

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

**CONSEQÜÊNCIAS DO ARRASTO
VISCOSO NO MODELO
FERMI-ULAM**

DANILA FERNANDES TAVARES

Orientador Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao
Programa de Pós-Graduação em Física, Área de
Física Aplicada, para obtenção do título de Mestre em Física.

Rio Claro (SP)

2008

RESUMO

Estudamos, neste trabalho, algumas propriedades dinâmicas do Modelo do Acelerador de Fermi, em três versões distintas: uma versão conservativa e duas versões dissipativas. A primeira versão dissipativa com amortecimento proporcional à velocidade da partícula e a segunda versão dissipativa com amortecimento proporcional ao quadrado da velocidade. Nas versões dissipativas, a força de dissipação é introduzida via arrasto viscoso e age ao longo de toda a trajetória da partícula. O modelo de Fermi é um modelo unidimensional que consiste de uma partícula clássica de massa m que move-se com velocidade constante e sofre colisões elásticas com duas paredes rígidas. Uma delas é fixa ao passo que a posição da outra é dependente do tempo. A descrição da dinâmica dos modelos é feita todas as vezes que a partícula colide com a parede móvel, de modo que o conhecimento dos valores da velocidade da partícula e do tempo no instante da colisão descrevem toda a dinâmica. O mapeamento que descreve a dinâmica é bidimensional, não linear e, para os casos dissipativos obtidos via solução de equações diferenciais. Analisamos os modelos numericamente e apresentamos e discutimos nossos resultados.

ABSTRACT

Some dynamic properties of the one-dimensional Fermi Accelerator Model under the presence and absence of frictional force are studied. We have considered three different versions, namely: a conservative and two dissipative versions. The first dissipative version consists in considering the damping to be proportional to the particle's velocity while the second one assumes the damping to be proportional to the square particle's velocity. For the dissipative versions, we have introduced dissipation via a drag force, like a gas, that act during all trajectory of the particle. The Fermi accelerator model consists of a classical particle of mass m that is confined in and suffers elastic collisions with two walls. One of them is fixed while the other is time dependent. The description of the dynamics of either models is made all the times the particle bounces the moving wall. It is made via a two dimensional non linear mapping. For the dissipative cases the mapping is obtained via differential equations. We investigate both models analytically and numerically, present and discuss our results.

AGRADECIMENTOS

À Deus, por abrir meus caminhos e mostrar a todos que somos sempre capazes de superar os desafios e ir mais longe. Para isto, basta querer e trabalhar.

À minha família que me apoiou, que torceu e acreditou em mim, que compreendeu a minha ausência, que sofreu com a minha dor e que agora vibra com minha vitória. Em especial, ao meu pai, exemplo de perseverança e superação, e que foi o meu grande incentivador nesta empreitada.

Aos amigos que conquistei, pelas dicas valiosas sobre programação, pela acolhida, pelos momentos de alegria e descontração e que vão deixar muita saudade.

Aos professores da pós-graduação, pela atenção e por estarem sempre preocupados em oferecer aos seus alunos uma boa formação.

Aos Professores Mário Silva, Raimundo Nogueira e Ricardo Egydio, pelas valiosas dicas, sugestões e críticas construtivas, que contribuíram ainda mais para a qualidade deste trabalho.

Ao Professor Edson Denis Leonel, meus mais sinceros agradecimentos, pela orientação constante, pelo incentivo e entusiasmo, pelas incansáveis explicações, pela motivação, pela dedicação, pela confiança, pela competência, pela oportunidade e pela amizade. Serei eternamente grata ao Sr. por tornar possível a realização deste trabalho e a concretização deste sonho.

Ao DEMAC, por disponibilizar o laboratório e acesso computacional.

À FAPESP, pelo auxílio financeiro.

Conteúdo

1	INTRODUÇÃO	7
2	MODELO FERMI-ULAM CONSERVATIVO	10
2.1	Resumo	10
2.2	Motivações	10
2.3	O Modelo Completo	12
2.3.1	Colisões Múltiplas	14
2.3.2	Cálculo da Matriz Jacobiana para Colisões Múltiplas	16
2.3.3	Colisões Simples	18
2.3.4	Cálculo da Matriz Jacobiana para Colisões Simples	21
2.3.5	Resultados Numéricos para o Modelo Completo	22
2.4	O Modelo Simplificado	23
2.4.1	Resultados Numéricos para o Modelo Simplificado	25
2.5	Os Expoentes de Lyapunov	25
3	MODELO DO ACELERADOR DE FERMI COM FORÇA DE ARRASTO VISCOSO DO TIPO $F \propto -V$	31
3.1	Resumo	31
3.2	Motivações	31
3.3	O Modelo Completo	32
3.3.1	Colisões Múltiplas	34
3.3.2	Cálculo da Matriz Jacobiana para Colisões Múltiplas	35
3.3.3	Colisões Simples	35
3.3.4	Cálculo da Matriz Jacobiana para Colisões Simples	38
3.3.5	Resultados Numéricos para o Modelo Completo	39
3.4	O Modelo Simplificado	42
3.4.1	Resultados Numéricos para o Modelo Simplificado	43

4	MODELO DO ACELERADOR DE FERMI COM FORÇA DE ARRASTO VISCOZO DO TIPO $F \propto -V^2$	47
4.1	Resumo	47
4.2	Motivações	47
4.3	O Modelo Completo	48
4.3.1	Colisões Múltiplas	51
4.3.2	Cálculo da Matriz Jacobiana para Colisões Múltiplas	52
4.3.3	Colisões Simples	53
4.3.4	Cálculo da Matriz Jacobiana para Colisões Simples	57
4.3.5	Resultados Numéricos para o Modelo Completo	58
4.4	O Modelo Simplificado	60
4.4.1	Resultados Numéricos para o Modelo Simplificado	61
4.4.2	Histograma de Frequências e Bacias de Atração	66
5	CONCLUSÕES FINAIS E PERSPECTIVAS	70

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Um grande desafio na investigação de sistemas não lineares é explicar os fenômenos muitas vezes inesperados que tais sistemas apresentam. Comportamento caótico, por exemplo, aparece com grande frequência em tais sistemas, tanto na presença quanto na ausência de dissipação [1, 2, 3]. Para o caso dissipativo, a propriedade de contração de área leva o sistema a produzir um conjunto de diferentes comportamentos assintóticos, como pontos fixos, ciclos limite e atratores caóticos. Também existem sistemas com mais de um atrator [4] onde, frequentemente, o interesse está centrado na determinação das bacias de atração de cada atrator, cujas fronteiras podem ser contínuas ou fractais. Para o caso não dissipativo, a estrutura característica de sistemas Hamiltonianos é observada, com espaço de fases misto, no sentido de que ilhas Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) aparecem, juntas com curvas invariantes *spanning*, separando diferentes porções do espaço de fases e mares de caos [5, 6, 7, 8]. As ferramentas utilizadas no estudo de ambos os casos, dissipativo e não dissipativo, são amplamente aplicáveis em diferentes campos da física como astrofísica, física dos plasmas, fluidos, aceleradores e movimento planetário. Estes modelos unidimensionais permitem também comparações diretas de predições teóricas com resultados experimentais. Além disso, sistemas não lineares tais como o modelo Fermi-Ulam e recentemente, uma versão com guias de onda [9], são exemplos de modelos dinâmicos cujas propriedades de escala podem ser investigadas próximas da transição de integrável para não integrável.

Neste trabalho, nós revisitamos o Modelo do Acelerador de Fermi, buscando entender e descrever algumas de suas propriedades dinâmicas. Os estudos sobre o Modelo Unidimensional do Acelerador de Fermi começaram em 1949 [10], quando Enrico Fermi tentou descrever um mecanismo de aceleração dos raios cósmicos no meio interestelar. Este mecanismo simula as interações desses raios com campos magnéticos oscilantes. Um sistema dinâmico que corresponde ao modelo original proposto por Fermi, foi depois proposto por Ulam [11]. Este modelo consiste de uma partícula clássica confinada e colidindo elástica-

mente entre duas paredes rígidas. Uma das paredes é assumida como sendo fixa enquanto que a outra move-se periodicamente no tempo. Tal modelo ficou conhecido como *Modelo Fermi-Ulam* [12, 13, 14] e, desde então, vem sendo estudado em muitas outras diferentes versões. Dentre algumas das modificações sofridas e estudadas no modelo, podemos citar a inclusão de campos externos, colisões inelásticas, coeficientes de amortecimento e também efeitos quânticos [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21]. Uma versão alternativa do modelo, na presença de campo gravitacional, também chamada de *bouncer* [22], consiste de uma partícula colidindo em uma plataforma vertical móvel, sob um campo gravitacional constante. A propriedade mais importante do modelo bouncer e que se opõe ao modelo Fermi-Ulam, é que ele mostra, para uma combinação específica de parâmetros de controle e condições iniciais, o fenômeno de crescimento ilimitado de energia da partícula. Este resultado contraditório, foi mais tarde discutido e explicado por Lichtenberg et al. [23]. Recentemente, uma versão híbrida dos modelos Fermi-Ulam e bouncer [24], foi estudada. O modelo considera o movimento de uma partícula clássica em um campo gravitacional, com o movimento confinado entre duas paredes rígidas, uma delas fixa e a outra movendo-se periodicamente no tempo. Este modelo recupera os resultados do modelo Fermi-Ulam no limite de campo externo zero e mostra propriedades do modelo bouncer para campo gravitacional intenso. Além disso, para um certo conjunto de parâmetros de controle, propriedades que são características individuais do modelo Fermi-Ulam e do modelo bouncer, podem aparecer juntas e coexistir na versão híbrida do modelo.

Considerando a introdução de dissipação, uma consequência imediata é que a dinâmica do modelo é drasticamente afetada. Sabemos que existem muitas diferentes maneiras de se introduzir forças de amortecimento no sistema. Uma delas é considerar colisões inelásticas da partícula com uma das paredes ou com as duas. Assim, a partícula sofre uma perda fracional de energia a cada colisão. Como consequência, o sistema não preserva medida do espaço de fases, cuja estrutura mista é destruída. Em especial, é possível observar diferentes comportamentos assintóticos à medida que o coeficiente de amortecimento é variado. Dentre eles, efeitos de transiente [25], pontos fixos atrativos [26] e atratores caóticos [27]. Uma importante propriedade que pode ser extraída da presença de dissipação na dinâmica do modelo é a ocorrência de crises de fronteira [28]. Após as crises, o atrator caótico não existe mais. Ele é substituído por um transiente caótico que é descrito por uma lei de potência [29]. Outra diferente opção de se introduzir força de amortecimento no sistema é considerar que a partícula move-se na presença de uma força de arrasto. Este tipo de dissipação age ao longo de toda a trajetória da partícula, ao contrário das colisões inelásticas, onde ela atua somente no instante de cada impacto.

O principal objetivo deste trabalho é caracterizar os efeitos de uma força dissipativa no Modelo Fermi-Ulam. A força de amortecimento é introduzida no sistema via um movi-

mento relativo de uma partícula dentro de um fluido, como um gás. Recentemente, Leonel and McClintock [30], mostraram que, para uma força de amortecimento proporcional à velocidade da partícula, o sistema produz determinantes das matrizes Jacobianas que ora contraem a área do espaço de fases e ora preservam área do espaço de fases. Em nossa aproximação, entretanto, assumimos que a força dissipativa é proporcional ao quadrado da velocidade da partícula. Uma consequência deste tipo de força de amortecimento é ter o determinante da matriz Jacobiana do sistema apresentando somente a propriedade de contração de área do espaço de fases. Adicionalmente, o sistema exibe um número arbitrariamente grande de pontos fixos atrativos e órbitas periódicas. Este grande número de órbitas periódicas produz uma complexa estrutura de bacia de atração, cujos limites percorrem quase todo o espaço de fases. Em particular, são observados muitos atratores de baixo período. É importante salientar que estudos de sistemas dinâmicos considerando um “single rotor”[31], tem mostrado que, no caso de sistemas Hamiltonianos, o sistema exibe um vasto número de órbitas periódicas estáveis e cada uma delas converge para um ponto fixo atrativo quando uma pequena quantidade de dissipação é aplicada. Além disso, é esperado que a complexidade de tal modelo possa ser estendida para sistemas de alta dimensão, como por exemplo, o “double rotor”[32], onde são encontrados mais de 1000 atratores periódicos de baixo período. O modelo Fermi-Ulam dissipativo também é um modelo que exibe grande número de atratores periódicos coexistentes. Neste trabalho, vamos estudar as principais propriedades quantitativas e qualitativas observadas neste sistema.

Capítulo 2

MODELO FERMI-ULAM CONSERVATIVO

2.1 Resumo

Neste Capítulo, estudaremos o modelo Fermi-Ulam. Discutiremos uma forma de descrever o modelo via mapeamento discreto. Construiremos os mapeamentos para as versões completa e simplificada do modelo. Analisaremos os resultados encontrados no espaço de fases das duas versões e caracterizaremos o comportamento caótico do sistema pela obtenção dos expoentes de Lyapunov.

2.2 Motivações

De acordo com estudos realizados por Enrico Fermi em 1949 [10], os raios cósmicos podem ser acelerados no espaço interestelar por interações com estruturas magnéticas oscilantes, um mecanismo que pode ser aproximado e conseqüentemente modelado como a colisão de uma partícula com uma fronteira rígida que se move no tempo.

Quando Enrico Fermi realizou este estudo, ele não utilizou equações matemáticas para descrever a dinâmica do modelo. Seu estudo concentrou em analisar o comportamento dinâmico do sistema apenas de forma qualitativa. Foi então que Stanislaw Ulam [11], propôs um sistema dinâmico que corresponde à essência do modelo original proposto por Fermi. Desse modo, ele pôde equacionar a dinâmica do sistema e estudar numericamente o modelo de forma mais detalhada. Este modelo, que é conhecido como modelo *Fermi-Ulam* [12, 13, 14], também chamado de modelo *bouncing ball*, consiste de uma partícula clássica confinada entre duas paredes rígidas e colidindo elasticamente com elas. Uma

das paredes é assumida como sendo fixa ao passo que a outra move-se periodicamente no tempo. Por ser um modelo relativamente simples, unidimensional e que produz resultados extremamente interessantes, serviu de instrumento de estudo de muitos físicos e matemáticos, que acrescentaram uma variedade de modificações no modelo e estudaram suas propriedades. Ainda nos dias de hoje o modelo Fermi-Ulam tem despertado muito interesse uma vez que muitas de suas propriedades dinâmicas podem ser descritas por leis de potência, etc.

Um modelo também já bastante conhecido, que é uma modificação do modelo de Fermi, é o chamado modelo *bouncer*. Ele foi proposto em 1977, por Pustyl'nikov [22], e consiste de uma partícula clássica que é submetida a um campo gravitacional constante. A partícula sofre colisões com uma plataforma móvel e, ao contrário do modelo Fermi-Ulam, dependendo das condições iniciais e parâmetros de controle, permite crescimento ilimitado de energia pela partícula (um fenômeno conhecido como *aceleração de Fermi*). Esta aparente contradição entre os dois modelos foi posteriormente explicada por Lichtenberg et al. [23].

A estrutura do espaço de fases de um sistema caracteriza os possíveis comportamentos dinâmicos daquele sistema. Este, por sua vez, pode apresentar graus distintos de organização e conter hierarquias de arranjos. A dinâmica determinística do modelo Fermi-Ulam fornece uma hierarquia de comportamentos que é observada no espaço de fases de tipo *misto*, como a existência de ilhas de estabilidade (*ilhas Kolmogorov-Arnold-Moser - KAM*) circundadas por um mar de caos que é caracterizado por um expoente de Lyapunov positivo. Tais expoentes informam se uma órbita apresenta ou não sensibilidade às condições iniciais. Se duas órbitas vizinhas divergem exponencialmente uma da outra com o tempo, então as órbitas apresentam sensibilidade às condições iniciais e são classificadas como caóticas. O interior das ilhas KAM consiste de uma região proibida para uma órbita pertencente ao mar de caos. Conseqüentemente, uma órbita que está vinculada ao interior de uma ilha KAM jamais sai da ilha, da mesma forma que uma órbita que está imersa no mar de caos jamais penetra na ilha KAM. Este mar de caos é limitado por uma curva invariante do tipo *spanning*, que leva esse nome por delimitar o espaço de fases. A existência das curvas invariantes *spanning* é que garante que o crescimento de energia do sistema será limitado. A curva invariante *spanning* de mais baixa energia ou a primeira curva invariante *spanning* divide o espaço de fases em duas regiões distintas: a região localizada abaixo da primeira curva, onde existem ilhas KAM envoltas por um mar caótico e a região localizada acima da primeira curva, onde são observadas curvas invariantes e, eventualmente, *pequenas* regiões caóticas.

Neste Capítulo, encontramos as equações do movimento para o modelo de Fermi. Discutimos uma simplificação no modelo, a qual chamamos de versão simplificada. Cons-

truímos os espaços de fases para as duas versões, onde observamos a existência de ilhas KAM, mares de caos e curvas invariantes spanning e verificamos o por quê deste modelo ser chamado de *Conservativo*. Finalmente, na última seção, caracterizamos e avaliamos numericamente os expoentes de Lyapunov para a seção correspondente no mar de caos localizado abaixo da primeira curva invariante spanning do espaço de fases dos modelos completo e simplificado.

2.3 O Modelo Completo

O modelo do acelerador de Fermi consiste de uma partícula clássica de massa unitária, confinada ao interior de duas paredes rígidas, sendo uma delas fixa e a outra dependente do tempo, sofrendo colisões elásticas. A parede fixa está localizada em $x = l$ e a parede móvel tem a equação da posição dada por $x_w = \varepsilon \cos(\omega t)$, onde ε é a amplitude de oscilação do movimento, ω é a frequência angular e t é o tempo. A Figura 2.1 ilustra o modelo.

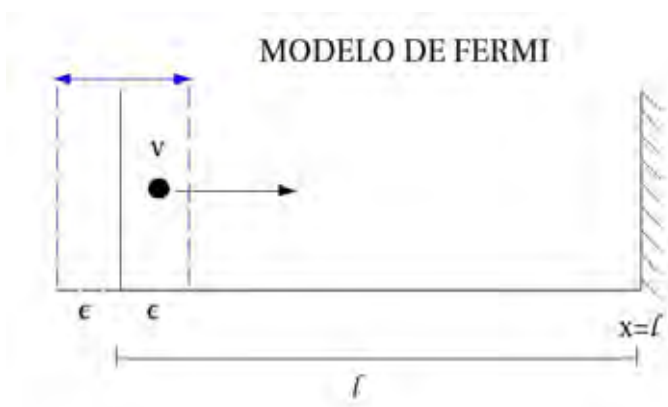


Figura 2.1: Esquema ilustrativo do modelo Fermi-Ulam.

A região compreendida no intervalo de $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ é chamada de *zona de colisão*. Aqui, l é a distância da parede fixa até a posição central da zona de colisão. A velocidade da parede móvel v_w é dada pela derivada da sua posição em relação ao tempo, ou seja, $v_w = (dx_w/dt)$, que fornece $v_w = -\varepsilon\omega \sin(\omega t)$. Considera-se que a velocidade da parede móvel não seja afetada pela colisão.

Algumas grandezas, neste modelo, são irrelevantes para a dinâmica do sistema. É o caso da distância l e da frequência angular ω . É fácil ver que l é dinamicamente irrelevante, pois, se a aumentarmos ou diminuirmos, a dinâmica do problema continua a mesma, exceto que o tempo de vôo entre os choques sofre uma correção que é diretamente proporcional à l . Para exemplificar a irrelevância da frequência angular ω , pensemos numa fita de videocassete rodando um filme qualquer, no modo normal, em um televisor. Se acelerarmos a fita fazendo com que ela rode mais rapidamente, vamos ver o filme todo

(embora na prática este procedimento não seja muito viável), mas num intervalo de tempo muito menor do que se estivesse sendo exibida no modo normal. Se ao contrário, fizermos com que a fita seja passada mais lentamente, como em modo de câmera lenta, também vamos ver o filme todo do mesmo jeito, só que agora num intervalo de tempo muito maior. Não importa se a fita será passada mais rápido ou mais lentamente, o seu conteúdo, ou o filme, será completamente exibido. O que muda, na realidade, é o tempo de exibição. A frequência angular ω comporta-se como o filme do nosso exemplo e podemos dizer que ela é equivalente a uma mudança na escala temporal, ou seja, ($t^* = \omega t$). Uma vez irrelevantes, podemos definir novas variáveis para as equações da posição e da velocidade da parede móvel no intuito de reduzirmos o número de parâmetros de controle do sistema. Definimos, assim, as seguintes variáveis adimensionais: $X_w = (x_w/l)$, $\epsilon = (\varepsilon/l)$, $V_w = [v_w/(\omega l)]$ e $\phi = (\omega t)$, onde ϕ é a fase da parede móvel imediatamente após sua colisão com a partícula. Em outras palavras, vamos dividir ambos os lados da equação da posição da parede móvel por l e ambos os lados da equação da velocidade da parede móvel por ωl . Desta forma, a equação da posição da parede móvel pode ser escrita como

$$X_w(t) = \epsilon \cos(\phi), \quad (2.1)$$

e da velocidade da parede móvel como

$$V_w(t) = -\epsilon \sin(\phi). \quad (2.2)$$

Salientamos que, a partir de agora, todas as equações que obtivermos serão definidas nestas novas variáveis.

É importante observar que, nestas novas variáveis, as Eqs. (2.1) e (2.2) tornaram-se adimensionais. Vamos verificar esta adimensionalidade analisando as dimensões de cada grandeza. Em $X_w = x_w/l$, onde a dimensão de x_w e l são ambas espaço e portanto se cancelam. Da mesma forma ocorre com $\epsilon = \varepsilon/l$, sendo ε a amplitude de oscilação do movimento da parede móvel, que tem a mesma dimensão de l . Para $V_w = v_w/(\omega l)$. Finalmente, em $\phi = \omega t$.

A dinâmica do modelo pode ser descrita pelo uso de um mapeamento discreto, bidimensional, não linear, escrito nas variáveis (V, ϕ) , onde V e ϕ correspondem, respectivamente, a velocidade da partícula e a fase da parede móvel imediatamente após a colisão. Antes de descrever o mapeamento, precisamos classificar as colisões da partícula com a parede móvel em dois casos distintos:

(1) A partícula sofre mais de uma colisão com a parede móvel antes de sair da zona de colisão, em $x \in [-\epsilon, \epsilon]$. A este tipo de colisão daremos o nome de *Colisão Múltipla*.

(2) A partícula sofre uma única colisão com a parede móvel e abandona a zona de colisão. A este tipo de colisão daremos o nome de *Colisão Simples*.

2.3.1 Colisões Múltiplas

Vamos agora construir o mapeamento para o caso em que a partícula colide sucessivas vezes com a parede móvel antes de deixar a zona de colisão. O mapeamento é definido como uma aplicação $T(V_n, \phi_n) = (V_{n+1}, \phi_{n+1})$, que nos permite determinar os valores dessas variáveis no instante t_{n+1} (imediatamente após a próxima colisão), uma vez conhecidos os valores dessas variáveis no instante t_n (imediatamente após a colisão anterior).

Considerando, como condição inicial, a situação em que a partícula, no instante $t = t_n$, tem posição dada por $X_p(t_n) = X_w(t_n) = \epsilon \cos(\omega t_n)$. A partícula está com velocidade inicial $V_n > 0$, uma vez que está viajando no sentido positivo do eixo x .

