

Dissertação de Mestrado

Mestrado em Física

INVESTIGANDO O EFEITO DE CAMPOS ELÉTRICO E MAGNÉTICO
EM UM SISTEMA DISSIPATIVO PULSANTE

Bruno Castaldi

Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho (orientador)

Rio Claro (SP)

2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

BRUNO CASTALDI

INVESTIGANDO O EFEITO DE CAMPOS ELÉTRICO E
MAGNÉTICO EM UM SISTEMA DISSIPATIVO PULSANTE

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Ricardo Egydio de Carvalho

Rio Claro, SP
2014

530 Castaldi, Bruno
C346i Investigando o efeito de campos elétrico e magnético em
um sistema dissipativo pulsante / Bruno Castaldi. - Rio Claro,
2014
104 f. : il., figs., gráfs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Ricardo Egydio de Carvalho

1. Física. 2. Aceleração de Fermi. 3. Bilhares. 4. Caos. 5.
Eletrodinâmica clássica. I. Título.

BRUNO CASTALDI

INVESTIGANDO O EFEITO DE CAMPOS ELÉTRICO E
MAGNÉTICO EM UM SISTEMA DISSIPATIVO PULSANTE

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Comissão Examinadora

Dr. Ricardo Egydio de Carvalho – IGCE/UNESP (Orientador)

Dr. Emanuel Fernandes de Lima – IGCE/UNESP

Dr. Celso Vieira Abud – Instituto de Física – USP/SP

Rio Claro-SP, 26 de fevereiro de 2014

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho, pelos anos de amizade, companheirismo, dedicação e orientação;

Ao Celso V. Abud e à Ana P. Mijolaro pelos programas computacionais cedidos que muito contribuíram para a execução e desenvolvimento deste trabalho;

Aos colegas da Pós, aos funcionários do IGCE e de toda a comunidade Unespiana;

A meus familiares, alunos e amigos pelo apoio e paciência;

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo financiamento do Projeto e suporte através da concessão da Bolsa de Mestrado, Processo 2011/14460-8.

RESUMO

A ideia central deste trabalho é entender e analisar os aspectos dinâmicos do movimento de uma partícula eletricamente carregada movendo-se sob a ação da Força de Lorentz, devido a fontes de campos elétrico e magnético, no bilhar anular que, por sua vez, corresponde à região no espaço bidimensional delimitada por dois círculos de raios R e r ($r < R$), que podem estar concêntrica ou excentricamente posicionados. Descrevemos o sistema pulsante com uma dependência temporal nas fronteiras: $R(t)$ e $r(t)$, tal que haja transferência de momento para a partícula nos instantes de colisões, que são estudadas nos casos não-dissipativo (elásticas) e dissipativo (inelásticas). Para o bilhar excêntrico dependente do tempo, sabe-se que a partícula pode ganhar energia indeterminadamente e o sistema apresenta Aceleração de Fermi (AF), o que corrobora com a hipótese suportada na Conjectura-LRA. A proposta é estudar os efeitos de ambos os campos externos na energia média do sistema, buscando mecanismos que possam suprimir ou incentivar o fenômeno da AF. Os resultados conduzem a crer que o campo elétrico contribui para o aumento da energia média, tornando a AF um fenômeno mais robusto, enquanto o campo magnético, aplicado na direção perpendicular em relação ao plano do bilhar, em geral conduz a partícula para as *Whispering Gallery Orbits* e, ao contrário, tende a suprimir ou a retardar o aparecimento da Aceleração de Fermi no sistema. Tendo como base os resultados obtidos, propomos um aditivo à Conjectura-LRA, incluindo a dependência na energia total sobre a possibilidade de verificação de dinâmica caótica em bilhares estáticos. Além disso, mostramos como o ganho indeterminado de energia torna-se possível na geometria concêntrica pela ação do campo elétrico e como a combinação de parâmetros pode influenciar nos mecanismos analisados, considerando, inclusive, o modelo com colisões inelásticas.

Palavras-chave: Aceleração de Fermi. Bilhares. Caos. Eletrodinâmica Clássica.

ABSTRACT

The central idea of this work is to understand and analyze the dynamic aspects of the motion of an electrically charged particle moving under the action of the Lorentz force, due to sources of electric and magnetic fields, inside the annular billiard which, in turn, corresponds to the two-dimensional region bounded by two circles of radius R and r ($r < R$), which may be concentrically or eccentrically positioned. We describe the breathing system with time-dependent boundaries: $R(t)$ and $r(t)$, such that there exist momentum transfers to the particle at each collision with the boundaries, which are studied in the non-dissipative (elastic) and dissipative (inelastic) cases. For the time-dependent eccentric billiard, it is well-known that the particle can gain energy indefinitely and the system presents Fermi Acceleration (FA), corroborating to the hypothesis supported by the LRA-Conjecture. The proposal is to study the effects of both external fields on the average energy of the system, looking for mechanisms to suppress or to enhance the FA phenomenon. The results lead us to believe that the electric field contributes to the increase of the average energy, making FA a more robust phenomenon, while the magnetic field, applied in the perpendicular direction related to the plane of the billiard, in general confines the particle into the Whispering Gallery Orbits and, instead, tends to suppress or delay the onset of Fermi acceleration in the system. Based on these results, we propose an additive for LRA-Conjecture, including the dependence on the total energy for the possibility to one verifies chaotic dynamics in static billiards. Furthermore, we show how the indeterminate energy gain becomes possible for the concentric geometry via electric field action and how the combination of parameters can influence the mechanisms discussed, also considering the model with inelastic collisions.

Keywords: Fermi Acceleration. Billiards. Chaos. Classical Electrodynamics.

LISTA DE PRINCIPAIS SIGLAS E SÍMBOLOS

AF – Aceleração de Fermi

BAE – Bilhar Anular Estático

BAME – Bilhar Anular Magnético Estático

BAEE – Bilhar Anular Elétrico Estático

BAEME – Bilhar Anular Eletromagnético Estático

BAP – Bilhar Anular Pulsante

BAMP – Bilhar Anular Magnético Pulsante

BAEP – Bilhar Anular Elétrico Pulsante

BAEMP – Bilhar Anular Eletromagnético Pulsante

WGO – *Whispering Gallery Orbits*

GSP – Gráfico da Seção de Poincaré

CI – Condições Iniciais

r_0 – raio médio do círculo interno

δ – excentricidade

B – intensidade do campo magnético

E – intensidade do campo elétrico

v – velocidade da partícula

\mathcal{E} – Energia Total da partícula

γ – coeficiente de restituição do choque

ω – frequência normalizada de oscilação da fronteira interna

e_R – meia-amplitude de oscilação da fronteira externa

e_r – meia-amplitude de oscilação da fronteira interna

$\sigma_e - \sigma_i$ – diferença de fase de oscilação inicial entre as fronteiras

$\langle v \rangle$ – velocidade média do *ensemble*

v_0 – velocidade inicial da partícula para o conjunto de condições iniciais

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	8
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	9
2.1 Bilhares e O Bilhar Anular Estático (BAE).....	9
2.2 Aceleração de Fermi, Bilhares Pulsantes e a Conjectura-LRA.....	16
2.3 O Bilhar Anular Pulsante.....	21
2.4 Dissipação como mecanismo de Supressão da Aceleração de Fermi.....	26
2.5 Dissipação como mecanismo de Ganho de Energia.....	27
3. DINÂMICA DE UMA PARTÍCULA ELETRICAMENTE CARREGADA SOB A AÇÃO DE CAMPOS ELÉTRICO E MAGNÉTICO	29
3.1 Campo Eletromagnético e a Força de Lorentz.....	29
3.2 O Potencial Elétrico.....	31
3.3 O Potencial Vetor Magnético.....	31
3.4 A Função Lagrangeana.....	33
3.5 A Função Hamiltoniana e as Equações de Movimento de Hamilton-Jacob.....	34
3.5.1 <i>Caso Particular: Campo Elétrico Nulo</i>	36
3.5.2 <i>Caso Particular: Campo Magnético Nulo</i>	37
4. O BILHAR ANULAR ESTÁTICO SOB A AÇÃO DE CAMPOS ELÉTRICO E MAGNÉTICO	38
4.1 O Bilhar Anular Magnético Estático (BAME).....	42
4.2 O Bilhar Anular Elétrico Estático (BAEE).....	46
4.3 O Bilhar Anular Eletromagnético Estático (BAEME).....	53
5. O BILHAR ANULAR MAGNÉTICO PULSANTE	61
5.1 Geometria Concêntrica.....	64
5.2 Geometria Excêntrica.....	70
5.3 Campo Magnético e a Conjectura-LRA.....	74
6. O BILHAR ANULAR MAGNÉTICO PULSANTE DISSIPATIVO	77
7. O BILHAR ANULAR ELÉTRICO PULSANTE	84
8. O BILHAR ANULAR ELÉTRICO PULSANTE DISSIPATIVO	91
8.1 Geometria Excêntrica.....	91
8.2 Geometria Concêntrica.....	93
9. O BILHAR ANULAR ELETROMAGNÉTICO PULSANTE	95
10. CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS	99
REFERÊNCIAS	101

1. INTRODUÇÃO

A busca por dispositivos criadores de energia há muito tempo entretêm os cientistas dos mais diversos meios. O modelo do acelerador de Fermi é uma das ferramentas teóricas mais utilizadas para a modelagem e estudos de mecanismos semelhantes, que por utopia poderiam ser reais. A Dinâmica não-linear na busca pela ordem dentro do Caos instigam a quem possa tomar conhecimento da existência de fenômenos que outrora jamais passariam da percepção alheia de quem assiste como espectador a uma preciosidade da natureza escondida nas minúcias de um movimento universal.

A proposta deste trabalho é estudar a dinâmica do bilhar anular, desde uma revisão sobre seus aspectos fundamentais até os efeitos e ações de novas propriedades acrescentadas ao estudo do sistema, e a consequente visualização de toda a riqueza proporcionada em relação aos resultados nem sempre triviais. Buscaremos compreender os mecanismos que possam vir a suprimir ou contribuir com a Aceleração de Fermi no âmbito do bilhar anular com fronteiras dependentes do tempo sujeito à ação de campos elétrico e magnético externos.

No Capítulo 2 será apresentada uma revisão do estado da arte relativo ao estudo de bilhares, da ideia de Fermi sobre a aceleração dos raios cósmicos, dos bilhares pulsantes como modelos teóricos de aceleradores de Fermi, e das propriedades dinâmicas que fazem do bilhar anular um importante sistema a ser estudado neste panorama.

O Capítulo 3 versa sobre a Dinâmica do sistema a ser considerado e nele serão apresentados os campos e os respectivos potenciais adotados, as funções de Lagrange e de Hamilton e as Equações de Movimento de Hamilton-Jacobi.

No Capítulo 4 será efetuada uma revisão acerca das propriedades dinâmicas do bilhar anular eletromagnético estático e das estruturas regulares e caóticas que compõem seu espaço de fase.

Nos Capítulos seguintes serão apresentados os resultados para os objetivos propostos deste trabalho. Assim, o Capítulo 5 tratará, isoladamente, do efeito do Campo Magnético sobre o bilhar anular pulsante; o Capítulo 6 também versará sobre o Campo Magnético, mas agora considerando o modelo dissipativo. No Capítulo 7 e 8 serão mostrados os resultados relativos ao Campo Elétrico sobre o sistema pulsante, com colisões elásticas e parcialmente elásticas, respectivamente.

Finalmente, no Capítulo 9, abordaremos como a competição entre os dois campos e os outros parâmetros de controle do sistema atuam de forma complexa sobre a dinâmica. E no Capítulo 10 estão as considerações finais e propostas para futuros estudos.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Bilhares e O Bilhar Anular Estático (BAE)

Análogo ao famoso e secular jogo de mesa com tacos e bolinhas, generalizadamente, em Física, um *Bilhar* é um Sistema Dinâmico constituído por um conjunto de uma ou mais partículas confinadas em uma região Ω do espaço, $\Omega \subset \mathbb{R}^D$, podendo se movimentar no interior desta região e eventualmente sofrer colisões cinemáticas com a fronteira $\delta\Omega$, $\delta\Omega \subset \mathbb{R}^{D-1}$, que a delimita [1].

Mais comumente, os bilhares são estudados nas formas uni, bi ou tridimensional, podendo haver variações quanto à natureza das colisões (elásticas ou não), à existência de fronteiras internas à região (também conhecidas como agentes dispersantes ou espalhadores) [2,3] ou à presença de outras forças dissipativas (como uma força de arraste ao longo do movimento) [4]. Em todos os casos, o sistema pode ser descrito via formulação Hamiltoniana, embora a iteração do movimento por Mapeamento Discreto seja uma forma mais usual, mais prática e numericamente menos custosa, uma vez que as equações de movimento não precisam ser integradas, bastando conhecer as posições de colisão entre a partícula e as fronteiras para que se obtenha toda a informação do sistema. Uma importante variação são os bilhares com fronteiras dependentes do tempo, onde $\delta\Omega = \delta\Omega(t)$, de tal maneira que o movimento das paredes do bilhar pode transferir momento linear à partícula [5-9].

Na classe de bilhares dispersivos, constituídos por fronteiras internas e uma externa, o Bilhar Anular [10] é geometricamente delimitado por duas fronteiras circulares de raios R e r , $R > r$, e massas “infinitas” M , em que uma partícula clássica pontual de massa m ($M \gg m$) pode se movimentar pelo anel delimitado pelos círculos interno, de raio menor, e pelo externo. Tais círculos podem estar concêntrica ou excentricamente posicionados, sendo δ o parâmetro denominado excentricidade que representa a distância entre os centros dos dois círculos. Numericamente, consideramos as dimensões das variáveis normalizadas em relação às da fronteira externa, e neste caso R assume o valor $R = 1$. Assim, teremos sempre $r < 1$ e $(r + \delta) < 1$, e, desta forma, podemos definir três diferentes famílias para o Bilhar Anular:

1. $r = 0$: círculo interno inexistente. Neste caso, o bilhar anular equivale-se ao bilhar circular.
2. $r \neq 0$, $\delta = 0$: bilhar anular concêntrico, o círculo interno está centrado no mesmo ponto que o externo.

3. $r \neq 0$, $\delta \neq 0$: bilhar anular excêntrico, os centros dos círculos estão posicionados a uma distância δ não-nula.

A Figura 1 mostra um desenho esquemático do bilhar anular.

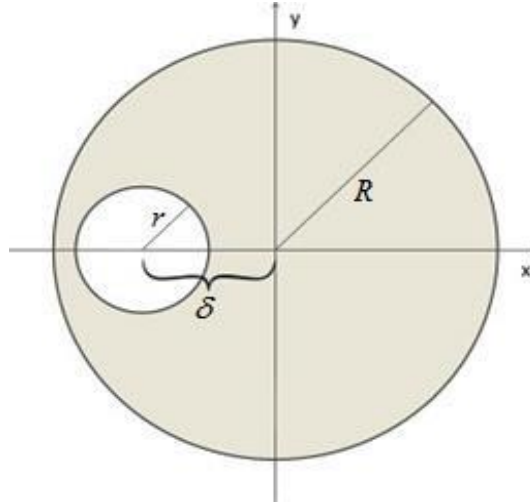


Figura 1: Desenho esquemático do Bilhar Anular Estático.

Pela Figura 1 podemos observar como a origem do sistema de coordenadas está localizada no centro do círculo externo em termos dos eixos cartesianos. Para o caso 3, definimos uma curva auxiliar chamada *cáustica* como sendo o círculo de raio $(r+\delta)$ centrado na origem. Esta curva é de fundamental importância na dinâmica do bilhar, uma vez que as trajetórias que a interceptem estarão na zona de dinâmica caótica do espaço de fase do sistema, devido a colisões com o círculo interno excêntricamente posicionado. Por outro lado, trajetórias que se limitam à região compreendida entre o círculo externo e a cáustica produzem órbitas regulares nas quais a partícula não sofre colisão com o círculo interno, sendo esta região conhecida como *Whispering Gallery Orbits* (WGO) – Órbitas da Galeria do Sussurro –, cujo nome faz alusão à interessante propriedade de reflexão de ondas acústicas apresentada em construções prediais com geometria circular.

Por conveniência, escolhemos o sistema de coordenadas cilíndricas circulares $(\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{z})$ para localização da partícula e representação do sistema. Como todo o movimento se dá no plano do bilhar (bidimensional), $z \equiv 0$, e a partícula é espacialmente localizada pelas coordenadas polares circulares (ρ, θ) . A partir de uma condição inicial dada em um ponto do círculo externo, o sistema pode apresentar dois tipos distintos de trajetória:

- **Tipo A)** Duas colisões sucessivas com a fronteira externa. A partícula parte da condição inicial de posição $(\rho_0=1, \theta_0)$ com ângulo de saída α_0 , medido entre a trajetória e a reta normal ao círculo externo no ponto (ρ_0, θ_0) , e colide com o círculo externo em $(\rho_1=1, \theta_1)$, com ângulo de saída (ou reflexão) α_1 (Figura 2a).

- **Tipo B)** A partícula sofre uma colisão com o círculo interno antes de colidir novamente com o externo. Inicialmente tem-se $(\rho_0=1, \theta_0)$ e α_0 , na colisão com a fronteira interna em $(\rho_0' \neq 1, \theta_0')$ verifica-se um ângulo de entrada (ou incidência) β_0 , em relação à reta normal e à trajetória no ponto de colisão com a circunferência da fronteira interna e um ângulo de reflexão β_1 . A próxima colisão ocorre com a fronteira externa e verifica-se um ângulo de saída α_1 . (Figura 2b).

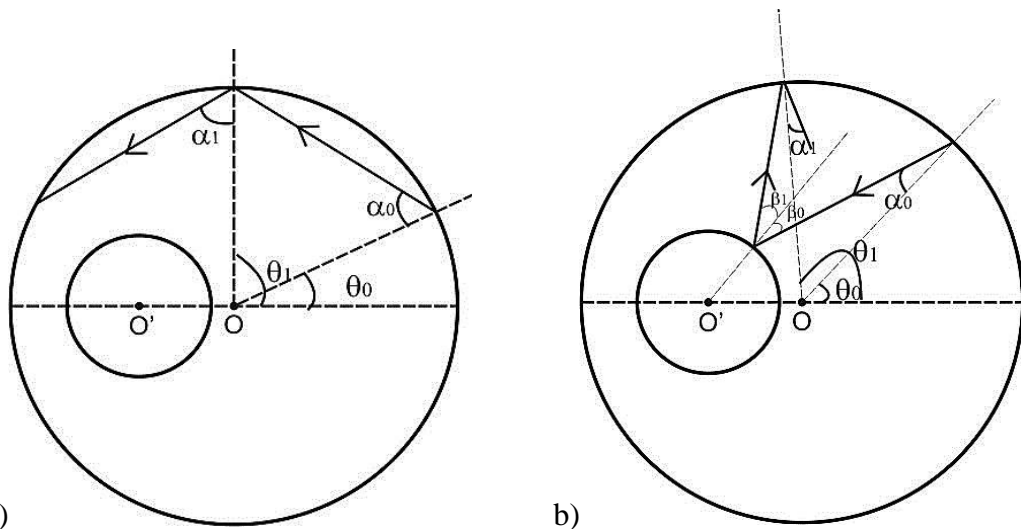


Figura 2: Movimentos possíveis do bilhar anular estático, a) Movimento do Tipo A e b) Movimento do Tipo B

No Bilhar Anular Estático, as fronteiras encontram-se imóveis e a partícula livre se desloca sem atrito na região delimitada por elas, sofrendo colisões perfeitamente elásticas. A cinemática de tais colisões é análoga a uma reflexão especular na vizinhança linear infinitesimalmente próxima ao ponto de colisão, com ângulo de entrada (incidência) congruente ao de saída (reflexão). Assim sendo, embora o sistema possua dois graus de liberdade, e, portanto, um espaço de fase de quatro dimensões, a Energia é uma constante do movimento. Logo, a evolução da dinâmica do sistema se dá ao longo de um Toro tridimensional, podendo ser analisada e estudada em uma Seção de Poincaré bidimensional apropriada. Caracterizando esta seção em variáveis de ângulo e ação, temos o plano geométrico (L,S) , ao qual chamamos “espaço de fase geométrico”, onde $L_{j,i} = \frac{\theta_{i,j}}{2\pi}$ e $S_{j,i} = \sin(\alpha_{i,j})$ obtido em cada colisão com o círculo externo. Logo, dado um número j de condições iniciais (CI) em (L,S) , fazemos i iterações, com j e i arbitrários, observando a configuração do então espaço de fase interceptado na seção.

A construção da Seção de Poincaré pode ser realizada via Mapeamento Discreto, o qual se distingue para os Movimentos A e B [10]. Assim, iteramos dois mapas M_A

e M_B , sendo que a condição de tangência $T = |\sin\alpha - \delta\sin(\theta - \alpha)|$, que especifica quão próxima ao círculo interno a trajetória estará após ter colidido com a fronteira externa, especifica qual dos mapas deve ser utilizado para aquela condição. Assim:

A) Para $T > r$ (colisão sucessiva com a fronteira externa – *Movimento do Tipo A*):

$$M_A: \begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_n \\ \theta_{n+1} = \pi + \theta_n - 2\alpha_n \end{cases} \quad (1)$$

B) Para $T \leq r$ (colisão com a fronteira interna antes da próxima colisão com a fronteira externa – *Movimento do Tipo B*):

$$M_B: \begin{cases} \beta = \arcsin \frac{1}{r} [\sin \alpha_n - \delta \sin(\theta_n - \alpha_n)] \\ (\alpha_{n+1} + \theta_{n+1}) = 2\beta + \theta_n - \alpha_n \\ \alpha_{n+1} = \arcsin [r \sin \beta - \delta \sin(\alpha_{n+1} + \theta_{n+1})] \\ \theta_{n+1} = 2\beta + \theta_n - \alpha_n - \alpha_{n+1} \end{cases} \quad (2)$$

Uma vez que um ponto de colisão com a fronteira externa e seu respectivo ângulo α sejam conhecidos, é possível, através da condição de tangência, saber se e como a partícula colidiu com o círculo interno. Assim, consideramos uma iteração do sistema como sendo uma colisão com o círculo externo. Para um conjunto de CI e certo número de iterações, fazemos $-\pi \leq \theta \leq \pi$ e analisamos os resultados através dos Gráficos da Seção de Poincaré (GSP). As Figuras 3 a 9 mostram os GSP para valores selecionados de r e δ . Em todos os casos, o valor da cáustica foi mantido constante, $(r+\delta)=0.75$.

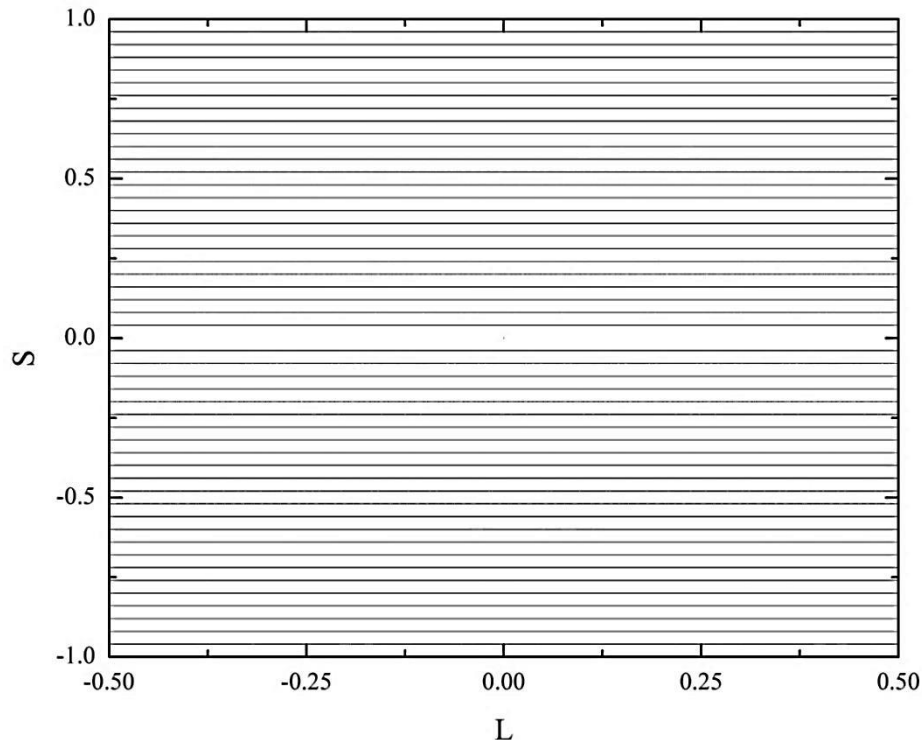


Figura 3: GSP do Bilhar Anular para $r=0.75$ e $\delta=0.00$

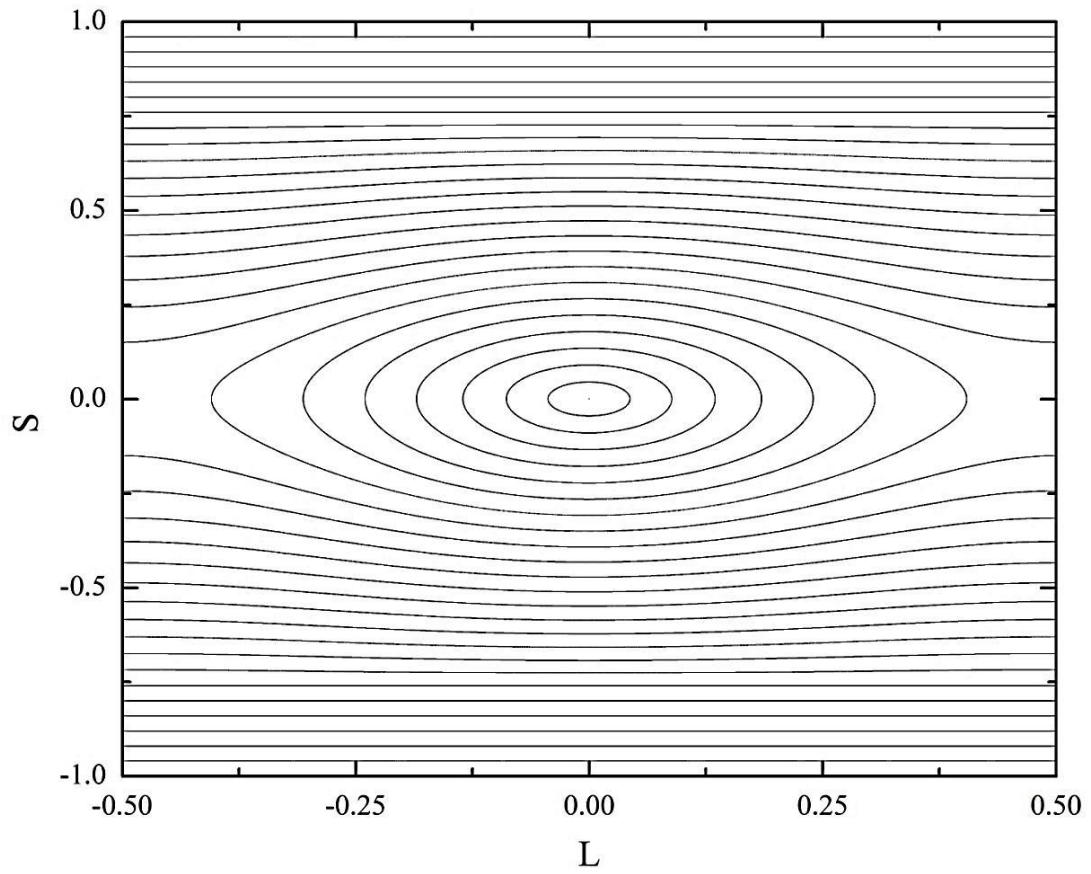


Figura 4: GSP do Bilhar Anular para $r=0.74$ e $\delta=0.01$

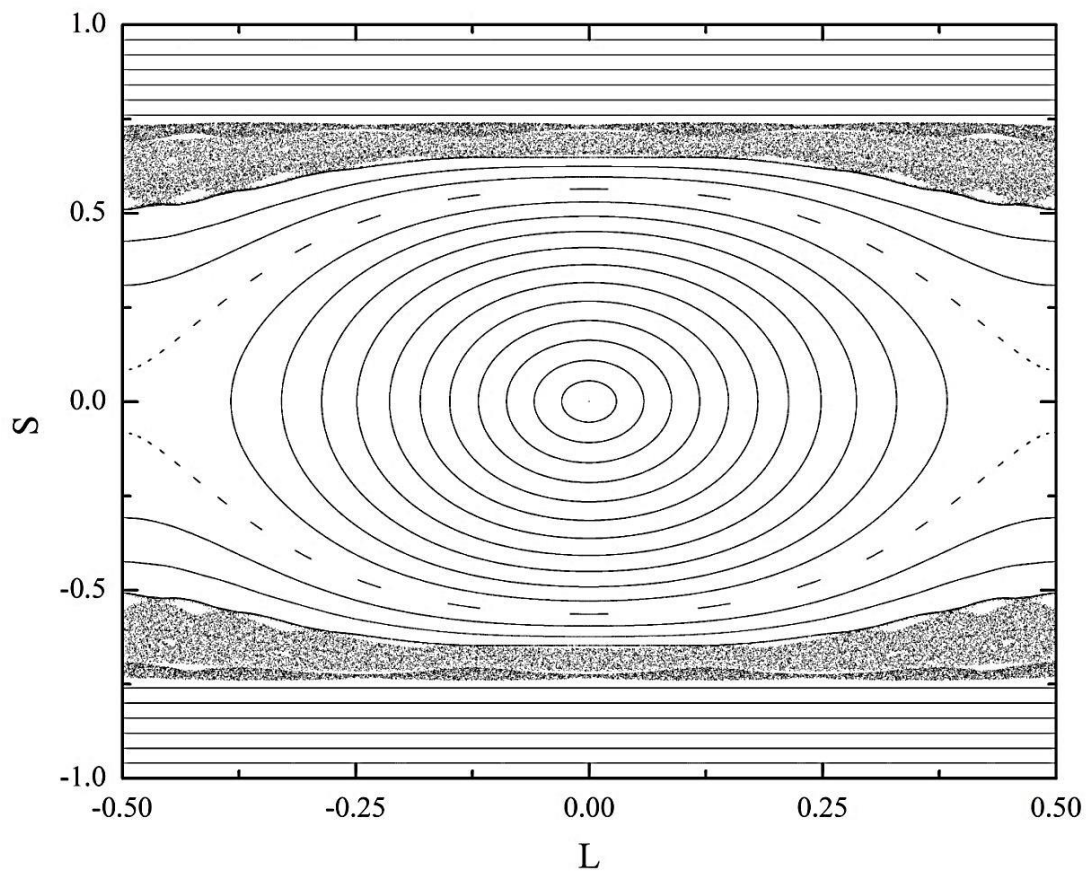


Figura 5: GSP do Bilhar Anular para $r=0.70$ e $\delta=0.05$

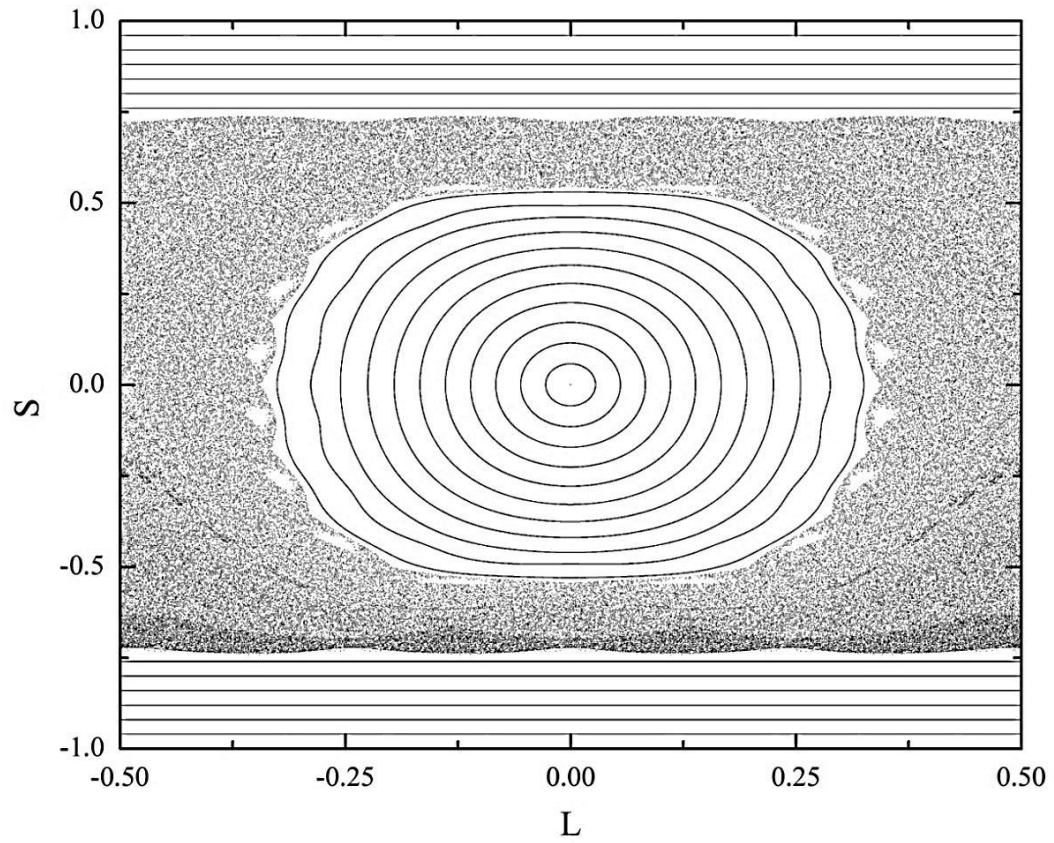


Figura 6: GSP do Bilhar Anular para $r=0.65$ e $\delta=0.10$

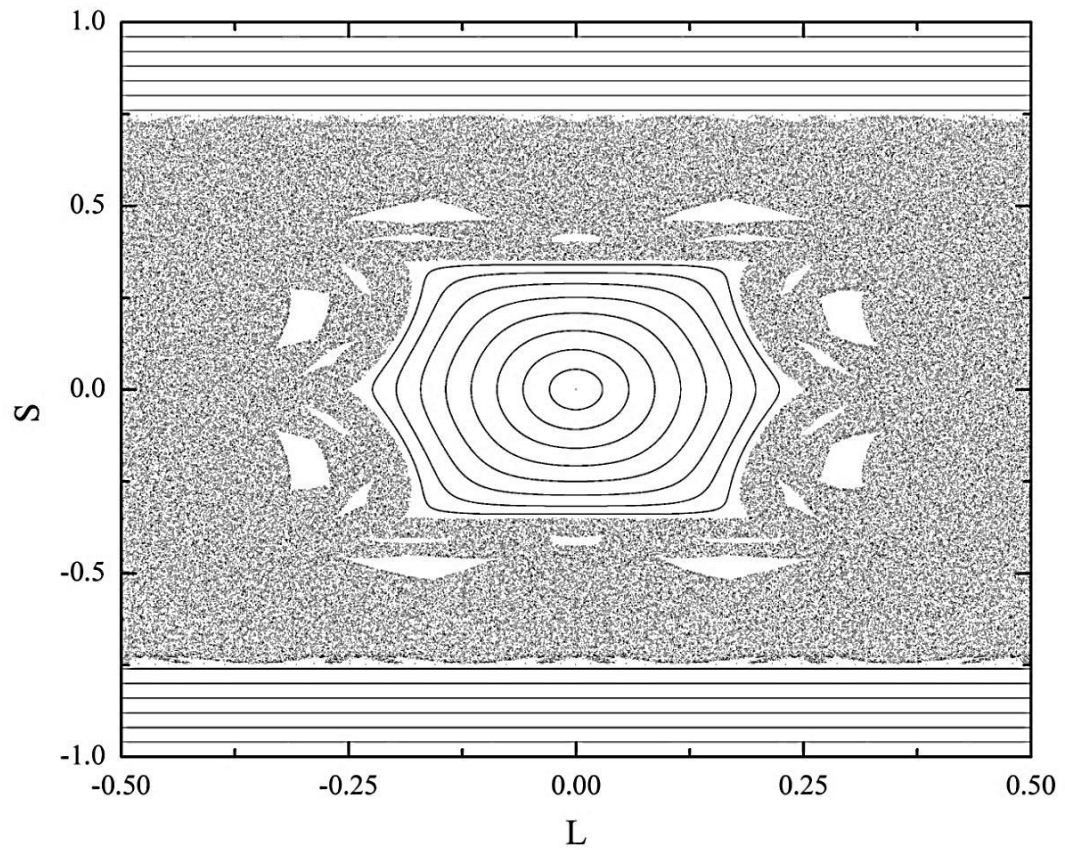


Figura 7: GSP do Bilhar Anular para $r=0.55$ e $\delta=0.20$

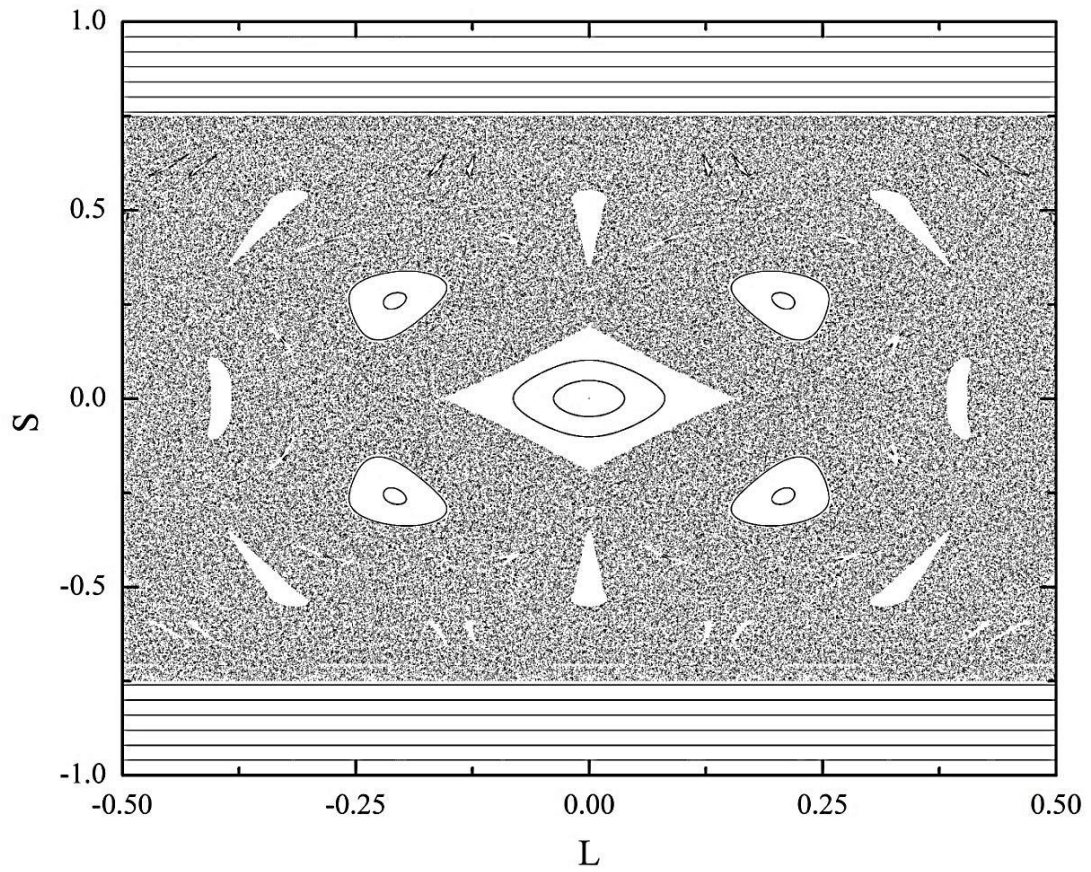


Figura 8: GSP do Bilhar Anular para $r=0.45$ e $\delta=0.30$

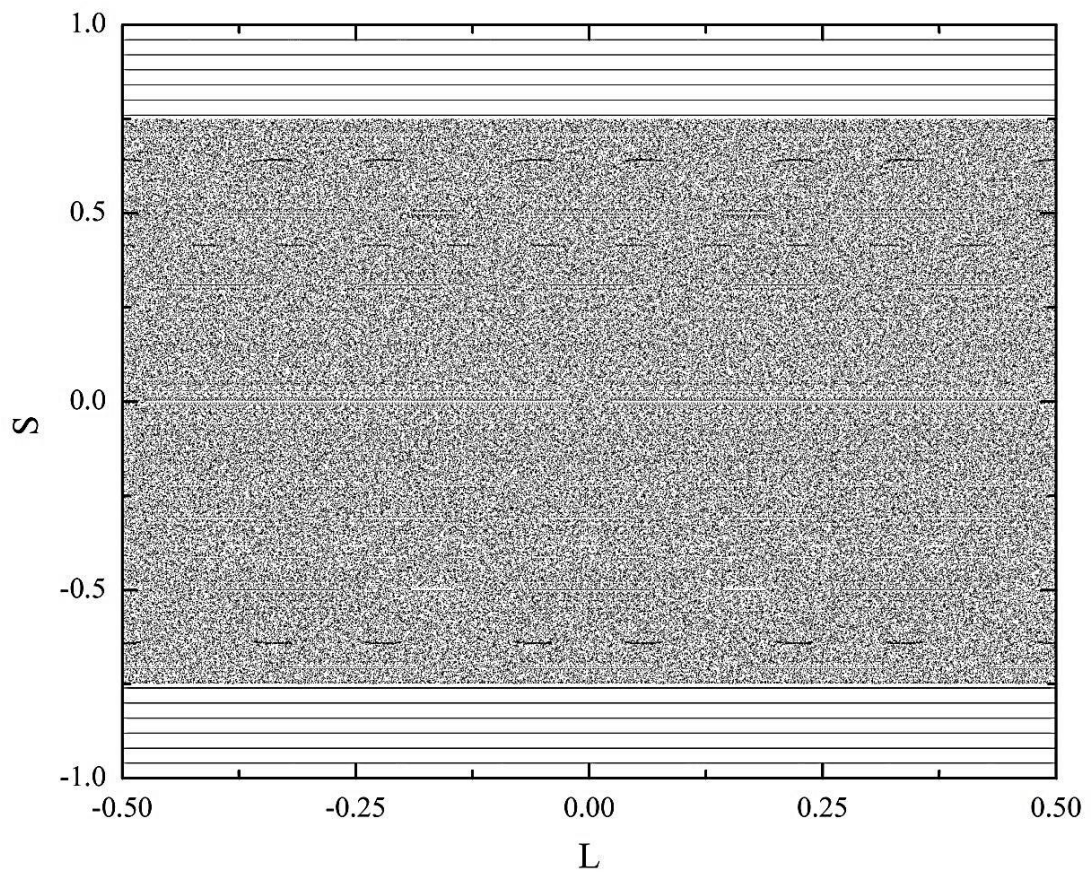


Figura 9: GSP do Bilhar Anular para $r=0.10$ e $\delta=0.65$

Podemos observar que para o caso concêntrico $\delta = 0.00$ a dinâmica é completamente regular e o sistema é integrável, apresentando um espaço de fase geométrico folheado. Nesta configuração, além da Energia, o Momento Angular é também uma constante do movimento. Conforme o valor de δ aumenta, o sistema torna-se caótico, de tal forma que a cada colisão com o círculo interno o momento angular se altera. Nesta configuração podemos observar um espaço de fase misto, como o da Figura 8, onde se observa uma grande região do mar de caos e ainda algumas ilhas de estabilidade. Isso ocorre porque, segundo o teorema proposto por KOLMOGOROV-ARNOL'D-MOSER (teorema KAM) [11-13], diferentes CI originam toros diferentes no espaço de fase, e, submetidos a perturbações não-lineares (como a excentricidade do círculo espalhador interno do bilhar anular), tais toros podem ser perturbados ou destruídos, sendo que sobrevivem os que tiverem razão de frequências suficientemente irracionais, de tal modo que o último toro a ser destruído será o mais irracional de todos, ou seja, o qual a razão de frequências mais se aproximar do número de ouro.

Assim, um valor de excentricidade não-nulo é um parâmetro geométrico necessário para que dinâmica caótica seja observada no bilhar anular estático. Muito embora configurações do espaço de fase como o da Figura 9, no qual, ainda que o mar de caos ocupe grande parte da Seção, órbitas periódicas representadas pelas curvas invariantes continuam a existir para valores extremos de S . Tais órbitas constituem as *WGO* e nelas a partícula não sofre colisão com o círculo interno excêntrico.

2.2 Aceleração de Fermi, Bilhares Pulsantes e a Conjectura-LRA

Em 1949, o famoso e consagrado físico italiano Enrico FERMI apresentou suas ideias a respeito de como os raios cósmicos adquiririam altas energias tais quais as que são medidas quando estes atingem nosso planeta [14]. Segundo ele, os raios cósmicos poderiam ser acelerados através de colisões contra campos magnéticos móveis no espaço interestelar. Este fenômeno de ganho indeterminado de energia recebeu a denominação de *Aceleração de Fermi* (AF).

Não demorou a que teóricos começassem a pensar em modelos simples que fossem capazes de simular tal fenômeno, e, desde então, bilhares dinâmicos nas mais variadas formas com fronteiras móveis vem sendo estudados. O primeiro a ser concebido foi o acelerador unidimensional de Fermi-Ulam, proposto por Stanislaw ULAM [15] em 1961. Este modelo descreve uma partícula que se movimenta livremente ao longo de uma reta delimitada

por duas paredes, as quais uma permanece fixa e a outra se move segundo uma dependência temporal periódica. Um desenho esquemático do acelerador de Fermi-Ulam pode ser visualizado na Figura 10, onde é interessante notar que a fronteira à esquerda pode estar posicionada a uma distância $(l_0 \pm e)$ da fronteira direita que está fixa a uma distância l_0 da origem do sistema de coordenadas.

