

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
*Campus* de Rio Claro

**PROPRIEDADES DE ESCALA DE  
UM GUIA DE ONDAS  
PERIODICAMENTE  
CORRUGADO**

ADRIANO FÁBIO RABELO

Orientador Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao  
Programa de Pós-Graduação em Física, Área de  
Física Aplicada, para obtenção do título de Mestre em Física.

Rio Claro (SP)

2008

# RESUMO

Estudamos algumas propriedades dinâmicas para o comportamento caótico da dinâmica de um feixe de luz clássico sofrendo reflexões especulares entre duas superfícies dentro de um guia de ondas periodicamente corrugado. A dinâmica do feixe é descrita por um mapeamento discreto, bidimensional, não linear e que preserva a área do espaço de fases. Mostramos que o espaço de fases contém ilhas Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM), que são circundadas por um mar de caos e confinadas por curvas invariantes spanning. O mar de caos foi caracterizado usando argumentos de escala próximo a transição de integrável para não integrável. O procedimento revela que os expoentes críticos estão relacionados por uma relação analítica. O formalismo de escala é aplicado em fenômenos críticos e muito utilizado na caracterização de transições de fases. O modelo guia de ondas foi estudado analiticamente e numericamente, sendo os resultados encontrados apresentados e discutidos neste trabalho.

# ABSTRACT

We studied some dynamical properties for the chaotic behaviour of a classical light ray dynamics suffering specular reflections inside a periodically corrugated waveguide. The dynamics of the model is described in terms of a two-dimensional area preserving non-linear map. We shown that the phase space is mixed, in the sense that, one can observe Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) islands surrounded by a large chaotic sea that is limited by a set of invariant spanning curves. The chaotic sea was characterized using scaling arguments near of the transition from integrable to non-integrable. Such formalism shows that the critical exponents are analytically related. Scaling arguments are usually applied in critical phenomena and widely used in the characterization of phase transitions. The waveguide model was studied analytically and numerically and our results are presented and discussed in this work.

# AGRADECIMENTOS

A Deus, que sempre iluminou o meu caminho dando me força e coragem para superar meus obstáculos e minhas dificuldades. Obrigado pelas pessoas generosas e de espírito de luz que as fez cruzar meu caminho. Mesmo não sendo melhor que os meus semelhantes, o “Senhor” sempre me oferece mais do que eu realmente mereço.

A minha família, que é minha maior riqueza. Quantas histórias! Quantas lembranças! Quanto tempo mais..? Em especial, ao meu avô “Francisco Mariano”, homem simples e de origem humilde, que mesmo não tendo oportunidade de frequentar uma escola foi autodidata em latim, criou sua família através das aulas que oferecia aos filhos dos fazendeiros da zona rural de Ribeiros, município de Carmo do Cajuru-(MG).

A Danyelle, minha amiga deste o colegial (1998), companheira de todos os momentos ao longo destes anos. *Te amo* hoje com a mesma intensidade de quando te vi pela primeira vez.

Aos familiares e amigos ausentes que já cumpriram suas missões neste mundo. “Enquanto eu viver; vocês também vivem!”.

Aos professores da pós-graduação, aos meus colegas de pós, do laboratório de pesquisas e aos funcionários do DEMAC, a todos vocês o meu mais sincero agradecimento pela receptividade, por me ajudarem nos momentos de dúvidas e pelos bons momentos que convivemos.

Ao amigo Professor Edson Denis Leonel, obrigado por nos emprestar um pouco de sua sabedoria, tornar alguns dos nossos sonhos realidade, mostrar que o caminho que leva ao conhecimento nos torna mais fortes para superar os desafios e obstáculos que nos são impostos na vida. Você faz jus a cada letra que forma a palavra “*Professor*”, no sentido mais amplo e nobre que a palavra representa. Que Deus retribua em dobro a você, sua esposa (Edilaine) e seus filhos (Rafael, Gustavo e Vinícius) toda a generosidade com que você dedica aos outros. Obrigado por tudo! “*Todas as riquezas do mundo não valem um bom amigo. (Voltaire - Paris 1694)*”.

Ao DEMAC, por disponibilizar o laboratório e acesso computacional.

A CAPES, pelo auxílio financeiro.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>MODELO DE UM GUIA DE ONDAS PERIODICAMENTE CORRUGADO</b>	<b>8</b>
2.1	Resumo . . . . .	8
2.2	Modelo Simplificado . . . . .	8
2.3	Cálculo da Matriz Jacobiana . . . . .	10
<b>3</b>	<b>EXPOENTES DE LYAPUNOV E CURVAS INVARIANTES SPANNING</b>	<b>13</b>
3.1	Resumo . . . . .	13
3.2	Expoentes de Lyapunov . . . . .	13
3.3	Curvas Invariantes Spanning . . . . .	18
<b>4</b>	<b>TRANSIÇÃO DE INTEGRÁVEL PARA NÃO-INTEGRÁVEL</b>	<b>21</b>
4.1	Resumo . . . . .	21
4.2	Formalismo de Escala e Expoentes Críticos . . . . .	21
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS</b>	<b>26</b>
<b>6</b>	<b>APÊNDICE - ARTIGO BRAZ. J. PHYSICS 2008</b>	<b>27</b>

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

A busca de respostas na compreensão de sistemas dinâmicos não lineares vem despertando grande interesse nas últimas décadas devido ao fato destes fenômenos até então serem considerados incompreensíveis. Uma classe especial destes sistemas que apresentam não linearidade é conhecido como billhar clássico [1]. Um problema envolvendo billhar consiste de um sistema em que a partícula move-se livremente no interior de uma região delimitada sofrendo reflexões especulares com as fronteiras. A descrição de tais problemas é normalmente feita através da utilização de mapeamentos não lineares [2]. Existem três classes diferentes de universalidades consideradas em problemas de bilhares: (i) misto; (ii) caótico e (iii) integrável. Para a classe (i), o espaço de fases do modelo exibe ilhas KAM circundadas por mar de caos que é limitado por curvas invariantes spanning. Para o caso (ii), a evolução de uma simples condição inicial é suficiente para preencher toda região acessível no espaço de fases. Finalmente, o caso (iii) mostra um comportamento de periodicidade e quase-periodicidade no espaço de fases.

Devido a sua extensa aplicabilidade em vários campos da ciência, o modelo *guia de ondas* vem recebendo atenção especial nos estudos que envolvem fenômenos críticos e na descrição de sistemas dinâmicos. Aplicações envolvendo feixes caóticos em acústica sub-aquática [3, 4, 5], transporte quântico em cavidades balísticas [6], transporte finito através de  $GaAs/Al_xGa_{1-x}$  [7], condução balística quantizada em um canal periodicamente modulado [8], comparação de um comportamento clássico versus quântico de um sistema mesoscópico periódico [9] e espalhamento de uma partícula quântica em um guia de ondas [10] são alguns exemplos típicos da aplicabilidade do modelo guia de ondas.

O modelo que consideraremos neste trabalho consiste de um feixe de luz que é refletido specularmente entre duas superfícies denominadas fronteiras, sendo que uma é plana localizada em  $y=0$  ao longo do eixo  $x$  e a outra é periodicamente corrugada cuja a equação é dada por

$$y(x) = y_0 + d \cos(kx), \quad (1.1)$$

onde  $y_0$  representa a distância média entre as duas fronteiras,  $d$  é a amplitude da corrugação e  $k$  o número de onda.

Existem várias formas para descrever problemas envolvendo guias de ondas periodicamente corrugados, uma delas a qual consideraremos neste trabalho é aproximação de um bilhar clássico. Nesta aproximação, a dinâmica é descrita usando o formalismo de mapas discretos. É conhecido que dependendo das combinações de condições iniciais e parâmetros de controle, o espaço de fases apresenta uma estrutura muito rica, contendo: (i) curvas invariantes spanning (chamadas toros invariantes), (ii) Ilhas KAM e (iii) mares caóticos. Neste trabalho, estudamos uma versão simplificada do modelo guia de ondas.

Ao longo do estudo, usamos argumentos analíticos na conexão da versão simplificada do modelo guia de ondas com o mapa padrão próximo a transição de local para globalmente caótica, e encontramos a localização das duas curvas invariantes spanning, que delimitam a dimensão do mar de caos como função do parâmetro de controle [11]. Estudamos também um tipo especial de transição de fases, a transição do tipo *integrável* para *não integrável*. Este formalismo é útil para definir *classes de universalidades*.

## Capítulo 2

# MODELO DE UM GUIA DE ONDAS PERIODICAMENTE CORRUGADO

### 2.1 Resumo

Neste capítulo, discutiremos os detalhes necessários para descrever o modelo e obter as equações que descrevem a dinâmica do problema. Construiremos o mapeamento discreto para a descrição da versão simplificada do modelo. Mostraremos a forma mista do espaço de fases e caracterizaremos o comportamento caótico do sistema pela obtenção dos expoentes de Lyapunov.