A fase do movimento da parede no instante da colisão é calculada a partir da fase no instante da colisão anterior corrigida em função do tempo decorrido entre estas colisões (t_c), $\phi_{n+1} = \phi_n + \omega t_c$. O instante de colisão é obtido da condição de que $X_w(t) = X_p(t)$. Sabemos que a velocidade da partícula do nosso modelo, entre colisões, é sempre constante, conseqüentemente sua aceleração é nula. Assim podemos, de forma mais genérica, utilizar a equação da posição da cinemática, $x - x_0 = v_0(t - t_0) + (1/2)a(t - t_0)^2$, para encontrarmos a posição da partícula no instante de colisão com a parede móvel. Considerando a aceleração nula, o segundo termo depois da igualdade da equação acima se torna zero, reduzindo nossa equação a $x - x_0 = v_0(t - t_0)$. Isolando x , encontramos $x = x_0 + v_0(t - t_0)$. Esta é a equação da posição que estávamos procurando. Combinando esta equação com os dados do nosso problema, obtemos que

$$X_w(t_{n+1}) = X_p(t_{n+1}) = X_p(t_n) + V_n t_c, \quad (2.3)$$

onde $X_w(t_{n+1})$ é a posição da parede móvel no instante da colisão ($n+1$) com a partícula, $X_p(t_n)$ é a posição da partícula no instante da colisão n e V_n é a velocidade da partícula no intervalo t_c entre as colisões. Combinando as equações anteriores, encontramos

$$\epsilon \cos(\phi_n + \omega t_c) = \epsilon \cos(\phi_n) + V_n t_c. \quad (2.4)$$

O valor da fase na próxima colisão é, então, dada por

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \phi_c, \quad (2.5)$$

onde ϕ_c é a mudança de fase do movimento da parede móvel ocorrida no intervalo entre colisões sucessivas t_c , $\phi_c = \omega t_c$.

A velocidade da partícula na próxima colisão, V_{n+1} , será dada pelo princípio da conservação de energia e momentum no referencial da parede móvel. A seguir, vamos detalhadamente descrever como se dá o processo de obtenção da velocidade da partícula através deste princípio. A Figura 2.2 mostra, de forma esquemática, como é feita a mudança de referenciais.

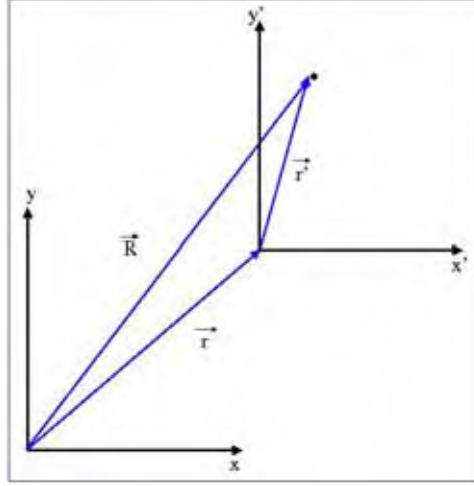


Figura 2.2: Esquema ilustrativo da mudança de referenciais. O plano xy representa o referencial inercial, ou seja, a parede fixa. O plano $x'y'$ representa o referencial não inercial, ou seja, a parede móvel.

Na Figura 2.2, o vetor \vec{R} representa a posição da partícula vista do referencial inercial (parede fixa), o vetor \vec{r}' representa a posição da partícula vista do referencial não inercial (parede móvel) e o vetor \vec{r} é a distância entre os dois referenciais. Da soma de vetores, temos que $\vec{R} = \vec{r}' + \vec{r}$. Derivando esta equação no tempo, encontramos a velocidade da partícula V_p medida no referencial inercial, dada por

$$V_p = V'_p + V_w, \quad (2.6)$$

onde V'_p é a velocidade da partícula vista do referencial não inercial e V_w é a velocidade da parede medida no referencial inercial. Identificando o instante imediatamente anterior ao choque pelo índice j e o instante imediatamente posterior ao choque pelo índice k , podemos reescrever a Eq. (2.6) nestes dois instantes,

$$V'_{p,j} = V_{p,j} - V_{w,j}, \quad (2.7)$$

$$V'_{p,k} = V_{p,k} - V_{w,k}. \quad (2.8)$$

No sistema não inercial, a velocidade da partícula depois da colisão é a mesma de antes da colisão (condição de colisões elásticas), porém com o sentido contrário, ou seja

$$V'_{p,k} = -V'_{p,j}. \quad (2.9)$$

Substituindo a Eq. (2.7) na Eq. (2.9), encontramos que, $V'_{p,k} = -(V_{p,j} - V_{w,j})$, ou ainda

$$V'_{p,k} = -V_{p,j} + V_{w,j}. \quad (2.10)$$

Tendo nesse sistema não inercial encontrado a velocidade da partícula depois da colisão, voltamos novamente ao referencial inercial da parede fixa, combinando a Eq. (2.8) com a

Eq. (2.10), obtendo que

$$V_{p,k} = -V_{p,j} + V_{w,j} + V_{w,k}. \quad (2.11)$$

Podemos reescrever esta expressão com novos índices, substituindo o índice (k) que caracteriza o instante imediatamente posterior ao impacto pelo índice ($n + 1$), que caracteriza o impacto ($n + 1$), uma vez que o mapeamento sempre considera as velocidades imediatamente após o impacto com a parede móvel. O lado direito da expressão será modificado levando-se em conta que a velocidade com que a partícula alcança a parede móvel imediatamente anterior ao impacto (índice j), é igual à velocidade da partícula imediatamente após o impacto anterior (índice n) e que a velocidade da parede imediatamente anterior ao impacto é igual à sua velocidade imediatamente após ao impacto e que é calculada no instante do impacto ($n + 1$). Assim,

$$V_{p,(n+1)} = -V_{p,(n)} + 2V_{w,(n+1)}. \quad (2.12)$$

Podemos agora escrever o mapeamento que descreve a dinâmica do modelo para colisões múltiplas da partícula com a parede móvel, dado pelas Eqs. (2.5) e (2.12), a seguir

$$T_M : \begin{cases} V_{n+1} = -V_n - 2\epsilon \sin(\phi_{n+1}) \\ \phi_{n+1} = \phi_n + \phi_c \quad \text{mod}(2\pi) \end{cases}, \quad (2.13)$$

onde o índice “ M ” denota colisões múltiplas. Aqui, ϕ_c é obtido numericamente pela solução da equação,

$$G(\phi_c) = \epsilon \cos(\phi_n + \phi_c) - \epsilon \cos(\phi_n) - V_n \phi_c = 0, \quad (2.14)$$

que foi definida pela Eq. (2.4). A solução da Eq. (2.14) é a menor raiz ϕ_c no intervalo $\phi_c \in (0, 2\pi]$. A interpretação física para o caso da Eq. (2.14) não admitir nenhuma solução neste intervalo, é que a partícula não sofreu colisões múltiplas com a parede móvel e abandonou a zona de colisão.

2.3.2 Cálculo da Matriz Jacobiana para Colisões Múltiplas

Vamos agora calcular a matriz Jacobiana, que é a matriz cujos coeficientes são dados pelas derivadas parciais em relação às equações do mapeamento. Esta matriz é escrita como

$$J_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} \end{pmatrix}.$$

Calculando os coeficientes, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} &= -1 - 2\epsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n}, \\ \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} &= -2\epsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n}, \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} &= \frac{\partial \phi_c}{\partial V_n}, \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} &= 1 + \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n},\end{aligned}$$

onde os termos $(\partial \phi_c / \partial V_n)$ e $(\partial \phi_c / \partial \phi_n)$ são obtidos derivando-se implicitamente a Eq. (2.14). Assim,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_c}{\partial V_n} &= \frac{\phi_c}{-V_n - \epsilon \sin(\phi_{n+1})}, \\ \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n} &= \frac{\epsilon \sin(\phi_{n+1}) - \epsilon \sin(\phi_n)}{-V_n - \epsilon \sin(\phi_{n+1})}.\end{aligned}$$

O determinante desta matriz Jacobiana (J_n) é dado por

$$\det(J_n) = \frac{V_n + \epsilon \sin(\phi_n)}{V_{n+1} + \epsilon \sin(\phi_{n+1})}. \quad (2.15)$$

De posse do determinante da matriz Jacobiana, podemos verificar por que este modelo do acelerador de Fermi é chamado de conservativo. Para isso, vamos analisar como se dá a evolução das áreas do espaço de fases do modelo, como mostra a Figura 2.3. A evolução

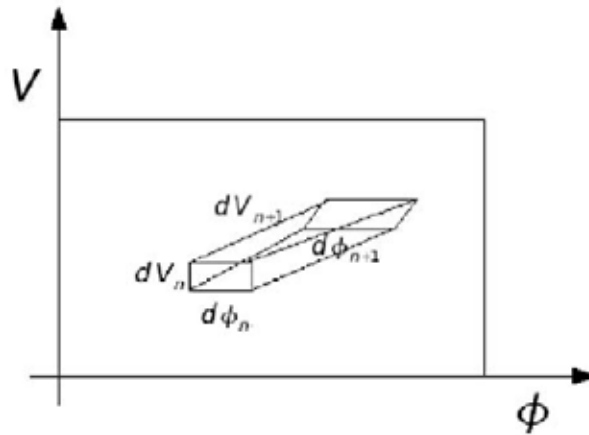


Figura 2.3: Exemplo de como se dá a evolução de uma área infinitesimal do espaço de fases do modelo de Fermi. Na figura, $dA = dV \times d\phi$.

das áreas, como é dada pelo Teorema de Liouville [33], é dada pelas diferenciais a seguir,

$$d(A_{n+1}) = \det(J_n) d(A_n).$$

A equação acima nos diz que a área no instante $(n + 1)$, tem que ser igual ao determinante da matriz Jacobiana vezes a área num dado instante original (n) . Substituindo o valor do determinante de J_n , obtemos que

$$d(A_{n+1}) = \frac{V_n + \epsilon \sin(\phi_n)}{V_{n+1} + \epsilon \sin(\phi_{n+1})} d(A_n).$$

A evolução das áreas, por definição, é dada pela evolução da velocidade da partícula e da fase da parede móvel no instante da colisão. Reorganizando os termos, ficamos com

$$d(V_{n+1}) d(\phi_{n+1}) (V_{n+1} + \epsilon \sin(\phi_{n+1})) = (V_n + \epsilon \sin(\phi_n)) d(V_n) d(\phi_n).$$

Chamando o termo do lado esquerdo do sinal da igualdade de $(d\mu_{n+1})$ e o termo do lado direito do sinal de igualdade de $(d\mu_n)$, obtemos,

$$d\mu_{n+1} = d\mu_n.$$

Podemos observar que todos os termos com índice $(n + 1)$ ficaram do lado esquerdo da equação enquanto que os termos com índice (n) ficaram do lado direito. Este resultado nos mostra que a evolução das áreas se dá exatamente da mesma forma e que, portanto, se preservam. Em outras palavras, a área no instante $(n + 1)$ é a mesma que no instante (n) , ou seja, houve conservação de área do espaço de fases. É importante enfatizar que o formato da área no instante inicial da evolução não tem necessariamente o mesmo formato da área no instante final da evolução. Como veremos na seção (2.3.3), onde as colisões com a parede móvel são simples, o mesmo determinante para a matriz Jacobiana é encontrado, confirmando assim, a conservação da área do espaço de fases.

2.3.3 Colisões Simples

Passemos agora à construção do mapeamento para o caso em que a partícula sofre uma única colisão com a parede móvel.

Num instante inicial t_n , supomos novamente que a posição da partícula seja a mesma que a posição da parede móvel, $X_p(t_n) = X_w(t_n)$, e que sua velocidade inicial seja positiva, $V_n > 0$, uma vez que a partícula está se deslocando no sentido positivo ao longo do eixo x . A partícula viaja em direção à parede fixa, colide elasticamente e é refletida em direção à parede móvel. Para obter a fase da parede móvel na próxima colisão, precisamos determinar o tempo que a partícula gasta para percorrer este caminho, saindo de $X_p(t_n) = X_w(t_n)$ e viajar até $x = l$, ser refletida e viajar novamente até a próxima colisão. A Figura 2.4 mostra o trajeto percorrido pela partícula.

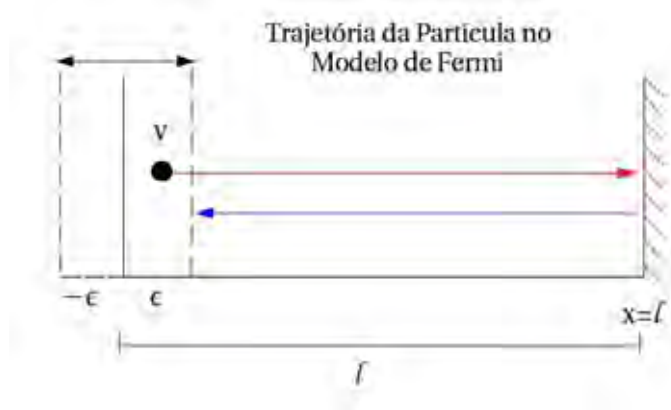


Figura 2.4: *Trajetória percorrida pela partícula saindo da zona de colisão, colidindo elasticamente com a parede fixa, sendo refletida e entrando novamente na zona de colisão.*

Considerando a velocidade constante V_n com que a partícula viaja para a direita, temos que $V_n = [(l - \epsilon \cos(\phi_n))/t_d]$, onde t_d é o intervalo de tempo que a partícula gasta viajando para a direita. Isolando t_d , encontramos

$$t_d = \frac{l - \epsilon \cos(\phi_n)}{V_n}.$$

Considerando, agora, a velocidade constante V_e com que a partícula viaja para a esquerda, com $V_e = -V_n$ dado o choque elástico, temos que $V_n = [(l - \epsilon)/t_e]$, onde t_e é o tempo que a partícula gasta viajando para a esquerda, até alcançar a zona de colisão. Isolando t_e , encontramos

$$t_e = \frac{l - \epsilon}{V_n}.$$

De volta à zona de colisão, a partícula colide com a parede móvel no instante em que $X_w(t) = X_p(t)$ e, para que esta condição seja satisfeita, vamos utilizar a equação da posição dada pela Eq. (2.1). Considerando: o tempo de viagem da partícula para a direita (t_d), do instante do choque com a parede móvel (t_n) até o choque com a parede fixa, incluindo o tempo para abandonar a zona de colisão; o tempo de viagem da partícula para a esquerda (t_e), da parede fixa até a entrada na zona de colisão; e o intervalo de tempo (t_c) entre a entrada na zona de colisão e a próxima colisão, podemos substituir estes valores na Eq. (2.1) e obtermos,

$$\epsilon \cos[\omega(t_n + t_d + t_e + t_c)] = \epsilon - V_n t_c. \quad (2.16)$$

O sinal da velocidade é negativo porque a partícula está viajando para a esquerda, no sentido negativo do eixo x antes de colidir com a parede móvel. O valor da fase ϕ_{n+1} no instante do choque ($n + 1$), será dado pelo argumento da função cosseno da Eq. (2.16), ou seja

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \phi_d + \phi_e + \phi_c \quad \text{mod}(2\pi), \quad (2.17)$$

onde $\phi_d = \omega t_d$, $\phi_e = \omega t_e$, $\phi_n = \omega t_n$ e $\phi_c = \omega t_c$. O $\text{mod}(2\pi)$ denota que a fase está limitada ao intervalo $[0, 2\pi)$.

A velocidade da partícula, no momento da colisão com a parede móvel, novamente será dada pelo princípio da conservação de energia e momentum no referencial da parede móvel discutido na seção anterior. Assim, da Eq. (2.12), temos que $V_{n+1} = -V_e + 2V_w$. Considerando como anteriormente que $V_e = -V_n$ devido ao choque elástico, obtemos a equação,

$$V_{n+1} = V_n + 2V_w. \quad (2.18)$$

Conhecemos, também, o valor de $V_w(t_n)$ no instante t_n , dado pela Eq. (2.2). Analogamente, no instante t_{cn+1} , a Eq. (2.2) fica $V_w = -\epsilon \sin(\phi_n + \phi_d + \phi_e + \phi_c)$. Note que o argumento da função seno desta equação é o próprio ϕ_{n+1} . Considerando que a velocidade da partícula para a esquerda é negativa e substituindo na Eq. (2.18) estes valores encontrados, a velocidade da partícula na próxima colisão é então dada por

$$V_{n+1} = V_n - 2\epsilon \sin(\phi_{n+1}), \quad (2.19)$$

ou seja, a velocidade da partícula imediatamente após o choque com a parede móvel.

Assim, as Eqs. (2.17) e (2.19) formam o mapeamento geral para o caso (2.3.3), dado por

$$T_S : \begin{cases} V_{n+1} = V_n - 2\epsilon \sin(\phi_{n+1}) \\ \phi_{n+1} = \phi_n + \phi_d + \phi_e + \phi_c \quad \text{mod}(2\pi) \end{cases}, \quad (2.20)$$

onde o índice “S” denota colisões simples.

Para obtermos ϕ_c , precisamos encontrar uma raiz para a Eq. (2.16), que é uma equação transcendental. Desse modo, ϕ_c não pode ser obtido analiticamente de forma explícita, mas apenas numericamente. Desta forma, a Eq. (2.16) nos dá que

$$F(\phi_c) = \epsilon \cos(\phi_n + \phi_d + \phi_e + \phi_c) - \epsilon + V_n \phi_c = 0. \quad (2.21)$$

A função $F(\phi_c)$ pode admitir mais de uma raiz no intervalo $\phi_c \in [0, 2\pi)$, mas a colisão entre a parede móvel e a partícula é representada pela raiz de menor valor dentro deste intervalo.

2.3.4 Cálculo da Matriz Jacobiana para Colisões Simples

Os coeficientes da matriz Jacobiana (J_n), para este caso, são dados por

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} &= 1 - 2\epsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n}, \\ \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} &= -2\epsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n}, \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} &= \frac{\epsilon \cos(\phi_n) - l}{V_n^2} + \frac{\epsilon - l}{V_n^2} + \frac{\partial \phi_c}{\partial V_n}, \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} &= 1 + \frac{\epsilon \sin(\phi_n)}{V_n} + \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n}.\end{aligned}$$

Os termos $(\partial \phi_c / \partial V_n)$ e $(\partial \phi_c / \partial \phi_n)$ são obtidos derivando-se implicitamente a Eq. (2.21) e são dados por

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_c}{\partial V_n} &= \frac{\epsilon \sin(\phi_{n+1}) \left[\frac{\epsilon \cos(\phi_n) - l}{V_n^2} + \frac{\epsilon - l}{V_n^2} \right] - \phi_c}{V_n - \epsilon \sin(\phi_{n+1})}, \\ \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n} &= \frac{\epsilon \sin(\phi_{n+1}) \left[1 + \frac{\epsilon \sin(\phi_n)}{V_n} \right]}{V_n - \epsilon \sin(\phi_{n+1})}.\end{aligned}$$

Encontrados os coeficientes, agora podemos obter o determinante da matriz Jacobiana (J_n) que, depois de algum algebrismo, nos dá que

$$\det(J_n) = \frac{V_n + \epsilon \sin(\phi_n)}{V_{n+1} + \epsilon \sin(\phi_{n+1})}. \quad (2.22)$$

Pela mesma análise da evolução das áreas do espaço de fases discutida na seção anterior, podemos concluir que o determinante da matriz Jacobiana para o caso das colisões simples também conserva área do espaço de fases do modelo completo do acelerador de Fermi. Por esta razão, este modelo é chamado de *Modelo Conservativo*.

A matriz Jacobiana também constitui um dos requisitos para se obter os expoentes de Lyapunov de um determinado sistema e este será o assunto da seção 2.5.

Finalmente, um mapeamento geral, incluindo as equações do mapa (2.13), da seção 2.3.1 e as equações do mapa (2.20), da seção (2.3.3), pode ser escrito da seguinte forma

$$T : \begin{cases} V_{n+1} = V_n^* - 2\epsilon \sin(\phi_{n+1}) \\ \phi_{n+1} = \phi_n + \Delta T_n \quad \text{mod}(2\pi) \end{cases}, \quad (2.23)$$

onde o termo $V_n^* = -V_n$ e o termo $\Delta T_n = \phi_c$, com ϕ_c obtido da Eq. (2.14), para o caso das Colisões Múltiplas. No caso das Colisões Simples, o termo $V_n^* = V_n$ e o termo $\Delta T_n = ((1 - \epsilon \cos(\phi_n))/V_n) + [(1 - \epsilon)/V_n] + \phi_c$, com ϕ_c obtido da Eq. (2.21).

2.3.5 Resultados Numéricos para o Modelo Completo

A Figura 2.5 mostra o espaço de fase para o modelo completo do acelerador de Fermi.

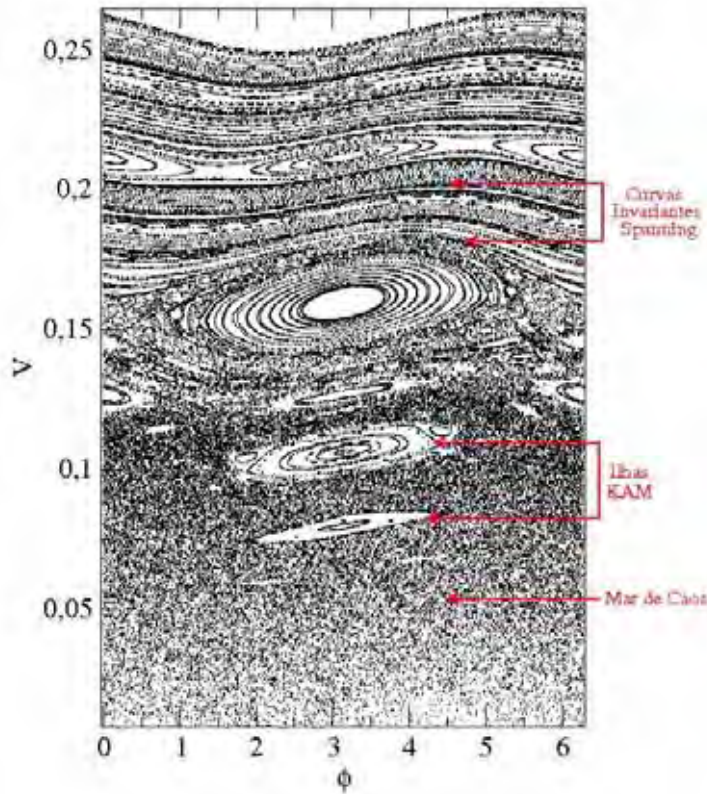


Figura 2.5: Espaço de fase para o modelo completo do acelerador de Fermi. O parâmetro de controle usado na construção da figura foi $\epsilon = 5 \times 10^{-3}$.

Na construção da Figura 2.5 foram usadas 400 condições iniciais iteradas a partir das equações do mapa (2.23), de modo que a fase e a velocidade iniciais foram divididas em 20 incrementos igualmente espaçados nos intervalos de $\phi_0 \in [0, 2\pi]$ e $V_0 \in [0.01, 0.25]$. O procedimento para saber se houve ou não colisão sucessiva da partícula com a parede móvel consiste em encontrar, numericamente, raízes (ou zeros) para as funções $G(\phi_c)$ e $F(\phi_c)$, dadas pelas Eqs. (2.14) e (2.21), respectivamente. Se a função $G(\phi_c)$ admitir solução no intervalo de $\phi_c \in (0, 2\pi]$, então houve colisão múltipla com a parede móvel e as equações do mapa (2.13) são iteradas. Caso contrário, uma raiz para a função $F(\phi_c)$ é encontrada e as equações do mapa (2.20) são iteradas. Em seguida, uma nova raiz para $G(\phi_c)$ é procurada e todo o processo se repete até que o número de iterações estabelecido no início da simulação seja atingido.

No espaço de fase da Figura 2.5 podemos observar que a região de mais baixa energia é limitada por uma curva invariante do tipo spanning. Nesta região existem ilhas KAM que por sua vez estão envoltas por um mar de caos. As ilhas KAM têm a característica de

não permitirem o trânsito livre de uma órbita entre seu interior e o mar de caos. Assim, a evolução de uma condição inicial que esteja em seu interior jamais sai de lá, da mesma forma que uma órbita pertencente ao mar de caos jamais penetra na ilha KAM. A região que está acima da primeira curva invariante spanning é a região de mais alta energia e apresenta basicamente pequenas ilhas KAM separadas por outras curvas invariantes spanning e podem, eventualmente, possibilitar o surgimento de pequenos mares de caos entre as curvas.

