alpha} + \eta_{\beta 0} \eta_{0\alpha}) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.205)$$

Na forma matricial temos:

$$H_{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{x}') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.206)$$

A matriz Hessiana é obviamente singular e seu posto é 3, portanto teremos um vínculo primário. Da definição dos momentos  $\Pi_\mu$  e do tensor  $F^{\mu\nu}$  temos obviamente o vínculo:

$$\Phi = \Pi_0 \approx 0 \quad (2.207)$$

As componentes espaciais  $\Pi^i$  são as componentes  $E^i$  do campo elétrico. Usando a definição dos momentos podemos reescrever as velocidades  $\dot{A}_i$  como:

$$\dot{A}_i = -\Pi_i + \partial_i A_0 \quad (2.208)$$

O Hamiltoniano canônico será dado por:

$$H_c = \int \Pi_\mu \dot{A}^\mu d^3x - L = \int \left( \Pi_\mu \dot{A}^\mu + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) d^3x \quad (2.209)$$

Usando o vínculo primário e as expressões (2.208) temos

$$H_c = \int \left( -\Pi^i \Pi_i + \Pi^i \partial_i A_0 + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{1}{2} \Pi^i \Pi_i \right) d^3x \quad (2.210)$$

$$H_c = \int \left( \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{1}{2} \Pi^i \Pi_i - A_0 \partial_i \Pi^i \right) d^3x, \quad (2.211)$$

sendo que na última passagem fizemos a integração por partes do termo  $\Pi^i \partial_i A_0$ .

É importante observar que o Hamiltoniano canônico não contém as velocidades  $\dot{A}_\mu$ . Todas as derivadas contidas no termo  $F^{ij}$  são derivadas em relação às coordenadas espaciais e essas derivadas não são velocidades mas apenas funções das variáveis canônicas. O Hamiltoniano primário será:

$$H_P = H_c + \int v(\vec{x}, t) \Pi_0 d^3x = \int \left( \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{1}{2} \Pi^i \Pi_i - A_0 \partial_i \Pi^i + v(\vec{x}, t) \Pi_0 \right) d^3x \quad (2.212)$$

Nessa expressão o coeficiente  $v(\vec{x}, t)$  é uma função arbitrária dos parâmetros  $\vec{x}$  e  $t$ . A condição de consistência para o vínculo primário é:

$$\dot{\Phi} = \dot{\Pi}_0 = \{ \Pi_0, H_P \} = - \left\{ \Pi_0(\vec{x}), \int A_0 \partial_i \Pi^i d^3x' \right\} \approx 0 \quad (2.213)$$

$$\dot{\Phi} = - \int \left\{ \Pi_0(\vec{x}), A_0(\vec{x}') \right\} \partial_i \Pi^i d^3x' \approx 0 \quad (2.214)$$

$$\dot{\Phi} = \int \delta^3(\vec{x}' - \vec{x}) \partial_i \Pi^i(\vec{x}') d^3x' = \partial_i \Pi^i(\vec{x}) \approx 0 \quad (2.215)$$

Para satisfazer à condição de consistência devemos ter o vínculo secundário:

$$\chi = \partial_i \Pi^i \approx 0 \quad (2.216)$$

Temos então uma nova condição de consistência a satisfazer:

$$\dot{\chi} = \{\partial_s \Pi^s, H_P\} = \left\{ \partial_s \Pi^s(\vec{x}), \int \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} d^3 x' \right\} \approx 0 \quad (2.217)$$

$$\dot{\chi} = \frac{1}{2} \partial_s \left( \int F_{ij}(\vec{x}') \left\{ \Pi^s(\vec{x}), F^{ij}(\vec{x}) \right\} d^3 x' \right) \approx 0 \quad (2.218)$$

$$\dot{\chi} = \partial_s \partial_i F^{is} \approx 0 \quad (2.219)$$

Mas  $\partial_s \partial_i F^{is} = 0$  pois é a contração de um objeto simétrico com um antissimétrico e portanto a condição de consistência  $\dot{\chi} \approx 0$  é automaticamente satisfeita sem a necessidade de novos vínculos secundários. Como ambos os vínculos são apenas funções dos momentos, seu parêntese de Poisson é obviamente nulo e portanto ambos são de primeira classe. Desse modo, não temos vínculos de segunda classe no Eletromagnetismo de Maxwell. Como conseqüência o Hamiltoniano canônico é de primeira classe e o Hamiltoniano total  $H_T$  definido na equação (2.108) é idêntico ao Hamiltoniano primário. O Hamiltoniano estendido definido pela expressão (2.122) será

$$H_E = \int \left( \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{1}{2} \Pi^i \Pi_i - A_0 \partial_i \Pi^i + v(\vec{x}, t) \Pi_0 + u(\vec{x}, t) \partial_i \Pi^i \right) d^3 x' \quad (2.220)$$

onde tanto  $v$  quanto  $u$  são funções arbitrárias.

Podemos agora calcular as equações de movimento de Hamiton. Para  $A^0$  temos:

$$\dot{A}^0 \approx \{A^0, H_E\} = \left\{ A^0, \int v \Pi_0 d^3 x' \right\} = \int \left\{ A^0(\vec{x}), v(\vec{x}', t) \Pi_0(\vec{x}') \right\} d^3 x' \quad (2.221)$$

$$\dot{A}^0 \approx \int \delta^3(\vec{x}' - \vec{x}) v(\vec{x}', t) d^3 x' = v(\vec{x}, t) \Rightarrow \dot{A}^0 = v(\vec{x}, t) \quad (2.222)$$

Na expressão acima a igualdade fraca torna-se uma igualdade normal ao usarmos os vínculos que, nesse caso específico, não modificam a expressão pois não estão presentes. O resultado acima simplesmente nos diz que a derivada temporal de  $A^0$  é totalmente arbitrária e portanto a própria componente  $A^0$  será uma variável totalmente arbitrária no formalismo Hamiltoniano. Para as outras componentes de  $A^\mu$  temos:

$$\dot{A}^j \approx \{A^j, H_E\} = \left\{ A^j, \int \left( -\frac{1}{2} \Pi^i \Pi_i - A_0 \partial_i \Pi^i + u \partial_i \Pi^i \right) d^3 x' \right\} \quad (2.223)$$



$$\begin{aligned} \dot{A}^j \approx & \int \left( -\Pi^i(\vec{x}') \{A^j(\vec{x}), \Pi_i(\vec{x}')\} - A_0(\vec{x}') \{A^j(\vec{x}), \partial_i \Pi^i(\vec{x}')\} + \right. \\ & \left. + u(\vec{x}') \{A^j(\vec{x}), \partial_i \Pi^i(\vec{x}')\} \right) d^3x' \end{aligned} \quad (2.224)$$

$$\dot{A}^j \approx -\Pi^j(\vec{x}) + \partial^j A_0(\vec{x}) - \partial^j u(\vec{x}, t) \Rightarrow \dot{A}^j = -\Pi^j(\vec{x}) + \partial^j A_0(\vec{x}) - \partial^j u(\vec{x}, t) \quad (2.225)$$

Para os momentos  $\Pi^s$  temos:

$$\dot{\Pi}^s \approx \{\Pi^s, H_E\} = \left\{ \Pi^s, \int \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} d^3x' \right\} = \frac{1}{2} \int F^{ij}(\vec{x}') \{ \Pi^s(\vec{x}), F_{ij}(\vec{x}') \} d^3x' \quad (2.226)$$

$$\dot{\Pi}^s \approx \frac{1}{2} \left( \partial_i F^{is}(\vec{x}) - \partial_j F^{sj}(\vec{x}) \right) = \partial_i F^{is}(\vec{x}) \Rightarrow \dot{\Pi}^s = \partial_i F^{is}(\vec{x}) \quad (2.227)$$

Novamente a igualdade fraca se torna uma igualdade normal com o uso dos vínculos. Mas eles como não estão presentes no resultado final não modificam as expressões obtidas. Expressando esses resultados em forma vetorial obtemos as equações de Maxwell. A partir da equação (2.225) obtemos:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{E} - \vec{\nabla} (A_0 - u) \quad (2.228)$$

O rotacional dessa expressão nos fornece:

$$\frac{\partial \vec{\nabla} \times \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} (A_0 - u) \Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} \quad (2.229)$$

A partir de equação (2.227) temos:

$$\frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (2.230)$$

Por fim o vínculo secundário (2.216) nos fornece:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.231)$$

O gerador das transformações de gauge seria, a princípio:

$$G = \int \left( v \Pi^0 + u \partial_i \Pi^i \right) d^3x \quad (2.232)$$

As transformações de gauge para as variáveis canônicas seriam então:

$$\delta A^0 \approx \{A^0(\vec{x}), G\} = \left\{A^0(\vec{x}), \int v(\vec{x}', t) \Pi^0(\vec{x}') d^3x'\right\} = v(\vec{x}, t) \quad (2.233)$$

$$\delta A^j \approx \{A^j(\vec{x}), G\} = \left\{A^j(\vec{x}), \int u(\vec{x}', t) \partial_i \Pi^i(\vec{x}') d^3x'\right\} = -\partial^j u(\vec{x}, t) \quad (2.234)$$

$$\delta \Pi^\mu \approx \{\Pi^\mu, G\} = 0 \quad (2.235)$$

Contudo, levando em conta o algoritmo desenvolvido na última seção teremos,  $v = -\dot{u}$  e portanto o gerador das transformações de gauge se torna:

$$G = \int (-\dot{u} \Pi^0 + u \partial_i \Pi^i) d^3x \quad (2.236)$$

$$G = \int (-\dot{u} \Pi^0 - \Pi^i \partial_i u) d^3x \quad (2.237)$$

$$G = - \int \Pi^\mu \partial_\mu u d^3x \quad (2.238)$$

Recuperamos então as conhecidas transformações de gauge do eletromagnetismo

$$\delta A^\mu \approx \{A^\mu, G\} = -\partial^\mu u(\vec{x}, t) \quad (2.239)$$

já que  $u(\vec{x}, t)$  é uma função arbitrária. Devemos observar que os momentos  $\Pi^\mu$  são invariantes de gauge devido à equação (2.235), que continua válida após o ajuste dos coeficientes em  $G$ . Tal resultado já era esperado pois  $\Pi^0$  é um vínculo e portanto não deve ser alterado pelas transformações de gauge e as componentes espaciais  $\Pi^i$  são as componentes do campo elétrico que são invariantes de gauge. Da mesma forma, o tensor  $F^{\mu\nu}$  e a densidade Lagrangeana  $\mathcal{L}$  dada pela equação (2.199) também são invariantes de gauge.

Por outro lado, o potencial vetor  $A^\mu$  é gauge dependente como pode ser verificado diretamente da equação (2.239). Contudo, os fatos de termos o gradiente de uma função arbitrária  $u$  na expressão para a derivada temporal de  $\vec{A}$ , dada pela equação (2.228), além de termos  $\dot{A}^0 = v = \dot{u}$ , já indicam que o potencial vetor  $A^\mu$  é dependente do gauge. As componentes espaciais  $\Pi^i$  do momento são invariantes de gauge e conseqüentemente suas equações de movimento não possuem tal característica.