### 2.2 Modelo Simplificado

O modelo consiste da dinâmica de um feixe de luz que é refletido specularmente entre duas fronteiras. Uma delas é plana e paralela ao eixo  $x$  em  $y = 0$  e a outra é periodicamente corrugada descrita por  $y(x) = y_0 + d \cos(kx)$ . Aqui  $y_0$  é a distância média entre as duas superfícies,  $d$  é a amplitude da corrugação e  $k$  o número de onda. É importante salientarmos que o mapeamento é iterado todas as vezes que o feixe de luz “toca” a fronteira plana, evitando desta forma a ocorrência de reflexões sucessivas. A geometria do modelo é mostrada na Fig. (2.1). A descrição consiste em obter um mapeamento  $T(\theta_n, x_n) = (\theta_{n+1}, x_{n+1})$  onde  $n$  representa a  $n$ -ésima reflexão do feixe de luz com a superfície plana. Assim, uma vez fornecidas as condições iniciais  $(\theta_n, x_n)$ , podemos obter a nova posição e o novo ângulo  $(\theta_{n+1}, x_{n+1})$  usando argumentos puramente geométricos,



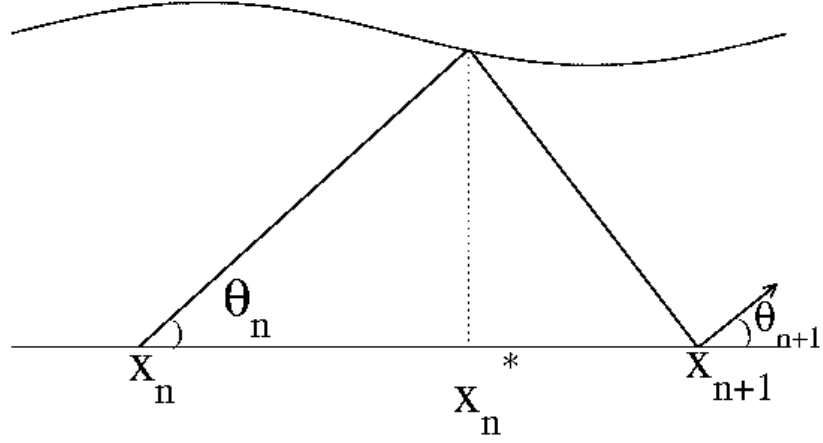


Figura 2.1: Reflexão do feixe na superfície corrugada vindo da superfície  $y = 0$ .

conforme mostrados na Fig. (2.2). Considerando a primeira parte da trajetória do feixe

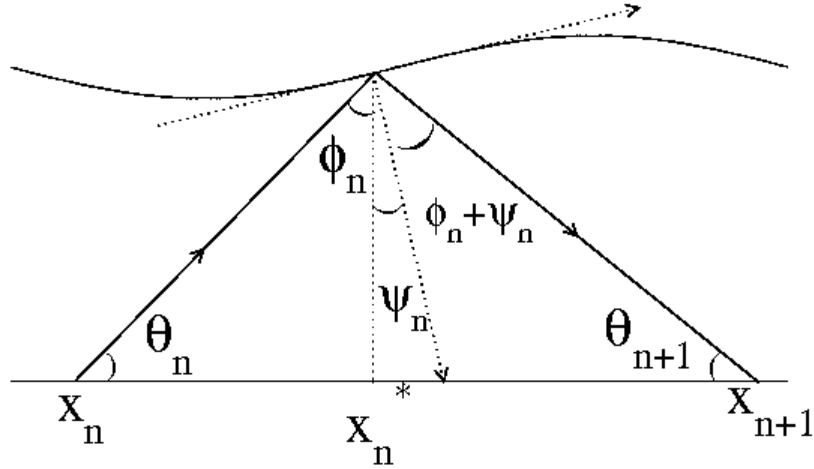


Figura 2.2: Detalhes da trajetória antes e depois da reflexão com a superfície corrugada.

de luz obtemos que

$$x_n^* - x_n = \frac{y_0 + d \cos(kx_n^*)}{\theta_n} . \quad (2.1)$$

Agora, a equação da segunda parte da trajetória do feixe de luz é fornecida por

$$x_{n+1} - x_n^* = \frac{y_0 + d \cos(kx_n^*)}{\theta_{n+1}} , \quad (2.2)$$

onde a variável  $x_n^*$  fornece a posição exata do feixe de luz refletido com a superfície corrugada. O ângulo  $\theta_n$  é fornecido por

$$\theta_{n+1} = \theta_n - 2\psi_n, \quad (2.3)$$

onde  $\psi_n$  é a inclinação da superfície corrugada em  $x = x_n^*$  e é obtido da  $\tan(\psi_n(x)) = dy(x)/dx = -dk \sin(kx_n^*)$ . Enfatizamos que  $x_n^*$  pode somente ser obtido numericamente da solução da Eq. (2.1).

Neste trabalho, consideramos somente pequenos valores para a amplitude de corrugação  $d$ , então consideramos uma versão simplificada do modelo. Antes de escrever as equações propomos duas aproximações para o modelo. Consideramos que a corrugação relativa da superfície é muito pequena, isto implica que,  $y_0 + d \cos(kx_n^*) \cong y_0$ . Neste limite da corrugação, assumimos que  $\tan(\psi_n) \cong \psi_n$ .

Considerando estas aproximações iniciais, vemos que para  $d = 0$ , o sistema é integrável e para este caso somente linhas paralelas são observadas no espaço de fases. Entretanto, para  $d \neq 0$ , o sistema é não integrável e uma estrutura mista no espaço de fases pode ser observada, incluindo ilhas KAM circundadas por um mar caótico que é limitado por um conjunto de curvas invariantes spanning. Assim, podemos concluir que a transição de integrável para não integrável [12] depende do parâmetro de controle  $d$ . Antes de escrever as equações do mapeamento, é conveniente definir algumas variáveis apropriadas. Estas são definidas como  $\delta = d/y_0$ ,  $\gamma_n = \theta_n/k$  e  $X_n = kx_n/y_0$ . Com estas novas variáveis, podemos escrever o mapeamento que descreve a dinâmica da versão simplificada como

$$T : \begin{cases} X_{n+1} = \left[ X_n + \frac{1}{\gamma_n} + \frac{1}{\gamma_{n+1}} \right] \bmod 2\pi \\ \gamma_{n+1} = \gamma_n + 2\delta \sin \left[ X_n + \frac{1}{\gamma_n} \right] \end{cases}. \quad (2.4)$$

Podemos ver agora que existe apenas um parâmetro de controle  $\delta$  e este parâmetro controla a intensidade da não-linearidade do sistema.

Na Fig. (2.3) podemos observar o espaço de fases gerado pela iteração do mapeamento (2.4). É fácil ver que o espaço de fases é misto e sua estrutura inclui um extenso mar de caos que está confinado entre duas curvas invariantes spanning (positiva e negativa) e um conjunto de ilhas KAM. Os parâmetros de controle usados na construção da Fig. (2.3) foram: (a)  $\delta = 10^{-2}$  e (b)  $\delta = 10^{-3}$ .

## 2.3 Cálculo da Matriz Jacobiana

No próximo capítulo estudaremos os expoentes de Lyapunov para o modelo simplificado do guia de ondas periodicamente corrugado. Para se obter os expoentes de Lyapunov devemos como primeiro passo calcular a matriz Jacobiana  $J_n$ , sendo que os coeficientes

são dados pelas derivadas parciais das equações do mapeamento (2.4). Esta matriz é escrita da seguinte forma

$$J_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_{n+1}}{\partial X_n} & \frac{\partial X_{n+1}}{\partial \gamma_n} \\ \frac{\partial \gamma_{n+1}}{\partial X_n} & \frac{\partial \gamma_{n+1}}{\partial \gamma_n} \end{pmatrix}.$$

Calculando os coeficientes da matriz, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_{n+1}}{\partial X_n} &= 1 - \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} \left[ \frac{\partial \gamma_{n+1}}{\partial X_n} \right], \\ \frac{\partial X_{n+1}}{\partial \gamma_n} &= -\frac{1}{\gamma_n^2} - \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} \left[ \frac{\partial \gamma_{n+1}}{\partial \gamma_n} \right], \\ \frac{\partial \gamma_{n+1}}{\partial X_n} &= 2\delta \cos \left[ X_n + \frac{1}{\gamma_n} \right], \\ \frac{\partial \gamma_{n+1}}{\partial \gamma_n} &= 1 + 2\delta \cos \left( X_n + \frac{1}{\gamma_n} \right) \left[ \frac{-1}{\gamma_n^2} \right]. \end{aligned}$$

(2.6)

Assim, obtemos o seguinte resultado

$$\det(J) = 1. \quad (2.7)$$

Conforme o teorema de Liouville [13], esse resultado do determinante da matriz Jacobiana igual a 1, podemos concluir que ocorre preservação da área do espaço de fases. Sistemas que exibem esta propriedade são classificados como *conservativos*.

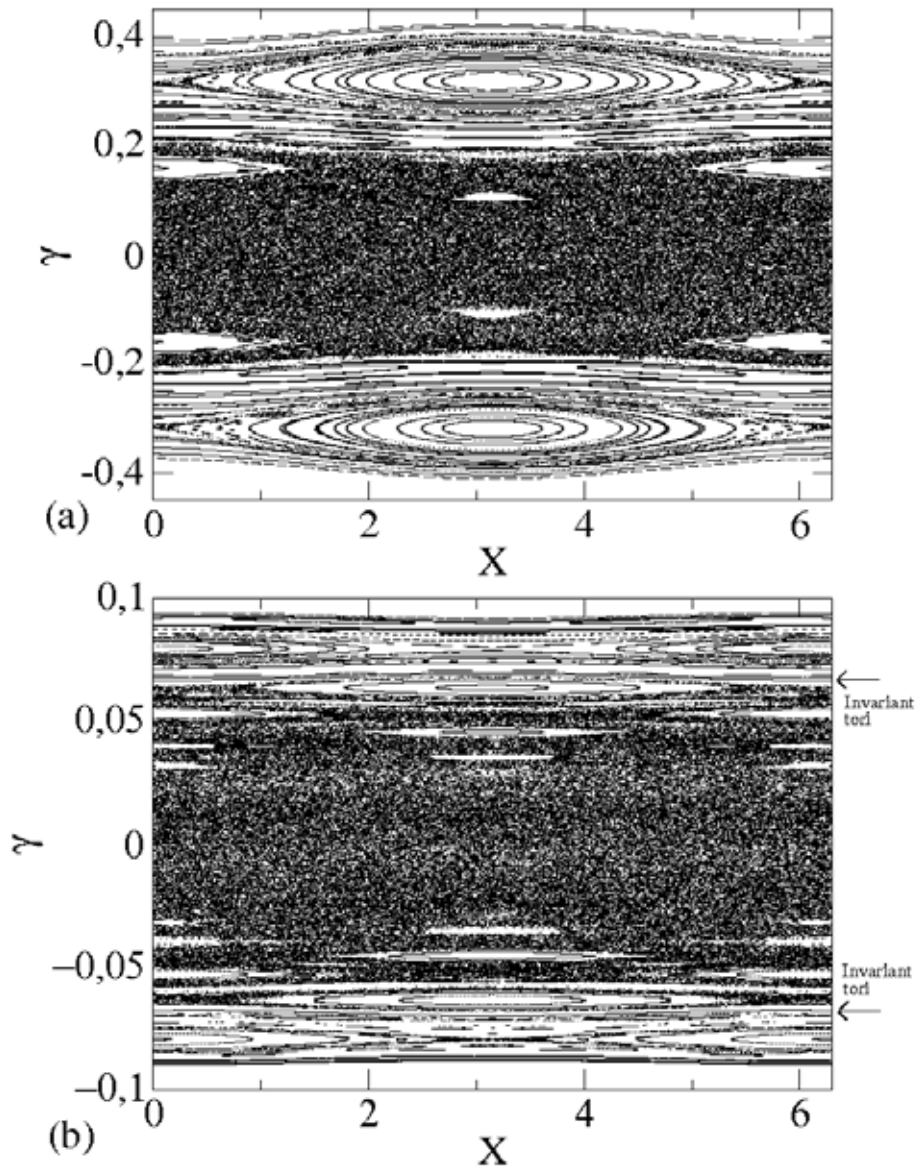


Figura 2.3: Espaço de fases do modelo simplificado do guia de ondas para os parâmetros de controle: (a)  $\delta = 10^{-2}$  e (b)  $\delta = 10^{-3}$ .