2.4 O Modelo Simplificado

O estudo numérico de equações transcendentais, como as obtidas no modelo completo do acelerador de Fermi, Eqs. (2.14) e (2.21), são eventualmente muito complicadas e exigem grande esforço computacional. Conseqüentemente, um tempo de simulação para obtenção dos resultados bastante elevado. Buscando minimizar estas dificuldades, uma versão simplificada do modelo foi proposta [1] e tem sido muito utilizada na literatura pois, como veremos, produz resultados muito semelhantes aos do modelo completo. Esta simplificação, além de acelerar as simulações numéricas, mantém a não linearidade do problema e muitas de suas propriedades dinâmicas.

No modelo simplificado do acelerador de Fermi considera-se que as duas paredes estão fixas, uma em $x = 0$ e a outra em $x = 1$, já considerando variáveis adimensionais. Ao colidir com uma das paredes (com a parede em $x = 0$, por exemplo), a partícula sofre uma troca de energia e momentum como se a parede estivesse se movendo. As equações transcendentais no modelo completo são obtidas no momento em que a partícula colide com a parede móvel. Uma vez que a parede em $x = 0$ no modelo simplificado é assumida como sendo fixa, as equações produzidas no ato da colisão não são mais transcendentais, reduzindo-se significativamente o tempo das simulações numéricas.

O espaço de fases para o modelo simplificado do acelerador de Fermi é bastante similar ao do modelo completo, apresentando a mesma hierarquia de comportamentos com ilhas de KAM, mar de caos e curvas invariantes spanning. Existe apenas uma pequena diferença na região perto das velocidades aproximadamente iguais a zero, que discutiremos detalhadamente nesta seção.

Para a construção do mapeamento, supomos que a partícula parte da posição de $x = 0$ e viaja em direção à parede em $x = 1$. A velocidade inicial da partícula é $V_0 > 0$, pois está se deslocando na direção positiva do eixo x . O tempo gasto pela partícula neste trajeto é, então, $(1/V_0)$. A partícula colide elasticamente com a parede em $x = 1$ e tem sua velocidade invertida. Para percorrer o trajeto de volta, a partícula gasta um tempo correspondente a $(1/V_0)$. Portanto, para completar uma viagem partindo de $x = 0$, colidir

em $x = 1$ e retornar em $x = 0$, a partícula gasta um tempo total de $(2/V_0)$. Logo, a fase na próxima colisão será dada pela soma da fase inicial ϕ_0 com o tempo total gasto para completar o trajeto, ou seja, $\phi_1 = [\phi_0 + (2/V_0)]$.

A velocidade inicial da parede em $x = 0$ é dada por $V = -\epsilon \sin(\phi)$, em analogia ao modelo completo. Pelo princípio da conservação de energia e momentum e pela Eq. (2.12), encontramos a expressão da velocidade da partícula na próxima colisão, que é dada por $V_1 = V_0 - 2\epsilon \sin(\phi_1)$. Para evitar que V_1 assumia valores negativos, o que corresponderia à partícula viajar em uma região externa às paredes, impomos que a velocidade da partícula seja sempre positiva, introduzindo arbitrariamente na expressão da velocidade V_1 uma função *módulo*. Eliminadas as divergências, o mapeamento para o modelo simplificado do acelerador de Fermi pode ser escrito como

$$T : \begin{cases} V_{n+1} = |V_n - 2\epsilon \sin(\phi_{n+1})| \\ \phi_{n+1} = \phi_n + \frac{2}{V_n} \quad \text{mod}(2\pi) \end{cases} \quad (2.24)$$

A matriz Jacobiana para este modelo simplificado tem coeficientes dados por

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} &= \text{sign}[V_n - 2\epsilon \sin(\phi_{n+1})][1 - 2\epsilon \cos(\phi_{n+1})] \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n}, \\ \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} &= \text{sign}[V_n - 2\epsilon \sin(\phi_{n+1})][-2\epsilon \cos(\phi_{n+1})] \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n}, \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} &= \frac{2}{V_n^2}, \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} &= 1. \end{aligned}$$

e o determinante da matriz é

$$\det(J_n) = \text{sign}[V_n - 2\epsilon \sin(\phi_{n+1})].$$

Este determinante nos dá exatamente a idéia do conceito de módulo. Se a expressão de V_{n+1} for maior que zero, então o sinal da expressão dentro do módulo é $(+1)$, ao passo que, se for negativa, a expressão dentro do módulo é (-1) . Assim, fica assegurado que a partícula ficará confinada na região entre as paredes e o determinante de (J_n) pode ser escrito como,

$$\det(J_n) = \pm 1. \quad (2.25)$$

Pelo teorema de Liouville [3], que diz que se o determinante da matriz Jacobiana de um sistema é igual a 1 ou -1 , então o sistema é conservativo. Logo, o modelo simplificado do acelerador de Fermi também conserva área do espaço de fase.

2.4.1 Resultados Numéricos para o Modelo Simplificado

Para construirmos o espaço de fases do modelo simplificado, iteramos as equações do mapa (2.24) utilizando 400 condições iniciais divididas em 20 incrementos igualmente espaçados nos intervalos de $\phi_0 = [0, 2\pi]$ e $V_0 = [0.01, 0.25]$ (os mesmos utilizados no modelo completo). Cada condição inicial foi iterada 500 vezes. A Figura 2.6 mostra o espaço de fase para o modelo simplificado do acelerador de Fermi.

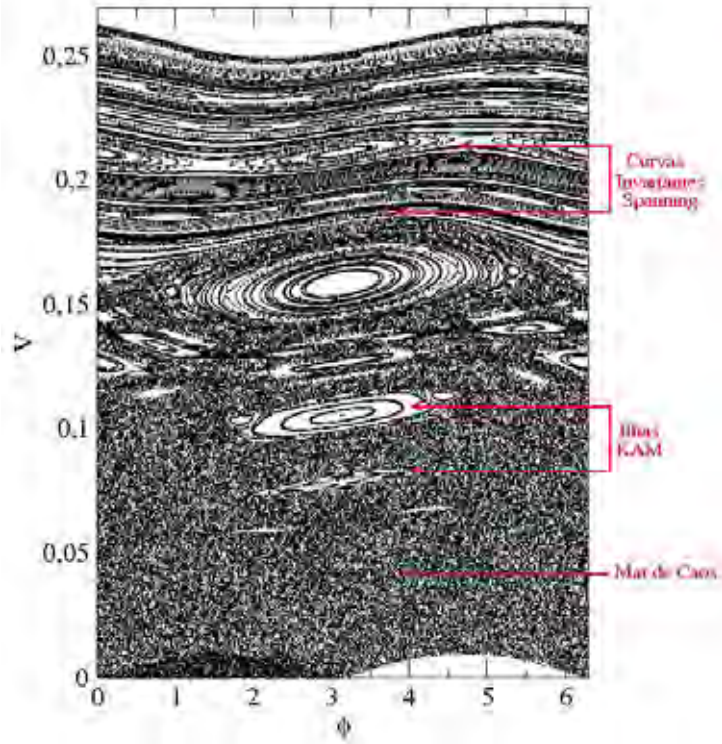


Figura 2.6: Espaço de fase para o modelo simplificado do acelerador de Fermi. O parâmetro de controle usado na construção da figura foi $\epsilon = 5 \times 10^{-3}$.

Podemos observar que o espaço de fase para o modelo simplificado é muito semelhante ao do modelo completo, apresentando ilhas KAM circundadas por um mar de caos na região de mais baixa energia, limitada pela primeira curva invariante spanning e ilhas KAM separadas por outras curvas invariantes spanning na região de mais alta energia (acima da primeira curva). A diferença notada se limita à região com velocidades próximas de zero e se deve à introdução do módulo na equação da velocidade do mapeamento.

2.5 Os Expoentes de Lyapunov

Vimos, nas seções anteriores, que o espaço de fase do modelo do acelerador de Fermi apresenta uma região caótica limitada pela primeira curva invariante spanning, na região de mais baixa energia. Sabemos que o que determina um comportamento caótico é a perda de previsibilidade de condições iniciais muito próximas e que uma única condição

inicial iterada naquela região caótica do espaço de fase do modelo de Fermi é suficiente para preencher toda a região acessível. Os expoentes de Lyapunov são bons indicadores de caos e muito utilizados na caracterização de tais sistemas. Eles indicam se uma órbita é sensível ou não às condições iniciais, ou seja, se elas se separam uma da outra com o passar do tempo. Nosso objetivo, nesta seção, é utilizar o cálculo do expoente de Lyapunov para caracterizar o comportamento caótico encontrado no espaço de fase do modelo conservativo do acelerador de Fermi.

Para obter os expoentes de Lyapunov, precisamos verificar se duas órbitas que partindo de condições iniciais vizinhas divergem exponencialmente uma da outra com o passar do tempo. Se tal divergência ocorre, então as órbitas são classificadas como caóticas. Se duas órbitas permanecerem próximas ou divergem apenas linearmente, então não são sensíveis às condições iniciais e, conseqüentemente, não são caóticas.

Vamos agora efetuar os cálculos para obtenção dos expoentes de Lyapunov. Iniciaremos com um mapeamento unidimensional e generalizaremos para mapas bidimensionais.

Seja o mapa unidimensional,

$$X_{n+1} = F(X_n). \quad (2.26)$$

Considerando o mapeamento discreto unidimensional representado por $F(X)$ e X_0 uma condição inicial, podemos definir a distância relativa entre duas trajetórias, na n -ésima iteração, pela razão,

$$\frac{d}{\epsilon} \equiv \frac{|F^{(n)}(X_0 + \epsilon) - F^{(n)}(X_0)|}{\epsilon}, \quad (2.27)$$

onde ϵ é arbitrariamente pequeno. Considerando o limite em que $\epsilon \rightarrow 0$, podemos definir,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \frac{F^{(n)}(X_0 + \epsilon) - F^{(n)}(X_0)}{\epsilon} \right| = |F'^{(n)}(X_0)| \equiv e^{(\lambda n)}. \quad (2.28)$$

Tomando logaritmo de ambos os lados da Eq. (2.28) e reorganizando os termos, obtemos que o expoente de Lyapunov, para mapeamentos unidimensionais, é dado por,

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln |F'^{(n)}(X_0)|. \quad (2.29)$$

Considerando o caso em que $n \rightarrow \infty$, a expressão para o cálculo do expoente de Lyapunov é dada por,

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |F'(X_i)|. \quad (2.30)$$

Em mapas bidimensionais, como é o caso do modelo de Fermi, os expoentes de Lyapunov são dados por

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln |\Lambda_j^i|, \quad \text{com } j = 1, 2. \quad (2.31)$$

O termo Λ_j^i representa os autovalores da matriz $M = \prod_{i=1}^n J_i(V_i, \phi_i)$ e J_i é a matriz Jacobiana do mapeamento avaliada na órbita (V_i, ϕ_i) . É importante salientar que a implementação direta de um algoritmo computacional para avaliar a Eq. (2.31), implica em profundas limitações para se obter a matriz M . Mesmo no limite de pequenos (n), as componentes de M podem assumir muitas ordens de grandeza diferentes para órbitas caóticas e atratores periódicos, tornando impraticável a implementação do algoritmo. Em outras palavras, o cálculo da matriz M pode gerar problemas com “overflow” do ponto de vista numérico. Para evitar tais problemas, vamos utilizar um algoritmo chamado de *Algoritmo de Triangularização*, proposto por Eckman em 1985 [34].

O algoritmo consiste em escrever J a partir do produto de uma matriz Triangular (T) por uma matriz Ortogonal (Θ), tal como,

$$J = \Theta T,$$

onde J é a matriz Jacobiana.

Uma matriz é dita ser ortogonal quando sua transposta é igual à sua inversa, ou seja,

$$\Theta^{-1} = \Theta^T.$$

Usando estas definições, podemos reescrever a matriz M como

$$M = J_n J_{n-1} J_{n-2} \dots, J_2 J_1 = J_n J_{n-1} \dots, J_2 \Theta_1 \Theta_1^{-1} J_1,$$

onde $T_1 = \Theta_1^{-1} J_1$. Um produto de $J_2 \Theta_1$ define uma nova J_2' . Em um próximo passo, é possível mostrar que

$$M = J_n J_{n-1} \dots, J_3 \Theta_2 \Theta_2^{-1} J_2' T_1.$$

O mesmo procedimento pode ser usado para obter $T_2 = \Theta_2^{-1} J_2'$ e assim por diante. Usando este procedimento, o problema é reduzido a avaliar os elementos da diagonal principal de T : T_{11} e T_{22} . Para tanto, devemos encontrar as expressões de $\Theta_1^{-1} J_1 = T_1$, dadas por

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}.$$

Desenvolvendo o produto das matrizes acima, encontramos

$$\begin{pmatrix} j_{11} \cos(\theta) + j_{21} \sin(\theta) & j_{12} \cos(\theta) + j_{22} \sin(\theta) \\ -j_{11} \sin(\theta) + j_{21} \cos(\theta) & -j_{12} \sin(\theta) + j_{22} \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}.$$

Como é uma igualdade de matrizes, podemos escrever

$$\begin{aligned} -j_{11} \sin(\theta) + j_{21} \cos(\theta) &= 0, \\ -j_{11} \sin(\theta) &= -j_{21} \cos(\theta), \\ \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} &= \frac{j_{21}}{j_{11}}. \end{aligned}$$

Sabemos que,

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}, \\ \cos(\theta) &= \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}. \end{aligned}$$

Para melhor visualizar quem são o cateto oposto e o cateto adjacente das razões trigonométricas acima, vamos utilizar a ilustração contida na Figura 2.7.

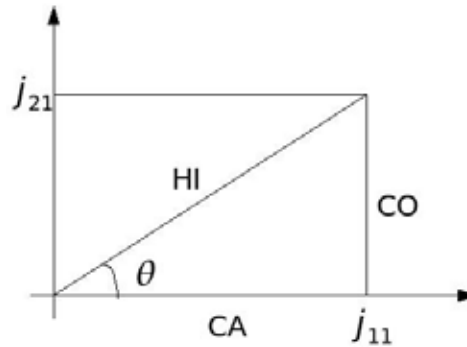


Figura 2.7: No triângulo retângulo da figura, encontramos quem são o cateto oposto (CO) e o cateto adjacente (CA) usados na obtenção do $\sin(\theta)$ e do $\cos(\theta)$ e aplicamos o Teorema de Pitágoras para encontrarmos a hipotenusa (HI).

Da Figura 2.7, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= \frac{j_{21}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}, \\ \cos(\theta) &= \frac{j_{11}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}. \end{aligned}$$

Dessas expressões, podemos agora reescrever os autovalores da matriz T , ou seja

$$T_{11} = j_{11} \cos(\theta) + j_{21} \sin(\theta) = \frac{j_{11}^2 + j_{21}^2}{\sqrt{(j_{11}^2 + j_{21}^2)}}, \quad (2.32)$$

$$T_{22} = j_{22} \cos(\theta) + j_{12} \sin(\theta) = \frac{j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21}}{\sqrt{(j_{11}^2 + j_{21}^2)}}. \quad (2.33)$$

Encontrados os autovalores T_{11} e T_{22} da matriz Triangular, podemos encontrar numericamente os expoentes de Lyapunov para uma órbita caótica do espaço de fases do modelo de Fermi.

Em sistemas Hamiltonianos, os expoentes de Lyapunov aparecem aos pares, com sinais contrários (*Robert C. Hilborn*) [35]. O expoente que determina se uma órbita é caótica é o expoente de Lyapunov positivo, pois, pela Eq. (2.28), vemos que com λ positivo, o valor da distância d vai aumentando exponencialmente, caracterizando uma separação entre as órbitas vizinhas cada vez maior. Esta perda de previsibilidade das condições iniciais é o que define uma órbita caótica. A Figura 2.8 mostra a convergência dos expoentes de Lyapunov, para o modelo completo de Fermi, em função do número de iterações.

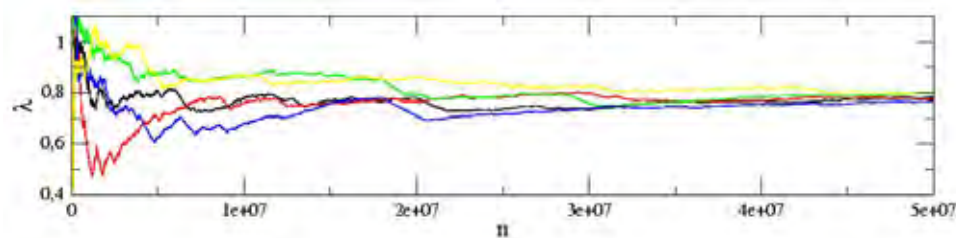


Figura 2.8: *Convergência dos expoentes de Lyapunov para o modelo completo do acelerador de Fermi.*

Foram usadas cinco condições iniciais diferentes, iteradas 5×10^7 vezes na região de mais baixa energia do espaço de fases, correspondente à região do mar de caos. Este valor do número de iterações foi escolhido por possibilitar a visualização de uma boa convergência das curvas. As condições iniciais utilizadas na construção da figura foram $V_0 = 1 \times 10^{-4}$, $\epsilon = 1 \times 10^{-4}$ e cinco valores de ϕ , no intervalo $\phi \in [0, 2\pi)$. Para estes parâmetros de controle, o expoente de Lyapunov positivo encontrado foi $\lambda = 0.78 \pm 0.02$. O erro ± 0.02 representa o desvio padrão das cinco séries temporais. Utilizamos, em nossas simulações, a representação numérica de dupla precisão no compilador FORTRAN.

Também calculamos os expoentes de Lyapunov para o modelo simplificado do acelerador de Fermi. Como mostra a Figura 2.9, uma boa convergência dos resultados foi obtida, como função do número de colisões.

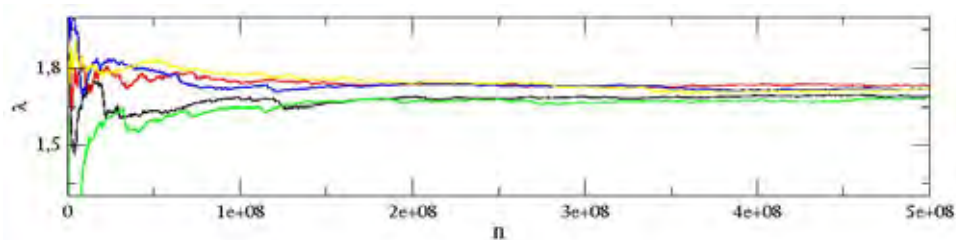


Figura 2.9: *Convergência dos expoentes de Lyapunov para o modelo simplificado do acelerador de Fermi.*

Os parâmetros de controle usados foram $\epsilon = 1 \times 10^{-4}$, $V_0 = 1 \times 10^{-4}$ e cinco valores de ϕ , no intervalo $\phi \in [0, 2\pi)$. Os cinco valores estão mostrados na figura, em cores diferentes. Cada condição inicial foi iterada 5×10^8 vezes, utilizando-se precisão dupla. O expoente de Lyapunov obtido foi $\lambda = 1.69 \pm 0.04$. O erro ± 0.04 está representado pelo desvio padrão das 5 condições iniciais iteradas.

Nossos resultados mostram que os pares de expoentes de Lyapunov encontrados possuem mesmo módulo e sinais contrário, cuja soma é nula. Este fato era esperado uma vez que o modelo do acelerador de Fermi, tanto completo quanto simplificado, é descrito por um sistema Hamiltoniano e tem medida da área do espaço de fases preservada.

Capítulo 3

MODELO DO ACELERADOR DE FERMÍ COM FORÇA DE ARRASTO VISCOSO DO TIPO

$$F \propto -V$$

3.1 Resumo

Neste Capítulo, o modelo do acelerador de Fermi é estudado em uma versão dissipativa. A introdução de dissipação é feita via arrasto viscoso, a qual assumimos ser proporcional à velocidade da partícula. A partícula perde energia à medida que atravessa o fluido e a dinâmica do modelo é completamente descrita conhecendo seus estados. Cada estado é determinado após a partícula colidir com a parede móvel. Conhecendo a nova velocidade da partícula v e o instante t em que ocorre a colisão, construiremos o mapeamento que descreve a dinâmica do modelo. Uma versão simplificada é apresentada e, finalmente, discutiremos nossos resultados numéricos para as duas versões.

3.2 Motivações

No Capítulo 2, apresentamos detalhadamente o modelo do acelerador de Fermi unidimensional na ausência de dissipação. Construimos o mapeamento para as versões completa e simplificada do modelo, obtivemos o espaço de fases para as duas versões e mostramos que a região caótica de mais baixa energia, que é limitada pela primeira curva invariante spanning do espaço de fases, é caracterizada por um expoente de Lyapunov

positivo.

Sabemos que existem muitas maneiras de se introduzir uma força de dissipação num determinado sistema. No modelo de Fermi, especificamente, uma destas maneiras é considerar que a partícula sofre colisões inelásticas com as paredes, fazendo com que a partícula sofra uma perda fracional de energia a cada colisão com as paredes. Resultados na literatura mostram, entre outras propriedades importantes, que este tipo de dissipação leva o sistema a apresentar um fenômeno conhecido como *Crise de Fronteira* [28]. Uma das conseqüências de um evento de crise de fronteira é a destruição repentina de um atrator caótico. Esta destruição é causada por um cruzamento de variedades estáveis e instáveis oriundas de um mesmo ponto de sela.

Neste capítulo, vamos nos concentrar na introdução de dissipação no modelo de Fermi via um arrasto viscoso. Vamos considerar que a força de dissipação é proporcional à velocidade da partícula e que a partícula perde energia à medida que atravessa o fluido. Os cálculos que mostraremos neste Capítulo foram inspirados pelo artigo de Leonel e McClintock [30]. Trabalho, este, que serviu de motivação para elaborarmos o presente projeto de mestrado e continuarmos a pesquisar as mais diferentes e interessantes propriedades que uma força de arrasto gasoso pode acarretar na dinâmica do modelo. No decorrer do Capítulo, vamos mostrar as principais mudanças sofridas no sistema causadas pela introdução da força de arrasto. Vamos mostrar que existem diferenças nos resultados obtidos para a versão completa e para a versão simplificada. Em especial, mostraremos que a estrutura mista do espaço de fases, para a versão completa, é inteiramente destruída e que o determinante da matriz Jacobiana indica que o sistema apresenta contração de área. Por outro lado, na versão simplificada, as ilhas KAM sobrevivem à força de arrasto e observa-se, para algumas regiões do espaço de fases, preservação de área.

Mostrar os resultados do trabalho de Leonel e McClintock se faz necessário pois eles serão a base dos cálculos do nosso mapeamento e constituirão uma poderosa fonte de pesquisa para as comparações que serão feitas entre os resultados obtidos neste modelo, já conhecido, e no novo modelo proposto por esta dissertação de mestrado, cujos resultados originais serão mostrados no Capítulo 4.

3.3 O Modelo Completo

A dinâmica do modelo de Fermi com introdução de dissipação segue a mesma linha de raciocínio utilizada na construção do mapeamento do Capítulo 2. Uma partícula clássica está colidindo entre duas paredes rígidas, uma está fixa em $x = l$ e a outra move-se no tempo, regida pela equação da posição $x_w(t) = \varepsilon \cos(\omega t)$. Aqui, ε é a amplitude de oscilação do movimento e ω é a frequência angular. A partícula colide elasticamente com

as paredes e está na presença de uma força de arrasto viscoso, um gás, proporcional à velocidade da partícula. A descrição da dinâmica do modelo é feita todas as vezes que a partícula colide com a parede móvel. Em conexão com a teoria das equações diferenciais ordinárias (EDO's), a parede móvel faz o papel de uma superfície de seção de modo que o conhecimento dos valores da velocidade da partícula v e o tempo no instante da colisão t , descrevem toda a dinâmica. O mapa T , é então dado por $T(v_n, t_n) = (v_{n+1}, t_{n+1})$.

