

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
*Campus de Rio Claro*

**Diogo Ricardo da Costa**

**TRANSIÇÕES DE FASE NAS DINÂMICAS DE UMA PARTÍCULA SE MOVENDO  
EM UM POÇO OU BARREIRA DE POTENCIAL DEPENDENTES  
PERIODICAMENTE DO TEMPO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física, área de Física Aplicada.

Orientador: Edson Denis Leonel

**Diogo Ricardo da Costa**

**TRANSIÇÕES DE FASE NAS DINÂMICAS DE UMA PARTÍCULA SE MOVENDO  
EM UM POÇO OU BARREIRA DE POTENCIAL DEPENDENTES  
PERIODICAMENTE DO TEMPO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física, área de Física Aplicada.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

Prof. Dr. Cesar Rogerio de Oliveira

Rio Claro, 16 de fevereiro de 2011

Resultado: APROVADO

*Dedico este trabalho aos meus pais Ricardo e Ilma,  
minhas irmãs Luciana e Daniele, ao meu querido irmão  
Guilherme, que sempre estará em nossos corações,  
à todos os meus familiares que em todos os momentos me apoiaram e a  
Julia Penalva que esteve ao meu lado até  
nos momentos mais difíceis.*

# Agradecimentos

Agradeço a todos que de alguma forma me ajudaram a alcançar o objetivo de obter o grau de Mestre em Física. O apoio e incentivo de todos que menciono abaixo foram muito importantes para que eu pudesse terminar este curso de pós graduação.

Agradeço,

- aos meus pais Ricardo e Ilma, minhas irmãs Luciana e Daniele, e em especial ao meu irmão Guilherme ao qual eu dedico e homenageio através deste trabalho, a minha eterna gratidão a toda minha família que sempre me apoiaram e me deram forças para seguir em frente e agradeço também a minha namorada Julia Penalva que sempre esteve ao meu lado.
- ao meu amigo e orientador Prof. Dr. Edson Denis Leonel, pela paciência, esforço e dedicação que me dedicou durante estes 2 anos em que trabalhamos juntos no mestrado e os 6 meses da iniciação científica.
- aos pesquisadores do Grupo de Estudos de Sistemas Complexos e Dinâmica Não Linear, que possui como líder o Prof. Dr. Edson Denis Leonel.
- ao DEMAC (Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Computação), por disponibilizar o laboratório e acesso computacional.
- a todos os Profs. das disciplinas de Pós-Graduação que cursei ao longo do período do Mestrado.
- aos colegas de Pós-Graduação, que de alguma forma colaboraram no desenvolvimento deste trabalho.
- ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo suporte financeiro durante estes 2 anos de Mestrado.
- a Deus, por tudo.

## Resumo

Estudaremos algumas propriedades dinâmicas para uma partícula clássica confinada em uma caixa de potencial com potenciais infinitos nas bordas e contendo um poço ou barreira de potencial dependentes periodicamente do tempo. A dinâmica de ambos os sistemas é descrita através de mapa bidimensional, não-linear e que preserva a área no espaço de fases nas variáveis energia e tempo. Os espaços de fases são mistos e observáveis médios nos mares caóticos são descritos usando argumentos de escala. Expoentes críticos foram obtidos perto da transição de integrabilidade para não integrabilidade, assim como expoentes de Lyapunov. O formalismo apresentado aqui é robusto e pode ser estendido para diferentes tipos de mapeamentos.

**Palavras Chaves:** Poço de Potencial, Barreira, Caos, Propriedades dinâmicas.

## **Abstract**

Some dynamical properties for a classical particle inside a box of potential with infinite potentials at the edges and containing a time-dependent potential well or barrier are studied. The dynamics for both systems are described by a two dimensional map, non-linear and area preserving map in the variables energy and time. Critical exponents were obtained near the transition from integrability to non-integrability. Lyapunov exponents were used to characterize the chaotic dynamics. The formalism presented here is robust and can be extended to different kinds of mappings.

**Key Words:** Potential Well, Barrier, Chaos, Dynamical Properties.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>POÇO DE POTENCIAL DEPENDENTE PERIODICAMENTE DO TEMPO</b>	<b>10</b>
2.1	Resumo . . . . .	10
2.2	O Modelo . . . . .	10
2.3	Colisões Múltiplas . . . . .	13
2.4	Espaço de fase e pontos fixos . . . . .	14
2.5	Os Expoentes de Lyapunov . . . . .	17
2.6	Propriedades de escala . . . . .	21
2.7	Hipóteses de Escala . . . . .	23
2.8	Classes de Universalidade . . . . .	29
<b>3</b>	<b>BARREIRA DE POTENCIAL DEPENDENTE PERIODICAMENTE DO TEMPO</b>	<b>30</b>
3.1	Resumo . . . . .	30
3.2	O Modelo . . . . .	30
3.3	Hipóteses de escala . . . . .	34
<b>4</b>	<b>CONCLUSÕES FINAIS E PERSPECTIVAS</b>	<b>39</b>
<b>5</b>	<b>APÊNDICE - A - Cálculo da matriz Jacobiana para o poço de potencial</b>	<b>41</b>
<b>6</b>	<b>APÊNDICE - B - Cálculo da matriz Jacobiana para a barreira de potencial</b>	<b>42</b>

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

O comportamento dinâmico de vários sistemas físicos pode ser caracterizado pelos conceitos matemáticos desenvolvidos na teoria de sistemas dinâmicos não lineares [1, 2, 3, 4, 5, 6]. A partir de ferramentas e propriedades dinâmicas e estatísticas podemos extrair resultados numéricos e analíticos relevantes para a caracterização de sistemas físicos.

Em relação a descrição da Hamiltoniana do sistema, muitas vezes isto nos leva ao estudo de mapas bidimensionais não lineares e que preservam a área do espaço de fases [7, 8]. Dá-se o nome de espaço de fases ao conjunto de todos os estados acessíveis. Ao evoluir, a partir de um estado inicial, o sistema passa por pontos do espaço de fases; ao conjunto assim percorrido denomina-se órbita. Assim, o espaço de fases é também o conjunto de todas as órbitas possíveis. A estrutura do espaço de fases caracteriza portanto os comportamentos dinâmicos possíveis do sistema. Movimentos regulares (periódicos ou quase-periódicos) estão associados a estruturas organizadas e movimentos irregulares a estruturas complexas.

Chamamos de mapa um sistema dinâmico que evolui no tempo de uma forma discreta [9]. Uma das maneiras pelo qual um fluxo contínuo dá origem a um mapa discreto é pela utilização de seções de Poincaré, onde este nada mais é do que uma maneira de reduzir o estudo de um fluxo num espaço de fases com  $n$  dimensões a uma aplicação denominada mapa de Poincaré ou mapa de retorno num espaço de fases com  $(n - 1)$  dimensões. Se por exemplo, tivermos um diagrama de fases tridimensional em que cada estado é representado por  $(x, \dot{x}, t)$ , o mapa de Poincaré é obtido simplesmente considerando a intersecção da trajetória com o plano  $(x, \dot{x})$  (seção de Poincaré) toda vez que  $t$  for igual a um múltiplo de um período  $T$ .

Podemos considerar o problema do movimento livre de uma partícula clássica confinada em uma região fechada do espaço e que sofre colisões com a fronteira. Tais problemas são chamados de problemas do tipo bilhar [10]. Os problemas descritos pela dinâmica de uma partícula clássica confinada em um poço ou barreira de potencial dependentes do tempo são exemplos simples que podem ser comparados e descritos como bilhares unidimensionais. Os bilhares então podem ser vistos como exemplos facilmente discretizáveis de sistemas Hamiltonianos. O sistema dinâmico discreto associado é conservativo e pode apresentar (dependendo da forma do



bilhar) regimes dinâmicos como integrabilidade, não-integrabilidade e caos. Grande parte dos sistemas apresentam espaços de fases do tipo misto, pois possuem ilhas do tipo Kolmogorov-Arnol'd-Moser (KAM) geralmente envoltas por mares de caos, enquanto que curvas invariantes do tipo spanning separam diferentes regiões caóticas do espaço de fases. Especial atenção tem sido aplicada no comportamento caótico destes sistemas [11] assim como a possibilidade de caracterizá-los usando teoria de escala [12, 13]. Além do mais, alguns destes sistemas podem apresentar comportamentos descritos por leis de potência [14, 15, 16] com mesmos expoentes, os quais podem ser uma clara evidência de que estes sistemas podem ser enquadrados em uma mesma classe de universalidade.

Na literatura podemos encontrar algumas aplicações usando poços de potencial, sejam eles quânticos ou clássicos. Podemos citar como exemplos, o estudo de um canal eletrônico periodicamente modulado [17], semicondutores na presença de intensos campos elétricos [18] e o cálculo do transporte através da heteroestrutura do GaAs/AlGaAs [19].

Com relação as barreiras de potencial, podemos ver diversas aplicações na literatura, e tanto as versões quânticas como clássicas podem ser encontradas. Como exemplos de aplicações, podemos citar a obtenção de propriedades caóticas para uma barreira modulada no tempo [7], o tempo de travessia para tunelamento [20] e uma dupla barreira de potencial [21].

## Capítulo 2

# POÇO DE POTENCIAL DEPENDENTE PERIODICAMENTE DO TEMPO

### 2.1 Resumo

Neste capítulo estudaremos a dinâmica de uma partícula clássica confinada dentro de uma caixa de potenciais infinitos nas bordas e contendo um poço de potencial cujo fundo é dependente periodicamente do tempo. Iremos detalhar como obter o mapa, o espaço de fases, mostraremos como são encontradas as órbitas periódicas de período 1 (um) e caracterizaremos o comportamento caótico do sistema pela obtenção dos expoentes de Lyapunov. No final deste Capítulo iremos propor uma função de escala que engloba todas as variáveis de nosso sistema e sobrepor todas as curvas de desvio da energia média em uma única curva universal, confirmando uma invariância de escala.

### 2.2 O Modelo

O problema do poço de potencial dependente periodicamente do tempo consiste de uma partícula clássica de massa  $m$  submetida a diferentes tipos de potenciais dependendo da região em que esteja, o que resulta em ganhos ou perdas de energia cinética (consequentemente há uma variação da energia total). Um esquema típico pode ser visto na Fig. 2.1, onde a base do poço de potencial se move periodicamente no tempo. O poço se encontra no interior de uma caixa com potenciais infinitos em suas bordas.

Vale ressaltar que outros tipos de formas de potenciais também podem ser usados para obter a mesma descrição da dinâmica do sistema. Podemos, por exemplo, considerar uma cadeia de infinitos e simétricos poços de potencial dependentes periodicamente do tempo, onde seus fundos se movem periodicamente e sincronizados no tempo, como é mostrado na Fig. 2.2(a).

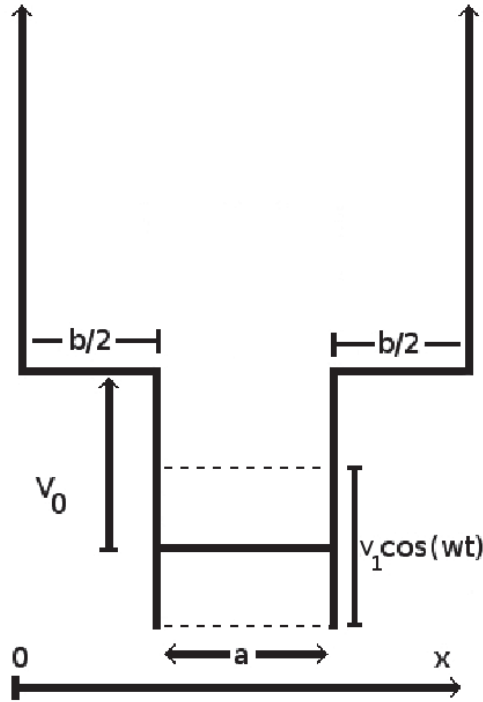


Figura 2.1: Esquema ilustrativo do potencial  $V(x, t)$  dado pela Eq. (2.1).

Considerando a geometria do problema, podemos também assumir um único poço de potencial que não contém uma caixa infinita de potencial, mas possui condições de contorno periódica nas bordas, como mostrado na Fig. 2.2(b). Finalmente e mais genericamente, podemos considerar um semi poço de potencial em que o fundo se move periodicamente no tempo dentro de uma caixa de potencial infinito como podemos ver na Fig. 2.2(c). Entretanto, neste capítulo preferimos usar o esquema da Fig. 2.1, onde o potencial  $V(x, t)$  pode ser escrito como

$$V(x, t) = \begin{cases} \infty, & \text{if } x \leq 0 \text{ or } x \geq (a + b) \\ V_0, & \text{if } 0 < x < \frac{b}{2} \text{ or } (a + \frac{b}{2}) < x < (a + b) \\ V_1 \cos(wt), & \text{if } \frac{b}{2} \leq x \leq (a + \frac{b}{2}) \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $a$ ,  $b$ ,  $V_0$ ,  $V_1$  e  $w$  são constantes.