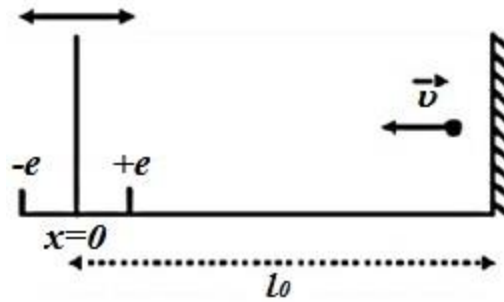


Figura 10: Desenho esquemático do acelerador unidimensional de Fermi-Ulam

A dependência temporal está na localização da fronteira à esquerda, de tal modo que:

$$l \rightarrow l(t) = l_0 + e \cos(\omega t) = l_0 + e \cos(\phi) \quad (3)$$

onde ω é a frequência de oscilação, ϕ a fase de oscilação e e é a meia largura de oscilação da parede; l_0 é a distância média da parede até a origem do sistema de coordenadas. Logo, a velocidade com que a parede de massa infinita (isto é, muito maior que a massa da partícula) se move é:

$$V_w = \frac{d}{dt}[l(t)] = -e\omega \sin(\omega t) = -e\omega \sin(\phi) \quad (4)$$

Quando uma partícula clássica de massa m que se desloca com velocidade v^0 colide com uma fronteira rígida móvel de massa M , ocorre transferência de momento linear, e se $M \gg m$, a velocidade da parede V_w não se altera durante o choque. Assim, para um coeficiente de restituição γ , a relação de correção cinemática das velocidades é [16]:

$$\gamma = \frac{V_{rcs}}{V_{apr}} = \frac{v - V_w}{V_w - v^0} \quad (5)$$

onde V_{rcs} e V_{ap} são as velocidades relativas de, respectivamente, recessão e aproximação entre os dois corpos; v^0 é a velocidade instantânea da partícula no instante de tempo da colisão t_c tomada imediatamente antes do choque, e v a velocidade tomada após o choque. Logo, temos:

$$v = -\gamma v^0 + (1 + \gamma)V_w \quad (6)$$

Desta maneira, a partícula pode, então, ganhar ou perder energia devido à transferência de momento linear quando da colisão com a fronteira móvel. Caso o sentido de deslocamento da partícula coincida com o da parede, a partícula perde energia durante a colisão e $v < v^0$; na situação oposta, a partícula pode ganhar energia cinética, de tal maneira que $v > v^0$, dependendo do coeficiente de restituição γ .

O modelo de Fermi-Ulam, no entanto, mesmo para o caso não dissipativo, considerando apenas colisões perfeitamente elásticas entre a parede e a partícula, em que $\gamma=1$, não apresenta aceleração de Fermi [17,18], pois a existência de curvas invariantes do tipo *spanning* no espaço de fase para altos valores de velocidade da partícula limita o crescimento de energia cinética.

O espaço de fase deste modelo pode ser representado pelas variáveis dinâmicas do sistema, no plano (v, ϕ) . Para obtenção deste espaço de fase, pode-se iterar um Mapa discreto que existe em dois Modelos: o Completo e o Simplificado. No modelo Simplificado, a parede não se move, de fato. Ela é considerada como fixa na posição l_0 , e no instante da colisão calcula-se sua velocidade como se ela estivesse se movendo, e aplica-se a transferência de momentum à partícula. A diferença entre os resultados dos modelos é que o Simplificado desconsidera a possibilidade de colisões sucessivas da partícula com a fronteira móvel. Essas colisões podem ocorrer apenas em regimes de baixa velocidade nas quais os choques sucessivos ocorrem em instantes em que a direção de propagação da partícula é a mesma da parede. Apesar desta desconsideração, este modelo apresenta pouca perda de informação da dinâmica do sistema, e constitui um método computacionalmente mais viável e muito menos custoso. Para o modelo simplificado, portanto, a Equação (6) torna-se:

$$v = - | -\gamma v^0 + (1 + \gamma)V_w | \quad (7)$$

Assim, o mapa para o Modelo Simplificado de Fermi-Ulam não-dissipativo é [18]:

$$\mathbf{M}_{FU}: \begin{cases} \phi_{n+1} = \left[\phi_n + \frac{2}{v_n} \right] \text{mod}(2\pi) \\ v_{n+1} = | v_n - 2e \sin(\phi_{n+1}) | \end{cases} \quad (8)$$

A Figura 11 mostra o gráfico de um espaço de fase típico para o modelo simplificado de Fermi-Ulam, o valor de e adotado foi de 0.01.

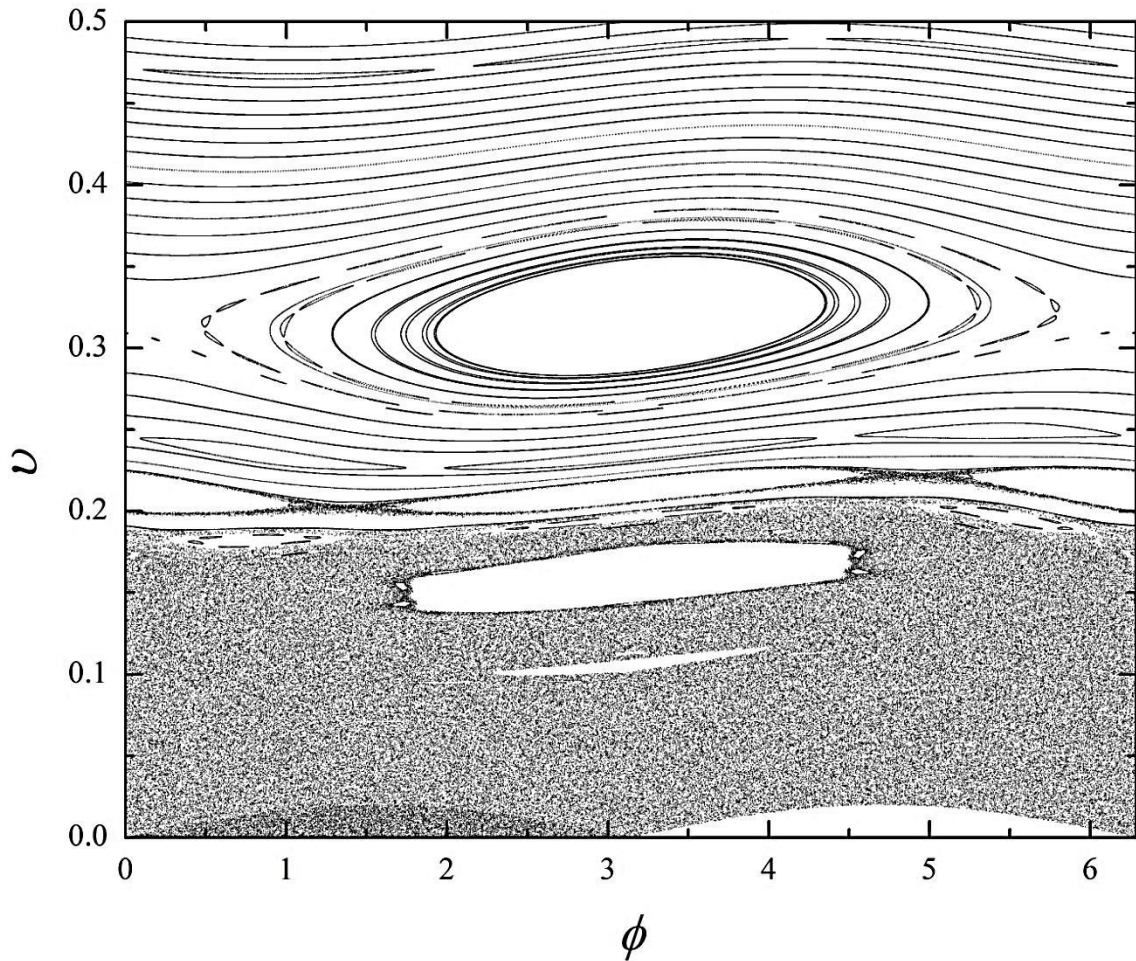


Figura 11: Espaço de Fase do acelerador unidimensional de Fermi-Ulam para $e=0.01$

O crescimento de energia é possível apenas em uma pequena região do espaço de fase que possui dinâmica caótica, onde a partícula pode adquirir qualquer valor de velocidade dentro do mar de caos, de tal forma que valores iniciais fornecidos para a velocidade pode, em média, aumentar [17]. Mas isto ocorre, neste modelo, apenas para valores baixos da velocidade, sendo que a partir de $v \approx 0.20$, as curvas invariantes do espaço de fase funcionam como barreiras de transporte do sistema, e não permitem que a velocidade da partícula varie e aumente de forma indeterminada.

Outros Modelos apareceram para tentar verificar o ganho ilimitado de energia em sistemas dinâmicos. Para isso, o sistema deve apresentar um mecanismo no qual seja possível que situações nas quais as colisões sofridas pela partícula que a faz ganhar energia sejam probabilisticamente mais frequentes do que as que a faz perder, de tal modo que, na média, haja ganho de energia. Entre os modelos unidimensionais que obtiveram sucesso quanto à existência de AF destaca-se o modelo *bouncer*, proposto por PUSTYLNIKOV [19-21]. Neste modelo, a partícula também se movimentava livremente ao longo de uma reta, e é submetida a uma aceleração \bar{g} (que pode ser entendida de forma análoga a uma aceleração

gravitacional) direcionada a apenas uma única parede, que se movimenta segundo uma dependência temporal periódica. Um desenho esquemático pode ser visualizado na Figura 12. Além do modelo *bouncer*, outros modelos unidimensionais em que se pode observar AF são apenas aqueles que apresentam perturbações **estocásticas** na velocidade de oscilação das fronteiras [22].

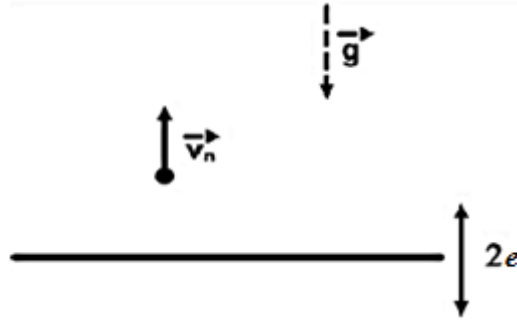


Figura 12: Desenho esquemático do modelo *bouncer*.

Bilhares bi e tridimensionais com fronteiras móveis também vem sendo amplamente estudados a fim de se observar o fenômeno de AF [23-43]. Dentre os bilhares bidimensionais pulsantes que apresentaram Aceleração de Fermi [24-31], verificou-se o bilhar do tipo estádio [26,27], o bilhar elíptico [28], o bilhar de Sinai [24,25], o Bilhar Anular [29-31], e outros. Tais sistemas são classificados como aceleradores de Fermi bidimensionais generalizados.

Analisando os resultados de vários trabalhos, um grupo de três pesquisadores russos, LOSKUTOV, RYABOV e AKINSHIN propuseram, no ano 2000, uma conjectura (Conjectura-LRA) que propõe que [32]: *a existência de dinâmica caótica em bilhares estáticos é condição suficiente para que o fenômeno de Aceleração de Fermi seja observado no mesmo bilhar em que uma dependência temporal periódica é adicionada à dimensão das fronteiras.*

Em adicional a esta conjectura, LENZ et al. mostraram [28], em 2008, que o bilhar elíptico, que possui dinâmica regular no caso estático, apresentava AF no caso pulsante, mesmo com uma oscilação suave nas fronteiras. Dois anos mais tarde, LEONEL e BUNIMOVICH [34] apontaram que uma particularidade da dinâmica do bilhar elíptico, que é a presença de uma curva separatriz no espaço de fase do caso estático, seria responsável por tal situação. Esta curva separa dois movimentos típicos deste sistema: o de libração e o de rotação; e ela tende a assumir o comportamento de uma *stochastic layer* quando as fronteiras do bilhar elíptico são ajustadas para oscilar. Assim, estes propuseram uma generalização ainda mais abrangente para a conjectura [34]: *a presença de órbitas heteroclínicas na*

dinâmica de um bilhar estático é condição suficiente para que o fenômeno de Aceleração de Fermi seja observado no bilhar pulsante.

2.3 O Bilhar Anular Pulsante

O Bilhar Anular com círculos de raios dependentes do tempo também constitui um acelerador de Fermi bidimensional generalizado, e, respaldando a conjectura-LRA, a Aceleração de Fermi é experimentada apenas na geometria excêntrica, isto é, para $\delta \neq 0$, na qual o sistema com as fronteiras estáticas apresenta dinâmica caótica [29-32].

Adotando a normalização dos valores das variáveis dinâmicas do sistema em termos dos valores referentes ao círculo externo, como mencionado na seção 2.1, a oscilação das fronteiras externa e interna pode ser representada, respectivamente, por:

$$R \rightarrow R(t) = 1 + e_R \cos(\omega t + \sigma_e) = 1 + e_R \cos[\phi_e(t)] \quad (9)$$

$$r \rightarrow r(t) = r_0 + e_r \cos(\omega t + \sigma_i) = r_0 + e_r \cos[\phi_i(t)] \quad (10)$$

onde r_0 é o raio médio do círculo interno; ω é a razão entre as frequências de oscilação das fronteiras; e_R e e_r são as meia-amplitudes de oscilação das fronteiras externa e interna, σ_e e σ_i as fases iniciais de oscilação das fronteiras externa e interna, e $\phi_e(t)$ e $\phi_i(t)$ as fases de oscilação das fronteiras externa e interna, respectivamente. Mais uma vez é interessante reforçar que, para fins numéricos, a normalização utilizada toma o raio externo médio e a massa da partícula como unitários, e a frequência de oscilação do círculo externo também é normalizada.

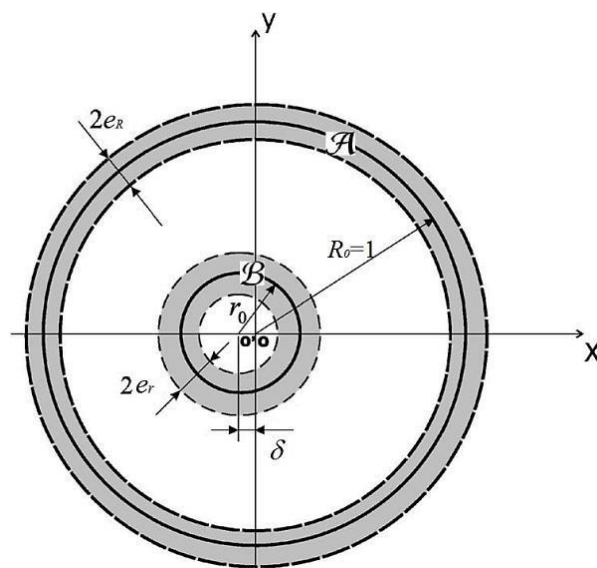


Figura 13: Esquema do bilhar anular pulsante. As regiões A e B são as regiões nas quais ocorrem as colisões da partícula com as fronteiras externa e interna, respectivamente.

Na Figura 13 está representado o esquema do Bilhar Anular Pulsante (BAP), mostrando a região de oscilação das fronteiras onde as colisões ocorrem.

Assim sendo, a velocidade com que as fronteiras externa e interna se movem são, respectivamente:

$$V^{W_e}(t) = \frac{d}{dt}[R(t)] = -e_R \sin[\phi_e(t)] \quad (11)$$

$$V^{W_i}(t) = \frac{d}{dt}[r(t)] = -e_r \omega \sin[\phi_i(t)] \quad (12)$$

Nas colisões entre a partícula e as fronteiras do bilhar anular, a transferência de momentum se dá apenas na direção radial, que é a direção na qual as fronteiras se movem. No entanto, tal direção radial é considerada no referencial do círculo no qual ocorre a colisão. Tal como no acelerador de Fermi-Ulam unidimensional, o BAP também pode ser estudado através do modelo completo [29] ou do simplificado [30].

Considerando coordenadas polares cilíndricas, a velocidade total da partícula é:

$$v = \sqrt{v_R^2 + v_\theta^2} \quad (13)$$

onde v_R é a componente radial e v_θ a componente tangencial da velocidade, relativas à origem do sistema. Assim, as correções cinemáticas para os choques com as fronteiras externa e interna são, para o modelo Completo, respectivamente:

$$v_R = -\gamma v_R^0 - (1 + \gamma) e_R \sin[\phi_e(t_c)] \quad (14)$$

$$v_r = -\gamma v_r^0 - (1 + \gamma) e_r \omega \sin[\phi_i(t_c)] \quad (15)$$

e, para o modelo Simplificado, no qual as fronteiras estão fixas mas transferem momento linear à partícula durante o choque, são:

$$v_R = -\left| -\gamma v_R^0 - (1 + \gamma) e_R \sin[\phi_e(t_c)] \right| \quad (16)$$

$$v_r = \left| -\gamma v_r^0 - (1 + \gamma) e_r \omega \sin[\phi_i(t_c)] \right| \quad (17)$$

onde v_R^0 e v_r^0 são as velocidades radiais em relação ao círculo externo antes e após o choque, respectivamente; v_r^0 e v_r as velocidades radiais em relação ao referencial do círculo interno antes e após o choque, respectivamente; e_R e e_r as meias-amplitudes de oscilação das fronteiras externa e interna, respectivamente; $\phi_e(t_c)$ e $\phi_i(t_c)$ as fases de oscilação das fronteiras externa e interna, respectivamente, tomadas no instante da colisão t_c ; ω a razão de frequências e γ é o coeficiente de restituição.

Caso o círculo interno esteja excêntricamente posicionado, a transferência de *momentum* durante um choque com esta fronteira se dará sempre na direção radial relativa ao centro do círculo interno. Assim sendo, a velocidade da partícula, que é obtida a partir do sistema de coordenadas centrado na origem, que por sua vez é o centro do círculo externo, sofre alteração em ambas as direções radial e tangencial quando colidir com o círculo interno excêntrico.

Por outro lado, na geometria concêntrica, cada colisão com qualquer um dos círculos altera apenas a componente radial da velocidade da partícula v_R , de tal forma que a componente tangencial v_θ permanece constante para todas as colisões. Desta maneira, o momento angular é uma constante do movimento para o caso Concêntrico, e, embora a Energia da partícula se modifique ao longo do movimento, o espaço de fase quadridimensional do bilhar anular pulsante pode ser projetado em uma Seção de Poincaré bidimensional, representada pelo plano das variáveis dinâmicas do sistema $(-v_R, \phi_e)$.

O movimento pode, então, ser obtido pela iteração dos Mapeamentos Discretos do Modelo Completo [29] ou do Simplificado [30].

O Gráfico da Seção de Poincaré (GSP) obtida utilizando-se o Modelo Completo para certo ajuste de parâmetros no caso não-dissipativo é mostrado na Figura 14. A Figura 15 mostra o mesmo GSP obtido com o modelo simplificado, e nela se encontra assinalada a diferença principal dos resultados entre os modelos: a região de baixa velocidade, onde ocorreriam colisões sucessivas com a fronteira externa móvel, de forma que os pontos da Seção de Poincaré que possuem valores negativos no modelo completo são rebatidos para valores positivos de $(-v_R)$ no Simplificado.

Tal como para o modelo unidimensional de Fermi-Ulam, o BAP concêntrico não apresenta AF, pois as curvas invariantes no espaço de fase para valores grandes de velocidade, tal como as que podem ser visualizadas nas Figuras 14 e 15, inibem o ganho de energia. Esta configuração de curvas *spanning* continua valendo para todos os possíveis valores do conjunto de parâmetros. Como exemplo, a Figura 16 mostra o GSP para outros valores.

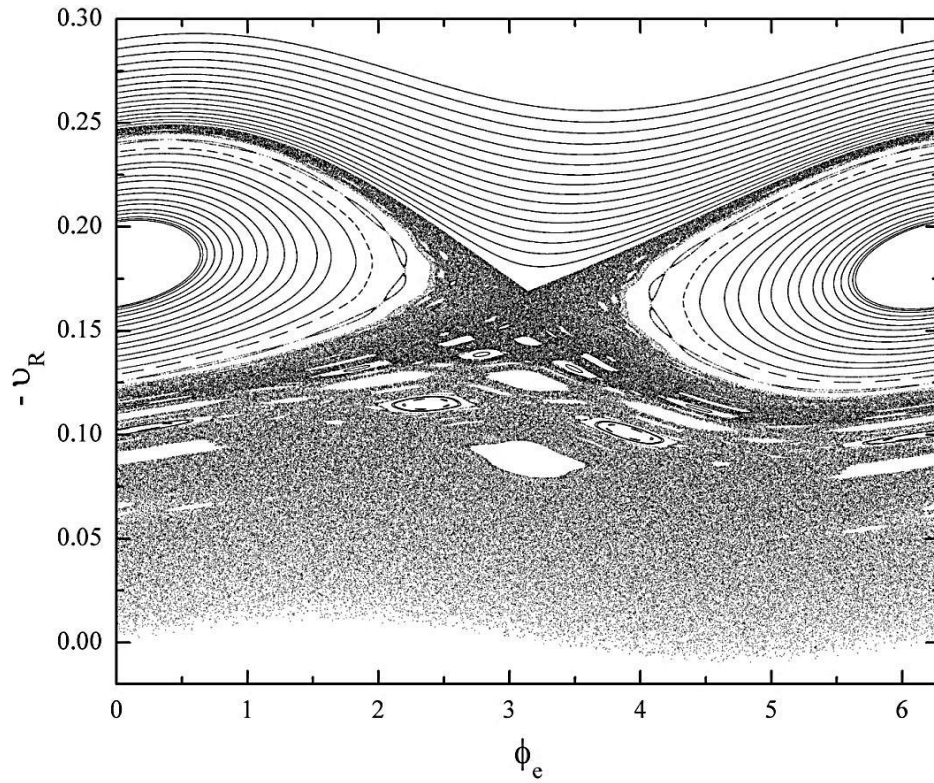


Figura 14: GSP do Bilhar Anular Pulsante (BAP) para $r_0=0.45$, $\delta=0.00$, $\omega=1.00$, $e_R=e_r=0.01$, $\sigma_e - \sigma_i = 0.00$ utilizando o Modelo Completo

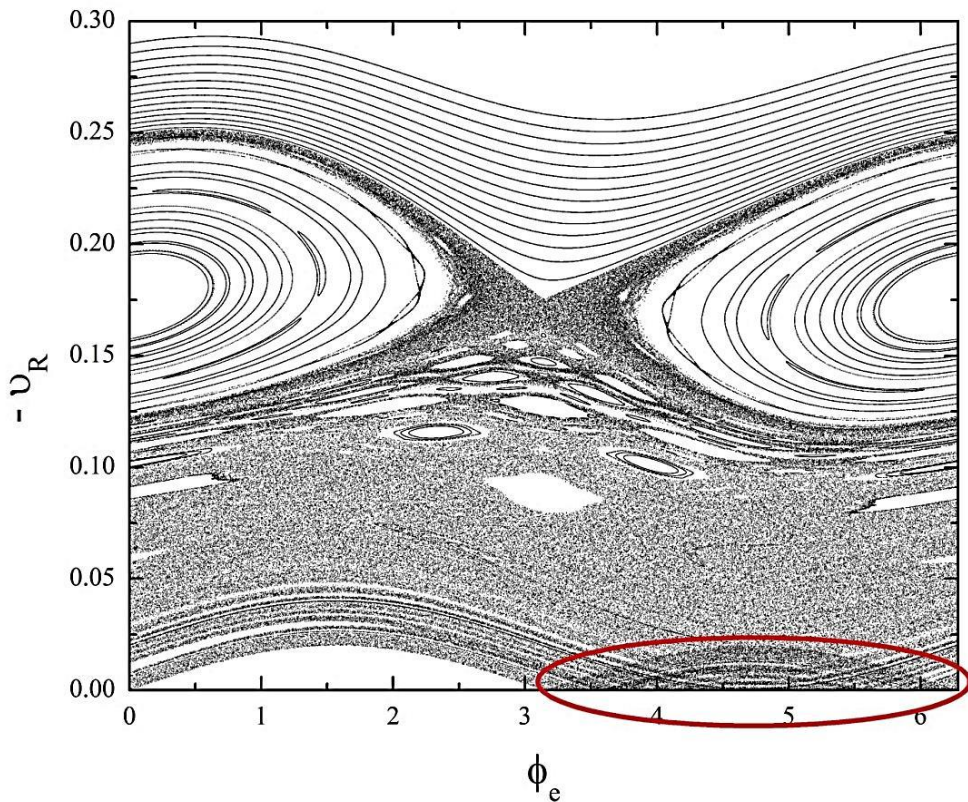


Figura 15: GSP do Bilhar Anular Pulsante (BAP) para $r_0=0.45$, $\delta=0.00$, $\omega=1.00$, $e_R=e_r=0.01$, $\sigma_e - \sigma_i = 0.00$ utilizando o Modelo Simplificado. Em vermelho está destacado os pontos da Seção que foram rebatidos para o eixo positivo. Estes pontos se localizam na região $\phi_e \in]\pi, 2\pi[$, situação em que a velocidade da fronteira externa e a velocidade radial da partícula antes da colisão são positivas, isto é, $V^{We} > 0$ e $v_R^0 > 0$, além de, no regime de baixa energia, $v_R^0 \sim V^{We}$.

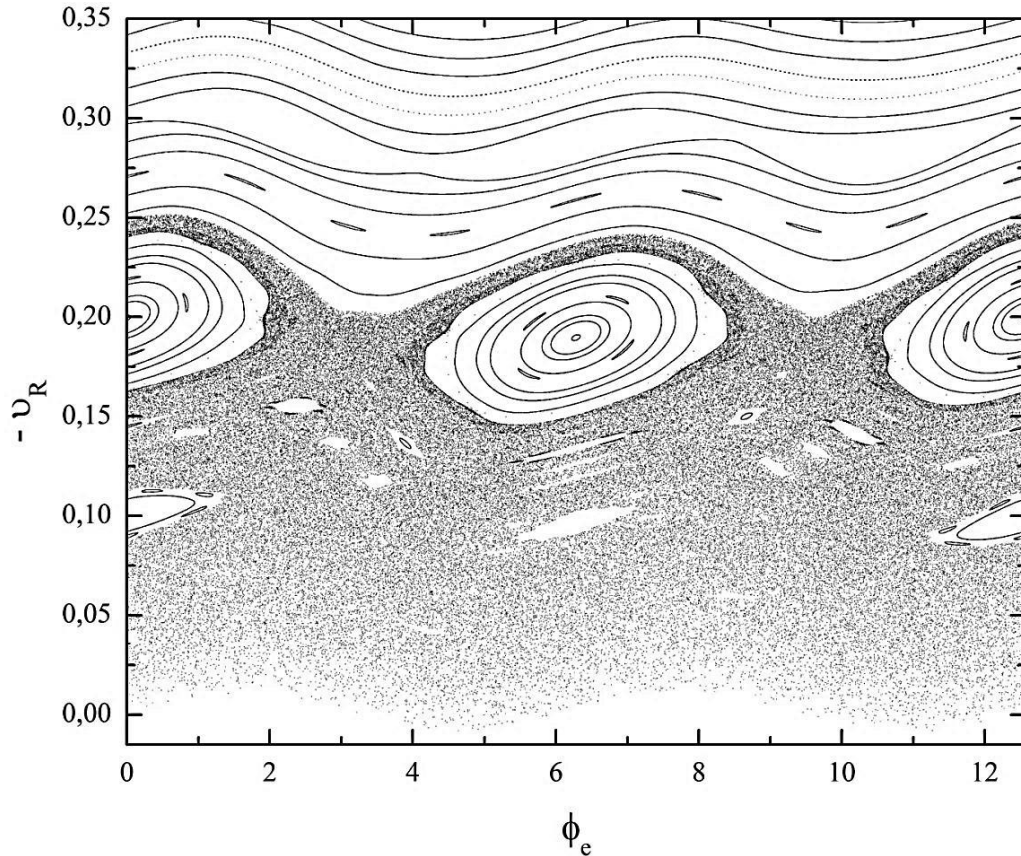


Figura 16: GSP do Bilhar Anular Pulsante (BAP) para $r_0=0.40$, $\delta=0.00$, $\omega=0.50$, $e_R=e_r=0.01$, $\sigma_e - \sigma_i = 0.00$ utilizando o Modelo Completo

Na situação em que $\delta \neq 0$, o BAP excêntrico não possui nenhuma constante de movimento, de forma que não existem curvas invariantes, ou barreiras de transporte, no plano $(-v_R, \phi_e)$. Desta maneira, a partícula pode alterar sua velocidade de forma ilimitada, e mostrou-se que, na média, observa-se ganho de energia, isto é, na geometria excêntrica o BAP apresenta o Fenômeno da Aceleração de Fermi [29-31].

A Figura 17 abaixo, retirada de [29], mostra como se comporta a média da velocidade do conjunto de condições iniciais fornecido ao sistema ao longo das n iterações realizadas, onde uma iteração denota uma colisão com a fronteira externa do bilhar. Esta média é dada por:

$$\langle v \rangle_n = \frac{1}{(NCI)} \sum_{j=1}^{NCI} v_{j,n} \quad (18)$$

onde NCI é o número total de condições iniciais e $v_{j,n}$ é a velocidade total da partícula após a n -ésima iteração da CI de número j .

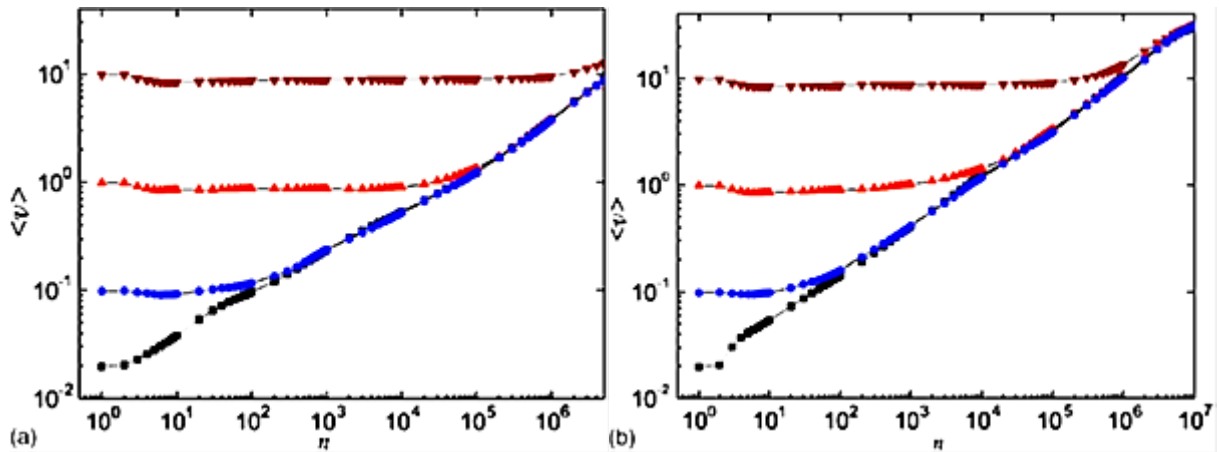


Figura 17: Evolução da velocidade média ao longo das iterações no BAP excêntrico. Os valores utilizados foram $r_0=0.15$, $\delta=0.65$ e (a) $\omega=1$, $e_R=e_r=0.01$; (b) $\omega=(\sqrt{5}+1)/2$, $e_R=0.01$, $e_r=e_R(\sqrt{5}+1)/2$. Nos dois gráficos as velocidades iniciais consideradas são: $v_0=2e_R$ (preto), $v_0=10e_R$ (azul), $v_0=100e_R$ (vermelho), $v_0=1000e_R$ (vinho). *FONTE:* [29]

Os gráficos da Figura 17 mostram a Aceleração de Fermi e o crescimento da velocidade média ao longo das iterações. É interessante notar que quanto maior a velocidade inicial fornecida à partícula, mais tempo (número de iterações) leva para que a velocidade comece a aumentar, ou seja, o efeito da perturbação causada pela oscilação das fronteiras demora a ser relevante para velocidades mais altas.

2.4 Dissipação como mecanismo de Supressão da Aceleração de Fermi

Uma vez que nem sempre é desejável que um sistema físico esteja sob o domínio de ganho de energia média, vários trabalhos foram desenvolvidos no intuito de suprimir ou controlar o fenômeno da *AF*. A presença de forças dissipativas tem se mostrado um mecanismo eficiente para tal propósito e vem sendo reportado em uma série de trabalhos [33-43].

Seja tal força dissipativa considerada em todo o movimento, como sendo uma força de atrito ou de arraste viscoso [35,36], ou ainda presente em colisões não elásticas com as fronteiras, com um coeficiente de restituição cinemático $\gamma < 1$ [33,34,37-42], é trivial pensar que se um sistema possui aporte físico para fazer com que uma partícula clássica confinada nele possa ganhar energia, e, a partir de então, passamos a considerar algum de tipo de dissipação, tal propriedade se anule, de tal forma que se a energia média não diminuir, ao menos deixará de crescer. Ainda, do ponto de vista dinâmico, uma força dissipativa adicionada ao sistema criará atratores no espaço de fase, tal que, dependendo da bacia de atração, a energia agora passa a ser direcionada ao domínio dos atratores e não mais podem crescer indefinidamente.

Ainda que os resultados sejam, de certa forma, previsíveis, a dissipação como mecanismo de supressão da Aceleração de Fermi possibilitou que as propriedades dos bilhares com fronteiras dependentes do tempo passassem a ser tratadas com abordagem estatística mais formal em termos de classes de universalidade e expoentes críticos, leis de escala [38-42], e transições de fase em sistemas dinâmicos [43].

2.5 Dissipação como mecanismo de Ganho de Energia

Por outro lado, com um resultado igualmente não esperado e fora da trivialidade, CARVALHO et al. mostraram [44] em 2008 que o bilhar anular com fronteiras dependentes do tempo possui um mecanismo de ganho de energia quando uma dissipação é adicionada à dinâmica. Eles consideraram, para isso, uma dissipação fraca nas colisões com as fronteiras, utilizando a geometria concêntrica do bilhar.

Para entender o mecanismo, podemos comparar o gráfico da Figura 16 com o da Figura 18. Neles são mostradas as seções de Poincaré para o mesmo ajuste de parâmetros de controle, com exceção do coeficiente de restituição, agora considerado como sendo $\gamma = 0.9999$ na Figura 18 abaixo.

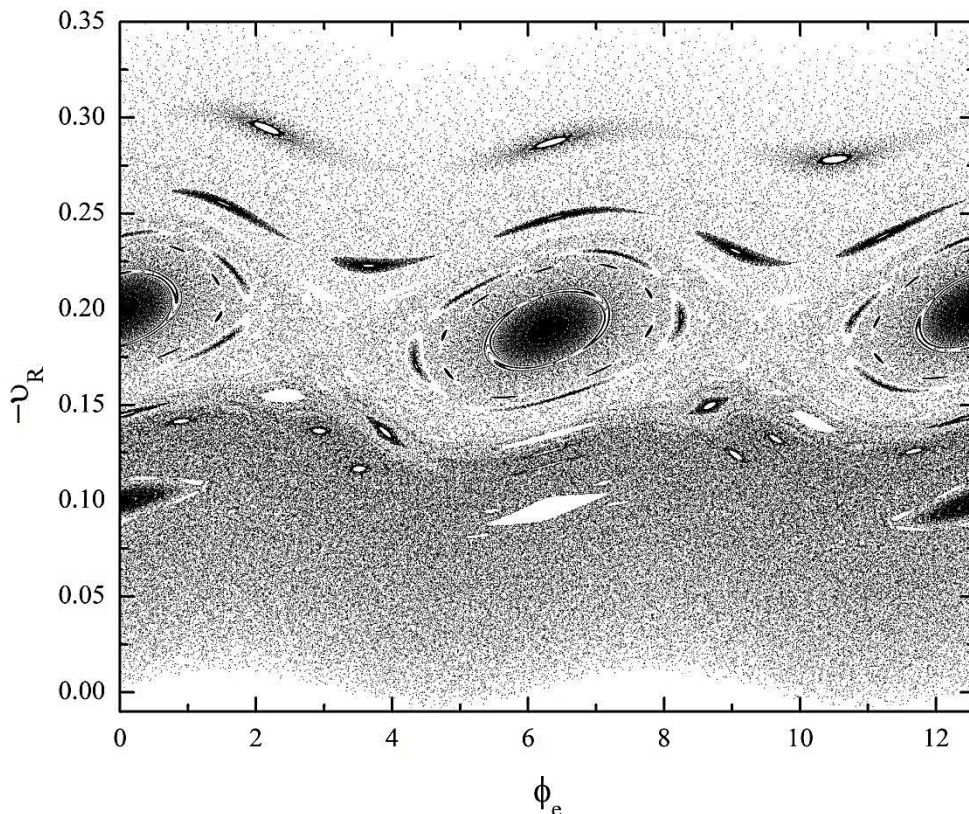


Figura 18: GSP do Bilhar Anular Pulsante (BAP) para $r_0=0.40$, $\delta=0.00$, $\omega=0.50$, $e_R=e_r=0.01$, $\sigma_e - \sigma_i = 0.00$ e $\gamma = 0.9999$, utilizando o Modelo Completo.

Podemos observar pelas imagens que os pontos fixos elípticos que aparecem na Figura 16 na região de $-v_R \approx 0.20$, viram focos atrativos no gráfico da Figura 18. Assim, os autores consideraram um conjunto de condições iniciais fornecido com velocidades baixas em $v_0 = -v_{R0} = 0.02$. Para o caso não dissipativo (Fig. 16), a velocidade da partícula poderia se alterar indefinidamente e crescer em todo o mar de caos, região na qual a média dos valores de velocidade é $\langle v \rangle \approx 0.10$, tal que a velocidade média do *ensemble* no caso não dissipativo após certo número de iterações também saturava seu crescimento para este valor. No entanto, quando uma pequena dissipação era considerada, com $\gamma = 0.9999$, os atratores levavam as órbitas para a região de $v \sim 0.20$. Neste contexto, a partícula tinha um crescimento de energia 67% maior comparada com o ganho do caso não dissipativo, atingindo uma velocidade de saturação $\langle v_{sat} \rangle = 0.167$. O gráfico da Figura 19 abaixo mostra como se comporta os valores de saturação da velocidade média do ensemble após 10^6 iterações (colisões com a fronteira externa) para vários valores de γ .

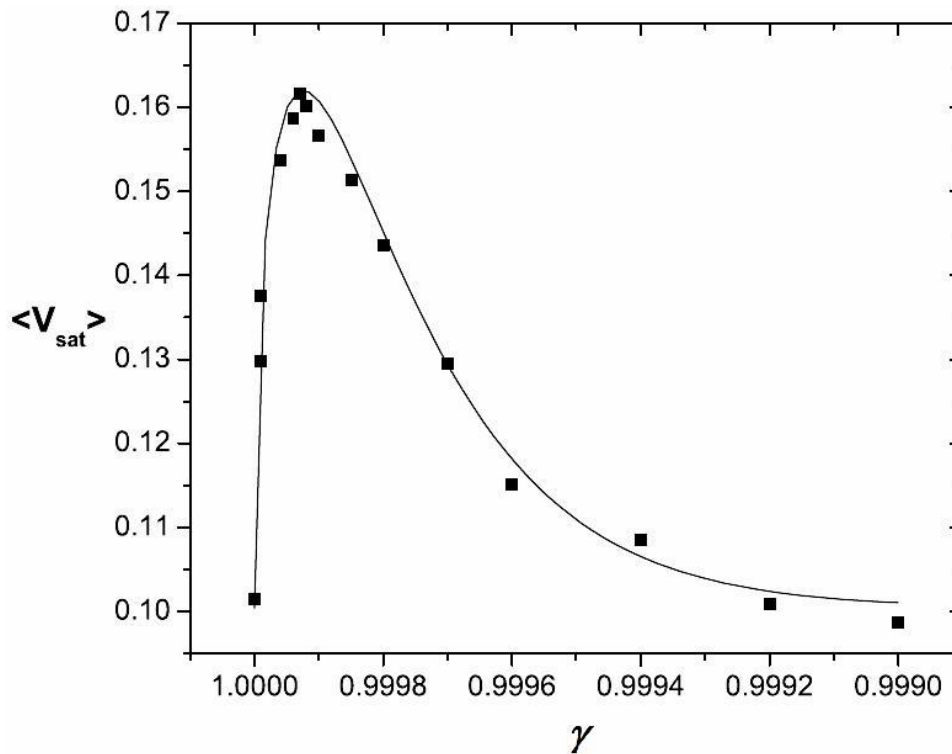


Figura 19: Velocidade de saturação após 10^6 iterações para o BAP concêntrico vs. valores do coeficiente de restituição. *FONTE:* [44]

3. DINÂMICA DE UMA PARTÍCULA ELETRICAMENTE CARREGADA SOB A AÇÃO DE CAMPOS ELÉTRICO E MAGNÉTICO

3.1 Campo Eletromagnético e a Força de Lorentz

Quando uma partícula clássica de massa m eletricamente carregada com carga q se movimenta com velocidade \vec{v} em uma região do espaço onde estejam atuando fontes de campo elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} , a força resultante sobre esta partícula é a Força de Lorentz, dada por [45]:

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (19)$$

onde c é a velocidade da luz (sistema cgs de unidades), de forma que a 2ª Lei de Newton escrita na forma diferencial em termos das derivadas temporais da variável de posição \vec{r} é:

$$\ddot{\vec{r}} - \frac{q}{m} \vec{E} - \frac{q}{mc} \dot{\vec{r}} \times \vec{B} = \vec{0} \quad (20)$$

A abordagem para a análise do movimento e obtenção das órbitas passa a ser um problema de valor inicial (PVI), a partir das condições iniciais \vec{r}_0 e $\dot{\vec{r}}_0 = \vec{v}_0$, visando resolver o sistema de equações diferenciais de segunda ordem, originado da Eq. 20, que possui D equações, em que D é o número de graus de liberdade do sistema. Para o bilhar anular, $D=2$ (bidimensional), e as equações de movimento são dadas em cada uma das direções horizontais ($\hat{\rho}, \hat{\theta}$) do sistema de coordenadas cilíndricas. Assim, uma vez conhecidas as expressões dos campos \vec{E} e \vec{B} , o movimento da partícula é regido por um sistema de duas equações diferenciais de 2ª ordem.

Para um campo magnético nulo, $\vec{B} = \vec{0}$, a força resultante é a Força Elétrica:

$$\vec{F}_{el} = q\vec{E} \quad (21)$$

Esta faz com que a partícula seja continuamente acelerada na direção do campo elétrico \vec{E} . Assim, para \vec{E} constante em uma direção, o movimento da partícula é do tipo retilíneo uniformemente variado na direção de \vec{E} .

Por outro lado, se $\vec{E} = \vec{0}$, a força resultante é a Força Magnética:

$$\vec{F}_{mag} = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B} \quad (22)$$

O produto vetorial no segundo termo da Eq. 22 mostra que a Força Magnética é perpendicular

ao vetor velocidade da partícula e ao vetor campo magnético, tal que, para um campo $\vec{\mathbf{B}}$ constante e perpendicular à trajetória, a Força Magnética e o módulo da velocidade são também constantes, e a partícula é centripetamente acelerada, fazendo com que esta descreva um movimento circular uniforme. Assim, sendo $\|\vec{\mathbf{F}}_{mag}\| = F_{mag}$, $\|\vec{\mathbf{B}}\| = B$ e $\|\vec{\mathbf{v}}\| = v$, a força centrípeta atuando sobre a partícula de massa m e carga q será:

$$F_{ctp} = m \frac{v^2}{\eta} = F_{mag} = \frac{q}{c} v B \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (23)$$

onde η é o raio da circunferência descrita pela trajetória, que, isolando em (23), é dada por:

$$\eta = \frac{m}{q} \frac{v}{B} \quad (24)$$

Neste trabalho, o conjunto de constantes da Eq. (24) será considerado, para fins numéricos,

$$\frac{m}{q} \frac{v}{c} = 1.$$

Para o movimento circular uniforme, o módulo da velocidade é dado por:

$$v = 2\pi v \eta \quad (25)$$

onde v é a frequência com que a partícula descreve a circunferência de raio η . Substituindo (24) em (25), temos que:

$$v = \frac{q}{c} \frac{B}{2\pi m} \quad (26)$$

e o período de rotação $Trot$ é:

$$Trot = \frac{1}{v} = \frac{2\pi m}{q B} \quad (27)$$

É interessante observar que o período $Trot$ é proporcional apenas ao inverso da intensidade do campo magnético B e do conjunto de constantes do sistema, não dependendo da velocidade com a qual a partícula se movimenta, fazendo com que esta descreva círculos completos em intervalos de tempos iguais para certa intensidade constante de B . A velocidade de propagação da partícula apenas modifica o tamanho da circunferência η .

Consideraremos neste trabalho campos constantes no tempo e orientados em uma determinada direção espacial. As expressões vetoriais para $\vec{\mathbf{E}}$ e $\vec{\mathbf{B}}$ podem ser obtidas através de relações do Potencial Elétrico e do Potencial Vetor Magnético, respectivamente. Essas relações são mostradas nas seções 3.2 e 3.3.

3.2 O Potencial Elétrico

Uma vez que a Força Elétrica, \vec{F}_{el} é conservativa, o campo elétrico \vec{E} , também conservativo, pode ser expresso em termos do gradiente de uma função escalar. Esta função é o Potencial Elétrico $\varphi(\vec{r})$, tal que [46,47]:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}[\varphi(\vec{r})] \quad (28)$$

E assim, segundo o Teorema do Gradiente [46] (ou, Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha), o potencial descrito na Eq. 28 pode ser expresso na forma:

$$\varphi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_s}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (29)$$

onde \vec{r}_s é um ponto arbitrário do sistema de coordenadas para o qual $\varphi(\vec{r}_s) = 0$.

A seguir, mostramos as expressões do potencial elétrico, em coordenadas cilíndricas circulares $(\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{z})$, para cada uma das expressões de \vec{E} selecionadas:

$$\bullet \quad \vec{E} = E\hat{x} \Leftrightarrow \varphi(\vec{r}) = -E\rho \cos \theta \quad (30)$$

$$\bullet \quad \vec{E} = E\hat{y} \Leftrightarrow \varphi(\vec{r}) = -E\rho \sin \theta \quad (31)$$

$$\bullet \quad \vec{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y} \Leftrightarrow \varphi(\vec{r}) = -E_x\rho \cos \theta - E_y\rho \sin \theta \quad (32)$$

$$\bullet \quad \vec{E} = E\rho\hat{\rho} \Leftrightarrow \varphi(\vec{r}) = -\frac{E\rho^2}{2} \quad (33)$$

$$\bullet \quad \vec{E} = \frac{E}{\rho}\hat{\theta} \Leftrightarrow \varphi(\vec{r}) = -E\theta \quad (34)$$

É importante observar que em todos os casos o potencial não varia no tempo, isto é, $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$.

3.3 O Potencial Vetor Magnético

Uma das Equações de Maxwell [46], as quais constituem a base para o Eletromagnetismo Clássico, determina que o divergente do campo magnético seja nulo, isto é:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (35)$$

Por outro lado, sabe-se pelas propriedades de Cálculo Vetorial [47] que o divergente do rotacional de uma função vetorial $\vec{A}(\vec{r})$ qualquer também é nulo:

$$\vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})] = 0 \quad (36)$$

Podemos inferir, a partir de (35) e (36) que o campo magnético pode ser escrito em termos da função $\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}})$ como sendo:

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) \quad (37)$$

onde esta função vetorial $\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}})$ denota o Potencial Vetor Magnético.

Em coordenadas cilíndricas a Eq. 37 pode ser expandida para:

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{p}} + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] \hat{\mathbf{\theta}} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right] \hat{\mathbf{z}} \quad (38)$$

onde A_ρ , A_θ e A_z são funções escalares tal que $A_i = A_i(\rho, \theta, z, t)$.