Vamos supor que num instante $t = t_n$ e depois de sofrer uma colisão com a parede móvel, a partícula tenha velocidade $v = v_n$ e sua posição seja dada por $x_p(t_n) = \varepsilon \cos(\omega t_n)$. A velocidade e a posição da partícula são completamente especificadas pela solução da segunda lei de Newton, $\sum F = m a$. A força de dissipação que atua no sistema é $F = -\eta'v$, onde η' é o coeficiente de viscosidade. A aceleração é dada por $a = dv/dt$. Logo, substituindo estes valores na segunda lei de Newton, obtemos,

$$-\eta'v = m \left[\frac{dv}{dt} \right]. \quad (3.1)$$

Reorganizando os termos da Eq. (3.1) e definindo o termo $\eta'/m = \eta$, podemos integrá-la e obter a velocidade da partícula após a colisão (n), que é dada por

$$v_p(t) = v_n e^{-\eta(t-t_n)}. \quad (3.2)$$

Considerando que $v_p(t) = [dx_p(t)/dt]$, vamos nela substituir a expressão de $v_p(t)$ encontrada na Eq. (3.2), reorganizar os termos e integrar a equação. Desta forma, a posição da partícula num instante após a colisão (n), que ocorre no instante t_n é igual à posição da partícula no instante t_n , coincidente com a posição da parede neste mesmo instante, somada ao deslocamento da partícula obtido pela integração da Eq. (3.2), no intervalo de $(t_n - t_n) = 0$ até $(t - t_n)$. Assim, obtemos a equação da posição da partícula, dada por,

$$x_p(t) = \varepsilon \cos(\omega t_n) + \frac{v_n}{\eta} [e^{-\eta(t_n-t_n)} - e^{-\eta(t-t_n)}], \quad (3.3)$$

$$x_p(t) = \varepsilon \cos(\omega t_n) + \frac{v_n}{\eta} [1 - e^{-\eta(t-t_n)}]. \quad (3.4)$$

A região onde a partícula sofre colisão com a parede móvel é denominada *zona de colisão* e está compreendida no intervalo de $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Se a partícula sofrer mais de uma colisão com a parede móvel antes de sair da zona de colisão, então dizemos que a partícula sofreu *Colisão Múltipla*. Se ao contrário, a partícula sofrer apenas uma colisão com a parede móvel e em seguida abandonar a zona de colisão, então dizemos que a partícula sofreu *Colisão Simples*. Vamos analisar, separadamente, cada um dos casos acima.

3.3.1 Colisões Múltiplas

A condição para que ocorra colisão da partícula com a parede móvel é $x_w(t) = x_p(t)$. A posição da parede móvel no instante da colisão com a partícula é $x_w(t_{n+1}) = \varepsilon \cos(\omega[t_n + t_c])$, onde t_c é o intervalo de tempo entre as duas colisões, $t_c = (t_{n+1} - t_n)$. Igualando este resultado à Eq. (3.4), obtemos a equação transcendental que chamaremos de $g(t_c)$,

$$g(t_c) = \varepsilon \cos(\omega[t_n + t_c]) - \varepsilon \cos(\omega t_n) - \frac{v_n}{\eta} [1 - e^{-\eta t_c}]. \quad (3.5)$$

O t_c que tem significado físico, de ser o intervalo entre as colisões, é a menor raiz da Eq. (3.5) no intervalo $t_c \in (0, 2\pi/\omega]$. Note que o zero foi excluído do conjunto solução desta equação pois é um ponto fixo que indica a atual colisão (t_n) e queremos encontrar a próxima (t_{n+1}). Após o impacto com a parede móvel, a velocidade da partícula é obtida da conservação de energia e momentum no referencial da parede móvel. Como já discutimos esta mudança de referenciais no Capítulo 2, não vamos discutí-la aqui novamente. Vamos apenas utilizar a Eq. (2.12) e substituir o valor de $(v_{p,j})$, que é a velocidade da partícula imediatamente antes do choque, pelo valor encontrado na Eq. (3.2), substituindo o (t) por (t_{n+1}) ,

$$v_{n+1} = -v_n e^{-\eta t_c} - 2\varepsilon\omega \sin(\omega t_{n+1}). \quad (3.6)$$

A nova fase é dada pela soma da fase no instante t_n e no instante da colisão com a parede móvel, t_c .

Assim, o mapa completo para colisões múltiplas deste modelo dissipativo do acelerador de Fermi pode ser escrito como,

$$T_{CM} : \begin{cases} v_{n+1} = -v_n e^{-\eta t_c} - 2\varepsilon\omega \sin(\omega t_{n+1}) \\ t_{n+1} = t_n + t_c \end{cases}. \quad (3.7)$$

O índice “CM” denota Colisões Múltiplas.

Se $g(t_c)$ não admitir solução no intervalo $t_c \in (0, 2\pi/\omega]$, podemos concluir que a partícula parte da zona de colisão sem sofrer colisões múltiplas com a parede móvel e, então, o caso em que a partícula sofre apenas uma colisão com a parede móvel é aplicado.

Vamos agora proceder uma mudança de variáveis no intuito de reduzirmos o número de parâmetros do sistema. Podemos definir $V_n = [v_n/(\omega l)]$, $\delta = (\eta/\omega)$, $\epsilon = (\varepsilon/l)$ e $\phi_n = (\omega t_n)$, que são as novas variáveis adimensionais. Assim, o mapeamento para colisões múltiplas para este modelo dissipativo do acelerador de Fermi pode ser escrito como,

$$T_{CM} : \begin{cases} V_{n+1} = -V_n e^{-\delta \phi_c} - 2\epsilon \sin(\phi_{n+1}) \\ \phi_{n+1} = \phi_n + \phi_c \end{cases}, \quad (3.8)$$

onde ϕ_c é obtido da solução da equação transcendental,

$$G(\phi_c) = \epsilon \cos(\phi_n + \phi_c) - \epsilon \cos(\phi_n) - \frac{V_n}{\delta} [1 - e^{-\delta \phi_c}]. \quad (3.9)$$

3.3.2 Cálculo da Matriz Jacobiana para Colisões Múltiplas

Em conseqüência da introdução da força de arrasto, o determinante da Matriz Jacobiana encontrado difere daquele obtido no modelo Conservativo, calculado no Capítulo 2.

Vamos aos cálculos dos coeficientes da Matriz Jacobiana (J_{CM}).

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} &= -e^{-\delta\phi_c} - V_n \left(-\delta \frac{\partial \phi_c}{\partial V_n} \right) e^{-\delta\phi_c} - 2\epsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n}, \\ \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} &= -V_n \left(-\delta \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n} \right) e^{-\delta\phi_c} - 2\epsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n}, \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} &= \frac{\partial \phi_c}{\partial V_n}, \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} &= 1 + \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n},\end{aligned}$$

onde os termos $(\partial \phi_c / \partial V_n)$ e $(\partial \phi_c / \partial \phi_n)$ são obtidos derivando-se implicitamente a Eq. (3.9). Assim,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_c}{\partial V_n} &= \frac{(1 - e^{-\delta\phi_c})}{\delta(-\epsilon \sin(\phi_{n+1}) - V_n e^{-\delta\phi_c})}, \\ \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n} &= \frac{\epsilon \sin(\phi_{n+1}) - \epsilon \sin(\phi_n)}{-\epsilon \sin(\phi_{n+1}) - V_n e^{-\delta\phi_c}}.\end{aligned}$$

O determinante da Matriz Jacobiana (J_{CM}) é, então, dado por

$$\det(J_{CM}) = e^{-\delta\phi_c} \left[\frac{V_n + \epsilon \sin(\phi_n)}{V_{n+1} + \epsilon \sin(\phi_{n+1})} \right]. \quad (3.10)$$

O determinante da Eq. (3.10) nos diz que o sistema contrai área do espaço de fases.

3.3.3 Colisões Simples

Vamos, agora, obter o mapeamento para o caso em que a partícula sofre uma única colisão ou a última das colisões múltiplas com a parede móvel e então abandona a zona de colisão. Em seguida, duas situações podem ocorrer:

(i) A força de arrasto dissipa parte da energia da partícula e, depois de colidir com a parede fixa, ela é refletida em direção à parede móvel até sua entrada na zona de colisão.

(ii) A força de arrasto dissipa toda a energia da partícula, que alcança o repouso. Entretanto, se isto acontecer, a dinâmica do modelo é interrompida, tornando-se trivial, pois $v_p = 0$. Por esse motivo, não precisaremos descrevê-la. Além do mais, a dinâmica para o caso (ii) é completamente contemplada pela dinâmica do caso (i), a qual vamos descrever a partir de agora.

Considerando que a partícula, após o último impacto no instante t_n , parte com a velocidade v_n em direção à parede fixa, ela percorre uma distância até retornar ao ponto imediatamente antes de sua entrada na zona de colisão dada por $2l - \varepsilon - \varepsilon \cos(\omega t_n)$ e considerando a integração feita a partir da Eq. (3.2), obtemos

$$2l - \varepsilon = \varepsilon \cos(\omega t_n) + \frac{v_n}{\eta} [1 - e^{-\eta t_T}].$$

Nosso objetivo é isolar o intervalo de tempo que está no argumento da função exponencial nesta equação. Ele representa o intervalo de tempo total gasto pela partícula para percorrer todo o trajeto mencionado anteriormente. Reorganizando os termos, encontramos,

$$e^{-\eta t_T} = 1 - \frac{\eta}{v_n} [2l - \varepsilon - \varepsilon \cos(\omega t_n)].$$

Aplicando “ln” em ambos os lados desta equação, obtemos,

$$t_T = -\frac{1}{\eta} \ln \left[1 - \frac{\eta}{v_n} (2l - \varepsilon - \varepsilon \cos(\omega t_n)) \right]. \quad (3.11)$$

O índice “ T ” denota intervalo de tempo total. A Eq. (3.11) é válida desde que o argumento ao qual é aplicado o logaritmo, seja maior que zero. Obrigatoriamente, temos que $v_n > \eta [2l - \varepsilon - \varepsilon \cos(\omega t_n)]$. Se $v_n \leq \eta [2l - \varepsilon - \varepsilon \cos(\omega t_n)]$, podemos concluir que a força de arrasto dissipou toda a energia da partícula, que por sua vez, atingiu seu estado de repouso, que é o caso (ii) citado anteriormente. Se a Eq. (3.11) for satisfeita, então temos que encontrar a equação da velocidade da partícula, considerando o tempo total do seu trajeto. Conhecemos a equação da velocidade da partícula dada pela Eq. (3.2). Substituindo a Eq. (3.11) no lugar do intervalo $(t - t_n)$ da Eq. (3.2), obtemos,

$$v_p(t_n + t_T) = v_n - 2\eta l + \eta \varepsilon [1 + \cos(\omega t_n)].$$

Devemos agora promover uma mudança do sinal da velocidade posto que houve um choque elástico com a parede fixa. Assim, obtemos

$$v_p(t_n + t_T) = -v_n + 2\eta l - \eta \varepsilon [1 + \cos(\omega t_n)]. \quad (3.12)$$

O instante em que a partícula sofre uma colisão com a parede móvel é obtido da condição $x_w(t_n + t_T + t_c) = x_p(t_n + t_T + t_c)$, onde t_c representa o intervalo de tempo desde a reentrada na zona de colisão, até a colisão. A posição da parede móvel no instante da colisão com a partícula é $x_w(t_n + t_T + t_c) = \varepsilon \cos[\omega(t_n + t_T + t_c)]$. Adaptando a Eq. (3.4) para o caso das colisões simples, encontramos a posição da partícula no instante da colisão com a parede móvel, $x_p(t_n + t_T + t_c) = \varepsilon + [v_p(t_n + t_T)/\eta] \times [1 - e^{-\eta t_c}]$. Igualando as duas equações, ou seja, $x_w(t_n + t_T + t_c) = x_p(t_n + t_T + t_c)$, encontramos a equação transcendental, $f(t_c)$, que fornece o tempo no instante da colisão, dada por,

$$f(t_c) = \varepsilon \cos[\omega(t_n + t_T + t_c)] - \varepsilon - \frac{v_p(t_n + t_T)}{\eta} [1 - e^{-\eta t_c}], \quad (3.13)$$

com $v_p(t_n + t_T)$ dado pela Eq. (3.12) e t_c dado pela menor solução de $f(t_c)$ no intervalo de $t_c \in [0, (2\pi/\omega))$.

Podemos agora utilizar o intervalo de tempo t_c na Eq. (3.2) partindo da velocidade de reentrada da partícula na zona de colisão, para encontrar a velocidade da partícula imediatamente antes da colisão e então utilizando a Eq. (2.12), encontrar o mapeamento completo para colisões simples deste modelo dissipativo do acelerador de Fermi, escrito como,

$$T_{CS} : \begin{cases} v_{n+1} = -v_p(t_n + t_T)e^{-\eta t_c} - 2\varepsilon\omega \sin(\omega t_{n+1}) \\ t_{n+1} = t_n + t_T + t_c \end{cases} . \quad (3.14)$$

O índice “CS” denota Colisões Simples.

Eliminando as variáveis irrelevantes à dinâmica do sistema, $(\omega, l$ e $\eta)$, podemos definir novas variáveis adimensionais mais convenientes. Assim, definimos, $V_n = [v_n/(\omega l)]$, $\delta = (\eta/\omega)$, $\epsilon = (\varepsilon/l)$ e $\phi_n = (\omega t_n)$. Usando estas novas variáveis, o mapeamento para colisões simples deste modelo dissipativo do acelerador de Fermi pode ser escrito como,

$$T_{CS} : \begin{cases} V_{n+1} = -V_p(\phi_n + \phi_T)e^{-\delta\phi_c} - 2\epsilon \sin(\phi_{n+1}) \\ \phi_{n+1} = \phi_n + \phi_T + \phi_c \end{cases} , \quad (3.15)$$

onde ϕ_c é obtido da solução da equação transcendental,

$$F(\phi_c) = \epsilon \cos[\phi_n + \phi_T + \phi_c] - \epsilon - \frac{V_p(\phi_n + \phi_T)}{\delta} [1 - e^{-\delta\phi_c}]. \quad (3.16)$$

Finalmente, um mapeamento geral, incluindo o caso das colisões múltiplas e das colisões simples, pode ser escrito por

$$T : \begin{cases} V_{n+1} = V_n^* e^{-\delta\phi_c} - 2\epsilon \sin(\phi_{n+1}) \\ \phi_{n+1} = \phi_n + \Delta T_n \quad \text{mod}(2\pi) \end{cases} . \quad (3.17)$$

Para *Colisões Múltiplas*, $V_n^* = -V_n$ e $\Delta T_n = \phi_c$, com ϕ_c obtido pela menor solução da função $G(\phi_c)$ pertencente ao intervalo $\phi_c \in (0, 2\pi]$, dada por,

$$G(\phi_c) = \epsilon \cos(\phi_n + \phi_c) - \epsilon \cos(\phi_n) + \frac{V_n^*}{\delta} (1 - e^{-\delta\phi_c}). \quad (3.18)$$

Para *Colisões Simples*, $V_n^* = V_n - 2\delta + \delta\epsilon(1 + \cos(\phi_n))$ e $\Delta T_n = \phi_T + \phi_c$. O termo ϕ_T é dado por

$$\phi_T = -\frac{1}{\delta} \ln \left[1 - \frac{\delta}{V_n} [2 - \epsilon - \epsilon \cos(\phi_n)] \right]. \quad (3.19)$$

O termo ϕ_c é a menor solução da função $F(\phi_c)$ pertencente ao intervalo $\phi_c \in [0, 2\pi)$, dada por,

$$F(\phi_c) = \epsilon \cos(\phi_n + \phi_T + \phi_c) - \epsilon + \frac{V_n^*}{\delta} (1 - e^{-\delta\phi_c}). \quad (3.20)$$

3.3.4 Cálculo da Matriz Jacobiana para Colisões Simples

Procedimento análogo é adotado no cálculo da Matriz Jacobiana (J_{CS}), para o caso das Colisões Simples.

Calculando os coeficientes da Matriz (J_{CS}), obtemos,

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} &= e^{-\delta\phi_c} \left[1 + (-V_n\delta + 2\delta^2 - \delta^2\epsilon - \delta^2\epsilon \cos(\phi_n)) \frac{\partial\phi_c}{\partial V_n} \right] - 2\epsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial\phi_{n+1}}{\partial V_n}, \\ \frac{\partial V_{n+1}}{\partial\phi_n} &= e^{-\delta\phi_c} \left[-\delta\epsilon \sin(\phi_n) - \delta(V_n - 2\delta + \delta\epsilon(1 + \cos(\phi_n))) \frac{\partial\phi_c}{\partial\phi_n} \right] - 2\epsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial\phi_{n+1}}{\partial\phi_n}, \\ \frac{\partial\phi_{n+1}}{\partial V_n} &= \frac{\partial\phi_T}{\partial V_n} + \frac{\partial\phi_c}{\partial V_n}, \\ \frac{\partial\phi_{n+1}}{\partial\phi_n} &= 1 + \frac{\partial\phi_T}{\partial\phi_n} + \frac{\partial\phi_c}{\partial\phi_n},\end{aligned}$$

onde os termos $(\partial\phi_T/\partial V_n)$ e $(\partial\phi_T/\partial\phi_n)$ são obtidos derivando-se a Eq. (3.19) e são dados por,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi_T}{\partial V_n} &= \frac{-2 + \epsilon + \epsilon \cos(\phi_n)}{V_n(V_n - 2\delta + \delta\epsilon(1 + \cos(\phi_n)))}, \\ \frac{\partial\phi_T}{\partial\phi_n} &= \frac{\epsilon \sin(\phi_n)}{V_n - 2\delta + \delta\epsilon + \delta\epsilon \cos(\phi_n)}.\end{aligned}$$

Os termos $(\partial\phi_c/\partial V_n)$ e $(\partial\phi_c/\partial\phi_n)$ são obtidos derivando-se implicitamente a equação transcendental (3.20). Logo,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi_c}{\partial V_n} &= \frac{\epsilon \sin(\phi_{n+1}) \frac{\partial\phi_T}{\partial V_n} + \frac{(e^{-\delta\phi_c} - 1)}{\delta}}{(V_n - 2\delta + \delta\epsilon(1 + \cos(\phi_n)))e^{-\delta\phi_c} - \epsilon \sin(\phi_{n+1})}, \\ \frac{\partial\phi_c}{\partial\phi_n} &= \frac{\epsilon \sin(\phi_{n+1}) \left(1 + \frac{\partial\phi_T}{\partial\phi_n} \right) - \epsilon \sin(\phi_n)(e^{-\delta\phi_c} - 1)}{e^{-\delta\phi_c}[V_n - 2\delta + \delta\epsilon(1 + \cos(\phi_n))] - \epsilon \sin(\phi_{n+1})}.\end{aligned}$$

Finalmente, o determinante da Matriz Jacobiana (J_{CS}) é dado por,

$$\det(J_{CS}) = e^{-\delta\phi_c} \left[\frac{V_n + \epsilon \sin(\phi_n)}{V_{n+1} + \epsilon \sin(\phi_{n+1})} \right] \left[1 - \frac{\delta}{V_n} (2 - \epsilon - \epsilon \cos(\phi_n)) \right]. \quad (3.21)$$

No Capítulo 2, vimos que os determinantes das Matrizes Jacobianas da versão completa, são iguais a $[(V_n + \epsilon \sin(\phi_n))/(V_{n+1} + \epsilon \sin(\phi_{n+1}))]$, Eqs. (2.15) e (2.22). Vimos, também, que este determinante preserva área do espaço de fases. Analisando os determinantes encontrados nesta versão completa e dissipativa do acelerador de Fermi, entretanto, vemos facilmente que a área do espaço de fases não é preservada. Em outras palavras, existem termos além dos encontrados no modelo conservativo e, por essa razão, a área do

espaço de fases para este modelo apresenta contração. É importante lembrar, no entanto que, se aplicarmos o limite em que o coeficiente de arrasto $\delta \rightarrow 0$, vemos pelas Eqs. (3.10) e (3.21) que os resultados do caso conservativo são completamente recuperados.

3.3.5 Resultados Numéricos para o Modelo Completo

Vimos na seção anterior que a matriz Jacobiana para o modelo completo dissipativo do acelerador de Fermi possui propriedade de contração de área e que a força de arrasto dissipa a energia da partícula à medida que o tempo evolui. Na evolução de uma condição inicial, duas situações distintas podem ocorrer: (1) a partícula pode ser capturada por um ponto fixo (ou ciclos) e então converge exponencialmente para ele com a velocidade de aproximação dependendo da intensidade do coeficiente de arrasto; (2) A partícula perde toda sua energia, alcançando o repouso após ter toda sua energia dissipada pela força de arrasto.

Nesta seção, vamos discutir o comportamento para altos valores da velocidade da partícula. Considerando a primeira equação do mapeamento (3.17), para colisões simples, encontramos que

$$V_{n+1} \cong V_n - 2\delta - 2\epsilon \sin(\phi_{n+1}), \quad (3.22)$$

onde consideramos que a velocidade $V \gg 2\epsilon$ e que a força de dissipação δ é pequena. Com a aproximação de que δ é pequeno, o produto $\delta\epsilon$ também torna-se pequeno quando comparado com a velocidade. Analisando a velocidade média da partícula, encontramos que $V_n = (2\epsilon/\Delta t)$, onde Δt representa o próprio ϕ_c . Assim, vemos que o valor máximo que ϕ_c pode assumir é $\phi_c = (2\epsilon/V_n)$. No limite em que $V \gg 2\epsilon$ e $\delta \ll \epsilon$, a exponencial $e^{-\delta\phi_c} \rightarrow 1$. Voltando à Eq. (3.22), podemos reescrevê-la de acordo com as iterações, começando com $n = 0$, ficando

$$V_1 = V_0 - 2\delta - 2\epsilon \sin(\phi_1),$$

$$V_2 = V_1 - 2\delta - 2\epsilon \sin(\phi_2).$$

Substituindo o valor de V_1 em V_2 , encontramos

$$V_2 = V_0 - 4\delta - 2\epsilon[\sin(\phi_1) + \sin(\phi_2)].$$

$$V_3 = V_2 - 2\delta - 2\epsilon \sin(\phi_3).$$

Substituindo o valor de V_2 em V_3 , encontramos

$$V_3 = V_0 - 6\delta - 2\epsilon[\sin(\phi_1) + \sin(\phi_2) + \sin(\phi_3)].$$

Podemos então escrever uma expressão geral para a velocidade como

$$V_n = V_0 - 2n\delta - 2\epsilon \sum_{i=1}^n \sin(\phi_i). \quad (3.23)$$

A Eq. (3.23) nos diz que a velocidade da partícula decresce, na média, linearmente com o aumento do número de iterações.

Considerando que ϕ foi uniformemente distribuído no intervalo de $\phi \in [0, 2\pi)$, podemos esperar que, à medida que a velocidade decresce, a partícula vá oscilando senoidalmente por um pequeno intervalo de “ n ”, como mostra a Figura 3.1.

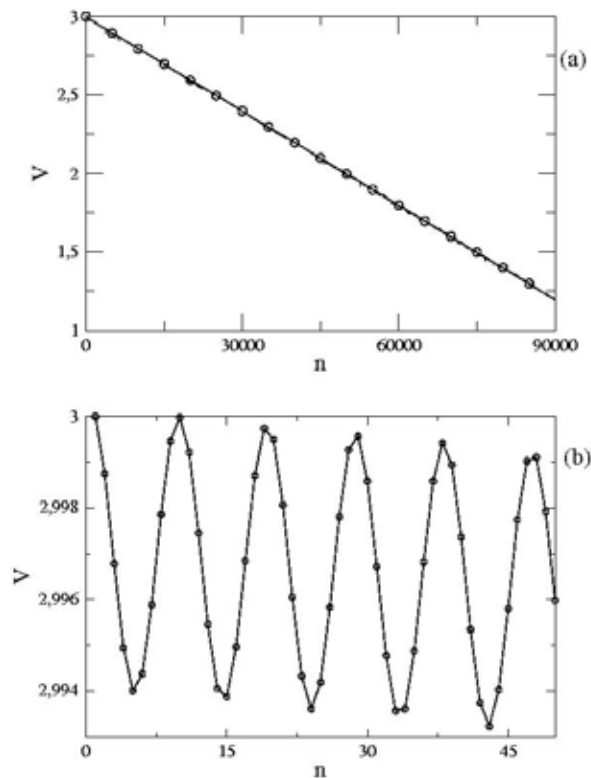


Figura 3.1: Velocidade V em função do número de iterações n para o modelo Fermi-Ulam sob a ação de uma força de arrasto viscoso $F \propto -V$. As condições iniciais usadas foram $V_0 = 3$ e $\phi_0 = 0$ bem como os parâmetros de controle $\epsilon = 1 \times 10^{-3}$ e $\delta = 1 \times 10^{-5}$. Em (a), mostra-se o decaimento da velocidade com o aumento do número de iterações e em (b), o comportamento oscilatório de V em função de uma pequena escala em “ n ”.