Esse exemplo nos mostra que, apesar das limitações para as quais chamamos a atenção no fim da seção anterior, o procedimento de construção do gerador  $G$  das transformações de gauge nos permite obter as transformações de gauge corretas para diversas teorias físicas que atendam à exigência de ter apenas vínculos de primeira classe (que é o caso do Eletromagnetismo de Maxwell) ou de ter cadeias de condições de consistência separadas para vínculos de primeira e segunda classes. Desse modo, o gerador  $G$  obtido na seção anterior nos permite analisar de uma forma simples as transformações sob as quais o sistema físico é invariante e quais grandezas são invariantes de gauge numa teoria. Tal procedimento é extremamente vantajoso na análise de uma teoria que não seja tão bem conhecida quanto o é o Eletromagnetismo de Maxwell.

## 3. Formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares

### 3.1 Introdução

Apresentamos neste capítulo o formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares desenvolvido recentemente [12]. A motivação para o estudo deste formalismo para sistemas singulares é essencialmente a mesma que leva ao estudo de diferentes formalismos para sistemas regulares. Diferentes formalismos (Lagrangeano, Hamiltoniano, de Hamilton-Jacobi) permitem diferentes abordagens dos problemas estudados, cada formalismo sendo equivalente aos outros e tendo suas vantagens e desvantagens no estudo de determinadas características dos sistemas físicos. Da mesma forma, diferentes formalismos permitem diferentes análises das propriedades de sistemas singulares.

Entretanto, abordaremos neste trabalho o formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares fazendo sua generalização para o caso de Lagrangeanos com derivadas de segunda ordem (Lagrangeanos de segunda ordem). Neste capítulo usaremos, em linhas gerais, a abordagem empregada na referência [34]. Inicialmente desenvolveremos o formalismo de Hamilton-Jacobi para tais Lagrangeanos sem considerar o caso singular. Em seguida examinaremos características gerais de Lagrangeanos singulares de segunda ordem, em especial a estrutura de vínculos que apresentam, além de analisarmos brevemente o formalismo Hamiltoniano para este caso. Finalmente, usaremos os resultados obtidos para desenvolver o formalismo de Hamilton-Jacobi para Lagrangeanos

singulares com derivadas de segunda ordem. O tratamento do caso de Lagrangeanos contendo apenas derivadas de primeira ordem será uma decorrência natural do caso que estamos estudando.

### **3.2 Formalismo de Hamilton-Jacobi para Lagrangeanos de segunda ordem**

O tratamento de teorias cujos Lagrangeanos contenham derivadas de ordem superior, ditos Langrangeanos de ordem superior ou ainda teorias de ordem superior, foi inicialmente desenvolvido por Ostrogradski [35] e nos permite escrever as equações de movimento de Euler-Lagrange, introduzir momentos conjugados e desenvolver um formalismo Hamiltoniano para tais sistemas. Os Lagrangeanos estudados nos dois primeiros capítulos desta dissertação são chamados Lagrangeanos de primeira ordem (por conterem apenas derivadas primeiras das coordenadas) e são apenas um caso especial dos Lagrangeanos de ordem superior. Centraremos nossas atenções no caso de sistemas descritos por Lagrangeanos contendo até derivadas de segunda ordem das coordenadas, ou seja, sistemas com Lagrangeanos de segunda ordem.

As equações de Euler-Lagrange para tais Lagrangeanos, obtidas através da integral de ação

$$S = \int L(q, \dot{q}, \ddot{q}) dt \quad (3.1)$$

usando o princípio de Hamilton, são dadas por:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \right) = 0 \quad (3.2)$$

Essas equações são equações diferenciais de quarta ordem e portanto, em teorias de segunda ordem, o espaço de fase das "velocidades" é descrito em termos das  $N$  coordenadas generalizadas  $q_i$  e suas derivadas primeiras, segundas e terceiras em relação ao parâmetro temporal  $t$ . Estas são as  $4N$  variáveis cujas condições iniciais devem ser

### Capítulo 3. Formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares 78

especificadas para permitir a resolução das equações de movimento de Euler-Lagrange (3.2).

O espaço de fase dos momentos é construído introduzindo-se os momentos generalizados

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \right) \quad (3.3)$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i \partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i \partial \ddot{q}_j} \ddot{\ddot{q}}_j \quad (3.4)$$

e

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \quad (3.5)$$

(conjugados respectivamente a  $q_i$  e  $\dot{q}_i$ ) e escrevendo  $\ddot{q}_i$  e  $\ddot{\ddot{q}}_i$  como funções das variáveis canônicas: as coordenadas  $q$ , velocidades  $\dot{q}$  e dos momentos  $p$  e  $\pi$ . Ou seja, devemos obter funções  $f_i$  e  $h_i$  tais que:

$$\ddot{q}_i = f_i(q_i, \dot{q}_i, \pi_i); \quad \ddot{\ddot{q}}_i = h_i(q_i, \dot{q}_i, p_i, \pi_i) \quad (3.6)$$

O espaço de fase será descrito então pelas variáveis canônicas  $(q_i, p_i)$ ,  $(\bar{q}_i, \pi_i)$  onde  $\bar{q}_i = \dot{q}_i$ .

Introduzindo o Hamiltoniano canônico definido como

$$H_c = p_i \bar{q}_i + \pi_i \ddot{q}_i \Big|_{\ddot{q}_i = f_i} - L \Big|_{\ddot{q}_i = f_i} \quad (3.7)$$

podemos escrever as equações de movimento de qualquer função  $g$  das variáveis canônicas como

$$\dot{g} = \{g, H_c\}, \quad (3.8)$$

onde o parêntese de Poisson é definido em termos de **todas** as variáveis canônicas segundo a fórmula:

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} + \frac{\partial A}{\partial \bar{q}_i} \frac{\partial B}{\partial \pi_i} - \frac{\partial B}{\partial \bar{q}_i} \frac{\partial A}{\partial \pi_i} \quad (3.9)$$

Um ponto para o qual devemos chamar atenção é a necessidade de exprimir as derivadas terças das coordenadas  $q_i$  como funções das variáveis canônicas apesar do

### Capítulo 3. Formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares 79

Hamiltoniano canônico não conter tais derivadas. Isso deve-se ao fato, para o qual já havíamos chamado a atenção, de as equações de movimento de Euler-Lagrange formarem um conjunto de  $N$  equações diferenciais de quarta ordem. Portanto, para resolvê-las no caso não singular, precisaremos estabelecer  $4N$  condições iniciais para as  $4N$  variáveis  $q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i$  e  $\ddot{\bar{q}}_i$ . Ao passarmos para o espaço de fase teremos  $4N$  equações de movimento de Hamilton para as variáveis canônicas  $q, \bar{q}, p$  e  $\pi$  que serão equações diferenciais de primeira ordem e portanto necessitaremos novamente de  $4N$  condições iniciais para resolver este novo sistema de equações diferenciais. A fixação de condições iniciais para os momentos  $p$  no formalismo Hamiltoniano corresponde à fixação das condições iniciais para as derivadas terceiras das coordenadas  $q$ 's no formalismo Lagrangeano, portanto estas últimas devem ser expressas em termos dos primeiros ao fazermos a passagem do formalismo Lagrangeano para o Hamiltoniano.

Esse procedimento é inteiramente análogo ao usado no caso de Lagrangeanos de primeira ordem, sendo que o Hamiltoniano canônico (3.7) se reduz ao Hamiltoniano definido na equação (1.4) quando a função Lagrangeana possui apenas derivadas de primeira ordem. É importante observar que as velocidades  $\dot{q}$  passam a ter *status* de "coordenadas", tendo inclusive um momento conjugado. O papel que as velocidades tinham no caso de Lagrangeanos de primeira ordem passa a ser desempenhado pelas acelerações  $\ddot{q}$  e as derivadas terceiras do tempo  $\ddot{\bar{q}}$  que devem ser eliminadas das equações no formalismo Hamiltoniano.

Contudo, analogamente ao caso de Lagrangeanos de primeira ordem, este procedimento só é possível se o determinante da matriz

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{q}_i \partial \ddot{q}_j} \quad (3.10)$$

não se anular. Essa condição é necessária pois do contrário, como veremos mais adiante, não será possível expressar todos os  $\ddot{q}_i$  e  $\ddot{\bar{q}}_i$  como funções das variáveis canônicas; o que implicará na existência de vínculos entre essas últimas. Desse modo, a matriz (3.10) será chamada de matriz Hessiana para Lagrangeanos de segunda ordem e é uma

### Capítulo 3. Formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares 80

generalização natural da matriz Hessiana definida na equação (1.12) para Lagrangeanos de primeira ordem.

Portanto, se o determinante da matriz Hessiana (3.10) for nulo, teremos a generalização para Lagrangeanos de segunda ordem do caso de sistemas singulares que foi estudado nos dois primeiros capítulos e dizemos que o Lagrangeano de segunda ordem é singular. Na próxima seção voltaremos a examinar o caso de Lagrangeanos de segunda ordem singulares e como a singularidade da matriz Hessiana (3.10) irá gerar vínculos.

Analisaremos agora o formalismo de Hamilton-Jacobi para um Lagrangeano geral de segunda ordem (não necessariamente singular). Seguindo o procedimento de Güler [36, 37] para sistemas com Lagrangeanos de primeira ordem, usaremos nesta seção o método dos Lagrangeanos equivalentes de Carathéodory [38] para obter a equação de Hamilton-Jacobi para sistemas Lagrangeanos de segunda ordem.

O método dos Lagrangeanos equivalentes de Carathéodory, aplicado a Lagrangeanos de segunda ordem, utiliza o fato de que, dado um Lagrangeano  $L(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i)$ , podemos obter um novo Lagrangeano  $L'$  completamente equivalente ao primeiro acrescentando uma diferencial total pois ambos irão fornecer as mesmas equações de movimento ao usarmos o princípio de Hamilton, i.e. ambos irão fornecer os mesmos extremos para a integral de ação (3.1). Desse modo, o Lagrangeano

$$L' = L(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i) - \frac{dS(q_i, \dot{q}_i, t)}{dt} \quad (3.11)$$

tem extremos simultâneos aos do Lagrangeano  $L$ , no sentido de que quando a integral de ação obtida a partir de  $L$  for estacionária a integral de ação obtida a partir de  $L'$  também o será.

Portanto podemos escolher a função  $S(q_i, \dot{q}_i, t)$  de tal forma que  $L'$  se torne um extremo da integral de ação e então reduzir o problema variacional de encontrar um extremo para a integral de ação do Lagrangeano  $L$  a um problema de cálculo diferencial.

Com este objetivo, tomemos um conjunto de funções  $\varphi_i(q_i, \dot{q}_i, t)$ ,  $\beta_i(q_i, t)$  e  $S(q_i, \dot{q}_i, t)$



tais que

$$L'(q_i, \beta_i, \varphi_i) = 0 \quad (3.12)$$

e para toda vizinhança de  $\dot{q}_i = \beta_i(q_i, t)$  e  $\ddot{q}_i = \varphi_i(q_i, \dot{q}_i, t)$  tenhamos:

$$L'(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i) > 0 \quad (3.13)$$

Com essas condições satisfeitas o Lagrangeano  $L'$  terá um mínimo em  $\dot{q}_i = \beta_i(q_i, t)$  e  $\ddot{q}_i = \varphi_i(q_i, \dot{q}_i, t)$  e conseqüentemente a integral de ação para este Lagrangeano terá um mínimo de tal modo que as soluções dessas equações diferenciais corresponderão a extremos da integral de ação. Como os Lagrangeanos  $L$  e  $L'$  são equivalentes a ação obtida a partir de  $L$  também será minimizada pelas soluções dessas equações.