## Capítulo 3

# EXPOENTES DE LYAPUNOV E CURVAS INVARIANTES SPANNING

### 3.1 Resumo

Discutiremos neste capítulo dois resultados interessantes sobre o presente modelo. O primeiro deles é o cálculo dos expoentes de Lyapunov para o mar de caos. O segundo estabelece a localização das curvas invariantes spanning. Ambas descrições são feitas como função do parâmetro de controle  $\delta$ .

### 3.2 Expoentes de Lyapunov

O espaço de fases do modelo de um guia de ondas periodicamente corrugado exibe uma região caótica que é limitada por duas curvas invariantes, sendo uma positiva e a outra negativa. Para caracterizarmos este comportamento caótico do sistema, ou seja, a perda de previsibilidade e sensibilidade às condições iniciais próximas, os expoentes de Lyapunov são os indicadores usuais nesta caracterização. Esta caracterização é observada somente se condições iniciais vizinhas distanciam-se exponencialmente com o tempo. Se isto ocorrer, então o sistema apresenta sensibilidade às condições iniciais, e portanto órbitas com estas propriedades são classificadas como caóticas. Assim, nosso objetivo nesta seção é utilizar o cálculo do expoente de Lyapunov para caracterizar o comportamento caótico encontrado no espaço de fases do modelo guia de ondas periodicamente corrugado. Iniciaremos apresentando o cálculo dos expoentes de Lyapunov em um mapeamento unidimensional

e em seguida para mapas bidimensionais. Seja um mapa unidimensional dado por

$$X_{n+1} = F(X_n). \quad (3.1)$$

$F(X)$  representa o mapeamento discreto unidimensional e  $X_0$  uma condição inicial, a distância relativa entre duas trajetórias na  $n$ -ésima iteração, é fornecida pela razão

$$\frac{d}{\epsilon} \equiv \frac{|F^{(n)}(X_0 + \epsilon) - F^{(n)}(X_0)|}{\epsilon}, \quad (3.2)$$

onde  $\epsilon$  é arbitrariamente pequeno. Considerando o limite em que  $\epsilon \rightarrow 0$ , definimos,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \frac{F^{(n)}(X_0 + \epsilon) - F^{(n)}(X_0)}{\epsilon} \right| = |F'^{(n)}(X_0)| \equiv e^{(\lambda n)}. \quad (3.3)$$

Aplicando o logaritmo em ambos os lados da Eq. (3.3) e reorganizando os termos,

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln |F'^{(n)}(X_0)|. \quad (3.4)$$

Considerando o caso em que  $n \rightarrow \infty$ , a expressão para o cálculo do expoente de Lyapunov é dada por,

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |F'(X_i)|. \quad (3.5)$$

Construindo os expoentes de Lyapunov para mapas bidimensionais, conforme é o caso do modelo de um guia de ondas, estes são dados por

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln |\Lambda_j^i|, \quad \text{com } j = 1, 2. \quad (3.6)$$

Aqui  $\Lambda_j^i$  são os autovalores da matriz  $M = \prod_{i=1}^n J_i(X_i, \gamma_i)$  e  $J_i$  é a matriz Jacobiana do mapeamento avaliada ao longo órbita  $(X_i, \gamma_i)$ . É importante salientar que a implementação direta de um algoritmo computacional para avaliar a Eq. (3.6), implica em profundas limitações para se obter a matriz  $M$ . Mesmo no limite de pequenos ( $n$ ), as componentes de  $M$  podem assumir muitas ordens de grandeza diferentes para órbitas caóticas e atratores periódicos, tornando impraticável a implementação do algoritmo. Desta forma, o cálculo da matriz  $M$  pode gerar problemas numéricos do tipo “overflow”. Para contornarmos estes tipos de problemas, utilizaremos um algoritmo conhecido como “Algoritmo de Triangularização”, o qual foi proposto por J.P. Eckmann e D. Ruelle (1985). [14].

Este algoritmo consiste em escrever  $J$  como um produto de uma matriz triangular  $T$  por uma matriz ortogonal  $\Theta$ , como,

$$J = \Theta T,$$

onde  $J$  é a matriz Jacobiana. Uma matriz é dita ser ortogonal quando sua transposta é igual à sua inversa, ou seja,

$$\Theta^{-1} = \Theta^T.$$

De acordo com a definição acima, reescrevemos a matriz  $M$  como

$$M = J_n J_{n-1} J_{n-2} \dots, J_2 J_1 = J_n J_{n-1} \dots, J_2 \Theta_1 \Theta_1^{-1} J_1,$$

onde  $T_1 = \Theta_1^{-1} J_1$ . Um produto de  $J_2 \Theta_1$  define uma nova matriz  $J_2'$ . Assim, é possível mostrar que

$$M = J_n J_{n-1} \dots, J_3 \Theta_2 \Theta_2^{-1} J_2' T_1.$$

O mesmo procedimento pode ser adotado para obter  $T_2 = \Theta_2^{-1} J_2'$  e assim sucessivamente. Desta forma, o problema é reduzido em avaliar apenas os elementos da diagonal principal da matriz  $T$ , ou seja, os elementos  $T_{11}$  e  $T_{22}$ . Agora, focamos nossos esforços em encontrar as expressões de  $\Theta_1^{-1} J_1 = T_1$ , fornecidas por

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}.$$

Fazendo o produto das matrizes acima, temos

$$\begin{pmatrix} j_{11} \cos(\theta) + j_{21} \sin(\theta) & j_{12} \cos(\theta) + j_{22} \sin(\theta) \\ -j_{11} \sin(\theta) + j_{21} \cos(\theta) & -j_{12} \sin(\theta) + j_{22} \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}.$$

Sendo uma igualdade de matrizes, reescrevermos como

$$\begin{aligned} -j_{11} \sin(\theta) + j_{21} \cos(\theta) &= 0, \\ -j_{11} \sin(\theta) &= -j_{21} \cos(\theta), \\ \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} &= \frac{j_{21}}{j_{11}}. \end{aligned}$$

Considerando ainda que as razões são dadas por

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= \frac{\textit{cateto oposto}}{\textit{hipotenusa}}, \\ \cos(\theta) &= \frac{\textit{cateto adjacente}}{\textit{hipotenusa}}, \end{aligned}$$

assim, encontramos que

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= \frac{j_{21}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}, \\ \cos(\theta) &= \frac{j_{11}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}. \end{aligned}$$

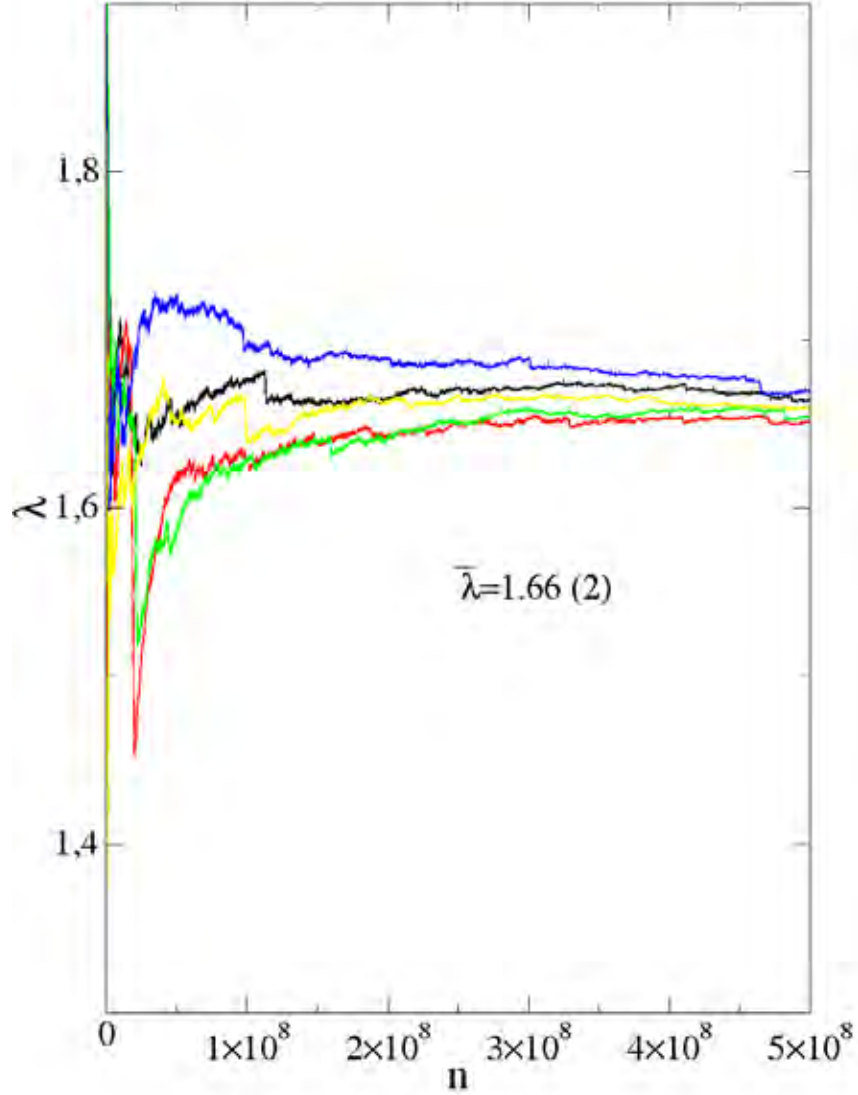


Figura 3.1: *Convergência dos expoentes positivos de Lyapunov para o modelo simplificado guia de ondas. O parâmetro de controle usado foi:  $\delta = 10^{-3}$ .*

Podemos agora reescrever os autovalores da matriz  $T$ , como

$$T_{11} = j_{11} \cos(\theta) + j_{21} \sin(\theta) = \frac{j_{11}^2 + j_{21}^2}{\sqrt{(j_{11}^2 + j_{21}^2)}}, \quad (3.7)$$

$$T_{22} = j_{22} \cos(\theta) + j_{12} \sin(\theta) = \frac{j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21}}{\sqrt{(j_{11}^2 + j_{21}^2)}}. \quad (3.8)$$

De posse dos autovalores  $T_{11}$  e  $T_{22}$  da matriz triangular, podemos encontrar numericamente os expoentes de Lyapunov para uma órbita caótica do espaço de fases do modelo do guia de ondas. A Fig. 3.1 mostra a convergência do expoente de Lyapunov positivo para o modelo simplificado do guia de ondas.