A Figura 3.1(a) mostra o decaimento linear da velocidade da partícula persistindo mesmo para um grande número de iterações passados e a Figura 3.1(b) mostra, em escala ampliada, o comportamento oscilatório da trajetória da partícula realizado em um pequeno intervalo de “ n ”. Na construção da figura foram usadas como condições iniciais $V_0 = 3$ e $\phi_0 = 0$. Os parâmetros de controle usados foram $\epsilon = 1 \times 10^{-3}$ e $\delta = 1 \times 10^{-5}$. Um ajuste linear nos dá o coeficiente linear -2×10^{-5} , que está em pleno acordo com a Eq. (3.23).

Quando o coeficiente de arrasto $\delta \rightarrow 0$, o segundo termo da Eq. (3.23) desaparece. As curvas invariantes, então, tornam-se estáveis e a velocidade da partícula não decresce

com a evolução da dinâmica. Este resultado está de acordo com o obtido do determinante da matriz Jacobiana no limite em que $\delta \rightarrow 0$. Neste limite, encontramos a condição de preservação de medida do espaço de fases e os resultados para o modelo Fermi-Ulam não dissipativo são totalmente recuperados.

Vamos agora descrever a aproximação para o ponto fixo atrativo em função do número de iterações. Para isso, supomos que a partícula é capturada por uma região de atração equivalente à primeira ilha KAM do caso não dissipativo, por exemplo. Enfatizamos que outras regiões também poderiam ser consideradas, além da primeira ilha. Para investigar a aproximação assintótica da partícula para um ponto fixo atrativo, definimos uma série de condições iniciais e permitimos que o sistema evolua no tempo. Estabelecemos um critério de convergência para definir a aproximação assintótica para o ponto fixo atrativo. O critério consiste em checar a distância da partícula ao ponto fixo. Definimos um círculo de raio $r_c = 10^{-6}$ e iteramos cada série de condições iniciais. Se a partícula estiver perto o bastante do ponto fixo, salvamos, em um arquivo de saída, o número de colisões gasto para a partícula chegar ao ponto fixo e iniciamos a iteração de uma condição inicial diferente. Depois de evoluir um conjunto de M condições iniciais diferentes, a média n_x é dada por $n_x = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M n_i$. O comportamento do número médio de iterações em função da distância ao ponto fixo e do coeficiente de arrasto δ , está ilustrado na Figura 3.2.

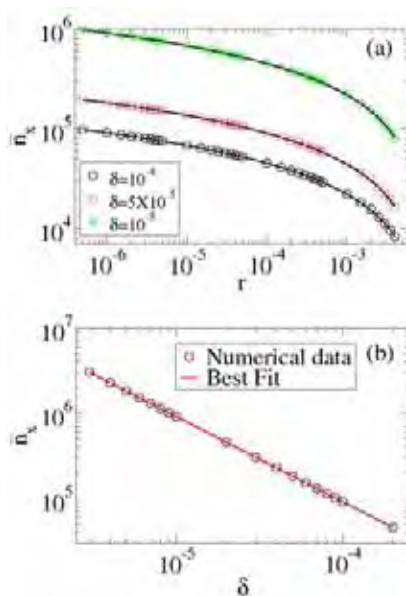


Figura 3.2: (a) Comportamento do número médio de colisões com a parede móvel, n_x , em função da proximidade do ponto fixo atrativo para a versão completa deste modelo Fermi-Ulam dissipativo. As trajetórias convergem para o ponto fixo. (b) O transiente n_x em função do coeficiente de arrasto δ .

A Figura 3.2(a) mostra o comportamento do número médio de colisões com a parede móvel, n_x , em função da série de trajetórias que se aproximam do ponto fixo. O

eixo horizontal representa a distância da trajetória ao ponto fixo, definida como $r = \sqrt{(V_n - V^*)^2 + (\phi_n - \phi^*)^2}$. As coordenadas do ponto fixo estão representadas por (V^*, ϕ^*) . Foi usada uma série de 500 condições iniciais no intervalo $(V_0, \phi_0) = ([0.325, 0.33], \pi)$. Cada curva na Figura 3.2(a) está ajustada pela função $n_x(r) = A + B \ln(r)$. Para $\delta = 1 \times 10^{-4}$, obtemos $A = -14.6(1) \times 10^3$ e $B = -3.22(1) \times 10^3$. Para o caso onde $\delta = 5 \times 10^{-4}$, temos que $A = -29.72(2) \times 10^3$ e $B = -6.376(2) \times 10^3$. Finalmente, para $\delta = 1 \times 10^{-5}$, os coeficientes são $A = -149.1(3) \times 10^3$ e $B = -31.77(3) \times 10^3$. Resultados como estes da Figura 3.2(a) nos permitem concluir que as trajetórias aproximam-se exponencialmente do ponto fixo com a evolução do número de iterações. Investigando como se dá a evolução da trajetória para o ponto fixo em função do coeficiente de arrasto δ , encontramos o resultado mostrado na Figura 3.2(b), onde evoluímos a simulação para valores de $r_c < 10^{-6}$. Podemos, então, descrever tal comportamento como

$$n_x \propto \delta^\mu. \quad (3.24)$$

Um ajuste em lei de potência como mostrado na Figura 3.2(b) nos dá que $\mu = -1.000(2)$. É fácil ver que, no limite em que $\delta \rightarrow 0$, a Eq. (3.24) nos dá que $n_x \rightarrow \infty$. Note, entretanto, que neste limite de δ , a preservação de medida do espaço de fases pode ser recuperada. Assim, concluimos que duas diferentes situações podem ocorrer: (i) a partícula pode exibir comportamento periódico ou quase-periódico ou (ii) a partícula pode exibir comportamento caótico. O resultado $n_x \rightarrow \infty$ pode ser interpretado como indicando que a convergência para um ponto fixo atrativo não ocorreu.

3.4 O Modelo Simplificado

Como discutimos no Capítulo anterior, no modelo simplificado considera-se que as duas paredes do modelo estão fixas e que ao colidir com uma delas, a partícula sofre uma troca de momentum e energia como se a parede estivesse se movendo.

Considerando que as duas paredes estão fixas, podemos imediatamente ver que as colisões sucessivas permitidas no modelo completo não podem ocorrer no modelo simplificado. Sendo assim, usaremos as equações do mapa (3.17) para colisões simples, incorporando, naturalmente, as simplificações necessárias. Assim, o mapeamento para o modelo simplificado pode ser escrito como:

$$T : \begin{cases} V_{n+1} = |V_n - 2\delta - 2\epsilon \sin(\phi_{n+1})| \\ \phi_{n+1} = \phi_n - \frac{1}{\delta} \ln \left[1 - \frac{2\delta}{V_n} \right] \end{cases} \text{ mod}(2\pi). \quad (3.25)$$

Novamente, o módulo na equação da velocidade do mapa (3.25) foi incluído arbitrariamente para evitar que a partícula ganhe velocidades negativas e viaje para fora da região

entre as paredes. A fase ϕ_{n+1} é real somente se $V_n > 2\delta$. Se $V_n \leq 2\delta$, podemos concluir que a partícula não tem energia suficiente para sofrer colisão e atinge o repouso.

Obtendo, agora, as expressões para os coeficientes da matriz Jacobiana do mapeamento (3.25), encontramos,

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} &= \text{sign}[V_n - 2\delta - 2\epsilon \sin(\phi_{n+1})] \left[1 - 2\epsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} \right], \\ \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} &= \text{sign}[V_n - 2\delta - 2\epsilon \sin(\phi_{n+1})] \left[-2\epsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} \right], \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} &= -\frac{2}{V_n^2 - 2\delta V_n}, \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} &= 1,\end{aligned}$$

onde a função $\text{sign}[u] = 1$ se $[u] > 0$ e $\text{sign}[u] = -1$ se $[u] < 0$.

Efetuada os cálculos para encontrarmos o determinante da matriz Jacobiana para este modelo dissipativo e simplificado do acelerador de Fermi, obtemos

$$\det(J_n) = \text{sign}[V_n - 2\delta - 2\epsilon \sin(\phi_{n+1})],$$

ou ainda,

$$\det(J_n) = \pm 1. \quad (3.26)$$

Este resultado nos diz que, ao contrário do modelo completo, aqui é possível de se observar regiões do espaço de fases onde a propriedade de preservação de área é observada.

3.4.1 Resultados Numéricos para o Modelo Simplificado

No mapa (3.25), quando iteramos a equação da velocidade, obtemos novamente a expressão dada pela Eq. (3.23), obtida para o modelo completo. Assim, podemos esperar que, para altas energias, a velocidade da partícula decresça linearmente na média, enquanto oscila senoidalmente na descida. Embora a equação da velocidade para altas energias do modelo simplificado seja a mesma do modelo completo, os dois modelos apresentam resultados diferentes. Como veremos, no modelo simplificado, ilhas KAM estáveis sobrevivem à introdução da força de arrasto e são observadas no espaço de fases. A Figura 3.3 mostra o comportamento da velocidade da partícula em função do número de iterações. Podemos observar que, para altas energias, a velocidade da partícula decresce linearmente e um ajuste linear nos dá um coeficiente de $-1.9990(7) \times 10^{-5}$, como é sugerido na Eq. (3.23). A região ampliada na Figura 3.3(a) mostra a passagem da partícula perto de uma ilha KAM. A Figura 3.3(b) mostra a curva KAM (linha de cor preta) e a evolução de uma condição inicial perto dela (os círculos conectados por uma linha vermelha pontilhada). A

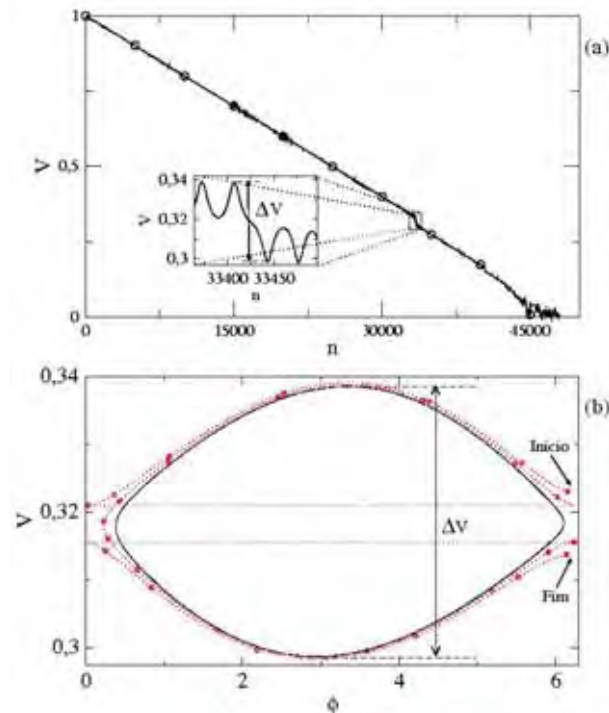


Figura 3.3: (a) A velocidade V mostrada como função do número de iterações n . A parte ampliada mostra como V varia com n perto de uma ilha KAM. Foram usados os parâmetros de controle $\epsilon = 1 \times 10^{-3}$, $\delta = 1 \times 10^{-5}$ e as condições iniciais $V_0 = 1$ e $\phi_0 = 0$. (b) Detalhes de uma trajetória passando perto da ilha KAM, mostrando V em função da fase ϕ .

abertura observada na ampliação da Figura 3.3(a) tem a mesma amplitude ΔV observada na Figura 3.3(b).

A Figura 3.4 mostra as regiões estáveis que são preservadas nesta versão dissipativa e simplificada do modelo de Fermi.

É mostrado o espaço de fases onde as ilhas KAM sobrevivem à introdução da força de dissipação. As ilhas KAM estão circundando pontos fixos atrativos de período 1, localizados no centro das elipses. Os pontos fixos não estão mostrados na figura.

No regime de altas energias, a velocidade da partícula, na média, decresce linearmente à medida que o número de iterações evolui. Quando passa por uma ilha KAM, ela faz o contorno da ilha e então segue em um transiente caótico no domínio de baixas energias para um determinado número de iterações. Entretanto, nenhum comportamento caótico estável é detectado. O transiente é o número de iterações médio que a partícula gasta vagando em seu comportamento dinâmico, até atingir o equilíbrio (neste caso $V = 0$). A Figura 3.4 não mostra os efeitos do transiente. Para isso, foi necessário evoluir as simulações por um tempo longo, da ordem de 10^7 iterações para cada condição inicial. No caso não dissipativo, a partícula pode assumir baixos valores de velocidade quando está na região chamada de mar caótico. No nosso modelo, a partícula também pode

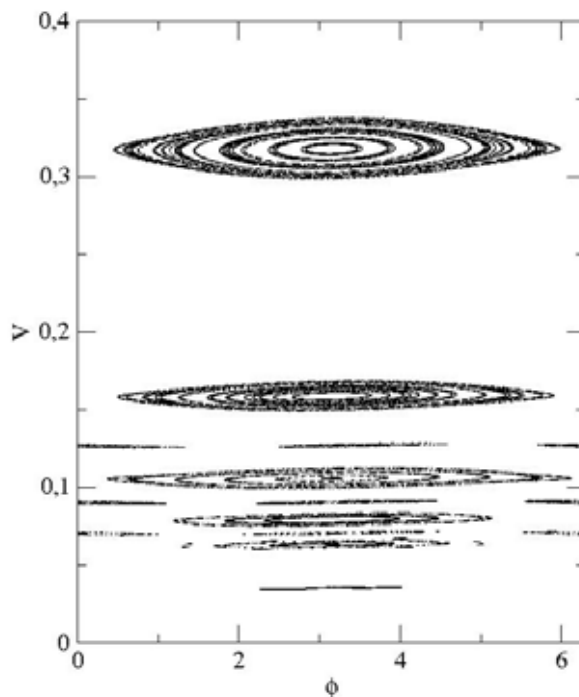


Figura 3.4: *Regiões estáveis no espaço de fases deste modelo dissipativo e simplificado do acelerador de Fermi. Os parâmetros usados foram $\epsilon = 1 \times 10^{-3}$ e $\delta = 1 \times 10^{-5}$.*

assumir baixos valores de velocidade, desde que $V_n > 2\delta$. Caso contrário, não terá energia suficiente para retornar à parede e sofrer nova colisão. Ela atingirá o repouso e a dinâmica do modelo será interrompida. Para as ilhas KAM que circundam os pontos fixos atrativos, a partícula não assume valores de velocidade tais que $V_n \leq 2\delta$. Dentro das ilhas KAM, a fase ϕ é real para todos os valores de velocidade e, portanto, a propriedade de preservação de área se aplica.

Vamos agora discutir este aparente paradoxo em que existem, por construção, forças de dissipação no modelo e por outro lado preservação de área no espaço de fases. Em primeiro lugar, a definição de um sistema dissipativo não é tão evidente quanto parece à primeira vista. Poderíamos dizer que *dissipação* implica que a área do espaço de fases não é conservada sob tempo de evolução. Alternativamente, poderíamos dizer que “dissipação” denota que atrito está presente. No modelo em questão, entretanto, temos por construção uma força friccional presente mas, encontramos que o determinante da matriz Jacobiana é uma unidade. Por que, então, este resultado não contradiz a afirmação de que não existem atratores no modelo estudado? A resposta está relacionada com o *Teorema de Recorrência de Poincaré* [36]. Este Teorema, que é uma consequência do Teorema de Liouville, afirma que, para um espaço de fases delimitado, quase todas as trajetórias retornam arbitrariamente próximas de onde elas saíram. É importante enfatizar que este resultado é verdadeiro independentemente se a trajetória em consideração é regular ou caótica. Os resultados encontrados para o modelo discutido neste capítulo mostram que, para altas

energias, a velocidade da partícula, na média, decresce linearmente com o aumento do número de iterações. Eventualmente, a partícula entra na região correspondente ao mar caótico (para o caso não dissipativo) e observamos que $V \rightarrow 0$. Assim, é fácil concluir que o espaço de fases é ilimitado para as próximas colisões, pois $t \rightarrow \infty$. Na presente versão dissipativa não existe um mecanismo para acelerar a partícula a altas energias. Assim, o Teorema de Recorrência de Poincaré não é satisfeito.

Capítulo 4

MODELO DO ACELERADOR DE FERMÍ COM FORÇA DE ARRASTO VISCOSO DO TIPO

$$F \propto -V^2$$

4.1 Resumo

Neste Capítulo, estudaremos algumas propriedades dinâmicas do modelo unidimensional do acelerador de Fermi na presença de uma força de arrasto proporcional ao quadrado da velocidade da partícula. O problema é descrito pelo uso de um mapa bidimensional, não linear, obtido via solução de equações diferenciais. Construiremos os mapeamentos para as versões completa e simplificada do modelo e apresentaremos nossos resultados numéricos.

4.2 Motivações

No Capítulo 2, descrevemos o modelo do acelerador de Fermi Conservativo, construímos os mapeamentos para as versões completa e simplificada e analisamos numericamente os resultados para as duas versões. Vimos que este modelo possui espaço de fases do tipo misto, com ilhas KAM circundadas por um mar de caos e curvas invariantes spanning, que funcionam como barreiras que limitam o ganho de energia pela partícula. A primeira curva invariante spanning divide o espaço de fases em duas regiões distintas: a de mais baixa energia (abaixo da primeira curva) e a de mais alta energia (acima da primeira

curva). Esta divisão foi estabelecida por Lieberman e Lichtenberg [11]. O mar de caos foi caracterizado por um expoente de Lyapunov positivo que mostrou uma boa convergência à medida que o número de iterações evoluía.

No Capítulo 3, descrevemos o modelo do acelerador de Fermi acrescentando uma nova modificação. Introduzimos nele uma força de dissipação, na forma de um arrasto viscoso, de modo que a partícula perdia energia à medida que atravessava o fluido. Consideramos esta força de dissipação proporcional à *velocidade da partícula*. Construimos os mapeamentos completo e simplificado e analisamos os resultados numéricos. É esperado que a introdução da força de arrasto iria provocar mudanças nos resultados obtidos para este modelo Dissipativo e o modelo Conservativo. Mas o que vimos foi mais do que isso. Vimos que o arrasto viscoso produziu mudanças entre as versões completa e simplificada do modelo. Na versão completa, o espaço de fases apresentou propriedades de contração de área e teve destruída toda a estrutura mista do espaço de fases encontrada no modelo Conservativo. Na versão simplificada, algumas regiões do espaço de fases foram preservadas, as ilhas KAM. Esta diferença nos resultados entre as versões completa e simplificada foi explicada usando o Teorema de Recorrência de Poincaré [36]. Evidenciamos o decaimento linear da velocidade da partícula em função do número de iterações e o comportamento da evolução de uma condição inicial ao passar perto de uma ilha KAM. Este comportamento foi detalhadamente mostrado na Figura 3.3 do Capítulo anterior.

Neste Capítulo, vamos estudar o modelo do acelerador de Fermi em uma nova versão dissipativa. A introdução da força de dissipação dar-se-á também via arrasto viscoso, mas desta vez, vamos considerar a força de dissipação proporcional ao *quadrado da velocidade da partícula*. Construiremos os mapeamentos para as versões completa e simplificada do modelo e analisaremos os resultados numéricos. Nosso interesse em estudar este modelo consiste em checar se os resultados obtidos no Capítulo 3 serão novamente encontrados aqui e se as conclusões para os dois modelos poderão ser generalizadas.

4.3 O Modelo Completo

O modelo de Fermi é um modelo unidimensional que consiste de uma partícula clássica de massa unitária ($m = 1$), confinada entre duas paredes rígidas sendo que uma delas está fixa e a outra move-se periodicamente no tempo. Em nossa aproximação, vamos considerar que o movimento da partícula se dá ao longo do eixo x . A partícula colide elasticamente com as paredes. A parede fixa está localizada em $x = l$ e a parede móvel é regida pela equação da posição dada por $x_w(t) = \varepsilon \cos(\omega t)$, onde ε é a amplitude de oscilação do movimento e ω é a frequência angular. A velocidade da parede móvel é dada por $v_w(t) = -\varepsilon\omega \sin(\omega t)$.

A dinâmica do sistema é descrita por um mapeamento discreto não linear nas variáveis (v, t) , onde v e t são respectivamente a velocidade da partícula após a colisão com a parede móvel e o tempo. A partícula se encontra na presença de uma força de arrasto viscoso, um gás, que assumimos ser diretamente proporcional ao quadrado da velocidade da partícula, $F = -\eta'v^2$, onde η' é o coeficiente de viscosidade. O sinal negativo do lado direito da equação denota que a força é sempre contrária ao movimento da partícula. Assim, o mapa T é dado por $T(v_n, t_n) = (v_{n+1}, t_{n+1})$. Para construir o mapeamento, vamos supor que num instante $t = t_n$, a partícula esteja na posição $x_p(t_n) = \varepsilon \cos(\omega t_n)$ com velocidade $v = v_n$. A Segunda Lei de Newton, $\sum F = ma$, descreve completamente a solução do problema, especificando a velocidade e a posição da partícula num determinado instante. Desta forma, temos que $\sum F = -\eta'v^2$. Sabemos, por definição, que a aceleração, em qualquer instante, é a taxa com que a velocidade está variando naquele instante. Em outras palavras, a aceleração é a derivada da velocidade em relação ao tempo, $a = (dv/dt)$. Substituindo as expressões conhecidas na Segunda Lei de Newton, encontramos

$$-\eta'v^2 = m \frac{dv}{dt}. \quad (4.1)$$

Reorganizando a Eq. (4.1) de modo a isolar as variáveis velocidade do lado esquerdo da equação, ficamos com

$$\frac{dv}{v^2} = -\left(\frac{\eta'}{m}\right)dt. \quad (4.2)$$

Chamando o termo (η'/m) de apenas η e substituindo na Eq. (4.2), temos

$$\frac{dv}{v^2} = -\eta dt. \quad (4.3)$$

Podemos agora aplicar a integral de ambos os lados da Eq. (4.3), obtendo

$$\int \frac{dv}{v^2} = -\eta \int dt. \quad (4.4)$$

Aqui, $-\eta$ pôde ficar do lado de fora do integrando porque tem valor constante.

Efetuando o cálculo da integral da Eq. (4.4), encontramos

$$-\frac{1}{v(t)} = -\eta(t - t_n) + C, \quad (4.5)$$

onde C é uma constante de integração. Para calcularmos o valor de C , fazemos $t = t_n$, no qual $v(t_n) = v_n$ e obtemos que $C = -(1/v_n)$. Substituindo estes valores na Eq. (4.5), podemos conhecer a equação que descreve a velocidade da partícula v_p no instante t , dada por

$$v_p(t) = \frac{v_n}{v_n \eta(t - t_n) + 1}. \quad (4.6)$$

A velocidade da partícula também pode ser escrita, em notação de cálculo, como a taxa com que a posição da partícula x_p está variando com o tempo t em um dado instante, ou seja, v_p é a derivada da posição x_p em relação ao tempo t ,

$$v_p(t) = \frac{dx_p(t)}{dt}. \quad (4.7)$$

Igualando as Eqs. (4.6) e (4.7) e reorganizando os termos, temos

$$dx_p(t) = \left[\frac{v_n}{v_n\eta(t - t_n) + 1} \right] dt. \quad (4.8)$$

Podemos novamente efetuar a integração de ambos os lados da Eq. (4.8), ficando

$$\int dx_p(t) = \int \left(\frac{v_n}{v_n\eta(t - t_n) + 1} \right) dt. \quad (4.9)$$

Para resolver esta integral, definimos $u = v_n\eta(t - t_n) + 1$ e tomamos a derivada de u em relação ao tempo, obtendo $(du/dt) = (v_n \eta)$. Reorganizando os termos, ficamos com $du = (v_n\eta)dt$ e $dt = [du/(v_n\eta)]$. Desta forma, a integral da Eq. (4.9), pode ser reescrita como

$$\int dx_p(t) = \int \left[\left(\frac{v_n}{u} \right) \left(\frac{du}{v_n\eta} \right) \right]. \quad (4.10)$$

Simplificando os termos v_n e retirando do integrando o termo constante, obtemos

$$\int dx_p(t) = \frac{1}{\eta} \int \left(\frac{du}{u} \right). \quad (4.11)$$

Resolvendo a Eq. (4.11), encontramos a seguinte equação

$$x_p(t) = \frac{1}{\eta} \ln |u| + C', \quad (4.12)$$

onde C' é uma constante de integração. Substituindo o valor de u na Eq. (4.12), obtemos

$$x_p(t) = \frac{1}{\eta} \ln[v_n\eta(t - t_n) + 1] + C'. \quad (4.13)$$

Para calcularmos o valor da constante de integração C' , fazemos $t = t_n$ e encontramos que $x_p(t_n) = C'$. Como o valor de $x_p(t_n) = \varepsilon \cos(\omega t_n)$, temos que $C' = \varepsilon \cos(\omega t_n)$. Logo, substituindo o valor de C' na Eq. (4.13) e reorganizando os termos, obtemos a equação que descreve a posição da partícula num dado instante t , dada por

$$x_p(t) = \varepsilon \cos(\omega t_n) + \frac{1}{\eta} \ln(v_n\eta(t - t_n) + 1). \quad (4.14)$$

Para prosseguirmos com os cálculos, vamos considerar dois casos de colisões da partícula com a parede móvel. São eles:

(1) *Colisões Múltiplas* - Caso em que a partícula colide mais de uma vez com a parede móvel e abandona a zona de colisão, definida no intervalo $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

(2) *Colisões Simples* - Caso em que a partícula colide apenas uma vez com a parede móvel e abandona a zona de colisão.