A partir da definição do Lagrangeano  $L'$  obtemos:

$$L' = L(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t) - \frac{\partial S(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial t} - \frac{\partial S(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} - \frac{\partial S(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} \quad (3.14)$$

Usando agora a condição (3.12) para que  $L'$  (e conseqüentemente a integral de ação) tenha um mínimo, temos:

$$\left[ L(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t) - \frac{\partial S(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial t} - \frac{\partial S(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial S(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right] \Bigg|_{\substack{\dot{q}_i = \beta_i \\ \ddot{q}_i = \varphi_i}} = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} \Bigg|_{\substack{\dot{q}_i = \beta_i \\ \ddot{q}_i = \varphi_i}} = \left[ L(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t) - \frac{\partial S(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial S(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right] \Bigg|_{\substack{\dot{q}_i = \beta_i \\ \ddot{q}_i = \varphi_i}} \quad (3.16)$$

Por outro lado,  $\dot{q}_i = \beta_i$  e  $\ddot{q}_i = \varphi_i$  são um ponto de mínimo do Lagrangeano  $L'$  e como conseqüência a derivada de  $L'$  em relação a  $\ddot{q}_i$  deve se anular nesse ponto. Essa condição nos fornece:

$$\frac{\partial L'}{\partial \ddot{q}_i} \Bigg|_{\substack{\dot{q}_i = \beta_i \\ \ddot{q}_i = \varphi_i}} = 0 \Rightarrow \left[ \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{dS}{dt} \right) \right] \Bigg|_{\substack{\dot{q}_i = \beta_i \\ \ddot{q}_i = \varphi_i}} = 0, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} \Bigg|_{\dot{q}_i = \beta_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Bigg|_{\substack{\dot{q}_i = \beta_i \\ \ddot{q}_i = \varphi_i}} \quad (3.18)$$

### Capítulo 3. Formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares 82

Da mesma forma, a derivada de  $L'$  em relação a  $\dot{q}_i$  deve se anular e como consequência devemos ter:

$$\left. \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \right|_{\substack{\dot{q}_i = \beta_i \\ \ddot{q}_i = \varphi_i}} = 0 \Rightarrow \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{dS}{dt} \right) \right] \Big|_{\substack{\dot{q}_i = \beta_i \\ \ddot{q}_i = \varphi_i}} = 0, \quad (3.19)$$

$$\left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial S}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 S}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j - \frac{\partial^2 S}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right] \Big|_{\substack{\dot{q}_i = \beta_i \\ \ddot{q}_i = \varphi_i}} = 0, \quad (3.20)$$

$$\left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial S}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} \right] \Big|_{\substack{\dot{q}_i = \beta_i \\ \ddot{q}_i = \varphi_i}} = 0, \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} \Big|_{\dot{q}_i = \beta_i} = \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} \right] \Big|_{\substack{\dot{q}_i = \beta_i \\ \ddot{q}_i = \varphi_i}} \quad (3.22)$$

Devemos nos lembrar que as velocidades  $\dot{q}_i$  têm o *status* de coordenadas e que estamos usando a notação  $\dot{q}_i = \bar{q}_i$ . Desse modo, usando as definições para os momentos conjugados dadas pelas equações (3.3) e (3.5) nos resultados expressos nas equações (3.18) e (3.22) obtemos:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}; \pi_i = \frac{\partial S}{\partial \bar{q}_i} \quad (3.23)$$

Substituindo esses resultados na equação (3.16) temos que a condição para obtermos um extremo da integral de ação é encontrar uma função  $S(q_i, \dot{q}_i, t)$  tal que:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H_0 \quad (3.24)$$

$$H_0 = p_i \bar{q}_i + \pi_i \dot{\bar{q}}_i - L \quad (3.25)$$

Essas equações, junto com as equações (3.23), são as equações fundamentais do método dos Lagrangeanos equivalentes, sendo que a equação (3.24) é a equação diferencial parcial de Hamilton-Jacobi (EDPHJ) para o sistema e  $S(q_i, \dot{q}_i, t)$  a função principal de Hamilton. É importante relembrar que o formalismo de Hamilton-Jacobi desenvolvido nesta seção é válido para qualquer Lagrangeano de segunda ordem e não está restrito a Lagrangeanos singulares.

### 3.3 Vínculos em sistemas singulares com Lagrangeanos de segunda ordem

Examinaremos agora o caso de Lagrangeanos singulares de segunda ordem, ou seja, o caso em que a matriz Hessiana (3.10) tenha posto  $K = N - R$ . Seguindo um procedimento semelhante ao adotado na primeira seção do capítulo 1, podemos escolher a ordem das coordenadas  $q_i$  de modo que a sub-matriz  $K \times K$  localizada no vértice inferior direito da matriz Hessiana seja não singular. Ou seja, lembrando que  $\ddot{q}_i = \dot{\dot{q}}_i$ , temos:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_a \partial \dot{q}_b} \right\| = \det \left\| \frac{\partial \pi_b}{\partial \dot{q}_a} \right\| \neq 0; a, b = R + 1, \dots, N \quad (3.26)$$

Podemos portanto resolver  $K = N - R$  "acelerações"  $\dot{\dot{q}}_a$  em termos das coordenadas  $(q, \bar{q})$ , dos momentos  $\pi_a$  ( $a = R + 1, \dots, N$ ) e das "acelerações" não resolvidas  $\dot{\dot{q}}_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, R$ ):

$$\dot{\dot{q}}_a = f_a \left( q_i, \bar{q}_i, \pi_b, \dot{\dot{q}}_\alpha \right) \quad (3.27)$$

Como os momentos  $\pi$  são funções das acelerações  $\dot{\dot{q}}_i$ , podemos substituir as expressões (3.27) nas definições dos momentos  $\pi_i$  e obter:

$$\pi_i = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right|_{\dot{\dot{q}}_\alpha = f_\alpha} = \tilde{g}_i \left( q_i, \bar{q}_i, f_\alpha, \dot{\dot{q}}_\alpha \right) \quad (3.28)$$

$$\pi_i = g_i \left( q_i, \bar{q}_i, \pi_\alpha, \dot{\dot{q}}_\alpha \right) \quad (3.29)$$

Como devemos ter  $\pi_\alpha \equiv g_\alpha$  as outras  $K$  funções  $g_\alpha$  não podem depender das acelerações  $\dot{\dot{q}}_\alpha$  não resolvidas ou seríamos capazes de resolver mais algumas acelerações  $\dot{\dot{q}}_\alpha$  como funções das variáveis  $q, \bar{q}$  e  $\pi$ , o que contradiz o fato da matriz Hessiana ter posto  $K$ . Podemos portanto reescrever a equação (3.29), para os momentos  $\pi_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, R$ ), como

$$\pi_\alpha = g_\alpha \left( q_i, \bar{q}_i, \pi_\alpha \right) \quad (3.30)$$

### Capítulo 3. Formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares 84

o que, no formalismo de Dirac, implica na existência de vínculos primários do tipo:

$$\bar{\Phi}_\alpha = \pi_\alpha - g_\alpha(q_i, \bar{q}_i, \pi_a) \approx 0 \quad (3.31)$$

Até aqui temos um procedimento exatamente análogo ao procedimento para um Lagrangeano singular de primeira ordem descrito nos capítulos 1 e 2. Os vínculos dados pela equação (3.31) são análogos aos vínculos (1.19) obtidos no capítulo 1.

Mas temos agora uma diferença essencial em relação ao caso de Lagrangeanos de primeira ordem estudado nos dois primeiros capítulos. Como foi dito na seção anterior, para Lagrangeanos de segunda ordem devemos também expressar as derivadas terceiras das coordenadas  $q_i$  como função das variáveis canônicas ao passarmos para o espaço de fase. Ou seja, precisamos obter para  $\ddot{q}_j = \ddot{\bar{q}}_j$  expressões do tipo mostrado nas equações (3.6).

Partindo da equação (3.4) teremos

$$\det \left\| \frac{\partial p_i}{\partial \ddot{q}_j} \right\| = \det \left\| \frac{\partial p_i}{\partial \ddot{\bar{q}}_j} \right\| = \det \left\| - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\bar{q}}_i \partial \dot{\bar{q}}_j} \Big|_{\substack{\dot{\bar{q}}_a = f_a \\ \ddot{\bar{q}}_a = h_a}} \right\|; i, j = 1, \dots, n \quad (3.32)$$

e como conseqüência do posto da matriz Hessiana só poderemos resolver  $K = N - R$  variáveis  $\ddot{\bar{q}}_a$  como funções  $\ddot{\bar{q}}_a = h_a(q_i, \bar{q}_i, \pi_b, p_b, \dot{\bar{q}}_\alpha, \ddot{\bar{q}}_\alpha)$ , onde  $\ddot{\bar{q}}_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, R$ ) são as derivadas terceiras que não puderam ser resolvidas. Substituindo essas expressões nas definições dos momentos  $p_i$  obtemos:

$$p_i = \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \right) \right) \Big|_{\substack{\dot{\bar{q}}_a = f_a \\ \ddot{\bar{q}}_a = h_a}} \quad (3.33)$$

$$p_i = k_i(q_i, \bar{q}_i, \pi_a, p_a, \dot{\bar{q}}_\alpha, \ddot{\bar{q}}_\alpha) \quad (3.34)$$

Mas  $k_\alpha$ , de forma semelhante às funções  $g_\alpha$  acima, não podem conter as variáveis não resolvidas  $\dot{\bar{q}}_\alpha$  e  $\ddot{\bar{q}}_\alpha$  ou seríamos capazes de resolver mais algumas dessas variáveis como funções das variáveis canônicas, o que contradiz o fato de o posto da matriz Hessiana

### Capítulo 3. Formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares 85

ser  $K = N - R$ . Portanto a equação (3.34) pode ser reescrita, para os momentos  $p_\alpha$ , como

$$p_\alpha = k_\alpha \left( q_i, \bar{q}_i, \pi_a, p_a \right) \quad (3.35)$$

o que, no formalismo de Dirac, implica na existência de vínculos primários dados por:

$$\Phi_\alpha = p_\alpha - k_\alpha \left( q_i, \bar{q}_i, \pi_a, p_a \right) \approx 0 \quad (3.36)$$

Devemos chamar atenção para o fato de que os vínculo primários (3.31) e (3.36) acontecem aos pares em sistemas com Lagrangeanos de segunda ordem: a existência de um vínculo primário envolvendo o momento  $\pi_\alpha$ , conjugado à coordenada  $\bar{q}_\alpha$ , implica na existência de um vínculo envolvendo o momento  $p_\alpha$  conjugado à coordenada  $q_\alpha$ .