Foram usadas 5 condições iniciais diferentes, iteradas  $5 \times 10^8$  vezes. As condições iniciais utilizadas na construção da figura foram,  $\gamma_0 = 2.1\delta$  e 5 valores de  $X_0$ , no intervalo



$X_0 \in [0, 2\pi)$ . Para estes parâmetros de controle, o expoente de Lyapunov positivo médio encontrado foi  $\bar{\lambda} = 1.66 \pm 0.02$ . O erro  $\pm 0.02$  representa o desvio padrão das cinco curvas de convergência do expoente Lyapunov.

Obtemos também o comportamento do expoente Lyapunov positivo como uma função do parâmetro de controle  $\delta$ , como pode ser visto na Fig.3.2. Podemos ver que a variação do expoente Lyapunov positivo é relativamente pequena para o intervalo de parâmetros de controle considerados  $\delta \in [10^{-6}, 10^{-2}]$ , ou seja, aproximadamente 23%. Essa variação é considerada pequena frente as 5 ordens de grandeza do parâmetro de controle  $\delta$ .

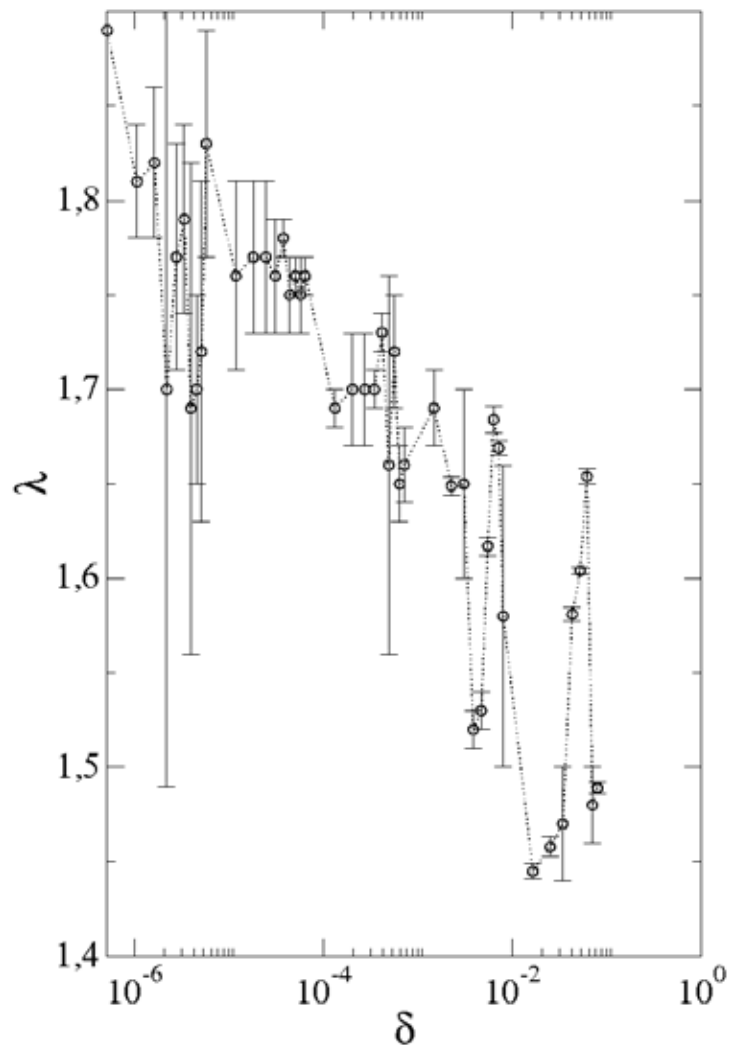


Figura 3.2: O expoente Lyapunov positivo como função do parâmetro de controle  $\delta$ .

### 3.3 Curvas Invariantes Spanning

Nesta seção, discutiremos um método bastante útil para localizar as curvas invariantes. Utilizaremos uma conexão entre o mapa padrão e o modelo guia de ondas para localizar a posição das curvas invariantes spanning no espaço de fases. O mapa padrão é muito utilizado para descrever a dinâmica de um rotor discreto [15] e é dado por

$$S_{ms} : \begin{cases} I_{n+1} = [I_n + K \sin(\Theta_n)] \bmod 2\pi \\ \Theta_{n+1} = [\Theta_n + I_{n+1}] \bmod 2\pi \end{cases}, \quad (3.9)$$

onde  $K$  é um parâmetro de controle e ambas variáveis são definidas como mod  $2\pi$ . É conhecido na literatura [2] que tal modelo exhibe uma transição de local para globalmente caótica em função do parâmetro de controle  $K$ . O ponto crítico que marca esta mudança de comportamento é  $K_c = 0.9716 \dots$  [2]. Assim para  $K < K_c$  o espaço de fases mostra curvas invariantes spanning separando diferentes partes do espaço de fases. Por outro lado, para  $K > K_c$  todas as curvas invariantes spanning são destruídas e o mar de caos espalha sobre o espaço de fases, como mostrado na Fig. (3.3).

O espaço de fases gerado pela iteração da Eq. (3.9) considerando 4 diferentes parâmetros de controle, a saber (a)  $K = 0.5$ ; (b)  $K = 0.75$ ; (c)  $K = 0.9716$  e (d)  $K = 1.5$  é mostrado na Fig (3.3). Vemos que para  $K > K_c$ , Fig. (3.3) (d), as curvas invariantes não existem no espaço de fases.

A conexão dos resultados com o guia de ondas periodicamente corrugado consiste basicamente em supor que próximo as curvas invariantes spanning, as quais limitam a dimensão do mar de caos, o ângulo de reflexão pode ser escrito como

$$\gamma_{n+1} \cong \gamma^* + \Delta\gamma_{n+1}, \quad (3.10)$$

onde,  $\gamma^*$  é um valor típico do ângulo de reflexão ao longo da curva invariante spanning e  $\Delta\gamma_{n+1}$  é uma pequena perturbação do ângulo. Definindo  $Z_n = X_n + 1/\gamma_n$ , a primeira equação do mapeamento (2.4) pode ser escrita como

$$Z_{n+1} = Z_n + \frac{2}{\gamma_{n+1}}. \quad (3.11)$$

Usando a Eq. (3.10), podemos reescrever a Eq. (3.11) como

$$Z_{n+1} = Z_n + \frac{2}{\gamma^*} \left[ 1 + \frac{\Delta\gamma_{n+1}}{\gamma^*} \right]^{-1}. \quad (3.12)$$

Expandindo a Eq. (3.12) em série de Taylor, obtemos que

$$Z_{n+1} = Z_n + \frac{2}{\gamma^*} \left[ 1 - \frac{\Delta\gamma_{n+1}}{\gamma^*} + O\left(\frac{\Delta\gamma_{n+1}}{\gamma^*}\right)^2 \right]. \quad (3.13)$$

Considerando apenas os termos de primeira ordem, podemos reescrever a Eq. (3.13) como

$$Z_{n+1} = Z_n + \frac{2}{\gamma^*} \left[ 1 - \frac{\Delta\gamma_{n+1}}{\gamma^*} \right] . \quad (3.14)$$

A segunda equação do mapeamento (2.4) pode ser reescrita como

$$\gamma^* + \Delta\gamma_{n+1} = \gamma^* + \Delta\gamma_n + 2\delta \sin(Z_n) . \quad (3.15)$$

Multiplicando ambos os lados da Eq. (3.15) por  $-2/\gamma^{*2}$  e adicionando  $2/\gamma^*$  em ambos os lados, obtemos o seguinte termo

$$I_{n+1} = -\frac{2\Delta\gamma_{n+1}}{\gamma^{*2}} + \frac{2}{\gamma^*} . \quad (3.16)$$

Introduzindo agora  $\phi_n = Z_n + \pi$ , reescrevemos o mapeamento (2.4) como

$$T : \begin{cases} I_{n+1} = I_n + \left( \frac{4\delta}{\gamma^{*2}} \right) \sin(\phi_n) \\ \phi_{n+1} = \phi_n + I_{n+1} \end{cases} . \quad (3.17)$$

Comparando o mapa padrão (ver Eq. 3.9) e o mapeamento (3.17), é fácil ver que existe um parâmetro de controle efetivo  $K_{eff}$  que é dado por

$$K_{eff} \cong \frac{4\delta}{\gamma^{*2}} . \quad (3.18)$$

Portanto, desde que ocorra a transição de local para globalmente caótica em  $K_{eff} \cong 0.971\dots$ , a localização das duas curvas invariantes spanning são dadas por

$$\gamma^* \cong \pm 2\sqrt{\frac{\delta}{0.971\dots}} . \quad (3.19)$$

Assim, concluímos que a dimensão do mar de caos definida por ambos os lados positivo e negativo, é proporcional a  $\sqrt{\delta}$ .