Vamos supor que em um tempo  $t = t_n$ , a partícula inicia seu movimento com energia  $E = E_n$  e está prestes a entrar no poço de potencial oscilante em  $x = b/2$ . Ao entrar no poço a partícula sofre uma mudança abrupta em sua energia cinética, logo a energia cinética pode ser escrita como  $K'_n = E_n - V_1 \cos(wt_n) = \frac{1}{2}mv'_n{}^2$  onde  $|v'_n| = \sqrt{2K'_n/m}$  é constante (Vale ressaltar que as velocidades que trabalharemos serão constantes, pois não temos forças de qualquer natureza atuando. As exceções ocorrem apenas em  $x = b/2$  e  $x = a + b/2$  onde temos mudanças bruscas nas velocidades da partícula). Chegando no outro lado do poço (em  $x = a + b/2$ ), a energia da partícula é  $E'_n = K'_n + V_1 \cos[w(t_n + \Delta t'_n)]$  onde  $\Delta t'_n = a/|v'_n|$ . Se a partícula não tem energia suficiente para escapar do poço ela é refletida de volta, ou seja,  $E'_n \leq V_0$ . Além de retornar, ela sofrerá reflexões sucessivas até que tenha energia suficiente para deixar o poço. Podemos então reescrever  $E'_n$  como  $E'_n > K'_n + V_1 \cos[w(t_n + i\Delta t'_n)]$  onde

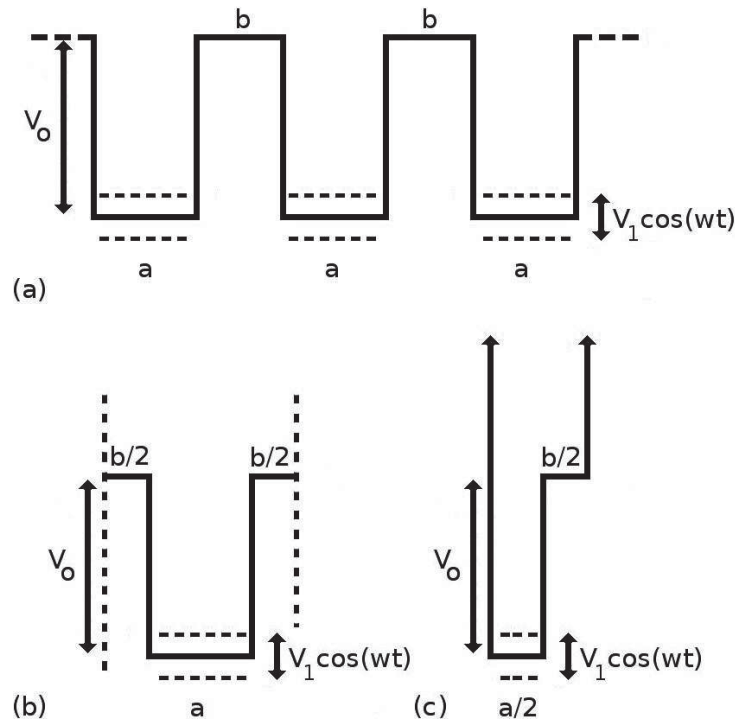


Figura 2.2: (a) Uma cadeia contendo infinitos poços de potencial simétricos, onde os fundos destes se movem periodicamente e sincronizados no tempo; (b) Um único poço de potencial; (c) Poço de potencial apresentado em (b) mas que foi cortado ao meio por causa de sua simetria.

$i$  é o menor inteiro que satisfaz a condição  $E'_n > V_0$ , condição esta que assegura que a partícula escapou.

Uma vez que a partícula escapou do poço oscilante, ela irá viajar em direção a uma das bordas da caixa com potenciais infinitos, sofrerá uma colisão elástica deste e irá se mover em direção ao poço oscilante. A nova energia instantes antes de entrar no poço é dada por  $E_{n+1} = E_n + V_1 \{\cos[w(t_n + i\Delta t'_n)] - \cos(wt_n)\}$ . O tempo é escrito como  $t_{n+1} = t_n + i\Delta t'_n + \Delta t''_n$  onde  $\Delta t''_n = b/|v''_n|$  com  $|v''_n| = \sqrt{2K''_n/m}$  e  $K''_n = E_{n+1} - V_0$ .

Podemos ver que existem muitos parâmetros de controle que não são relevantes para descrever a dinâmica do sistema, (cinco no total), chamados  $a$ ,  $b$ ,  $V_0$ ,  $V_1$  and  $w$ . Iremos definir variáveis adimensionais afim de diminuir o número de parâmetros de controle:  $\delta = V_1/V_0$ ,  $r = b/a$ ,  $e_n = E_n/V_0$ ,  $N_c = w/(2\pi) (a/\sqrt{2V_0/m})$  e a medida do tempo em termos do número de oscilações do poço móvel,  $\phi = wt$ . O parâmetro  $N_c$  corresponde ao número de oscilações que o poço completa em um tempo  $t = a/\sqrt{2V_0/m}$  (tempo que uma partícula, com energia cinética igual a  $V_0$ , levaria para percorrer a distância  $a$  se o poço fosse estático).

Tendo em mente os parâmetros de controle propostos, o mapa pode ser escrito como

$$T : \begin{cases} e_{n+1} = e_n + \delta [\cos(\phi_n + i\Delta\phi_a) - \cos\phi_n] \\ \phi_{n+1} = \phi_n + i\Delta\phi_a + \Delta\phi_b \pmod{2\pi} \end{cases}, \quad (2.2)$$

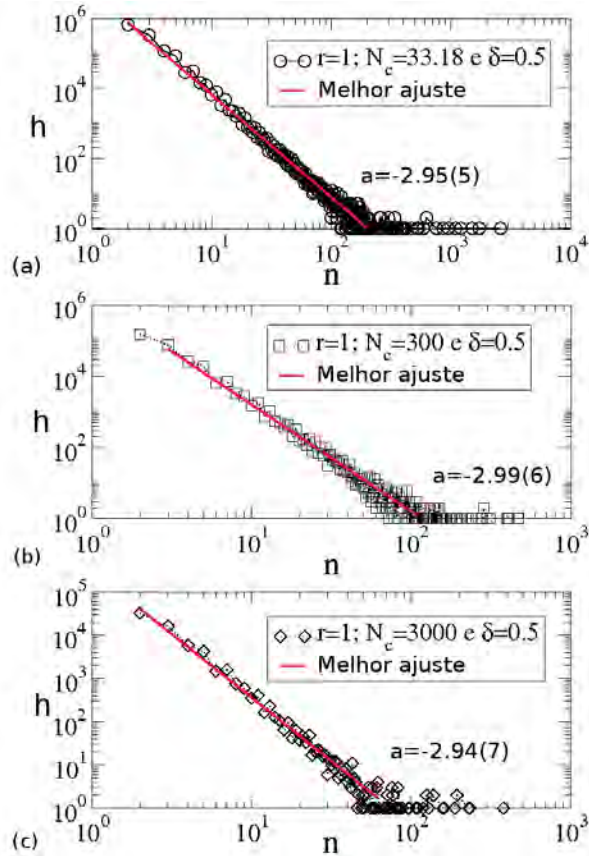


Figura 2.3: Distribuição do número de reflexões sucessivas de uma partícula, onde  $n$  representa o número de reflexões,  $h$  a frequência com que cada reflexão sucessiva aparece e  $a$  é o expoente da lei de potência. Os parâmetros de controle usados são  $r = 1$ ,  $\delta = 0.5$  e: (a)  $N_c = 33.18$ ; (b)  $N_c = 300$ ; (c)  $N_c = 3000$ .

onde as variáveis auxiliares são dadas por

$$\Delta\phi_a = \frac{2\pi N_c}{\sqrt{e_n - \delta \cos(\phi_n)}}, \quad (2.3)$$

$$\Delta\phi_b = \frac{2\pi N_c r}{\sqrt{e_{n+1} - 1}}. \quad (2.4)$$

onde  $i$  é o menor inteiro que torna a expressão  $e_n + \delta[\cos(\phi_n + i\Delta\phi_a) - \cos\phi_n] > 1$  verdadeira.

## 2.3 Colisões Múltiplas

Sabemos que a partícula fica confinada no poço de potencial móvel quando a energia nas bordas ( $x = b/2$  ou  $x = a + b/2$ ) for  $e \leq 1$ . Se fizermos um gráfico do número de colisões sucessivas em função da frequência com que elas aparecem (chamado muitas vezes de histograma de frequências) iremos notar que essa distribuição obedece a uma lei de potência. Na Fig. 2.3(a) temos uma simulação usando como parâmetros  $r = 1$ ,  $N_c = 33.18$  e  $\delta = 0.5$ , vemos que o melhor ajuste é uma lei de potência com expoente  $-2.94(5)$ . Para a Fig. 2.3(b) os parâmetros

usados são  $r = 1$ ,  $N_c = 300$  e  $\delta = 0.5$  e o expoente da lei de potência é  $-2.99(6)$ . Finalmente para a Fig. 2.3(c)  $r = 1$ ,  $N_c = 3000$  e  $\delta = 0.5$  e o expoente da lei de potência é igual a  $-2.94(7)$ .

## 2.4 Espaço de fase e pontos fixos

O espaço de fase do modelo é misto contendo ilhas do tipo Kolmogorov-Arnol'd-Moser (KAM), um extenso mar caótico e curvas invariantes do tipo spanning que separam diferentes regiões caóticas e limitam o crescimento da energia  $e$ , como podemos ver na Fig. 2.4. As ilhas KAM têm a característica de não permitirem o trânsito livre de uma órbita entre seu interior e o mar de caos, assim, a evolução de uma condição inicial que esteja em seu interior jamais sairá desta região, da mesma forma que uma órbita pertencente ao mar de caos jamais entrará na ilha KAM.

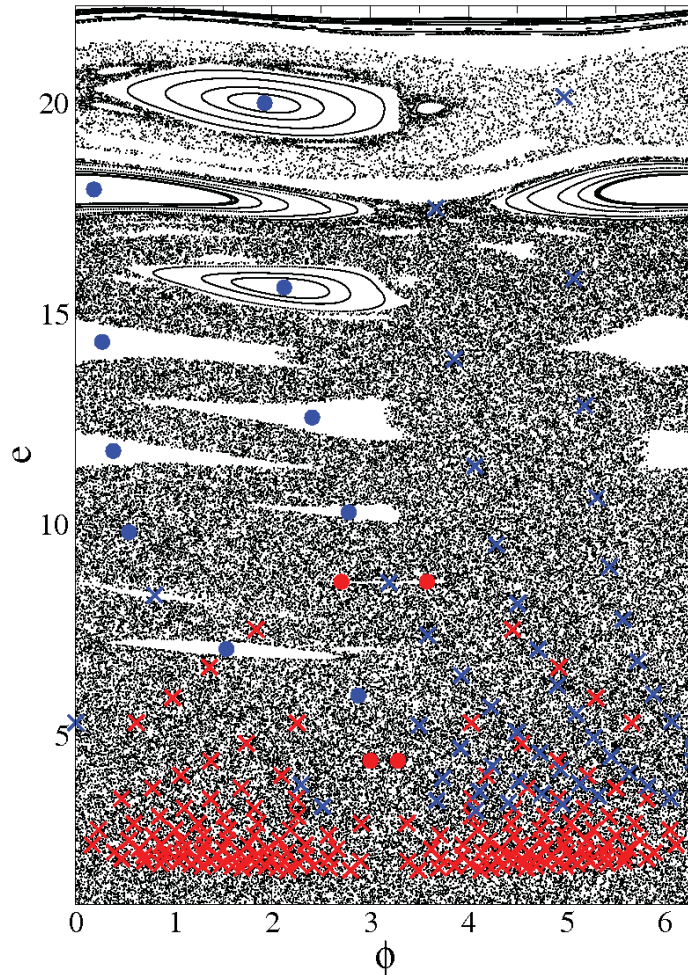


Figura 2.4: Espaço de fase para o mapeamento (2.2). Os círculos correspondem aos pontos fixos elípticos e os em formato de cruz são pontos fixos hiperbólicos. As cores vermelhas são usadas no primeiro tratamento (i) e as azuis no segundo tratamento (ii). Os parâmetros de controle usados são  $r = 1$ ,  $N_c = 33.18$  e  $\delta = 0.5$ .

Dadas as expressões do mapeamento, podemos obter os correspondentes pontos fixos. Os

pontos fixos, sem múltiplas reflexões (ou seja,  $i = 1$  no mapa (2.2)), são obtidos fazendo  $e_{n+1} = e_n = e^*$  e  $\phi_{n+1} = \phi_n + 2m\pi = \phi^*$ , onde  $m$  é um inteiro positivo.

Fazendo  $e_{n+1} = e^*$  na primeira expressão do mapa (2.2), obtemos

$$\delta [\cos(\phi^* + \Delta\phi_a) - \cos(\phi^*)] = 0, \quad (2.5)$$

isso só é possível se  $\delta = 0$  (situação que não nos interessa, pois teríamos de ignorar esse parâmetro do mapa) ou  $\cos(\phi^* + \Delta\phi_a) = \cos(\phi^*)$ . Essa última expressão nos remete a dois valores para  $\Delta\phi_a$ :

$$\Delta\phi_a = k2\pi, \quad (2.6)$$

ou

$$\Delta\phi_a = k2\pi - 2\phi^*, \quad (2.7)$$

onde  $k$  é um número inteiro maior que zero.

Iremos nomear de tratamento (i) quando utilizarmos o  $\Delta\phi_a$  da Eq. (2.6) e tratamento (ii) quando utilizarmos o  $\Delta\phi_a$  da Eq. (2.7).

(i) Neste tratamento, iremos obter uma expressão analítica para os pontos fixos. Abaixo segue a dedução.

Primeiro, vamos reescrever a expressão de  $\Delta\phi_b$  dado na Eq. (2.4):

$$\Delta\phi_b = \frac{2\pi N_c r}{e^* - 1}. \quad (2.8)$$

Fazendo  $\phi_{n+1} = \phi^* + m2\pi$  na segunda expressão do mapa (2.2), obtemos

$$\phi^* + m2\pi = \phi^* + \Delta\phi_a + \Delta\phi_b,$$

ou

$$m2\pi = \Delta\phi_a + \Delta\phi_b. \quad (2.9)$$

Substituindo  $\Delta\phi_a$  da Eq. (2.6) e  $\Delta\phi_b$  da Eq. (2.8) na expressão acima, encontramos que

$$e = 1 + \left( \frac{N_c r}{m - k} \right)^2. \quad (2.10)$$

Sabemos também que  $\Delta\phi_a$  é dado na Eq. (2.3), logo reescrevendo, obtemos

$$\Delta\phi_a = \frac{2\pi N_c}{\sqrt{e^* - \delta \cos(\phi^*)}}. \quad (2.11)$$

Substituindo  $\Delta\phi_a$  dado na Eq. (2.6) em (2.11) encontramos

$$\cos(\phi^*) = \frac{1}{\delta} \left[ e - \left( \frac{N_c}{k} \right)^2 \right],$$



onde podemos isolar  $\phi^*$  e obter

$$\phi^* = \arccos \left\{ \frac{1}{\delta} \left[ e - \left( \frac{N_c}{k} \right)^2 \right] \right\}, \quad (2.12)$$

ou

$$\phi^* = 2\pi - \arccos \left\{ \frac{1}{\delta} \left[ e - \left( \frac{N_c}{k} \right)^2 \right] \right\}. \quad (2.13)$$

As duas últimas expressões nos fornecem a fase das órbitas periódicas de período 1 usando o tratamento (i). Portanto, para determinar os pontos fixos analiticamente, basta encontrarmos os valores de energia e fase ( $e^*$ ,  $\phi^*$ ).