O tratamento de Dirac apresentado no segundo capítulo pode ser aplicado também neste caso de Lagrangeano de segunda ordem. O Hamiltoniano canônico (3.7) passa a ser:

$$H_c = p_a \bar{q}_a + \bar{q}_\alpha p_\alpha|_{p_\beta=k_\beta} + \pi_a f_a + \bar{q}_\alpha \pi_\alpha|_{\pi_\beta=g_\beta} - L \left( q_i, \bar{q}_i, \dot{\bar{q}}_\alpha, \dot{\bar{q}}_a = f_a \right) \quad (3.37)$$

O Hamiltoniano primário (2.11) será dado por

$$H_P = H_c + \bar{v}_\alpha \bar{\Phi}_\alpha + v_\alpha \Phi_\alpha, \quad (3.38)$$

onde  $\bar{v}_\alpha$  e  $v_\alpha$  são coeficientes arbitrários, e as equações de movimento para uma função  $g$  das variáveis canônicas será:

$$\dot{g} = \{g, H_P\} \quad (3.39)$$

O procedimento a partir deste ponto é análogo ao procedimento de Dirac usual: devemos verificar as condições de consistência, separar os vínculos de primeira e segunda classes, definir o parêntese de Dirac, etc...

O desenvolvimento desse formalismo Hamiltoniano para sistemas singulares com Lagrangeanos de segunda ordem já foi estudado na literatura [39, 40, 41, 43] assim como o caso mais geral envolvendo Lagrangeanos de ordem arbitrária [22, 42]. Contudo,

exceto na referência [43], todos os autores tratam **apenas** os vínculos envolvendo os momentos  $\pi$  e dados pela equação (3.31) como vínculos primários. Os vínculos contendo os momentos  $p$ , dados pela equação (3.36), são considerados vínculos secundários.

Entretanto, se formos nos ater estritamente ao formalismo de Dirac, não há motivo para não considerar os vínculos (3.36) como vínculos primários já que estes surgem **da própria definição dos momentos  $p$**  como consequência da singularidade da matriz Hessiana.

Se os vínculos (3.36) não forem considerados primários eles serão necessariamente obtidos como condições de consistência para os vínculos (3.31). Esse fato pode ser diretamente verificado pois, fazendo essa consideração, o Hamiltoniano canônico (3.37) será

$$H_c = p_a \bar{q}_a + \bar{q}_\alpha p_\alpha + \pi_a f_a + \bar{q}_\alpha \pi_\alpha |_{\pi_\beta = g_\alpha} - L \left( q_i, \bar{q}_i, \dot{\bar{q}}_\alpha, \dot{\bar{q}}_a = f_a \right) \quad (3.40)$$

pois não faremos a substituição dos  $p_\alpha$  pelas suas expressões dadas pela equação (3.35). Os vínculos  $\bar{\Phi}_\alpha$  podem ser escritos, a partir das equações (3.28)-(3.31), como:

$$\bar{\Phi}_\alpha = \pi_\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_\alpha} \Big|_{\dot{\bar{q}}_a = f_a} \approx 0 \quad (3.41)$$

A condição de consistência será

$$\left\{ \bar{\Phi}_\alpha, H_c \right\} = -p_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \bar{q}_\alpha} \Big|_{\dot{\bar{q}}_a = f_a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_i} \Big|_{\dot{\bar{q}}_a = f_a} \approx 0 \quad (3.42)$$

e corresponde exatamente à existência de um vínculo do tipo dado pela equação (3.36). Se contudo considerarmos os vínculos  $\bar{\Phi}_\alpha$  como primários e fizermos a substituição dos momentos  $p_\alpha$  no Hamiltoniano canônico de acordo com as expressões (3.33)-(3.35) as condições de consistência para os vínculos  $\bar{\Phi}_\alpha$  serão **identicamente** satisfeitas:

$$\left\{ \bar{\Phi}_\alpha, H_c \right\} \equiv 0 \quad (3.43)$$

Diversos autores [40, 41, 42] perceberam o fato de que as condições de consistência para os vínculos (3.31) fornecem vínculos que já estão presentes na definição (3.3) dos

### Capítulo 3. Formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares 87

momentos  $p$ . A referência [42] em especial apresenta uma demonstração detalhada deste fato para Lagrangeanos singulares de ordem arbitrária.

Na referência [40] os autores chamam a atenção para o fato de que os vínculos (3.36), sob o ponto de vista da transformação de Legendre, podem ser considerados vínculos primários enquanto que, do ponto de vista Lagrangeano, não há dinâmica envolvida em sua obtenção como condições de consistência dos vínculos  $\bar{\Phi}_\alpha$ : eles são apenas conseqüências do fato de termos definido  $\dot{q}_i = \bar{q}_i$ . Além disso, na referência [41] o autor mostra que não há vínculos Lagrangeanos correspondentes aos vínculos  $\bar{\Phi}_\alpha$  nem aos vínculos  $\Phi_\alpha$ , uma característica dos vínculos primários no formalismo Hamiltoniano para Lagrangeanos singulares de primeira ordem. Os vínculos Lagrangeanos só têm correspondência com os vínculos Hamiltonianos surgidos a partir das condições de consistência para os vínculos  $\Phi_\alpha$ .

Contudo, todos os autores citados optam por tratar todos os vínculos dados pela equação (3.36) como vínculos secundários apesar de, como acabamos de mostrar, não haver até agora nenhuma razão que nos obrigue a fazê-lo.

Do ponto de vista da dinâmica no formalismo Hamiltoniano para sistemas singulares desenvolvido no capítulo 2, o fato de os vínculos (3.36) serem primários ou secundários não tem a menor importância. A distinção fundamental que aparece na dinâmica do formalismo Hamiltoniano é entre vínculos de primeira e segunda classes e, como vimos acima, se os vínculos  $\Phi_\alpha$  não forem considerados vínculos primários eles sempre serão obtidos como condições de consistência dos vínculos  $\bar{\Phi}_\alpha$  de forma que sempre estarão presentes no formalismo. Haverá um problema contudo na construção do gerador das transformações de gauge pois, ao considerarmos os vínculos  $\Phi_\alpha$  como primários, não haverá nenhuma relação entre os coeficientes dos  $\Phi_\alpha$  e  $\bar{\Phi}_\alpha$  de primeira classe presentes no gerador  $G$  das transformações de gauge, em contradição com diversos exemplos físicos [32, 33, 43] que indicam a existência de tais relações. Entretanto, tal problema parece estar relacionado mais com o fato de não haver realmente um formalismo matematicamente rigoroso para construção do gerador de transformações de gauge do

que com uma obrigatoriedade na escolha dos vínculos  $\Phi_\alpha$  como secundários.

Por outro lado, a existência de expressões para os momentos  $p_\alpha$ , com a forma mostrada na equação (3.35) e obtidas a partir da própria definição dos momentos e não por condições de consistência, será essencial no desenvolvimento do formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares que iremos abordar na próxima seção. Esse fato justifica aquilo que seria apenas um certo preciosismo ao insistirmos em tratar os vínculos  $\Phi_\alpha$  como vínculos primários.

Por fim, há um aspecto para o qual é importante chamar a atenção. A estrutura de vínculos indicada pelas equações (3.36) e (3.31) só acontece para Lagrangeanos **verdadeiramente** de segunda ordem, que são aqueles Lagrangeanos que **não** diferem de um Lagrangeano de primeira ordem **apenas** por um diferencial exato. Quando um Lagrangeano de segunda ordem pode ser escrito da forma

$$L(q, \dot{q}, \ddot{q}) = L_0(q, \dot{q}) + \frac{dF(q, \dot{q})}{dt} \quad (3.44)$$

a existência de um vínculo primário da forma (3.31) envolvendo o momento  $\pi_\alpha$  **não** implicará na existência de um vínculo da forma (3.36) envolvendo o momento  $p_\alpha$ . Uma demonstração para esse fato, generalizada para Lagrangeanos de qualquer ordem, é apresentada na referência [42].

### 3.4 Formulação para Lagrangeanos de segunda ordem singulares

Vamos adotar a seguinte forma para as expressões (3.30) e (3.35) dos momentos  $\pi_\alpha$  e  $p_\alpha$ :

$$\pi_\alpha = -H_\alpha^\pi(q_i, \bar{q}_i, p_a, \pi_a) \quad (3.45)$$

$$p_\alpha = -H_\alpha^p(q_i, \bar{q}_i, p_a, \pi_a) \quad (3.46)$$



### Capítulo 3. Formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares 89

O objetivo desta mudança é distinguir claramente o tratamento feito na formulação de Hamilton-Jacobi do tratamento feito na formulação Hamiltoniana. Reparemos que a função  $H_\alpha^\pi$  não depende dos momentos  $p_a$  pois é obtida a partir da equação (3.30); entretanto, por uma questão de elegância e facilidade nas notações, a trataremos como se tal dependência existisse.

O Hamiltoniano  $H_0$ , equivalente ao Hamiltoniano canônico (3.37) e dado pela equação (3.25), torna-se

$$H_0 = p_a \bar{q}_a + \bar{q}_\alpha p_\alpha |_{p_\beta = -H_\beta^p} + \pi_a f_a + \dot{\bar{q}}_\alpha \pi_\alpha |_{\pi_\beta = -H_\beta^\pi} - L \left( q_i, \bar{q}_i, \dot{\bar{q}}_\alpha, \dot{\bar{q}}_a = f_a \right) \quad (3.47)$$

onde  $\alpha, \beta = 1, \dots, R$ ;  $a = R + 1, \dots, N$ . Por outro lado, temos

$$\frac{\partial H_0}{\partial \dot{\bar{q}}_\alpha} = \pi_\alpha \frac{\partial f_a}{\partial \dot{\bar{q}}_\alpha} + \pi_\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_a} \frac{\partial f_a}{\partial \dot{\bar{q}}_\alpha} = 0 \quad (3.48)$$

de forma que o Hamiltoniano  $H_0$  não depende explicitamente das variáveis  $\dot{\bar{q}}_\alpha$ . Essa característica é válida também para o Hamiltoniano canônico (3.37) no formalismo Hamiltoniano e é equivalente à propriedade dada pela equação (2.4) para as velocidades  $\dot{q}_\alpha$  no caso de Lagrangeanos de primeira ordem.