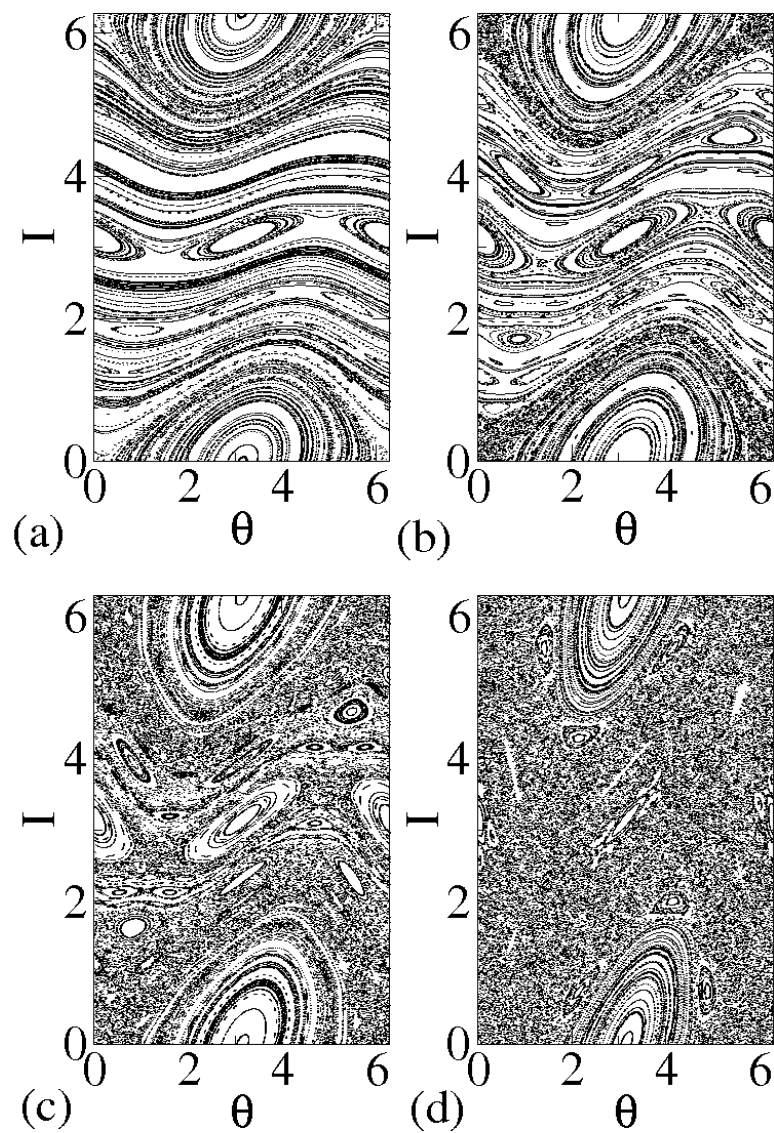


Figura 3.3: Espaço de fases gerado pela iteração da Eq. (3.9). Os parâmetros de controle usados foram: (a)  $K = 0.5$ ; (b)  $K = 0.75$ ; (c)  $K = 0.9716$  e (d)  $K = 1.5$ .

## Capítulo 4

# TRANSIÇÃO DE INTEGRÁVEL PARA NÃO-INTEGRÁVEL

### 4.1 Resumo

Neste capítulo discutiremos as propriedades de escala que ocorrem no mar de caos na transição de *integrável* para *não-integrável*.

### 4.2 Formalismo de Escala e Expoentes Críticos

Nesta seção, discutiremos uma propriedade de escala presente no mar caótico. Uma condição inicial na região do mar de caos vagueia de uma maneira caótica ao longo da região acessível, entretanto, esta fica sempre confinada entre duas curvas invariantes. A localização das primeiras curvas invariantes spanning positiva e negativa, depende do valor do parâmetro de controle  $\delta$ . Como consequência, a “amplitude” de uma série temporal caótica também é dependente do parâmetro de controle. Analisando agora o comportamento do desvio padrão do ângulo médio de reflexão  $\gamma$ , o qual chamamos de rugosidade  $\omega$ , é dado por

$$\omega(n, \delta) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sqrt{\bar{\gamma}_i^2(n, \delta) - \bar{\gamma}^2(n, \delta)}, \quad (4.1)$$

onde

$$\bar{\gamma}(n, \delta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \gamma_i, \quad (4.2)$$

A Eq.(4.2) fornece o correspondente ângulo de reflexão médio avaliado sobre a órbita, sendo que  $M$  na Eq.(4.1) corresponde ao conjunto de condições iniciais diferentes. A

Eq.(4.1) foi iterada usando um conjunto de  $M = 5 \times 10^3$  condições iniciais diferentes, onde a variável  $\gamma_0$  foi mantida fixa em  $\gamma_0 = 10^{-2}\delta$  sendo que 5000 valores de  $X_0$  foram distribuídos uniformemente ao longo de  $X_0 \in (0, 2\pi)$ .

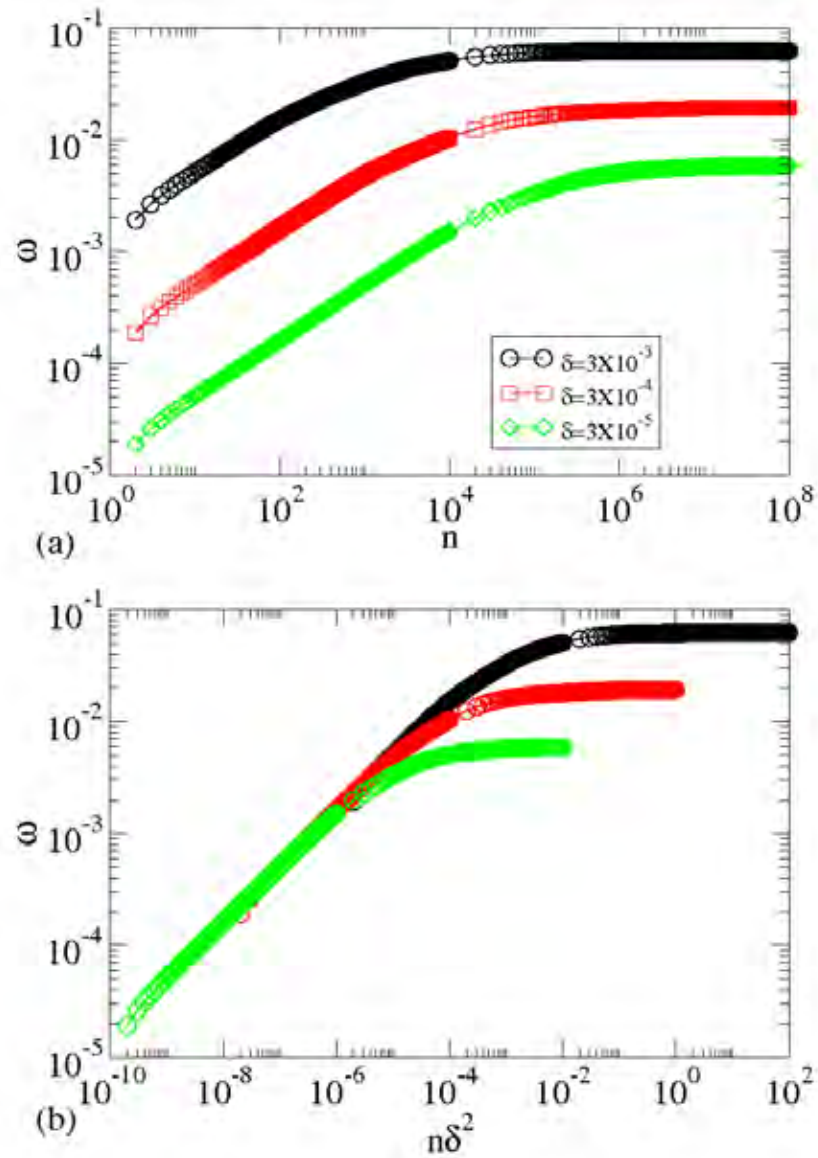


Figura 4.1: (a) Rugosidade  $\omega$  como função do número de iterações  $n$  para três parâmetros de controle diferentes. (b) Após uma apropriada mudança de variáveis, todas as curvas iniciam o crescimento juntas.

Na Fig.4.1(a) podemos observar o comportamento da rugosidade para três parâmetros de controle diferentes, verifica-se então que para pequenos números de iterações a rugosidade cresce e eventualmente ocorre uma mudança de comportamento, evoluindo para um regime de saturação para grandes números de iterações. O número de iterações que marca a mudança de regime do comportamento de crescimento para um regime de saturação da rugosidade é chamado de número de iterações de “crossover” ( $n_x$ ). Tendo em vista que

diferentes valores de parâmetros de controle em pequenas iterações geram crescimento de curvas de rugosidade separadas, este fato indica que  $n$  não é uma “boa” variável de escala. Para contornar este problema, fizemos a seguinte transformação  $n \rightarrow n\delta^2$ . Com esta mudança, podemos observar na Fig.4.1(b) que para pequenas iterações as curvas de rugosidade iniciam o crescimento juntas. Portanto, com este novo comportamento propomos três hipóteses de escala: (i) para pequenos números de iterações  $n \ll n_x$ , a rugosidade comporta-se de acordo com a *lei de potência*

$$\omega(n\delta^2, \delta) \propto (n\delta^2)^\beta, \quad (4.3)$$

onde  $\beta$  é um expoente crítico e conhecido como expoente de *crescimento*; (ii) para grandes números de iterações  $n \gg n_x$ , a rugosidade aproxima de um regime de saturação marcada por um *platô* constante dado por

$$\omega_{sat} \propto \delta^\alpha, \quad (4.4)$$

onde  $\alpha$  é conhecido como expoente de *rugosidade*; (iii) para o número iterações que caracterizam o *crossover*, ou seja, a mudança de regime de crescimento para a saturação é dado por

$$n_x \propto \delta^z, \quad (4.5)$$

onde o expoente  $z$  é definido como expoente *dinâmico*.