Como visto na seção 3.1, e nas equações 22 e 23, a força magnética é sempre perpendicular ao campo magnético e à velocidade da partícula. Assim, para considerarmos a ação deste campo sobre a dinâmica do Bilhar Anular, consideraremos um campo magnético constante de intensidade B , perpendicularmente orientado ao plano, isto é, na direção de $\hat{\mathbf{z}}$, o que garante que a partícula não viaje para fora do plano do bilhar. Deste modo:

$$\vec{\mathbf{B}} = B\hat{\mathbf{z}} \quad (39)$$

Igualando (38) e (39), vem:

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) = B\hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right] \hat{\mathbf{z}} \quad (40)$$

Existe uma infinidade de expressões para $\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}})$ que levam ao mesmo campo $\vec{\mathbf{B}}$. Escolhemos, então, uma expressão que obedeça ao Calibre de Coulomb: $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) = 0$; e, utilizando uma transformação de *gauge* antissimétrica [48], temos:

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) = A_\theta \hat{\mathbf{\theta}} = \left(\frac{1}{2} B\rho \right) \hat{\mathbf{\theta}} \quad (41)$$

Aqui também é interessante notar que o Potencial Vetor Magnético escolhido não varia no tempo, $\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} = \vec{\mathbf{0}}$. Caso isto não fosse verdade, esta variação deveria ser considerada na Equação 29 para o campo elétrico, visando obedecer à Lei de Faraday [46]. Desta maneira, uma expressão mais geral para a expressão (29) seria:

$$\vec{\mathbf{E}}(t) = -\vec{\nabla}[\varphi(\vec{\mathbf{r}}, t)] - \frac{\partial}{\partial t} [\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}, t)] \quad (42)$$

Da forma análoga, caso tivéssemos $\frac{\partial \varphi(\vec{\mathbf{r}}, t)}{\partial t} \neq 0$, a transformação de *gauge* adotada para a

escolha da expressão (41) deveria obedecer ao Calibre de Lorenz: $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$.

3.4 A Função Lagrangeana

Uma maneira mais prática de se obter as equações de movimento relaciona-se aos formalismos de Lagrange e de Hamilton da Mecânica Clássica, os quais permitem que o sistema seja descrito em termos de coordenadas generalizadas.

A Função Lagrangeana é descrita em termos das coordenadas generalizadas Q_i , das velocidades generalizadas \dot{Q}_i e do tempo t de forma que:

$$\mathcal{L}(\vec{Q}, \dot{\vec{Q}}, t) = T(\vec{Q}, \dot{\vec{Q}}, t) - U(\vec{Q}, \dot{\vec{Q}}, t) \quad (43)$$

onde T é a energia cinética em termos das coordenadas generalizadas e U a energia potencial generalizada [45]. Em coordenadas cilíndricas, o vetor velocidade é dado por:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{z} \quad (44)$$

Consideraremos o movimento da partícula apenas no plano do bilhar anular, de forma que $z=\dot{z}=0$, e a velocidade em termos das coordenadas generalizadas torna-se:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta} = v_R\hat{\rho} + v_\theta\hat{\theta} \quad (45)$$

onde $v_R = \dot{\rho}$ é a componente radial e $v_\theta = \rho\dot{\theta}$ a componente tangencial da velocidade da partícula. Logo, a Energia Cinética é dada por:

$$T = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) \quad (46)$$

Para uma partícula eletricamente carregada se movimentando sob a ação de campos elétrico e magnético, a Energia Potencial Generalizada é dada por [45]:

$$U = q\varphi(\vec{r}, t) - \frac{q}{c} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (47)$$

E considerando o potencial vetor magnético obtido na seção 3.3, e as eqs. (44) e (45), temos:

$$\frac{q}{c} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \left(\frac{q}{c} \rho \dot{\theta} \right) \hat{\theta} \cdot \left(\frac{1}{2} B \rho \right) \hat{\theta} = \frac{qB\rho^2}{2c} \dot{\theta} \quad (48)$$

Tendo em vista os possíveis potenciais eletrostáticos mostrados na seção 3.2, a Energia Potencial Generalizada é dada por:

$$U = q\varphi(\vec{r}) - \frac{qB\rho^2}{2c} \dot{\theta} \quad (49)$$

Das eqs. (46), (43) e (49), a Lagrangeana pode, então, ser escrita como:

$$\mathcal{L}(\rho, \theta, \dot{\rho}, \dot{\theta}) = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) + \frac{qB\rho^2}{2c} \dot{\theta} - q\varphi(\vec{r}) \quad (50)$$

3.5 A Função Hamiltoniana e as Equações de Movimento de Hamilton-Jacob

O formalismo Lagrangeano permite a obtenção das equações de movimento através da relação de Euler-Lagrange. Estas se equivalem às Equações de movimento obtidas pela 2ª Lei de Newton e, igualmente, são equações diferenciais de segunda ordem.

No formalismo Hamiltoniano, no entanto, podemos obter as equações de movimento em termos das relações de Hamilton-Jacobi, que fornecem $2 \times (D)$ equações diferenciais de primeira ordem, permitindo maior controle e análise numérica do sistema.

A função Hamiltoniana é descrita em termos das coordenadas generalizadas Q_i e dos momentos canônicos generalizados p_i [45], e representa a Energia Total \mathcal{E} da partícula:

$$\mathcal{E} = \mathcal{H}(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{p}}, t) = T(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{p}}, t) + U(\vec{\mathbf{r}}) \quad (51)$$

Os momentos canônicos são obtidos da Lagrangeana, e são dados por:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} \quad (52)$$

Assim, os momentos canônicos utilizando coordenadas cilíndricas são:

$$p_\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \quad (53)$$

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m\rho^2\dot{\theta} + \frac{qB\rho^2}{2c} \quad (54)$$

$$p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = 0 \quad (55)$$

É importante observar que o momento canônico p_θ representa o momento angular da partícula em relação à origem. E, o momento canônico total é:

$$\vec{\mathbf{p}} = m\dot{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(m\rho^2\dot{\theta} + \frac{qB\rho^2}{2c} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (56)$$

Escrevemos as velocidades generalizadas \dot{Q}_i no plano do bilhar em termos dos momentos canônicos expressos nas eqs. (53) e (54):

$$\dot{\rho} = \frac{P_\rho}{m} \quad (57)$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{m\rho^2} \left(p_\theta - \frac{qB\rho^2}{2c} \right) \quad (58)$$

A Hamiltoniana pode, então, ser obtida através da função Lagrangeana e das componentes do momento canônico generalizado pela relação [45]:

$$\mathcal{H} = \sum_{\dot{k}} p_k \dot{Q}_k - \mathcal{L} \quad (59)$$

Expandindo e substituindo o resultado obtido em (50), temos:

$$\mathcal{H} = p_\rho \dot{\rho} + p_\theta \dot{\theta} - \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) - \frac{qB\rho^2}{2c} \dot{\theta} + q\varphi(\vec{\mathbf{r}}) \quad (60)$$

Agora, substituindo as expressões das velocidades generalizadas obtidos em (57) e (58):

$$\mathcal{H} = p_\rho \frac{p_\rho}{m} + p_\theta \left(\frac{p_\theta}{m\rho^2} - \frac{qB}{2mc} \right) - \frac{m}{2} \left[\left(\frac{p_\rho}{m} \right)^2 + \rho^2 \left(\frac{p_\theta}{m\rho^2} - \frac{qB}{2mc} \right)^2 \right] - \frac{qB\rho^2}{2c} \left(\frac{p_\theta}{m\rho^2} - \frac{qB}{2mc} \right) + q\varphi(\vec{\mathbf{r}}) \quad (61)$$

Simplificando a eq. (61) com algum algebrismo simples, a função Hamiltoniana da partícula clássica se movimentando sob a ação dos campos elétrico e magnético considerados nas seções 3.2 e 3.3, e que representa a Energia total desta partícula, pode ser escrita em coordenadas polares como:

$$\mathcal{E} = \mathcal{H}(\rho, \theta, p_\rho, p_\theta) = \frac{1}{2m} \left[p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(p_\theta - \frac{qB\rho^2}{2c} \right)^2 \right] + q\varphi(\vec{\mathbf{r}}) \quad (62)$$

É interessante notar que a energia total é a soma da energia cinética T e da energia potencial elétrica V_{elt} , de forma que o potencial magnético é integrado à energia cinética. Assim, uma vez que:

$$V_{elt} = q\varphi(\vec{\mathbf{r}}) \quad (63)$$

a energia cinética pode ser obtida por:

$$T = \mathcal{E} - q\varphi(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{m\nu^2}{2} = \frac{\vec{\Pi}}{2m} \quad (64)$$

onde $\vec{\Pi}$ é o Momento Mecânico (ou Cinemático), que, tal como os campos, também deve ser invariante frente às transformações de *gauge* consideradas nos potenciais, e é dado por:

$$\vec{\Pi} = m\vec{\nu} = p_\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho} \left(p_\theta - \frac{qB\rho^2}{2c} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (65)$$

De forma análoga, o módulo da velocidade instantânea da partícula também pode ser calculado a partir da Energia Total (obtida pela Hamiltoniana) como sendo:

$$\nu = \sqrt{\frac{2}{m} [\mathcal{E} - q\varphi(\vec{\mathbf{r}})]} = \frac{\|\vec{\Pi}\|}{m} \quad (66)$$

Podemos agora escrever as equações de movimento a partir da Hamiltoniana utilizando as relações de Hamilton. São elas:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\rho} = \frac{p_\rho}{m} & (67) \\ \dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \frac{1}{m\rho^2} \left(p_\theta - \frac{qB\rho^2}{2c} \right) & (68) \\ \dot{p}_\rho = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho} = \frac{1}{m\rho^3} \left[p_\theta^2 - \left(\frac{qB\rho^2}{2c} \right)^2 \right] - q \frac{\partial \varphi(\vec{\mathbf{r}})}{\partial \rho} & (69) \\ \dot{p}_\theta = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = -q \frac{\partial \varphi(\vec{\mathbf{r}})}{\partial \theta} & (70) \end{cases}$$

Novamente, o estudo do movimento da partícula é um PVI, no qual, a partir do conjunto de condições iniciais $\rho_0, \theta_0, p_{\rho_0}$ e p_{θ_0} dado no tempo $t_0 = 0$, o sistema de equações diferenciais de primeira ordem mostrados em (67) a (70) é integrado na variável tempo, desde t_0 até o tempo t desejado ou permitido pelas condições de contorno. No estudo do Bilhar Anular, as condições de contorno são as delimitações espaciais, que se referem às fronteiras do bilhar, que por sua vez podem ser estáticas ou dependentes do tempo. Assim, a integração das equações de movimento é limitada pela posição da partícula em relação aos círculos externo e interno do bilhar. Em geral, essas equações não possuem solução analítica, ou sua obtenção é de realização rotineiramente impraticável. Assim, métodos computacionais são utilizados para que o sistema seja numericamente integrado. Neste trabalho, utilizaremos como método numérico de integração o *Runge-Kutta de 6ª ordem com passo fixo*.

3.5.1 Caso Particular: Campo Elétrico Nulo

Para o caso em que $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}}$, o potencial elétrico é $\varphi(\vec{\mathbf{r}}) = 0, \forall \vec{\mathbf{r}}$. Neste caso, apenas o Campo Magnético atua sobre a dinâmica da partícula e a Hamiltoniana fica reduzida em:

$$\mathcal{E} = \mathcal{H}_{MAG}(\rho, \theta, p_\rho, p_\theta) = \frac{1}{2m} \left[p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(p_\theta - \frac{qB\rho^2}{2c} \right)^2 \right] \quad (71)$$

E as Equações de Movimento são:

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \mathcal{H}_{MAG}}{\partial p_\rho} = \frac{p_\rho}{m} \quad (72)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}_{MAG}}{\partial p_\theta} = \frac{1}{m\rho^2} \left(p_\theta - \frac{qB\rho^2}{2c} \right) \quad (73)$$

$$\dot{p}_\rho = -\frac{\partial \mathcal{H}_{MAG}}{\partial \rho} = \frac{1}{m\rho^3} \left[p_\theta^2 - \left(\frac{qB\rho^2}{2c} \right)^2 \right] \quad (74)$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial \mathcal{H}_{MAG}}{\partial \theta} = 0 \quad (75)$$

A eq. (75) mostra que o momento angular p_θ é uma constante de movimento, uma vez que a variável θ é uma variável cíclica, e, como tal, não aparece explicitamente na Hamiltoniana, fazendo com que o momento canonicamente conjugado a ela não se altere com o passar do tempo. Nos Capítulos 4 e 5 será mostrado como o momento angular da partícula pode se alterar durante o movimento no bilhar anular cada vez que esta sofrer uma colisão com o círculo interno excêntrico.

3.5.2 Caso Particular: Campo Magnético Nulo

Para o caso em que $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{0}}$, o potencial vetor magnético é $\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) = \vec{\mathbf{0}}$, $\forall \vec{\mathbf{r}}$. Neste caso, apenas o Campo Elétrico atua sobre a partícula. A Hamiltoniana pode, então, ser escrita como:

$$\mathcal{E} = \mathcal{H}_{ELT}(\rho, \theta, p_\rho, p_\theta) = \frac{1}{2m} \left[p_\rho^2 + \frac{p_\theta^2}{\rho^2} \right] + q\varphi(\vec{\mathbf{r}}) \quad (76)$$

sendo que o momento canônico na direção θ passa a ser $p_\theta = m\rho^2\dot{\theta}$, e é o momento angular da partícula calculado em relação à origem do sistema de coordenadas.

As Equações de Movimento são:

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \mathcal{H}_{ELT}}{\partial p_\rho} = \frac{p_\rho}{m} \quad (77)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}_{ELT}}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m\rho^2} \quad (78)$$

$$\dot{p}_\rho = -\frac{\partial \mathcal{H}_{ELT}}{\partial \rho} = \frac{p_\theta^2}{m\rho^3} - q \frac{\partial \varphi(\vec{\mathbf{r}})}{\partial \rho} \quad (79)$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial \mathcal{H}_{ELT}}{\partial \theta} = -q \frac{\partial \varphi(\vec{\mathbf{r}})}{\partial \theta} \quad (80)$$

4. O BILHAR ANULAR ESTÁTICO SOB A AÇÃO DE CAMPOS ELÉTRICO E MAGNÉTICO

Chamaremos de *Bilhar Anular Eletromagnético Estático* o mesmo bilhar delimitado por círculos de raios diferentes descrito na seção 2.1 onde, agora, atuam sobre a partícula forças originadas pelos campos elétrico e magnético descritos no Capítulo 3.

No bilhar estático podemos analisar o sistema na Seção de Poincaré definida no plano das variáveis L e S. Assim, o problema consiste em integrar as Equações de Movimento de Hamilton-Jacobi mostradas na seção 3.5 nas eqs. (67) a (70) a partir da Hamiltoniana mostrada em 62, para um conjunto de CI de posição e *momentum*, ou fornecendo o *ensemble* em termos das variáveis dinâmicas L e S. Como a Energia é uma constante do movimento para o caso estático, ela também deve estar fixada para um mesmo conjunto de parâmetros. O sistema de EDO é integrado até que as coordenadas de posição da partícula coincidam, considerando uma precisão ζ , com a região delimitada por uma das fronteiras. Neste instante uma colisão ocorre, e correções cinemáticas devem ser aplicadas às componentes da velocidade da partícula e aos seus respectivos momentos canônicos, e então se inicia um novo processo de integração numérica até a próxima colisão. Para o caso estático não-dissipativo, as colisões são análogas a reflexões especulares com raios de luz em óptica geométrica, isto é, o ângulo formado pela reta tangente à trajetória na vizinhança linear do ponto de colisão que incide sobre este ponto e a reta normal à curva da fronteira no ponto de colisão é igual ao ângulo formado pela reta tangente à trajetória que é defletida após a colisão em relação à mesma reta normal, ou o equivalente a dizer que, o ângulo de incidência é congruente ao de reflexão.

Para uma colisão com a fronteira externa, a reta normal à curva no ponto de colisão passa pela origem do sistema, e as correções cinemáticas são de fácil análise, de forma que o ângulo de incidência α^0 pode ser calculado a partir das componentes da velocidade com a qual a partícula colide com o círculo antes do choque v_θ^0 e v_R^0 , e como o ângulo imediatamente antes da colisão α^0 é igual ao ângulo defletido imediatamente após a colisão α , temos:

$$\alpha^0 = \alpha = \arctan \left[\frac{v_\theta^0}{v_\rho^0} \right] \quad (81)$$

Pelas eqs. (45) e (58), temos que:

$$v_\theta^0 = \frac{1}{m\rho} \left(p_\theta^0 - \frac{qB\rho^2}{2c} \right) \quad (82)$$

e

$$v_R^0 = \frac{p_\rho^0}{m} \quad (83)$$

logo:

$$\alpha^0 = \alpha = \arctan \left[\frac{1}{\rho p_\rho^0} \left(p_\theta^0 - \frac{qB\rho^2}{2c} \right) \right] \quad (84)$$

E assim obtemos um ponto no espaço de fase geométrico: $L = \frac{\theta}{2\pi}$, $S = \sin(\alpha)$.

Para as correções no *momentum* da partícula, devemos lembrar que a colisão altera apenas a componente radial da velocidade, invertendo seu sentido, sendo que a componente tangencial permanece inalterada, ou seja:

$$v_R = -v_R^0 \quad (85)$$

$$v_\theta = v_\theta^0 \quad (86)$$

Uma vez que o módulo da velocidade da partícula pode ser obtido em termos da Energia total e do potencial eletrostático no ponto de colisão \vec{r}_c , como mostra a Eq. 66, os novos momentos canônicos após a colisão em termos da variável dinâmica α são:

$$p_\rho = mv_R = -\cos \alpha \sqrt{2m(\mathcal{E} - q\phi(\vec{r}_c))} \quad (87)$$

$$p_\theta = m\rho v_\theta + \frac{qB\rho^2}{2c} = \rho \sin \alpha \sqrt{2m(\mathcal{E} - q\phi(\vec{r}_c))} + \frac{qB\rho^2}{2c} \quad (88)$$

Estes novos momentos corrigidos, juntamente com as coordenadas de posição da partícula no ponto \vec{r}_c são as novas condições iniciais para a integração das Equações de movimento, até que uma nova colisão ocorra. A Figura 20 mostra um desenho esquemático com os ângulos α e α^0 para uma colisão com a fronteira externa.

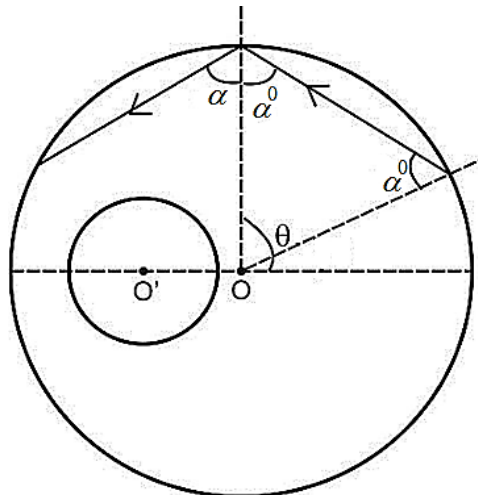


Figura 20: Desenho esquemático de uma colisão com a fronteira externa do bilhar anular estático.

As correções cinemáticas para uma colisão com o círculo interno são mais complicadas se este estiver excentricamente posicionado em relação ao círculo externo. Seja β^0 o ângulo de incidência obtido entre a reta tangente à trajetória e a reta normal ao círculo *interno* no ponto de colisão imediatamente antes do choque. O mesmo ângulo calculado imediatamente após o choque será:

$$\beta = \beta^0 \quad (89)$$

Isto significa que durante uma colisão com o círculo interno a órbita é refletida com respeito ao referencial do círculo interno. Assim, sendo v_r^0 e v_r as componentes radiais e $v_{\theta in}^0$ e v_{θ} as componentes tangenciais da velocidade da partícula tomadas no referencial do centro do círculo interno \mathbf{O}' , respectivamente antes e após o choque, a transformação cinemática para o bilhar anular estático não-dissipativo será:

$$v_r = -v_r^0 \quad (90)$$

$$v_{\theta in} = v_{\theta in}^0 \quad (91)$$

Entretanto, as variáveis de posição e momento canônico da partícula são tomadas com relação ao referencial do *círculo externo*, \mathbf{O} . Necessitamos, então, de uma relação que forneça os novos momentos canônicos após o choque com a fronteira interna a partir dos ângulos formados pela trajetória no ponto de colisão. Então, se a reta tangente à trajetória forma um ângulo de incidência β_{ex}^0 com relação à reta normal ao círculo *externo* no ponto de colisão, este será dado por:

$$\beta_{ex}^0 = \arctan \left[\frac{v_{\theta}^0}{v_R^0} \right] = \arctan \left[\frac{1}{\rho p_{\rho}^0} \left(p_{\theta}^0 - \frac{qB\rho^2}{2c} \right) \right] \quad (92)$$

Sendo w o ângulo formado entre as retas normais à fronteira externa e à interna no ponto de colisão, este é obtido como sendo:

$$w = \arctan \left[\frac{2\rho\delta \sin(\pi - \theta)}{r^2 + \rho^2 - \delta^2} \right] \quad (93)$$

Logo, o ângulo de incidência β^0 em relação ao círculo interno pode ser expresso como:

$$\beta^0 = \beta_{ex}^0 + w \quad (94)$$

O ângulo β_{ex} com o qual a trajetória é refletida em relação à reta normal ao círculo externo é, então:

$$\beta_{ex} = \beta + w \quad (95)$$

E, como $\beta = \beta^0$, substituindo (93) em (94), temos:

$$\beta_{ex} = \beta_{ex}^0 + 2w \quad (96)$$

Os momentos canônicos após o choque podem, então, ser corrigidos em função do ângulo β_{ex} , da Energia total, e do potencial elétrico no ponto de colisão \vec{r}_c :

$$p_\rho = -\cos(\beta_{ex})\sqrt{2m(\mathcal{E} - q\varphi(\vec{r}_c))} \quad (97)$$

$$p_\theta = \rho \sin(\beta_{ex})\sqrt{2m(\mathcal{E} - q\varphi(\vec{r}_c))} + \frac{qB\rho^2}{2c} \quad (98)$$

É importante notar que se o círculo interno estiver concentricamente posicionado em relação ao externo, então teríamos $w=0$, o que implica que $\beta_{ex} = \beta_{ex}^0 = \beta = \beta^0$. Logo, $p_\rho = -p_\rho^0$ e $p_\theta = p_\theta^0$, de forma que momento angular p_θ não se altera em nenhuma colisão, e na ausência de campo elétrico, é uma constante do movimento.

A Figura 21 ilustra os ângulos relacionados a uma colisão com o círculo interno excêntrico. Os ângulos que se relacionam às variáveis tomadas em relação ao círculo interno estão em verde e em relação ao externo, em cinza. A trajetória está desenhada em vermelho.

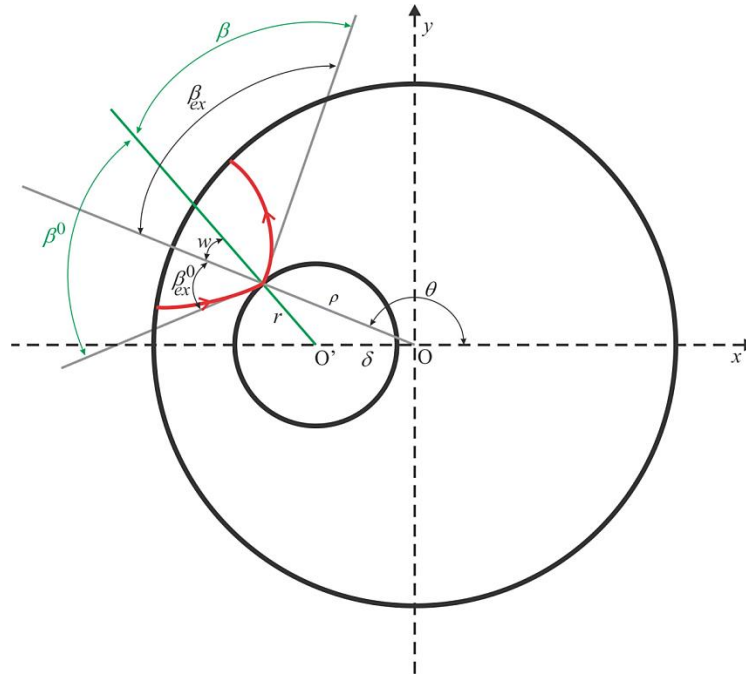


Figura 21: Desenho esquemático de uma colisão com a fronteira interna do bilhar anular estático.

Podemos agora analisar a configuração do espaço de fase geométrico para diferentes valores dos parâmetros relacionados aos campos elétrico e magnético, e à excentricidade do bilhar. Fixaremos uma Energia total relativamente baixa, para que se possa fazer analogia com as energias iniciais que serão fornecidas ao *ensemble* de estudo do bilhar pulsante nos Capítulos 5 a 8.

4.1 O Bilhar Anular Magnético Estático (BAME)

Apresentaremos abaixo as Seções de Poincaré para o bilhar anular estático aplicando apenas campo magnético. Variamos os valores da intensidade do campo B e também da excentricidade δ e do raio interno r . A Energia total é mantida constante como sendo $\mathcal{E} = 2 \times 10^{-4}$. A Hamiltoniana e as Equações de Movimento foram descritas nas Eqs 71 a 75.

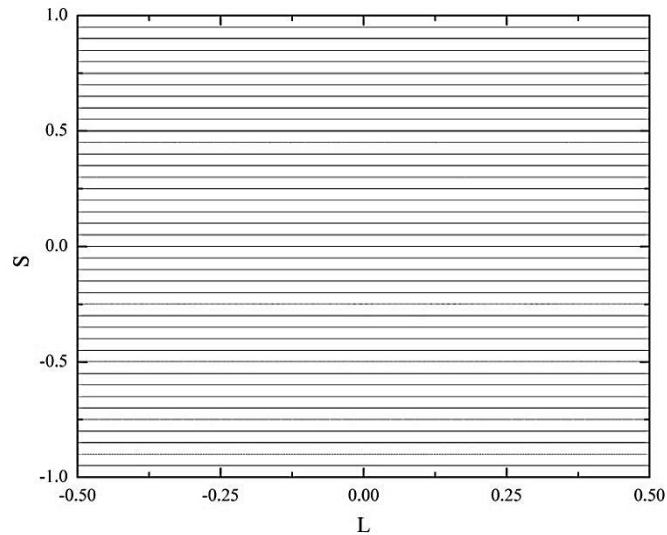


Figura 22: GSP para o bilhar anular magnético estático. $r=0.75$, $\delta=0.00$, $B=0.05$

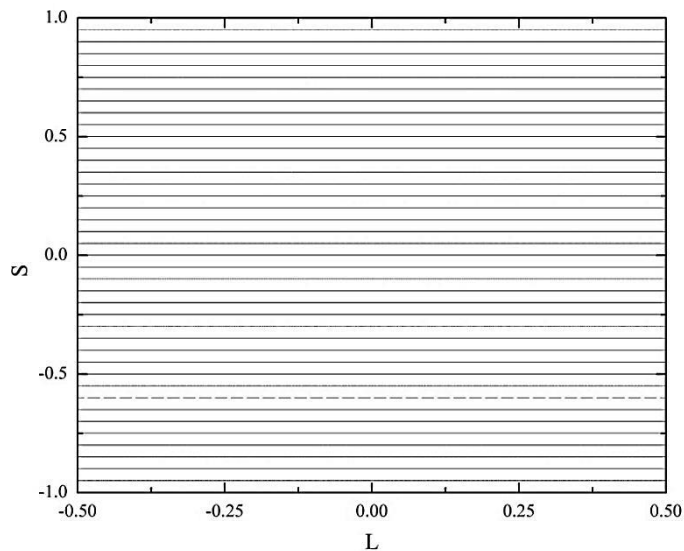


Figura 23: GSP para o bilhar anular magnético estático. $r=0.75$, $\delta=0.00$, $B=0.20$

Para a geometria concêntrica, $\delta=0$, o espaço de fase geométrico é do tipo folheado, contendo apenas órbitas periódicas, tanto para a partícula livre (caso sem campo, $B=0$, mostrado na Figura 3), como para um campo magnético fraco (Figura 22) e também para um campo forte (Figura 23). Em todos esses casos a Energia Total (que é igual à Energia Cinética) e o momento angular p_θ são constantes para todo o movimento.

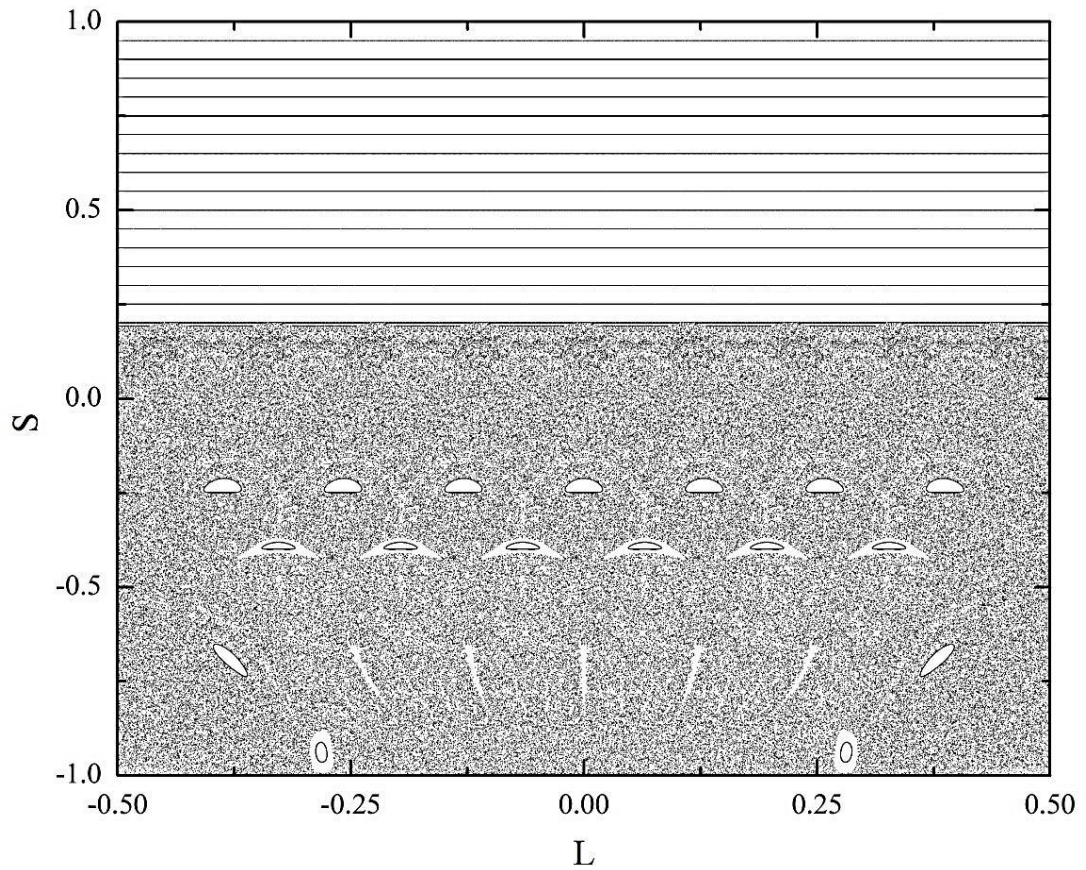


Figura 24: GSP para o bilhar anular magnético estático. $r=0.45$, $\delta=0.30$, $B=0.05$

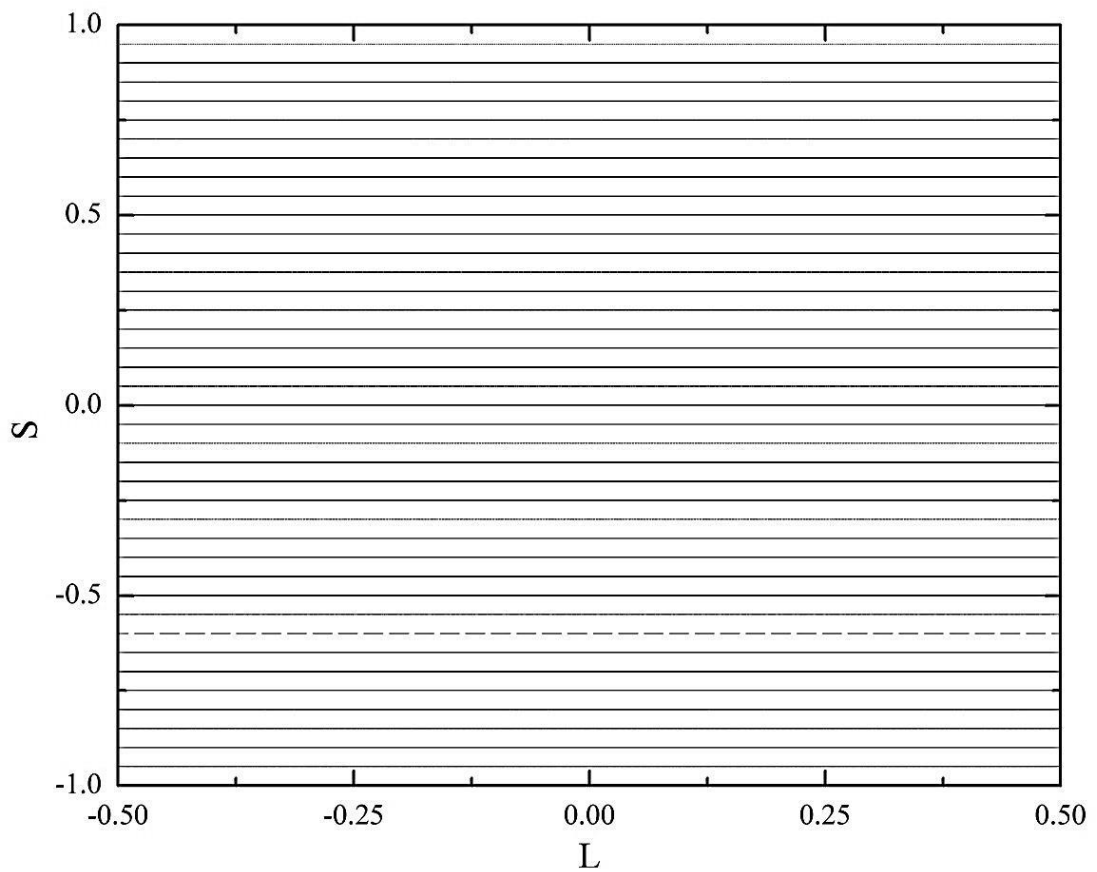


Figura 25: GSP para o bilhar anular magnético estático. $r=0.45$, $\delta=0.30$, $B=0.20$

Os gráficos das Fig. 24 e 25 podem ser comparados com o da Fig. 8 do Capítulo 2. Na Figura 8 observávamos uma grande região do mar de caos, com dinâmica regular apenas para valores extremos de S . Para um campo fraco (Fig. 24) a dinâmica caótica é ainda observada, muito embora tenha havido quebra de simetria do espaço de fase geométrico, de forma que a região regular aumentou e confina-se apenas a valores positivos dos extremos de S . Isso ocorre porque o raio de curvatura η (eq. 24) que a trajetória descreve devido ao campo não permite que a partícula colida com o círculo interno apenas para estes valores específicos de S . Para um campo mais forte (Fig. 25), o raio de curvatura é suficientemente pequeno para que não haja colisão com o círculo interno excêntrico e todo o movimento esteja confinado nas *Whispering Gallery Orbits*.

Considerando agora o raio da cáustica um pouco maior, $(r + \delta) = 0.85$, a região das *WGO* irá diminuir, e então, aplicando o mesmo campo de intensidade $B=0.20$, o raio de curvatura para a mesma energia é suficiente para que a partícula encontre a fronteira interna para alguns valores de S . Uma região caótica volta a aparecer para os extremos negativos de S (Fig. 26). No entanto, aplicando um campo mais forte de intensidade $B=0.40$, o espaço de fase volta a ser totalmente preenchido por curvas invariantes, de forma que a diminuição do raio de curvatura η devido ao campo faz com que novamente a partícula fique confinada na região das *WGO* (Fig. 27).

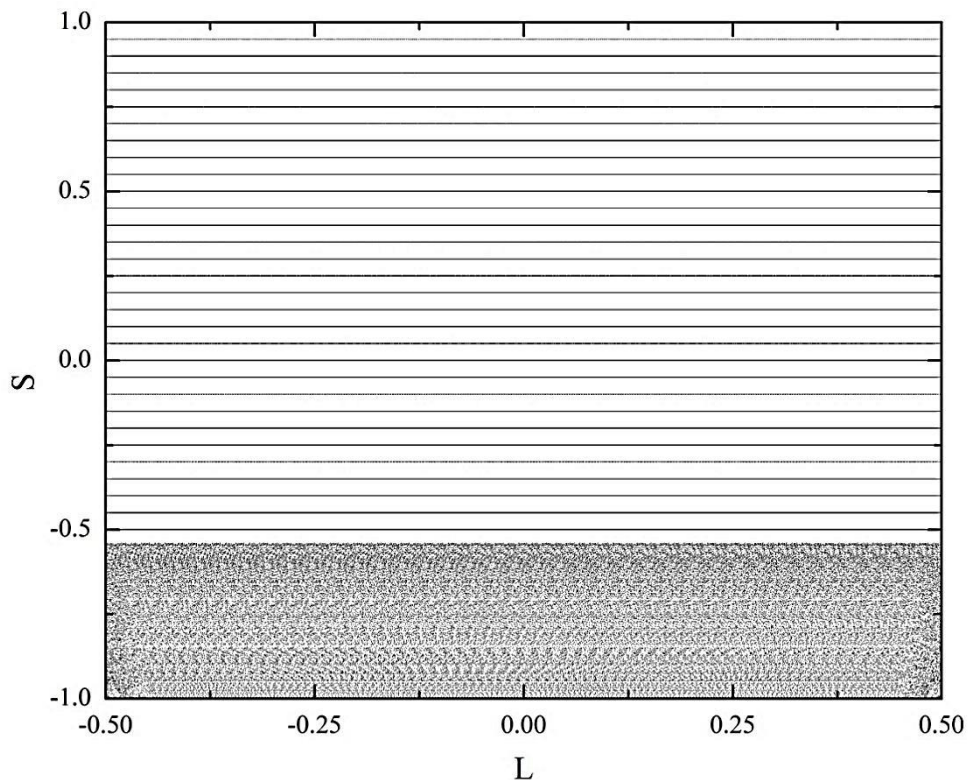


Figura 26: GSP para o bilhar anular magnético estático. $r=0.45$, $\delta=0.40$, $B=0.20$

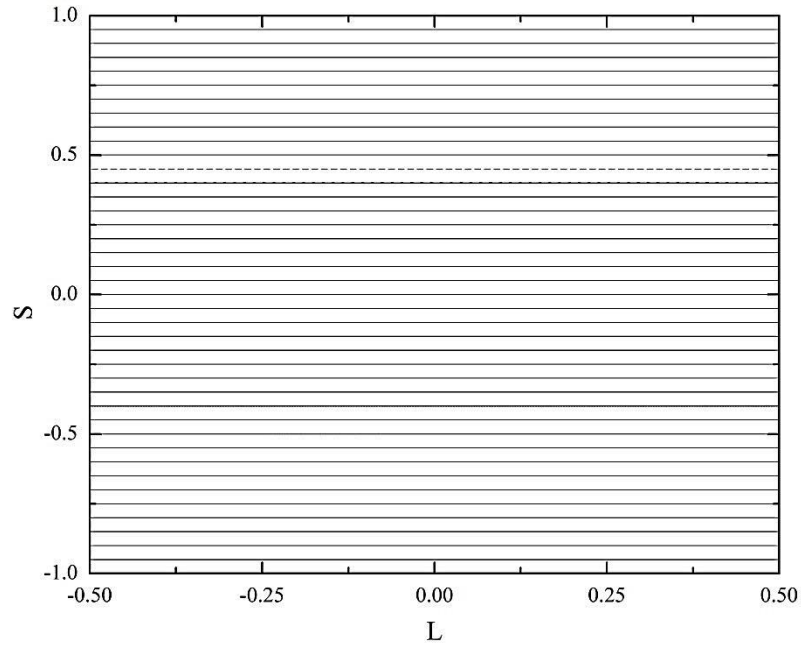


Figura 27: GSP para o bilhar anular magnético estático. $r=0.45$, $\delta=0.30$, $B=0.40$

Assim, podemos inferir que o campo magnético constante perpendicularmente orientado em relação ao plano do bilhar tende a regularizar a dinâmica, muito embora possa haver quebra de simetria do espaço de fase geométrico.

As Figuras 28 e 29 a seguir mostram trajetórias típicas para o BAME obtidas numericamente a partir de uma condição inicial em (L,S) , podendo-se observar como a trajetória descreve círculos de mesmo raio de curvatura. Na Figura 28, fornecemos uma condição inicial no espaço de fase folheado da Fig. 25, e a partícula não colide com a fronteira interna, mantendo-se confinada na região das *WGO*. Já na Figura 29, a condição inicial foi dada no mar de caos do espaço de fase da Fig. 26, e a mostra como a partícula pode sofrer colisões sucessivas com a fronteira interna para um valor extremo negativo de S , o que não ocorreria caso a partícula não estivesse submetida ao campo magnético.

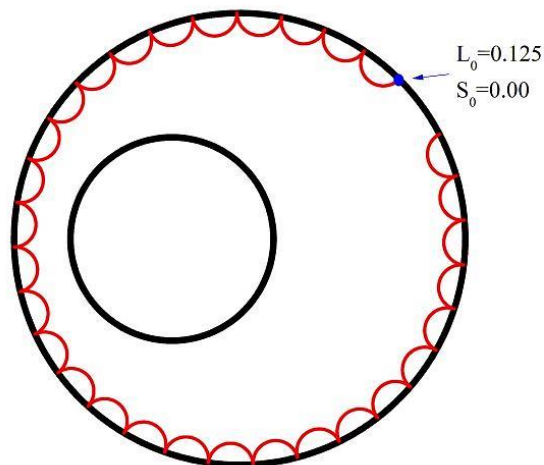


Figura 28: Trajetória da partícula no bilhar anular magnético estático. $r=0.45$, $\delta=0.30$, $B=0.20$, $L_0=0.125$, $S_0=0$

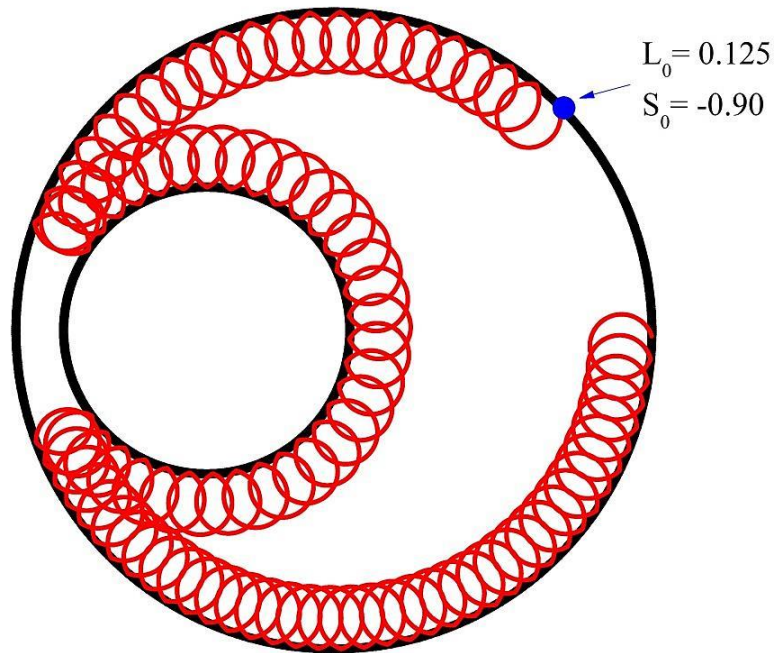


Figura 29: Trajetória da partícula no BAME. $r=0.45$, $\delta=0.40$, $B=0.20$, $L_0=0.125$, $S_0=-0.90$

4.2 O Bilhar Anular Elétrico Estático (BAEE)

Vamos agora analisar a ação do campo elétrico sobre a dinâmica do bilhar anular. As expressões para as direções e os respectivos potenciais que poderíamos considerar foram mostradas no Capítulo 3, nas eqs. (30) a (34). Vamos apresentar aqui apenas os resultados obtidos para o campo elétrico orientado na direção x .

Uma fonte de campo elétrico externa ao bilhar concede à partícula uma energia potencial elétrica que depende de seu vetor posição, isto é, $V_{el} = V_{el}(\vec{r})$. Assim, a Energia total da partícula será a soma da energia cinética T e da energia potencial elétrica V_{el} . Para as análises da ação do campo elétrico, forneceremos à partícula uma energia cinética mínima, relacionada a uma velocidade de propagação mínima, tal que, considerando numericamente $m=1$:

$$v_{\min} = 0.01 \Rightarrow T_{\min} = \frac{m}{2} (0.01)^2 = 5 \times 10^{-5} \quad (99)$$

E, a esta energia cinética mínima adicionaremos uma energia potencial elétrica máxima, que depende da expressão do campo elétrico, de forma que:

$$\mathcal{E} = T_{\min} + V_{el_{MAX}} = 5 \times 10^{-5} + V_{el_{MAX}} \quad (100)$$

Esta energia total é constante para todo o movimento no bilhar anular estático.

Um campo elétrico constante orientado na direção da coordenada cartesiana de posição x pode ser representado pelo potencial eletrostático da eq. (30). Assim, a Hamiltoniana expressa na Eq. 76 torna-se:

$$\mathcal{E} = \mathcal{H}_{ELT}(\rho, \theta, p_\rho, p_\theta) = \frac{1}{2m} \left[p_\rho^2 + \frac{p_\theta^2}{\rho^2} \right] - qE\rho \cos \theta \quad (101)$$

e as Equações de Movimento de Hamilton-Jacobi são:

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \mathcal{H}_{ELT}}{\partial p_\rho} = \frac{p_\rho}{m} \quad (102)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}_{ELT}}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m\rho^2} \quad (103)$$

$$\dot{p}_\rho = -\frac{\partial \mathcal{H}_{ELT}}{\partial \rho} = \frac{p_\theta^2}{m\rho^3} + qE \cos \theta \quad (104)$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial \mathcal{H}_{ELT}}{\partial \theta} = -qE\rho \sin \theta \quad (105)$$

E a energia potencial elétrica máxima é, considerando numericamente $q=1$:

$$V_{elt_{MAX}} = +qE = E \quad (106)$$

Os gráficos das Figs. 30 a 33 mostram a configuração do espaço de fase geométrico nas variáveis L e S para alguns valores selecionados de E , r e δ .