(ii) Para este tratamento, iremos mostrar que não é possível obtermos uma expressão analítica para o par ( $e^*$ ,  $\phi^*$ ), sendo necessário uso de solução numérica.

A expressão de  $\Delta\phi_a$  pode ser vista na Eq. (2.7), mas podemos também comparar com a expressão encontrada na Eq. (2.11), obtendo assim

$$e^* = \delta \cos(\phi^*) + \left( \frac{\pi N_c}{k\pi - \phi^*} \right)^2. \quad (2.14)$$

Ao fazer  $\phi_{n+1} = \phi^* + m2\pi$  na segunda expressão do mapa (2.2) obtivemos a Eq. (2.9). Substituindo a expressão de  $\Delta\phi_a$  da Eq. (2.7) e  $\Delta\phi_b$  da Eq. (2.8) encontramos que

$$1 - e^* + \left[ \frac{\pi N_c r}{\pi(m - k) + \phi^*} \right]^2 = 0, \quad (2.15)$$

e finalmente substituindo a expressão de  $e^*$  da Eq. (2.14), obtemos

$$1 + \left[ \frac{\pi N_c r}{\pi(m - k) + \phi^*} \right]^2 - \delta \cos(\phi^*) + \left( \frac{\pi N_c}{k\pi - \phi^*} \right)^2 = 0, \quad (2.16)$$

onde esta expressão nos fornece a fase ( $\phi^*$ ) dos pontos fixos para o tratamento (ii). A energia é encontrada substituindo  $\phi^*$  na Eq. (2.14).

Uma forma de se caracterizar os pontos fixos é através do polinômio característico [9], escrito como

$$\lambda^2 - \lambda(\text{Tr} J^*) + 1 = 0,$$

onde a solução desta equação nos fornece

$$\lambda_{\pm} = \frac{\text{Tr} J^* \pm \sqrt{(\text{Tr} J^*)^2 - 4}}{2}.$$



A Jacobiana  $J$  é escrita como

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial e_{n+1}}{\partial e_n} & \frac{\partial e_{n+1}}{\partial \phi_n} \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial e_n} & \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} \end{pmatrix}$$

e  $\text{Tr} J^*$  é dito o traço da Jacobiana, ou seja, a soma dos elementos da diagonal principal da matriz  $J^*$ ,

$$\text{Tr} J^* = \frac{\partial e_{n+1}}{\partial e_n} + \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n}.$$

Os pontos fixos podem ser classificados da seguinte forma [9]:

- Se  $|\text{Tr} J^*| < 2$ , o ponto fixo  $(X^*, Y^*)$  é elíptico.
- Se  $|\text{Tr} J^*| = 2$ , o ponto fixo  $(X^*, Y^*)$  é parabólico.
- Se  $|\text{Tr} J^*| > 2$ , o ponto fixo  $(X^*, Y^*)$  é hiperbólico.

Na Fig. 2.4 podemos ver os pontos fixos para os dois tratamentos. Os parâmetros de controle usados são  $r = 1$ ,  $N_c = 33.18$  e  $\delta = 0.5$ . Os círculos correspondem aos pontos fixos elípticos e os em formato de cruz são pontos fixos hiperbólicos. Pontos fixos elípticos são considerados estáveis, ou seja, dada uma condição inicial exatamente no ponto fixo, a órbita nunca sairá deste ponto, ao contrário dos hiperbólicos que tem trajetórias que divergem do ponto fixo (ponto fixo instável). Ressaltamos que as cores vermelhas são usadas no primeiro tratamento (i) e as azuis no segundo tratamento (ii).

## 2.5 Os Expoentes de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov são usados como indicadores de caos. Eles indicam se uma órbita é sensível ou não às condições iniciais, em outras palavras, se duas órbitas com condições iniciais próximas se separam ao iterarmos o sistema várias vezes. Nosso objetivo, nesta seção, é utilizar o cálculo do expoente de Lyapunov para caracterizar o comportamento caótico encontrado no espaço de fase do modelo do poço de potencial dependente periodicamente do tempo.

Para obter os expoentes de Lyapunov, precisamos verificar se duas órbitas que partindo de condições iniciais próximas divergem exponencialmente uma da outra com o passar do tempo. Se tal divergência ocorre, então as órbitas são classificadas como caóticas. Se duas órbitas permanecerem próximas ou divergem apenas linearmente, então não são sensíveis às condições iniciais e, conseqüentemente, não são caóticas.

Inicialmente efetuaremos o cálculo para um mapa unidimensional, e depois iremos extrapolar para o caso bidimensional (que são os objetos de estudo neste trabalho).

Seja o mapa unidimensional dado por

$$X_{n+1} = F(X_n), \tag{2.17}$$

onde  $X_0$  é uma condição inicial e  $F$  é uma função não linear qualquer. Podemos definir a distância relativa entre duas órbitas, na  $n$ -ésima iteração, como,

$$d \equiv |F^{(n)}(X_0 + \epsilon) - F^{(n)}(X_0)|, \quad (2.18)$$

ou ainda, podemos considerar a distância relativa pela razão

$$\frac{d}{\epsilon} \equiv \frac{|F^{(n)}(X_0 + \epsilon) - F^{(n)}(X_0)|}{\epsilon}, \quad (2.19)$$

onde  $\epsilon$  é muito pequeno. Considerando o limite em que  $\epsilon \rightarrow 0$ , podemos definir,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \frac{F^{(n)}(X_0 + \epsilon) - F^{(n)}(X_0)}{\epsilon} \right| = |F'^{(n)}(X_0)| \equiv e^{(\lambda n)}. \quad (2.20)$$

Tomando o logaritmo de ambos os lados da Eq. (2.20) e reorganizando os termos,

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln |F'^{(n)}(X_0)|. \quad (2.21)$$

Agora considerando o caso em que  $n \rightarrow \infty$  (isto é feito, pois o expoente de Lyapunov só irá convergir para certo valor após um número muito grande de iterações), a expressão para o cálculo do expoente de Lyapunov para mapas unidimensionais é dada por,

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |F'^{(n)}(X_0)|. \quad (2.22)$$

Em mapas bidimensionais, como os estudados neste trabalho, os expoentes de Lyapunov são dados por

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\Lambda_j^i|, \quad \text{com } j = 1, 2. \quad (2.23)$$

O termo  $\Lambda_j^i$  representa os autovalores da matriz  $M = \prod_{i=1}^n J_i(e_i, \phi_i)$  e  $J_i$  é a matriz Jacobiana do mapeamento avaliada na órbita  $(e_i, \phi_i)$ .

Para facilitar o cálculo dos expoentes de Lyapunov, vamos utilizar um algoritmo chamado de *Algoritmo de Triangularização*, proposto por Eckmann em 1985 [22]. Este algoritmo consiste em escrever  $J$  (matriz Jacobiana) a partir do produto de uma matriz Triangular superior ( $T$ ) por uma matriz Ortogonal ( $\Theta$ ), ou seja,  $J = \Theta T$ .

Podemos afirmar que uma matriz é ortogonal quando sua transposta é igual à sua inversa, ou seja,

$$\Theta^{-1} = \Theta^T.$$

Usando estas definições, podemos reescrever a matriz  $M$  como

$$M = J_n J_{n-1} J_{n-2} \dots, J_2 J_1 = J_n J_{n-1} \dots, J_2 \Theta_1 \Theta_1^{-1} J_1,$$

onde  $T_1 = \Theta_1^{-1} J_1$ . O produto de  $J_2 \Theta_1$  define uma nova  $J_2'$ . Seguindo o mesmo raciocínio, temos

$$M = J_n J_{n-1}, \dots, J_3 \Theta_2 \Theta_2^{-1} J_2' T_1.$$

O mesmo procedimento pode ser usado para obter  $T_2 = \Theta_2^{-1} J_2'$  e assim por diante. Usando este procedimento, o algoritmo se resume a analisar os dois elementos da diagonal principal de  $T$ , ou seja,  $T_{11}$  e  $T_{22}$ . Para encontrá-los, devemos achar as expressões de  $\Theta_1^{-1} J_1 = T_1$ , dadas por

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}.$$

Calculando o produto das matrizes, encontramos

$$\begin{pmatrix} j_{11} \cos(\theta) + j_{21} \sin(\theta) & j_{12} \cos(\theta) + j_{22} \sin(\theta) \\ -j_{11} \sin(\theta) + j_{21} \cos(\theta) & -j_{12} \sin(\theta) + j_{22} \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}.$$

Resolvendo a igualdade de matrizes, obtemos

$$\begin{aligned} -j_{11} \sin(\theta) + j_{21} \cos(\theta) &= 0, \\ -j_{11} \sin(\theta) &= -j_{21} \cos(\theta), \\ \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} &= \frac{j_{21}}{j_{11}}. \end{aligned}$$

Observando a Figura 2.5, podemos tentar obter relações trigonométricas em um triângulo retângulo. Aplicando o Teorema de Pitágoras podemos encontrar o valor da hipotenusa (HI), que é igual a

$$HI = \sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}.$$

Da Fig. 2.5, temos que

$$\sin(\theta) = \frac{j_{21}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}, \quad \cos(\theta) = \frac{j_{11}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}.$$

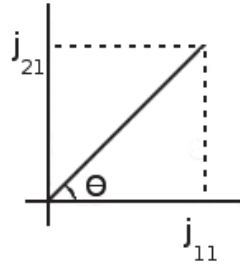


Figura 2.5: No triângulo retângulo da figura, encontramos quem são o cateto oposto e o cateto adjacente usados na obtenção do  $\sin(\theta)$  e do  $\cos(\theta)$ .

Finalmente podemos agora reescrever os autovalores da matriz  $T$ , ou seja

$$T_{11} = j_{11} \cos(\theta) + j_{21} \sin(\theta) = \frac{j_{11}^2 + j_{21}^2}{\sqrt{(j_{11}^2 + j_{21}^2)}}, \quad (2.24)$$

$$T_{22} = j_{22} \cos(\theta) + j_{12} \sin(\theta) = \frac{j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21}}{\sqrt{(j_{11}^2 + j_{21}^2)}}. \quad (2.25)$$

A partir dos autovalores  $T_{11}$  e  $T_{22}$  da matriz triangular, encontramos numericamente os expoentes de Lyapunov para uma órbita do espaço de fases para mapeamentos 2D.

Em sistemas Hamiltonianos os expoentes de Lyapunov aparecem aos pares e com sinais contrários [3]. Vamos sempre considerar o expoente positivo em nossas simulações.

Na Fig. 2.6(a) foram usadas seis condições iniciais diferentes, iteradas  $10^8$  vezes na região de mais baixa energia do espaço de fases, correspondente à região do mar de caos, para o mapa (2.2). Pode-se ver que mesmo para diferentes condições iniciais, os expoentes de Lyapunov convergem para um valor constante, e com isso, podemos tomar a média dessas seis condições e obter o expoente de Lyapunov médio  $\bar{\lambda}$ .

Já na Figura 2.6(b) temos o comportamento do  $\bar{\lambda}$  em função do parâmetro  $N_c$ , como sabemos,  $N_c$  nos dá o número de oscilações que o poço quadrado completa em um tempo  $t = a/\sqrt{2V_0/m}$ . Quando aumentamos o valor de  $N_c$ , estamos aumentando o número de oscilações que o poço realiza, com isso, aumentando a estocasticidade do sistema (padrões estocásticos são aqueles que têm origem em processos não determinísticos, com origem em eventos considerados aleatórios. Por exemplo, o lançar de dados resulta num processo estocástico, pois qualquer uma das 6 faces do dado tem iguais probabilidades de ficar para cima quando de seu arremesso), o que é visualizado como um aumento no expoente de Lyapunov.

Agora em relação a Figura 2.6(c), temos uma queda inicial do valor do expoente de Lyapunov médio, e em  $\delta \approx 10^{-1}$  um aumento, isto se deve a destruição de outra curva invariante Spanning e nova junção de mares caóticos. Na Fig. 2.7(a) temos em preto uma órbita onde a condição inicial foi gerada para um valor de baixa energia e o vermelho é o espaço de fases. A diferença entre esta figura e a Fig. 2.7(b) está no valor do parâmetro  $\delta$  que passou de 0, 1 (2.7(a)) para 0, 2 (2.7(b)). Para a Fig. 2.7(b) vemos que várias curvas invariantes do tipo span-

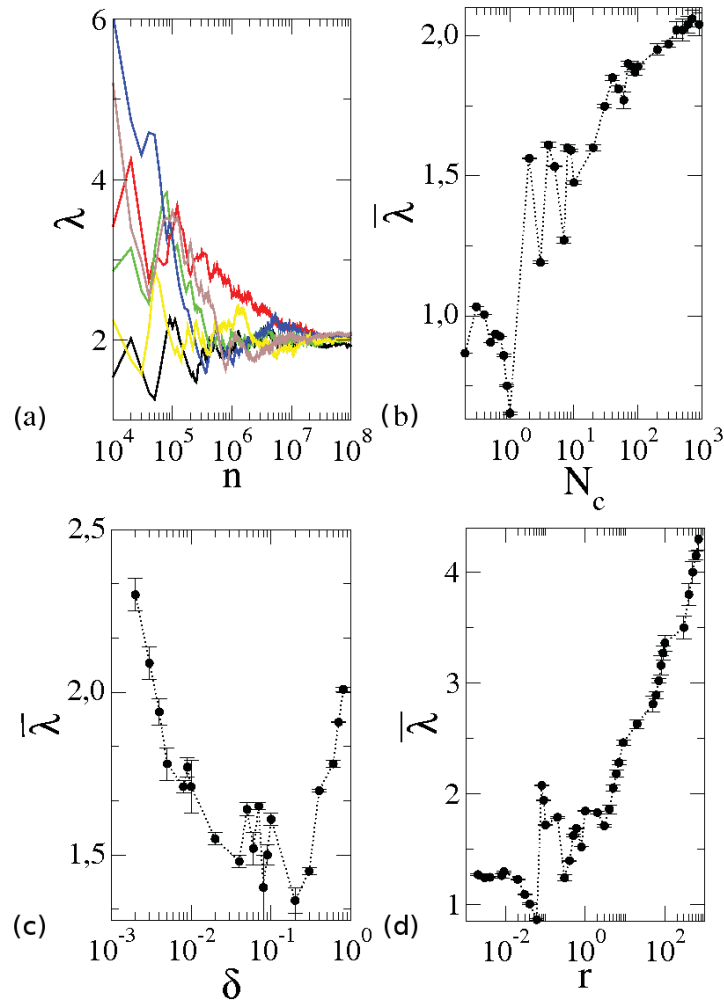


Figura 2.6: (a) Evolução temporal do expoente de Lyapunov positivo para seis diferentes condições iniciais evoluídas  $5 \times 10^8$  vezes. Os parâmetros usados são  $r = 1$ ;  $N_c = 500$  e  $\delta = 0.5$ . (b) Gráfico de  $\bar{\lambda} \times N_c$  para os valores fixos  $r = 1$  e  $\delta = 0.5$ . (c) Gráfico de  $\bar{\lambda} \times \delta$  para os valores fixos  $r = 1$  e  $N_c = 33.18$ . (d) Gráfico de  $\bar{\lambda} \times r$  para os valores fixos de  $N_c = 33.18$  e  $\delta = 0.5$ .

ning foram destruídas ao compararmos com a 2.7(a), o que reforça a nossa hipótese de que esta seja uma das causas da flutuação do expoente de Lyapunov médio.