4.3.1 Colisões Múltiplas

Assim como no Capítulo 3, a condição para que ocorra colisão da partícula com a parede móvel é $x_p(t) = x_w(t)$. A posição da parede móvel no instante da colisão com a partícula é $x_w(t_{n+1}) = \varepsilon \cos(\omega[t_n + t_c])$, onde t_c é o intervalo de tempo entre as duas colisões, $t_c = (t_{n+1} - t_n)$. Igualando este resultado à Eq. (4.14), obtemos a equação transcendental que chamaremos de $g(t_c)$.

$$g(t_c) = \varepsilon \cos(\omega t_n) + \frac{1}{\eta} \ln [v_n \eta t_c + 1] - \varepsilon \cos[\omega(t_n + t_c)], \quad (4.15)$$

A solução desta equação fornece o tempo entre colisões da partícula com a parede móvel e esse intervalo de tempo t_c é dado pela menor solução de $g(t_c)$ no intervalo de $t_c \in (0, 2\pi/\omega]$.

Obtida a solução da Eq. (4.15), o instante do próximo choque será dado pela soma do instante da colisão n (t_n) e o intervalo de tempo entre colisões (t_c),

$$t_{n+1} = t_n + t_c. \quad (4.16)$$

Neste instante, a velocidade da parede é $v_w(t_{n+1}) = -\varepsilon\omega \sin(\omega t_{n+1})$. A velocidade da partícula é obtida no referencial da parede móvel, no instante da colisão, como discutimos na subseção 2.3.1, do Capítulo 2. Assim, vamos utilizar a Eq. (2.12) e substituir o valor de $(v_{p,j})$, que é a velocidade da partícula imediatamente antes do choque, pelo valor encontrado na Eq. (4.6), substituindo o (t) por (t_{n+1}) , ficando com

$$v_{n+1} = -\frac{v_n}{v_n \eta t_c + 1} - 2\varepsilon\omega \sin[\omega(t_n + t_c)]. \quad (4.17)$$

Com as Eqs. (4.16) e (4.17), podemos obter o mapeamento para o caso das colisões múltiplas, conforme

$$T_M : \begin{cases} v_{n+1} = -\frac{v_n}{v_n \eta t_c + 1} - 2\varepsilon\omega \sin[\omega(t_n + t_c)] \\ t_{n+1} = t_n + t_c \end{cases}, \quad (4.18)$$

com t_c obtido numericamente pela solução de $g(t_c) = 0$, onde $g(t_c)$ é dada pela Eq. (4.15) e pertence ao intervalo $(0, 2\pi/\omega]$. O índice “ M ” denota colisões múltiplas.

Definindo variáveis adimensionais, temos que $V_n = [v_n/(\omega l)]$, $\delta = (\eta l)$, $\epsilon = (\varepsilon/l)$ e $\phi_n = (\omega t_n)$. Logo, nestas novas variáveis, o mapeamento pode ser escrito como,

$$T_M : \begin{cases} V_{n+1} = -\frac{V_n}{V_n \delta \phi_c + 1} - 2\epsilon \sin(\phi_{n+1}) \\ \phi_{n+1} = \phi_n + \phi_c \quad \text{mod}(2\pi) \end{cases}, \quad (4.19)$$

com ϕ_c obtido da solução da equação transcendental,

$$G(\phi_c) = \epsilon \cos(\phi_n + \phi_c) - \epsilon \cos(\phi_n) - \frac{1}{\delta} \ln[V_n \delta \phi_c + 1], \quad (4.20)$$

no intervalo $(0, 2\pi]$.

Se a Eq. (4.20) admitir alguma raiz em $\phi_c \in (0, 2\pi]$, então diz-se que a partícula sofreu colisão múltipla. Caso contrário, a partícula saiu da zona de colisão, sem sofrer colisão múltipla.

4.3.2 Cálculo da Matriz Jacobiana para Colisões Múltiplas

Os elementos da matriz Jacobiana do mapeamento para colisões múltiplas são,

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} &= -(V_n \delta \phi_c + 1)^{-1} + V_n (V_n \delta \phi_c + 1)^{-2} \times \left(\delta \phi_c + V_n \delta \frac{\partial \phi_c}{\partial V_n} \right) - \\ &\quad - 2\epsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n}, \\ \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} &= V_n (V_n \delta \phi_c + 1)^{-2} \times \left(V_n \delta \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n} \right) - 2\epsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n}, \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} &= \frac{\partial \phi_c}{\partial V_n}, \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} &= 1 + \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n}.\end{aligned}$$

As derivadas implícitas, $(\partial \phi_c / \partial V_n)$ e $(\partial \phi_c / \partial \phi_n)$ são dadas por,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_c}{\partial V_n} &= \frac{-\phi_c}{(V_n \delta \phi_c + 1) \times \left(\epsilon \sin(\phi_{n+1}) + \frac{V_n}{V_n \delta \phi_c + 1} \right)}, \\ \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n} &= \frac{\epsilon \sin(\phi_n) - \epsilon \sin(\phi_{n+1})}{\left(\epsilon \sin(\phi_{n+1}) + \frac{V_n}{V_n \delta \phi_c + 1} \right)}.\end{aligned}$$

Encontrados os coeficientes, podemos obter o determinante da matriz Jacobiana, (J_n) , que depois de alguma álgebra, pôde ser escrito como,

$$\det(J_n) = \frac{1}{(V_n \delta \phi_c + 1)^2} \times \left[\frac{V_n + \epsilon \sin(\phi_n)}{V_{n+1} + \epsilon \sin(\phi_{n+1})} \right]. \quad (4.21)$$

Podemos claramente ver, na Eq. (4.21), que o determinante da matriz Jacobiana para o caso das colisões múltiplas, não preserva área do espaço de fases. Se fizermos a análise da evolução das áreas e compararmos este determinante com os determinantes do modelo Conservativo, Eqs. (2.15) e (2.22), que preservam área do espaço de fases, veremos que um termo a mais aparece na equação, o termo $[1/(V_n \delta \phi_c + 1)^2]$. Assim, podemos concluir que o determinante da Eq. (4.21), implica em contração de área. Entretanto, no limite em que $\delta \rightarrow 0$, o mapeamento preserva área do espaço de fases e os resultados do modelo Conservativo são recuperados.

4.3.3 Colisões Simples

O mapeamento para o caso em que a partícula sofre uma única colisão ou a última das colisões múltiplas com a parede móvel e então abandona a zona de colisão deve ser obtido considerando-se que dois eventos distintos podem ocorrer. O primeiro deles é que a força de arrasto dissipa parte da energia da partícula e após colidir com a parede fixa, a partícula é refletida em direção à parede móvel até sua entrada na zona de colisão. No segundo evento, a força de arrasto dissipa completamente a energia da partícula, que atinge o repouso, interrompendo a dinâmica do modelo. Assim, para descrever o comportamento do sistema, vamos considerar o caso em que a força de arrasto dissipa apenas parte da energia da partícula.

A partícula está na zona de colisão na posição $x_p(t_n) = \varepsilon \cos(\omega t_n)$ no momento em que inicia-se a dinâmica do modelo (t_n). Ela viaja em direção à parede fixa e colide com ela. Em seguida, é refletida em direção à parede móvel e viaja até sua entrada na zona de colisão. O trajeto percorrido pela partícula é dado pela soma das distâncias percorridas em sua jornada para a direita ($l - \varepsilon \cos(\omega t_n)$) e para a esquerda ($l - \varepsilon$) (se necessário, retorne à ilustração da Figura 2.4 para uma melhor visualização do trajeto percorrido pela partícula). A distância total do trajeto da partícula é dada por $2l - \varepsilon - \varepsilon \cos(\omega t_n)$.

O primeiro passo para a construção do mapeamento é obter o tempo de vôo da partícula para a direita, ao qual chamaremos de (t_d). Da equação da posição dada pela Eq. (4.14), temos que

$$x_p(t) = \varepsilon \cos(\omega t_n) + \frac{1}{\eta} \ln(v_n \eta (t - t_n) + 1).$$

A posição da partícula, neste trajeto, é $x_p(t_d) = l$. Podemos então substituir esta expressão de $x_p(t)$ na equação acima para obtermos,

$$l = \varepsilon \cos(\omega t_n) + \frac{1}{\eta} \ln(v_n \eta t_d + 1).$$

Reescrevendo de forma mais apropriada, encontramos,

$$\ln(v_n \eta t_d + 1) = \eta(l - \varepsilon \cos(\omega t_n)).$$

Tomando exponencial de ambos os lados, obtemos,

$$(v_n \eta t_d + 1) = e^{\eta(l - \varepsilon \cos(\omega t_n))}.$$

Isolando t_d do lado direito da equação,

$$t_d = \frac{e^{\eta(l - \varepsilon \cos(\omega t_n))} - 1}{v_n \eta}. \quad (4.22)$$

Este é o tempo de vôo da partícula para a direita.

Para obtermos a velocidade da partícula no seu trajeto para a direita, basta substituímos a Eq. (4.22) na equação da velocidade dada pela Eq. (4.6). Assim,

$$v_p(t_n + t_d) = \frac{v_n}{e^{\eta(l-\varepsilon \cos(\omega t_n))}}. \quad (4.23)$$

O segundo passo para a construção do mapeamento consiste em obtermos o tempo de vôo da partícula para a esquerda. Mas antes de obtermos o tempo de vôo, vamos obter a velocidade da partícula no seu trajeto para a esquerda.

Após colidir com a parede fixa, a partícula sofre inversão no sentido da velocidade e sai para a esquerda com velocidade (v_e),

$$v_e(t_n + t_d) = -v_p(t_n + t_d),$$

ou seja,

$$v_e(t_n + t_d) = \frac{-v_n}{e^{\eta(l-\varepsilon \cos(\omega t_n))}}. \quad (4.24)$$

A equação da posição, enquanto a partícula está viajando para a esquerda, será então dada por,

$$x_p(t) = l + \frac{1}{\eta} \ln [v_e(t_n + t_d) \eta t + 1]. \quad (4.25)$$

Ao entrar na zona de colisão, a posição da partícula é $x_p(t_e) = \varepsilon$. Substituindo este resultado na Eq. (4.25), obtemos,

$$\varepsilon = l + \frac{1}{\eta} \ln [v_e(t_n + t_d) \eta t_e + 1].$$

Reescrevendo temos,

$$\ln [v_e(t_n + t_d) \eta t_e + 1] = \eta(\varepsilon - l).$$

Nosso objetivo é isolar o tempo (t_e) que está no argumento do (“ln”). Para isso, vamos tomar exponencial de ambos os lados da equação acima. Assim,

$$v_e(t_n + t_d) \eta t_e + 1 = e^{\eta(\varepsilon - l)}.$$

Reescrevendo, temos,

$$t_e = \frac{e^{\eta(\varepsilon - l)} - 1}{v_e(t_n + t_d) \eta}. \quad (4.26)$$

Substituindo o valor de $v_e(t_n + t_d)$ dado pela Eq. (4.24) e reescrevendo de forma mais apropriada, obtemos,

$$t_e = \frac{e^{\eta(l-\varepsilon \cos(\omega t_n))} - e^{\eta(\varepsilon - \varepsilon \cos(\omega t_n))}}{v_n \eta}. \quad (4.27)$$

A partir das relações dos tempos para a direita (t_d) e para a esquerda (t_e), podemos obter o tempo total (t_T) do trajeto percorrido pela partícula, que é dado pela soma $t_T = t_d + t_e$. Assim, substituindo temos,

$$t_T = \frac{2e^{\eta(l-\varepsilon \cos(\omega t_n))} - e^{\eta(\varepsilon - \varepsilon \cos(\omega t_n))} - 1}{v_n \eta}. \quad (4.28)$$

Substituindo a Eq. (4.28) na equação da velocidade da partícula dada pela Eq. (4.6), obtemos a velocidade total da partícula $[v_p(t_T)]$ na entrada da zona de colisão. Considerando que ao colidir com a parede fixa a partícula sofre uma inversão no sinal da velocidade, temos que,

$$v_p(t_T) = \frac{-v_n}{2e^{\eta(l-\varepsilon \cos(\omega t_n))} - e^{\eta(\varepsilon-\varepsilon \cos(\omega t_n))}}. \quad (4.29)$$

Desta forma, a Eq. (4.29) nos dá a velocidade da partícula imediatamente *antes* de sua entrada na zona de colisão. Para fins de simplificação, vamos dizer que $v_p(t_T) = v_A$, onde o índice “A” denota *antes* da entrada na zona de colisão. Assim,

$$v_A = \frac{-v_n}{2e^{\eta(l-\varepsilon \cos(\omega t_n))} - e^{\eta(\varepsilon-\varepsilon \cos(\omega t_n))}}. \quad (4.30)$$

Com isso, a equação da posição da partícula, em seu trajeto total, é dada por,

$$x_p(t_n + t_T + t_c) = \varepsilon + \frac{1}{\eta} \ln(v_A \eta t_c + 1). \quad (4.31)$$

A colisão entre a partícula e a parede móvel ocorrerá quando $x_p(t) = x_w(t)$. Sabendo que no instante da colisão a posição da parede móvel é $x_w(t_n + t_T + t_c) = \varepsilon \cos[\omega(t_n + t_T + t_c)]$ e de posse da Eq. (4.31), podemos substituir na expressão acima e obtermos,

$$\varepsilon \cos[\omega(t_n + t_T + t_c)] = \varepsilon + \frac{1}{\eta} \ln(v_A \eta t_c + 1).$$

Assim, podemos definir uma função $f(t_c)$, onde (t_c) fornece o instante da colisão entre a partícula e a parede móvel, dada por

$$f(t_c) = \varepsilon \cos[\omega(t_n + t_T + t_c)] - \varepsilon - \frac{1}{\eta} \ln(v_A \eta t_c + 1). \quad (4.32)$$

O tempo de colisão (t_c) está limitado ao intervalo $[0, (2\pi/\omega)]$.

A solução de $f(t_c) = 0$ fornece o instante do choque. Assim, o instante do próximo choque será dado por

$$t_{n+1} = t_n + t_T + t_c. \quad (4.33)$$

A velocidade da parede, neste instante, é $v_w(t_{n+1}) = -\varepsilon\omega \sin(\omega t_{n+1})$. A velocidade da partícula é obtida no referencial da parede móvel no instante do choque. Considerando a Eq. (2.12), o mapeamento para o caso das colisões simples pode ser escrito como

$$T_S : \begin{cases} v_{n+1} = v_n^* - 2\varepsilon\omega \sin(\omega t_{n+1}) \\ t_{n+1} = t_n + t_T + t_c \end{cases}, \quad (4.34)$$

onde $v_n^* = [-v_A/(v_A \eta t_c + 1)]$ e o termo (t_T) é dado pela Eq. (4.28).

Definindo variáveis adimensionais como $V_n = [v_n/(\omega l)]$, $\epsilon = (\varepsilon/l)$, $\delta = (\eta l)$ e $\phi_n = (\omega t_n)$, o mapeamento para colisões simples pode ser reescrito como

$$T_S : \begin{cases} V_{n+1} = V_n^* - 2\epsilon \sin(\phi_{n+1}) \\ \phi_{n+1} = \phi_n + \phi_T + \phi_c \quad \text{mod}(2\pi) \end{cases}, \quad (4.35)$$

onde

$$V_n^* = \frac{-V_A}{V_A \delta \phi_c + 1},$$

$$V_A = \frac{-V_n}{2e^{\delta(1-\epsilon \cos(\phi_n))} - e^{\delta(\epsilon - \epsilon \cos(\phi_n))}},$$

$$\phi_T = \frac{2e^{\delta(1-\epsilon \cos(\phi_n))} - e^{\delta(\epsilon - \epsilon \cos(\phi_n))} - 1}{V_n \delta},$$

e o termo ϕ_c é obtido da solução de $F(\phi_c) = 0$, onde $F(\phi_c)$ é dado por

$$F(\phi_c) = \epsilon \cos(\phi_n + \phi_T + \phi_c) - \epsilon - \frac{1}{\delta} \ln(V_A \delta \phi_c + 1), \quad (4.36)$$

com ϕ_c pertencente ao intervalo $[0, 2\pi]$.

Um mapeamento geral que descreve a dinâmica do modelo pode então ser escrito da seguinte forma:

$$T : \begin{cases} V_{n+1} = V_n^* - 2\epsilon \sin(\phi_{n+1}) \\ \phi_{n+1} = \phi_n + \Delta T_n \quad \text{mod}(2\pi) \end{cases}, \quad (4.37)$$

onde as expressões V_n^* e ΔT_n são dadas de acordo com o tipo de colisão que ocorre, conforme a seguir:

(i) Colisões Múltiplas: Neste caso, $V_n^* = [-V_n/(V_n \delta \phi_c + 1)]$ e $\Delta T_n = \phi_c$. O termo ϕ_c é obtido a partir da solução da equação transcendental, $G(\phi_c) = 0$, onde $G(\phi_c)$ é dada por

$$G(\phi_c) = \epsilon \cos(\phi_{n+1}) - \epsilon \cos(\phi_n) - \frac{1}{\delta} \ln(V_n \delta \phi_c + 1), \quad (4.38)$$

com $\phi_c \in (0, 2\pi]$. Note que $\phi_c = 0$ foi excluído do conjunto solução, pois representa um ponto fixo da Eq. (4.38).

(ii) Colisões Simples: Neste caso, $V_n^* = [-V_A/(V_A \delta \phi_c + 1)]$, onde

$$V_A = \frac{-V_n}{(2e^{\delta(1-\epsilon \cos(\phi_n))} - e^{\delta(\epsilon - \epsilon \cos(\phi_n))})},$$

e $\Delta T_n = \phi_T + \phi_c$. Aqui, o termo ϕ_T é dado por

$$\phi_T = \frac{2e^{\delta(1-\epsilon \cos(\phi_n))} - e^{\delta(\epsilon - \epsilon \cos(\phi_n))} - 1}{V_n \delta},$$

e ϕ_c é obtido da solução da equação transcendental, $F(\phi_c) = 0$, onde $F(\phi_c)$ é dada por

$$F(\phi_c) = \epsilon \cos(\phi_{n+1}) - \epsilon - \frac{1}{\delta} \ln(V_A \delta \phi_c + 1), \quad (4.39)$$

com $\phi_c \in [0, 2\pi]$.

4.3.4 Cálculo da Matriz Jacobiana para Colisões Simples

O próximo passo do nosso estudo consiste em obter os elementos da matriz Jacobiana do mapeamento (4.35). São eles,

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} &= \frac{\partial V_n^*}{\partial V_n} - 2\epsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n}, \\ \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} &= \frac{\partial V_n^*}{\partial \phi_n} - 2\epsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n}, \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} &= \frac{\partial \phi_T}{\partial V_n} + \frac{\partial \phi_c}{\partial V_n}, \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} &= 1 + \frac{\partial \phi_T}{\partial \phi_n} + \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n},\end{aligned}$$

sendo que,

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_n^*}{\partial V_n} &= \left[-\frac{1}{(V_A \delta \phi_c + 1)} \left(\frac{\partial V_A}{\partial V_n} \right) + \frac{V_A}{(V_A \delta \phi_c + 1)^2} \times \left(\frac{\partial V_A}{\partial V_n} \delta \phi_c + V_A \delta \frac{\partial \phi_c}{\partial V_n} \right) \right], \\ \frac{\partial V_n^*}{\partial \phi_n} &= \left[-\frac{1}{(V_A \delta \phi_c + 1)} \left(\frac{\partial V_A}{\partial \phi_n} \right) + \frac{V_A}{(V_A \delta \phi_c + 1)^2} \times \left(\frac{\partial V_A}{\partial \phi_n} \delta \phi_c + V_A \delta \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n} \right) \right], \\ \frac{\partial V_A}{\partial V_n} &= \left[-\frac{1}{2e^{\delta(1-\epsilon \cos(\phi_n))} - e^{\delta(\epsilon - \epsilon \cos(\phi_n))}} \right], \\ \frac{\partial V_A}{\partial \phi_n} &= \left[\frac{V_n}{(2e^{\delta(1-\epsilon \cos(\phi_n))} - e^{\delta(\epsilon - \epsilon \cos(\phi_n))})^2} \right] \times \\ &\quad \times \left[\delta \epsilon \sin(\phi_n) 2e^{\delta(1-\epsilon \cos(\phi_n))} - \delta \epsilon \sin(\phi_n) e^{\delta(\epsilon - \epsilon \cos(\phi_n))} \right], \\ \frac{\partial \phi_T}{\partial V_n} &= \left[\frac{1 + e^{\delta(\epsilon - \epsilon \cos(\phi_n))} - 2e^{\delta(1-\epsilon \cos(\phi_n))}}{V_n^2 \delta} \right], \\ \frac{\partial \phi_T}{\partial \phi_n} &= \left[\frac{2\delta \epsilon \sin(\phi_n) e^{\delta(1-\epsilon \cos(\phi_n))} - \delta \epsilon \sin(\phi_n) e^{\delta(\epsilon - \epsilon \cos(\phi_n))}}{V_n \delta} \right].\end{aligned}$$

Encontrando agora os termos das derivadas implícitas, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_c}{\partial V_n} &= \left[\frac{\epsilon \sin(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_T}{\partial V_n} + \frac{\phi_c}{(V_A \delta \phi_c + 1)} \frac{\partial V_A}{\partial V_n}}{-\epsilon \sin(\phi_{n+1}) - \frac{V_A}{(V_A \delta \phi_c + 1)}} \right], \\ \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n} &= \left[\frac{\epsilon \sin(\phi_{n+1}) \left(1 + \frac{\partial \phi_T}{\partial \phi_n} \right) + \frac{\phi_c}{(V_n \delta \phi_c + 1)} \frac{\partial V_A}{\partial \phi_n}}{-\epsilon \sin(\phi_{n+1}) - \frac{V_A}{(V_A \delta \phi_c + 1)}} \right].\end{aligned}$$

De posse de todos os coeficientes necessários, podemos calcular o determinante da matriz Jacobiana (J_n) para o caso das colisões simples, que é dado por

$$\det(J_n) = \left[\frac{1}{(V_A \delta \phi_c + 1)^2} \times \frac{1}{(2e^{\delta(1-\epsilon \cos(\phi_n))} - e^{\delta(\epsilon - \epsilon \cos(\phi_n))})^2} \right] \times$$

$$\times \left[\left(\frac{V_n + \epsilon \sin(\phi_n)}{V_{n+1} + \epsilon \sin(\phi_{n+1})} \right) \right]. \quad (4.40)$$

Mais uma vez, o determinante da matriz Jacobiana nos diz que a área do espaço de fases do mapeamento para colisões simples sofre contração. Pelo estudo da evolução das áreas podemos facilmente ver que, quando comparamos o determinante dado pela Eq. (4.40) com os determinantes do modelo Conservativo, Eqs. (2.15) e (2.22), dois termos aparecem a mais na equação. São eles: $[1/(V_A \delta \phi_c + 1)^2]$ e $[1/(2e^{\delta(1-\epsilon \cos(\phi_n))} - e^{\delta(\epsilon - \epsilon \cos(\phi_n))})^2]$. Assim como no mapeamento para colisões múltiplas, vemos também no mapeamento para colisões simples que o sistema não preserva área do espaço de fases. Entretanto, quando aplicamos o limite em que $\delta \rightarrow 0$, recuperamos novamente os resultados do modelo Conservativo e o sistema volta a preservar a área do espaço de fases.