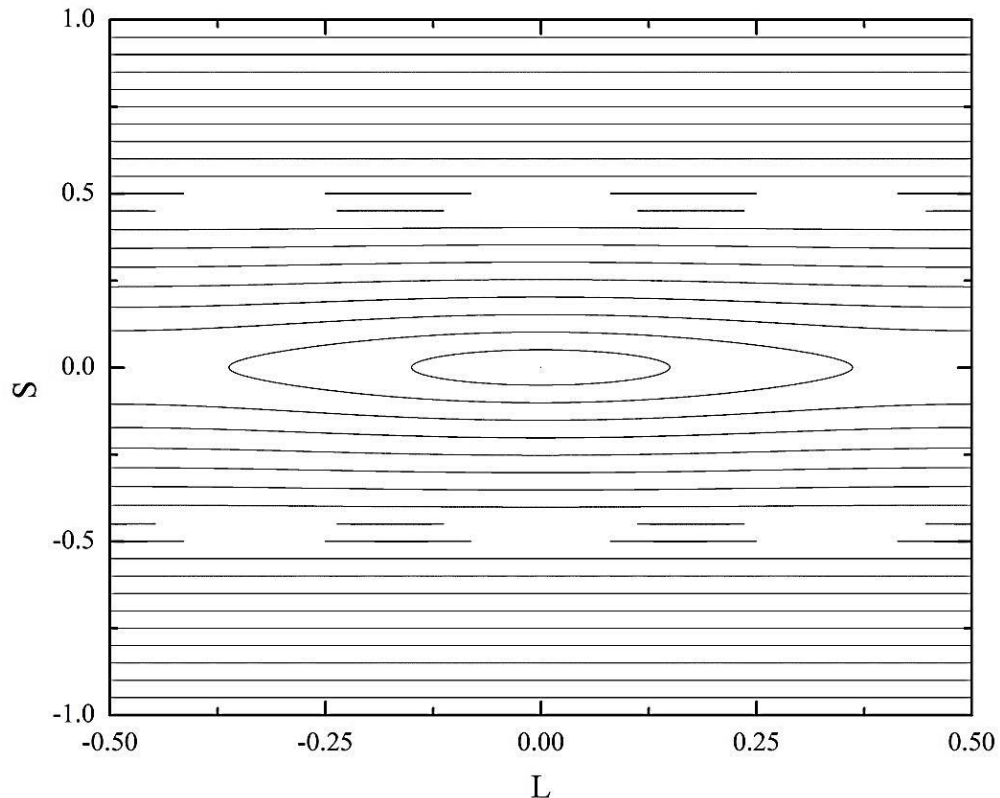


Figura 30: GSP para o bilhar anular elétrico estático. $r=0.45$, $\delta=0.00$, $E=0.1 \times 10^{-6}$, $\xi=5.1 \times 10^{-5}$

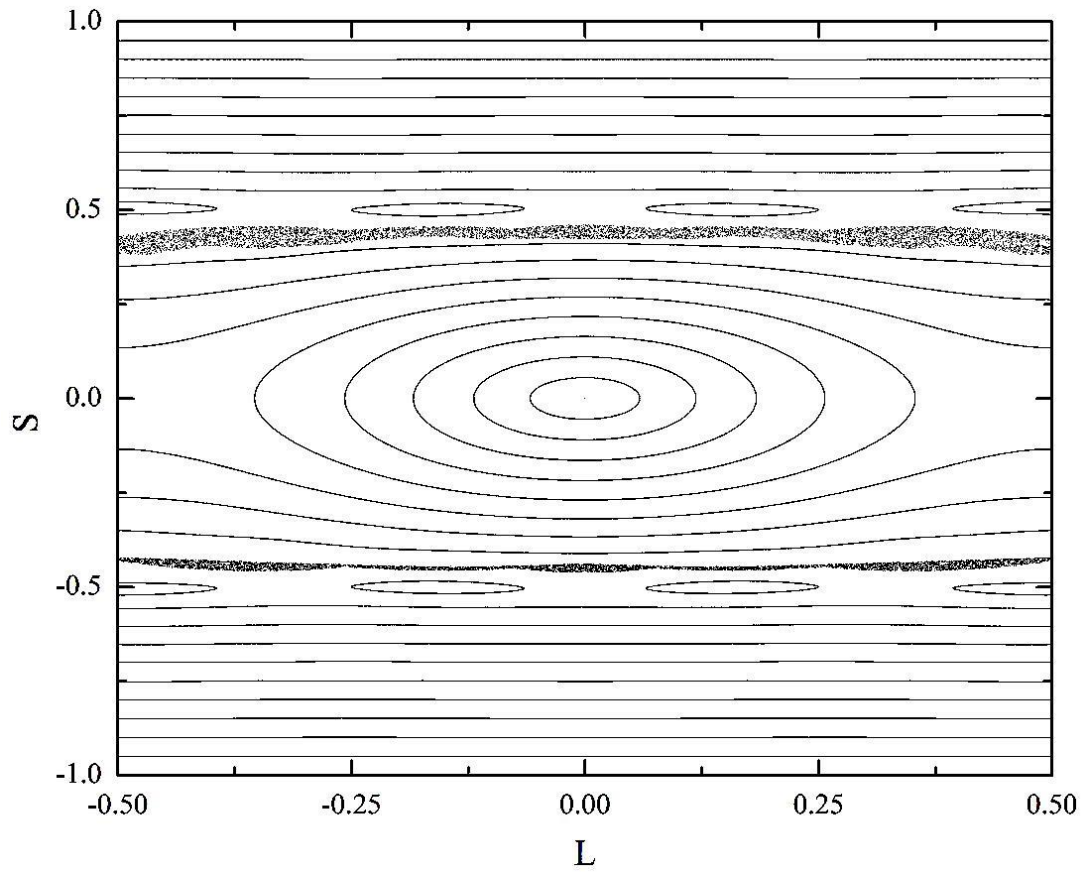


Figura 31: GSP para o bilhar anular elétrico estático. $r=0.45$, $\delta=0.00$, $E=1\times 10^{-5}$, $\varepsilon=6\times 10^{-5}$

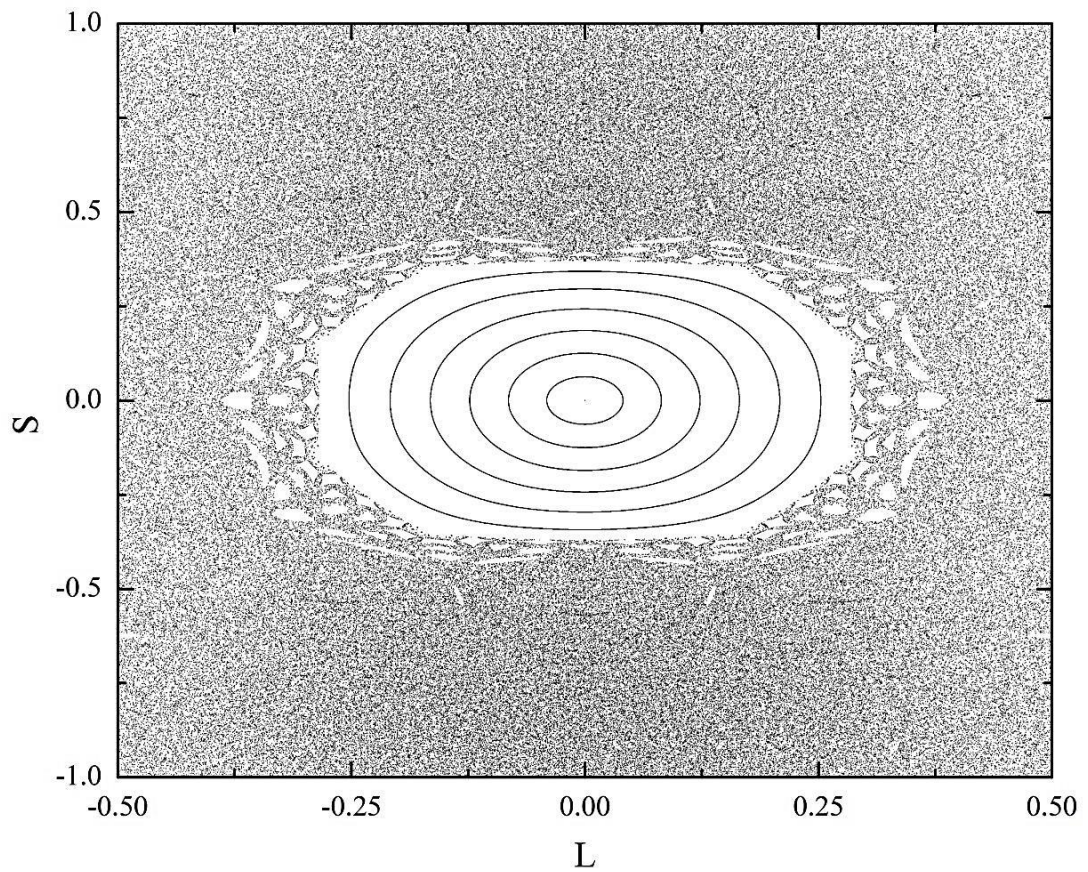


Figura 32: GSP para o bilhar anular elétrico estático. $r=0.45$, $\delta=0.00$, $E=1\times 10^{-4}$, $\varepsilon=1.5\times 10^{-4}$

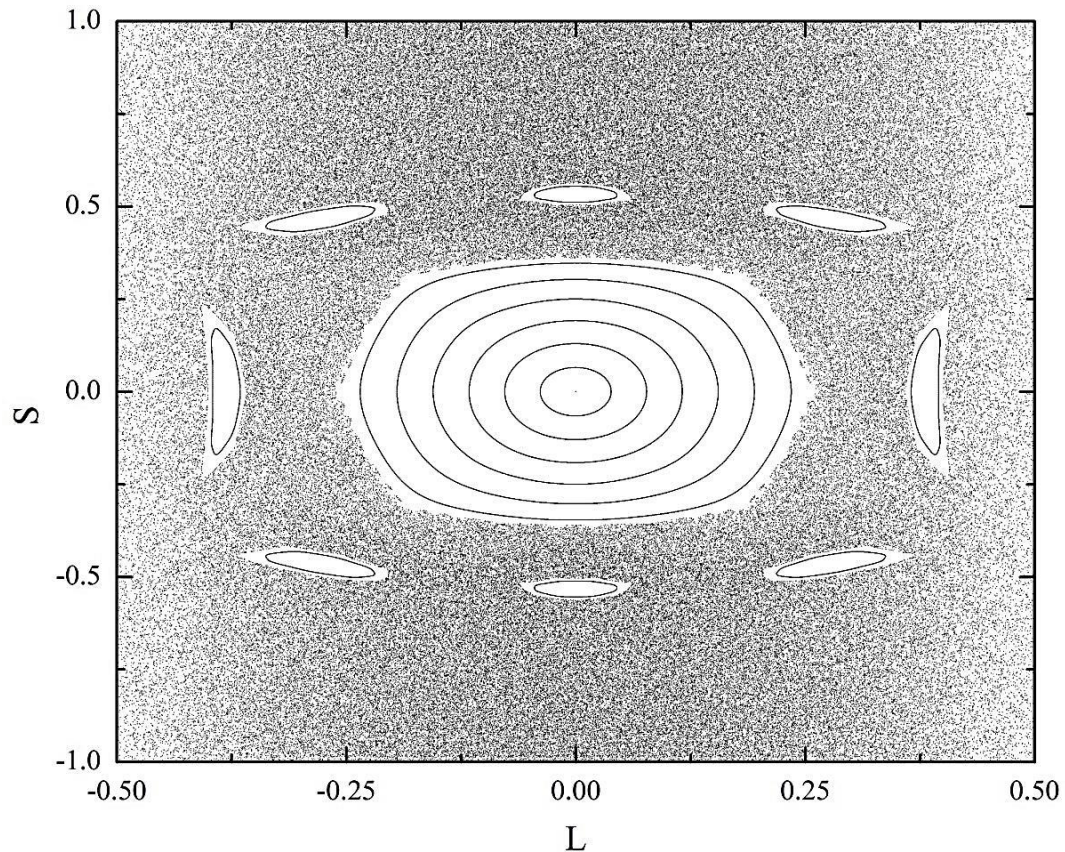


Figura 33: GSP para o bilhar anular elétrico estático. $r=0.45$, $\delta=0.00$, $E=1 \times 10^{-3}$, $\varepsilon=1.05 \times 10^{-3}$

As Figuras 30 a 32 mostram o espaço de fase geométrico para o bilhar anular concêntrico com valores diferentes de campo elétrico na direção x . Estes gráficos podem ser comparados com o da Figura 3, quando, na ausência de campo elétrico, o espaço de fase apresentava apenas curvas invariantes do tipo *spanning*, no entanto, a presença de um campo elétrico fraco, como o aplicado nas configurações paramétricas da Figura 30, tende a deformar tais toros invariantes. Um novo espaço de fase passa a apresentar pontos fixos elípticos, órbitas heteroclínicas e caos local, como mostrado na Figura 31. Conforme aumentamos o valor de E , e conseqüentemente também o valor da Energia Total da partícula, a dinâmica tende a se tornar cada vez mais caótica, embora regiões de estabilidade e ilhas de ressonância em meio ao mar de caos (como mostrado nas Figuras 32 e 33) ainda permanecem no espaço de fase misto.

Assim, podemos inferir que o campo elétrico tende a adicionar caos à dinâmica do bilhar anular. É de se imaginar também que para o caso excêntrico, onde já se observava dinâmica caótica na ausência de campos, tal propriedade se mantenha. As Figuras 34 a 37 mostram a Seção de Poincaré no plano (L,S) para a geometria excêntrica do bilhar anular para valores selecionados de campo elétrico na direção x . Tais gráficos podem ser comparados com o da Figura 8.

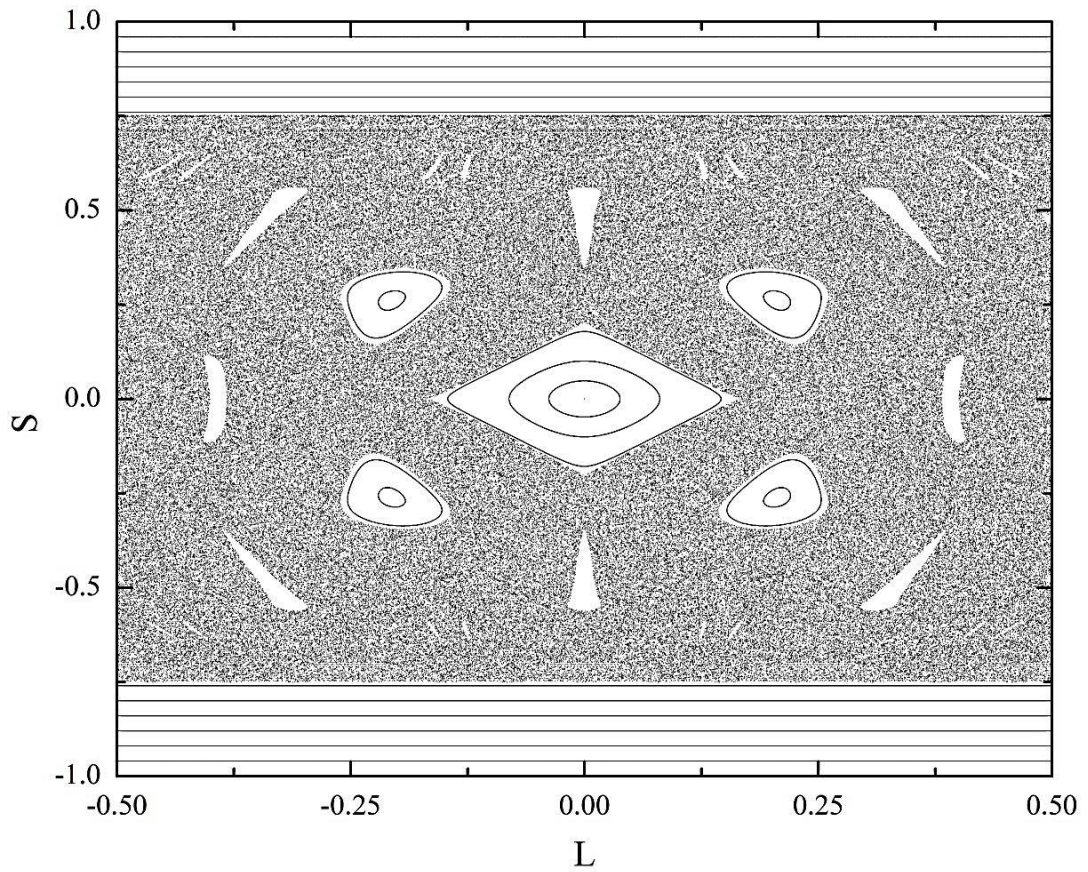


Figura 34: GSP para o bilhar anular elétrico estático. $r=0.45$, $\delta=0.30$, $E=0.1 \times 10^{-5}$, $\varepsilon=5.1 \times 10^{-5}$

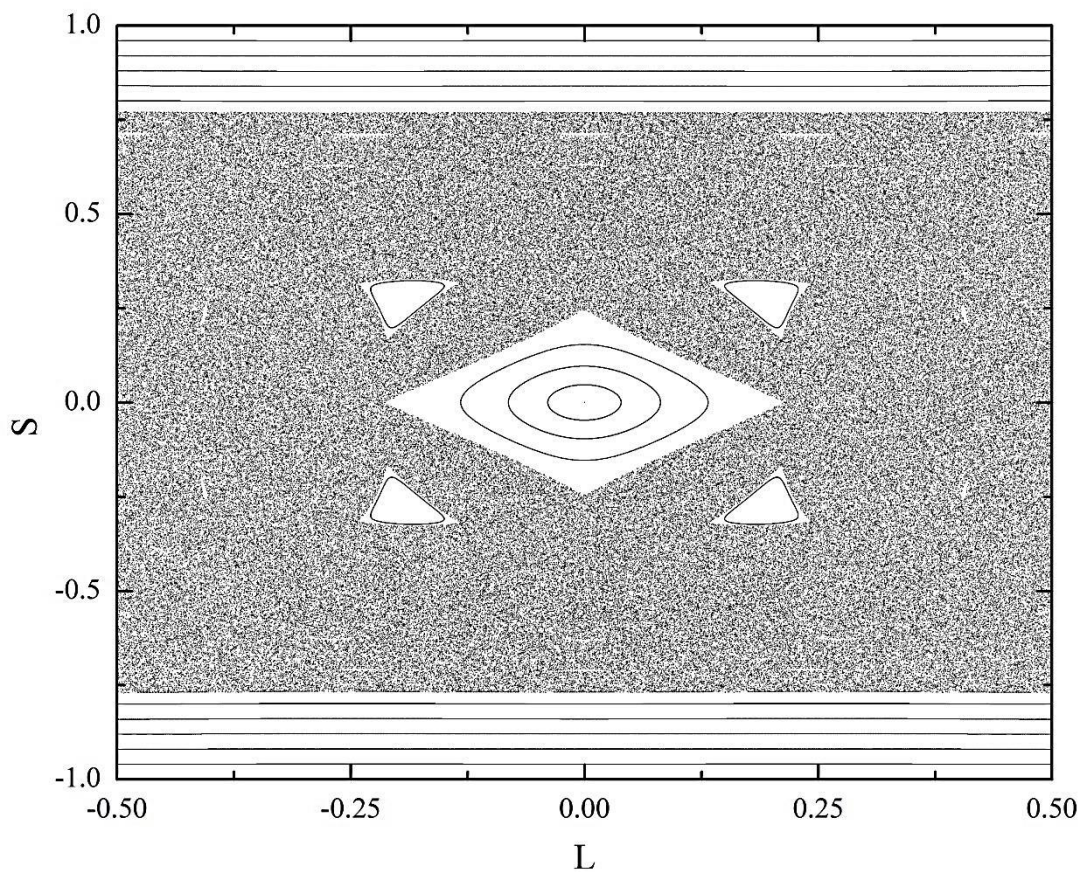


Figura 35: GSP para o bilhar anular elétrico estático. $r=0.45$, $\delta=0.30$, $E=1 \times 10^{-5}$, $\varepsilon=6 \times 10^{-5}$

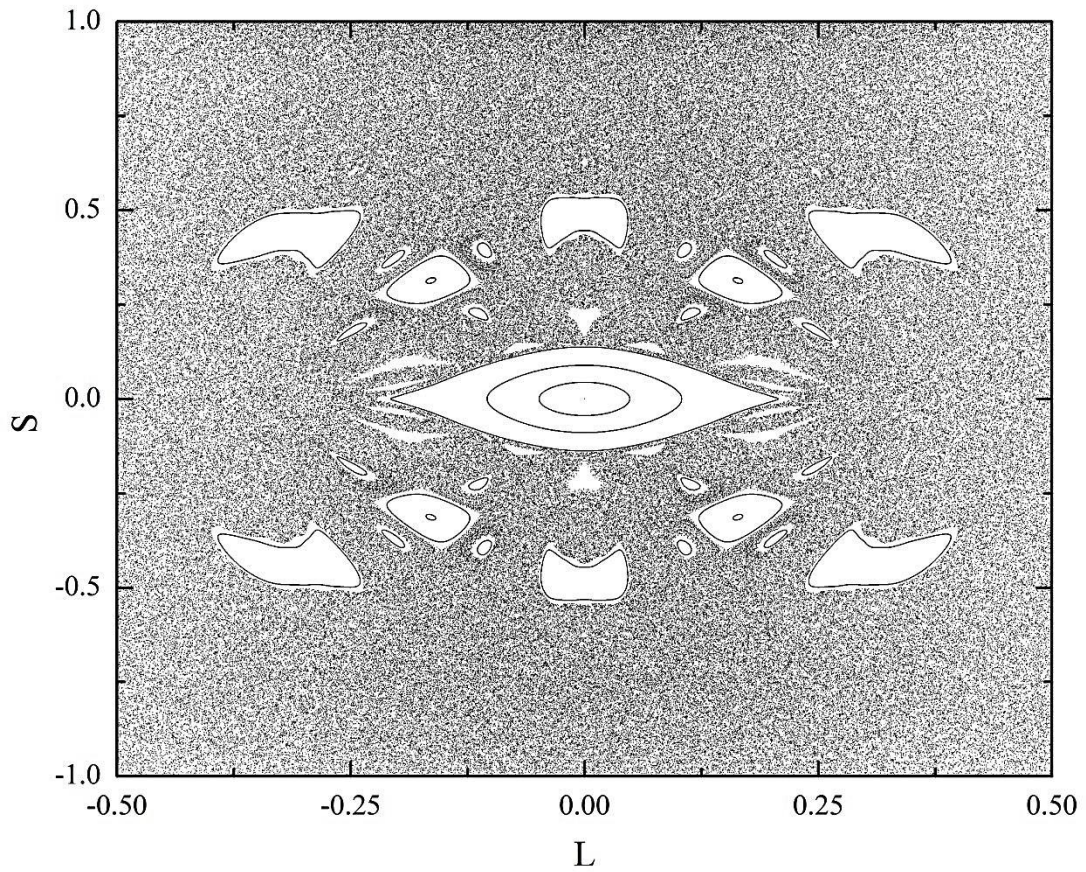


Figura 36: GSP para o bilhar anular elétrico estático. $r=0.45$, $\delta=0.30$, $E=1 \times 10^{-4}$, $\varepsilon=1.5 \times 10^{-4}$

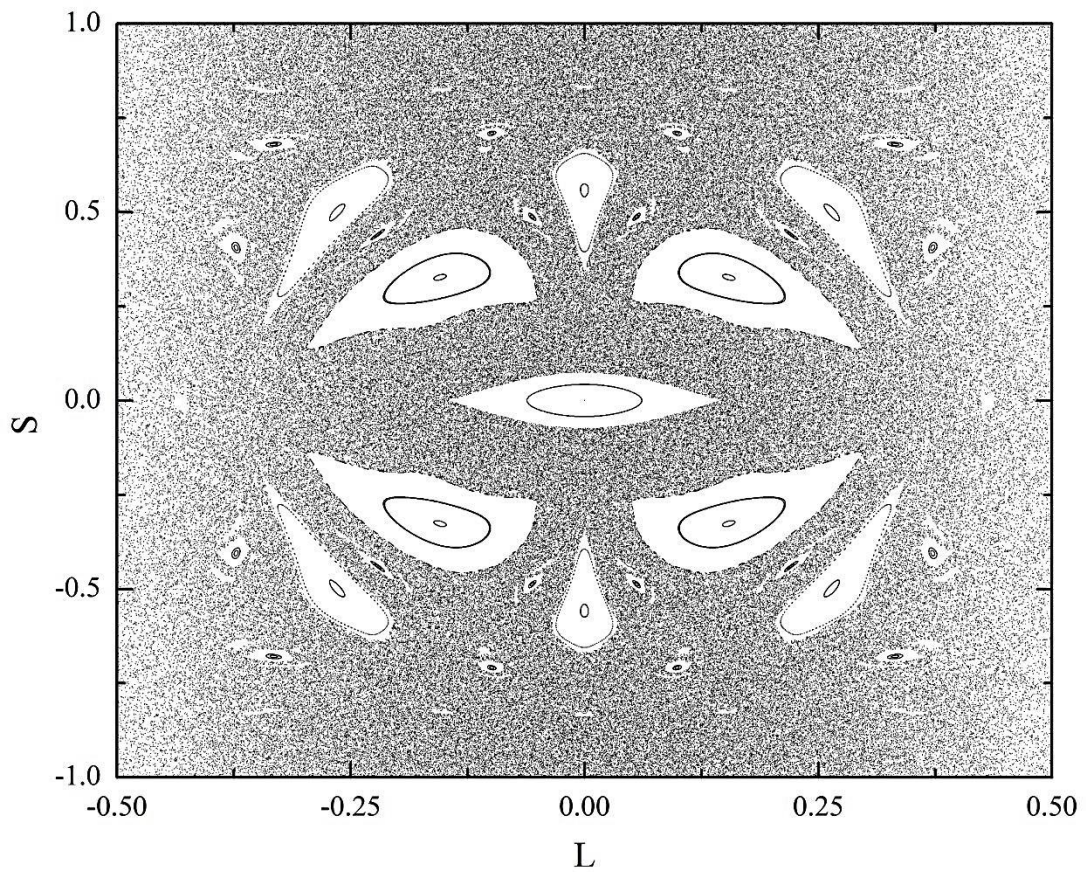


Figura 37: GSP para o bilhar anular elétrico estático. $r=0.45$, $\delta=0.30$, $E=1 \times 10^{-3}$, $\varepsilon=1.05 \times 10^{-3}$

Nas Figuras 38 e 39 a seguir são mostradas duas trajetórias típicas obtidas numericamente a partir das configurações de parâmetros do espaço de fase da Fig. 37, isto é, para $r=0.45$, $\delta=0.30$, $E=1\times 10^{-3}$, $\varepsilon=1.05\times 10^{-3}$, com o campo elétrico E orientado na direção x . Na Fig. 38, a condição inicial é dada na região do mar de caos, enquanto na Fig. 39 é dada em uma região regular do espaço de fase geométrico. Diferentemente do campo magnético, a trajetória descrita pela partícula são linhas que se encurvam na direção de x , uma vez que a partícula é constantemente acelerada na direção do campo.

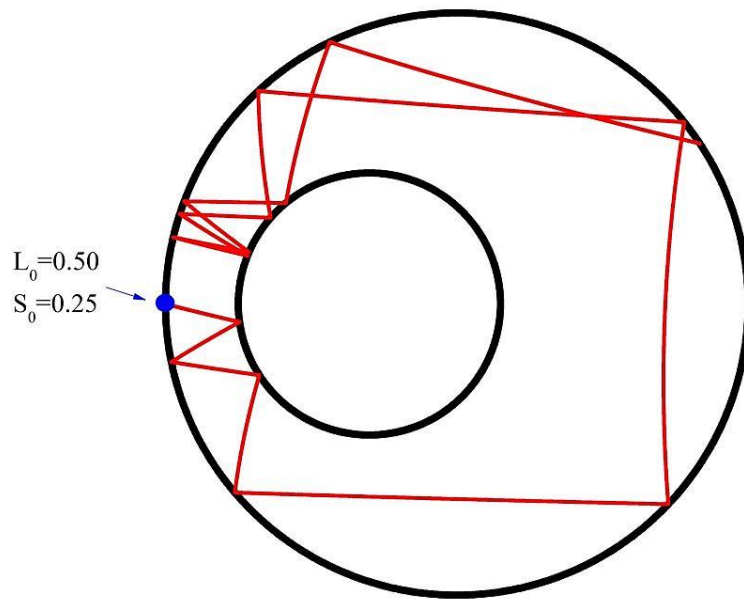


Figura 38: Trajetória da partícula no bilhar anular elétrico estático. $r=0.45$, $\delta=0.30$, $E=0.001$, $L_0=0.50$, $S_0=0.25$

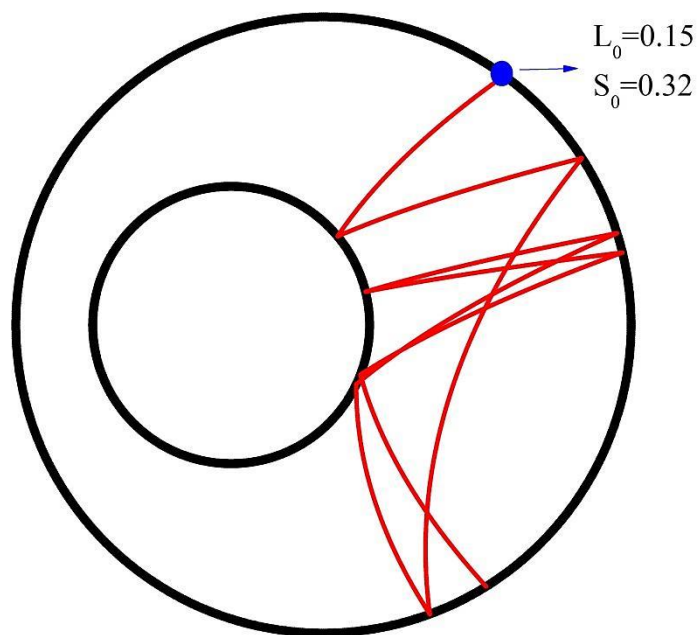


Figura 39: Trajetória da partícula no bilhar anular elétrico estático. $r=0.45$, $\delta=0.30$, $E=0.001$, $L_0=0.15$, $S_0=0.32$

4.3 O Bilhar Anular Eletromagnético Estático (BAEME)

O objetivo agora é analisar a ação dos dois campos simultaneamente sobre a dinâmica do bilhar. De um lado, o campo magnético tende a regularizar a dinâmica, do outro, o campo elétrico adiciona caos ao espaço de fase até mesmo para a geometria concêntrica. A combinação de parâmetros deverá, então, permitir que uma ou outra situação se manifeste na dinâmica ou ainda que haja algum tipo de competição entre as configurações possíveis.

A Hamiltoniana do sistema é dada na eq. (62) e, substituindo a expressão do potencial elétrico para o campo de intensidade constante orientado na direção x , temos:

$$\mathcal{E} = \mathcal{H}(\rho, \theta, p_\rho, p_\theta) = \frac{1}{2m} \left[p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(p_\theta - \frac{qB\rho^2}{2c} \right)^2 \right] - qE\rho \cos \theta \quad (107)$$

E as Equações de Movimento de Hamilton-Jacobi são:

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\rho} = \frac{p_\rho}{m} \quad (108)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \frac{1}{m\rho^2} \left(p_\theta - \frac{qB\rho^2}{2c} \right) \quad (109)$$

$$\dot{p}_\rho = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho} = \frac{1}{m\rho^3} \left[p_\theta^2 - \left(\frac{qB\rho^2}{2c} \right)^2 \right] + qE \cos \theta \quad (110)$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = -qE\rho \sin \theta \quad (111)$$

A Energia Total fornecida no *ensemble* de CI será o mesmo que o mostrado na seção 4.2 nas eqs. (100) e (106). Assim, as Figuras a seguir mostram o Gráfico da Seção de Poincaré (GSP) no plano (L,S) para alguns valores selecionados dos parâmetros E , B , r , e δ .

Para a geometria concêntrica, consideramos na Fig. 40 um campo magnético e um elétrico ambos de intensidade fraca, $E=1 \times 10^{-6}$ e $B=0.02$. Comparando com a Fig. 30, podemos observar a quebra de simetria devido ao campo magnético, que faz com que o ponto elíptico da Fig. 30 localizado em $(L=0.00, S=0.00)$ seja transportado para $(L=0.00, S \cong -0.55)$ na Fig. 40. Já no GSP da Fig. 41 observamos a configuração para um campo elétrico médio igual ao considerado na Fig. 31, isto é, $E=1 \times 10^{-5}$ e um campo magnético fraco $B=0.02$, tal que novamente podemos observar a quebra de simetria.

A Fig. 42 considera o mesmo campo elétrico $E=1 \times 10^{-5}$ e agora um campo magnético suficientemente forte para regularizar a dinâmica, fazendo com que apenas curvas

invariantes apareçam no espaço de fase. Já a Fig. 43 mostra o mesmo campo elétrico forte da Fig. 33 e o campo magnético forte da Fig. 43, que agora já não é suficiente para regularizar a dinâmica deste campo.

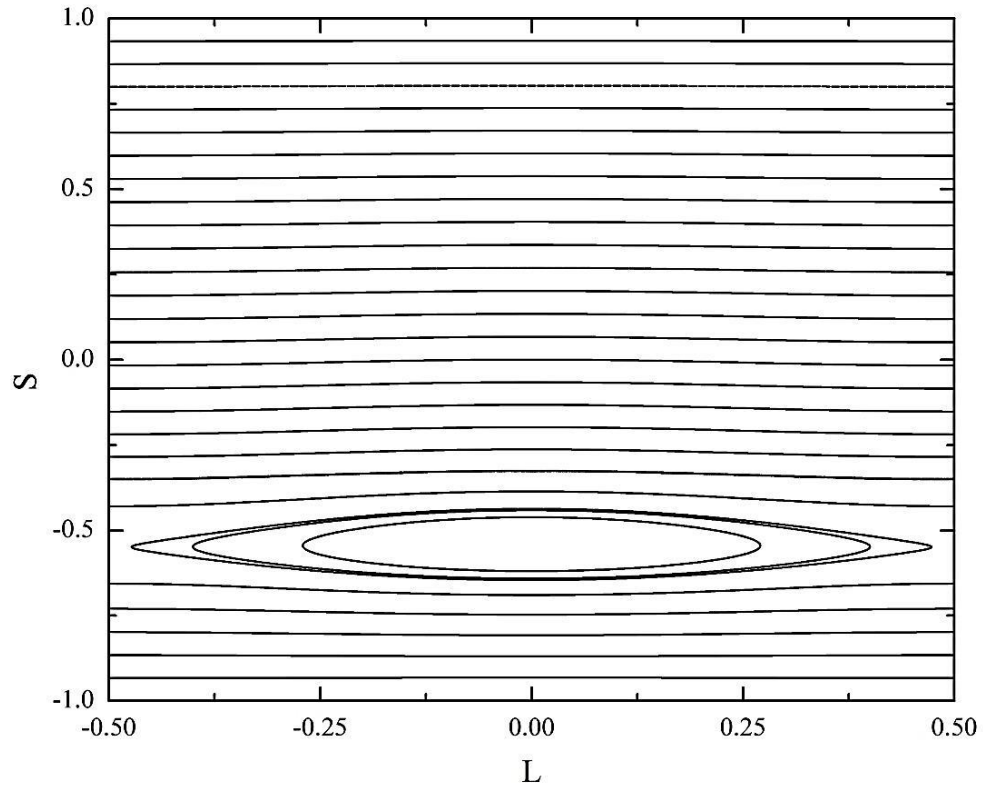


Figura 40: GSP para o bilhar anular eletromagnético estático. $r=0.45$, $\delta=0.00$, $E=0.1 \times 10^{-5}$, $B=0.02$, $\varepsilon=5.1 \times 10^{-5}$

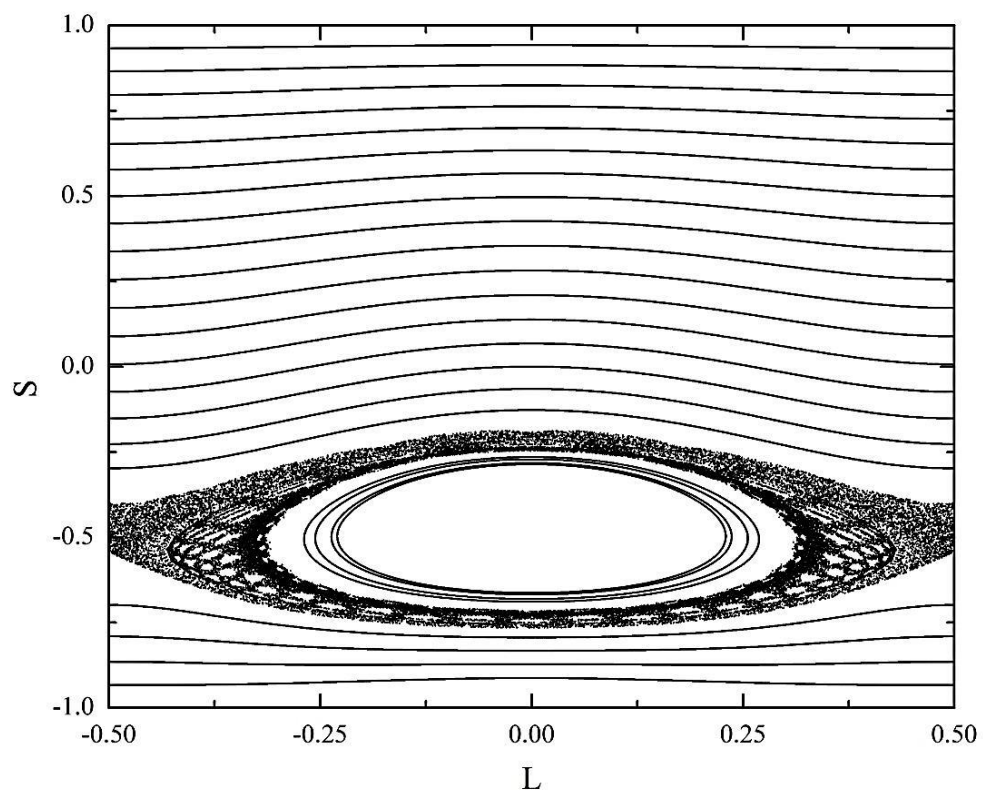


Figura 41: GSP para o bilhar anular eletromagnético estático. $r=0.45$, $\delta=0.00$, $E=1 \times 10^{-5}$, $B=0.02$, $\varepsilon=6 \times 10^{-5}$

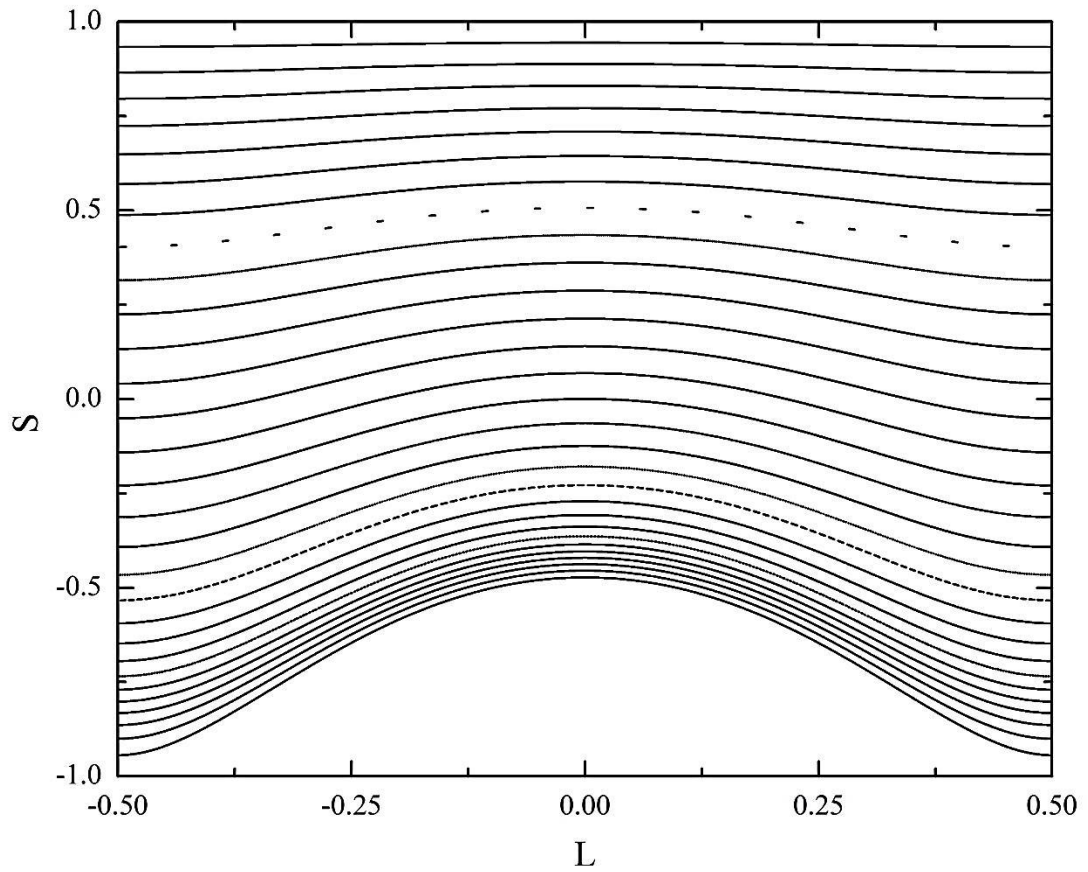


Figura 42: GSP para o bilhar anular eletromagnético estático. $r=0.45$, $\delta=0.00$, $E=1\times 10^{-5}$, $B=0.05$, $\varepsilon=6\times 10^{-5}$

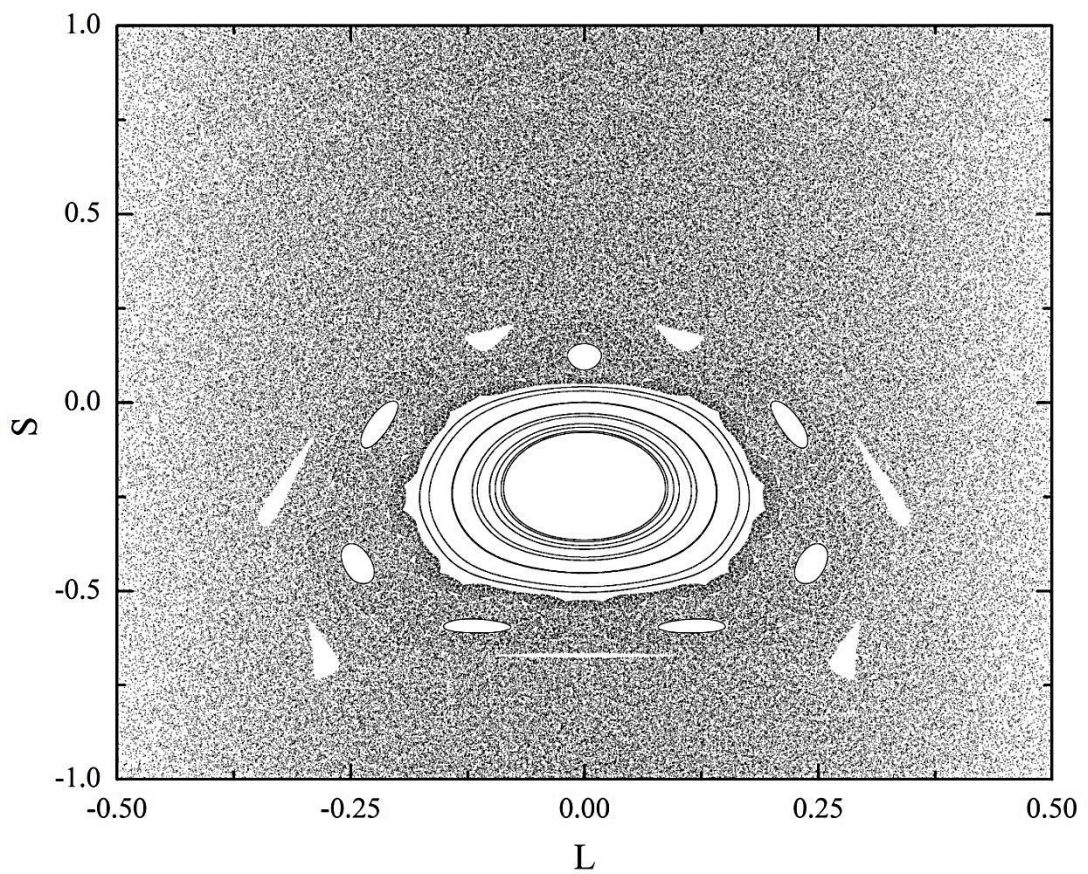


Figura 43: GSP para o bilhar anular eletromagnético estático. $r=0.45$, $\delta=0.00$, $E=1\times 10^{-3}$, $B=0.05$, $\varepsilon=1.05\times 10^{-3}$

Para a geometria excêntrica, os resultados devem ser análogos, isto é, deve haver combinações de parâmetros de E e B para os quais a dinâmica torna-se caótica ou regular. As Figuras 43 a 48 mostram os GSP para alguns valores de parâmetros considerados.