Analisando agora a Figura 2.6(d), vemos que há uma tendência geral de crescimento do valor do expoente de Lyapunov médio, isto pode ser explicado se lembrarmos que  $r = b/a$  e quanto maior o valor de  $r$ , maior é o valor de  $b$  perante  $a$ . Portanto, a partícula passaria mais tempo viajando na região que não possui o poço oscilante, o que faz este oscilar um número grande de vezes, aumentando a estocaticidade do sistema.

## 2.6 Propriedades de escala

Nosso objetivo principal é caracterizar o comportamento da energia média e do desvio da energia média do mar caótico em função de todos os parâmetros de controle. Para isto, definimos

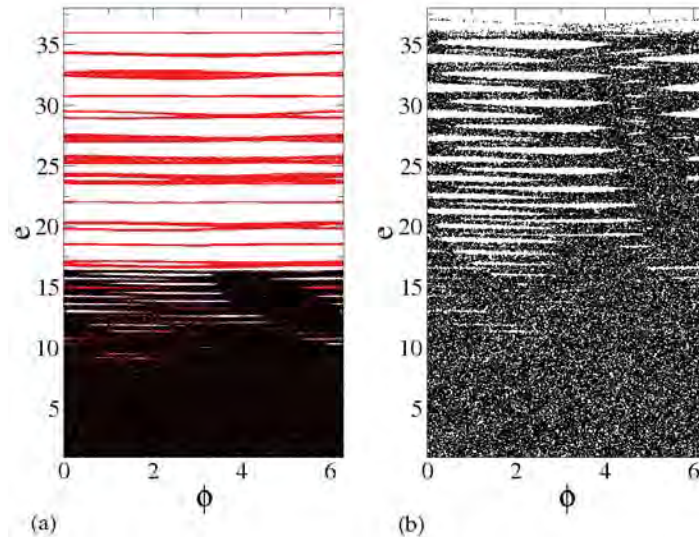


Figura 2.7: Em preto temos uma órbita iterada a partir da região de baixa energia do mar de caos, e em vermelho o espaço de fases para: (a)  $\delta = 0.1$ ; (b)  $\delta = 0.2$ . Foram usados  $N_c = 150$  e 1.

energia média como

$$\bar{e}(n, \delta, N_c, r) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i, \quad (2.26)$$

onde  $n$  é o número de iteradas. Definimos também o desvio da energia média como

$$\omega(n, \delta, N_c, r) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sqrt{e_j^2(n, \delta, N_c, r) - \bar{e}_j^2(n, \delta, N_c, r)}, \quad (2.27)$$

onde  $M$  é o conjunto de diferentes condições iniciais.

Na Figura 2.8 vemos uma curva de  $\omega$  em função do número de iterações  $n$ , para os parâmetros  $N_c = 790$ ,  $r = 1$  e  $\delta = 1$ . O número de condições iniciais é  $M = 3000$ . Vemos que há um crescimento em lei de potência (com expoente  $\beta = 0.5096(1) \approx 0.5$ ), e depois de um certo valor de  $n$ , temos que  $\omega$  satura em um valor constante, que chamamos de  $\omega_{sat}$ . O número da iteração onde há mudança de crescimento com expoente  $\beta$  para saturação de  $\omega$  é chamado de número de iteração de crossover  $n_x$ .

Nas figuras 2.9(a) e 2.9(b) são mostrados gráficos de  $\omega \times n$  para três valores diferentes de  $N_c$  e  $r$  respectivamente. Vemos que para os dois casos, as três curvas iniciam o crescimento juntas e saturam em pontos diferentes. Porém para a Fig. 2.9(c) (onde variamos o valor do parâmetro  $\delta$ ), as três curvas não iniciam o crescimento juntas, isso só ocorre se fizermos uma reescala do eixo de  $n$ , multiplicando este eixo por  $\delta^2$ , como mostrado na Fig. 2.9(d).

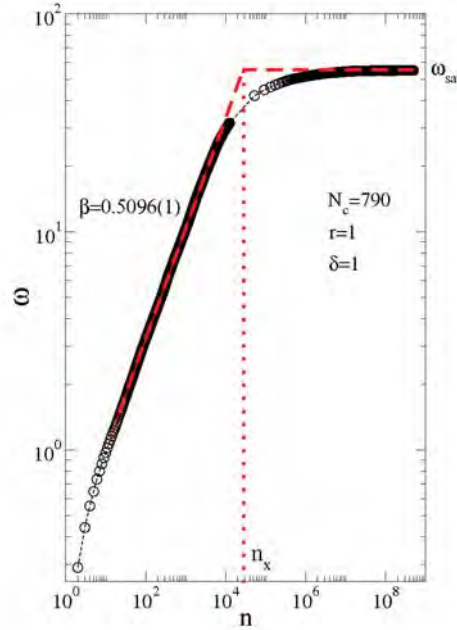


Figura 2.8: Gráfico de  $\omega \times n$  ilustrando a localização de  $n_x$ , a forma do crescimento e a saturação. Os parâmetros utilizados foram:  $N_c = 790$ ,  $r = 1$  e  $\delta = 1$ .

## 2.7 Hipóteses de Escala

Nesta seção proporemos as hipóteses de escala para todos os parâmetros presentes no modelo do poço de potencial dependente periodicamente do tempo.

Começaremos supondo que:

(i) Para  $n \ll n_x$ , o comportamento de  $\omega$  pode ser descrito como

$$\omega(n\delta^2, N_c, r, \delta) \propto [n\delta^2]^\beta, \quad (2.28)$$

onde  $\beta$  é um expoente crítico.

(ii) Para  $n \gg n_x$ ,  $\omega_{sat}$  é dado por

$$\omega_{sat}(n\delta^2, N_c, r, \delta) \propto N_c^{\alpha_1} r^{\alpha_2} \delta^{\alpha_3}, \quad (2.29)$$

onde  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  são expoentes críticos.

(iii) O número de iteração de *crossover*  $n_x$  é escrito como

$$n_x(n\delta^2, N_c, r, \delta) \propto N_c^{z_1} r^{z_2} \delta^{z_3}, \quad (2.30)$$

onde  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  também são expoentes críticos.

Após extensivas simulações numéricas, encontramos que  $\beta \cong 0.5$ .

Uma forma de encontrarmos os expoentes críticos é utilizando o formalismo de funções homogêneas generalizadas. Para isto, vamos supor o desvio da energia média pode ser escrito

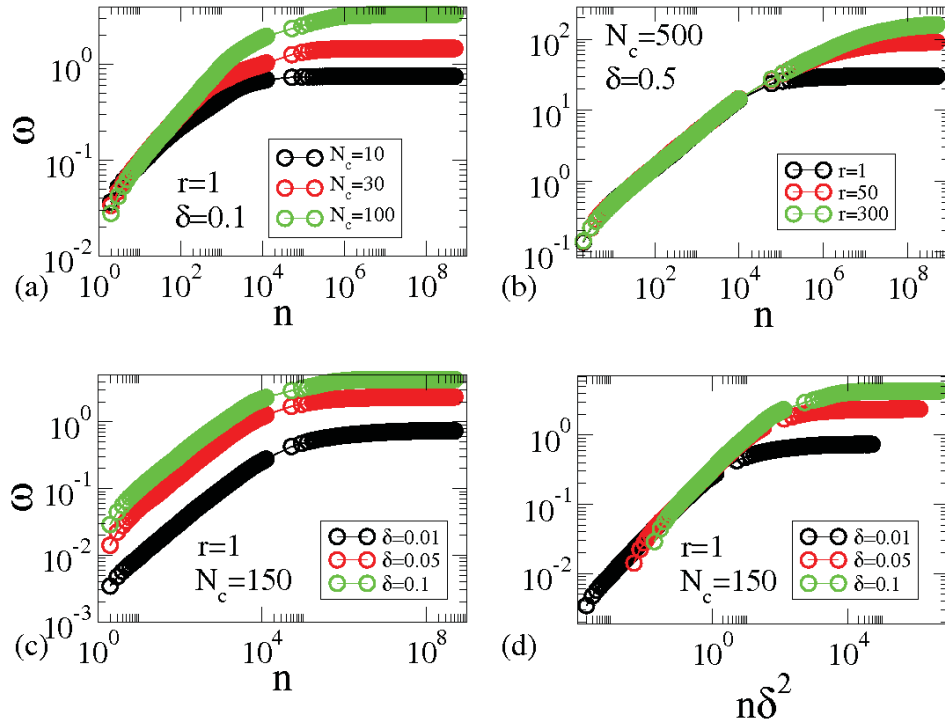


Figura 2.9: (a) Gráfico de  $\omega \times n$  para  $r = 1$ ,  $\delta = 0.1$  e:  $N_c = 10$ ,  $N_c = 30$  e  $N_c = 100$ ; (b)  $\omega \times n$  para  $N_c = 500$ ,  $\delta = 0.5$  e:  $r = 1$ ,  $r = 50$  e  $r = 300$ ; (c)  $\omega \times n$  para  $N_c = 150$ ,  $r = 1$  e:  $\delta = 0.01$ ,  $\delta = 0.05$  e  $\delta = 0.1$ . (d)  $\omega \times n\delta^2$  para os mesmos parâmetros do item (c).

como:

$$\omega(n\delta^2, N_c, r, \delta) = L\omega(L^{c_1}n\delta^2, L^{c_2}N_c, L^{c_3}r, L^{c_4}\delta), \quad (2.31)$$

onde  $L$  é o fator de escala e  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$  são expoentes característicos.

Se considerarmos o primeiro argumento de  $\omega$  na direita da Eq. (2.31) igual a 1 ( $L^{c_1}n\delta^2=1$ ), iremos obter

$$L = (n\delta^2)^{-1/c_1}, \quad (2.32)$$

onde igualamos a 1, uma vez que  $L$  é um fator de escala e pode assumir qualquer valor.

Inserindo esta expressão na função homogênea, obtemos

$$\omega(n\delta^2, N_c, r, \delta) = (n\delta^2)^{-1/c_1} \omega\left(1, (n\delta^2)^{-c_2/c_1} N_c, (n\delta^2)^{-c_3/c_1} r, (n\delta^2)^{-c_4/c_1} \delta\right) \quad (2.33)$$

onde podemos eliminar a parte constante do argumento de  $\omega$  supondo uma nova função  $\omega_1$  escrita como

$$\omega_1\left(\left((n\delta^2)^{-c_2/c_1} N_c, (n\delta^2)^{-c_3/c_1} r, (n\delta^2)^{-c_4/c_1} \delta\right)\right) = \omega\left(1, (n\delta^2)^{-c_2/c_1} N_c, (n\delta^2)^{-c_3/c_1} r, (n\delta^2)^{-c_4/c_1} \delta\right).$$



Supondo que  $\omega_1$  é constante para  $n \ll n_x$ , temos que

$$\omega(n\delta^2, N_c, r, \delta) \propto (n\delta^2)^{-1/a},$$

e comparando com a hipótese (i) dada na Eq. (2.28) obtemos que  $\beta = -1/c_1$ .

Agora considerando o segundo argumento de  $\omega$  na direita da Eq. (2.31) igual a 1 ( $L^{c_2} N_c = 1$ ) obtemos

$$L = N_c^{-1/c_2}. \quad (2.34)$$

Substituindo esta expressão em (2.31), temos

$$\omega(n\delta^2, N_c, r, \delta) = N_c^{-1/c_2} \omega(N_c^{-c_1/c_2} n\delta^2, 1, N_c^{-c_3/c_2} r, N_c^{-c_4/c_2} \delta), \quad (2.35)$$

ou ainda,

$$\omega(n\delta^2, N_c, r, \delta) = N_c^{-1/c_2} \omega_2(N_c^{-c_1/c_2} n\delta^2, N_c^{-c_3/c_2} r, N_c^{-c_4/c_2} \delta),$$

onde

$$\omega_2(N_c^{-c_1/c_2} n\delta^2, N_c^{-c_3/c_2} r, N_c^{-c_4/c_2} \delta) = \omega(N_c^{-c_1/c_2} n\delta^2, 1, N_c^{-c_3/c_2} r, N_c^{-c_4/c_2} \delta).$$

Supondo novamente que  $\omega_2$  é constante para  $n \gg n_x$ , podemos dizer que

$$\omega(n\delta^2, N_c, r, \delta) \propto N_c^{-1/c_2}.$$

Comparando com a hipótese (ii) dada na Eq. (2.29), concluímos que  $\alpha_1 = -1/c_2$  para  $\delta$  e  $r$  constantes.