No Capítulo 3, modelo de Fermi Dissipativo, com $(F \propto -V)$, versão completa, observamos que o mapeamento para colisões múltiplas produziu determinante da matriz Jacobiana que *contrai* área do espaço de fases, ao passo que, o mapeamento para colisões simples produziu determinante que *preserva* área do espaço de fases em algumas regiões. Entretanto, esta diferença não foi observada nos determinantes dos mapeamentos para colisões múltiplas e colisões simples do modelo de Fermi Dissipativo, com $(F \propto -V^2)$, versão completa, estudada neste Capítulo. Em ambos os casos, o sistema contrai área do espaço de fases, o que nos permite concluir que os resultados para $(F \propto -V)$ não podem ser generalizados para $(F \propto -V^2)$. Os dois modelos produzem resultados diferentes e, a seguir, vamos apresentar nossos resultados numéricos para este Capítulo.

4.3.5 Resultados Numéricos para o Modelo Completo

Nesta seção, discutiremos nossos resultados numéricos para a versão completa do modelo.

O espaço de fases para este modelo de Fermi Dissipativo em sua versão completa foi obtido pela iteração das equações do mapa (4.37), a partir de diversas condições iniciais.

O espaço de fases mostrado na Figura 4.1(a) foi construído através da iteração de 70 condições iniciais. Cada condição inicial foi iterada 10^5 vezes. O intervalo para a fase $\phi_0 \in [0, 2\pi]$ foi dividido em 7 incrementos igualmente espaçados. Foram usadas também 10 divisões para a velocidade inicial V_0 , no intervalo $V_0 \in [1 \times 10^{-2}, 0.5]$. Os parâmetros de controle utilizados foram $\epsilon = 1 \times 10^{-2}$ e $\delta = 1 \times 10^{-4}$.

O que se observa, no espaço de fases da Figura 4.1(a), é que toda a estrutura mista do espaço de fases conhecida do modelo Conservativo, com ilhas KAM, curvas invariantes spanning e mares caóticos, foi totalmente destruída, dando lugar a um grande número de pontos fixos atrativos. Na Figura 4.1(b), é mostrada, em diferentes cores, a classificação das órbitas periódicas encontradas no espaço de fases da Figura 4.1(a). Cada cor repre-

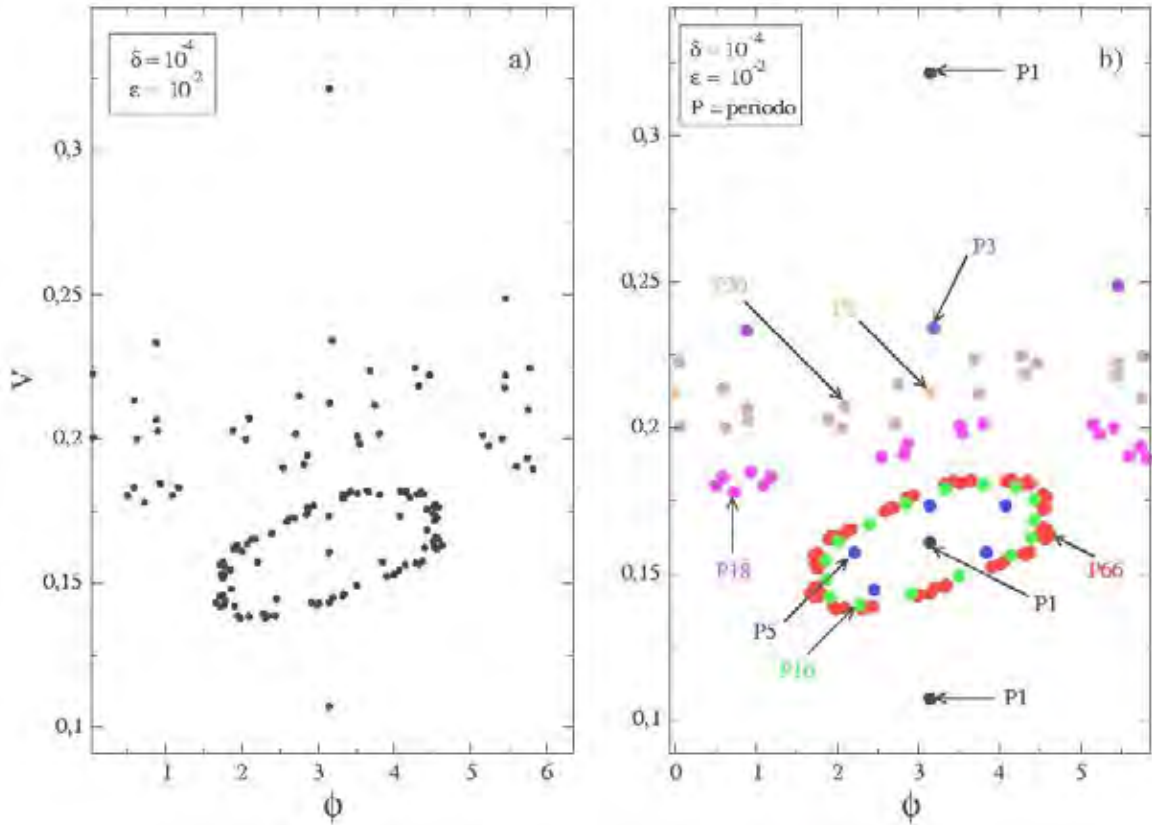


Figura 4.1: (a) Espaço de fases para este modelo Completo e Dissipativo de Fermi. Os parâmetros de controle usados na figura foram $\epsilon = 10^{-2}$ e $\delta = 10^{-4}$. (b) Classificação das órbitas periódicas mostradas em (a).

senta uma órbita de determinado período. Por exemplo, os três pontos fixos atrativos na cor preta representam órbitas de período 1. Já os pontos fixos na cor rosa, representam uma órbita de período 18. A maior órbita encontrada para esta combinação de parâmetros de controle foi a de período 66, mostrada na cor vermelha.

É importante salientar que as simulações do espaço de fases deste modelo foram evoluídas para um tempo suficientemente longo, da ordem de 10^5 vezes, para que os efeitos de transiente fossem desconsiderados.

Devido ao elevado grau de complexidade e não linearidade das equações obtidas neste modelo completo e dissipativo do acelerador de Fermi, decidimos não prosseguir com as simulações numéricas nesta versão completa. Em vez disso, optamos por descrever uma versão simplificada do modelo, como fizemos nos Capítulos 2 e 3 e, a partir desta versão, dar prosseguimento nas simulações. Agindo desta forma, tornaremos o procedimento computacional mais rápido e eficiente, do ponto de vista numérico, reduzindo o tempo gasto nas simulações que, mesmo nos computadores mais modernos, ainda é muito longo. Além disso, estaremos seguros de que esta simplificação produzirá resultados bastante semelhantes aos do modelo completo e manterá inalteradas as principais características e propriedades do sistema.

4.4 O Modelo Simplificado

Nesta seção vamos descrever o modelo simplificado e todos os detalhes necessários à construção das equações do mapeamento.

O modelo em questão consiste de uma partícula clássica confinada entre duas paredes rígidas e sofrendo colisões elásticas com elas. A partícula está sofrendo os efeitos de uma força de arrasto cuja magnitude é assumida como sendo do tipo $F = -\eta v^2$, onde η é o coeficiente de viscosidade e v é a velocidade da partícula. Nós assumimos que as duas paredes do modelo estão fixas, uma delas em $x = l$ e a outra em $x = 0$. Entretanto, ao colidir com a parede localizada na origem, por exemplo, a partícula sofre transferência de energia e momentum como se a parede estivesse se movendo de acordo com a equação $x_w(t) = \varepsilon \cos(\omega t)$, onde ε é a amplitude de oscilação e ω é a frequência de oscilação. Assim, não se torna mais necessário resolver equações transcendentais, reduzindo o tempo das simulações numéricas e a não linearidade do problema é mantida.

O problema é descrito em termos de um mapeamento bidimensional $T(v_n, t_n) = (v_{n+1}, t_{n+1})$. Para construir o mapa, supomos que num instante $t = t_n$, a partícula está na posição $x = 0$, com velocidade $v = v_n > 0$. Resolvemos a segunda Lei de Newton, $-\eta v^2 = m (dv/dt)$ e consideramos os efeitos de colisões elásticas com as duas paredes. Definimos variáveis adimensionais, como $V_n = [v_n/(\omega l)]$, $\delta = (\eta l)$, $\epsilon = (\varepsilon/l)$ e $\phi_n = (\omega t_n)$, e encontramos o mapeamento, que é dado por

$$T : \begin{cases} V_{n+1} = |V_n^* - 2\epsilon \sin(\phi_{n+1})| \\ \phi_{n+1} = \phi_n + 2 \left[\frac{e^\delta - 1}{V_n \delta} \right] \quad \text{mod}(2\pi) \end{cases}, \quad (4.41)$$

onde o termo $V_n^* = [V_n/(2e^\delta - 1)]$. Ressaltamos que, aqui, velocidades negativas são proibidas, pois são equivalentes à partícula viajar além da região entre as paredes. Para evitar que este fato ocorra, introduzimos arbitrariamente o módulo na equação da velocidade do mapa (4.41).

Eliminadas as divergências, podemos agora calcular os elementos da matriz Jacobiana do mapeamento, que são dados por

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} &= \text{sign}[V_n^* - 2\epsilon \sin(\phi_{n+1})] \times \left[\frac{1}{(2e^\delta - 1)} - 2\epsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} \right], \\ \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} &= \text{sign}[V_n^* - 2\epsilon \sin(\phi_{n+1})] \times \left[-2\epsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} \right], \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} &= -\frac{2e^\delta - 2}{V_n^2 \delta}, \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} &= 1, \end{aligned}$$

onde a função $\text{sign}(u) = 1$ se $(u) > 0$ e $\text{sign}(u) = -1$ se $(u) < 0$.

Depois de uma cuidadosa investigação, encontramos que o determinante da matriz Jacobiana é dado por,

$$\det(J) = \text{sign}[V_n^* - 2\epsilon \sin(\phi_{n+1})] \times \left[\frac{1}{(2e^\delta - 1)} \right]. \quad (4.42)$$

O determinante dado pela Eq. (4.42) nos diz que o sistema *contraí* área do espaço de fases, um resultado que também difere do encontrado no modelo simplificado do Capítulo 3. Mais um indício de que os resultados dos dois modelos não podem ser generalizados.

4.4.1 Resultados Numéricos para o Modelo Simplificado

Nesta seção, vamos apresentar e discutir alguns dos nossos resultados numéricos.

Começaremos discutindo o comportamento da partícula para grandes valores de velocidade. Considerando a primeira equação do mapa (4.41), encontramos que

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{V_0}{(2e^\delta - 1)} - 2\epsilon \sin(\phi_1), \\ V_2 &= \frac{V_0}{(2e^\delta - 1)^2} - \frac{2\epsilon \sin(\phi_1)}{(2e^\delta - 1)} - 2\epsilon \sin(\phi_2), \\ V_3 &= \frac{V_0}{(2e^\delta - 1)^3} - \frac{2\epsilon \sin(\phi_1)}{(2e^\delta - 1)^2} - \frac{2\epsilon \sin(\phi_2)}{(2e^\delta - 1)} - 2\epsilon \sin(\phi_3). \end{aligned}$$

Finalmente, uma expressão geral para a velocidade da partícula pode ser escrita como

$$V_n = \frac{V_0}{(2e^\delta - 1)^n} - 2\epsilon \sum_{i=1}^n \frac{\sin(\phi_i)}{(2e^\delta - 1)^{n-i}}. \quad (4.43)$$

Vemos, na Eq. (4.43), que o segundo termo depois do sinal de igualdade pode ser desprezado, pois contribui com uma oscilação muito pequena, com amplitude máxima de 2ϵ (lembrando que ϵ é pequeno). Além disso, trata-se de uma soma de senos, que na média se cancelam. Se expandirmos o primeiro termo depois da igualdade em potências de δ , obtemos

$$\begin{aligned} V_n \cong V_0 \times & \left[1 - 2n\delta + (n + 2n^2)\delta^2 + \left(-n - 2n^2 - \frac{4}{3}n^3 \right) \delta^3 \right] + \\ & + V_0 \times \left[\left(\frac{13}{12}n + \frac{5}{2}n^2 + 2n^3 + \frac{2}{3}n^4 \right) \delta^4 + O(\delta^5) \right]. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Se considerarmos que n é relativamente grande, podemos concluir que os maiores termos, dentro de cada parênteses, dominam sobre os outros. Assim, podemos desprezar as potências menores dentro de cada parênteses e reescrever a Eq. (4.44) como

$$V_n \cong V_0 \times \left[1 - 2n\delta + 2n^2\delta^2 - \left(\frac{4}{3}n^3 \right) \delta^3 + \left(\frac{2}{3}n^4 \right) \delta^4 + O(\delta^5) \right]. \quad (4.45)$$

A série de potências mostrada na Eq. (4.45) é a própria definição de exponencial,

$$V_n = V_0 e^{-2\delta n}. \quad (4.46)$$

Vamos confirmar nossa aproximação numericamente.

A Figura 4.2 mostra o comportamento da velocidade V em função do número de iterações n .

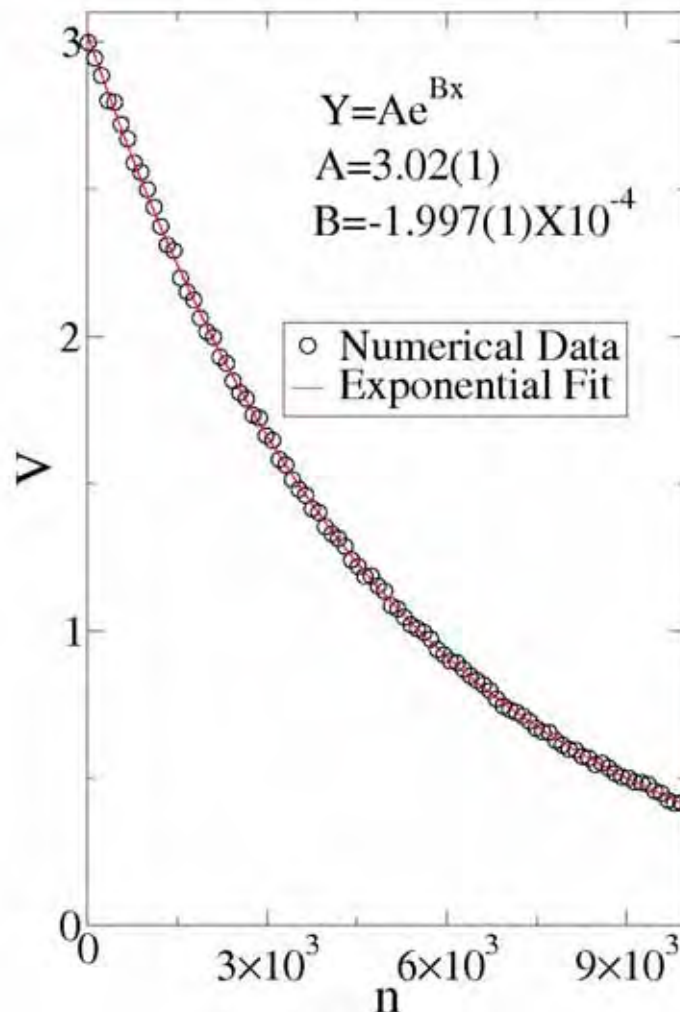


Figura 4.2: Comportamento da velocidade V em função do número de iterações (n). Os parâmetros de controle usados foram $\epsilon = 10^{-2}$ e $\delta = 10^{-4}$.

É mostrado, na figura, o decaimento exponencial da velocidade da partícula com o aumento do número de iterações. Os parâmetros de controle e condições iniciais usadas na construção da figura foram $\epsilon = 10^{-2}$, $\delta = 10^{-4}$ e $V_0 = 3$. Um ajuste exponencial do tipo $Y = Ae^{Bx}$, nos dá que $A = 3.02(1)$ e $B = -1.997(1) \times 10^{-4}$. Chamamos a atenção para o valor de B dado pelo ajuste exponencial. Se observarmos na Eq. (4.46), veremos que o valor de B corresponde ao valor de (-2δ) . O valor de δ utilizado foi $\delta = 1 \times 10^{-4}$, portanto $(-2\delta = -2 \times 10^{-4})$. O valor obtido para B foi $B = -1.997(1) \times 10^{-4}$, que é

aproximadamente (-2δ) . Logo, nossos resultados confirmam que a partícula aproxima-se exponencialmente de um ponto fixo, como foi previsto pela Eq. (4.46).

Agora vamos supor que a partícula é capturada por uma região de atração, à medida que evolui no tempo. Ela se aproxima desta região, que pode ser a bacia de atração de um ponto fixo atrativo. Vamos descrever o comportamento de aproximação da partícula, em função do número de iterações.

Nós então definimos uma série de diferentes condições iniciais e permitimos que o sistema evolua no tempo. Precisamos estabelecer um critério de convergência para checar se a partícula está próxima o bastante de um determinado ponto fixo atrativo. Este critério consiste basicamente em checar a distância da partícula ao ponto fixo. Assim, definimos um raio crítico, $r_c = 10^{-6}$, e evoluímos as condições iniciais. Se a partícula está suficientemente perto do ponto fixo atrativo, numa distância menor que r_c , então salvamos, em um arquivo de saída, o número de iteração correspondente gasto até chegar a tal condição e evoluímos uma nova condição inicial. A evolução de um ensemble de diferentes condições iniciais nos permite definir um número de iterações médio, dado por $\bar{n}_x = 1/M \sum_{i=1}^M n_i$.

A Figura 4.3(a) mostra o comportamento do número médio de iterações \bar{n}_x em função da proximidade da partícula a um ponto fixo atrativo, para uma série de diferentes trajetórias.

Cada curva mostrada em cor diferente corresponde a um valor de δ na Figura 4.3(a). O eixo na horizontal denota a distância r , dada por $r(n) = \sqrt{(V_n - V^*)^2 + (\phi_n - \phi^*)^2}$, onde as coordenadas do ponto fixo são dadas por V^* e ϕ^* . A média foi feita usando 500 diferentes condições iniciais no intervalo $(V_0, \phi_0) = ([0.325, 0.33], \pi)$.

Cada curva da Figura 4.3(a) foi ajustada de acordo com a função $\bar{n}_x = A + B \ln(r)$. Assumimos como parâmetro de controle fixo, $\epsilon = 10^{-2}$ e obtemos que, para $\delta = 10^{-4}$, $A = -4.680(4) \times 10^4$ e $B = -9.9991(4) \times 10^4$. Usando $\delta = 5 \times 10^{-5}$, obtemos, $A = -9.379(8) \times 10^4$ e $B = -1.99984(4) \times 10^4$. Finalmente, para $\delta = 10^{-5}$, encontramos que $A = -4.702(3) \times 10^5$ e $B = -9.996(3) \times 10^5$. Assim, concluímos que as trajetórias aproximam exponencialmente de um ponto fixo atrativo, à medida que o número de iterações evolui.

A Figura 4.3(b) mostra a evolução das trajetórias em direção a um ponto fixo atrativo, em função do coeficiente de arrasto δ . Concluímos que este comportamento pode ser descrito por

$$\bar{n}_x \propto \delta^\mu. \quad (4.47)$$

Um ajuste em lei de potência, como mostrado na Figura 4.3(b), nos dá que $\mu = -0.9993(7)$, que é aproximadamente (-1) . Assim, no limite de $\delta \rightarrow 0$, a Eq. (4.47) nos dá que $\bar{n}_x \rightarrow \infty$, confirmando que a não convergência para o ponto fixo é observada.

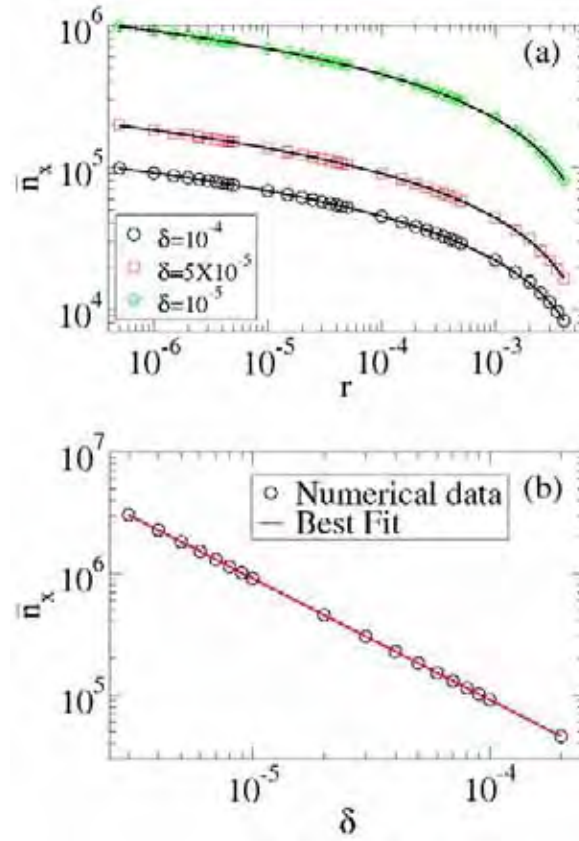


Figura 4.3: (a) Comportamento da média \bar{n}_x , para diferentes trajetórias, em função de r . (b) Comportamento da média \bar{n}_x em função de δ . O parâmetro de controle usado foi $\epsilon = 10^{-2}$.

Cada círculo de cor preta na Figura 4.3(b), corresponde a uma trajetória com valor de δ diferente. Assim, vemos que, quanto menor o valor de δ , maior o número de iterações gasto pela partícula para convergir a um ponto fixo atrativo. Podemos então concluir que, além da partícula aproximar exponencialmente de um ponto fixo, a velocidade de aproximação depende da intensidade do coeficiente de arrasto.

Os resultados mostrados nas Figuras 4.2 e 4.3 foram publicados, em nosso artigo, no *American Institute of Physics - AIP Proceedings* [37], em 2007.

Nosso próximo passo é obter o espaço de fases para este modelo simplificado e dissipativo do acelerador de Fermi.

Vimos, no modelo completo mostrado na seção 4.3, que seu espaço de fases apresenta contração de área. No modelo simplificado também não é diferente. A Figura 4.4 mostra o espaço de fases do modelo simplificado.