A partir deste ponto adotaremos a seguinte notação: o parâmetro temporal  $t$  e as coordenadas  $q_\alpha$  serão representadas, respectivamente, por  $t_0$  e  $t_\alpha$  enquanto  $\bar{q}_\alpha$  será indicada por  $\bar{t}_\alpha$ . Os momentos  $p_\alpha$  e  $\pi_\alpha$  serão representados por  $P_\alpha^p$  e  $P_\alpha^\pi$ , respectivamente, e o momento  $P_0$ , conjugado ao parâmetro temporal  $t_0$ , será definido como:

$$P_0 = \frac{\partial S}{\partial t} \quad (3.49)$$

Mas agora, devido às condições (3.45) e (3.46) para os momentos, as igualdades (3.23) fornecerão um novo conjunto de condições a ser satisfeito pela função  $S(q_i, \dot{q}_i, t)$ :

$$P_\alpha^p = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} = -H_\alpha^p(q_i, \bar{q}_i, p_a, \pi_a) \quad (3.50)$$

$$P_\alpha^\pi = \frac{\partial S}{\partial \bar{q}_i} = -H_\alpha^\pi(q_i, \bar{q}_i, p_a, \pi_a) \quad (3.51)$$

### Capítulo 3. Formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares 90

Para obtermos um extremo da integral de ação deveremos agora, além de satisfazer à equação diferencial parcial de Hamilton-Jacobi (3.24), satisfazer às condições (3.50) e (3.51). Ou seja, a condição para obtermos um extremo da integral de ação passa a ser a obtenção de uma função  $S(q_i, \dot{q}_i, t)$  que satisfaça ao seguinte conjunto de equações parciais de Hamilton-Jacobi (EDPHJ's):

$$H'_0 = P_0 + H_0 \left( t_0, t_\alpha, \bar{t}_\alpha; q_a, \bar{q}_a; p_a = \frac{\partial S}{\partial q_a}; \pi_a = \frac{\partial S}{\partial \bar{q}_a} \right) = 0 \quad (3.52)$$

$$H'^p_\alpha = P^p_\alpha + H^p_\alpha \left( t_0, t_\alpha, \bar{t}_\alpha; q_a, \bar{q}_a; p_a = \frac{\partial S}{\partial q_a}; \pi_a = \frac{\partial S}{\partial \bar{q}_a} \right) = 0 \quad (3.53)$$

$$H'^\pi_\alpha = P^\pi_\alpha + H^\pi_\alpha \left( t_0, t_\alpha, \bar{t}_\alpha; q_a, \bar{q}_a; p_a = \frac{\partial S}{\partial q_a}; \pi_a = \frac{\partial S}{\partial \bar{q}_a} \right) = 0 \quad (3.54)$$

Usando a definição (3.47) para  $H_0$ , derivamos a definição (3.52) para  $H'_0$  em relação a  $\pi_b$  obtendo:

$$\frac{\partial H'_0}{\partial \pi_b} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \frac{\partial f_a}{\partial \pi_b} - \dot{\bar{q}}_\alpha \frac{\partial H^\pi_\alpha}{\partial \pi_b} - \bar{q}_\alpha \frac{\partial H^p_\alpha}{\partial \pi_b} + \pi_a \frac{\partial f_a}{\partial \pi_b} + \dot{\bar{q}}_b \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial H'_0}{\partial \pi_b} = \dot{\bar{q}}_b - \dot{\bar{q}}_\alpha \frac{\partial H^\pi_\alpha}{\partial \pi_b} - \bar{q}_\alpha \frac{\partial H^p_\alpha}{\partial \pi_b} \quad (3.56)$$

Da mesma forma, derivando  $H'_0$  em relação a  $p_b$  temos

$$\frac{\partial H'_0}{\partial p_b} = -\dot{\bar{q}}_\alpha \frac{\partial H^\pi_\alpha}{\partial p_b} - \bar{q}_\alpha \frac{\partial H^p_\alpha}{\partial p_b} + \bar{q}_b = \bar{q}_b - \dot{\bar{q}}_\alpha \frac{\partial H^\pi_\alpha}{\partial p_b} - \bar{q}_\alpha \frac{\partial H^p_\alpha}{\partial p_b}, \quad (3.57)$$

onde  $\alpha = 1, \dots, R$ ;  $a, b = R + 1, \dots, N$ .

Lembrando que  $\dot{q}_i = \bar{q}_i$ , multiplicamos as equações (3.56) e (3.57) por  $dt = dt_0$  obtendo as seguintes identidades:

$$d\bar{q}_b = \frac{\partial H'_0}{\partial \pi_b} dt_0 + \frac{\partial H^p_\alpha}{\partial \pi_b} dt_\alpha + \frac{\partial H'^\pi_\alpha}{\partial \pi_b} d\bar{t}_\alpha \quad (3.58)$$

$$dq_b = \frac{\partial H'_0}{\partial p_b} dt_0 + \frac{\partial H^p_\alpha}{\partial p_b} dt_\alpha + \frac{\partial H'^\pi_\alpha}{\partial p_b} d\bar{t}_\alpha \quad (3.59)$$

Por outro lado, temos também as seguintes expressões identicamente satisfeitas

$$dq_\alpha = \frac{\partial H'_0}{\partial P^p_\alpha} dt_0 + \frac{\partial H^p_\beta}{\partial P^p_\alpha} dt_\beta + \frac{\partial H'^\pi_\beta}{\partial P^p_\alpha} d\bar{t}_\beta = \frac{\partial H^p_\beta}{\partial P^p_\alpha} dt_\beta = \delta_{\alpha\beta} dt_\beta = dt_\alpha \quad (3.60)$$

**Capítulo 3. Formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares 91**

$$d\bar{q}_\alpha = \frac{\partial H'_0}{\partial P_\alpha^\pi} dt_0 + \frac{\partial H'_\beta{}^p}{\partial P_\alpha^\pi} dt_\beta + \frac{\partial H'_\beta{}^\pi}{\partial P_\alpha^\pi} d\bar{t}_\beta = \frac{\partial H'_\beta{}^p}{\partial P_\alpha^\pi} dt_\beta = \delta_{\alpha\beta} d\bar{t}_\beta = d\bar{t}_\alpha \quad (3.61)$$

$$dq_0 = dt = \frac{\partial H'_0}{\partial P_0} dt_0 + \frac{\partial H'_\beta{}^p}{\partial P_0} dt_\beta + \frac{\partial H'_\beta{}^\pi}{\partial P_0} d\bar{t}_\beta = \frac{\partial H'_0}{\partial P_0} dt_0 = dt_0, \quad (3.62)$$

onde  $\beta = 1, \dots, R$ . Deste modo, podemos reescrever as equações (3.58) e (3.59) como:

$$d\bar{q}_i = \frac{\partial H'_0}{\partial \pi_i} dt_0 + \frac{\partial H'_\alpha{}^p}{\partial \pi_i} dt_\alpha + \frac{\partial H'_\alpha{}^\pi}{\partial \pi_i} d\bar{t}_\alpha; i = 1, \dots, N \quad (3.63)$$

$$dq_i = \frac{\partial H'_0}{\partial p_i} dt_0 + \frac{\partial H'_\alpha{}^p}{\partial p_i} dt_\alpha + \frac{\partial H'_\alpha{}^\pi}{\partial p_i} d\bar{t}_\alpha; i = 1, \dots, N \quad (3.64)$$

Se agora considerarmos que temos uma solução  $S(q_i, \dot{q}_i, t)$  do conjunto de EDPHJ's dado pelas equações (3.52), (3.53) e (3.54) e derivarmos estas equações com respeito à  $\bar{q}_i$ , obtemos:

$$\frac{\partial H'_0}{\partial \bar{q}_i} + \frac{\partial H'_0}{\partial P_0} \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \bar{q}_i} + \frac{\partial H'_0}{\partial p_a} \frac{\partial^2 S}{\partial q_a \partial \bar{q}_i} + \frac{\partial H'_0}{\partial \pi_a} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{q}_a \partial \bar{q}_i} = 0 \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial H'_\alpha{}^p}{\partial \bar{q}_i} + \frac{\partial H'_\alpha{}^p}{\partial P_\beta{}^p} \frac{\partial^2 S}{\partial t_\beta \partial \bar{q}_i} + \frac{\partial H'_\alpha{}^p}{\partial p_a} \frac{\partial^2 S}{\partial q_a \partial \bar{q}_i} + \frac{\partial H'_\alpha{}^p}{\partial \pi_a} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{q}_a \partial \bar{q}_i} = 0 \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial H'_\alpha{}^\pi}{\partial \bar{q}_i} + \frac{\partial H'_\alpha{}^\pi}{\partial P_\beta{}^\pi} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{t}_\beta \partial \bar{q}_i} + \frac{\partial H'_\alpha{}^\pi}{\partial p_a} \frac{\partial^2 S}{\partial q_a \partial \bar{q}_i} + \frac{\partial H'_\alpha{}^\pi}{\partial \pi_a} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{q}_a \partial \bar{q}_i} = 0 \quad (3.67)$$

Derivando as mesmas equações em relação a  $q_i$  temos:

$$\frac{\partial H'_0}{\partial q_i} + \frac{\partial H'_0}{\partial P_0} \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_i} + \frac{\partial H'_0}{\partial p_a} \frac{\partial^2 S}{\partial q_a \partial q_i} + \frac{\partial H'_0}{\partial \pi_a} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{q}_a \partial q_i} = 0 \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial H'_\alpha{}^p}{\partial q_i} + \frac{\partial H'_\alpha{}^p}{\partial P_\beta{}^p} \frac{\partial^2 S}{\partial t_\beta \partial q_i} + \frac{\partial H'_\alpha{}^p}{\partial p_a} \frac{\partial^2 S}{\partial q_a \partial q_i} + \frac{\partial H'_\alpha{}^p}{\partial \pi_a} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{q}_a \partial q_i} = 0 \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial H'_\alpha{}^\pi}{\partial q_i} + \frac{\partial H'_\alpha{}^\pi}{\partial P_\beta{}^\pi} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{t}_\beta \partial q_i} + \frac{\partial H'_\alpha{}^\pi}{\partial p_a} \frac{\partial^2 S}{\partial q_a \partial q_i} + \frac{\partial H'_\alpha{}^\pi}{\partial \pi_a} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{q}_a \partial q_i} = 0 \quad (3.70)$$

Por fim, derivando as expressões em questão em relação a  $t_0$  teremos:

$$\frac{\partial H'_0}{\partial t_0} + \frac{\partial H'_0}{\partial P_0} \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial t_0} + \frac{\partial H'_0}{\partial p_a} \frac{\partial^2 S}{\partial q_a \partial t_0} + \frac{\partial H'_0}{\partial \pi_a} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{q}_a \partial t_0} = 0 \quad (3.71)$$

$$\frac{\partial H'_\alpha{}^p}{\partial t_0} + \frac{\partial H'_\alpha{}^p}{\partial P_\beta{}^p} \frac{\partial^2 S}{\partial t_\beta \partial t_0} + \frac{\partial H'_\alpha{}^p}{\partial p_a} \frac{\partial^2 S}{\partial q_a \partial t_0} + \frac{\partial H'_\alpha{}^p}{\partial \pi_a} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{q}_a \partial t_0} = 0 \quad (3.72)$$

**Capítulo 3. Formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares 92**

$$\frac{\partial H'_\alpha{}^\pi}{\partial t_0} + \frac{\partial H'_\alpha{}^\pi}{\partial P_\beta^\pi} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{t}_\beta \partial t_0} + \frac{\partial H'_\alpha{}^\pi}{\partial p_a} \frac{\partial^2 S}{\partial q_a \partial t_0} + \frac{\partial H'_\alpha{}^\pi}{\partial \pi_a} \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{q}_a \partial t_0} = 0 \quad (3.73)$$