Fazendo o terceiro argumento de  $\omega$  na direita da Eq. (2.31) igual a 1 ( $L^{c_3} r = 1$ ), obtemos

$$L = r^{-1/c_3}, \quad (2.36)$$

e substituindo em (2.31), temos

$$\omega(n\delta^2, N_c, r, \delta) = r^{-1/c_3} \omega(r^{-c_1/c_3} n\delta^2, r^{-c_2/c_3} N_c, 1, r^{-c_4/c_3} \delta), \quad (2.37)$$

que pode ser escrito como

$$\omega(n\delta^2, N_c, r, \delta) = r^{-1/c_3} \omega_3(r^{-c_1/c_3} n\delta^2, r^{-c_2/c_3} N_c, r^{-c_4/c_3} \delta),$$

onde

$$\omega_3(r^{-c_1/c_3} n\delta^2, r^{-c_2/c_3} N_c, r^{-c_4/c_3} \delta) = \omega(r^{-c_1/c_3} n\delta^2, r^{-c_2/c_3} N_c, 1, r^{-c_4/c_3} \delta).$$

Considerando  $\omega_3$  constante para  $n \gg n_x$ , temos que

$$\omega(n\delta^2, N_c, r, \delta) \propto r^{-1/c_3}.$$

e comparando com a hipótese (ii) dada na Eq. (2.29), concluímos que  $\alpha_2 = -1/c_3$  para  $N_c$  e  $\delta$  constantes.

Finalmente igualando a 1 o último argumento de  $\omega$  na direita da Eq. (2.31), temos

$$L = \delta^{-1/c_4}. \quad (2.38)$$

Substituindo em (2.31), temos

$$\omega(n\delta^2, N_c, r, \delta) = \delta^{-1/c_4} \omega(n\delta^{2-c_1/c_4}, \delta^{-c_2/c_4} N_c, \delta^{-c_3/c_4} N_c, 1), \quad (2.39)$$

ou reescrevendo em função de  $\omega_4$ , temos

$$\omega(n\delta^2, N_c, r, \delta) = \delta^{-1/c_4} \omega_4(n\delta^{2-c_1/c_4}, \delta^{-c_2/c_4} N_c, \delta^{-c_3/c_4} N_c),$$

onde

$$\omega_4(n\delta^{2-c_1/c_4}, \delta^{-c_2/c_4} N_c, \delta^{-c_3/c_4} N_c) = \omega(n\delta^{2-c_1/c_4}, \delta^{-c_2/c_4} N_c, \delta^{-c_3/c_4} N_c, 1).$$

Supondo  $\omega_4$  constante para  $n \gg n_x$ , obtemos

$$\omega(n\delta^2, N_c, r, \delta) \propto \delta^{-1/c_4}.$$

Comparando com a hipótese (ii) dada na Eq. (2.29), concluímos que  $\alpha_3 = -1/c_4$  para  $N_c$  e  $r$  constantes.

Temos 4 expressões para os fatores de escala  $L$ , e quando  $n = n_x$ , essas expressões devem ser todas iguais entre si. Comparando a Eq. (2.32) com a Eq. (2.34), concluímos que  $n = \delta^{-2} N_c^{c_1/c_2}$  ou

$$n \propto N_c^{c_1/c_2},$$

pois  $\delta$  e  $r$  são considerados constantes para este caso. Logo comparando a equação acima com a hipótese (iii) dada na Eq. (2.30), concluímos que

$$z_1 = \frac{c_1}{c_2} = \frac{-\frac{1}{c_2}}{-\frac{1}{c_1}} = \frac{\alpha_1}{\beta}.$$

Analogamente, comparando a Eq. (2.32) e com a Eq. (2.36), concluímos que  $n = \delta^{-2} r^{c_1/c_3}$  ou

$$n \propto r^{c_1/c_3},$$

pois  $N_c$  e  $\delta$  são constantes para este caso. Comparando a equação acima com a hipótese (iii) dada na Eq. (2.30), temos

$$z_2 = \frac{c_1}{c_3} = \frac{-\frac{1}{c_3}}{-\frac{1}{c_1}} = \frac{\alpha_2}{\beta}.$$

Finalmente, comparando a Eq. (2.32) com a Eq. (2.38), concluímos que  $n = \delta^{c_1/c_4-2}$  ou de maneira análoga,

$$n \propto \delta^{c_1/c_4-2},$$

e comparando com a hipótese (iii) dada na Eq. (2.30), concluímos que

$$z_3 = \frac{c_1}{c_4} - 2 = \frac{-\frac{1}{c_4}}{-\frac{1}{c_1}} - 2 = \frac{\alpha_3}{\beta} - 2.$$

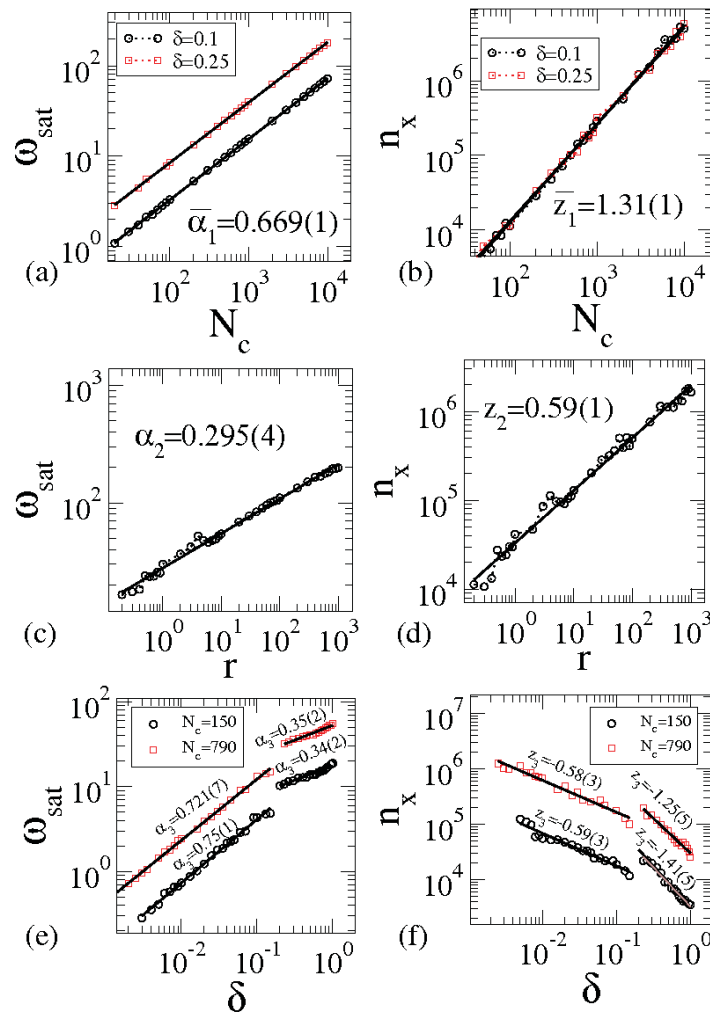


Figura 2.10: (a) Gráfico de  $\omega_{\text{sat}} \times N_c$ . (b) Crossover  $n_x$  como função de  $N_c$ . Os parâmetros de controle são: círculos pretos  $r = 1$ , e  $\delta = 0.1$ ; círculos vermelhos  $r = 1$  e  $\delta = 0.25$ . (c) Gráfico de  $\omega_{\text{sat}} \times r$ ; (d)  $n_x$  como função de  $r$ . (e) Gráfico de  $\omega_{\text{sat}}$  como função de  $\delta$ . (f)  $n_x \times \delta$ . Os parâmetros de controle usados são  $r = 1$  e  $N_c = 150$ ,  $N_c = 790$  e  $N_c = 1590$ .

O melhor ajuste para as curvas mostradas na Fig. 2.10(a,b) são obtidos usando leis de

potência, com isso, obtemos  $\alpha_1 = 0.669(1)$  e  $z_1 = 1.31(1)$ . Usando o mesmo procedimento para a variável  $r$ , como mostrado na Fig. 2.10(c,d), obtemos  $\alpha_2 = 0.295(4)$  and  $z_2 = 0.59(1)$ . Finalmente, encontramos os expoentes críticos como função do parâmetro  $\delta$  (Fig. 2.10(e,f)). Vemos que existem dois diferentes conjuntos de valores para  $\alpha_3$  e  $z_3$ . A explicação para isto surge do fato de termos destruições de curvas invariantes do tipo spanning que separavam regiões de mares caóticos (como mostrado na Fig. 2.7(a,b) e discutido anteriormente). Depois das destruições das curvas invariantes spanning os mares de caos se juntam, e com isso, os valores dos expoentes críticos mudam substancialmente. Temos que, antes da destruição  $\delta \lesssim 0.2$ , os dois conjuntos de expoentes críticos obtidos são  $\alpha_3 = 0.721(7)$  e  $z_3 = -0.58(3)$  para  $N_c = 790$  e  $\alpha_3 = 0.75(1)$  e  $z_3 = -0.59(3)$  para  $N_c = 150$ . Depois das destruições de curvas spanning, ou seja,  $\delta \gtrsim 0.2$ , os expoentes obtidos são  $\alpha_3 = 0.35(2)$  e  $z_3 = -1.25(5)$  para  $N_c = 790$  e  $\alpha_3 = 0.34(2)$  e  $z_3 = -1.41(5)$  para  $N_c = 150$ .

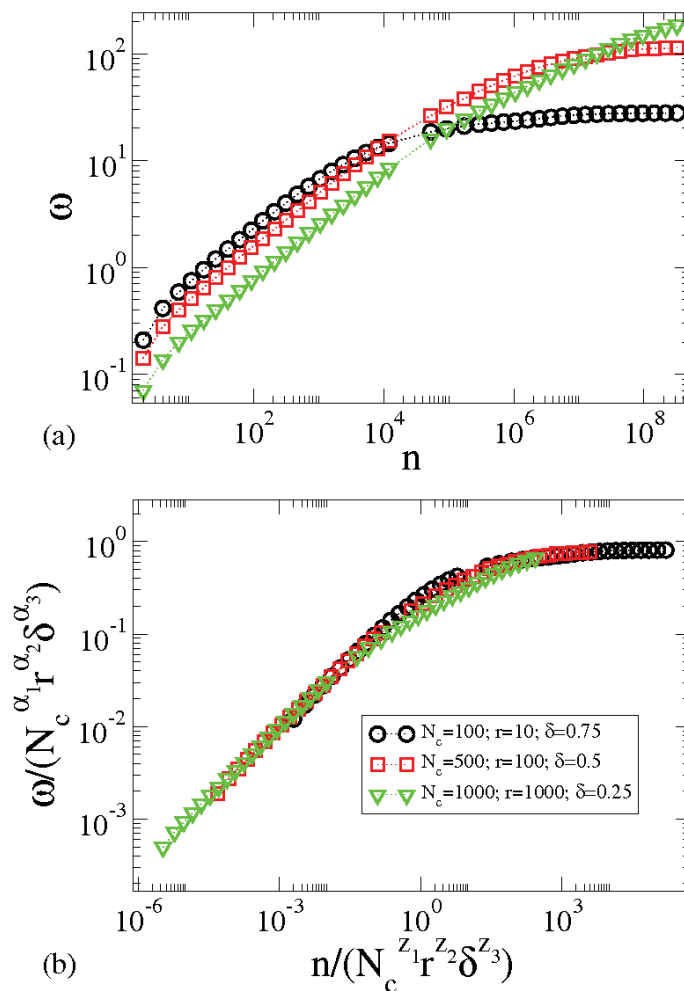


Figura 2.11: (a) Três curvas de  $\omega$  em função do número de iteradas  $n$ ; (b) Colapso das três curvas em uma única curva universal a partir da reescala dos eixos;

A reescala que leva em conta todos os parâmetros de controle é obtida quando dividimos o eixo de  $\omega$  por  $N_c^{\alpha_1} r^{\alpha_2} \delta^{\alpha_3}$  e o eixo de  $n$  por  $N_c^{z_1} r^{z_2} \delta^{z_3}$ . Na Fig. 2.11(a) temos o gráfico de três curvas de  $\omega$  em função de  $n$  utilizando diferentes parâmetros de controle, conforme ilustrados na

figura. Já na figura 2.11(b) ao fazer uma reescala nos eixos, vemos que as três curvas colapsam em uma única curva universal.

## 2.8 Classes de Universalidade

A transição que nós consideramos neste trabalho, descreve o comportamento das quantidades médias ao longo do mar caótico como função dos parâmetros de controle. Obtendo os expoentes críticos, nós podemos reescalar o sistema convenientemente, e após a reescala, todas as quantidades se tornam independentes de escala. O conjunto de expoentes críticos define qual classe de universalidade o sistema pertence. Para ilustrar dois casos, vamos considerar os seguintes exemplos: (i) Modelo Fermi-Ulam [23] e guia de ondas periodicamente corrugado [24]; (ii) Um mapa bidimensional geral que preserva a área [25].

Para o caso (i), o modelo Fermi-Ulam (uma partícula clássica confinada que colide entre duas paredes; uma delas é fixa e a outra move-se periodicamente no tempo - as colisões são completamente elásticas e nenhuma força atua sobre o sistema) é descrito via um mapa bidimensional não linear, que preserva a área no espaço de fases. Os expoentes críticos obtidos para a velocidade média ao longo do mar caótico foram:  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.5$  e  $z = -1$ . O modelo do guia de ondas corrugado considera a descrição de um feixe de luz se movendo entre dois espelhos onde um deles é liso e o outro é periodicamente corrugado. O mapeamento descreve a posição do feixe de luz em cada reflexão com o espelho e a posição angular da trajetória do feixe de luz. Os expoentes críticos obtidos são os mesmos do modelo Fermi-Ulam, e apesar de completamente diferentes um do outro, próximo da transição, os mares caóticos para ambos os modelos têm qualitativamente o mesmo comportamento geral. Então esses dois modelos pertencem a mesma classe de universalidade (próximo a transição). Uma vez que os expoentes críticos que obtivemos neste trabalho são diferentes dos casos discutidos acima, podemos concluir que os modelos pertencem a diferentes classes de universalidade.