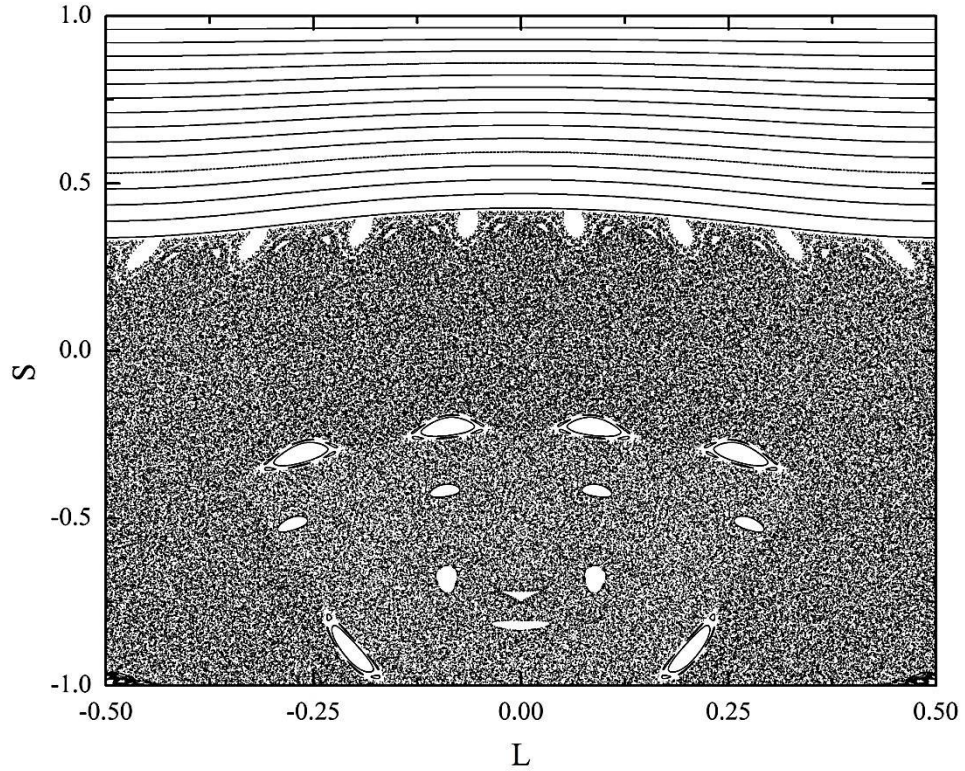


Figura 44: GSP para o bilhar anular eletromagnético estático. $r=0.45$, $\delta=0.30$, $E=1 \times 10^{-5}$, $B=0.02$, $\varepsilon=6 \times 10^{-5}$

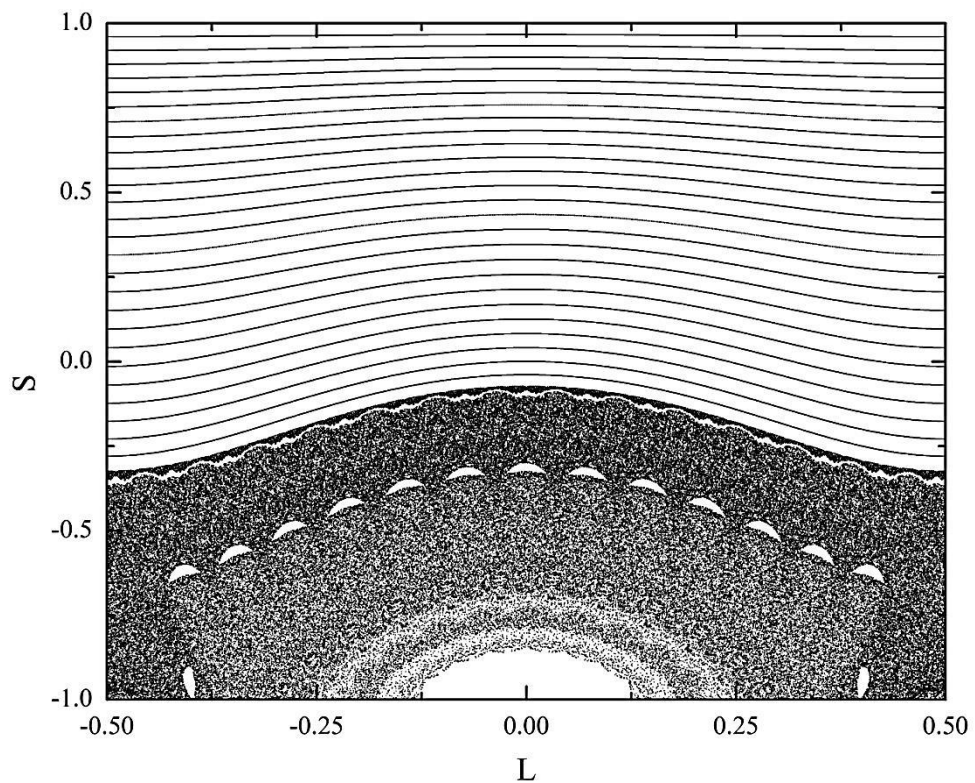


Figura 45: GSP para o bilhar anular eletromagnético estático. $r=0.45$, $\delta=0.30$, $E=1 \times 10^{-5}$, $B=0.05$, $\varepsilon=6 \times 10^{-5}$

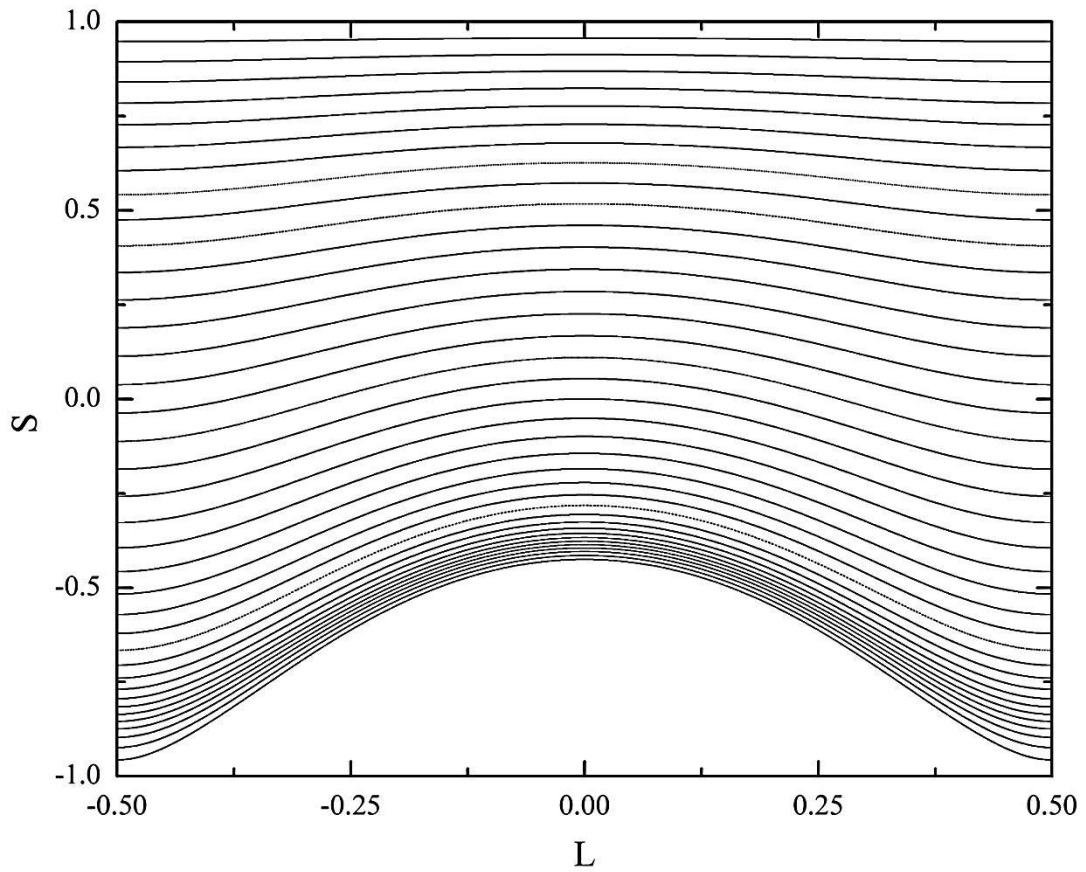


Figura 46: GSP para o bilhar anular eletromagnético estático. $r=0.45$, $\delta=0.30$, $E=1 \times 10^{-5}$, $B=0.08$, $\varepsilon=6 \times 10^{-5}$

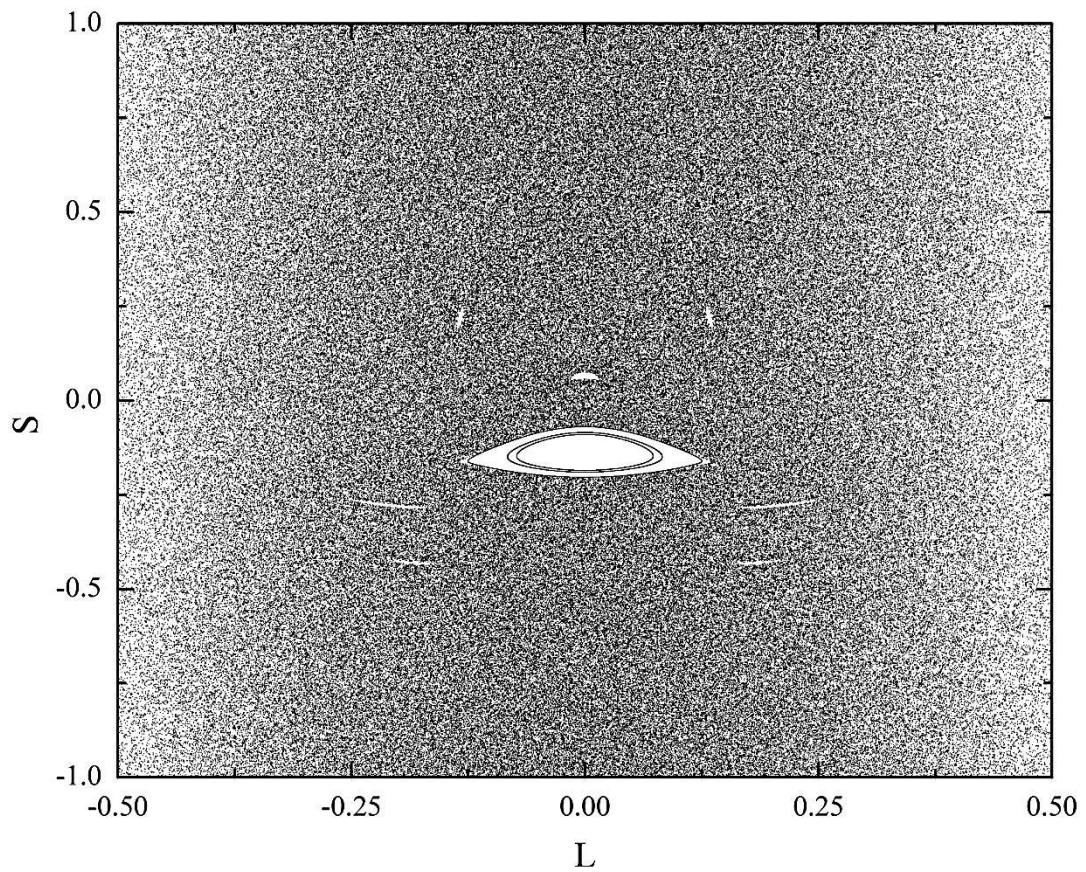


Figura 47: GSP para o bilhar anular eletromagnético estático. $r=0.45$, $\delta=0.30$, $E=1 \times 10^{-3}$, $B=0.02$, $\varepsilon=1.05 \times 10^{-3}$

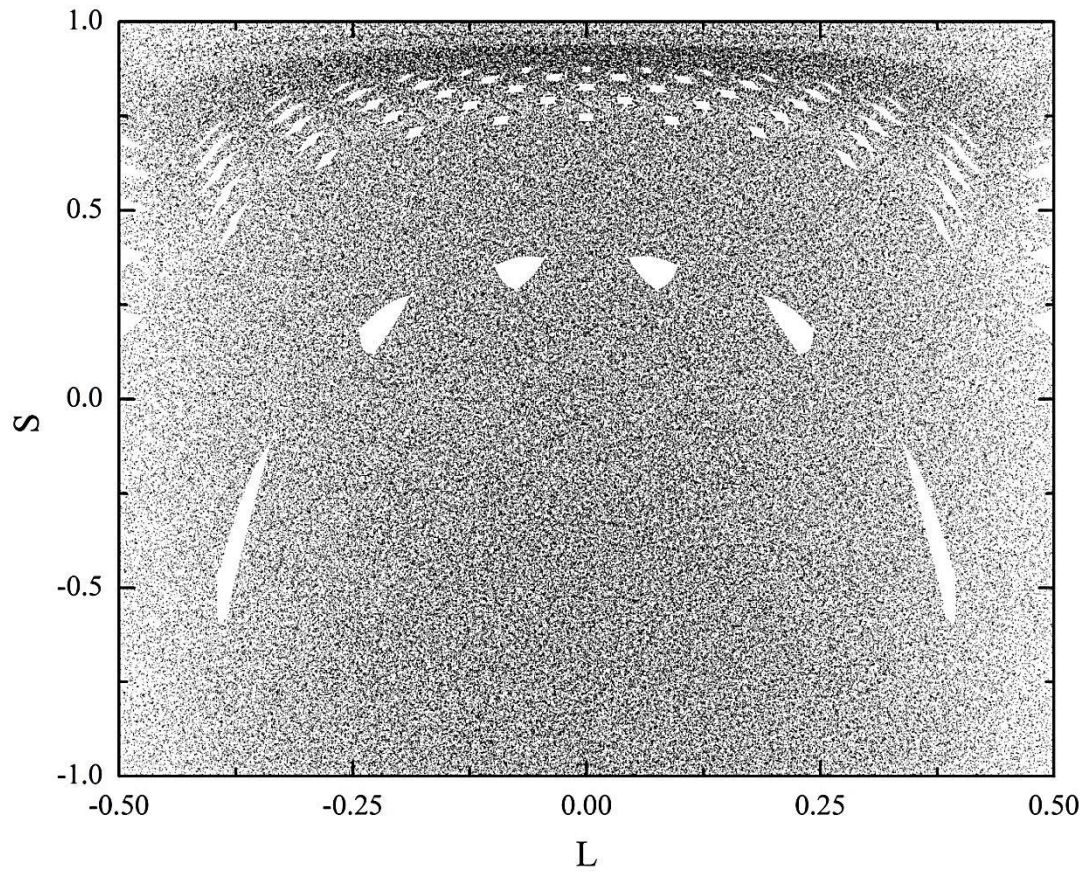


Figura 48: GSP para o bilhar anular eletromagnético estático. $r=0.45$, $\delta=0.30$, $E=1\times 10^{-3}$, $B=0.08$, $\varepsilon=1.05\times 10^{-3}$

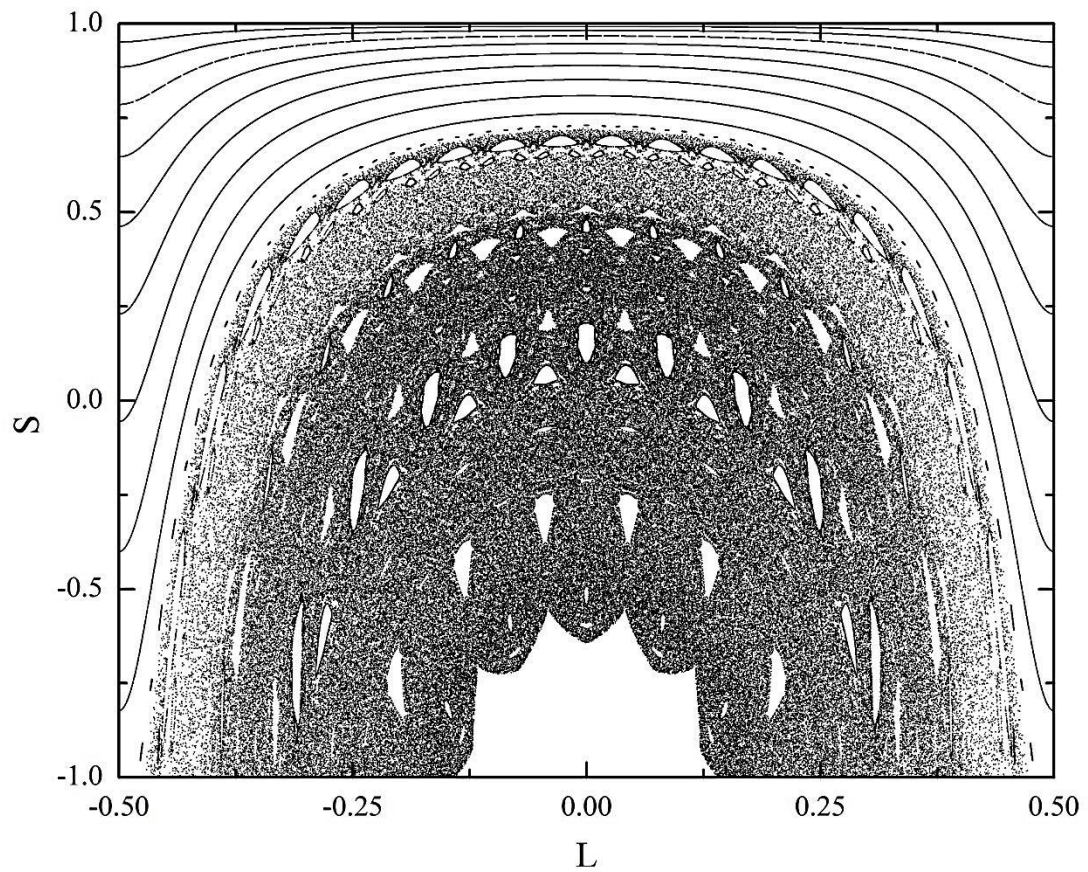


Figura 49: GSP para o bilhar anular eletromagnético estático. $r=0.45$, $\delta=0.30$, $E=1\times 10^{-3}$, $B=0.20$, $\varepsilon=1.05\times 10^{-3}$

Podemos observar que todos os parâmetros contribuem de maneira significativa na dinâmica do sistema. Em geral, a geometria excêntrica e o campo elétrico tendem a torná-la mais caótica, enquanto que a geometria concêntrica e o campo magnético tendem a regularizar a dinâmica. No entanto, quando todos estes parâmetros são considerados simultaneamente, existe uma competição entre o efeito das ações de cada um sobre a dinâmica do bilhar, não existindo valores fixos de um ou outro parâmetro que possa sempre regularizar uma órbita ou torná-la caótica. Isto quer dizer que existem correlações entre os próprios parâmetros, como exemplo, um mesmo valor de intensidade de campo magnético atua de forma diferente sobre o bilhar se a partícula possuir uma velocidade maior ou menor, pois o raio de curvatura é proporcional à velocidade. Por outro lado, se houver um campo elétrico agindo concomitantemente, a energia total da partícula não é apenas a energia cinética, mas sim a soma desta com a energia potencial elétrica, que por sua vez, se altera segundo a posição com que a partícula se encontra no bilhar.

Tendo isto em vista, observamos, por exemplo, que o campo magnético de intensidade $B=0.05$, que foi suficiente para regularizar a dinâmica no caso concêntrico sob a ação de campo elétrico $E=1\times 10^{-5}$ da Fig. 42 não foi suficiente para que isso ocorresse com o mesmo valor de campo magnético no caso excêntrico, conforme mostrado na Fig. 45. Isto só veio a ocorrer com um valor mais alto, $B=0.08$, conforme mostrado na Fig. 46.

Para um campo elétrico de intensidade $E=1\times 10^{-3}$, no caso excêntrico observávamos um espaço de fase geométrico misto com regiões de estabilidade entre o mar de caos conforme visto na Fig. 37, mas quando consideramos campos magnéticos $B=0.02$ e $B=0.08$, tais regiões de estabilidade foram sumariamente diminuídas e a região de dinâmica caótica aumentou, conforme mostram as Figs. 47 e 48. O efeito regularizador do campo magnético só começou a aparecer para uma intensidade maior, $B=0.20$, conforme representado na Fig. 49.

As Figs. (50) e (51) a seguir são trajetórias obtidas numericamente para o BAEME. A condição inicial em cada uma é um ponto diferente do mar de caos da Seção de Poincaré da Fig. 49. É interessante notar a trajetória helicoidal descrita pela partícula que evidencia como a força magnética atua de forma diferente para diferentes posições da partícula no bilhar gerando círculos de tamanhos diferentes, o que ocorre devido à velocidade da partícula se alterar conforme sua energia potencial elétrica é convertida em cinética ou vice-versa. Pode-se observar também na Fig. 50 a partícula cruzando sua própria trajetória várias vezes entre duas colisões ou, ainda, na Fig. 51, sofrendo várias colisões sucessivas com o círculo interno antes de encontrar a fronteira externa novamente.

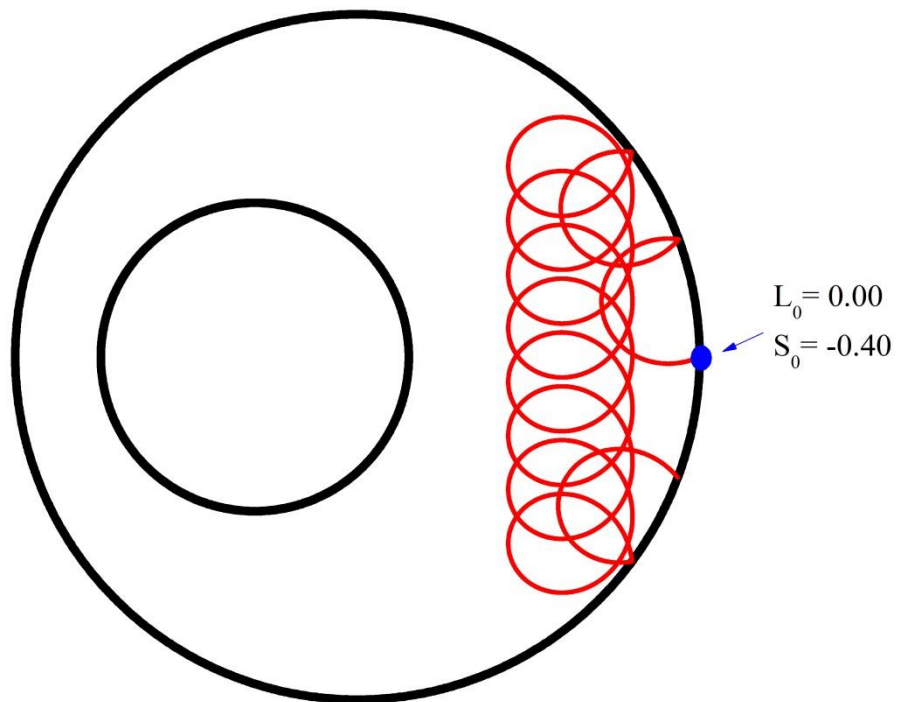


Figura 50: Trajetória da partícula no bilhar anular eletromagnético estático. $r=0.45$, $\delta=0.30$, $E=0.001$, $B=0.20$, $L_0=0.00$, $S_0=-0.40$

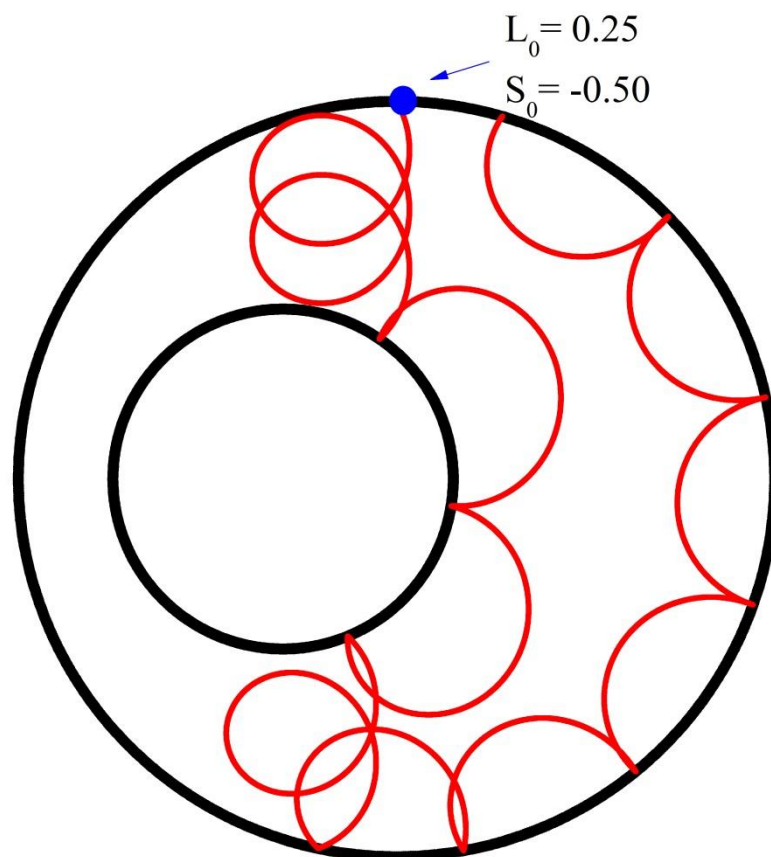


Figura 51: Trajetória da partícula no bilhar anular eletromagnético estático. $r=0.45$, $\delta=0.30$, $E=0.001$, $B=0.20$, $L_0=0.25$, $S_0=-0.50$

5. O BILHAR ANULAR MAGNÉTICO PULSANTE (BAMP)

Consideraremos agora os resultados obtidos para o bilhar anular pulsante submetido à força magnética devido ao campo magnético \vec{B} descrito no Capítulo 3. A dependência temporal periódica no tamanho dos raios dos círculos que constituem as fronteiras do bilhar foi abordada na seção 2.3. Um desenho esquemático do BAMP pode ser visualizado na Figura 52, onde estão contidas as representações da oscilação das fronteiras, os parâmetros geométricos do sistema, a direção do campo magnético e uma trajetória típica que pode ser descrita pela partícula eletricamente carregada.

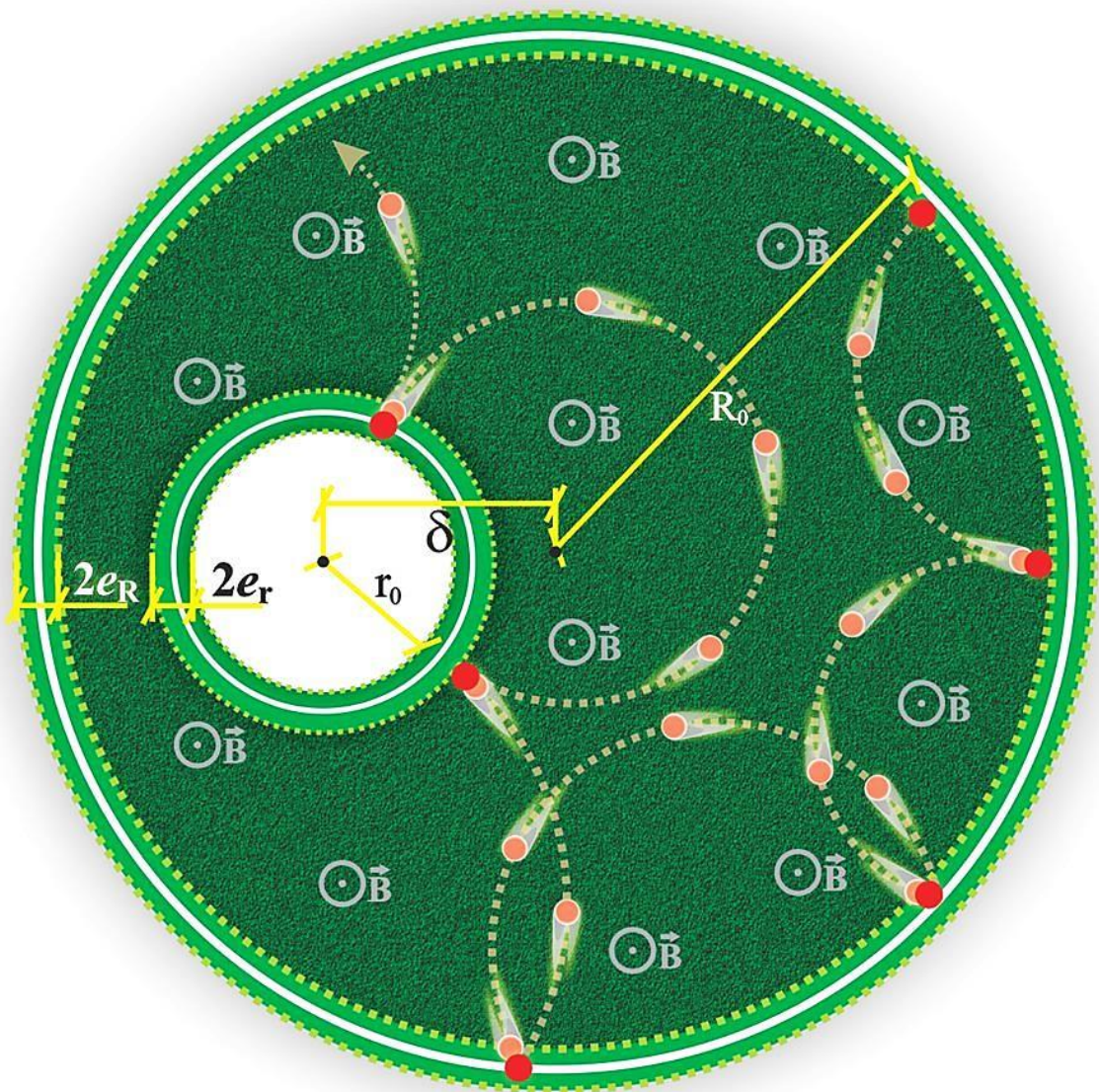


Figura 52: Desenho esquemático do Bilhar Anular Magnético Pulsante. Observa-se o campo magnético perpendicularmente orientado em relação ao plano do bilhar e as trajetórias circulares descritas pela partícula. A cada colisão com uma das fronteiras, a velocidade v , e, conseqüentemente, o tamanho do raio de curvatura da trajetória da partícula podem ser alterados.

Neste Capítulo 5, e também no Capítulo 7, consideraremos apenas colisões perfeitamente elásticas, de modo que o coeficiente de restituição do choque será $\gamma=1$, e também apenas o modelo completo será utilizado. Vale lembrar que a cada colisão com uma das fronteiras móveis do bilhar, a mudança na velocidade da partícula e conseqüentemente na sua energia total fazem dos bilhares dependentes do tempo sistemas não Hamiltonianos, nos quais a Energia não é uma constante de movimento. No entanto, no sistema proposto neste trabalho, a formulação Hamiltoniana ainda é possível, à medida que entre duas colisões sucessivas a Energia permanece constante, alterando-se apenas devido à mudança de energia cinética na transferência de *momentum* entre as paredes do bilhar e a partícula. Portanto, o problema consiste em integrar as Equações de Movimento de Hamilton-Jacobi, a partir de condições iniciais dadas nas componentes da posição e do momento canônico da partícula e nas fases iniciais de oscilação das fronteiras, e, em cada colisão como um dos círculos móveis, considerar as devidas correções cinemáticas sobre a energia cinética da partícula. Para o BAMP, onde o campo elétrico é nulo, a Hamiltoniana do sistema e as Equações de Movimento são dadas nas eqs. (71) a (75).

Assim, as correções cinemáticas nas componentes da velocidade da partícula devido a uma colisão com a fronteira *externa* serão dadas por:

$$v_R = -v_R^0 - 2e_R \sin[\phi_e(t_c)] \quad (112)$$

$$v_\theta = v_\theta^0 \quad (113)$$

onde v_R^0 e v_R denotam a componente radial da velocidade da partícula antes e após o choque, respectivamente; v_θ^0 e v_θ a componente tangencial da velocidade da partícula antes e após o choque, respectivamente; e_R é a meia-largura de oscilação da fronteira externa; t_c o instante no qual ocorre a colisão e $\phi_e(t_c)$ a fase de oscilação da fronteira calculada no instante t_c . Os momentos canônicos após o choque são, então, dados por:

$$p_\rho = m v_R \quad (114)$$

$$p_\theta = p_\theta^0 \quad (115)$$

onde p_θ^0 é o momento canônico na direção θ , tomado imediatamente antes do choque, que permanece inalterado após o mesmo. Lembrando que:

$$p_\theta = p_\theta^0 = m\rho v_\theta + \frac{qB\rho^2}{2c} \quad (116)$$

tal que a velocidade tangencial e o momento angular da partícula permanecem constantes para uma colisão com a fronteira externa.

Os ângulos com o qual a trajetória incide no ponto de colisão em relação à reta normal à curva da fronteira externa e com o qual a trajetória é defletida também em relação a esta reta não são mais iguais. O ângulo de incidência pode ser dado por:

$$\alpha^0 = \arctan \left[\frac{1}{\rho p_\rho^0} \left(p_\theta^0 - \frac{qB\rho^2}{2c} \right) \right] \quad (117)$$

e o de reflexão:

$$\alpha = \arctan \left[\frac{1}{\rho p_\rho} \left(p_\theta - \frac{qB\rho^2}{2c} \right) \right] \quad (118)$$

Para uma colisão com a fronteira *interna*, as correções cinemáticas são dadas nas componentes da velocidade em relação ao centro do círculo interno, isto é:

$$v_r = -v_r^0 - 2e_r \omega \sin[\phi_i(t_c)] \quad (119)$$

$$v_{\theta in} = v_{\theta in}^0 \quad (120)$$

onde v_r^0 e v_r são a componente radial com relação ao referencial do centro do círculo interno da velocidade antes e após o choque, respectivamente; $v_{\theta in}^0$ e $v_{\theta in}$ a componente tangencial também com referência ao círculo interno antes e após o choque, respectivamente; e_r é a meia amplitude de oscilação da fronteira interna; ω a frequência de oscilação da fronteira interna normalizada em relação à da externa; e $\phi_i(t_c)$ a fase de oscilação da fronteira interna no instante de colisão t_c .

Para a obtenção dessas componentes, podem-se considerar os ângulos mostrados na Fig. 21, com a diferença que para o bilhar pulsante não valem mais as relações das eqs. (89), (90), (91) e (96). No entanto, o ângulo com que a trajetória incide no ponto de colisão em relação à *reta normal ao círculo externo* β_{ex}^0 ainda pode ser obtido através da relação da eq. (92). Mas, o ângulo w formado pela reta normal ao círculo interno e a normal ao externo que passam pelo ponto de colisão passa a ser:

$$w = \arctan \left[\frac{2\rho\delta \sin(\pi - \theta)}{(r(t_c))^2 + \rho^2 - \delta^2} \right] \quad (121)$$

onde $r(t_c)$ é o raio do círculo interno do bilhar no instante da colisão t_c . Desta forma, o ângulo com o qual a trajetória incide sobre o ponto de colisão em relação à *reta normal ao círculo interno* β^0 pode ser calculado pela eq. (94). E as componentes da velocidade tomadas no referencial do círculo interno antes da colisão podem ser calculadas em termos deste ângulo, como sendo:

$$v_r^0 = v^0 \cos \beta^0 \quad (122)$$

$$v_{\theta n}^0 = v^0 \sin \beta^0 \quad (123)$$

onde v^0 denota a velocidade total da partícula tomada imediatamente antes à colisão, e pode ser obtida em termos da energia total ou da Hamiltoniana calculada no instante da colisão conforme a eq. (66).

Uma vez conhecido o valor das componentes da velocidade em relação ao referencial da fronteira interna antes do choque, podemos agora aplicar as transformações cinemáticas das eqs. (119) e (120). E a nova velocidade total após o choque passa a ser:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_{\theta n}^2} \quad (124)$$

Por sua vez, o ângulo com o qual a trajetória é defletida em relação à reta normal ao círculo interno pode ser obtido em termos das novas componentes como sendo:

$$\beta = \arctan \left[\frac{v_{\theta n}}{-v_r} \right] \quad (125)$$

E o ângulo de saída β_{ex} com o qual a trajetória é defletida em relação à *reta normal ao círculo externo* no ponto de colisão é a soma dos ângulos β e w , conforme mostrado na eq. (95).

Assim, os momentos canônicos após o choque podem ser corrigidos em termo do ângulo de saída β_{ex} e da velocidade total após o choque v :

$$p_\rho = -m v \cos(\beta_{ex}) \quad (126)$$

$$p_\theta = m \rho v \sin(\beta_{ex}) + \frac{q B \rho^2}{2c} \quad (127)$$

É importante notar que para o caso concêntrico $w=0$, e as componentes da velocidade tomadas no referencial da fronteira interna são as mesmas que as da externa, uma que vez que os dois círculos estão centrados no mesmo ponto. Isso quer dizer que a componente tangencial da velocidade nunca se altera frente a uma colisão e que o momento angular p_θ é constante em todo o movimento.

5.1 Geometria Concêntrica

Vamos analisar agora os efeitos do Campo Magnético sobre o bilhar anular pulsante concêntrico. Conforme acabamos de verificar, e também citado na seção 2.3, a Energia Total da partícula não se conserva. No entanto, para o caso em que $\delta=0$, o momento

angular é uma constante de movimento. Assim, o espaço de fase de quatro dimensões pode ser estudado em uma Seção de Poincaré bidimensional. Esta seção é a mesma visualizada nas Figs. 14, 15, 16 e 18, no plano $(\phi_e, -v_R)$.

Como p_θ é constante de movimento e está vinculada à componente tangencial da velocidade da partícula, deve-se tomar o devido cuidado para que o valor fornecido a p_θ não remeta a uma velocidade tangencial muito grande, de tal forma que para qualquer valor de campo a partícula acabe se movendo apenas na região das *WGO*. Neste sentido, escolhemos um valor de p_θ que varie com o campo magnético B . Como todas as condições iniciais são dadas em algum ponto da fronteira externa, escolhemos a seguinte parametrização do momento canônico na direção θ :

$$p_\theta = mR_0v_\theta + \frac{qBR_0^2}{2c} \quad (128)$$

onde R_0 é o raio externo médio que a fronteira assume. Escolhemos, então, um valor pequeno para a velocidade tangencial v_θ , da ordem da meia largura de oscilação da fronteira externa e, assumindo a normalização dos parâmetros do sistema, temos $R_0=1$ (lembrando também que para fins numéricos, $q=1$, $c=1$, $m=1$), tal que:

$$p_\theta = me_R + \frac{qB}{2c} \quad (129)$$

Assim, a relação (129) nos garante que independente da intensidade do campo magnético a componente tangencial do momento mecânico fornecida à partícula será:

$$\Pi_\theta = \frac{m}{R_0 \pm e_R} e_R \quad (130)$$

onde esta pequena variação no denominador depende da posição da fronteira no instante $t=0$, que corresponderá também à componente radial ρ de coordenada de posição da partícula neste instante de tempo. Desta maneira garantimos que diferentes intensidades de B irão alterar de forma significativa apenas o momento angular fornecido à partícula, mas não sua velocidade tangencial.

Os gráficos a seguir mostram a configuração do espaço de fase no plano $(\phi_e, -v_R)$ obtido com o modelo completo a partir da integração numérica das equações de movimento para diferentes valores da intensidade de campo magnético na geometria concêntrica do bilhar pulsante. Os parâmetros aqui utilizados são os mesmos que o da Fig. 14, podendo ser comparados a ela para uma análise visual.

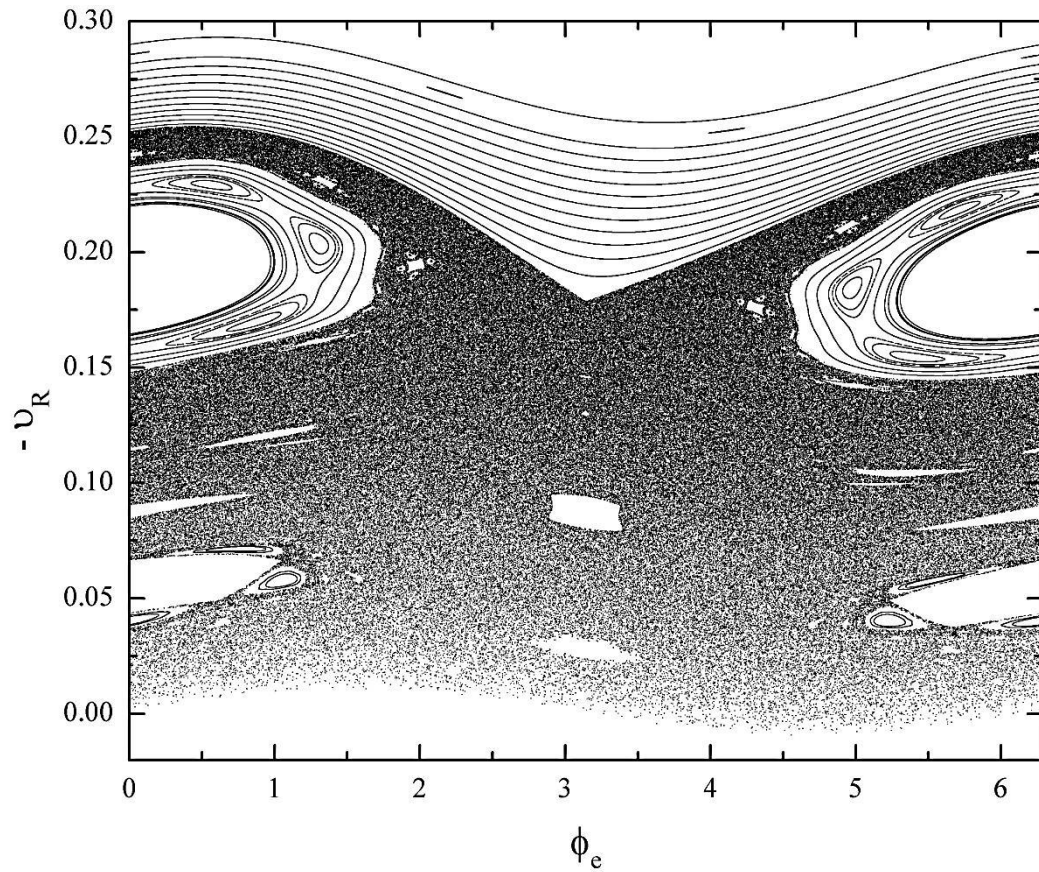


Figura 53: GSP para o BAMP. $r_0=0.45$, $\delta=0.00$, $\omega=1.00$, $e_R=e_r=0.01$, $\sigma_e - \sigma_i = 0.00$, $B=0.10$

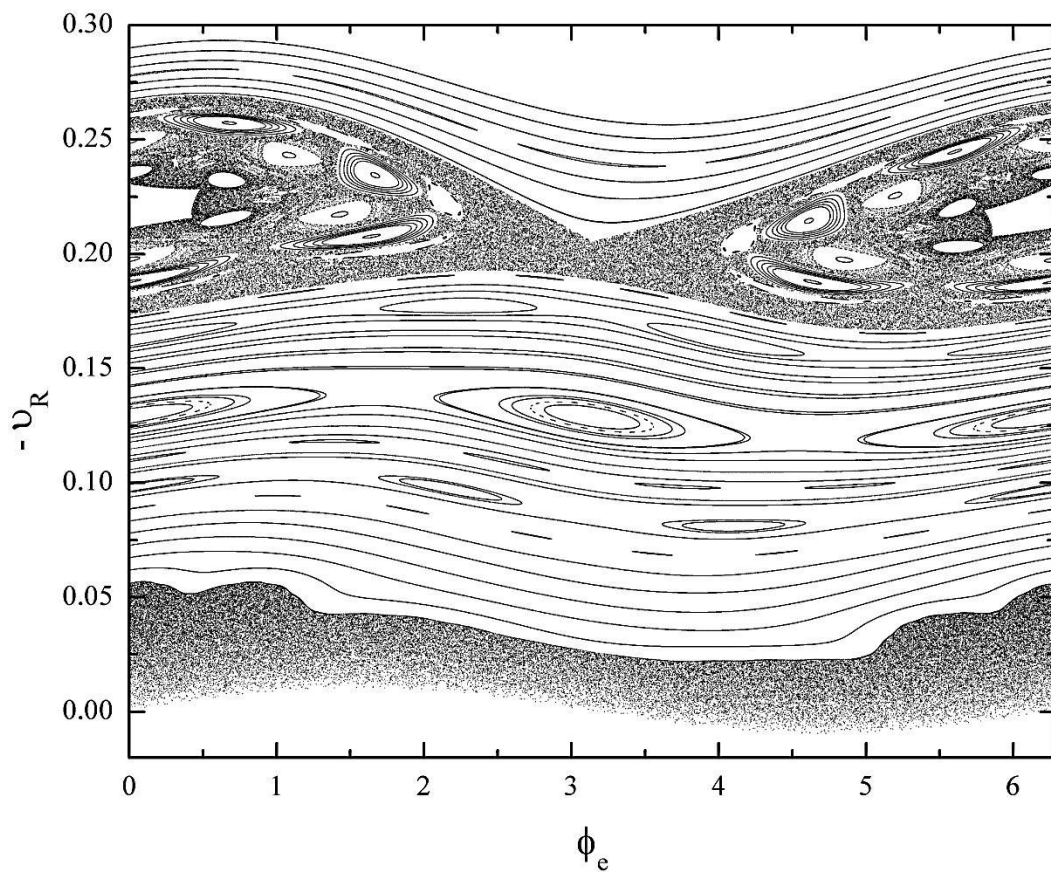


Figura 54: GSP para o BAMP. $r_0=0.45$, $\delta=0.00$, $\omega=1.00$, $e_R=e_r=0.01$, $\sigma_e - \sigma_i = 0.00$, $B=0.20$

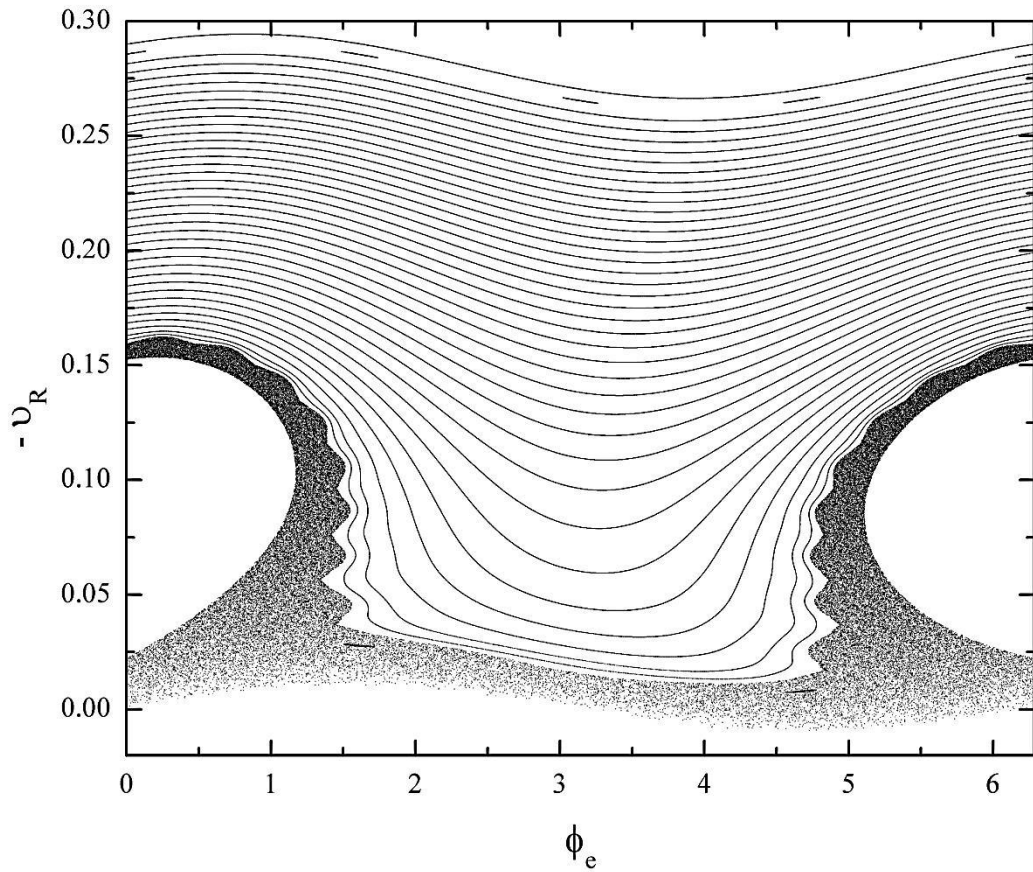


Figura 55: GSP para o BAMP. $r_0=0.45$, $\delta=0.00$, $\omega=1.00$, $e_R=e_r=0.01$, $\sigma_e - \sigma_i = 0.00$, $B=0.40$

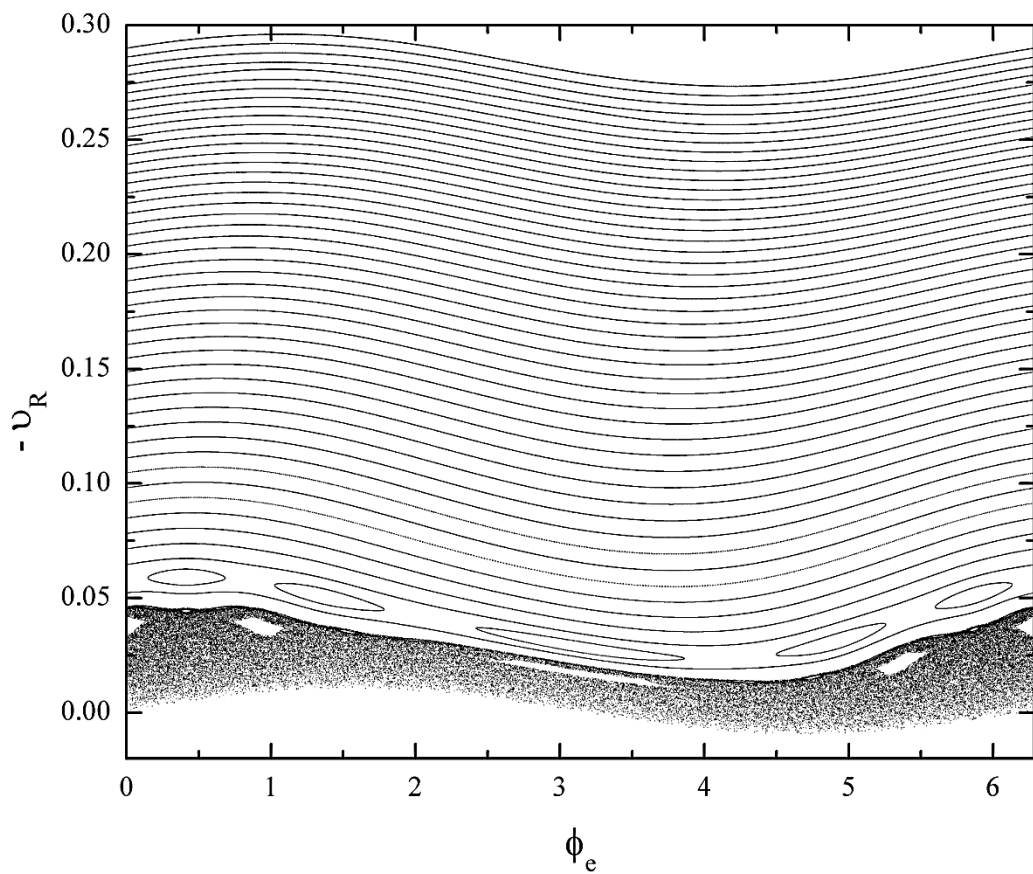


Figura 56: GSP para o BAMP. $r_0=0.45$, $\delta=0.00$, $\omega=1.00$, $e_R=e_r=0.01$, $\sigma_e - \sigma_i = 0.00$, $B=0.50$

As Seções de Poincaré representadas nas Figuras 53 a 56 mostram como se comporta o espaço de fase do bilhar pulsante para um mesmo conjunto de condições iniciais considerando diferentes valores de B . Para o campo fraco da Fig. 53 ($B=0.10$), quando comparamos com a Fig. 14 do Capítulo 2, podemos perceber que a região caótica no espaço de fase é um pouco maior se a partícula estiver submetida a este campo do que em relação a quando a partícula não sofre ação de nenhum campo. No entanto, as imagens 55 e 56 mostram claramente que uma intensidade mais forte de campo magnético pode regularizar a configuração do espaço de fase, tal como ocorrera no bilhar estático para o espaço de fase geométrico. Vale lembrar que um regime caótico no plano $(\phi_e, -v_R)$ confere ao sistema a propriedade de a partícula contida no interior do bilhar poder alterar sua energia cinética indefinidamente dentro deste domínio caótico. Com a regularização da dinâmica devido ao campo, o sistema passa a possuir esta propriedade apenas em uma região muito restrita, que são as áreas do mar de caos das Figs. 55 e 56, embora, aparentemente, esta região possa ser maior para um campo fraco como o da Fig. 53. As curvas invariantes que são então adicionadas ao espaço de fase funcionam como barreira de transporte e impedem que a partícula atinja valores mais altos de velocidade, limitando assim o ganho de energia que é possibilitado pelo movimento das fronteiras do bilhar.