Definindo  $Z = S(q_i, \dot{q}_i, t)$  e usando as definições dos momentos junto com as equações (3.63) e (3.64) obtemos as seguintes identidades:

$$dZ = \frac{\partial S}{\partial t} dt_0 + \frac{\partial S}{\partial t_\alpha} dt_\alpha + \frac{\partial S}{\partial \bar{t}_\alpha} d\bar{t}_\alpha + \frac{\partial S}{\partial q_a} dq_a + \frac{\partial S}{\partial \bar{q}_a} d\bar{q}_a, \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} dZ &= -H_0 dt_0 - H'_\alpha{}^p dt_\alpha - H'_\alpha{}^\pi d\bar{t}_\alpha + p_a \left( \frac{\partial H'_0}{\partial p_a} dt_0 + \frac{\partial H'_\alpha{}^p}{\partial p_a} dt_\alpha + \frac{\partial H'_\alpha{}^\pi}{\partial p_a} d\bar{t}_\alpha \right) + \\ &+ \pi_a \left( \frac{\partial H'_0}{\partial \pi_a} dt_0 + \frac{\partial H'_\alpha{}^p}{\partial \pi_a} dt_\alpha + \frac{\partial H'_\alpha{}^\pi}{\partial \pi_a} d\bar{t}_\alpha \right), \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} dZ &= \left( -H_0 + p_a \frac{\partial H'_0}{\partial p_a} + \pi_a \frac{\partial H'_0}{\partial \pi_a} \right) dt_0 + \left( -H'_\alpha{}^p + p_a \frac{\partial H'_\alpha{}^p}{\partial p_a} + \pi_a \frac{\partial H'_\alpha{}^p}{\partial \pi_a} \right) dt_\alpha + \\ &+ \left( -H'_\alpha{}^\pi + p_a \frac{\partial H'_\alpha{}^\pi}{\partial p_a} + \pi_a \frac{\partial H'_\alpha{}^\pi}{\partial \pi_a} \right) d\bar{t}_\alpha \end{aligned} \quad (3.76)$$

Por outro lado, a partir das definições dos momentos temos:

$$dP_0 = \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} dt_0 + \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial t_\alpha} dt_\alpha + \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_a} dq_a + \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \bar{t}_\alpha} d\bar{t}_\alpha + \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \bar{q}_a} d\bar{q}_a \quad (3.77)$$

$$dp_i = \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial t} dt_0 + \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial t_\alpha} dt_\alpha + \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_a} dq_a + \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \bar{t}_\alpha} d\bar{t}_\alpha + \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \bar{q}_a} d\bar{q}_a \quad (3.78)$$

$$d\pi_i = \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{q}_i \partial t} dt_0 + \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{q}_i \partial t_\alpha} dt_\alpha + \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{q}_i \partial q_a} dq_a + \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{q}_i \partial \bar{t}_\alpha} d\bar{t}_\alpha + \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{q}_i \partial \bar{q}_a} d\bar{q}_a \quad (3.79)$$

Façamos agora a seguinte seqüência de operações, de forma a reescrever a expressão (3.77) para o diferencial  $dP_0$ : multiplicamos a equação (3.71) por  $dt_0$ , contraímos as equações (3.72) e (3.73), respectivamente, com  $dt_\alpha$  e  $d\bar{t}_\alpha$  e somamos os resultados à equação (3.77). Obtemos então:

$$\begin{aligned}
 dP_0 &+ \frac{\partial H'_0}{\partial t_0} dt_0 + \frac{\partial H'_\alpha{}^p}{\partial t_0} dt_\alpha + \frac{\partial H'_\alpha{}^\pi}{\partial t_0} d\bar{t}_\alpha = \\
 &= \frac{\partial^2 S}{\partial t_0 \partial q_a} \left( dq_a - \frac{\partial H'_0}{\partial p_a} dt_0 - \frac{\partial H'_\alpha{}^p}{\partial p_a} dt_\alpha - \frac{\partial H'_\alpha{}^\pi}{\partial p_a} d\bar{t}_\alpha \right) + \\
 &+ \frac{\partial^2 S}{\partial t_0 \partial \bar{q}_a} \left( d\bar{q}_a - \frac{\partial H'_0}{\partial \pi_a} dt_0 - \frac{\partial H'_\alpha{}^p}{\partial \pi_a} dt_\alpha - \frac{\partial H'_\alpha{}^\pi}{\partial \pi_a} d\bar{t}_\alpha \right) \quad (3.80)
 \end{aligned}$$

De um modo similar, seguimos o mesmo procedimento com as equações (3.68)-(3.70) e (3.78) de forma a reescrever a expressão (3.78) para os diferenciais  $dp_i$  como:

$$\begin{aligned}
 dp_i &+ \frac{\partial H'_0}{\partial q_i} dt_0 + \frac{\partial H'_\alpha{}^p}{\partial q_i} dt_\alpha + \frac{\partial H'_\alpha{}^\pi}{\partial q_i} d\bar{t}_\alpha = \\
 &= \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_a} \left( dq_a - \frac{\partial H'_0}{\partial p_a} dt_0 - \frac{\partial H'_\alpha{}^p}{\partial p_a} dt_\alpha - \frac{\partial H'_\alpha{}^\pi}{\partial p_a} d\bar{t}_\alpha \right) + \\
 &+ \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \bar{q}_a} \left( d\bar{q}_a - \frac{\partial H'_0}{\partial \pi_a} dt_0 - \frac{\partial H'_\alpha{}^p}{\partial \pi_a} dt_\alpha - \frac{\partial H'_\alpha{}^\pi}{\partial \pi_a} d\bar{t}_\alpha \right) \quad (3.81)
 \end{aligned}$$

Por fim, usando o procedimento acima com as equações (3.65)-(3.67) e (3.79) reescrevemos as expressões (3.79) para  $d\pi_i$  como:

$$\begin{aligned}
 d\pi_i &+ \frac{\partial H'_0}{\partial \bar{q}_i} dt_0 + \frac{\partial H'_\alpha{}^p}{\partial \bar{q}_i} dt_\alpha + \frac{\partial H'_\alpha{}^\pi}{\partial \bar{q}_i} d\bar{t}_\alpha = \\
 &= \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{q}_i \partial q_a} \left( dq_a - \frac{\partial H'_0}{\partial p_a} dt_0 - \frac{\partial H'_\alpha{}^p}{\partial p_a} dt_\alpha - \frac{\partial H'_\alpha{}^\pi}{\partial p_a} d\bar{t}_\alpha \right) + \\
 &+ \frac{\partial^2 S}{\partial \bar{q}_i \partial \bar{q}_a} \left( d\bar{q}_a - \frac{\partial H'_0}{\partial \pi_a} dt_0 - \frac{\partial H'_\alpha{}^p}{\partial \pi_a} dt_\alpha - \frac{\partial H'_\alpha{}^\pi}{\partial \pi_a} d\bar{t}_\alpha \right) \quad (3.82)
 \end{aligned}$$

Usando as equações diferenciais totais dadas por (3.58) e (3.59), as equações (3.80), (3.81) e (3.82) se reduzem a:

$$dP_0 = -\frac{\partial H'_0}{\partial t_0} dt_0 - \frac{\partial H'_\alpha{}^p}{\partial t_0} dt_\alpha - \frac{\partial H'_\alpha{}^\pi}{\partial t_0} d\bar{t}_\alpha \quad (3.83)$$

$$dp_i = -\frac{\partial H'_0}{\partial q_i} dt_0 - \frac{\partial H'_\alpha{}^p}{\partial q_i} dt_\alpha - \frac{\partial H'_\alpha{}^\pi}{\partial q_i} d\bar{t}_\alpha \quad (3.84)$$

$$d\pi_i = -\frac{\partial H'_0}{\partial \bar{q}_i} dt_0 - \frac{\partial H'_\alpha{}^p}{\partial \bar{q}_i} dt_\alpha - \frac{\partial H'_\alpha{}^\pi}{\partial \bar{q}_i} d\bar{t}_\alpha \quad (3.85)$$

Estas equações, junto com as expressões (3.62)-(3.64) e (3.76), são as equações diferenciais totais para as curvas características e, se formarem um conjunto completamente integrável, suas soluções simultâneas determinam  $S(q_i, \bar{q}_i, t_0)$  univocamente a partir das condições iniciais.

É preciso chamar a atenção para o fato de que, nesse formalismo, as equações de movimento (3.62)-(3.64) e (3.83)-(3.85), são equações diferenciais totais. Além disso, as coordenadas  $q_\alpha = t_\alpha$  e  $\bar{q}_\alpha = \bar{t}_\alpha$  *passam a ter o papel de parâmetros que descrevem a evolução do sistema* ao lado do parâmetro temporal  $t$ . Tais coordenadas não têm caráter dinâmico pois suas "equações de movimento" (3.60) e (3.61) são identicamente satisfeitas. Esse é um dos motivos para insistirmos em considerar os vínculos (3.36) envolvendo os momentos  $p_\alpha$  como vínculos primários, pois se não os tratássemos dessa forma não poderíamos escrever a expressão (3.46) no formalismo de Hamilton-Jacobi e portanto as coordenadas  $q_\alpha$  não assumiriam a condição de parâmetros. Teríamos então uma situação em que as "coordenadas"  $\bar{q}_\alpha$  (que são as derivadas temporais das coordenadas  $q_\alpha$ ) seriam parâmetros descrevendo a evolução do sistema, enquanto as coordenadas  $q_\alpha$  teriam uma dinâmica própria. Para evitar esse tipo de contradição optamos por tratar os vínculos (3.36) como vínculos primários, o que não representa nenhuma dificuldade, ao contrário, é uma escolha natural já no formalismo Hamiltoniano.

### 3.5 Exemplo: Eletrodinâmica generalizada de Podolsky

Nesta seção analisaremos um sistema singular com Lagrangeano de segunda ordem usando o formalismo de Hamilton-Jacobi de modo a exemplificar o procedimento desenvolvido na seção anterior. Faremos também a análise do mesmo Lagrangeano usando o

### Capítulo 3. Formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares 95

formalismo Hamiltoniano e fazendo a comparação entre os resultados obtidos por cada um dos métodos.

Usaremos novamente como exemplo um sistema com infinitos graus de liberdade, descrito por uma densidade Lagrangeana dependente das variáveis de campo e de suas derivadas até segunda ordem:  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \partial\psi, \partial^2\psi)$ . A métrica adotada será a mesma usada na última seção do segundo capítulo, assim como a notação de índices dos quadri-vetores e tri-vetores.

Como temos agora uma densidade Lagrangeana de segunda ordem as equações de movimento de Euler-Lagrange passam a ser

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^a} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^a)} \right) + \partial_\mu \partial_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \psi^a)} \right) = 0 \quad (3.86)$$

enquanto os momentos conjugados a  $\dot{\psi}^a$  e  $\ddot{\psi}^a$  são, respectivamente

$$p_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^a} - 2\partial_k \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k \dot{\psi}^a)} \right) - \partial_0 \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{\psi}^a} \right) \quad (3.87)$$

$$\pi_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{\psi}^a}, \quad (3.88)$$

e a matriz Hessiana é dada por:

$$H_{ab}(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \ddot{\psi}^a \partial \ddot{\psi}^b} \delta^3(\vec{x}' - \vec{x}) \quad (3.89)$$

Com essas modificações, analisemos o caso da Eletrodinâmica de Podolsky [44], que é baseada na seguinte densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + a^2 \partial_\lambda F^{\alpha\lambda} \partial_\rho F_\alpha{}^\rho \quad (3.90)$$

onde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  e  $a$  é uma constante com dimesão de comprimento.