Para o caso (ii), podemos mostrar que um mapeamento geral é escrito como

$$T : \begin{cases} x_{n+1} = \left[ x_n + \frac{a}{y_{n+1}^\gamma} \right] \text{ mod}(1) \\ y_{n+1} = |y_n - b \sin(2\pi x_n)| \end{cases}, \quad (2.40)$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $\gamma$  são parâmetros de controle. Mantendo fixo o parâmetro  $\gamma = 1/2$  no mapa (2.40), nós notamos que os expoentes críticos  $\alpha$  e  $z$  obtidos por Oliveira [25] são praticamente os mesmos que nós encontramos, desde que sejam considerados os intervalos de erros das medidas. Portanto podemos dizer que os dois modelos pertencem a mesma classe de universalidade próximo a transição de fase de integrável para não integrável.

## Capítulo 3

# BARREIRA DE POTENCIAL DEPENDENTE PERIODICAMENTE DO TEMPO

### 3.1 Resumo

Estudaremos nesta seção a dinâmica de uma partícula clássica confinada em uma caixa de potencial infinito nas bordas e contendo uma barreira de potencial dependente periodicamente do tempo. Construiremos o mapa, assim como o espaço de fases que mostraremos ser misto. Usaremos o expoente de Lyapunov para caracterizar órbitas caóticas e discutiremos uma relação de escala no modelo.

### 3.2 O Modelo

O modelo consiste de uma partícula clássica confinada no interior de uma caixa de potenciais infinitos na borda contendo uma barreira de potencial no seu interior. A Hamiltoniana do sistema pode ser escrita como  $H(x, p, t) = p^2/2m + V(x, t)$ , onde  $V(x, t)$  é dado por  $V(x, t) = V_0(x) + V_1(x, t)$ . O potencial  $V_0(x, t)$  é definido como

$$V_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < x < l \text{ e } (l + b) < x < (l + b + L); \\ V_0, & \text{se } l \leq x \leq (l + b) \\ \infty, & \text{se } x \leq 0 \text{ e } x \geq (l + b + L) \end{cases}, \quad (3.1)$$

e  $V_1(x, t)$  é escrito como

$$V_1(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < l \text{ e } x > (l + b) \\ V_1 \sin(\omega t), & \text{se } l \leq x \leq (l + b) \end{cases}, \quad (3.2)$$

onde  $V_0$  é constante e nos dá a altura da barreira de potencial estática e  $V_1$  é a amplitude de oscilação na região  $l \leq x \leq (l + b)$ . Na figura 3.1 vemos um esquema do potencial  $V(x, t)$  considerado. Podemos ver que  $l$  é a largura do poço I,  $b$  é a largura da barreira e  $L$  a largura do poço II. Vale ressaltar que analisaremos apenas o caso em que  $V_1 < V_0$ , caso contrário, poderia-se ter em princípio um poço de potencial para alguns intervalos de tempo, o que acarretaria em uma mudança na forma com que o mapeamento foi escrito.

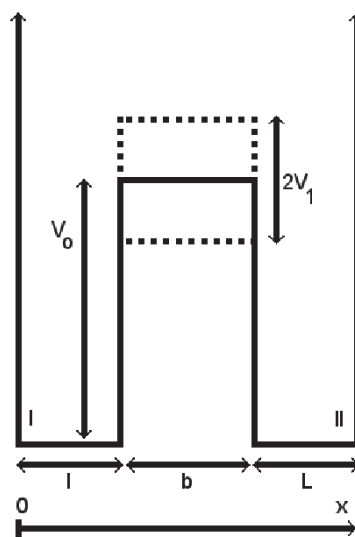


Figura 3.1: Esquema ilustrativo do potencial  $V(x, t)$ .

Seguiremos um procedimento parecido com o encontrado em [7]. Supondo que a partícula inicia seu movimento em  $x = 0$  em um tempo  $t_n$  com energia inicial  $E_n = K_n = mv_n^2 > V_0 + V_1$ . A partícula irá viajar com velocidade constante até atingir a posição  $x = l$ , onde a velocidade da partícula é constante (pois não há forças atuando no sistema) e igual a  $v_n = \sqrt{2K_n/m}$ , onde o tempo para percorrer a distância  $l$  é  $\Delta t'_n = l/|v_n|$ . Ao atingir  $x = l$ , duas condições podem ocorrer: (i) A partícula não tem energia suficiente para sair do poço I, e retorna com velocidade de mesmo módulo mas sentido contrário ou (ii) a partícula tem energia suficiente e consegue sair do poço I.

Se a condição (i) é verificada, temos que a partícula sofre uma colisão elástica em  $x = l$  e volta em direção a  $x = 0$  com mesma velocidade  $v'_n$ . Portanto, o tempo para retornar à posição inicial é  $t_n + 2\Delta t'_n$ . Se a condição (ii) é verificada, temos de considerar o mapa  $T_A$ , que pode ser escrito como

$$T_A : \begin{cases} e_{n+1} = e_n \\ t_{n+1} = t_n + 2l/\sqrt{2E_{n+1}/m} \end{cases}, \quad (3.3)$$

onde  $t_{n+1}$  é o tempo para percorrer duas vezes a largura  $l$  do poço I.

Caso a condição (ii) seja satisfeita, a partícula terá energia suficiente para sair do poço I, onde a energia instantes antes de atingir  $x = l$  era  $E'_n = K_n$ . Ao sair do poço I, a partícula sofre uma mudança abrupta na energia cinética  $K'_n = E'_n - [V_0 + V_1 \sin(t_n + \Delta t'_n)]$ . Ela também viaja a distância  $b$  em um intervalo de tempo  $\Delta t''_n = b/|v'_n|$  com velocidade  $v'_n = \sqrt{2K'_n/m}$  até atingir  $x = l + b$ , onde a energia total nesse ponto é  $E''_n = K'_n + V_0 + V_1 \sin(t_n + \Delta t'_n + \Delta t''_n)$ . Ao deixar a barreira oscilante, há uma mudança abrupta na energia cinética, e como sabemos que a energia potencial no poço II é nula, temos que toda a energia da partícula se transformará em cinética, portanto,  $K''_n = E''_n$ . No poço II, a velocidade é  $v''_n = \sqrt{2K''_n/m}$  e o tempo para percorrer a distância  $L$  é  $\Delta t'''_n = L/|v''_n|$ . Em  $x = l + b + L$  a partícula sofre uma colisão elástica com o potencial infinito e retorna até  $x = l$ , onde a energia total é  $E'''_n = E''_n - 2[V_0 + V_1 \sin(t_n + \Delta t'_n + \Delta t''_n + \Delta t'''_n)]$ . Nesta posição, duas situações podem ocorrer: (iii) A partícula não tem energia suficiente para sair do poço II, com isso, sofre uma reflexão, percorre duas vezes a distância  $L$  e retorna a posição  $x = l + b$  ou (iv) A partícula tem energia suficiente para sair do poço II. De acordo com o que foi afirmado, podemos dizer que a partícula irá escapar caso  $E'''_n > V_0 + V_1 \sin(t'_n + \Delta t''_n + i\Delta t'''_n)$ , onde  $i$  é o menor inteiro maior que 1 que faz com que essa relação seja verdadeira. Vale ressaltar que se  $i = 1$ , a partícula não sofreu nenhuma reflexão no poço II, porém se  $i = 2$  a partícula teve 1 reflexão sucessiva, ou seja, o número de reflexões sucessivas é  $i - 1$ .

Se a condição (iv) é satisfeita, a partícula irá sofrer uma mudança na energia cinética ao entrar na barreira móvel, logo  $K'''_n = E''_n - [V_0 + V_1 \sin(t'_n + \Delta t''_n + i\Delta t'''_n)]$ . O tempo para percorrer a distância  $b$  será  $\Delta t''''_n = b/|v'''_n|$  e  $v'''_n = \sqrt{2K'''_n/m}$ . Ao atingir  $x = l$ , a energia total se transforma em cinética (pois o potencial é nulo no poço I). A partícula irá percorrer a distância  $l$  até atingir  $x = 0$ . Portanto, o mapa pode ser escrito da seguinte forma

$$T_B : \begin{cases} E_{n+1} = E_n + V_1[-\sin(t_n + \Delta t'_n) + \sin(t_n + \Delta t'_n + \Delta t''_n) - \\ - \sin(t_n + \Delta t'_n + \Delta t''_n + 2i\Delta t'''_n) + \\ + \sin(t_n + \Delta t'_n + \Delta t''_n + 2i\Delta t'''_n + \Delta t''''_n)] \\ t_{n+1} = t_n + \Delta t_n + \Delta t'_n + 2i\Delta t'''_n + \Delta t''''_n + l/\sqrt{2E_{n+1}/m} \end{cases} \quad (3.4)$$

Consideraremos as seguintes variáveis adimensionais:  $r = V_1/V_0$ ;  $e_n = E_n/V_0$ ;  $\phi_n = (2\pi/\tau)t_n$ ;  $M = l/w\tau$ ,  $w = \sqrt{2V_0/m}$ . Aqui  $\tau$  é o período de oscilação da barreira de potencial, e o produto  $w\tau$  nos indica a distância que a partícula viaja com velocidade  $w$  em um tempo  $\tau$ . Em outras palavras,  $M$  nos fornece o número de oscilações que a barreira oscilante completa depois de iniciar seu movimento em  $x = 0$  (com energia cinética  $K = V_0$ ) até o instante em que ela atinge o lado esquerdo da barreira de potencial localizada em  $x = l$ . Reescrevendo os dois mapas usando as variáveis adimensionais propostas, iremos obter

$$T_A : \begin{cases} e_{n+1} = e_n \\ \phi_{n+1} = [\phi_n + 4\pi M/\sqrt{e_{n+1}}] \pmod{2\pi} \end{cases}, \quad (3.5)$$



e o mapa  $T_B$  é escrito como

$$T_B : \begin{cases} e_{n+1} = e_n + r[-\sin(\Delta\phi_a) + \sin(\Delta\phi_b) - \sin(\Delta\phi_c) + \sin(\Delta\phi_d)] \\ \phi_{n+1} = [\Delta\phi_d + 2\pi M/\sqrt{e_{n+1}}] \text{ mod}(2\pi) \end{cases}, \quad (3.6)$$

onde as variáveis auxiliares são

$$\begin{aligned} \Delta\phi_a &= \phi_n + \frac{2\pi M}{\sqrt{e_n}}, & \Delta\phi_b &= \Delta\phi_a + 2\pi M \frac{b}{l} \frac{1}{\sqrt{e'_n}}, \\ \Delta\phi_c &= \Delta\phi_b + 4\pi M i \frac{L}{l} \frac{1}{\sqrt{e''_n}}, & \Delta\phi_d &= \Delta\phi_c + 2\pi M \frac{b}{l} \frac{1}{\sqrt{e'''_n}}, \end{aligned}$$

e as expressões para as novas energias  $e'_n$ ,  $e''_n$  e  $e'''_n$  são dadas por

$$\begin{aligned} e'_n &= e_n - 1 - r \sin(\Delta\phi_a), \\ e''_n &= e'_n + 1 + r \sin(\Delta\phi_b), \\ e'''_n &= e''_n - 1 - r \sin(\Delta\phi_c). \end{aligned}$$

onde  $i$  é o menor inteiro que torna verdadeira a expressão

$$e''_n > 1 + r \sin\left(\Delta\phi_b + i \frac{4\pi M L}{\sqrt{e''_n} l}\right).$$

Em nossas simulações iremos considerar  $u = b/l = L/l$ .

Na Fig. 3.2 é mostrado o espaço de fase para o modelo da barreira de potencial dependente periodicamente do tempo. Podemos ver que o espaço de fase é misto, pois contém ilhas KAM, um denso mar de caos e curvas invariantes do tipo spanning que separam diferentes regiões caóticas. O sistema preserva a área no espaço de fase pois a determinante da matriz Jacobiana é igual a 1 (Ver anexo 2 mostrando a matriz Jacobiana e o cálculo da determinante).

Na Fig. 3.3(a) é mostrado o comportamento de  $\lambda \times n$  para cinco diferentes condições iniciais tomadas na região caótica de baixa energia. Vemos claramente que após uma flutuação inicial, os expoentes tendem a saturar em valores muito próximos uns dos outros, com isso, podemos calcular o valor do expoente de Lyapunov médio  $\bar{\lambda}$ . Para gerar estas curvas, usamos  $M = 10$ ,  $r = 1$ ,  $u = 10$  e o número máximo de iteradas igual a  $5 \times 10^8$ .

Na Fig. 3.3(b) temos o comportamento do expoente de Lyapunov médio  $\bar{\lambda}$  em função do parâmetro de controle  $M$ , onde fora usado  $r = 0.5$  e  $u = 1$ . Como  $M$  mede indiretamente o número de oscilações que a barreira de potencial realiza em certo tempo, ao aumentarmos o valor de  $M$ , estamos aumentando a estocaticidade do sistema, o que é evidenciado pelo aumento do expoente de Lyapunov.

Ao analisar a Fig. 3.3(c), sabemos que  $r = V_1/V_0$ , e ao aumentarmos o valor de  $r$  estaremos aumentando o valor de  $V_1$  diante de  $V_0$ , e isto tende a aumentar o valor do expoente de Lyapunov.

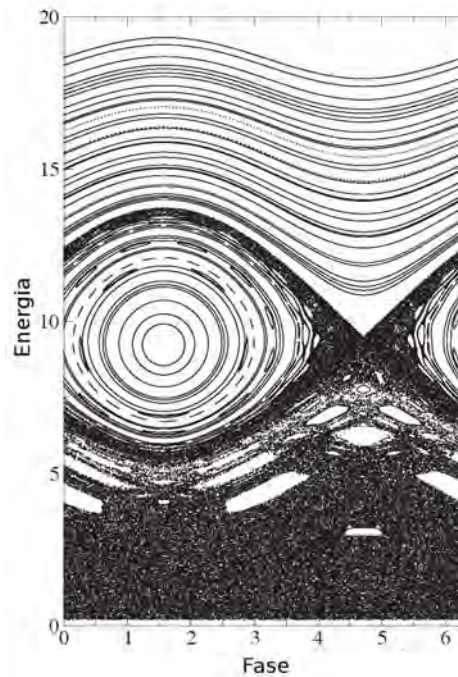


Figura 3.2: Espaço de fase para o modelo da barreira de potencial dependente periodicamente do tempo. Os parâmetros de controle usados foram  $M = 1$ ,  $r = 0,8$  e  $u = 1$ .