Já a Figura 54 mostra uma Seção de Poincaré atípica em Sistemas Dinâmicos, onde uma região caótica é circundada por duas regiões de dinâmica regular. Assim, este gráfico apresenta duas regiões de mares de caos: uma para valores pequenos da velocidade, que vai até $-v_R \approx 0.05$, e outra no entorno de $-v_R \approx 0.22$. Isso ocorre porque o *ensemble* de condições iniciais é fornecido em diferentes velocidades. Para velocidades pequenas, o raio de curvatura (que é dado pela eq. 24) é também pequeno, fazendo com que a partícula (que inicia seu movimento em um ponto da fronteira externa) permaneça próxima ao círculo externo do bilhar, nas regiões das órbitas estáveis (*WGO*); nesta condição, a partícula está sujeita à perturbação devida apenas à oscilação da fronteira externa, sendo que a pequena região caótica para baixa velocidade é a situação em que um pequeno ganho indeterminado de energia cinética pode ocorrer. Para valores um pouco maiores da velocidade, a perturbação da fronteira externa não é suficiente para tornar a dinâmica um regime caótico, adicionando curvas *spanning* à Seção. Mas, para um determinado valor de velocidade, o raio de curvatura da trajetória suficientemente maior, faz com que a partícula encontre agora a fronteira interna. Neste momento, a partícula está, então, submetida a uma perturbação devida à oscilação das duas fronteiras; e, para um determinado intervalo de valores da velocidade, tal perturbação é

suficiente para tornar a dinâmica caótica, que é a região do mar de caos observada na porção mediana do eixo vertical do gráfico. No entanto, para valores mais altos de Energia, mesmo a perturbação das duas fronteiras móveis não faz com que a configuração do espaço de fase continue caótica, e novas curvas invariantes se fazem presentes para este regime, limitando a variação da velocidade da partícula.

A Fig. 57 abaixo mostra o mesmo gráfico da Fig. 54, agora colorido com o número acumulado de colisões com a fronteira interna. Isto é, as cores mostram quantas colisões com o círculo interno ocorreram para aquela condição inicial desde o início do movimento até a iteração na qual esta órbita interceptou a seção de Poincaré naquele ponto. Podemos observar facilmente que para valores de velocidade baixa, este número de colisão com o círculo interno é zero, isto é, tais órbitas nada mais são do que as *Whispering Gallery Orbits*. Observe também que para velocidades mais altas a quantidade de colisões com a fronteira interna é grande, mas o regime dinâmico é regular. Lembrando que cada ponto da Seção de Poincaré corresponde a uma colisão com o círculo *externo*.

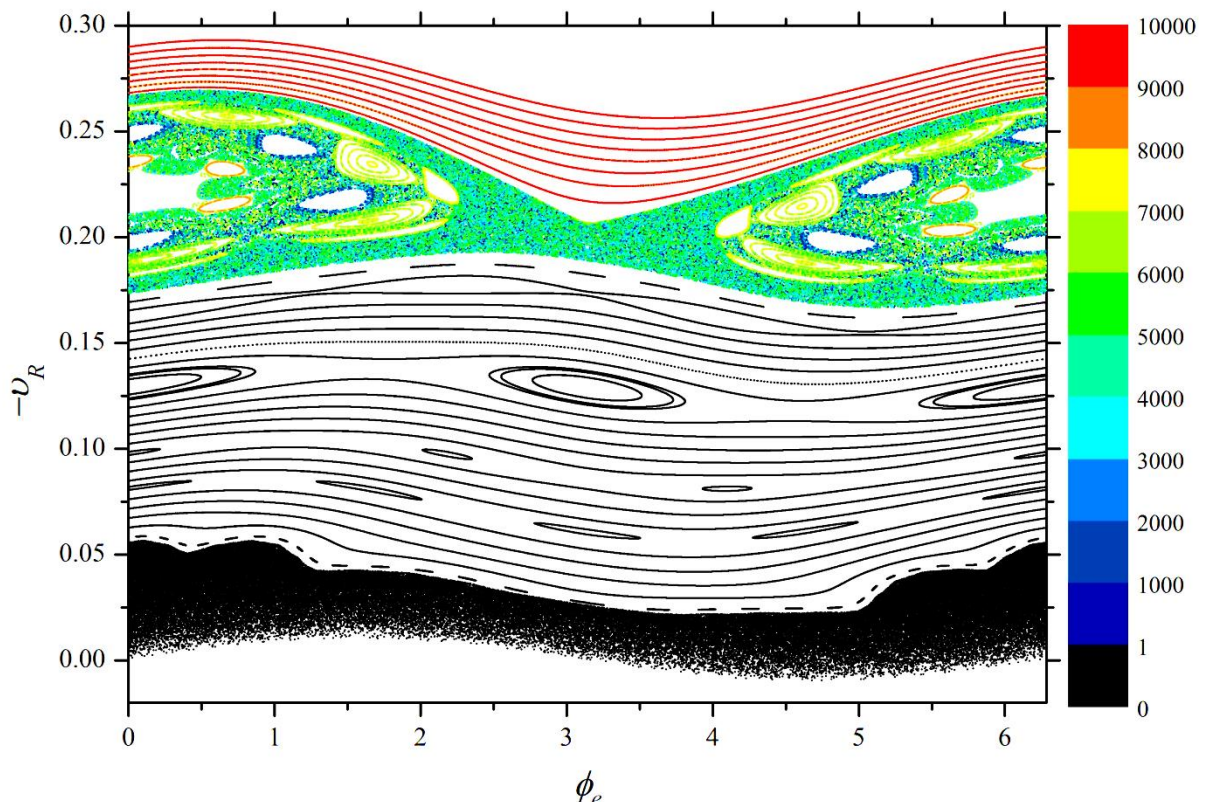


Figura 57: GSP para o BAMP. $r_0=0.45$, $\delta=0.00$, $\omega=1.00$, $e_R=e_r=0.01$, $\sigma_e - \sigma_i = 0.00$, $B=0.20$. As cores mostram quantas colisões acumulativas com a fronteira interna cada ponto da seção de Poincaré sofreu, mostrando assim, quais regiões tem energia e raio de curvatura suficiente para que a partícula colida com o círculo interno do bilhar.

5.2 Geometria Excêntrica

Para o estudo da ação do campo magnético sobre a dinâmica do bilhar anular excêntrico com fronteiras dependentes do tempo, o plano de fase $(-v_R, \phi_e)$ não é mais uma Seção de Poincaré, pois o momento angular p_θ não é mais constante, podendo se alterar em cada colisão com o círculo interno excêntricamente posicionado, conforme mostra a eq. (127).

A estratégia será analisar a evolução da velocidade média do conjunto de condições iniciais (obtido pela eq. (18)) ao longo das iterações, isto é, como se comporta a velocidade média do *ensemble* à medida que a partícula sofre colisões com a fronteira externa e, eventualmente, com a interna do bilhar. O gráfico da Fig. 58 mostra esta evolução ao longo de 10^5 iterações para alguns valores selecionados de intensidade de campo magnético B com os mesmos parâmetros que foram utilizados para os resultados da seção anterior, a velocidade inicial é mantida constante como sendo $v_\theta=0.02$.

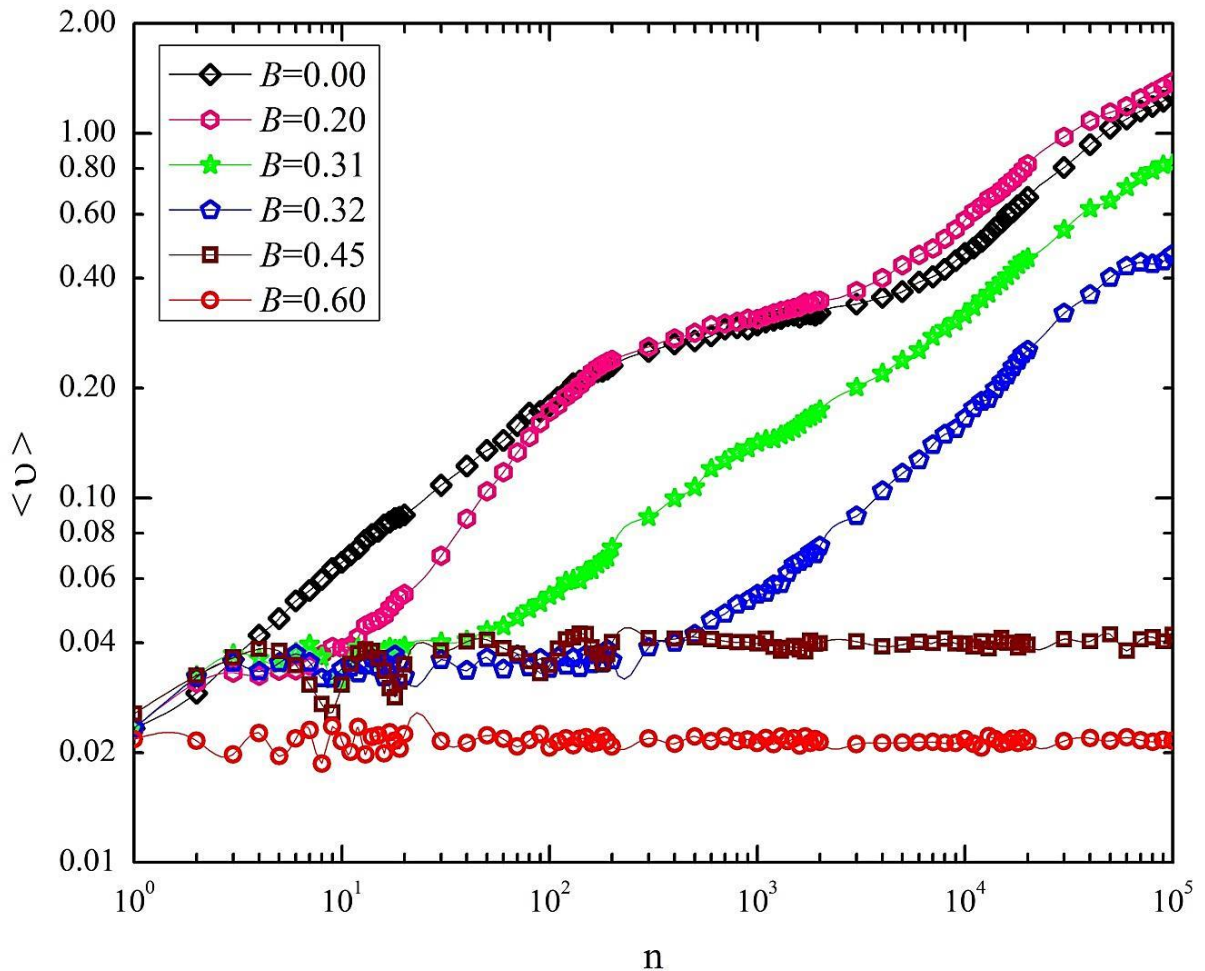


Figura 58: Evolução da velocidade média ao longo de das iterações (n), para seis valores de intensidade de campo magnético: $B=0.00$ (ausência de campo), $B=0.20$, $B=0.31$, $B=0.32$, $B=0.45$, $B=0.60$. Observa-se que a Aceleração de Fermi ocorre para valores pequenos de B . Os parâmetros utilizados foram $r_0=0.45$, $\delta=0.30$, $\omega=1.00$, $e_R=e_r=0.01$, $\sigma_e - \sigma_i = 0.00$

No gráfico da Fig. 58 acima podemos verificar que, como já era sabido [29,30], o bilhar anular pulsante excêntrico apresenta Aceleração de Fermi na ausência de campo. Para um valor pequeno de campo ($B=0.20$), o sistema também mostra crescimento indeterminado de energia. Para valores medianos como em $B=0.31$ e $B=0.32$, o sistema demora algumas iterações para que a velocidade comece a ter um ganho expressivo, sendo que para o primeiro valor a partícula sofre em média 20 colisões com a fronteira externa antes de começar a ganhar energia e para o segundo cerca de 100 colisões. Este mecanismo de “atraso” do aparecimento do fenômeno de AF pode ser interpretado de maneira análoga ao fenômeno de *stickiness* [49-52]. No entanto, para intensidades fortes do campo magnético como em $B=0.45$ e $B=0.60$, a partícula quase não ganha energia, e a velocidade média do *ensemble* permanece próximo ao valor inicial $v_0=0.02$.

Para um melhor entendimento do processo, o gráfico da Fig. 59 a seguir mostra a velocidade média do *ensemble* **após** um número de 100000 colisões com a fronteira externa. Isto é, a Fig. 59 apresenta o último ponto à direita de cada uma das curvas do gráfico da Fig. 58, mas agora considerando 65 valores diferentes de intensidade do campo.

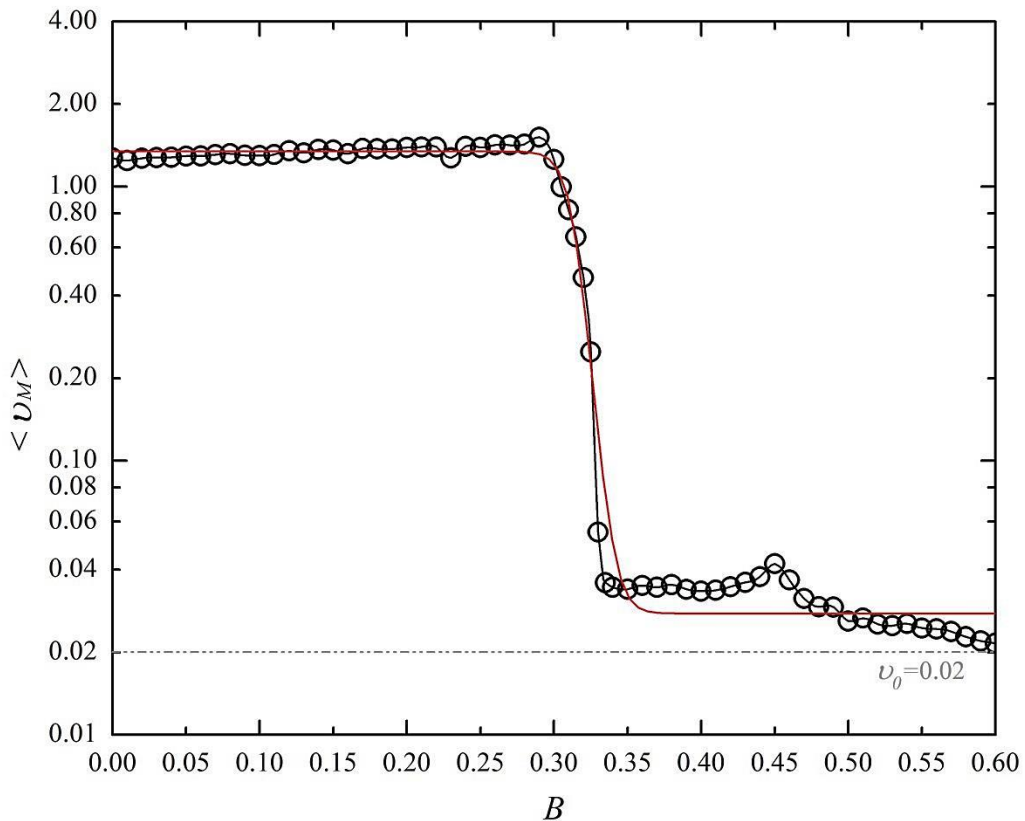


Figura 59: Velocidade média tomada na 10^5 -ª colisão com a fronteira externa para 65 valores diferentes de B . A curva cinza tracejada representa a velocidade inicial fornecida ao conjunto de condições iniciais, fixada em $v_0=0.02$. A diferença entre esta curva até os pontos grafados corresponde ao ganho médio de velocidade que a partícula experimentou para aquele valor de campo magnético. Para campos fortes, a partícula mantém sua velocidade próxima ao valor inicial v_0 . A curva vermelha é um ajuste numérico. Os parâmetros são os mesmos da Fig. 58.

A curva em vermelho na Fig. 59 é um ajuste não linear obtido através da clássica função sigmoidal de quatro parâmetros de Boltzmann, comumente utilizada em conjunto de dados e em modelos de transição de fase [53], e foi obtida com índice de ajuste de 99.4%. Aqui, ela pode ser representada por:

$$\langle v_M \rangle = f(B) = \frac{\langle v_M \rangle_i - \langle v_M \rangle_f}{1 + \exp\left[\frac{B - B_C}{\Delta B}\right]} + \langle v_M \rangle_f \quad (131)$$

onde os valores encontrados para os parâmetros e seus respectivos significados são: $\langle v_M \rangle_f = 0.03 \pm 0.01$ é o valor da velocidade média para $B = 0.60$, enquanto $\langle v_M \rangle_i = 1.34 \pm 0.01$ é para $B = 0.00$; $B_C = 0.3139 \pm 0.0006$ é o ponto central do decaimento da transição; $\Delta B = 0.0064 \pm 0.0005$ é o passo entre valores de B ; e M simboliza a iteração final, em $n = 10^5$. É importante notar que estes valores são estimados para a iteração de número 100000, e devem mudar para outra quantidade considerada de iterações. Apesar disso, a curva evidencia alguns aspectos da influência da ação do campo magnético sobre a dinâmica do bilhar pulsante.

Podemos observar que para valores pequenos e medianos de B a partícula pode atingir ao final do movimento considerado uma velocidade substancialmente mais alta do que a que lhe foi fornecida inicialmente, e a Aceleração de Fermi é então observada. Existe uma transição no entorno de $B \sim 0.30$, e outra em $B \sim 0.33$; a primeira sugere aproximadamente o início da supressão da AF, e a segunda corresponde a um novo platô de saturação que indicam o confinamento da partícula em regiões do espaço de fase com baixa velocidade. Ainda que estejamos considerando a geometria excêntrica do bilhar, estes resultados estão em total acordo com as Figs. 53 a 56 mostradas para o bilhar concêntrico, pois corroboram com a propriedade de o campo magnético regularizar a dinâmica e reduzir a região do espaço de fase onde seria possível que a partícula pudesse ganhar energia indeterminadamente.

Para compreender melhor este confinamento, a Fig. 60 mostra o gráfico do número médio de colisões que a partícula sofre com o círculo interno $\langle n_{\text{int}} \rangle$ em 10^5 iterações, isto é, em 10^5 colisões com o círculo externo em função da intensidade do campo. Pode-se perceber que este gráfico apresenta o mesmo comportamento que o da Fig. 59. Para valores pequenos de B , a partícula sofre várias colisões com a fronteira interna. Para $B \sim 0.30$, a frequência com estas colisões ocorrem diminuem, até que para campos magnéticos intensos com valores superiores a $B \sim 0.33$, a partícula não colide mais com a fronteira interna e permanece confinada na região das *WGO*.

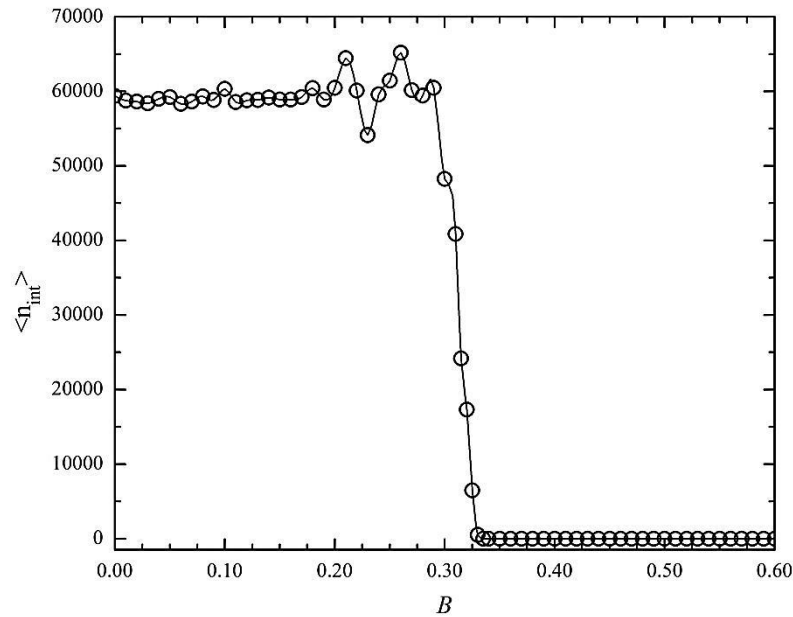


Figura 60: Número médio de colisões com o círculo interno excêntrico do bilhar após 10^5 iterações em função da intensidade do campo magnético B .

Estes resultados podem ser compreendidos tendo-se em vista o raio de curvatura da trajetória circular que a partícula realiza. Uma vez que este é proporcional ao módulo da velocidade e inversamente proporcional à intensidade do campo (como mostra a eq. (24)), e, uma vez também que a velocidade inicial é fixada como 0.02 para todos os casos, para um campo fraco, o raio de curvatura inicial é grande e a partícula colide com o círculo interno excêntrico desde as primeiras iterações. Para um campo mediano ($B \sim 0.31$), a partícula inicialmente não consegue colidir com o círculo interno, pois o raio de curvatura da trajetória não permite que ela chegue até a posição em que este se encontra, mas, após algumas colisões com a fronteira externa, algumas órbitas ganham energia graças às transferências de *momentum* durante os choques, o que é permitido na região de dinâmica caótica para regimes de baixas velocidades do espaço de fase, de forma que sua velocidade e consequentemente o raio de curvatura aumentam e a partícula pode, então, se chocar com a fronteira interna. A partir deste momento, as órbitas que conseguiram se chocar com o círculo interno excêntrico começam a apresentar ganho ilimitado de energia. Um estudo anterior [30] já havia mostrado a existência de correlação entre o número de colisões com o círculo interno excêntrico e o fenômeno de AF no bilhar anular.

Para um campo magnético forte, $B > 0.33$, o raio de curvatura da trajetória é suficientemente pequeno para fazer com que a partícula não alcance a fronteira interna mesmo após algumas iterações do sistema. De fato, a baixa velocidade inicial fornecida e o raio de curvatura pequeno confinam a partícula na região das *WGO*, de tal forma que mesmo o

pequeno ganho de energia devido à oscilação da fronteira externa não é capaz de fazer com que o raio de curvatura aumente ao ponto de que uma colisão com o círculo interno ocorra. Neste caso, dizemos que *o fenômeno da Aceleração de Fermi, antes presente na geometria excêntrica do bilhar anular pulsante, passa a ser suprimido pela ação de campos magnéticos intensos*. O gráfico da Fig. 61 abaixo mostra o comportamento da velocidade média ao longo das iterações para valores fortes de campo magnético. Neles, o valor da velocidade média converge para um platô constante, demonstrando que a velocidade não cresce indefinidamente e permanece próximo ao valor inicial mesmo após 10^8 iterações.

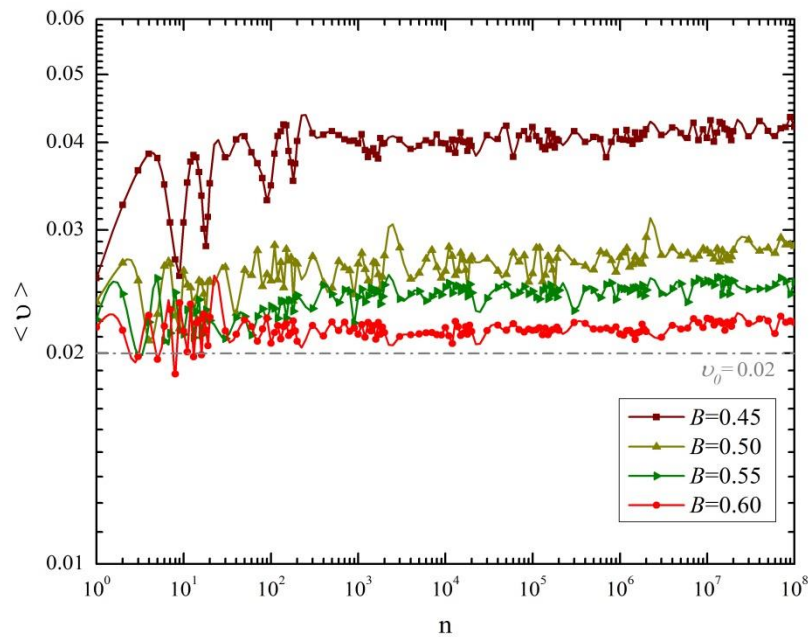


Figura 61: Evolução da velocidade média do *ensemble* ao longo de 10^8 iterações para 500 CI. Os campos considerados são $B=0.45$, $B=0.50$, $B=0.55$ e $B=0.60$. Podemos verificar a supressão total da AF para todos os valores de campo magnético.

5.3 Campo Magnético e a Conjectura-LRA

Conforme mencionado na Seção 2.2, a Conjectura-LRA [32] prediz que dinâmica caótica em bilhares estáticos é condição suficiente para que Aceleração de Fermi seja observada no modelo dependente do tempo. Vimos também que tal condição foi ampliada [33] para a necessidade apenas de órbitas heteroclínicas, ao invés de dinâmica caótica. Tendo em vista os resultados apresentados para o bilhar anular estático no Capítulo 4 e o que foi visto sobre a supressão da AF com a ação do campo magnético na seção anterior, vamos estudar a validade da Conjectura.

Primeiramente, é preciso lembrar que o espaço de fase geométrico no plano

(L,S) para a geometria excêntrica é caótico na ausência de campo, como mostrado na Fig. 8. Porém, quando consideramos um campo magnético $B=0.05$, como na Fig. 24, o espaço de fase possui uma região de regularidade, e, para um campo mais forte $B=0.20$, o espaço de fase geométrico do bilhar estático é totalmente regular como o da Fig. 25.

No entanto, considerando a mesma excentricidade, raio interno médio e energia inicial que os da Figs. 8, 24 e 25, pode-se ver nas Figs. 58 e 59 que existe, sim, Aceleração de Fermi para a ação de um campo magnético de intensidade $B=0.20$ no bilhar anular pulsante. Uma vez que o espaço de fase do bilhar estático excêntrico na Fig. 25 mostra que a dinâmica é regular para $B=0.20$, nesta condição a partícula não colide com o círculo interno do caso estático, e as órbitas estão confinadas nas *WGO*. Mas, para o caso pulsante, a partícula tem a possibilidade de ganhar energia devido à oscilação da fronteira externa, aumentar o raio de curvatura de sua trajetória e, então, colidir com o círculo interno.

O que ocorre é que a configuração do espaço de fase geométrico para o bilhar anular magnético estático depende da Energia. Isto é, para a Energia Total (que é igual à energia cinética) $\mathcal{E} = 2 \times 10^{-4}$, a qual corresponde uma velocidade $v = 0.02$, considerada no GSP da figura 25, o espaço de fase é completamente regular. Mas caso esta Energia seja maior, tal configuração se altera. É o que mostra a Figura 62 abaixo. Nela está representada a Seção de Poincaré no plano (L,S) para uma energia $\mathcal{E} = 1.8 \times 10^{-3}$, que corresponde a uma velocidade $v = 0.06$.

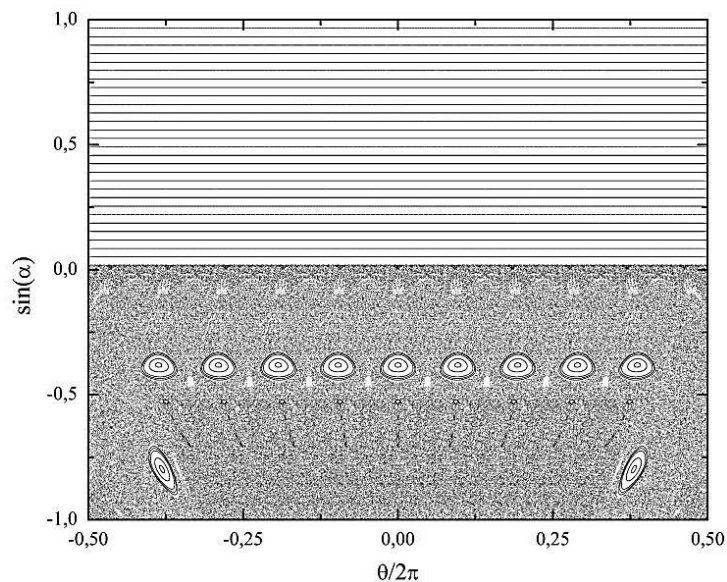


Figura 62: GSP para o bilhar anular magnético estático. $r=0.45$, $\delta=0.30$, $B=0.20$, $\mathcal{E} = 1.8 \times 10^{-3}$

Assim, conforme a partícula ganha energia devido à oscilação da fronteira externa, a configuração do espaço de fase no plano (L,S) também se altera, tal que, assumindo configurações de dinâmica caótica, o sistema passa a obedecer à Conjectura-LRA.

Vejamos agora o que acontece na Fig. 63 com o espaço de fase geométrico do bilhar estático para um campo forte de $B=0.60$ e esta mesma energia $\mathcal{E} = 1.8 \times 10^{-3}$ considerada na Fig. 62, e que corresponde a uma velocidade três vezes mais alta que a velocidade inicial da partícula.

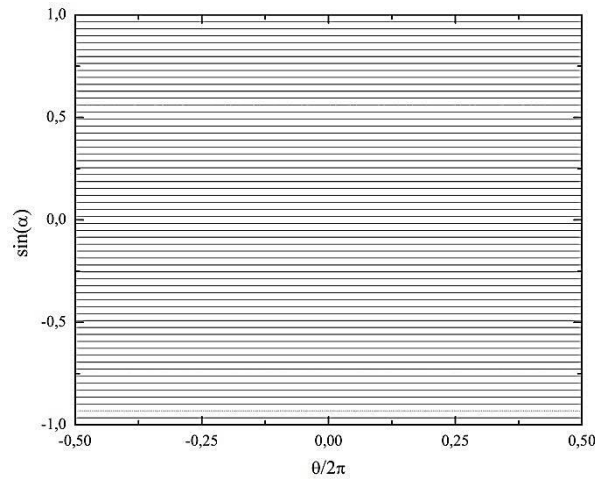


Figura 63: GSP para o bilhar anular magnético estático. $r=0.45$, $\delta=0.30$, $B=0.60$, $\mathcal{E} = 1.8 \times 10^{-3}$

Vemos que, mesmo para uma energia maior, o espaço de fase é completamente regular formado apenas por curvas invariantes. Pode-se ver também, pelas Figuras 59 e 61, que este valor de campo $B=0.60$ suprime completamente a AF. De fato, o ganho de Energia devido à oscilação da fronteira externa não é suficiente para que a partícula atinja sequer esta velocidade de 0.06 , mesmo após 10^8 colisões, o que garante que a dinâmica do bilhar estático é totalmente regular nessas condições.

No entanto, é possível que oscilações diferentes da fronteira, com meia-amplitudes de oscilação maior, por exemplo, fornecessem à partícula energias muito maiores, suficientes para que ocorressem colisões com a fronteira interna excêntrica posicionada no bilhar e o sistema passasse, então, a experimentar o fenômeno da Aceleração de Fermi.

Assim, ocorre que a configuração do espaço de fase do bilhar anular magnético estático depende da Energia fornecida à partícula. Tal dependência na Energia sobre a dinâmica de bilhares estáticos não é previsto na Conjectura-LRA. Desta forma, propomos aqui um aditivo ao enunciado da Conjectura: *Se a oscilação periódica a ser considerada e a Energia inicial fornecida a uma partícula confinada em um bilhar com fronteiras dependentes do tempo forem capazes de permitir que o sistema assumira os valores específicos de Energia para os quais são verificadas Dinâmica Caótica ou, ainda, existência de Órbitas Heteroclínicas neste mesmo bilhar com fronteiras estáticas, então isto é condição suficiente para observação de Aceleração de Fermi no modelo pulsante.* Parte dos resultados deste Capítulo 5 foram publicados por CASTALDI et al em [54].

6. O BILHAR ANULAR MAGNÉTICO PULSANTE DISSIPATIVO

Um dos objetivos deste trabalho é analisar os efeitos de colisões parcialmente elásticas em conjunto com a ação dos campos. Este capítulo abordará os efeitos da dissipação nas colisões no bilhar anular pulsante submetido a uma fonte de campo magnético (BAMP).

Como mencionado na Seção 2.5, já foi mostrado em [44] que o bilhar anular pulsante apresenta um mecanismo de ganho de energia média quando uma dissipação pequena é adicionada às colisões se comparado à situação em que estas são consideradas como sendo totalmente elásticas. Como mostraram as Figs. 16 e 18, a dissipação forma atratores em regiões do espaço de fase de velocidades mais altas do que aquelas que a partícula poderia acessar no caso não-dissipativo para condições iniciais de baixa velocidade.

Vamos, então, analisar como ficam as configurações da Seção de Poincaré no plano $(\phi_e, -v_R)$ para diferentes campos magnéticos, utilizando os mesmos parâmetros da Fig. 16, e também o mesmo conjunto de condições iniciais, que inclui $v_\theta = -v_R = 0.02$ e a geometria concêntrica, fazendo com que o momento angular p_θ seja uma constante de movimento, já que as correções cinemáticas se dão apenas na direção radial. Como a velocidade tangencial é mantida nula, a componente tangencial do momento cinemático também é nula, e a parametrização dependente de B para p_θ que adotamos na eq. (128) torna-se:

$$p_\theta = \frac{qB}{2c} \quad (131)$$

Os gráficos das Figs. 64, 65, 66 e 67 a seguir mostram o espaço de fase para colisões perfeitamente elásticas e podem ser comparados com a Fig. 16.

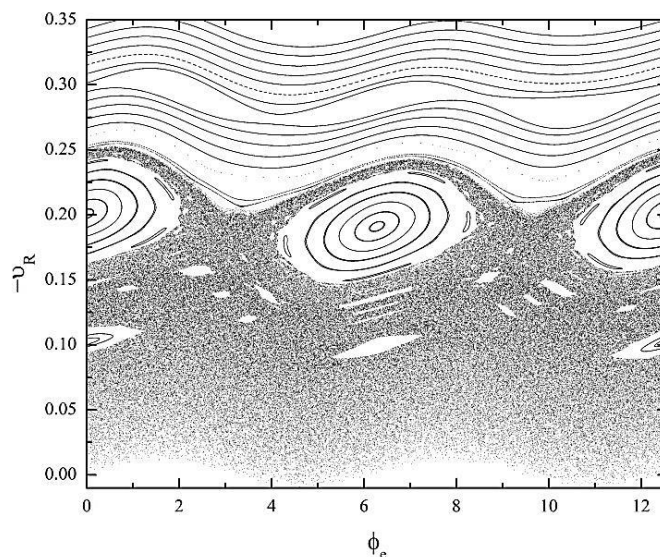


Figura 64: GSP do BAMP para $r_0=0.40$, $\delta=0.00$, $\omega=0.50$, $e_R=e_r=0.01$, $\sigma_e-\sigma_i=0$, $B=0.05$

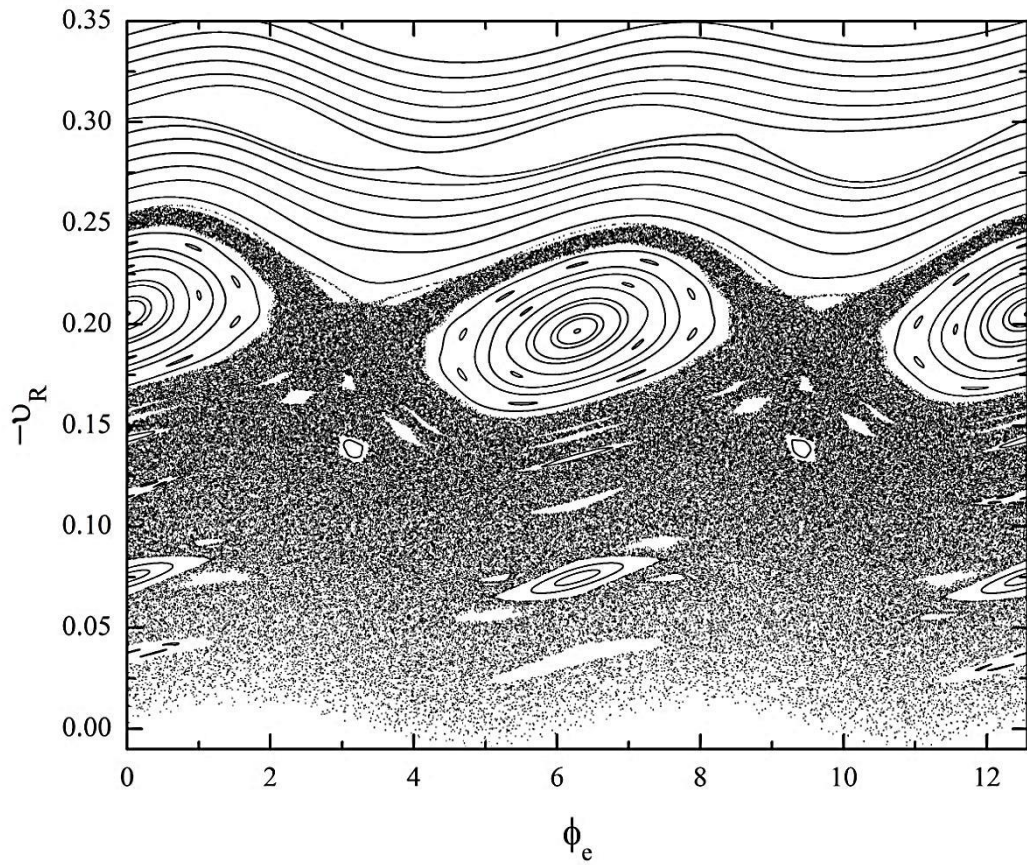


Figura 65: GSP do BAMP para $r_0=0.40$, $\delta=0.00$, $\omega=0.50$, $e_R=e_r=0.01$, $\sigma_e-\sigma_i=0$, $B=0.10$

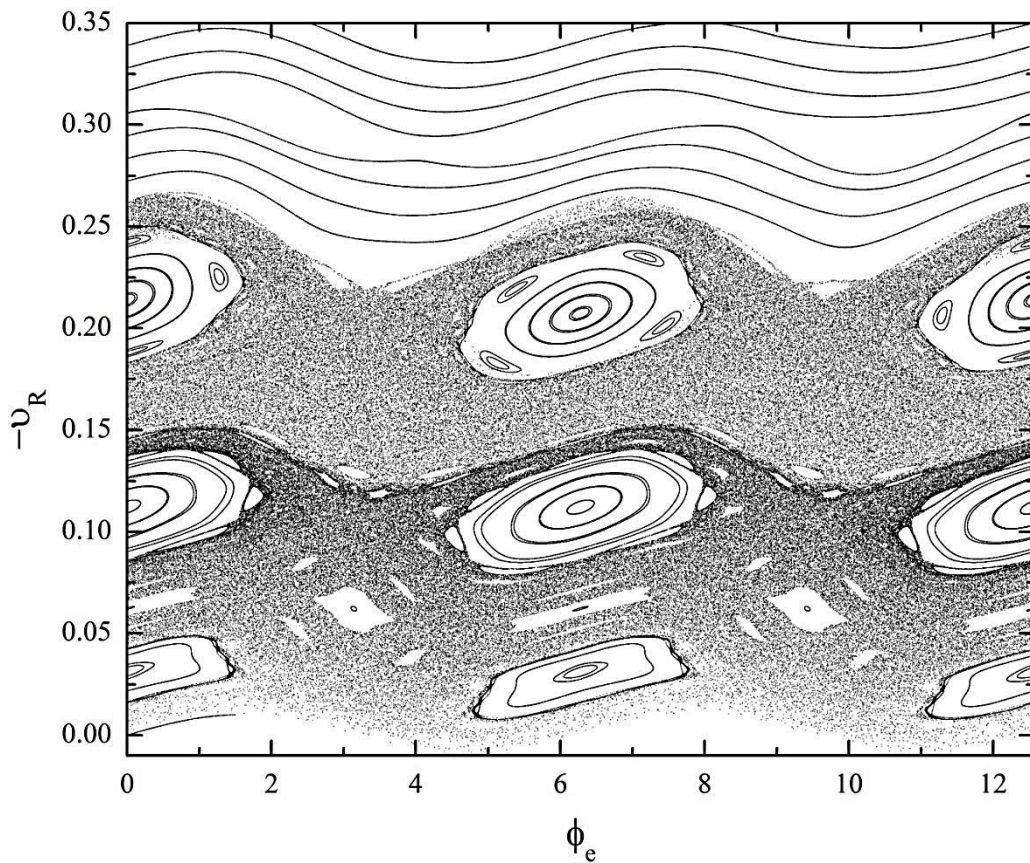


Figura 66: GSP do BAMP para $r_0=0.40$, $\delta=0.00$, $\omega=0.50$, $e_R=e_r=0.01$, $\sigma_e-\sigma_i=0$, $B=0.15$

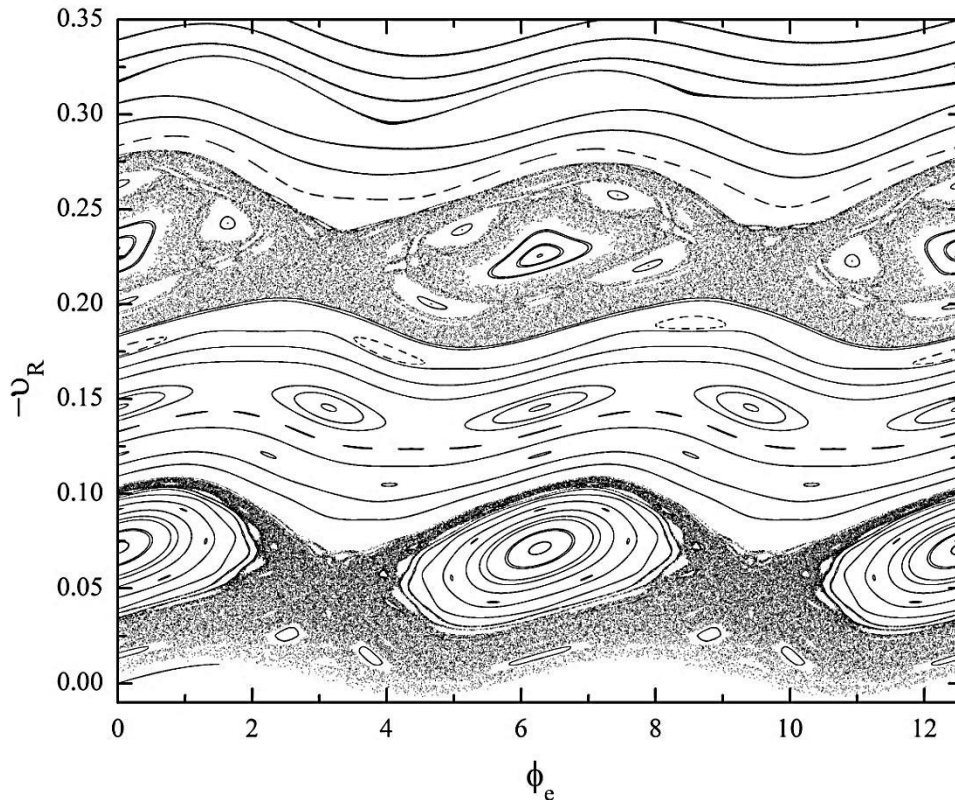


Figura 67: GSP do BAMP para $r_0=0.40$, $\delta=0.00$, $\omega=0.50$, $e_R=e_r=0.01$, $\sigma_e-\sigma_i=0$, $B=0.20$

Percebemos que conforme aumentamos o valor do campo magnético, o espaço de fase se regulariza, suportando o que já foi mostrado no Capítulo 5, e vários pontos fixos elípticos são criados onde antes havia caos. Cabe agora estudar se estes novos pontos fixos criados se comportam da mesma maneira que os existentes no caso sem campo quando considerarmos a dissipação, isto é, cabe verificar se tais pontos viram focos atrativos quando as colisões não são perfeitamente elásticas e as transformações cinemáticas que levam em conta o coeficiente de restituição são dadas nas eqs. (14) e (15).