O formalismo de escala é comumente utilizado na descrição de transição de fase em fenômenos críticos e também muito utilizado em estudos científicos em problemas de superfície. Considerando as três hipóteses de escala, o desvio do ângulo médio pode ser escrito formalmente em termos de uma função de escala do tipo

$$\omega(n\delta^2, \delta) = l\omega(l^a n\delta^2, l^b \delta), \quad (4.6)$$

onde  $l$  é um fator de escala,  $a$  e  $b$  são conhecidos como expoentes de escala. Portanto, devemos relacionar os expoentes  $a$  e  $b$  com os expoentes  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $z$ . Sendo  $l$  um fator de escala, escolhemos que  $l = (n\delta^2)^{(-1/a)}$ , logo a Eq.(4.6) é reescrita como

$$\omega(n\delta^2) = (n\delta^2)^{(-1/a)}\omega_1([n\delta^2]^{-b/a}\delta), \quad (4.7)$$

onde a função  $\omega_1 = \omega(1, [n\delta^2]^{-b/a}\delta)$  é assumida como constante no limite  $n \ll n_x$ . Comparando as Eqs.(4.7) e (4.3) podemos concluir que  $\beta = -1/a$ . Escolhendo agora  $l = \delta^{-1/b}$ , reescrevemos a Eq.(4.6) como

$$\omega(n\delta^2, \delta) = \delta^{-1/b}\omega_2(\delta^{-(a/b)}n\delta^2), \quad (4.8)$$

onde a função  $\omega_2 = \omega(\delta^{-(a/b)}n\delta^2, 1)$  é assumida como constante no limite  $n \gg n_x$ . Comparando as Eqs.(4.8) e (4.4), temos que  $\alpha = -1/b$ . Conhecendo as duas expressões do

fator de escala  $l$ , podemos relacionar os expoentes críticos como sendo

$$z = \frac{\alpha}{\beta} - 2. \quad (4.9)$$

Salientamos que os expoentes de escala são determinados se os expoentes críticos  $\alpha$  e  $\beta$  forem obtidos numericamente.

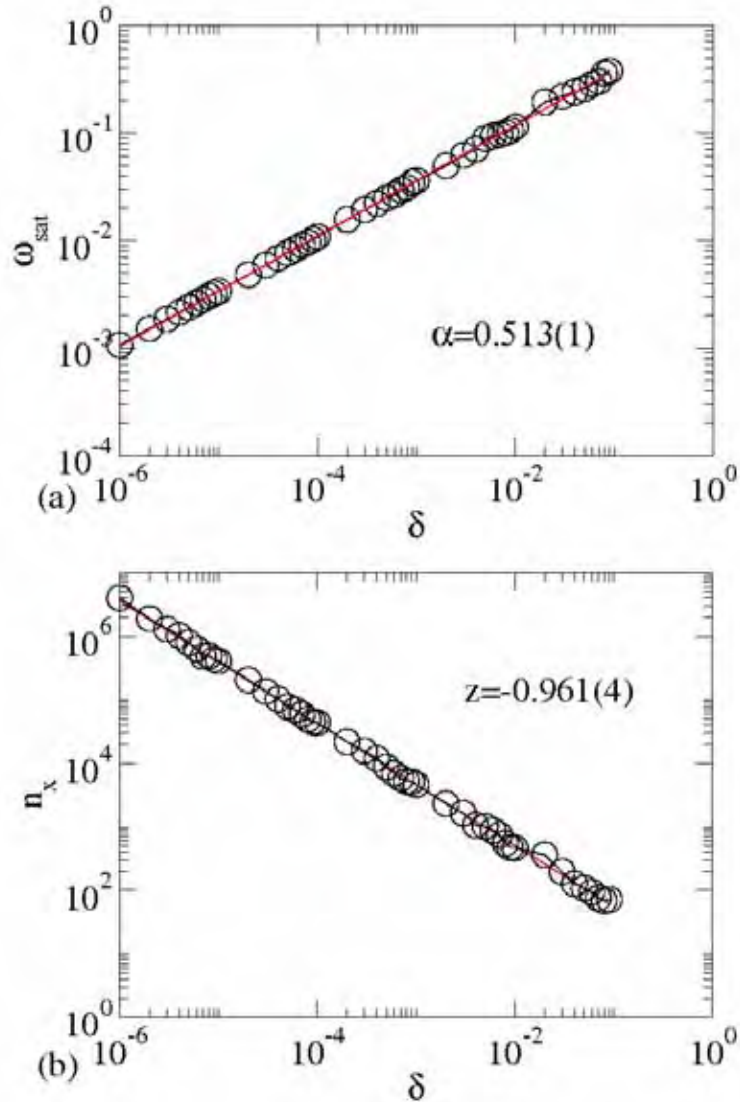


Figura 4.2: (a) Comportamento da rugosidade  $\omega_{sat}$  em função de  $\delta$ . (b) Número de iterações de crossover  $n_x$  em função de  $\delta$ .

Assim, a Fig.6.4 mostra o comportamento de (a)  $\omega_{sat} \times \delta$  e (b)  $n_x \times \delta$ . É importante salientar que os valores da saturação foram obtidos via extrapolação. Na Fig.6.4(a) e (b), através da lei de potência encontramos os seguintes valores para os expoentes críticos:  $\alpha = 0.513(1)$ ,  $\beta = 0.500(4)$  e  $z = -0.961(4)$ . Podemos ainda obter o expoente  $z$  pela Eq.(4.9) conhecendo os valores de  $\alpha$  e  $\beta$ , sendo o valor encontrado  $z = -0.974(6)$ . Este



resultado encontrado está em bom acordo com o resultado encontrado numericamente, como mostra a Fig.6.4(b). Sendo os valores dos expoentes críticos obtidos, agora podemos verificar as três hipóteses de escala propostas. Na Fig.4.3 podemos observar o colapso das três curvas diferentes de  $\omega$  geradas de três parâmetros de controles diferentes em apenas uma curva universal de rugosidade. Os parâmetros de controle usados na Fig.4.3 foram:  $\delta = 3 \times 10^{-3}$ ,  $\delta = 3 \times 10^{-4}$  e  $\delta = 3 \times 10^{-5}$ , embora colapso similar seja observado para outras combinações de  $\delta$ . O colapso obtido na Fig.4.3(b) confirma que as hipóteses de escala adotadas estão corretas.

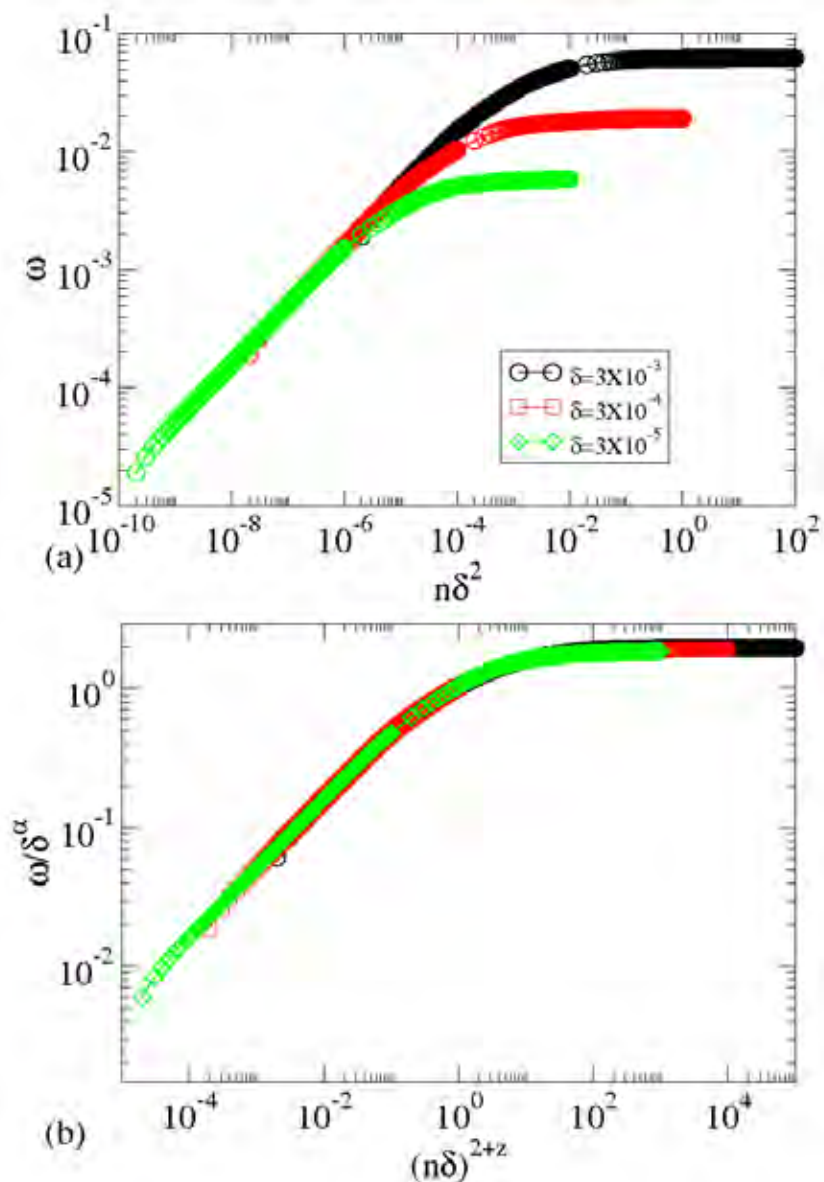


Figura 4.3: (a) Diferentes curvas de  $\omega$  para três parâmetros de controle e (b) colapso das três curvas em uma única curva universal.

## Capítulo 5

# CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Neste trabalho, estudamos a dinâmica do feixe de luz sofrendo reflexões especulares no modelo guia de ondas periodicamente corrugado. O mar de caos presente no espaço de fases confinado entre duas curvas invariantes (positiva e negativa) foi caracterizado pelo expoente de Lyapunov positivo. Confirmamos através de argumentos analíticos que próximo das curvas invariantes a dinâmica do guia de ondas pode ser descrita pelo mapa padrão. Localizamos as duas curvas invariantes em função do parâmetro de controle  $\delta$ , sendo que a dimensão do mar caótico é proporcional a  $\sqrt{\delta}$ . Propomos três hipóteses de escala e confirmamos pelo colapso destas em uma única curva universal que ocorre no sistema uma transição do tipo integrável para não-integrável. Obtemos os valores dos expoentes críticos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $z$ , confirmando que o modelo guia de ondas pertence a mesma classe de universalidade do modelo “One-Dimensional Bouncing Ball”[16].

Como perspectiva futura, nosso próximo passo concentrará no estudo de uma nova versão para este modelo, considerando nesta uma dinâmica com ocorrências de reflexões sucessivas.