Em  $r \cong 10^{-1}$  vemos uma queda abrupta no valor do expoente de Lyapunov, onde isto é causado pela destruição de curvas invariantes e junções de mares de caos que antes estavam separados.

Para a Fig. 3.3(d) é mostrado o comportamento do expoente de Lyapunov médio em função de  $u$ . Vemos que há uma grande flutuação nos valores de  $\bar{\lambda}$  em função de  $u$ . Esta variação não está totalmente compreendida.

### 3.3 Hipóteses de escala

Vamos nesta seção discutir algumas propriedades de escala para o desvio da energia média. Vemos na Fig. 3.5(a) o gráfico de  $\omega \times n$  para três diferentes valores do parâmetro  $M$ . Inicialmente as curvas iniciam o crescimento juntas e depois saturam em pontos diferentes. Isto é diferente do que ocorre na Fig. 3.5(b), onde ao variarmos apenas  $r$ , as três curvas iniciam o crescimento em pontos distintos. Para sanar esta diferença de crescimento inicial fazemos a transformação  $n \rightarrow nr^2$  (ver Fig. 3.5(c)). Finalmente variando o parâmetro  $u$ , vemos que as três curvas iniciam o crescimento juntas e saturam em pontos diferentes.

Vamos propor as seguintes hipóteses de escala:

- (i) Para  $n \ll n_x$ , o comportamento de  $\omega$  pode ser descrito como

$$\omega(nr^2, M, r, u) \propto [nr^2]^\beta, \quad (3.7)$$

onde  $\beta$  é um expoente crítico e de acordo com as nossas simulações  $\beta \cong 0,5$ ;

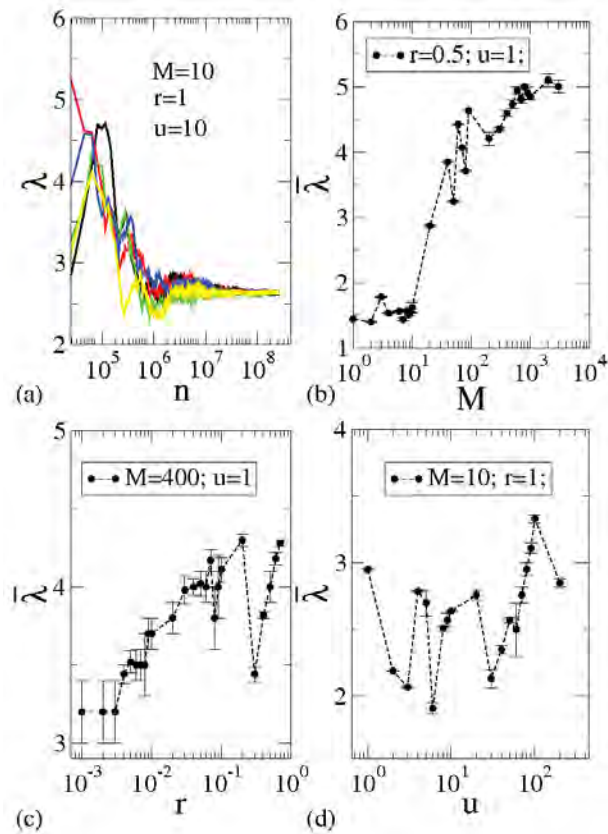


Figura 3.3: (a) Evolução temporal do expoente de Lyapunov positivo para cinco diferentes condições iniciais iteradas  $5 \times 10^8$  vezes. Os parâmetros de controle usados foram  $M = 10$ ;  $r = 1$  e  $u = 10$ ; (b)  $\bar{\lambda} \times M$  para os valores fixos de  $r = 0.5$  e  $u = 1$ ; (c)  $\bar{\lambda} \times r$  para  $M = 400$  e  $u = 1$ ; (d) Gráfico de  $\bar{\lambda} \times u$  para  $M = 10$  e  $r = 1$ .

- (ii) Para  $n \gg n_x$ ,  $\omega_{\text{sat}}$  é dado por

$$\omega_{\text{sat}}(nr^2, M, r, u) \propto M^{\alpha_1} r^{\alpha_2} u^{\alpha_3}, \quad (3.8)$$

onde  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  são expoentes críticos;

- (iii) O número de iteração de crossover  $n_x$  é escrito como

$$n_x(nr^2, M, r, u) \propto M^{z_1} r^{z_2} u^{z_3}, \quad (3.9)$$

onde  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  também são expoentes críticos.

Na Fig. 3.6(a) temos o gráfico de  $\omega_{\text{sat}}$  em função do parâmetro  $M$ , onde a partir de um ajuste em lei de potência podemos obter o expoente  $\alpha_1 = 0.648(4)$ . Já na Fig. 3.6(b) temos um gráfico do número de iteração de crossover  $n_x$  em função de  $M$ , e a partir de um novo ajuste em lei de potência obtemos o expoente crítico  $z_1 = 1.25(1)$ . Procedimento semelhante fora feito para os parâmetros  $r$  e  $u$  (3.6(c,d) e Fig. 3.6(e,f) respectivamente), onde os expoentes críticos encontrados foram:  $\alpha_2 = 0.724(8)$ ,  $z_2 = 0.57(1)$ ,  $\alpha_3 = 0.575(6)$  e  $z_3 = 1.12(1)$ .

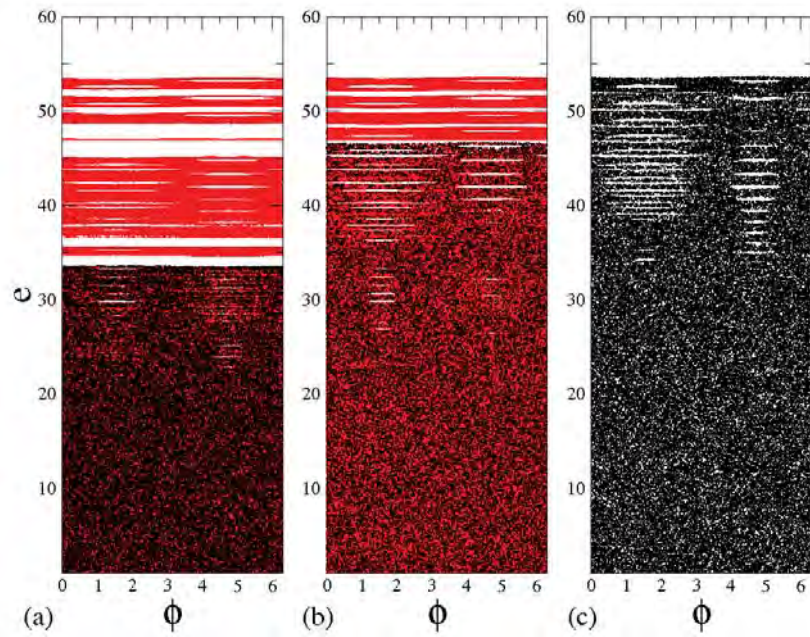


Figura 3.4: Em preto temos órbitas iteradas a partir da região de baixa energia e em vermelho espaços de fases para: (a)  $r = 0, 1$ , (b)  $r = 0, 14$  e (c)  $r = 0, 2$ . Os parâmetros restantes são fixos e iguais a  $M = 400$  e  $u = 1$

A Fig. 3.7(a) mostra o gráfico de três curvas de  $\omega$  em função do parâmetro  $n$  para diferentes parâmetros de controle  $M$ ,  $r$  e  $u$  e a Fig. 3.7(b) mostra novamente as três curvas, mas os eixos foram reescalados adequadamente. Vemos que as três curvas colapsam bem em uma única curva universal, confirmando uma invariância de escala para o mar de caos.

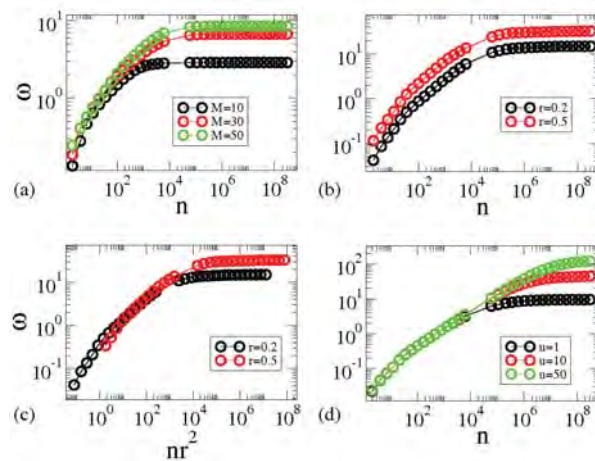


Figura 3.5: (a) Gráfico de  $\omega \times n$  para três curvas, onde variamos apenas o parâmetro  $M$  e deixamos constantes os outros parâmetros ( $r = 0.5$  e  $u = 1$ ); (b)  $\omega \times n$  para três valores  $r$ , onde deixamos constantes os valores  $M = 400$  e  $u = 1$ ; (c) Curva onde o eixo  $n$  mostrado em (b) foi multiplicado por  $r^2$ . (d)  $\omega \times n$  para três valores  $u$ . Para gerar esta curva fizemos  $M = 400$  e  $r = 0.1$ ;

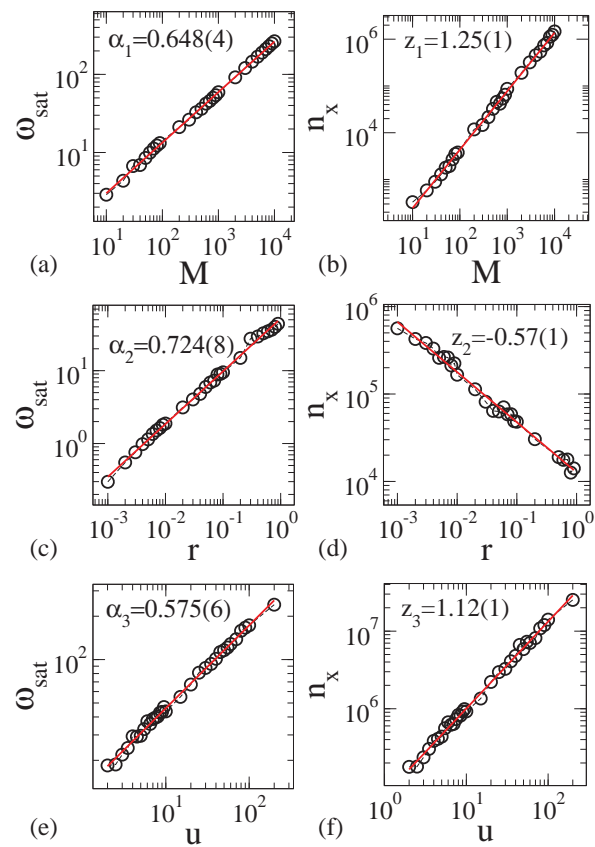


Figura 3.6: (a)  $\omega_{sat} \times M$  para  $r = 0.5$ ,  $u = 1$  e  $u = 1$ ; (b)  $N_x \times M$  para  $r = 0.5$  e  $u = 1$ ; (c)  $\omega_{sat} \times r$  para  $M = 400$  e  $u = 1$ ; (d)  $N_x \times r$  para  $M = 400$  e  $u = 1$ ; (e)  $\omega_{sat} \times u$  for  $r = 0.1$  and  $M = 400$ ; (f)  $N_x \times r$  para  $r = 0.1$  e  $M = 400$ ;

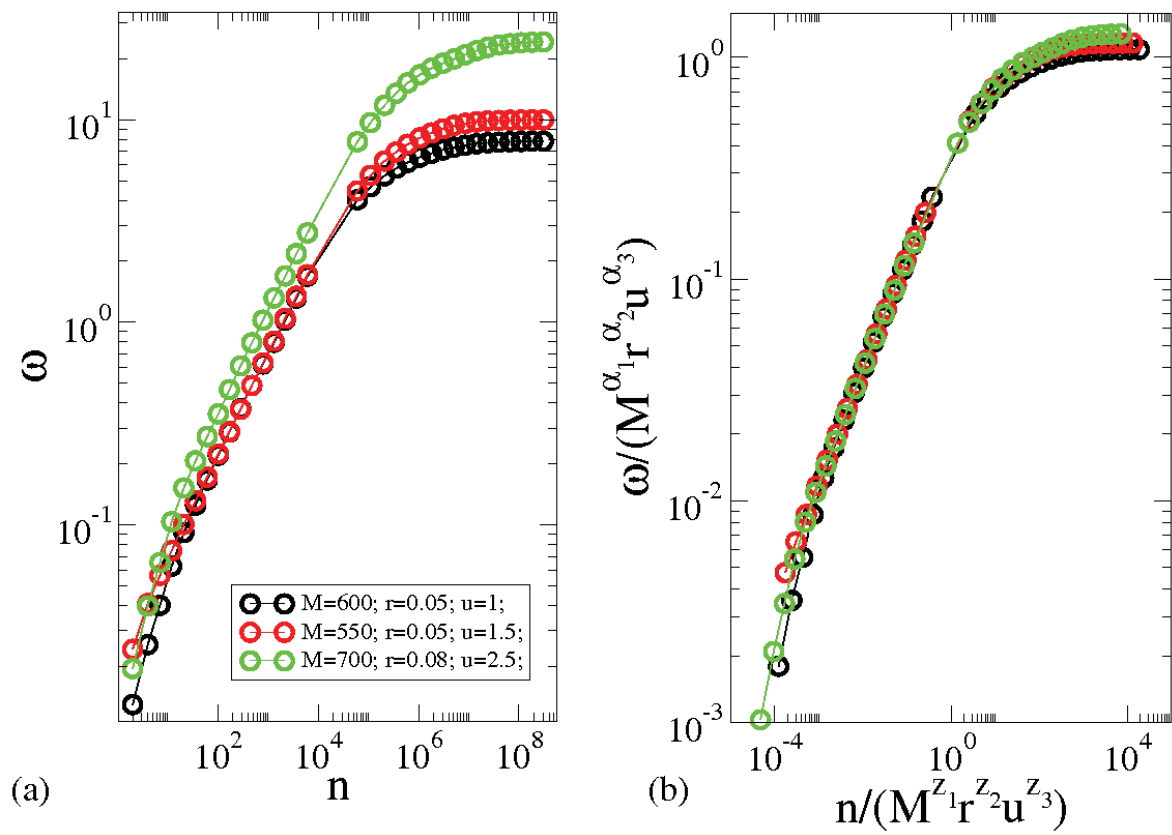


Figura 3.7: Gráfico de três curvas de  $\omega \times n$  para diferentes parâmetros de controle  $M$ ,  $r$  e  $u$ ; (b) Colapso de todas as curvas mostradas em (a) em uma única curva universal após uma reescala apropriada dos eixos.