As Figs. 68 a 71 mostram as mesmas Seções de Poincaré acima agora considerando um coeficiente de restituição $\gamma=0.9999$, podendo ser comparadas com a Fig. 18. Nelas podemos analisar a evolução das órbitas no espaço de fase ao longo de 10^4 iterações para um ensemble de 50 condições iniciais fornecidas ao longo do eixo y , isto é, as condições iniciais são dadas para diferentes valores da velocidade da partícula. Estes gráficos mostram que os pontos elípticos formados no espaço de fase devido à ação do campo magnético constituem atratores do tipo *sink*, assintoticamente estáveis, no modelo com colisões inelásticas. No entanto, o campo magnético cria atratores em regiões de velocidades mais baixas que a da Fig.18. Assim, o possível ganho de energia que a partícula pode experimentar irá depender das bacias de atração de cada um dos atratores existentes no espaço de fase para uma dada configuração de parâmetros do sistema.

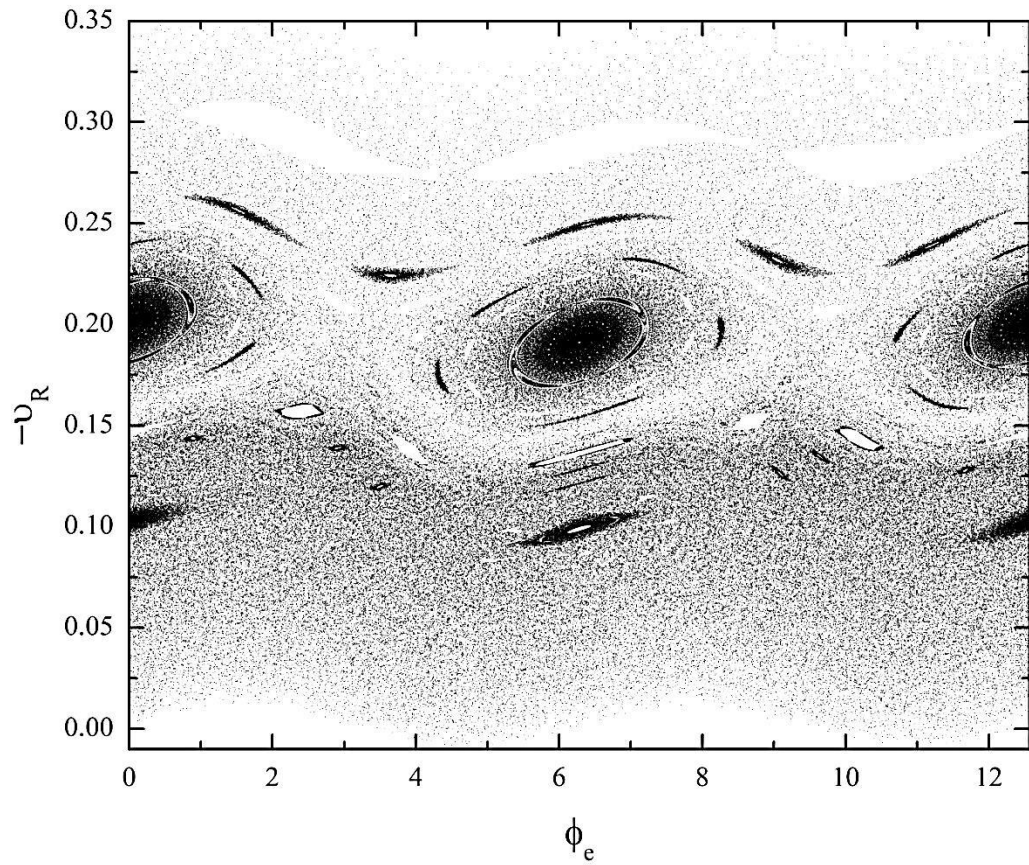


Figura 68: GSP do BAMP para $r_0=0.40$, $\delta=0.00$, $\omega=0.50$, $e_R=e_r=0.01$, $\sigma_e-\sigma_i=0$, $\gamma=0.9999$, $B=0.05$

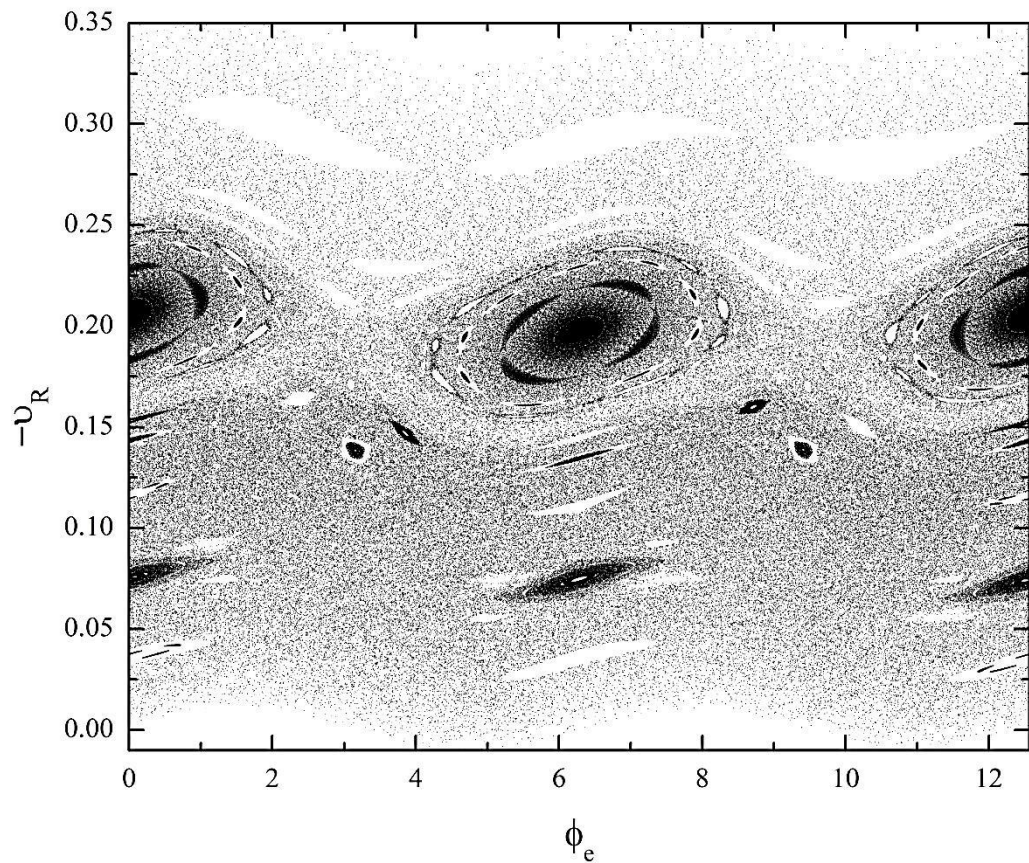


Figura 69: GSP do BAMP para $r_0=0.40$, $\delta=0.00$, $\omega=0.50$, $e_R=e_r=0.01$, $\sigma_e-\sigma_i=0$, $\gamma=0.9999$, $B=0.10$

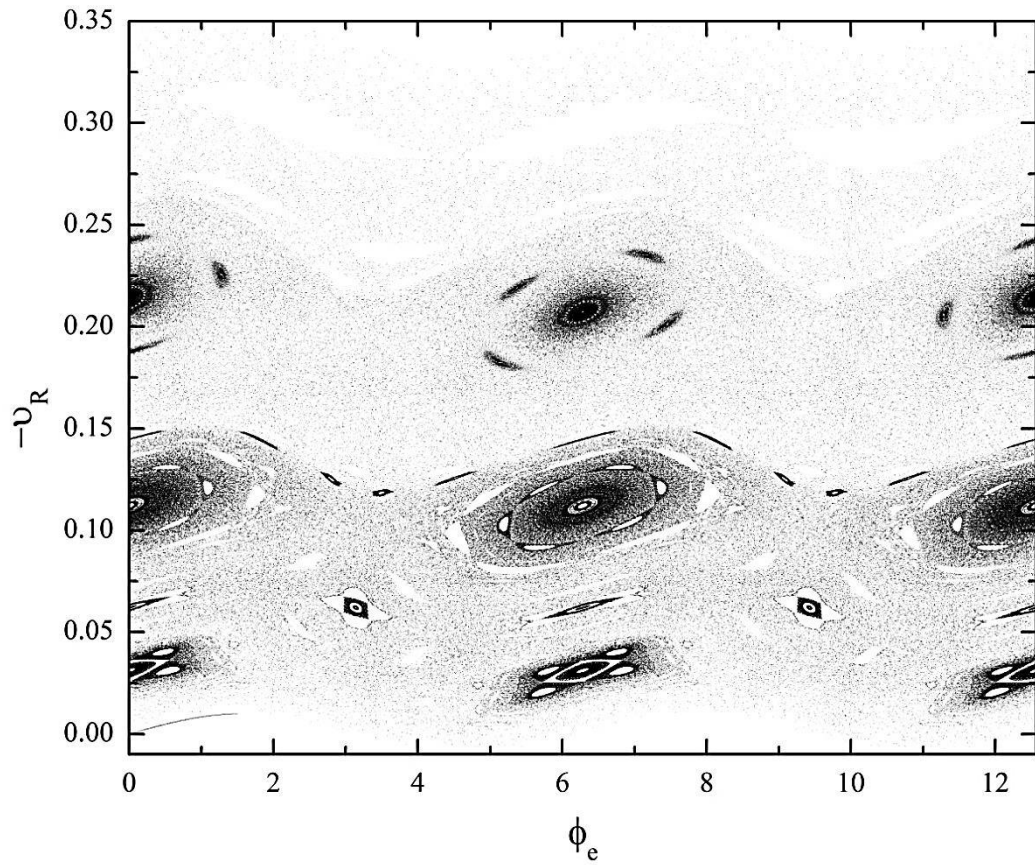


Figura 70: GSP do BAMP para $r_0=0.40$, $\delta=0.00$, $\omega=0.50$, $e_R=e_r=0.01$, $\sigma_e-\sigma_i=0$, $\gamma=0.9999$, $B=0.15$

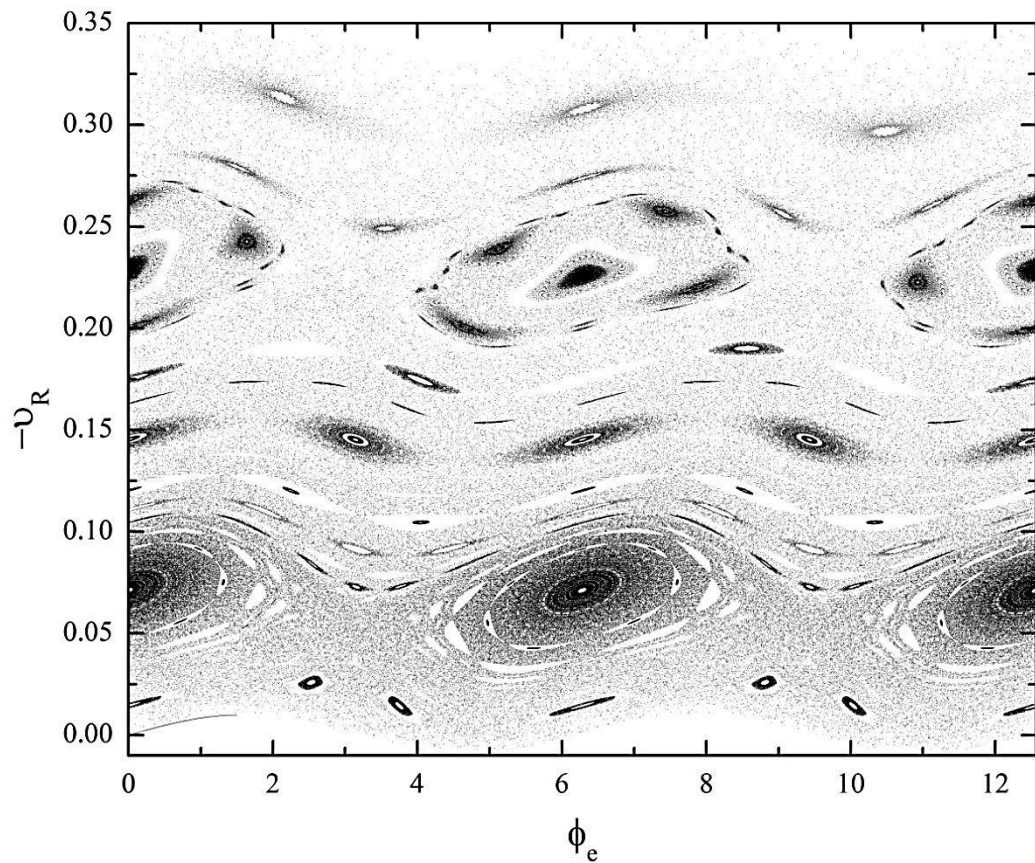


Figura 71: GSP do BAMP para $r_0=0.40$, $\delta=0.00$, $\omega=0.50$, $e_R=e_r=0.01$, $\sigma_e-\sigma_i=0$, $\gamma=0.9999$, $B=0.20$

A fim de estudar como o campo magnético influencia o mecanismo de ganho de energia média devido à dissipação, verificado para $B=0.00$, a Fig. 72 mostra a evolução da velocidade média ao longo de n iterações, para alguns valores selecionados de intensidade de campo magnético. Ao lado estão indicados os valores da velocidade de saturação após um total de 10^6 iterações. A velocidade inicial do *ensemble* é fixada em $v_0 = 0.02$.

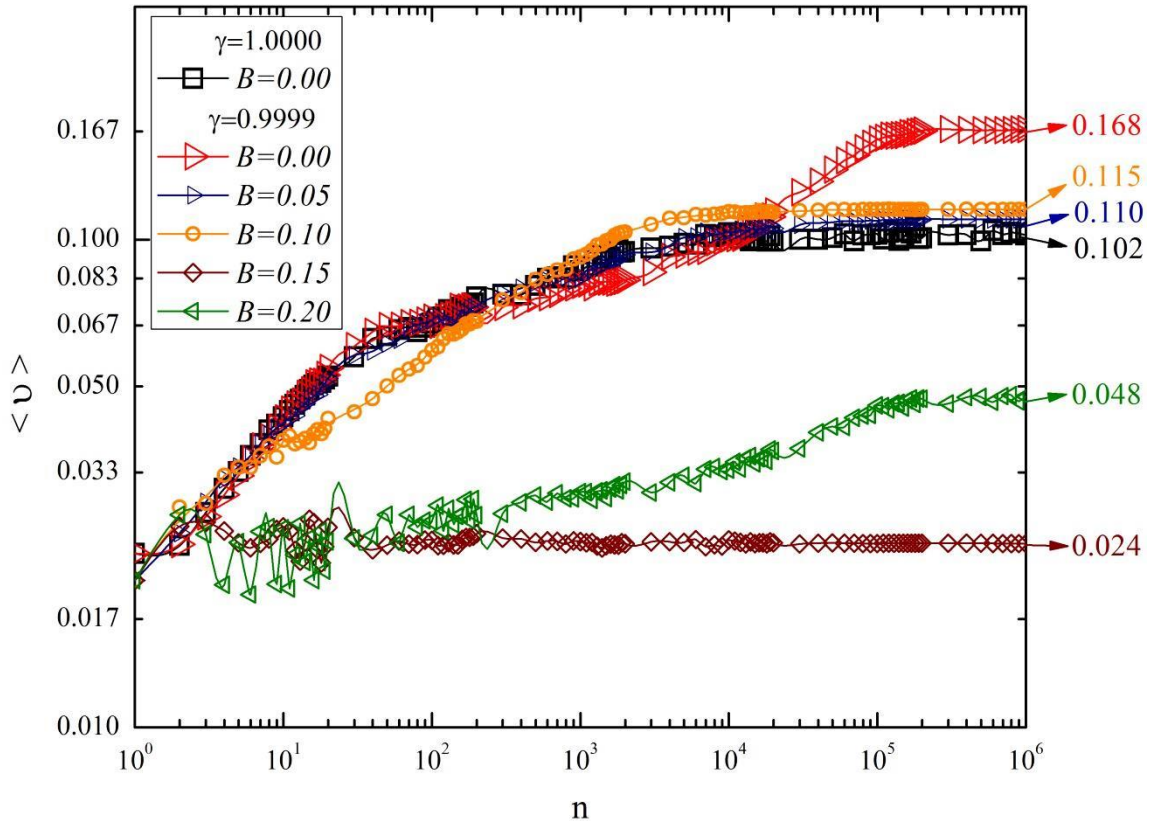


Figura 72: Evolução da velocidade média ao longo das iterações para o BAMP dissipativo. Ao lado estão assinaladas as velocidades de saturação após o número total de colisões considerado. A velocidade inicial é constante, $v_0 = 0.02$, e os parâmetros utilizados são os mesmos: $r_0=0.40$, $\delta=0.00$, $\omega=0.50$, $e_R=e_r=0.01$, $\sigma_e-\sigma_i=0$

A curva em preto em destaque é o caso sem dissipação e também sem campo, onde a velocidade de saturação média é $\langle v_{sat} \rangle \approx 0.10$. A curva em vermelho também destacada representa o caso dissipativo, sem a ação do campo, e nela se verifica o ganho de energia média em relação ao caso não-dissipativo, atingindo a velocidade de saturação $\langle v_{sat} \rangle \approx 0.17$, representando um ganho de 70%. Observe que nas curvas que representam a ação do campo, todas as velocidades de saturação atingidas após a 10^6 colisão com a fronteira externa são menores do que 0.17. Assim, dizemos que *o campo magnético tende a suprimir o mecanismo de ganho de energia devido à dissipação*.

O gráfico da Fig. 73 mostra a velocidade de saturação atingida em função da intensidade do campo magnético considerado para $\gamma=0.9999$. Note que o ponto de máximo da curva se dá para $B=0.00$ (ausência de campo).

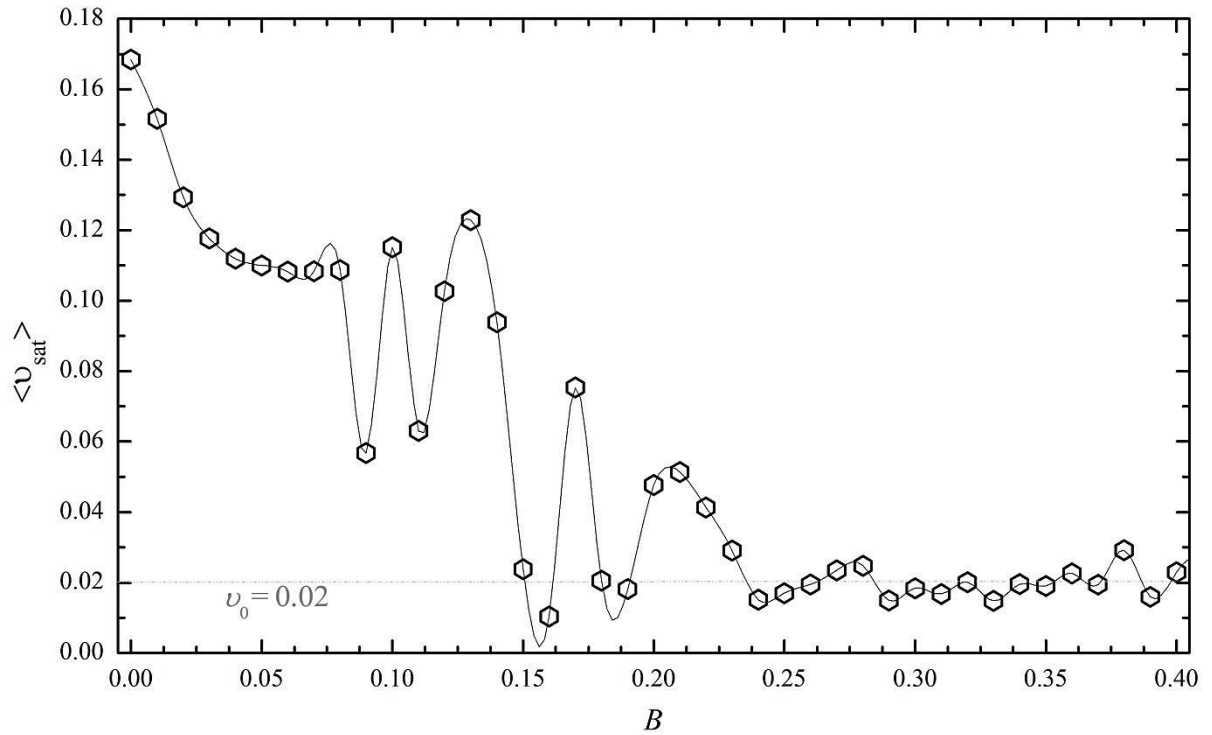


Figura 73: Velocidade de saturação média em função da intensidade do campo magnético para o bilhar anular pulsante dissipativo, considerando o coeficiente de restituição do choque com as fronteiras como sendo $\gamma=0.9999$, e os parâmetros de controle são: $r_0=0.40$, $\delta=0.00$, $\omega=0.50$, $e_R=e_r=0.01$, $\sigma_e-\sigma_i=0$. A curva tracejada mostra a velocidade inicial considerada, $v_0=0.02$.

Estes resultados estão de acordo com os mostrados no Capítulo 5, isto é: a ação de um campo magnético constante, perpendicularmente orientado em relação ao plano do movimento, sobre a dinâmica do bilhar anular pulsante tende a ser a regularização do espaço de fase e a supressão do ganho de energia média, seja esta devida à excentricidade ou ao mecanismo de atratores de uma dissipação fraca.

7. O BILHAR ANULAR ELÉTRICO PULSANTE (BAEP)

O sistema em estudo agora será o bilhar anular com fronteiras móveis onde atua uma fonte de campo elétrico, de tal forma que este campo possui intensidade constante e está orientado na direção x do sistema de coordenadas cartesianas. Um desenho esquemático do BAEP pode ser visualizado na Figura 74.

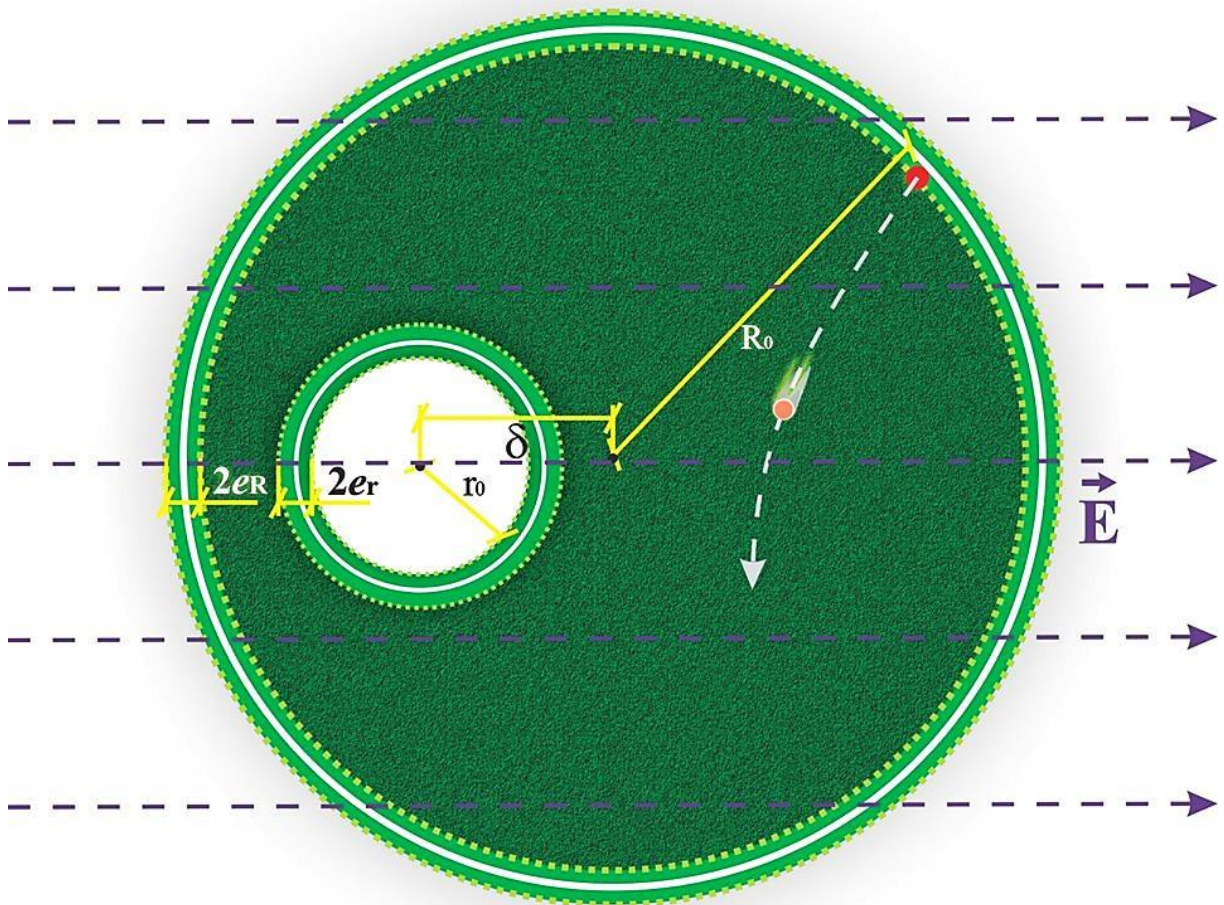


Figura 74: Desenho Esquemático do Bilhar Anular Elétrico Pulsante (BAEP). O campo elétrico \vec{E} cruzado ao plano do bilhar está orientado na direção x .

A Hamiltoniana e as Equações de Hamilton-Jacobi que descrevem o movimento da partícula foram dadas nas eqs. (107) a (111). Neste Capítulo 7 consideraremos apenas colisões elásticas entre a partícula e as fronteiras do bilhar, e as transformações cinemáticas no instante do choque são as mesmas das eqs. (101) e (105).

A Energia Total entre duas colisões sucessivas é constante e pode ser calculada pela Hamiltoniana. A cada colisão com uma fronteira, a Energia Cinética pode ser alterada dependendo da transferência de *momentum* da fronteira móvel à partícula. No entanto, quando

consideramos a ação de um Campo Elétrico, a Energia Total é a soma da Energia Cinética com a Energia Potencial Elétrica. A fim de verificar a ocorrência de AF neste sistema, devemos analisar se os possíveis ganhos que venham a ocorrer na velocidade média da partícula também se aplicam à Energia Total média do conjunto de condições iniciais. Por sua vez, este *ensemble* pode ser dado mantendo-se a Energia Total inicial constante ou, então, mantendo a Energia Cinética inicial constante.

Diferentemente do que ocorria para o bilhar magnético, o momento angular p_θ não é constante nem mesmo para o caso concêntrico no bilhar anular elétrico, uma vez que sua derivada temporal depende das coordenadas de posição e da intensidade do campo, conforme mostra a eq. (105). Neste sentido, o movimento não apresenta nenhuma integral primeira e o espaço de fase de quatro dimensões não pode ser completamente estudado em um plano bidimensional. Quando fazemos a projeção deste espaço de fase no plano $(\phi_e, -v_R)$ para a geometria concêntrica, por exemplo, o resultado é o que pode ser visualizado na Fig. 75 abaixo.

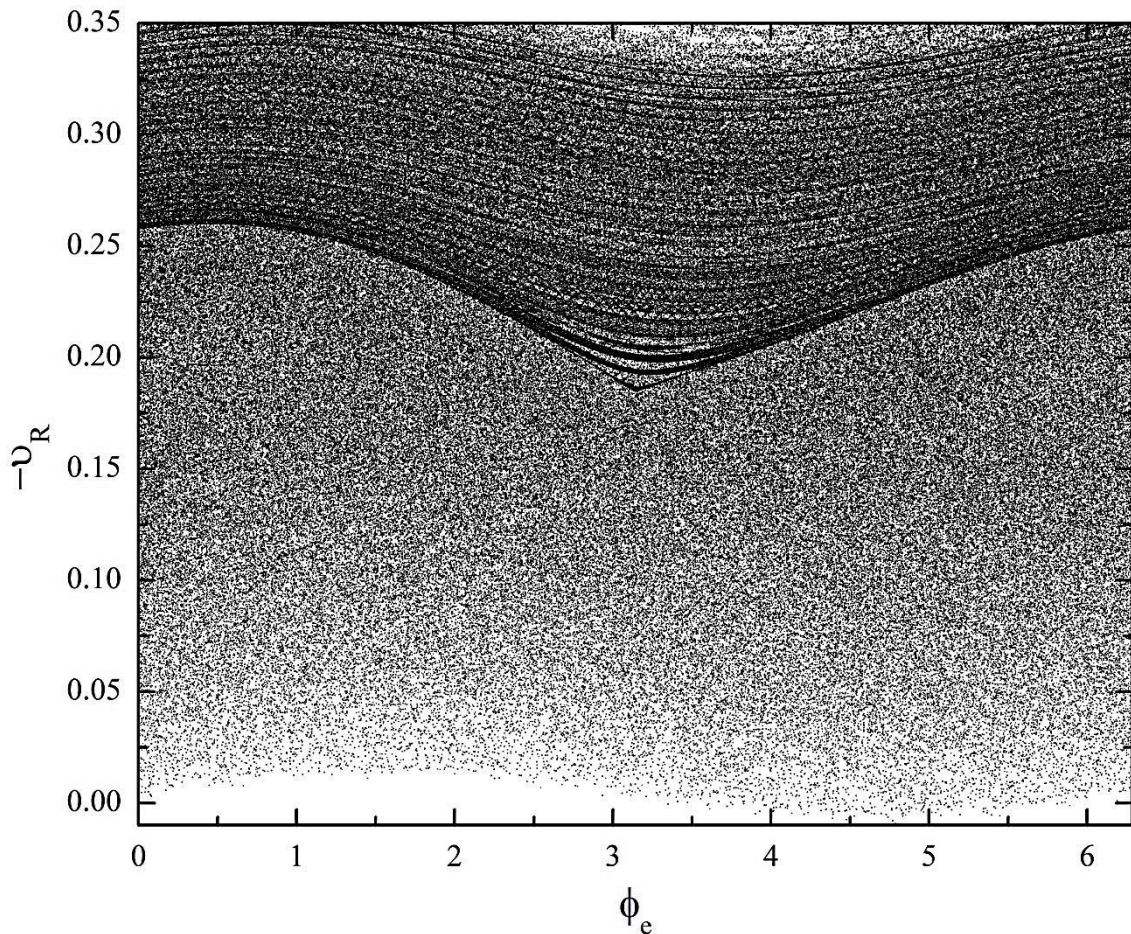


Figura 75: Projeção do espaço de fase no plano $(\phi_e, -v_R)$ para o BAEP. $r_0=0.45$, $\delta=0.00$, $\omega=1.0$, $e_R=e_r=0.01$, $\sigma_e-\sigma_i=0$, $E=0.010$

Um gráfico similar ao da Fig. 75 é encontrado quando fazemos esta projeção do espaço de fase no mesmo plano utilizando a geometria excêntrica do bilhar. Em ambos os casos, a ausência de curvas invariantes *spanning*, e também de ilhas KAM, evidenciam que o sistema não possui barreiras de transporte para variações na velocidade da partícula, podendo apresentar ganho indeterminado de energia cinética.

Com a intenção de isolar a ação do campo sobre a dinâmica, escolhemos realizar algumas simulações com um *ensemble* onde a Energia inicial seja igual para todos os valores de campo considerados, tal que esta energia inicial deva ser suficientemente pequena e corresponda à mesma energia que era de início fornecida à partícula nos resultados dos capítulos anteriores obtidos com o campo magnético. Assim, na ausência de campo elétrico toda a energia da partícula corresponde à energia cinética, mas, adicionando este campo, parte desta energia será então transformada em energia potencial elétrica, dependendo da posição da partícula. Nesta condição, a máxima energia cinética que a partícula poderá assumir será aquela calculada na posição onde a energia potencial elétrica possua seu valor mínimo. De fato, essa energia cinética máxima será maior do que a que consideramos nos capítulos anteriores, mas a energia total se preserva. Para fins numéricos consideraremos a energia total inicial do BAEP como sendo igual à energia total inicial que vínhamos considerando no modelo estático e no bilhar magnético pulsante, isto é, aquela que corresponderia a uma energia cinética para uma velocidade de 0.02, ou seja: $\varepsilon = 2 \times 10^{-4}$.

No conjunto de CI variamos a posição da partícula homogeneamente ao longo da fronteira externa do bilhar e calculamos os momentos canônicos iniciais a partir de um ângulo fixo α da trajetória com a reta normal à fronteira. Integramos as Equações de Movimento e consideramos as transformações cinemáticas no instante de colisão com uma das fronteiras móveis do bilhar.

A Figura 76 mostra o comportamento da velocidade média do conjunto de 100 condições iniciais ao longo de 10^8 iterações, para a geometria *concêntrica* do bilhar, considerando valores diferentes de intensidade do campo elétrico, mantendo-se a Energia Total inicial constante. A Figura 77 mostra o mesmo gráfico para a evolução da Energia Total média do *ensemble*.

Nestes gráficos podemos perceber que, tal como já era esperado, a velocidade e também a Energia quando da ausência de campo elétrico satura seu crescimento para $n \sim 10^5$ no caso concêntrico (curva preta). Porém, quando consideramos a ação do campo elétrico, as velocidades não saturam para um platô constante mesmo após 10^8 iterações. Neste sentido, dizemos que o campo elétrico possibilita ganho indeterminado de Energia inclusive para a

geometria concêntrica do bilhar anular, e o sistema apresenta Aceleração de Fermi.

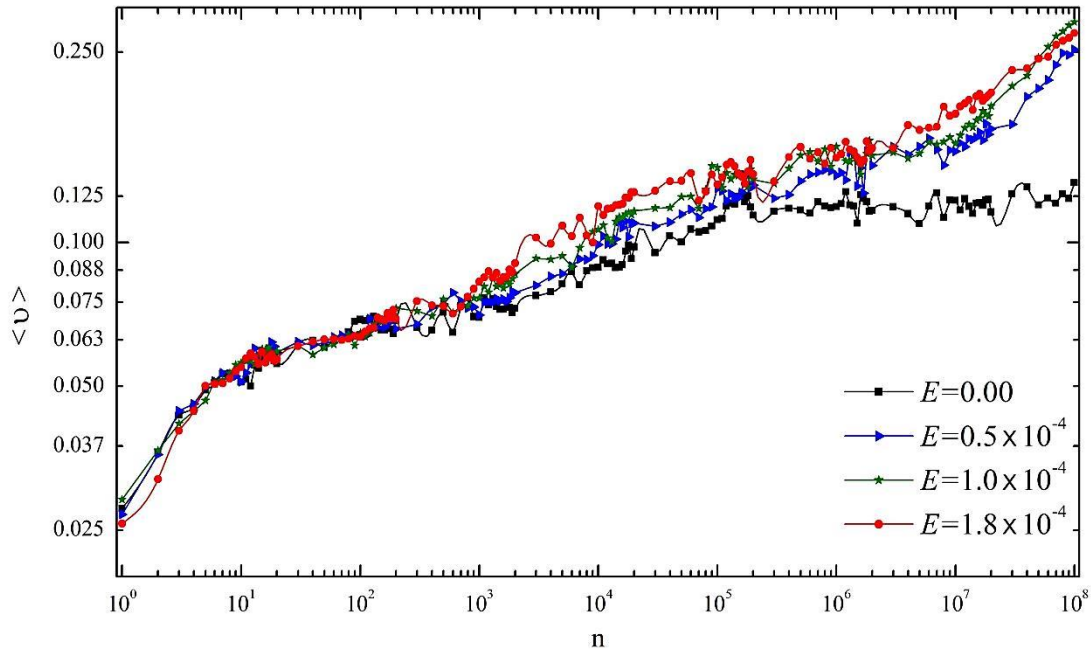


Figura 76: Evolução da Velocidade média ao longo das iterações para o BAEP considerando diferentes valores de campo elétrico E . Os parâmetros utilizados são: $r_0=0.45$, $\delta=0.00$, $\omega=1.0$, $e_R=e_r=0.01$, $\sigma_e-\sigma_i=0$, $\varepsilon = 2 \times 10^{-4}$

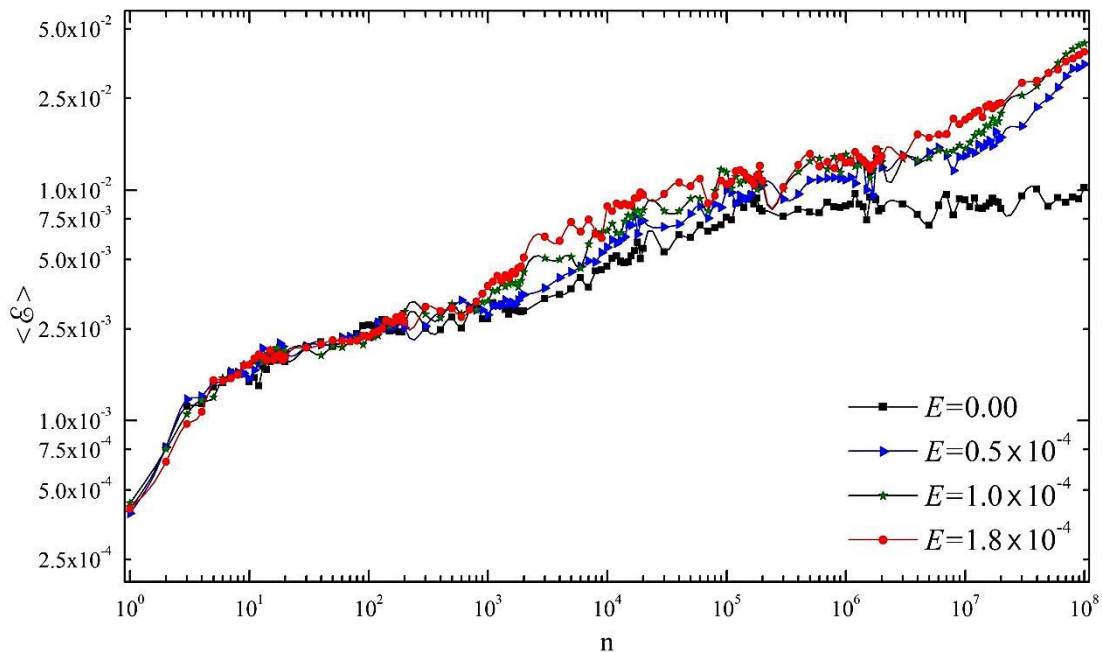


Figura 77: Evolução da Energia média ao longo das iterações para o BAEP considerando diferentes valores de campo elétrico E . $r_0=0.45$, $\delta=0.00$, $\omega=1.0$, $e_R=e_r=0.01$, $\sigma_e-\sigma_i=0$, $\varepsilon = 2 \times 10^{-4}$

Vemos que as Fig. 76 e 77 são equivalentes, isto é, o Bilhar Anular Elétrico Pulsante pode ser estudado tanto em relação ao ganho da velocidade média ou quanto ao ganho de Energia média do *ensemble*. Isto demonstra que as variações na velocidade da partícula devido às transferências de *momentum* pelas colisões com as paredes móveis do bilhar são incorporadas à Energia Total. Este valor de Energia inicial que utilizamos, no

entanto, não permite que campos elétricos mais fortes sejam aplicados ao bilhar, pois além da própria restrição da relação entre a energia total e a energia potencial elétrica, também por problemas numéricos, que têm a ver com as velocidades iniciais muito baixas que acabam sendo fornecidas em alguns pontos do bilhar, e o método numérico de integração não tem precisão suficiente para prosseguir com as iterações.

Outra metodologia de parametrização para o conjunto de CI que podemos adotar, ainda mantendo a energia total inicial constante, é fazer com que esta energia varie junto com a intensidade do campo. Uma maneira de propor isto é fazendo com que:

$$\xi_0 = V_{elt_{MAX}} = \text{MAX}[-qE\rho \cos \theta] = qE(\rho_{MAX}) = qE(1 + e_R) \quad (132)$$

onde $V_{elt_{MAX}}$ é a energia potencial elétrica máxima no bilhar pulsante e ρ_{MAX} o valor mais alto que a coordenada de posição radial pode assumir no bilhar pulsante. Isso implica que a menor velocidade que a partícula pode experimentar é zero, mas isto acontece para o ponto de potencial elétrico máximo, e nesta posição a partícula inicia o movimento sendo acelerada pela força de Lorentz na direção do campo.

Uma vez que a energia varia com o campo adotado, o possível ganho médio de velocidade pode ser avaliado considerando um ganho na energia média relativa, que é a energia média do *ensemble* para aquela iteração dividido pela energia inicial considerada. A Fig. 78 mostra, a evolução da Energia Total média relativa ao longo de 10^5 iterações para um conjunto de 500 condições iniciais, considerando a mesma configuração do bilhar utilizada nas Figs. 76 e 77, mas agora para novos valores de campo elétrico.

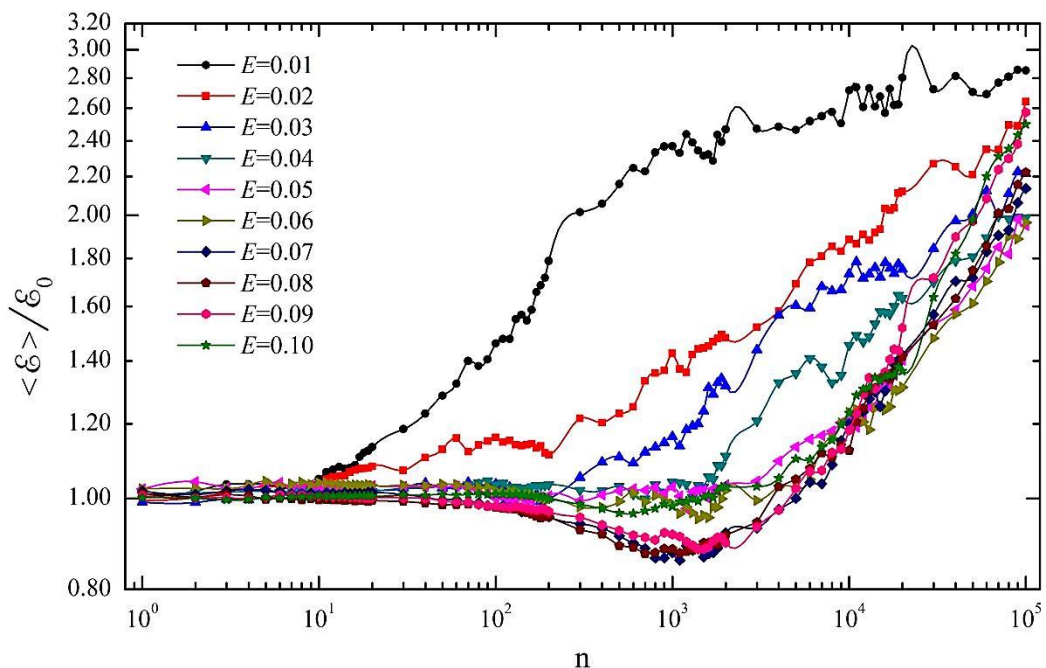


Figura 78: Evolução da Energia média relativa ao longo das iterações para o BAEP considerando diferentes valores de campo elétrico E . $r_0=0.45$, $\delta=0.00$, $\omega=1.0$, $e_R=e_r=0.01$, $\sigma_e-\sigma_i=0$.

Pelo gráfico da Fig. 78 verifica-se que tomando a energia total inicial do sistema proporcional à intensidade do campo também se observa Aceleração de Fermi no Bilhar Anular Elétrico Pulsante.

Um terceiro conjunto de CI possível é agora considerar a Energia Cinética inicial constante no *ensemble*, ou seja, a velocidade inicial da partícula é a mesma, independentemente da posição onde ela inicia seu movimento no interior do bilhar. Vamos considerar esta velocidade um pouco mais baixa do que a que utilizamos nos Capítulos 4 a 6, fazendo agora $v_0 = 0.01$, tal que a Energia Cinética inicial será:

$$T_0 = \frac{m}{2} v_0^2 = 5 \times 10^{-5} \quad (133)$$

Este *ensemble* é, de certa forma, mais intuitivo. Um jogo de bilhar comum sempre começa com uma tacada que confere às bolinhas certa velocidade de movimento na superfície da mesa.

A Fig. 79 mostra a evolução da velocidade média no *ensemble* à Energia Cinética constante para um conjunto de 200 CI ao longo de 10^6 iterações considerando alguns valores selecionados de campo elétrico.