## Capítulo 6

# APÊNDICE - ARTIGO BRAZ. J. PHYSICS 2008

## Finding Invariant Tori in the Problem of a Periodically Corrugated Waveguide

Adriano Fábio Rabelo\* and Edson D. Leonel  
 Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Computação,  
 Universidade Estadual Paulista, CEP: 13506-900, Rio Claro, SP, Brazil

Received on 9 October, 2007

Some dynamic properties for a light ray suffering specular reflections inside a periodically corrugated waveguide are studied. The dynamics of the model is described in terms of a two dimensional nonlinear area preserving map. We show that the phase space is mixed in the sense that there are KAM islands surrounded by a large chaotic sea that is confined by two invariant spanning curves. We have used a connection with the Standard Mapping near a transition from local to global chaos and found the position of these two invariant spanning curves limiting the size of the chaotic sea as function of the control parameter.

Keywords: Chaos; Invariant Spanning Curves; Nonlinear Mappings

### I. INTRODUCTION

In recent years the interest in the problem of guiding a light ray has increased. Particularly, such interest is mainly because the subject can be applied in many different fields of science including that in the dynamics of ray chaos in underwater acoustic [1–3], quantum transport in ballistic cavities [4], quantized ballistic conductance in a periodically modulated quantum channel [5] and scattering of a quantum particle in a rippled waveguide [6].

The approach we are considering in the present paper consists basically in describing the dynamics of a periodically corrugated waveguide by using the formalism of discrete mappings. Such a formalism is particularly used in the description of classical billiard problems. There are three different classes concerning on billiard problems, namely: (i) mixed; (ii) ergodic and (iii) integrable. For class (i), the phase space of the model exhibit invariant spanning curves (invariant tori) and chaotic seas that generally surround KAM islands [7–10]. For case (ii), the time evolution of a single initial condition is enough to fill up entirely and ergodically all the accessible phase space [11]. Finally case (iii) shows only periodic and quasi periodic behaviour in the phase space.

In this paper we revisit the problem of a periodic corrugated waveguide seeking to understand and describe the position of the two lower invariant spanning curves in the phase space. We consider a connection with the Standard Mapping near a transition from local to global chaos and obtain an effective control parameter as well as an effective angle that describe the position of the first invariant tori in the phase space.

The organization of the paper is as follows. In section II we describe the model and the mapping. Section III describes the connection with the Standard Mapping. Our conclusion and final remarks are drawn in section IV.

\*Electronic address: adrifara@rc.unesp.br

### II. THE MODEL AND THE NONLINEAR MAPPING

Let us describe the model and construct the equations of the mapping. The model consists in considering a light ray which is specularly reflected by two reflective surfaces. One of them is assumed to be a parallel plate at  $y = 0$  while the other one is described by  $y = a + d \cos(kx)$ . The geometry of the model is shown in Fig. 1 where  $a$  is the average distance of the

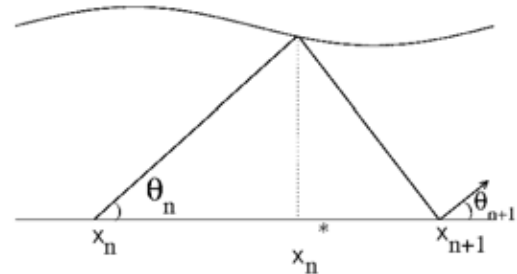


FIG. 1: Reflection from a corrugated surface of a light ray coming from the flat surface at  $y = 0$ . The dynamic variables  $x_n$  and  $\theta_n$  are defined along the text.

surfaces,  $d$  is the corrugation and  $k$  is the wavenumber. The dynamics of the model is given by a mapping  $T$  that gives the reflection angle of the light with respect to the  $X$ -axis  $\theta_n$  and the location of the reflection  $x_n$ , i.e.  $T(\theta_n, x_n) = (\theta_{n+1}, x_{n+1})$  where the index  $n$  denotes the  $n^{\text{th}}$  reflection of the light with the flat plate. Thus, given an initial condition,  $(\theta_n, x_n)$ , we can obtain the new reflection angle and the position  $(\theta_{n+1}, x_{n+1})$  using purely geometrical arguments as they are shown in Fig. 2.

Considering the first part of the light ray trajectory we obtain that

$$x_n^* - x_n = a + d \cos(kx_n^*) / \theta_n. \quad (1)$$

On the other hand, the equation for the second part of the light

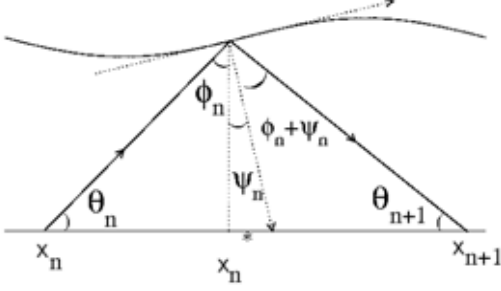


FIG. 2: Details of the trajectory before and after a reflection with the corrugated surface. We stress the dynamic variables  $x_n$  and  $\theta_n$  are defined along the text.

trajectory is given by,

$$x_{n+1} - x_n^* = a + d \cos(kx_n^*) / \theta_{n+1}, \quad (2)$$

where the variable  $x_n^*$  gives the exact position of the light at the reflection with the corrugated surface. The angle  $\theta_n$  is given by,

$$\theta_{n+1} = \theta_n - 2\psi_n, \quad (3)$$

where  $\psi_n$  is the slope of the corrugated surface at  $x = x_n^*$ . It is obtained from  $\tan(\psi_n(x)) = dy(x)/dx = -dk \sin(kx_n^*)$ . It must be emphasized that  $x_n^*$  can only be numerically obtained from solution of the transcendental equation (see Eq. (1)). Thus the solution of Eq. (1) and evaluation of Eqs. (2) and (3) gives the evolution of a light ray in the complete version of the model.

In this paper however, we will consider only small values for the corrugation  $d$  so that we can propose a simplified version of the model and avoid solving equation (1) numerically. Before writing the equations let us propose two approaches for the model. Firstly, we shall consider that the relative corrugation of the upper surface is very small. This implies that,  $a + d \cos(kx_n^*) \cong a$ . For this limit of corrugation, we assume that  $\tan(\psi_n) \cong \psi_n$ .

Considering these initial approaches, it is easy to see that for  $d = 0$ , the system is integrable and for this case only parallel lines are observed in the phase space. However, for  $d \neq 0$ , the system is non-integrable and one can observe a mixed structure in the phase space including KAM islands surrounded by a chaotic sea that is limited by a set of invariant spanning curves. Thus, we can conclude that the transition from integrability to non-integrability [12] depends on the control parameter  $d$ . Before writing the equations of the mapping, it is convenient to define dimensionless variables. They are defined as  $\delta = d/a$ ,  $\gamma_n = \theta_n/k$  and  $X_n = kx_n/a$ . With these new variables, we can write de mapping that describes the dynamics of the simplified version as

$$T : \begin{cases} X_{n+1} = X_n + \left[ \frac{1}{\gamma_n} + \frac{1}{\gamma_{n+1}} \right] \bmod 2\pi \\ \gamma_{n+1} = \gamma_n + 2\delta \sin \left[ X_n + \frac{1}{\gamma_n} \right] \end{cases} \quad (4)$$

Figura 6.2: Digitalização da página 2 do artigo [11].

We can see that there is only a single and relevant control parameter  $\delta$ .

It is shown in Fig (3) the corresponding phase space gener-

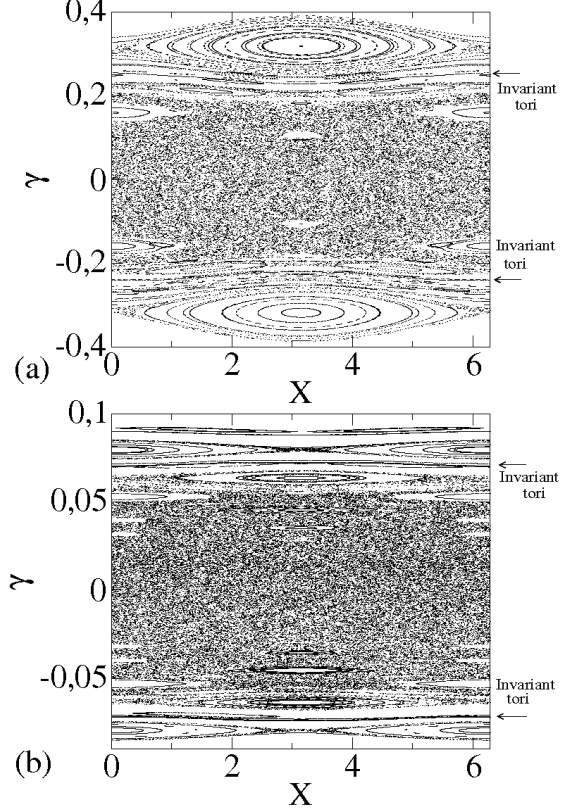


FIG. 3: Phase space for mapping (4) for the control parameters: (a)  $\delta = 10^{-2}$  and (b)  $\delta = 10^{-3}$ .

ated from the iteration of mapping (4). It is easy to see that the mixed phase space structure is evident and it includes a large chaotic sea that is confined by two invariant tori at both positive and negatives sides and a set of KAM islands. The control parameters used in the construction of Fig 3 were: (a)  $\delta = 10^{-2}$  and (b)  $\delta = 10^{-3}$ . It is also easy to see that the location of the invariant tori in both figures is different, so that the strength of the control parameter  $\delta$  plays an important role in the dynamics.