Uma análise do formalismo Hamiltoniano para esta teoria, cujos resultados iremos comparar com o formalismo de Hamilton-Jacobi desenvolvido na última seção, pode ser encontrada na referência [43]. As equações de movimento de Euler-Lagrange são

$$(1 + 2a^2 \square) \partial_\rho F_\alpha{}^\rho = 0, \quad (3.91)$$

### Capítulo 3. Formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares 96

onde usamos como variáveis dinâmicas os campos  $A^\mu$  e  $\bar{A}^\mu = \dot{A}^\mu$ . Os momentos canonicamente conjugados, dados pelas definições (3.87) e (3.88), são:

$$p_\mu = -F_{0\mu} - 2a^2 \left( \partial_k \partial_\lambda F^{0\lambda} \delta^k_\mu - \partial_0 \partial_\lambda F_\mu^\lambda \right) \quad (3.92)$$

$$\pi_\mu = 2a^2 \left( \partial_\lambda F^{0\lambda} \delta^0_\mu - \partial_\lambda F_\mu^\lambda \right) \quad (3.93)$$

A matriz Hessiana é dada por:

$$H_{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{x}') = 2a^2 \left( -\delta^0_\alpha \delta^0_\beta + \eta_{\alpha\beta} \right) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (3.94)$$

$$H_{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{x}') = -4a^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (3.95)$$

A matriz Hessiana é obviamente singular e seu posto é 3, portanto teremos dois vínculos primários. Da definição dos momentos  $p_\mu$  e  $\pi_\mu$  temos obviamente os vínculos:

$$\Phi_1 = \pi_0 \approx 0 \quad (3.96)$$

$$\Phi_2 = p_0 - \partial^k \pi_k \approx 0 \quad (3.97)$$

O uso das definições dos momentos  $\pi$  nos permite escrever as variáveis  $\dot{\bar{A}}^i$  como:

$$\dot{\bar{A}}^i = \frac{1}{2a^2} \pi^i + \partial_k F^{ik} + \partial^i \bar{A}_0 \quad (3.98)$$

O Hamiltoniano canônico será dado por

$$H_c = \int d^3x \left[ p_\mu \bar{A}^\mu + \pi_\mu \dot{\bar{A}}^\mu - \mathcal{L} \right] \quad (3.99)$$

onde usaremos a equação (3.98) para eliminar as variáveis  $\dot{\bar{A}}^i$  obtendo:

$$\begin{aligned} H_c = & \int d^3x \left[ \bar{A}^0 \partial^i \pi_i + p_i \bar{A}^i + \frac{1}{4a^2} \pi_i \pi^i + \pi_i \partial_k F^{ik} + \pi_i \partial^i \bar{A}_0 + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (\bar{A}_i - \partial_i A_0) (\bar{A}^i - \partial^i A_0) - a^2 (\partial_k \bar{A}^k - \partial_k \partial^k A_0) (\partial_i \bar{A}^i - \partial_i \partial^i A_0) \right] \end{aligned} \quad (3.100)$$



### Capítulo 3. Formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares 97

No formalismo de Dirac o Hamiltoniano primário é:

$$H_P = H_c + \int d^3x (C_1(x) \Phi_1 + C_2(x) \Phi_2) \quad (3.101)$$

As condições de consistência resultam em:

$$\dot{\Phi}_1 = \{\Phi_1, H_P\} \equiv 0 \quad (3.102)$$

$$\dot{\Phi}_2 = \{\Phi_2, H_P\} = \partial^k p_k \approx 0 \quad (3.103)$$

Desse modo, temos o vínculo secundário dado por

$$\Phi_3 = \partial^k p_k \approx 0 \quad (3.104)$$

que não resultará em novos vínculos pois a condição de consistência  $\dot{\Phi}_3 \approx \{\Phi_3, H_P\} \approx 0$  é automaticamente satisfeita. Todos os vínculos são de primeira classe e conseqüentemente o Hamiltoniano estendido definido por (2.122) é:

$$H_E = H_c + \int d^3x (C_1(x) \Phi_1 + C_2(x) \Phi_2 + C_3(x) \Phi_3) \quad (3.105)$$

As equações de movimento para as variáveis  $\dot{A}^\alpha$ , dadas por  $\dot{A}^\alpha \approx \{A^\alpha, H_E\}$ , têm como resultado:

$$\dot{A}^0 = \bar{A}^0 + C_2; \quad \dot{A}^i = \bar{A}^i - \partial^i C_3 \quad (3.106)$$

Estes resultados simplesmente indicam que  $\bar{A}^\alpha$  é definido como a derivada temporal de  $A^\alpha$  mais uma função aditiva arbitrária. Além disso,  $\dot{\bar{A}}^\alpha \approx \{\bar{A}^\alpha, H_E\}$  resulta em

$$\dot{\bar{A}}^0 = C_1; \quad \dot{\bar{A}}^i = \frac{1}{2a^2} \pi^i + \partial_k F^{ik} + \partial^i \bar{A}_0 \quad (3.107)$$

o que indica que tanto  $\bar{A}^0$  e  $A^0$  são arbitrárias, enquanto a expressão para  $\dot{\bar{A}}^i$  é idêntica à equação (3.98) que expressa as velocidades em função das variáveis canônicas.

Para os momentos canônicos  $\dot{\pi}_i \approx \{\pi_i, H_E\}$  e  $\dot{p}_\alpha \approx \{p_\alpha, H_E\}$  resultam em:

$$\dot{\pi}_i = -F_{0i} - 2a^2 \partial_i \partial_k F_0^k - p_i \quad (3.108)$$

**Capítulo 3. Formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares 98**

$$\dot{p}_0 = -\partial_i F^{0i} - 2a^2 \partial^i \partial_i \partial_k F_0^k \quad (3.109)$$

$$\dot{p}_i = -\partial_i \partial^k \pi_k + \partial_k \partial^k \pi_i - \partial_k F^{ki} \quad (3.110)$$

A equação (3.108) é a definição de  $p_i$  dada pela equação (3.92) e, junto com a equação (3.109), resulta no vínculo secundário  $\Phi_3$ .

Usemos agora o formalismo de Hamilton-Jacobi desenvolvido na seção anterior. A partir das equações (3.52)-(3.54) temos:

$$H'_0 = H_c + P_0; P_0 = \frac{\partial S}{\partial t} \quad (3.111)$$

$$H'_1 = \pi_0; H'_2 = p_0 - \partial^k \pi_k \quad (3.112)$$

A equação diferencial total para  $A^i$  é:

$$dA^i = \frac{\partial H'_0}{\partial p_i} dt + \frac{\partial H'_1}{\partial p_i} d\bar{A}_0 + \frac{\partial H'_2}{\partial p_i} dA_0 \quad (3.113)$$

$$dA^i = \frac{\partial H'_0}{\partial p_i} dt = \frac{\partial H_c}{\partial p_i} dt \Rightarrow dA^i = \bar{A}^i dt \quad (3.114)$$

Este resultado é completamente equivalente à equação (3.106) já que o coeficiente  $C_3$  naquela equação é arbitrário. Para  $\bar{A}^i$  obtemos:

$$d\bar{A}^i = \frac{\partial H'_0}{\partial \pi_i} dt + \frac{\partial H'_1}{\partial \pi_i} d\bar{A}_0 + \frac{\partial H'_2}{\partial \pi_i} dA_0 = \frac{\partial H'_0}{\partial \pi_i} dt = \frac{\partial H_c}{\partial \pi_i} dt \quad (3.115)$$

$$d\bar{A}^i = \left( \frac{1}{2a^2} \pi^i + \partial_k F^{ik} + \partial^i \bar{A}_0 \right) dt \quad (3.116)$$

Novamente temos um resultado em concordância com o formalismo de Dirac, cujo resultado foi dado na equação (3.107).

Para os momentos  $p_i$  e  $p_0$  temos

$$dp^i = -\frac{\partial H'_0}{\partial A_i} dt - \frac{\partial H'_1}{\partial A_i} d\bar{A}_0 - \frac{\partial H'_2}{\partial A_i} dA_0 = -\frac{\partial H'_0}{\partial A_i} dt = -\frac{\partial H_c}{\partial A_i} dt \quad (3.117)$$

$$dp^i = - \int d^3x \left[ \pi_j \partial_k \left( \frac{\partial F^{jk}}{\partial A_i} \right) - \frac{1}{2} F^{jn} \frac{\partial F_{jn}}{\partial A_i} \right] dt \quad (3.118)$$

$$dp^i = \left[ -\partial^i \partial^k \pi_k + \partial_k \partial^k \pi^i - \partial_k F^{ki} \right] dt \quad (3.119)$$

e

$$dp^0 = -\frac{\partial H'_0}{\partial A_0} dt - \frac{\partial H'_1}{\partial A_0} d\bar{A}_0 - \frac{\partial H'_2}{\partial A_0} dA_0 = -\frac{\partial H_c}{\partial A_0} dt \quad (3.120)$$

$$dp^0 = -\int d^3x \left[ (\bar{A}^i - \partial^i A_0) \frac{\partial (\bar{A}_i - \partial_i A_0)}{\partial A_0} - 2a^2 (\partial_i \bar{A}^i - \partial_i \partial^i A_0) \frac{\partial (\partial_k \bar{A}^k - \partial_k \partial^k A_0)}{\partial A_0} \right] dt \quad (3.121)$$

$$dp^0 = \left[ -\partial_i (\bar{A}^i - \partial^i A_0) - 2a^2 \partial^k \partial^k (\partial_i \bar{A}^i - \partial_i \partial^i A_0) \right] dt \quad (3.122)$$

Finalmente, para  $\pi^i$  temos:

$$d\pi^i = -\frac{\partial H'_0}{\partial \bar{A}_i} dt - \frac{\partial H'_1}{\partial \bar{A}_i} d\bar{A}_0 - \frac{\partial H'_2}{\partial \bar{A}_i} dA_0 = -\frac{\partial H'_0}{\partial \bar{A}_i} dt = -\frac{\partial H_c}{\partial \bar{A}_i} dt \quad (3.123)$$

$$d\pi^i = -\int d^3x \left[ p^j \frac{\partial \bar{A}_j}{\partial \bar{A}_i} + (\bar{A}^j - \partial^j A_0) \frac{\partial (\bar{A}_j - \partial_j A_0)}{\partial A_0} - 2a^2 (\partial_j \bar{A}^j - \partial_j \partial^j A_0) \frac{\partial (\partial_k \bar{A}^k - \partial_k \partial^k A_0)}{\partial A_0} \right] dt \quad (3.124)$$

$$d\pi^i = \left[ -p^i - F^{0i} - 2a^2 \partial^i \partial_k F^{0k} \right] dt \quad (3.125)$$

As equações (3.119), (3.122) e (3.125) são completamente equivalentes, respectivamente, às equações (3.110), (3.109) e (3.108) no formalismo de Dirac. Dessa forma, as equações (3.122) e (3.125) nos fornecem o vínculo secundário que não está presente nas equações diferenciais totais obtidas no formalismo de Hamilton-Jacobi.

É importante notar que, em ambos os formalismos, as variáveis  $\bar{A}^0$  e  $A^0$  são arbitrárias. Contudo, no formalismo de Hamilton-Jacobi elas são tratadas como tais desde o princípio: são parâmetros que descrevem a evolução do sistema físico. Já no formalismo Hamiltoniano a arbitrariedade destas variáveis é consequência das equações de

### Capítulo 3. Formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares100

movimento e da presença dos coeficientes arbitrários no Hamiltoniano primário (3.101) e, conseqüentemente, no Hamiltoniano estendido (3.105).