## Capítulo 4

# CONCLUSÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

Nesta dissertação, estudamos os modelos do poço e barreira de potencial dependentes periodicamente do tempo. Em ambos os casos, a dependência temporal foi introduzida através de uma função seno, e do modo que os mapas foram construídos, a partícula podia ganhar ou perder energia de acordo com a fase do potencial móvel. Em alguns casos, a partícula ficava presa até que tivesse energia suficiente para escapar da barreira ou do poço. Estudamos os comportamentos e propriedades dos sistemas utilizando o formalismo de sistemas dinâmicos discretos. Os modelos foram descritos por mapeamentos discretos e investigados analítica e numericamente.

No modelo do poço de potencial dependente do tempo, encontramos um espaço de fases com estrutura mista, constituída de Ilhas KAM, envoltas por mares caóticos e curvas invariantes spanning, cuja principal função é limitar o ganho de energia da partícula. O mar de caos da região abaixo da primeira curva invariante foi caracterizado por um expoente de Lyapunov positivo, que atingiu boa convergência para longas iterações. Este modelo apresenta determinante da matriz Jacobiana igual a 1, com isso, podemos afirmar que o mapa preserva a área do espaço de fases. Os pontos fixos de período 1 foram obtidos e analisados de forma numérica e analítica. Também obtemos expoentes críticos ao estudar o comportamento do desvio da energia média. Usando estes coeficientes, propusemos hipóteses de escala e usando uma função homogênea generalizada, mostramos que é possível colapsar todas as curvas de  $\omega$  em uma única curva universal.

No modelo da barreira de potencial dependente periodicamente do tempo, vemos que o espaço de fases também é misto, contendo mares de caos, curvas invariantes do tipo spanning e ilhas KAM. O mar de caos da região de baixa energia foi caracterizado pelo expoente de Lyapunov positivo. Assim como no poço de potencial, a determinante da matriz Jacobiana é igual a 1. Estudamos o comportamento de  $\omega$  em função do número de iteradas e propusemos hipóteses de escala. Mostramos que a partir de uma reescala apropriada dos eixos, é possível

colapsar todas as curvas de  $\omega$  em uma única curva universal.

Em continuidade aos nossos trabalhos, esperamos estudar o modelo do duplo poço de potencial dependente periodicamente do tempo. Teremos com isso, dois potenciais que necessariamente não precisam estar em fase.



## Capítulo 5

# APÊNDICE - A - Cálculo da matriz Jacobiana para o poço de potencial

Vamos agora calcular a matriz Jacobiana, que é a matriz cujos coeficientes são dados pelas derivadas parciais em relação às equações do mapeamento. Esta matriz é escrita como

$$J_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial e_{n+1}}{\partial e_n} & \frac{\partial e_{n+1}}{\partial \phi_n} \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial e_n} & \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} \end{pmatrix}.$$

Para o cálculo dos coeficientes da matriz Jacobiana, precisamos levar em conta o mapeamento descrito em (2.2), com isso, obtemos

$$\frac{\partial e_{n+1}}{\partial e_n} = 1 - \delta \sin(\phi_n + i\Delta\phi_a) i \frac{\partial \Delta\phi_a}{\partial e_n},$$

$$\frac{\partial e_{n+1}}{\partial \phi_n} = \delta \left\{ -\sin(\phi_n + i\Delta\phi_a) \left[ 1 + i \frac{\partial \Delta\phi_a}{\partial \phi_n} \right] + \sin \phi_n \right\},$$

$$\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial e_n} = i \frac{\partial \Delta\phi_a}{\partial e_n} + \frac{\partial \Delta\phi_b}{\partial e_n}, \quad \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1 + i \frac{\partial \Delta\phi_a}{\partial \phi_n} + \frac{\partial \Delta\phi_b}{\partial \phi_n},$$

onde

$$\frac{\partial \phi_a}{\partial e_n} = -\frac{\pi N_c}{(e_n - \delta \cos \phi_n)^{3/2}}, \quad \frac{\partial \phi_a}{\partial \phi_n} = -\frac{\pi N_c \delta \sin \phi_n}{(e_n - \delta \cos \phi_n)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial \phi_b}{\partial e_n} = -\frac{\pi N_c r}{(e_{n+1} - 1)^{3/2}} \frac{\partial e_{n+1}}{\partial \delta e_n}, \quad \frac{\partial \phi_b}{\partial \phi_n} = -\frac{\pi N_c r}{(e_{n+1} - 1)^{3/2}} \frac{\partial e_{n+1}}{\partial \delta \phi_n}.$$

Podemos também calcular a determinante da matriz Jacobiana, encontrando para este o valor  $\det(J) = 1$ , o que significa que o mapa preserva a área no espaço de fases.

## Capítulo 6

# APÊNDICE - B - Cálculo da matriz Jacobiana para a barreira de potencial

Sendo  $J_A$  e  $J_B$  as matrizes Jacobiana relacionadas aos mapas  $T_A$  e  $T_B$ , respectivamente, podemos escrever

$$J_A = \begin{pmatrix} j_{11}^A & j_{12}^A \\ j_{21}^A & j_{22}^A \end{pmatrix}, \quad J_B = \begin{pmatrix} j_{11}^B & j_{12}^B \\ j_{21}^B & j_{22}^B \end{pmatrix},$$

onde os  $j_{ij}^A$  e  $j_{ij}^B$  são respectivamente os elementos da Matriz Jacobiana dos mapas  $T_A$  e  $T_B$  para  $i$  e  $j$  iguais a 1 ou 2.

Realizando os cálculos, encontramos que

$$j_{11}^A = \frac{\partial e_{n+1}}{\partial e_n} = 1, \quad j_{12}^A = \frac{\partial e_{n+1}}{\partial \phi_n} = 0,$$

$$j_{21}^A = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial e_n} = -\frac{2\pi M}{e_{n+1}^{3/2}}, \quad j_{22}^A = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1,$$

$$j_{11}^B = \frac{\partial e_{n+1}}{\partial e_n} = 1 - r \left[ \cos(\Delta\phi_a) \frac{\partial \Delta\phi_a}{\partial e_n} - \cos(\Delta\phi_b) \frac{\partial \Delta\phi_b}{\partial e_n} + \cos(\Delta\phi_c) \frac{\partial \Delta\phi_c}{\partial e_n} - \cos(\Delta\phi_d) \frac{\partial \Delta\phi_d}{\partial e_n} \right],$$

$$j_{12}^B = \frac{\partial e_{n+1}}{\partial \phi_n} = r \left[ -\cos(\Delta\phi_a) \frac{\partial \Delta\phi_a}{\partial \phi_n} + \cos(\Delta\phi_b) \frac{\partial \Delta\phi_b}{\partial \phi_n} - \cos(\Delta\phi_c) \frac{\partial \Delta\phi_c}{\partial \phi_n} + \cos(\Delta\phi_d) \frac{\partial \Delta\phi_d}{\partial \phi_n} \right],$$

$$j_{21}^B = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial e_n} = \frac{\partial \Delta\phi_d}{\partial e_n} - \frac{\pi M}{e_{n+1}^{3/2}} \frac{\partial e_{n+1}}{\partial e_n}, \quad j_{22}^B = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1 + \frac{\partial \Delta\phi_d}{\partial \phi_n} - \frac{\pi M}{e_{n+1}^{3/2}} \frac{\partial e_{n+1}}{\partial \phi_n},$$

onde as derivadas parciais que restam são

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \phi_a}{\partial e_n} &= -\frac{\pi M}{e_n^{3/2}}, & \frac{\partial \Delta \phi_b}{\partial e_n} &= \frac{\partial \Delta \phi_a}{\partial e_n} - \pi M \frac{b}{l} \frac{1}{e_n^{3/2}} \frac{\partial e'_n}{\partial e_n}, \\ \frac{\partial e'_n}{\partial e_n} &= 1 - r \cos(\Delta \phi_a) \frac{\partial \Delta \phi_a}{\partial e_n}, & \frac{\partial \Delta \phi_c}{\partial e_n} &= \frac{\partial \Delta \phi_b}{\partial e_n} - 2\pi M i \frac{L}{l} \frac{1}{e_n^{3/2}} \frac{\partial e''_n}{\partial e_n}, \\ \frac{\partial e''_n}{\partial e_n} &= \frac{\partial e'_n}{\partial e_n} + r \cos(\Delta \phi_b) \frac{\partial \Delta \phi_b}{\partial e_n}, & \frac{\partial \Delta \phi_d}{\partial e_n} &= \frac{\partial \Delta \phi_c}{\partial e_n} - \pi M \frac{b}{l} \frac{1}{e_n^{3/2}} \frac{\partial e'''_n}{\partial e_n}, \\ \frac{\partial e'''_n}{\partial e_n} &= \frac{\partial e''_n}{\partial e_n} - r \cos(\Delta \phi_c) \frac{\partial \Delta \phi_c}{\partial e_n}, & \frac{\partial \Delta \phi_a}{\partial \phi_n} &= 1, \\ \frac{\partial \Delta \phi_b}{\partial \phi_n} &= \frac{\partial \Delta \phi_a}{\partial \phi_n} - \pi M \frac{b}{l} \frac{1}{e_n^{3/2}} \frac{\partial e'_n}{\partial \phi_n}, & \frac{\partial e'_n}{\partial \phi_n} &= -r \cos(\Delta \phi_a) \frac{\partial \Delta \phi_a}{\partial \phi_n}, \\ \frac{\partial \Delta \phi_c}{\partial \phi_n} &= \frac{\partial \Delta \phi_b}{\partial \phi_n} - 2\pi M i \frac{L}{l} \frac{1}{e_n^{3/2}} \frac{\partial e''_n}{\partial \phi_n}, & \frac{\partial e''_n}{\partial \phi_n} &= \frac{\partial e'_n}{\partial \phi_n} + r \cos(\Delta \phi_b) \frac{\partial \Delta \phi_b}{\partial \phi_n}, \\ \frac{\partial \Delta \phi_d}{\partial \phi_n} &= \frac{\partial \Delta \phi_c}{\partial \phi_n} - \pi M \frac{b}{l} \frac{1}{e_n^{3/2}} \frac{\partial e'''_n}{\partial \phi_n}, & \frac{\partial e'''_n}{\partial \phi_n} &= \frac{\partial e''_n}{\partial \phi_n} - r \cos(\Delta \phi_c) \frac{\partial \Delta \phi_c}{\partial \phi_n}. \end{aligned}$$

Ao fazer o cálculo da determinante das matrizes Jacobianas, vemos que  $\det J_A = 1$  e  $\det J_B = 1$ , isso significa que ambos os mapas preservam a área dos espaços de fases.

# Referências Bibliográficas

- [1] E. D. Leonel, Phys. Rev. Lett. **98**, 114102 (2007).
- [2] E. D. Leonel, L. A. Bunimovich, Phys. Rev. Lett. **104**, 224101 (2010).
- [3] R. C. Hilborn, Chaos and Nonlinear Dynamics, Oxford University Press (1994).
- [4] A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman, Appl. Math. Sci. 38, Springer-Verlag, New York (1992).
- [5] G. M. Zaslavsky, B. V. Chirikov, Physics. **159**, 989-992 (1964).
- [6] G. A. Luna-Acosta, G. Orellana-Rivadeneira, A. Mendoza-Galván, C. Jung, Chaos, Solitons and Fractals, **12**, 349-363 (2001).
- [7] E. D. Leonel, P.V.E. McClintock, Phys. Rev. E. **70**, 016214 (2004).
- [8] E. D. Leonel, P.V.E. McClintock. Chaos **15**, 033701 (2005).
- [9] N. Fiedler-Ferrara, C. P. C. do Prado, *Caos Uma Introdução*, Edgard Blucher (1994).
- [10] N. Chernov, R. Markarian, *Chaotic Billiards*, American Mathematical Society, Vol. 127 (2006).
- [11] E. D. Leonel, J. K. L. Silva, S. O. Kamphorst, Physica A, **331**, 435-447 (2004).
- [12] E. D. Leonel, P. V. E. McClintock, J. K. L. Silva, Phys. Rev. Lett., **93** 014101 (2004).
- [13] E. D. Leonel, J. K. L. Silva, Physica A, **323** 181-196 (2003).
- [14] D. R. Costa, M. R. Silva, J. A.O liveira, E. D. Leonel, Physica A (2010) (submetido para publicação)
- [15] J. L. Mateos. J. V. José, Physica A, **257**, 434-438 (1998).
- [16] J. L. Mateos, Phys. Lett. A, **256**, 113-121 (1999).
- [17] M. Leng, C. S. Lent, Phys. Rev. Lett. **71**, 1 (1993).
- [18] P. S. S. Guimares, et. al. Phys. Rev. Lett. **70**, 24 (1993).

- [19] L. P. Kouwenhoven, et. al. Phys. Rev. Lett. **65**, 3 (1990).
- [20] M. Büttiker, R. Landauer, Phys. Rev. Lett. **49**, 23 (1982).
- [21] W. Cai, T. F. Zheng, P. Hu, B. Yudanin, M. Lax, Phys. Rev. Lett. **63**, 4 (1989).
- [22] J. P. Eckmann, and D. Ruelle, Rev. Mod. Phys **57**, 617 (1985)
- [23] E. D. Leonel, P. V. E. McClintock, J. K. L. da Silva, Phys. Rev. Lett. **93**, 014101 (2004).
- [24] E. D. Leonel, Phys. Rev. Lett. **98**, 114102 (2007)
- [25] J. A. de Oliveira, R. A. Bizão, E. D. Leonel, Phys. Rev. E. **81**, 046212 (2010).