### III. THE STANDARD MODEL

In this section we will briefly discuss some properties of the Standard Mapping. We also make a connection between the Standard Mapping and the waveguide models in order to localize the position of the invariant spanning curves in the phase space. The Standard Mapping is useful to describe the

dynamics of a single kicked rotor [13] and it is given by

$$S: \begin{cases} I_{n+1} = I_n + K \sin(\Theta_n) \text{ mod } 2\pi \\ \Theta_{n+1} = \Theta_n + I_{n+1} \text{ mod } 2\pi \end{cases}, \quad (5)$$

where  $K$  is a control parameter and both variables are defined as  $\text{mod}(2\pi)$ . It is well known in the literature [7] that such a model exhibits a transition from local to global chaos as the control parameter  $K$  raises. The critical point that marks this change of behavior is  $K_c = 0.971\dots$  (see [7] for more details). Thus for  $K < K_c$  the phase space shows invariant spanning curves separating different portions of the phase space. On the other hand, for  $K > K_c$  all the invariant spanning curves were destroyed and the chaotic sea can spread over the phase space. It is shown in Fig. 4 the phase space generated from

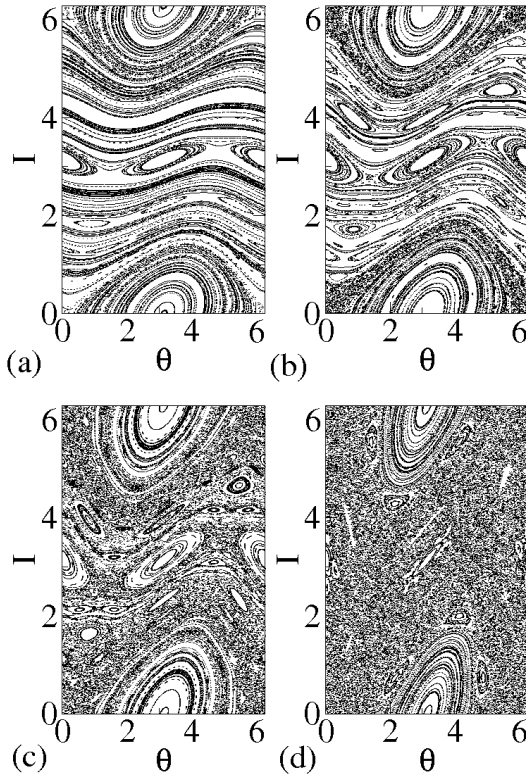


FIG. 4: Phase space generated from iteration of Eq. (5). The control parameters used were: (a)  $K = 0.5$ ; (b)  $K = 0.75$ ; (c)  $K = 0.9716$  and (d)  $K = 1.5$ .

the iteration of Eq. (5) considering four different control parameters namely: (a)  $K = 0.5$ ; (b)  $K = 0.75$ ; (c)  $K = 0.9716$  and (d)  $K = 1.5$ . It is easy to see that for  $K > K_c$ , as it is the case of Fig. 4(d), the invariant tori no longer exists in the phase space.

The connection of this result with the periodically corrugated waveguide consists basically in suppose that near the invariants spanning curves, which limit the size of the chaotic

sea, the reflection angle can be written as

$$\gamma_{n+1}^* \cong \gamma^* + \Delta\gamma_{n+1}, \quad (6)$$

where  $\gamma^*$  is a typical value of the reflection angle along the invariant spanning curve and  $\Delta\gamma_{n+1}$  is small perturbation of the angle. After defining  $Z_n = X_n + \frac{1}{\gamma_n}$ , the first equation of mapping (4) might be written as

$$Z_{n+1} = Z_n + \frac{2}{\gamma_{n+1}}. \quad (7)$$

Using Eq. (6), we can rewrite Eq. (7) as

$$Z_{n+1} = Z_n + \frac{2}{\gamma^*} \left[ \frac{1 + \Delta\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \right]^{-1}. \quad (8)$$

Expanding Eq. (8) in Taylor series, we obtain that

$$Z_{n+1} = Z_n + \frac{2}{\gamma^*} \left[ 1 - \frac{\Delta\gamma_{n+1}}{\gamma^*} + O\left(\frac{\Delta\gamma_{n+1}}{\gamma^*}\right)^2 \right]. \quad (9)$$

Taking into account only terms of first order, we can rewrite Eq. (9) as

$$Z_{n+1} = Z_n + \frac{2}{\gamma^*} \left[ 1 - \frac{\Delta\gamma_{n+1}}{\gamma^*} \right]. \quad (10)$$

The second equation of the mapping (4) can also be written as

$$\gamma^* + \Delta\gamma_{n+1} = \gamma^* + \Delta\gamma_n + 2\delta \sin(Z_n). \quad (11)$$

Multiplying both sides of Eq. (11) by  $-2/\gamma^{*2}$  and adding  $2/\gamma^*$  in both sides, we obtain the following term

$$I_{n+1} = -\frac{2\Delta\gamma_{n+1}}{\gamma^{*2}} + \frac{2}{\gamma^*}. \quad (12)$$

Introducing now  $\phi_n = Z_n + \pi$ , we rewrite the mapping (4) as

$$T: \begin{cases} I_{n+1} = I_n + \left(\frac{4\delta}{\gamma^{*2}}\right) \sin(\phi_n) \\ \phi_{n+1} = \phi_n + I_{n+1} \end{cases}. \quad (13)$$

Comparing the mapping of the Standard Model (see Eq. (5)) and the mapping (13) it is easy to see that there is an effective control parameter  $K_{eff}$  which is given by

$$K_{eff} \cong \frac{4\delta}{\gamma^{*2}}. \quad (14)$$

Therefore, since the transition from local to global chaos occurs at  $K_{eff} \cong 0.971\dots$ , the localization of the two invariant spanning curves are given by

$$\gamma^* \cong \pm 2\sqrt{\frac{\delta}{0.971\dots}}. \quad (15)$$

Thus, we conclude that the size of the chaotic sea is defined to be, both the positive and negative sides, proportional to  $\sqrt{\delta}$ .

#### IV. CONCLUSIONS

We confirm through analytical arguments that near the invariant tori and locally, the dynamics of the corrugated waveguide can be described by the standard mapping. Such approach was useful to obtain the localization of the two first (either positive and negative) invariant spanning curves as a

function of the control parameter  $\delta$ .

#### ACKNOWLEDGMENTS

A.F.R. is grateful to CAPES; E.D.L. thanks to FAPESP, FUNDUNESP and CNPq for financial support.

- 
- [1] A. L. Virovlyansky and G. M. Zaslavsky, *Chaos* **10**, 211 (2000).  
 [2] I. P. Smirnov, A. L. Virovlyansky, and G. M. Zaslavsky, *Phys. Rev. E* **64**, 036221 (2001).  
 [3] A. Iomin and B. Bliokh Yu. *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simul.* **8**, 389 (2003).  
 [4] B. Huckestein, R. Ketzmerick, and C. H. Lewenkopf, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5504 (2000).  
 [5] M. Leng and C. S. Lent, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 137 (1993).  
 [6] G. B. Akguc and L. E. Reichl, *Phys. Rev. E* **67**, 046202 (2003).  
 [7] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics* (Appl. Math. Sci. 38; Springer Verlag; New York 1992).  
 [8] E. D. Leonel and P. V. E. McClintock, *J. Phys. A* **38**, 823 (2005).  
 [9] E. D. Leonel, P. V. E. McClintock, and J. K. L. da Silva, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 014101 (2004).  
 [10] J. K. L. da Silva, D. G. Ladeira, E. D. Leonel, P. V. E. McClintock, S. O. Kamphorst, *Braz. J. Phys.* **36**, 700 (2006).  
 [11] L. A. Bunimovich, *Math. USSR Sb.* **23**, 45 (1974).  
 [12] E. D. Leonel, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 114102 (2007).  
 [13] V. Feudel, C. Grebogi, B. R. Hunt, and J. A. Yorke, *Physical Review E* **54**, 71 (1996).

Figura 6.4: Digitalização da página 4 do artigo [11].

# Bibliografia

- [1] Berry, M V “Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular billiard”. *Eur. J. Phys.* 1981; **2**: 91.
- [2] Lichtenberg A J and Lieberman M A. “Regular and Chaotic Dynamics” (*Appl. Math. Sci.* 38; Springer Verlag; New York 1992).
- [3] Virovlyansky A L and Zaslavsky G M. “Evaluation of the smoothed interference pattern under conditions of ray chaos”. *Chaos* 2000; **10**: 211.
- [4] Smirnov I P, Virovlyansky A L and Zaslavsky G M. “Theory and applications of ray chaos to underwater acoustics”. *Phys. Rev. E* 2001; **64**: 036221.
- [5] Iomin A and Bliokh Yu. “Wave localization as a manifestation of ray chaos in underwater acoustics”. *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simul.* 2003; **8**: 389.
- [6] Huckestein B, Ketzmerick R and Lewenkopf C H. “Quantum transport through ballistic cavities: Soft vs hard quantum chaos”. *Phys. Rev. Lett.* 2000; **84**: 5504.
- [7] Kouwenhoven L P, Hekking F W J, van Wees B J, Harmans C J P M, Timmering C E and Foxon C T. “Transport through a finite one-dimensional crystal”. *Phys. Rev. Lett.* 1990; **65**: 361.
- [8] Leng M and Lent C S. “Recovery of quantized ballistic conductance in a periodically modulated channel”. *Phys. Rev. Lett.* 1993; **71**: 137.
- [9] Luna-Acosta G A, Méndez-Bermúdez J A and Izrailev F M. “Periodic chaotic billiards: Quantum-classical correspondence in energy space”. *Phys. Rev. E* 2001; **64**: 036206; “Quantum-classical correspondence for local density of states and eigenfunctions of a chaotic billiard”. *Phys. Lett. A* 2000; **274**: 192.
- [10] Akguc G B and Reichl L E. “Direct scattering processes and signatures of chaos in quantum waveguides”. *Phys. Rev. E* 2003; **67**: 046202.
- [11] Rabelo A F and Leonel E D. “Finding Invariant Tori in the Problem of a Periodically Corrugated Waveguide”. *Brazilian Journal of Physics* 2008; **38**: 54.



- [12] Leonel E D. “Corrugated waveguide under scaling investigation”. Phys. Rev. Lett. 2007; **98**: 114102.
- [13] Reif F. “ Fundamentals of Statistical and Thermal Physics” (McGraw-Hill; New York 1965).
- [14] Eckman J P and Ruelle D. “Ergodic-theory of chaos and strange attractors”, Rev. Mod. Phys. 1985; **57**: 617.
- [15] Feudel U, Grebogi C, Hunt B R and Yorke J A. “Map with more than 1000 coexisting low-period periodic attractors”. Phys. Rev. E 1996; **54**: 7 1
- [16] Leonel E D, McClintock P V E and da Silva J K L. Phys. Rev. Lett. 2004; **93**: 014101.