Contudo, o fato de as variáveis arbitrárias serem as mesmas em ambos os formalismos não é uma mera coincidência. Isso é uma conseqüência do fato de que, como vimos no desenvolvimento do formalismo Hamiltoniano, os coeficientes arbitrários presentes no Hamiltoniano primário correspondem às velocidades que não podem ser resolvidas em função das variáveis canônicas e portanto as coordenadas correspondentes a essas velocidades serão funções arbitrárias do tempo. Já no formalismo de Hamilton-Jacobi essas variáveis são consideradas como parâmetros arbitrários desde o princípio do desenvolvimento do formalismo.

Devemos também destacar a necessidade de, no formalismo de Hamilton-Jacobi, obter expressões para os momentos  $\pi_\alpha$  e  $p_\alpha$  **exatamente com a forma dada pelas equações (3.45) e (3.46)**. Não existe uma exigência semelhante no formalismo Hamiltoniano apesar de termos feito uso das igualdades (3.30) e (3.35), que são equivalentes às expressões (3.45) e (3.46), para ao obtermos os vínculos primários (ou da igualdade (1.18) no caso de Lagrangeanos de primeira ordem). Isso deve-se ao fato de que poderíamos substituir os vínculos primários assim obtidos por um número igual de combinações lineares independentes desses vínculos. Estas combinações lineares serão novos vínculos primários que não terão a forma específica apresentada nas equações (3.31) e (3.36) (equação (1.19) no caso de Lagrangeanos de primeira ordem) e portanto o formalismo Hamiltoniano para sistemas singulares **não depende de nenhuma expressão em especial para os vínculos**.

## Considerações finais

Algumas questões relativas tanto ao formalismo Hamiltoniano quanto ao formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares ainda demandam um estudo mais detalhado. Em primeiro lugar, a construção do gerador de transformações de gauge  $G$  no formalismo Hamiltoniano ainda não apresenta uma solução satisfatória. O procedimento desenvolvido na seção 2.7 parte de uma hipótese forte com relação à forma do gerador  $G$  que, apesar de ser válida em princípio, nada mais é que uma transposição direta e não justificável, para o formalismo Hamiltoniano, de um resultado obtido no formalismo Lagrangeano [8]. Além disso, como já foi dito no fim da seção 2.7, tal procedimento só funciona sem problemas para sistemas cujas cadeias de condições de consistência que envolvem vínculos de segunda classe sejam totalmente separadas daquelas que envolvem vínculos de primeira classe ou, de uma forma mais restritiva, para sistemas que tenham apenas vínculos de primeira classe.

Temos também o problema relativo à construção do gerador de transformações de gauge para Lagrangeanos de segunda ordem para o qual já havíamos chamado a atenção na seção 3.3. O algoritmo de Castellani foi generalizado por Li [32] para Lagrangeanos de segunda ordem, contudo tal generalização foi feita considerando-se como primários apenas os vínculos  $\bar{\Phi}_\alpha$  dados pela equação (3.31). Os vínculos  $\Phi_\alpha$  dados por (3.36) seriam então obtidos como condições consistência para os  $\bar{\Phi}_\alpha$  e desta forma os coeficientes destes vínculos no gerador de transformações de gauge  $G$  estarão correlacionados da forma mostrada na seção 2.7, sendo que essa escolha fornece o gerador de transformações de gauge correto para diversos exemplos físicos [32, 33, 43].

Desse modo, a escolha dos vínculos  $\Phi_\alpha$  como vínculos primários ou secundários, que é totalmente indiferente do ponto de vista da dinâmica do formalismo Hamiltoniano, passa a ter uma escolha preferencial do ponto de vista do gerador das transformações de gauge.

Entretanto, nos parece que tanto esse problema quanto a falta de um algoritmo satisfatório para a construção do gerador  $G$  das transformações de gauge são conseqüência da falta de uma análise matemática conectando as transformações de gauge do formalismo Lagrangeano com as transformações de gauge no formalismo Hamiltoniano. De todo modo, o formalismo aqui apresentado para construção do gerador  $G$  é útil em muitas teorias físicas para encontrar as transformações de simetria do Lagrangeano, como foi exemplificado no fim do segundo capítulo usando-se o Eletromagnetismo de Maxwell.

Temos ainda a necessidade de estudar as condições de integrabilidade das equações de movimento (3.62)-(3.64) e (3.83)-(3.85). Essas condições, que já foram estudadas no caso de Lagrangeanos de primeira ordem [45], poderão impor novas equações sobre as variáveis canônicas que serão análogas aos vínculos secundários do formalismo Hamiltoniano. Para o caso da Eletrodinâmica de Podolsky as equações de movimento obtidas no formalismo de Hamilton-Jacobi são naturalmente equivalentes às equações de movimento obtidas no formalismo Hamiltoniano com todas as condições de consistência satisfeitas, o que indica que essas condições de integrabilidade serão naturalmente satisfeitas nesse caso. De forma análoga, a formulação de Hamilton-Jacobi para a Eletrodinâmica de Maxwell, que já foi estudada na literatura [46], fornece resultados equivalentes ao formalismo Hamiltoniano sem a necessidade de analisar-se as condições de integrabilidade. Foi também com a intenção de evitarmos a necessidade prematura de analisarmos as condições de integrabilidade que consideramos os vínculos  $\Phi_\alpha$  como primários e usamos as expressões (3.46) deles derivadas no desenvolvimento do formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares. Este argumento se junta aos argumentos apresentados anteriormente a favor da opção por tratar os vínculos  $\Phi_\alpha$

como primários, apesar do problema que esta escolha gera na construção do gerador  $G$  das transformações de gauge.

Também necessita de maiores estudos o desenvolvimeto das generalizações naturais do formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares aqui apresentado: a generalização formal para sistemas singulares com derivadas de ordem qualquer e o estudo de sistemas com variáveis Grassmanianas ou com variáveis Berezinianas. Por último, falta ainda analisar o processo de quantização para tal formalismo.

## Bibliografia

- [1] H. Godstein - *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, 2<sup>nd</sup> edition, 1980)
- [2] W. Yourgrau & S. Mandelstam - *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory* (Sir Isaac Pitman and Sons Ltd., 3<sup>rd</sup> edition, 1968)
- [3] L. Landau & E. Lifshitz - *Mecânica* (Editora Mir, 1978)
- [4] C. Lanczos - *The Variational Principles of Mechanics* (Dover Publications, 4<sup>th</sup> edition, 1986)
- [5] P. G. Bergmann - *Phys. Rev.*, **75**, 680 (1949)
- [6] P. G. Bergmann & J. H. M. Brunings - *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 480 (1949)
- [7] P. G. Bergmann, R. Penfield, R. Schiller & H. Zatzkis - *Phys. Rev.*, **80**, 81 (1950)
- [8] P. G. Bergmann & J. L. Anderson - *Phys. Rev.*, **83**, 1018 (1951)
- [9] P. A. M. Dirac - *Canadian Journal of Mathematics*, **2**, 129 (1950)
- [10] P. A. M. Dirac - *Canadian Journal of Mathematics*, **3**, 1 (1951)
- [11] P. A. M. Dirac - *Lectures on Quantum Mechanics* (Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York)
- [12] Y.Güler - *Il Nuovo Cimento B*, **107**, 1389 (1992)



- 
- [13] R. Courant & D. Hilber - *Methods of Mathematical Physics*, Vol. II, página 32 (Interscience Publishers, 1962)
- [14] S. Lang - *A Second Course in Calculus* (Addison-Wesley, 3<sup>rd</sup> edition, 1973)
- [15] E. Hille - *Analysis*, Vol. 2, página 357 (Blaisdell Publishing Company, 1966)
- [16] K. Sundermeyer - *Lecture Notes in Physics, 169: Constrained Dynamics* (Springer-Verlag, 1982)
- [17] E. C. G. Sudarshan & N. Mukunda - *Classical Dynamics: A Modern Perspective* (Wiley, 1974)
- [18] W. Rudin - *Principles of Mathematical Analysis*, página 252 (McGraw-Hill Kogakusha, 3<sup>rd</sup> edition, 1976)
- [19] N. P. Konopleva & V. N. Popov - *Gauge Fields* (Harwood Academic Publishers, 1981)
- [20] K. Kamimura - *Il Nuovo Cimento B*, **68**, 33 (1982)
- [21] V. V. Nesterenko & A. M. Chervyakov - *Theor. Math. Phys.*, **64**, 701 (1986)
- [22] D. M. Gitman & I. V. Tyutin - *Quantization of Fields with Constraints* (Springer-Verlag, 1990)
- [23] R. Cawley - *Phys. Rev. Lett.*, **42**, 413 (1979)
- [24] R. Cawley - *Phys. Rev. D*, **21**, 2988 (1980)
- [25] D. M. Appleby - *J. Phys. A: Math. Gen.*, **15**, 1191 (1982)
- [26] M. J. Gotay - *J. Phys. A: Math. Gen.*, **16**, L141 (1983)
- [27] R. Sugano & T. Kimura - *J. Phys. A: Math. Gen.*, **16**, 4417 (1983)
- [28] M. E. V. Costa, H. O. Girotti & T. J. M. Simões - *Phys. Rev. D*, **32**, 405 (1985)

- [29] A. Cabo & D. Louis-Martinez - *Phys. Rev. D*, **42**, 2726 (1990)
- [30] L. Castellani - *Ann. Phys.*, **143**, 357 (1982)
- [31] C. A. P. Galvão & J. B. T. Boechat - *J. Math. Phys.*, **31**, 448 (1990)
- [32] Zi-Ping Li - *J. Phys. A: Math. Gen.*, **24**, 4261 (1991)
- [33] Zi-Ping Li & Yi-Cheng Xie - *Commun. Theor. Phys.*, **21**, 247 (1994)
- [34] B. M. Pimentel & R. G. Teixeira - *Preprint IFT-P.001/96* a sair em *Il Nuovo Cimento B*, vol. **111**, fascículo 7, de julho de 1996
- [35] M. Ostrogradski - *Mem. Ac. St. Petersbourg*, **1** (1850) 385
- [36] Y.Güler - *Il Nuovo Cimento B*, **100**, 251 (1987)
- [37] Y.Güler - *Il Nuovo Cimento B*, **100**, 267 (1987)
- [38] C. Carathéodory - *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order, Part II*, Página 205 (Holden-Day, 1967)
- [39] V. Tapia - *Il Nuovo Cimento B*, **90**, 15 (1985)
- [40] C. Batlle, J. Gomis, J. M. Pons & N. Román-Roy - *J. Phys. A: Math. Gen.*, **21**, 2693 (1988)
- [41] V. V. Nesterenko - *J. Phys. A: Math. Gen.*, **22**, 1673 (1989)
- [42] Y. Saito, R. Sugano, T. Ohta & T. Kimura - *J. Math. Phys.*, **30**, 1122 (1989)
- [43] C. A. P. Galvão & B. M. Pimentel - *Can. J. Phys.*, **66**, 460 (1988)
- [44] B. Podolsky & P. Schwed - *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 40 (1948)
- [45] Y.Güler - *Il Nuovo Cimento B*, **107**, 1143 (1992)
- [46] E. M. R. Muffeh & Y.Güler - *Il Nuovo Cimento B*, **109**, 341 (1994)