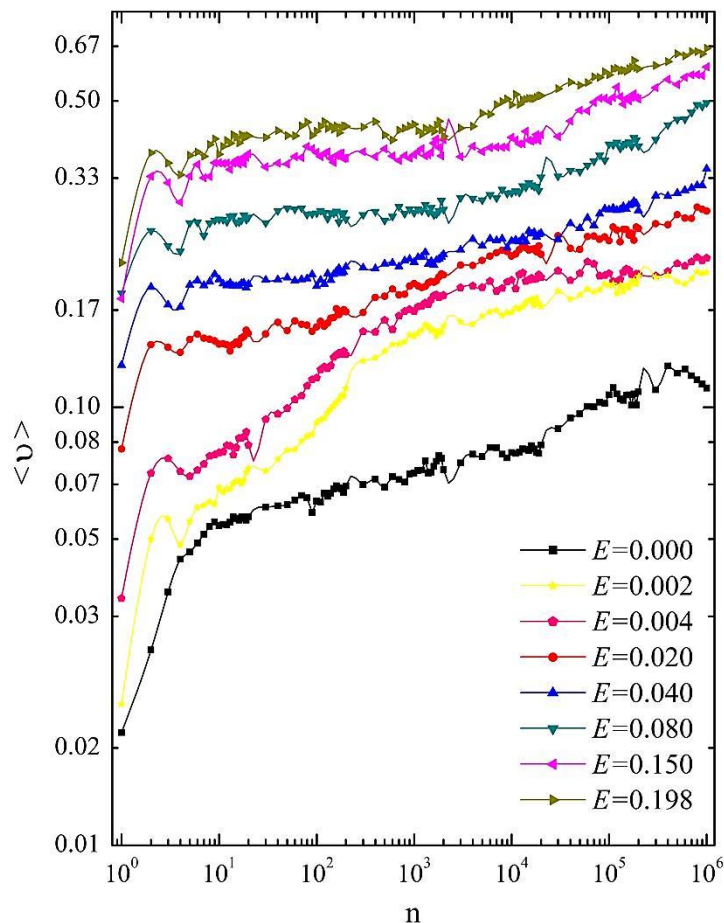


Figura 79: Evolução da velocidade média ao longo das iterações para o BAEP considerando diferentes valores de campo elétrico E . $r_0=0.45$, $\delta=0.00$, $\omega=1.0$, $e_R=e_r=0.01$, $\sigma_e-\sigma_i=0$, $v_0=0.01$.

A Figura 79 mostra a diferença entre os padrões de velocidade crescente para as situações nas quais o campo elétrico é aplicado e o de velocidade que tende a saturar para um campo nulo. Mais uma vez, os resultados mostram que o campo elétrico atua na dinâmica do bilhar anular concêntrico pulsante de forma a tornar presente o ganho de energia indeterminado.

A Figura 80 abaixo nada mais é do que os últimos pontos à direita do gráfico 79, isto é, a velocidade média do *ensemble* tomada na última colisão $M=10^6$. E nela podemos observar que quanto maior a intensidade de campo aplicado, maior será a média das velocidades atingidas pela partícula no conjunto de CI.

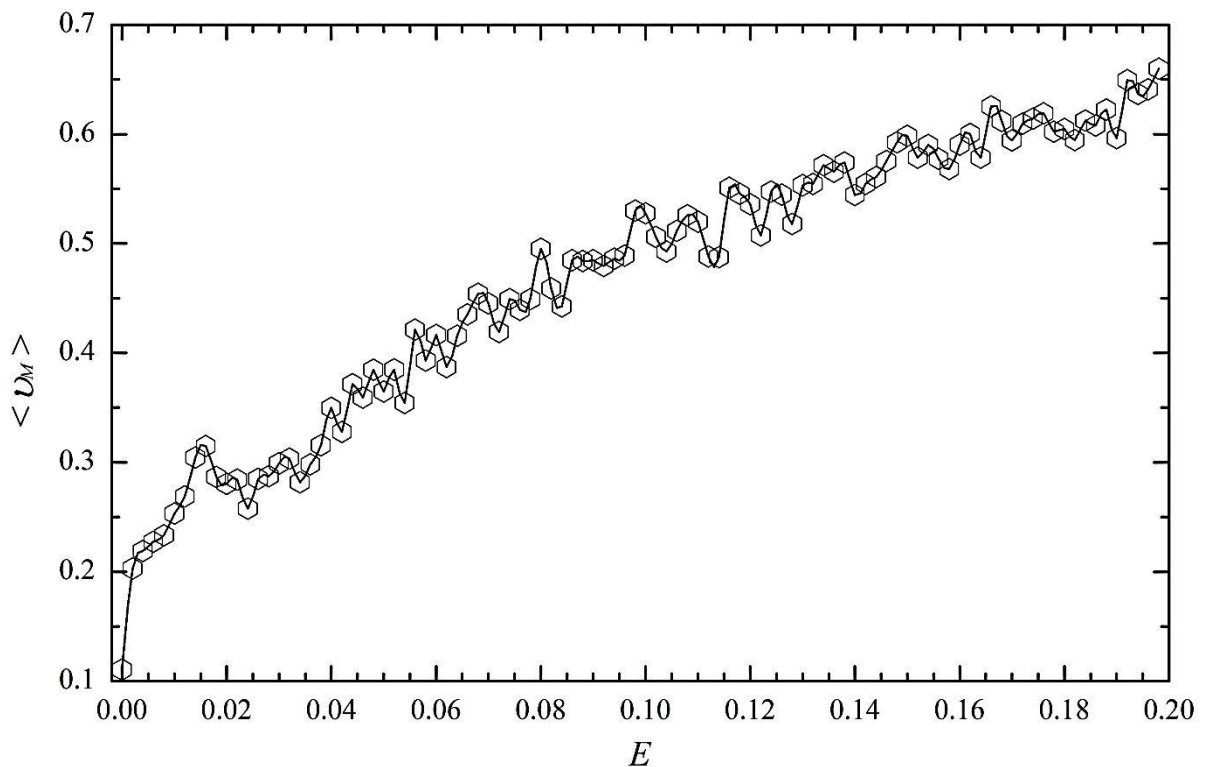


Figura 80: Velocidade média atingida após 10^6 iterações do BAEP em função da intensidade de campo elétrico E para o *ensemble* à Energia Cinética inicial constante. $r_0=0.45$, $\delta=0.00$, $\omega=1.0$, $e_R=e_r=0.01$, $\sigma_e-\sigma_i=0$, $v_\theta=0.01$.

Os resultados apresentados neste Capítulo 7 mostram que a ação de uma fonte de campo elétrico constante orientado na direção x do sistema de coordenadas cartesianas corrobora para o surgimento da Aceleração de Fermi no Bilhar Anular Pulsante concêntrico. Tal fenômeno ainda não havia sido reportado nesta geometria do bilhar. No entanto, em relação à Conjectura-LRA, os resultados estão em pleno acordo, uma vez que o espaço de fase geométrico do bilhar anular elétrico estático pode apresentar dinâmica caótica para a geometria concêntrica, conforme mostrado nas Figs. 40 a 43, segundo a combinação de parâmetros adotada.

8. O BILHAR ANULAR ELÉTRICO PULSANTE DISSIPATIVO

O objetivo nesta seção é estudar o mesmo sistema do Capítulo anterior que agora apresenta uma dissipação em cada colisão com uma das fronteiras do bilhar. A Hamiltoniana e as equações de movimento ainda são as mesmas das eqs. (101) a (105), mas as transformações cinemáticas nas colisões são dadas pelas eqs. (14) e (15) que consideram o coeficiente de restituição $\gamma < 1$.

Sabe-se que sistemas dissipativos apresentam atratores, que são regiões do espaço de fase para as quais algumas órbitas são levadas a ela após um período de tempo. O conjunto das órbitas que são atraídas para um dado atrator constitui sua respectiva bacia de atração. A proposta agora é estudar como o Campo Elétrico atua na dinâmica do bilhar anular com fronteiras dependentes do tempo onde colisões parcialmente elásticas são consideradas.

8.1 Geometria Excêntrica

Sabe-se que na geometria excêntrica do bilhar não-dissipativo o sistema apresenta ganho indeterminado de energia, mas quando adicionamos mesmo uma pequena dissipação este fenômeno é suprimido. Vamos analisar, então, como se comportam as velocidades médias de saturação ao longo das iterações para o BAEP excêntrico com um coeficiente de restituição $\gamma = 0.9999$ considerando diferentes valores de campo elétrico. Na Figura 81 mostramos esta evolução utilizando um *ensemble* à Energia Total inicial constante dependente do campo aplicado similar ao da Fig. 78, mas agora consideraremos uma energia cinética inicial mínima, tal que esta energia total pode ser dada por:

$$\xi_0 = T_{\min} + V_{el_{MAX}} = \frac{m}{2} v_{0_{\min}}^2 + qE(\rho_{MAX}) = \frac{m}{2} \cdot 0.01 + qE(1 + e_R) \quad (134)$$

No gráfico da Fig. 81 a seguir, observa-se a evolução da velocidade até a 10^6 iterações e no lado direito estão indicados os valores atingidos após este total de colisões com a fronteira externa móvel do bilhar. Na ausência de campo, a velocidade média satura para um valor $\langle v \rangle = 0.235$. Para intensidades fracas de campo elétrico, como para $E = 0.005$ e $E = 0.010$, o aumento da velocidade também satura, mas para valores 12% e 20% maiores, respectivamente, que na configuração sem campo. Mas, para os campos mais fortes mostrados no gráfico, $E = 0.030$, $E = 0.040$ e $E = 0.050$, o crescimento da velocidade média do *ensemble* não satura mesmo após 10^6 iterações, e o comportamento de aceleração exponencial

denotando o ganho indeterminado de energia permanece. Este resultado pode sugerir que campos elétricos de intensidade alta atuando no bilhar anular pulsante excêntrico podem inibir a ação da dissipação das colisões inelásticas e manter o fenômeno da Aceleração de Fermi. Admitimos, no entanto, que simulações para mais iterações, da ordem de 10^8 ou 10^{10} , sejam necessárias para validar esta hipótese, uma vez que trabalhos anteriores [4,17,33-41] sugerem que a AF não é um fenômeno robusto e costuma ser sensível a pequenas forças dissipativas, que são capazes de suprimi-lo.

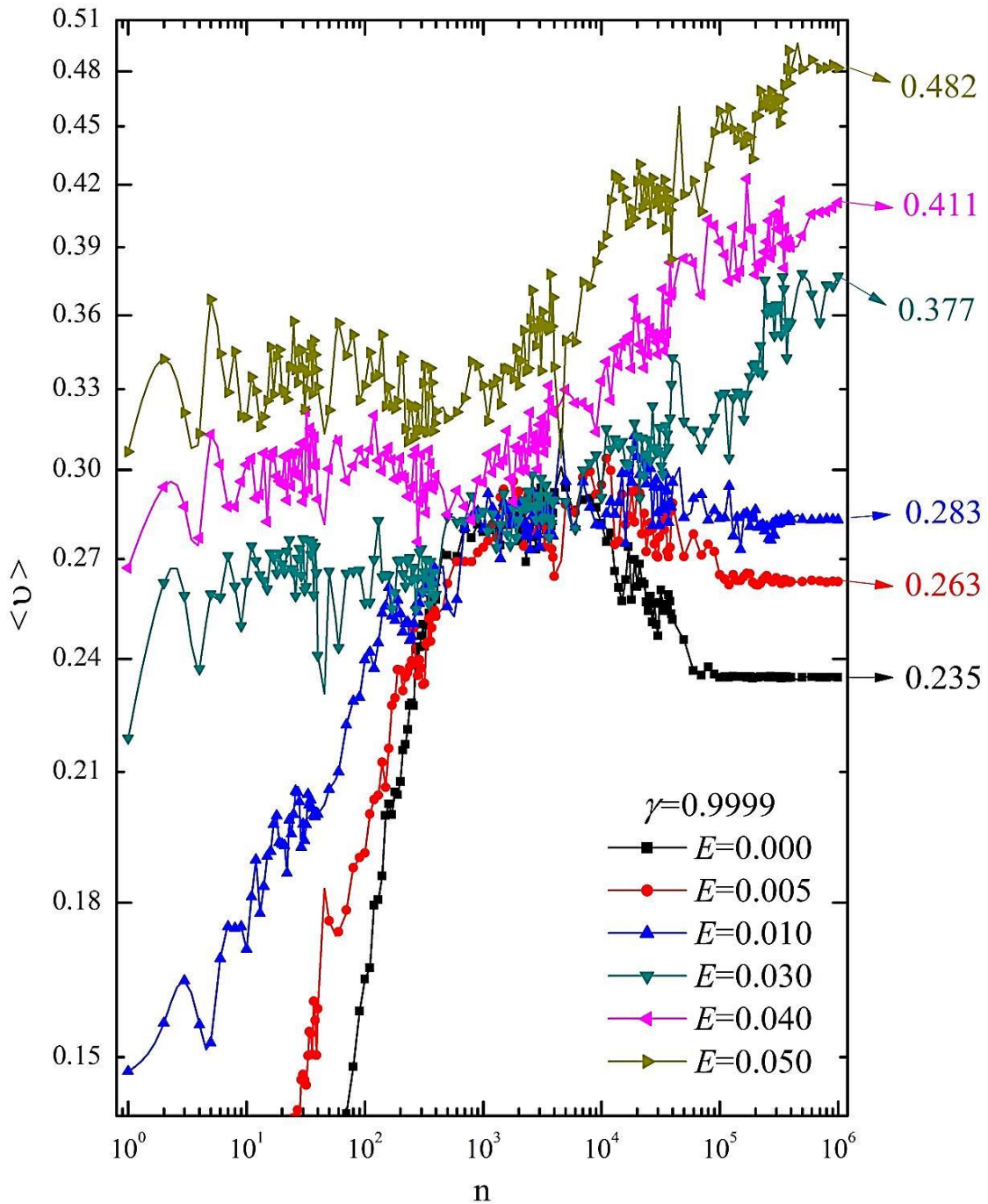


Figura 81: Evolução da velocidade média do conjunto de 200 CI ao longo das iterações para o BAEP dissipativo considerando diferentes valores de campo elétrico. $r_0=0.45$, $\delta=0.30$, $\omega=1.0$, $e_R=e_r=0.01$, $\sigma_e-\sigma_i=0$, $v_0=0.01$, $\gamma=0.9999$

8.2 Geometria Concêntrica

No Capítulo anterior, foi demonstrado como o bilhar anular pulsante pode admitir ganho indeterminado de energia para o caso concêntrico quando um campo elétrico de intensidade constante horizontalmente orientado na direção x é considerado na dinâmica. Vamos estudar como a dissipação atua neste sistema.

Para este estudo, optamos por fazer um gráfico de contorno em cores no plano paramétrico γ vs. E , para uma grade 100×100 , e as cores representam a velocidade média atingida após 10^5 iterações do *ensemble* à Energia Cinética constante para uma velocidade inicial $v_0=0.01$. Este gráfico é mostrado na Fig. 82. Os valores do campo e das velocidades podem ser comparados com a Fig. 79.

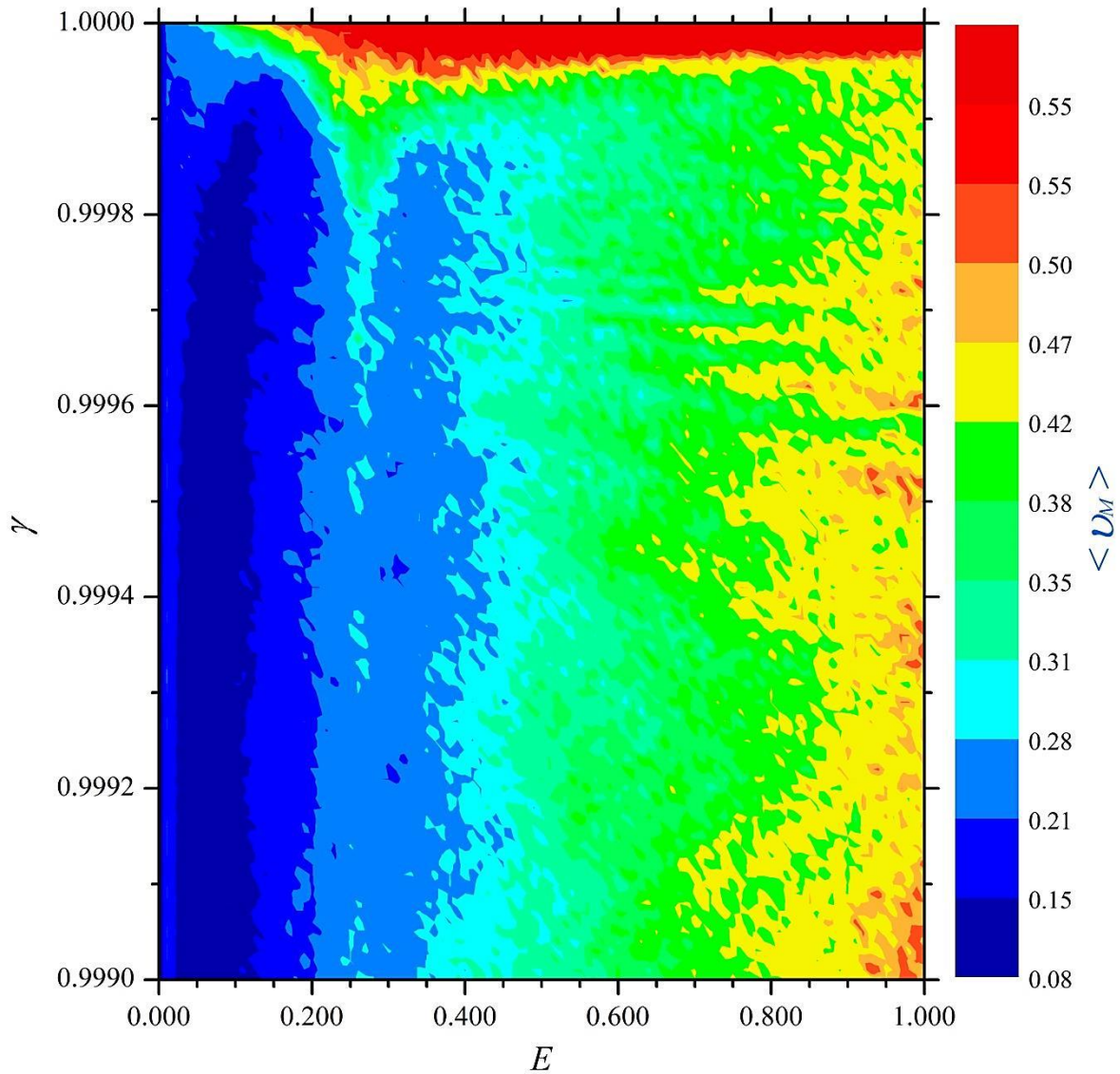


Figura 82: Plano paramétrico γ vs. E para o BAEP dissipativo. As cores representam a velocidade média do conjunto de 200 CI após 10^5 colisões com a fronteira externa. $r_0=0.45$, $\delta=0.00$, $\omega=1.0$, $e_R=e_r=0.01$, $\sigma_e-\sigma_i=0$, $v_0=0.01$.

Embora com baixa resolução, a imagem acima mostra que os valores mais altos da velocidade média são atingidos para campos elétricos fortes e para coeficientes de restituição mais próximos de 1, ou seja, a velocidade média atingida após 10^5 iterações é proporcional à intensidade do campo e ao coeficiente de restituição dos choques, como era esperado.

Mas, podemos ainda, comparar com as velocidades que o gráfico da Fig. 79 fornece aos diferentes valores do campo em $n=10^5$. Estas velocidades tendem a ser atingidas para a mesma quantidade de iterações com colisões dissipativas se um campo mais forte é considerado. Isto é, um mesmo valor de velocidade pode ser atingido em diferentes cenários de dissipação apenas alterando-se a intensidade do campo elétrico.

De fato, a Fig. 82 mostra que as cores dos pontos próximos à região do canto superior esquerdo do gráfico (colisões elásticas e campos fracos) se repetem ao longo do plano quando campos mais fortes são aplicados. Como exemplo, tomemos a cor amarela, que corresponde a uma $\langle v_M \rangle \approx 0.45$, considerando choque não dissipativo, esta velocidade média seria atingida com um campo $E \approx 0.125$. No entanto, se aplicarmos um campo forte $E=0.900$, esta velocidade é atingida em 100000 iterações para quase todos os valores de dissipação considerados, inclusive para uma dissipação forte com $\gamma=0.999$.

Estes resultados corroboram com a hipótese de que o campo elétrico externo deva tornar mais robusto o fenômeno de Aceleração de Fermi, inclusive para a geometria concêntrica do bilhar anular. É possível que o mecanismo para o qual isto seja possível é a destruição dos atratores no espaço de fase causados pela dissipação através da ação da força elétrica, que acelera a partícula.

9. O BILHAR ANULAR ELETROMAGNÉTICO PULSANTE (BAEMP)

O ponto final da proposta do estudo do bilhar anular pulsante submetido à ação campos elétrico e magnético constantes é observar a competição entre os parâmetros de controle sobre as diferentes ações que cada um traz à dinâmica do sistema.

As ações possíveis podem se relacionar a: adição de órbitas caóticas ao espaço de fase, ou então, a regularização de sua configuração; a facilitação, incentivo ou realce do fenômeno da Aceleração de Fermi, ou então, a sua supressão.

O sistema como um todo possui 8 parâmetros de controle relevantes: amplitudes de oscilação das fronteiras (e_R e e_r), frequência de oscilação (ω), diferença de fase inicial ($\sigma_e - \sigma_i$), raio médio do círculo interno (r_0), excentricidade (δ), coeficiente de restituição dos choques (γ), intensidade do campo magnético (B) e intensidade do campo elétrico (E) – que por sua vez pode estar orientado em qualquer direção do plano do movimento.

Pelos resultados que este e outros trabalhos anteriores mostraram, os parâmetros que adicionam caos à dinâmica também favorecem o fenômeno da Aceleração de Fermi. Ao contrário, os parâmetros que atuam de forma a regularizar a dinâmica tendem a suprimir a AF.

A configuração de parâmetros que mais contribuem para a regularização da dinâmica e para a supressão da AF são:

- **Dissipação,**
- **Excentricidade nula e**
- **Campo Magnético.**

Já as que tornam a dinâmica caótica e favorecem a AF são:

- **Maiores Amplitudes de Oscilação das fronteiras,**
- **Excentricidade não-nula e**
- **Campo Elétrico.**

Porém, quando todos os parâmetros são considerados simultaneamente, em uma configuração que combina fatores que tanto contribuem para a AF ou a suprimem, pode haver uma competição entre os parâmetros. Apresentaremos, então, algumas simulações que tentam exemplificar a complexidade do sistema como um todo e como os parâmetros de controle atuam inter-relacionadamente.

A Figura 83 mostra a evolução da velocidade média no caso não-dissipativo para diferentes valores de B na geometria excêntrica, fixando para análise um dado valor de E

utilizando o *ensemble* à Velocidade inicial constante para um conjunto de 200 CI ao longo de 10^5 iterações. Os pontos da curva em preto em destaque são o caso para campos nulos e a curva verde em baixo é para campo elétrico nulo.

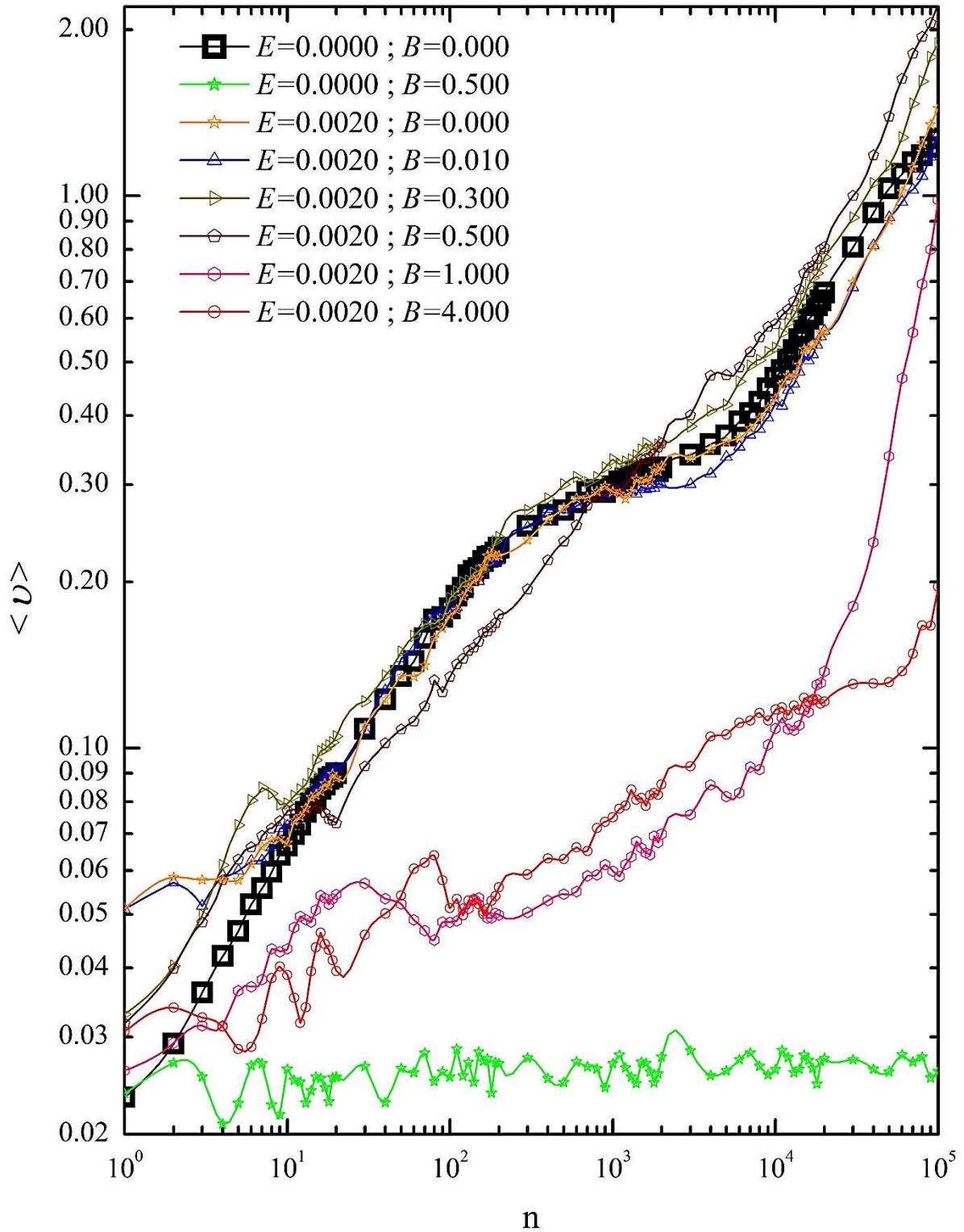


Figura 83: Evolução da velocidade média do conjunto de 200 CI ao longo das iterações para o BAEMP não-dissipativo considerando diferentes valores de campos elétrico e magnético. $r_0=0.45$, $\delta=0.30$, $\omega=1.0$, $e_R=e_r=0.01$, $\sigma_e-\sigma_i=0$, $v_0=0.02$, $\gamma=1$

As diferentes curvas do gráfico da Fig. 83 podem ser comparadas com os pontos em preto em destaque, que como já era sabido, mostra que o bilhar anular pulsante apresenta AF para a geometria excêntrica, identificado pelo ganho indeterminado na velocidade média. A curva em verde na parte inferior do gráfico retrata os resultados apresentados no Capítulo 5, sobre a supressão da aceleração de Fermi via ação do campo magnético.

Nas outras curvas, consideramos a ação do campo elétrico. Podemos ver que o mesmo valor de campo magnético $B=0.500$ que era capaz de suprimir a AF na ausência de campo elétrico, não possui esta propriedade quando o campo elétrico é ligado na intensidade considerada. Ao contrário, para este valor de B , a curva em vinho mostra que a velocidade atinge um valor até mais alto do que quando $B=0$ para o mesmo valor de E (curva laranja). Mesmo valores intensos de campo magnético, $B=1.000$ e $B=4.000$, não são capazes de suprimir a AF causada pela excentricidade não-nula e campo elétrico, de tal forma que a força magnética apenas retarda o crescimento indeterminado de energia.

Estes resultados corroboram com a hipótese de que o campo elétrico torna o fenômeno da Aceleração de Fermi mais robusto, colaborando para sua verificação; e que o campo magnético pode ao menos retardar o surgimento deste fenômeno. O gráfico evidencia também a competição entre as ações previstas dos campos e como um pode agir sobre o outro – no caso, a ação do campo elétrico tornou os valores de B relativamente mais fracos, necessitando que intensidades mais fortes de campo magnético fossem necessárias para que o efeito de confinamento das órbitas nas *WGO* fosse observado ainda que para as iterações iniciais.

Como exemplo para o caso em que são consideradas colisões dissipativas com as fronteiras, a Fig. 84 a seguir mostra o comportamento também da evolução da velocidade média no mesmo *ensemble* de 200 CI da figura anterior, mas agora utilizando um coeficiente de restituição $\gamma=0.9999$ e observando o comportamento para diferentes valores de E e B .

Consideramos um campo elétrico não capaz de, a princípio, destruir os atratores, tal que a velocidade média ao final de todas as iterações, satura para um valor fixo. Nestas condições, variamos então o campo magnético. A curva em azul na parte inferior do gráfico é considerada para um valor de campo magnético que pode confinar a partícula nas *WGO* sem a presença do campo elétrico. Mas, quando este campo é ligado, aplicando-se o mesmo valor de B , vemos nos pontos em amarelo escuro que o valor atingido para a velocidade média é ainda maior do que para o mesmo campo elétrico E e outros valores menores de B .

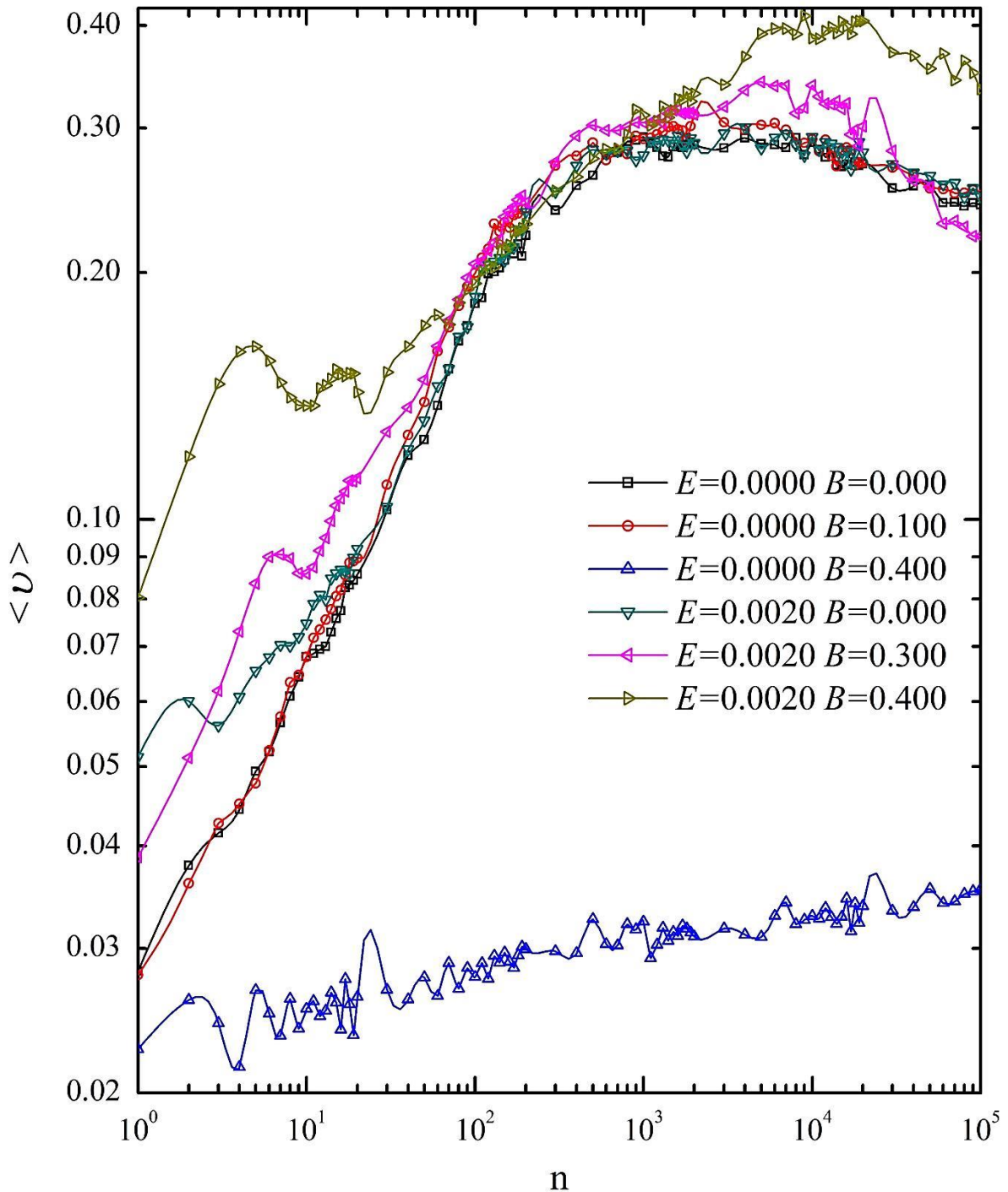


Figura 84: Evolução da velocidade média do conjunto de 200 CI ao longo das iterações para o BAEMP dissipativo considerando diferentes valores de campos elétrico e magnético. $r_0=0.45$, $\delta=0.30$, $\omega=1.0$, $e_R=e_r=0.01$, $\sigma_e-\sigma_i=0$, $v_0=0.02$, $\gamma=0.9999$

Estes resultados sugerem que a combinação de diferentes valores de parâmetros dos campos não apresenta um resultado previsível tendo em vista uma ou outra ação que cada um possuía quando considerado isoladamente, uma vez que quando os dois campos são considerados, a dinâmica é constituída de um processo fortemente não-linear.

10. CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS

Este trabalho estudou o bilhar anular nas suas variações com fronteiras móveis e estáticas, sob a ação de campos elétrico e magnético, nos casos dissipativo e não-dissipativo. Dentre os principais resultados destacam-se: a regularização da dinâmica (para ambos os modelos estático e pulsante), retardo do aparecimento da AF e supressão da AF via campo magnético de intensidade constante perpendicularmente orientado ao plano do bilhar; adição de caos à dinâmica, incentivo ao surgimento da AF e maior robustez para o fenômeno da AF via ação de campo elétrico constante cruzado ao plano do movimento.

A grande quantidade de parâmetros de controle faz do bilhar anular eletromagnético um sistema extremamente adequado para o estudo de relações e propriedades dinâmicas que possam controlar fenômenos intrínsecos a Sistemas Físicos. A motivação deste trabalho foi controlar o ganho indeterminado de energia de modo a estudar mecanismos que poderiam suprimi-lo ou então colaborar para seu surgimento. Notoriamente, os mecanismos que colaboram com a AF também tendem a tornar a dinâmica mais caótica e, ao contrário, os que a suprimem tendem a regularizar o espaço de fase. Sistemas Físicos diferentes podem apresentar outras motivações, mas esta propriedade deve se manter.

A mesma metodologia aqui apresentada, utilizando-se campos externos para controlar o sistema proposto, pode ser aplicada para qualquer Sistema Dinâmico onde isto se faça possível. Propriedades particulares de cada um desses sistemas devem ser levadas em consideração para análise dos potenciais elétrico e magnético a serem considerados.

O mesmo campo magnético adotado, perpendicular ao plano do bilhar, deverá apresentar efeitos semelhantes sobre a dinâmica de outros bilhares dispersivos com fronteira interna, como o bilhar de Sinai, nas variações do sistema com fronteiras estáticas e dependentes do tempo, regularizando a dinâmica e atuando na supressão da Aceleração de Fermi.

É possível que um campo elétrico semelhante ao que utilizamos aqui também possa incentivar e tornar mais robusto o fenômeno da AF nestes bilhares dispersivos, mas também nos *focusing billiards*, como o do tipo estádio, e também o elíptico, uma vez que os resultados mostraram que a força elétrica que age sobre a partícula eletricamente carregada tende a desorganizar o espaço de fase, tornando a dinâmica caótica até mesmo para o modelo estático. No caso do bilhar anular, o campo elétrico adicionou caos inclusive à geometria concêntrica, e, obedecendo à conjectura-LRA, também se verificou Aceleração de Fermi no modelo pulsante.

Em complementação, estudos focados em Transições de Fase, Leis de Escalas e Classes de Universalidade para os diferentes parâmetros de controle do bilhar anular eletromagnético pulsante, bem como no Transporte Anômalo sobre a energia média, podem ser desenvolvidos. Novas simulações devem ser efetuadas a fim de se verificar a possibilidade de o campo elétrico destruir atratores gerados pela dissipação nas colisões com as fronteiras, o que poderia permitir que o crescimento indeterminado de energia continuasse a existir para o modelo dissipativo mesmo após muitas iterações.

Como novos trabalhos, sugerimos, por exemplo, a utilização de campos não constantes, que variem no tempo e/ou na posição. Também podem ser experimentadas outras forças dissipativas, como de arraste viscoso ou de atrito entre a partícula e a superfície do bilhar.

Um estudo interessante e igualmente possível é a consideração do movimento simultâneo de duas partículas eletricamente carregadas com cargas de sinais opostos sob a ação dos campos.

É importante ressaltar, porém, que todas estas propostas demandam profundo esforço computacional, principalmente devido à dificuldade de se integrar as equações diferenciais de movimento de Hamilton-Jacobi utilizando um método de integração numérico e um passo de tempo que forneça uma solução ao mesmo tempo precisa e estável, para longos períodos de iteração que são necessários para a análise estatística do sistema.

REFERÊNCIAS

- [1] BIRFKHOFF, G.D. Dynamical Systems. *Amer. Math. Soc. Colloquium*, publ. 9, Providence: American Mathematical Society, 1927.
- [2] SINAI, Y.G. Dynamical systems with elastic reflections. Ergodic properties of dispersing billiards. *Russ. Math. Surveys.*, v. 25, p.141-192, 1970.
- [3] BUNIMOVICH, L. A. On the Ergodic Properties of nowhere dispersing billiards. *Commun. Math. Phys.*, v. 65, p. 295-312, 1979.
- [4] LEONEL, E.D.; McClintock, P.V.E. Effect of a frictional force on the Fermi–Ulam model. *J. Phys. A.*, v. 39, p. 11399-11415, 2006.
- [5] AKINSHIN, L.G.; LOSKUTOV, A.Y. Dynamical properties of some two-dimensional billiards with perturbed boundaries. *Physical Ideas of Russia*, v. 2, p. 67-86, 1997.
- [6] LOSKUTOV, A.; RYABOV, A.B.; AKINSHIN, L.G. Mechanism of Fermi Acceleration in dispersing billiards with perturbed boundaries. *J. Exp. and Theor. Physics*, v. 89, n. 5, p. 966-974, 1999.
- [7] _____; _____. Chaotic time-dependent billiards. *Int. J. of Comp. Anticipatory Syst.*, v. 8, p. 336-354, 2001.
- [8] _____; AKINSHIN, L.G.; SOBOLEVSKY, A.N. Dynamics of billiards with periodically time-dependent boundaries. *Applied Nonlin. Dynamics.*, v. 9, n. 4-5, p. 50-63, 2001.
- [9] GELFREICH, V. et al. Robust Exponential Acceleration in Time-Dependent Billiards. *Phys. Rev. Lett.*, v. 106, 074101, 2011.
- [10] BOHIGAS, O. et al. Quantum tunneling and chaotic dynamics. *Nuclear Physics A*, v. 560, p. 197, 1993.
- [11] KOLMOGOROV, A.N. On the conservation of conditionally periodic motions under small perturbation of the Hamiltonian. *Dokl. Akad. Nauk SSR*, v. 98, p. 527-530, 1954.
- [12] ARNOL'D, V.I. Proof of a theorem by A. N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian. *Russian Math. Survey.*, v. 18, p. 13-40, 1963.
- [13] MOSER, J. K. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. *Nach. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys.*, Kl. II 1 p. 1-20, 1962.
- [14] FERMI, E. On the Origin of the Cosmic Radiation. *Phys. Rev.*, v. 75, p. 1169-1174, 1949.
- [15] ULAM, S. *Proc. 4th Berkeley Symposium on Math, Statistics and Probability*. v. 3, p. 315-320, Berkeley, CA: California University Press, 1961.

- [16] TIPLER, P.A. *Física para cientistas e engenheiros*. v. 1, 3 ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1994.
- [17] LEONEL, E.D.; McCLINTOCK, P.V.E.; SILVA, J.K.L. Fermi-Ulam Accelerator Model under Scaling Analysis. *Phys. Rev. Lett.*, v. 93, 2004.
- [18] LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMAN, M.A.; COHEN, R.H. Fermi acceleration revisited. *Physica D*, v. 1, p. 291-305, 1980.
- [19] PUSTYL'NIKOV, L.D. On the Ulam problem. *Theor. Math. Phys.*, v. 57, p. 1035-1038, 1983.
- [20] _____. On the Fermi-Ulam model. *Sov. Math. Dokl.*, v. 35, p. 88-92, 1987.
- [21] _____. Existence of invariant curves for maps close to degenerate maps, and a solution of the Fermi-Ulam problem. *Russ. Acad. Sb. Math.*, v. 82, p. 231, 1995.
- [22] KARLIS, A.K. et al. Hyperacceleration in a Stochastic Fermi-Ulam Model. *Phys. Rev. Lett.*, v. 97, 194102, 2006.
- [23] _____; DIAKONOS, F.K; CONSTANTOUDIS, V. A consistent approach for the treatment of Fermi acceleration in time-dependent billiards. *Chaos*, v. 22, 026120, 2012.
- [24] GELFREICH, V. et al. Robust Exponential Acceleration in Time-Dependent Billiards. *Phys. Rev. Lett.*, v. 106, 074101, 2011.
- [25] _____; ROM-KEDAR, V.; TURAEV, D. Fermi acceleration and adiabatic invariants for non-autonomous billiards. *Chaos*, v. 22, 033116, 2012.
- [26] LOSKUTOV, A.; RYABOV, B. Particle dynamics in time-dependent stadium-like billiards. *J. Stat. Phys.*, v. 108, p. 995, 2002.
- [27] RYABOV, A.B.; LOSKUTOV, A. The role of dissipation in time-dependent non-integrable focusing billiards. *Chaos*, v. 22, 026121, 2012.
- [28] LENZ, F; DIAKONOS, F.K.; SCHMELCHER, P. Tunable Fermi Acceleration in the Driven Elliptical Billiard. *Phys. Rev. Lett.*, v. 100, 014103, 2008.
- [29] CARVALHO, R.E.; SOUZA, F. C.; LEONEL, E.D. Fermi acceleration on the annular billiard. *Phys. Rev. E*, v. 73, 066229, 2006.
- [30] _____; _____; _____. Fermi acceleration on the annular billiard: a simplified version. *J. Phys. A*, v. 38, p. 823, 2006.
- [31] PINTO, R.S.; LETELIER, P. S. Fermi Acceleration in driven relativistic billiards. *Phys. Lett. A*, v. 375, 3273, 2011.
- [32] LOSKUTOV, A. et al. Properties of some chaotic billiards with time-dependent boundaries. *J. Phys. A*, v. 33, 7973, 2000.

- [33] LEONEL, E.D.; McClintock P.V.E. A crisis in the dissipative Fermi accelerator model. *J. Phys. A*, v. 38, p. 425-430, 2005.
- [34] _____; BUNIMOVICH, L. A. Suppressing Fermi Acceleration in a Driven Elliptical Billiard. *Phys. Rev. Lett.*, v. 104, 224101, 2010.
- [35] TAVARES, D. F.; LEONEL, E. D. A simplified Fermi accelerator model under quadratic frictional force. *Braz. J. Phys.*, v. 38, p. 58-61, 2008.
- [36] SOUZA, F.A. et al. Can drag force suppress Fermi acceleration in a bouncer model? *Math. Prob. Eng.*, v. 2009, 409857, 2009.
- [37] OLIVEIRA, D.F.M.; LEONEL, E.D. Suppressing Fermi acceleration in a two-dimensional non-integrable time-dependent oval-shaped billiard with inelastic collisions. *Physica A*, v. 389, p. 1009-1020, 2010.
- [38] _____; VOLLMER, J.; LEONEL, E.D. Fermi acceleration and its suppression in a time-dependent Lorentz gas. *Physica D*, v. 240, p. 389-396, 2011.
- [39] _____; ROBNIK, M.; LEONEL, E.D. Statistical properties of a dissipative kicked system: Critical exponents and scaling invariance. *Phys. Lett. A*, v. 376, p. 723-728, 2012
- [40] LADEIRA, D.G.; LEONEL, E.D. Competition between suppression and production of Fermi acceleration. *Phys. Rev. E*, v. 81, 036216, 2010.
- [41] LEONEL, E.D.; LIVORATI, A.L.P. Describing Fermi acceleration with a scaling approach: The Bouncer model revisited. *Physica A*, v. 387, p. 1155-1160, 2008.
- [42] _____; OLIVEIRA, D.F.M.; LOSKUTOV, A. Fermi acceleration and scaling properties of a time dependent oval billiard. *Chaos*, v. 19, 033142, 2009.
- [43] _____. Phase Transition in Dynamical Systems: Defining Classes of Universality for Two-Dimensional Hamiltonian Mappings via Critical Exponents. *Math. Prob. Eng.*, v. 2009, 367921, 2009.
- [44] CARVALHO, R.E.; ABUD, C.V.; SOUZA, F.C. Dissipation as a mechanism of energy gain. *Phys. Rev. E*, v. 77, 036204, 2008.
- [45] GOLDSTEIN, H.; POOLE Jr., C.P.; SAFKO, J.L. *Classical Mechanics*. 3. ed. San Francisco: Addison-Wesley, 2002.
- [46] JACKSON, J.D. *Classical Electrodynamics*. 3. ed. New York: John Wiley, 1999.
- [47] ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. *Cálculo*. 8. ed. v. 2. Porto Alegre: Bookman, 2007.
- [48] JACKSON, J.D. From Lorenz to Coulomb and other explicit gauge transformations. *Amer. J. Phys.*, v. 70, p. 917, 2002.
- [49] MEISS, J.D.; OTT, E. Markov-Tree Model of Intrinsic Transport in Hamiltonian Systmes. *Phys. Rev. Lett.*, v. 55, p. 2741-2744, 1985.

- [50] HANSON, J.D.; CARY, J.R.; MEISS, J.D. Algebraic Decay in self-similar Markov chains. *J. Stat. Phys.*, v. 39, p. 327, 1985.
- [51] KARNEY, C.F.F. Long-time correlations in the stochastic regime. *Physica D*, v. 8, p. 360-380, 1983.
- [52] ZASLAVSKY, G.M. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport. *Phys. Rep.*, v. 371, p. 461-580, 2002.
- [53] JEPSEN, P.U. et al. Metal-insulator phase transition in a VO₂ thin film observed with terahertz spectroscopy. *Phys. Rev. B*, v. 74, 205103, 2006
- [54] CASTALDI, B. et al. Tunable Fermi acceleration in a nondissipative driven magnetic billiard. *Phys. Rev. E*, v. 89, 012916, 2014.