Podemos observar, na Figura 4.4(a), que houve destruição da estrutura mista encontrada no espaço de fases do modelo Conservativo. Um grande número de pontos fixos atrativos surge, cuja classificação das órbitas é mostrada na Figura 4.4(b). Os parâmetros de controle usados na construção da figura foram $\epsilon = 10^{-2}$ e $\delta = 10^{-4}$, os mesmos do modelo Completo. Os pontos fixos mostrados nas cores vermelha, azul claro e rosa, na

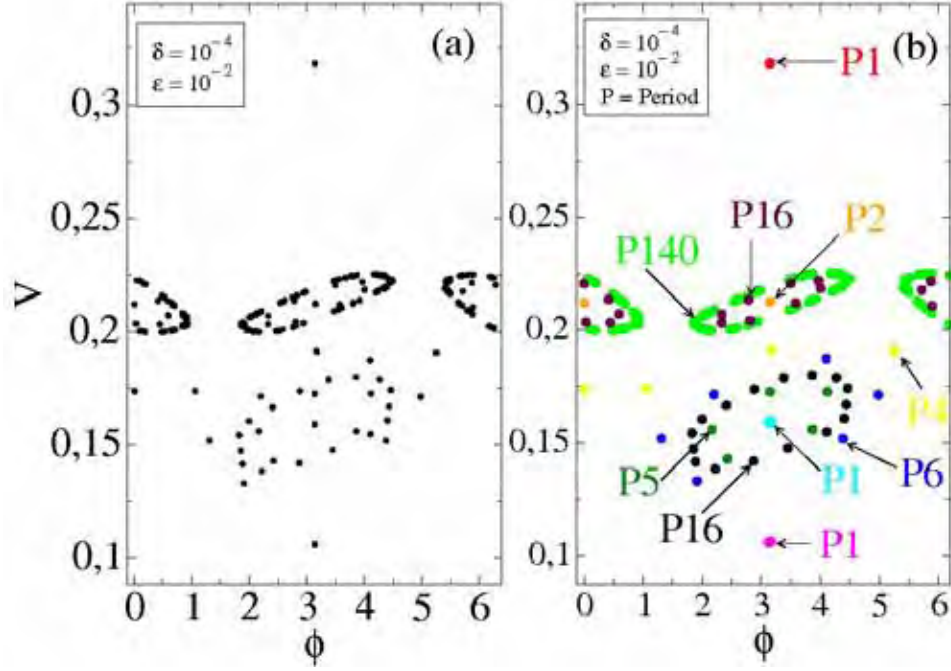


Figura 4.4: (a) Espaço de fases para esta versão dissipativa e simplificada do acelerador de Fermi. (b) Classificação das órbitas periódicas mostradas em (a).

Figura 4.4(b), são pontos fixos de período 1. Uma órbita de período 4 é mostrada na cor amarela e uma de período 2 é mostrada na cor laranja. Para esta combinação especial de parâmetros de controle, a órbita de maior período encontrada foi a de período 140, mostrada na cor verde.

Os pontos fixos atrativos de período 1, mostrados no espaço de fases da Figura 4.4, são obtidos analiticamente nesta seção.

Para se obter um ponto fixo de período 1, é necessário utilizar a seguinte condição,

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= V_n = V, \\ \phi_{n+1} &= \phi_n = \phi. \end{aligned}$$

Aplicando estas condições no mapa (4.41), obtemos

$$T : \begin{cases} V_{n+1} = \frac{V}{(2e^\delta - 1)} - 2\epsilon \sin(\phi) = V \\ \phi_{n+1} = \phi + 2 \left[\frac{e^\delta - 1}{V\delta} \right] = \phi \end{cases}. \quad (4.48)$$

Vamos utilizar a segunda equação do mapa (4.48), para obtermos uma expressão para V . Assim, temos

$$\phi + 2 \left[\frac{e^\delta - 1}{V\delta} \right] = \phi + 2m\pi,$$

onde $m = 1, 2, 3, \dots$. Reescrevendo, temos

$$\frac{e^\delta - 1}{V\delta} = m\pi.$$

Isolando V , ficamos com

$$V = \frac{e^\delta - 1}{\delta m \pi}, \quad (4.49)$$

com $m = 1, 2, 3, \dots$

Agora vamos utilizar a primeira equação do mapa (4.48) para encontrarmos uma expressão para (ϕ) . Assim, temos que

$$\frac{V}{(2e^\delta - 1)} - 2\epsilon \sin(\phi) = V.$$

Reescrevendo temos,

$$V \left(\frac{1}{(2e^\delta - 1)} - 1 \right) = 2\epsilon \sin(\phi).$$

Isolando $(\sin(\phi))$, obtemos

$$\sin(\phi) = \frac{V}{\epsilon} \left(\frac{1 - e^\delta}{2e^\delta - 1} \right).$$

Aplicando (\arcsin) de ambos os lados da equação acima e substituindo a expressão de V obtida na Eq. (4.49), temos que

$$\phi = \pm \arcsin \left[\frac{-(e^\delta - 1)^2}{\epsilon \delta m \pi (2e^\delta - 1)} \right], \quad (4.50)$$

com $m = 1, 2, 3, \dots$

Portanto, as Eqs. (4.49) e (4.50) nos dão as coordenadas dos pontos fixos atrativos de período 1, mostrados no espaço de fases da Figura 4.4, sendo que, para $m = 1$, obtemos o primeiro ponto fixo de período 1, o que está em vermelho, $m = 2$ o segundo ponto fixo de período 1, que está de azul claro e assim por diante.

Para as outras órbitas, de períodos maiores que 1, foi possível determinar apenas numericamente os pontos fixos, devido ao elevado grau de complexidade e não linearidade das equações.

4.4.2 Histograma de Frequências e Bacias de Atração

Geralmente, sistemas dinâmicos dissipativos não lineares exibem um rico e variado comportamento, incluindo um grande número de atratores periódicos. Na tentativa de estimar o número de atratores ou pontos fixos atrativos presentes no nosso modelo, nós evoluímos duas diferentes simulações, considerando duas diferentes grades de condições iniciais. Os resultados são mostrados na Figura 4.5, num histograma de frequências apresentado em escala logarítmica.

Primeiramente, consideramos 10^4 condições iniciais, numa grade de 100×100 , uniformemente distribuída nos intervalos de $\phi \in (0, 2\pi]$ e $V \in [\epsilon, 0.5]$. Depois, evoluímos

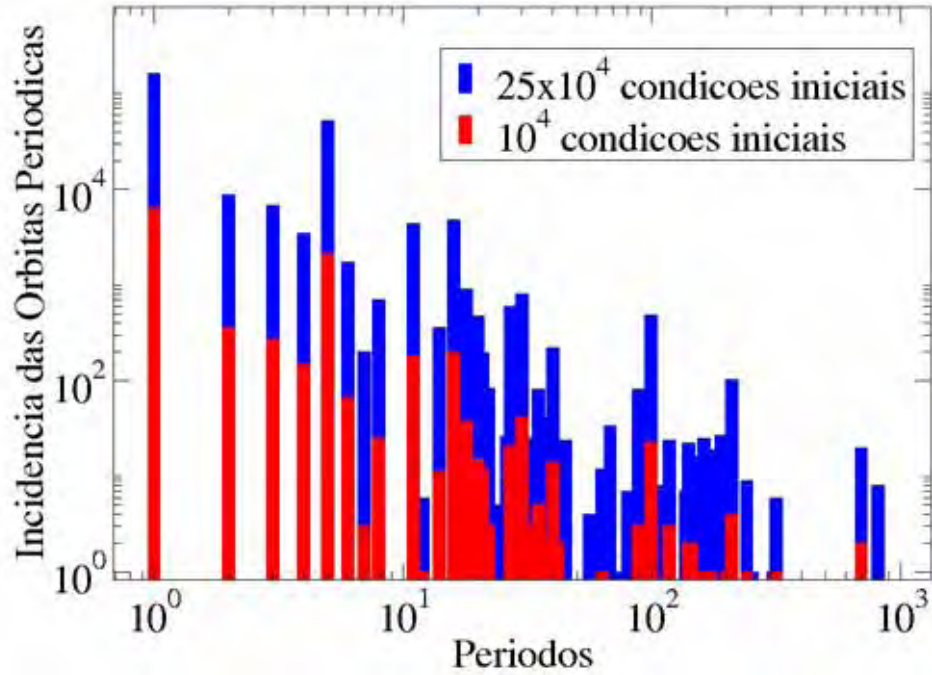


Figura 4.5: Número de atratores periódicos e a indicação dos períodos que aparecem com maior frequência neste modelo dissipativo e simplificado do acelerador de Fermi, usando $\epsilon = 10^{-2}$ e $\delta = 10^{-4}$. As colunas em vermelho mostram os resultados para 10^4 condições iniciais ao passo que as colunas em azul, mostram os resultados para 25×10^4 condições iniciais.

uma simulação para 25×10^4 condições iniciais numa grade de 500×500 para os mesmos intervalos de V e ϕ . Os parâmetros de controle usados foram $\epsilon = 10^{-2}$ e $\delta = 10^{-4}$. Cada condição inicial de cada uma das duas simulações realizadas foi evoluída até 10^7 iterações, para se evitar os efeitos de transiente.

É fácil ver na Figura 4.5 que os pontos fixos de baixo período (aqueles com período < 10), são mais incidentes que os pontos fixos de altos períodos. Quanto maior o período, mais raramente ele é encontrado. Salientamos que o número de pontos fixos observados em um sistema depende da grade de condições iniciais usada. Este fato é evidente na Figura 4.5. Para 10^4 condições iniciais, a maior órbita periódica encontrada foi de 693, ao passo que, para 25×10^4 condições iniciais, a mais longa órbita periódica detectada foi a de período 810. Portanto, concluímos que, quanto maior a grade de condições iniciais, maior o número de pontos fixos encontrados no sistema.

O grande número de pontos fixos atrativos encontrados no espaço de fases do nosso modelo, despertou profunda curiosidade e interesse em construir a bacia de atração para as órbitas de tais pontos fixos. Foi o que fizemos. A Figura 4.6 mostra a bacia de atração dos pontos fixos mostrados na Figura 4.4.

Nós mantivemos as mesmas cores usadas nas órbitas do espaço de fases da Figura 4.4(b). Podemos ver que a maior bacia de atração mostrada na Figura 4.6 está na cor

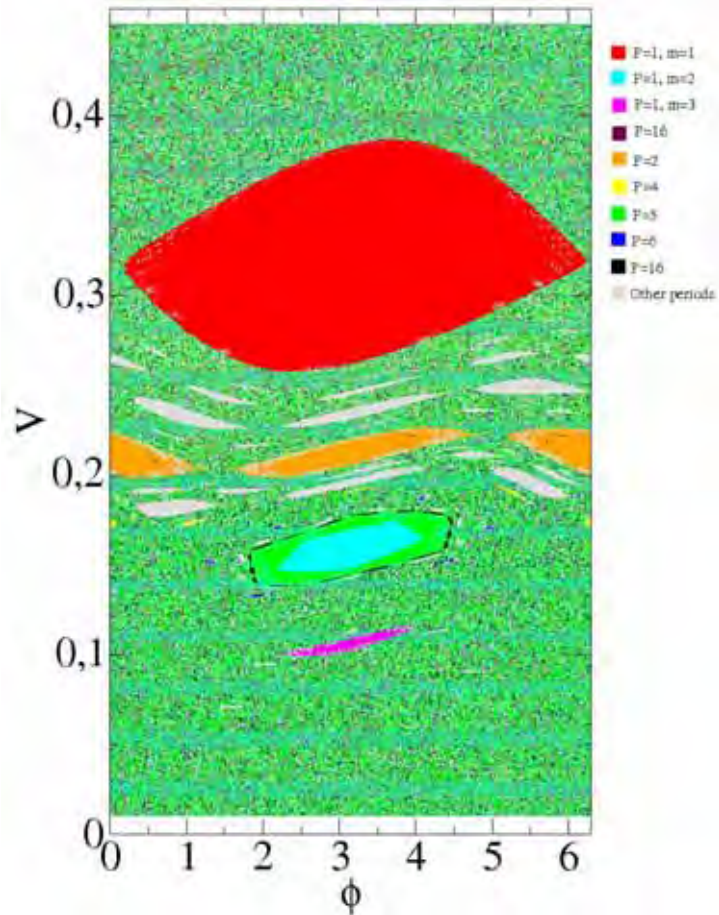


Figura 4.6: *Bacia de atração para os pontos fixos indicados na Figura 4.4. Na construção da figura, foram iteradas 10^6 condições iniciais, considerando uma grade de 1000×1000 nos intervalos de $\phi \in (0, 2\pi]$ e $V \in [\epsilon, 0.5]$. Os parâmetros de controle usados foram $\epsilon = 10^{-2}$ e $\delta = 10^{-4}$.*

vermelha e corresponde à principal órbita do espaço de fases, de período 1. Em geral, todas as bacias de órbita P_1 , aquelas mostradas em azul claro e rosa, são relativamente extensas, quando comparadas com as de outros períodos. Podemos dizer que as bacias de atração das órbitas periódicas de alto período, requerem uma maior grade de resolução no plano das condições iniciais. Os parâmetros de controle usados foram $\epsilon = 10^{-2}$ e $\delta = 10^{-4}$. Foram usadas condições iniciais nos intervalos de $V \in [\epsilon, 0.5]$ e $\phi \in (0, 2\pi]$. Cada intervalo foi dividido em 1000 partes iguais, conduzindo a um total de 10^6 condições iniciais. Cada condição inicial foi iterada 10^6 vezes.

Em sistemas com muitos atratores, como os encontrados aqui, a estrutura de suas bacias de atração é muito complexa. Nós esperamos que a complexidade de tais bacias de atração corresponda a uma propriedade típica de sistemas com muitos atratores coexistentes. Além disso, nossos resultados sugerem que, em vez de uma bacia de fronteira lisa, a introdução de pequena quantidade de dissipação conduz a uma aparente bacia de atração com fronteira fractal.

Os resultados apresentados nas Figuras 4.4, 4.5 e 4.6 foram recentemente aceitos para publicação no *Brazilian Journal of Physics* [38]. A previsão de publicação é para março deste ano.

Capítulo 5

CONCLUSÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

Neste trabalho, estudamos o modelo do Acelerador de Fermi em três versões distintas: Versão Conservativa, Versão Dissipativa, com a força proporcional à *velocidade da partícula* e outra Versão Dissipativa, desta vez com a força de dissipação proporcional ao *quadrado da velocidade da partícula*. Nas versões dissipativas, a força de dissipação foi introduzida via arrasto viscoso, de modo que a partícula perdia energia (velocidade) à medida que atravessava o fluido. Estudamos os comportamentos e propriedades dos três sistemas utilizando o formalismo de sistemas dinâmicos discretos. Os modelos foram descritos por mapeamentos e investigados numericamente. Em todos eles, uma versão completa e outra simplificada foram apresentadas. A versão completa descreve o modelo original proposto por Fermi em que uma partícula clássica está confinada e colidindo elasticamente entre duas paredes rígidas. Uma das paredes está fixa e a outra move-se periodicamente no tempo. O mapeamento para a versão completa dos modelos dissipativos é constituído por equações diferenciais que descrevem a velocidade da partícula e a fase da parede móvel no próximo choque. O instante do choque com a parede móvel é determinado por duas equações transcendentais, que tornam o procedimento computacional mais “caro” numericamente. Cada uma das equações transcendentais satisfaz um caso diferente de colisão da partícula com a parede móvel. Um deles é o caso das colisões múltiplas, em que a partícula pode colidir múltiplas vezes com a parede móvel antes de sair da zona de colisão. O outro, é o caso das colisões simples, em que a partícula só colide uma vez com a parede móvel antes de deixar a zona de colisão. A versão simplificada dos modelos foi, então, proposta para minimizar as dificuldades analíticas e numéricas encontradas na versão completa. Na versão simplificada, considera-se que as duas paredes do modelo estão fixas, mas que ao colidir com uma delas, previamente escolhida, a partícula troca energia e momentum com a parede como se ela estivesse se movendo. Assim, a necessidade de se

resolver equações transcendentais foi eliminada e o procedimento numérico se tornou mais rápido. Além do mais, a versão simplificada ainda possui a enorme vantagem de manter a não linearidade do problema, preservando suas principais características e propriedades.

No modelo de Fermi Conservativo, encontramos um espaço de fases com estrutura mista, constituída de Ilhas KAM, envoltas por mares caóticos e curvas invariantes spanning, cuja principal função é limitar o ganho de energia da partícula. A primeira curva invariante, divide o espaço de fases em duas regiões distintas: a de mais baixa energia (abaixo da primeira curva) e a de mais alta energia (acima da primeira curva). O mar de caos da região de mais baixa energia do espaço de fases foi caracterizado por um expoente de Lyapunov positivo, que atingiu boa convergência para tempos longos de iterações. Tanto a versão completa quanto a versão simplificada do modelo de Fermi Conservativo apresentaram determinante da matriz Jacobiana que preservam área do espaço de fases e este fato foi evidenciado pela análise da evolução de uma área infinitesimal do espaço de fases.

No modelo de Fermi, versão dissipativa, com $F \propto -V$, a introdução da força de arrasto provocou mudanças nos observáveis dinâmicos do sistema. As equações do mapeamento ficaram mais complicadas e as versões completa e simplificada do modelo apresentaram resultados diferentes. Na versão completa, o determinante da matriz Jacobiana revelou que o sistema apresentava contração de área do espaço de fases. A consequência disto foi a total destruição da típica estrutura global do espaço de fases encontrado no modelo Conservativo. Já na versão simplificada, o determinante da matriz Jacobiana mostrou que o sistema apresentava preservação de área em algumas regiões do espaço de fases. Essas regiões preservadas foram as ilhas KAM, que sobreviveram à introdução da força de arrasto. Determinamos o comportamento linear médio de decaimento da velocidade da partícula e mostramos os detalhes da passagem de uma trajetória perto da ilha KAM. Mostramos também que, no limite de $\delta \rightarrow 0$, o sistema recupera todos os resultados do modelo Conservativo, confirmando que o mapeamento foi construído de forma correta e confiável.

Nosso interesse em estudar o modelo de Fermi em uma versão dissipativa, com $F \propto -V^2$, foi saber se os resultados obtidos nas duas versões poderiam ser generalizados. E chegamos à conclusão de que não podem. Descobrimos que o determinante das matrizes Jacobianas das versões completa e simplificada do modelo, com $F \propto -V^2$, contraem área do espaço de fases. Os espaços de fases das duas versões apresentaram um grande número de pontos fixos atrativos que foram classificados de acordo com suas órbitas. Observamos que o número de atratores encontrados no sistema depende da combinação de parâmetros de controle usados. Estimamos o número de atratores observados no nosso modelo e apresentamos os resultados num histograma de frequências. Concluimos que, quanto

maior a grade de condições iniciais usada, maior o número de atratores encontrados, de períodos mais longos. As equações do mapeamento se tornaram altamente não lineares e, por esse motivo, decidimos evoluir a maior parte de nossas simulações numéricas no modelo simplificado. Construimos a bacia de atração dos atratores observados no espaço de fases do nosso modelo e, o que encontramos, foi uma rica e complexa estrutura de bacia de atração, cujas fronteiras sugerem uma fractalidade.

Em continuidade aos nossos trabalhos, esperamos calcular um expoente de incerteza [31] que possa confirmar ou não a fractalidade da fronteira da nossa bacia de atração. Tal expoente mede a instabilidade de uma condição inicial ligeiramente perturbada, capaz de mudar, com extrema facilidade, de uma bacia de atração para outra.

Bibliografia

- [1] A.J. Lichtenberg e A.M. Lieberman. “Regular and Chaotic Dynamics”, Applied Mathematical Sciences, vol 38 (New York: Springer) (1992).
- [2] H. Bai-Lin. “Chaos II”(Singapore: World Scientific) (1990).
- [3] J. Guckenheimer e P. Holmes. Applied Mathematical Sciences, vol 42 (New York: Springer) (2000).
- [4] H.E. Nusse e J.A. Yorke. “Dynamics: Numerical Explorations”, Applied Mathematical Sciences, vol 101 (New York: Springer) (1991).
- [5] E.D. Leonel e J.K.L. da Silva. “Dynamical Properties of a Particle in a Classical Time-Dependent Potential Well”. Physica A, 323, 181 (2003).
- [6] E.D. Leonel, J.K.L. da Silva e S.O. Kamphorst. “On the Dynamical Properties of a Fermi Accelerator Model”. Physica A, 331, 435 (2004).
- [7] E.D. Leonel e P.V.E. McClintock. “Dynamical Properties of a Particle in a Time-Dependent Double-Well Potential”. J. Phys. A: Math. Gen., 37, 8949 (2004).
- [8] E.D. Leonel e P.V.E. McClintock. “Chaotic Properties of a Time-Modulated Barrier”. Phys. Rev. E, 70, 016214 (2004).
- [9] E.D. Leonel. Phys. Rev. Lett. 98, 114102 (2007).
- [10] E. Fermi, “On the Origin of the Cosmic Radiation”, Phys. Rev. 75, 1169 (1949).
- [11] M.A. Lieberman e A.J. Lichtenberg. “Stochastic and Adiabatic Behavior of Particles Accelerated by Periodic Forces”, Phys. Rev. A, 5, 1852 (1972).
- [12] L.D. Pustyl'nikov. “Unbounded Growth of an Action Variable in Some Physical Models and Problem of Stochasticity”, Doklady Akad. Nauk SSSR, 241, 1035 (1978).
- [13] L.D. Pustyl'nikov. “On the Fermi-Ulam Model”, Soviet Math. Dokl., Vol. 35, n 1 (1987).

- [14] E.D. Leonel, “Propriedades Caóticas de Alguns Sistemas Hamiltonianos Dependentes do Tempo”. Tese (Doutorado em Física), Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, pp 1-2 (2003).
- [15] L.D. Pustynnikov. *Theor. Math. Phys.*, 57, 1035 (1983).
- [16] R.M. Everson. *Physica D*, 19, 355 (1986).
- [17] S.T. Dembinski, A.J. Makowski e P. Peplowski. *Phys. Rev. Lett.*, 70, 1093 (1993).
- [18] J.V. José e R. Cordery. *Phys. Rev. Lett.*, 56, 290 (1986).
- [19] S.R. Jain. *Phys. Rev. Lett.*, 70, 3553 (1993).
- [20] P.J. Holmes. *J. Sound Vib.*, 84, 173 (1982).
- [21] G.A. Luna-Acosta. *Phys. Rev. A*, 42, 7155 (1990).
- [22] L.D. Pustynnikov. *Trudy Moskov Mat. Obshch.*, 34, 1 (1977).
- [23] A.J. Lichtenberg, M.A. Lieberman e R.H. Cohen. *Physica D*, 1, 291 (1980).
- [24] E.D. Leonel e P.V.E. McClintock. “A Hybrid Fermi-Ulam-Bouncer Model”. *J. Phys. A*, 38, 823 (2005).
- [25] M.A. Lieberman e K.Y. Tsang. *Phys. Rev. Lett.*, 55, 908 (1985).
- [26] J.M. Luck e A. Mehta. *Phys. Rev. E*, 48, 3988 (1993).
- [27] K.Y. Tsang e M.A. Lieberman. *Physica D*, 11, 147 (1984).
- [28] E.D. Leonel e P.V.E. McClintock. “A Crisis in the Dissipative Fermi Accelerator Model”. *J. Phys. A*, 38, L425 (2005).
- [29] E.D. Leonel e R.E. de Carvalho. “A Family of Crisis in a Dissipative Fermi Accelerator Model”. *Phys. Lett. A*, 364, 475-479 (2007).
- [30] E.D. Leonel e P.V.E. McClintock. “Effect of a Frictional Force on the Fermi-Ulam Model”. *J. Phys. A*, 39, 11399-11415 (2006).
- [31] U. Feudel, C. Grebogi, B.R. Hunt e J.A. Yorke. *Phys. Rev. E*, 54, 1 (1996).
- [32] U. Feudel, C. Grebogi, L. Poon e J.A. Yorke. *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 9, n 1/2, pp. 171-180 (1998).
- [33] S.R.A. Salinas. “Introdução à Física Estatística”. Editora da Universidade de São Paulo (1997).

- [34] J.P. Eckmann e D. Ruelle. *Rev. Mod. Phys.* 57, 617 (1985).
- [35] R.C. Hilborn, “Chaos and Nonlinear Dynamics”. Oxford University Press (1994).
- [36] G.J. Sussman e J. Wisdom. “Estructure and Interpretation of Classical Mechanics”. The Massachusetts Institute of Technology (2001).
- [37] E.D.Leonel e D.F. Tavares. “Consequences of Quadratic Frictional Force on the One Dimensional Bouncing Ball Model”. *American Institute of Physics - AIP Conference Proceedings*, p. 108-113 (2007).
- [38] D.F. Tavares e E.D. Leonel. “A Simplified Fermi Accelerator Model Under Quadratic Frictional Force”. *Brazilian Journal of Physics*, vol. 38, n. 1 (2008).