

**BIBLIOTECA DIGITAL DE TESES E DISSERTAÇÕES  
UNESP**

**RESSALVA**

Alertamos para ausência de capa, folha de rosto, ficha catalográfica, sumário, não incluídos pelo autor no arquivo original.

## Resumo

O semi-eixo de Triton atualmente é  $\approx 14.325R_N$  porém este valor está continuamente decrescendo e num futuro distante, o movimento médio de Triton estará numa ressonância orbital com os satélites internos de Netuno, descobertos em 1989 pela Voyager. Neste trabalho, nós estudamos a dinâmica futura do problema, quando Triton e Proteus estarão envolvidos nas ressonâncias 3:1 e 2:1. A expansão da função perturbadora no caso retrógrado mostra que estas ressonâncias são de ordem superior se comparadas com o caso clássico. Mesmo assim, na presença destas ressonâncias, a excentricidade de Proteus será fortemente excitada e a órbita de Larissa será facilmente cruzada, uma vez que a excentricidade de Proteus cresce para altos valores. Assim toda a estrutura dos satélites internos será afetada quando o semi-eixo de Triton decrescer para  $\approx 9.883R_N$ . Um modelo muito simples que poderia ter afetado a obliquidade de Urano devido a migração planetária, é também discutido.

## Abstract

Nowadays the semi major axis of Triton is about  $14.325R_N$ . However this value is continuously decreasing and in a distant future, Triton's mean motion will be in a orbital resonance with the Neptunian inner satellites, discovered by Voyager in 1989. Basically, in this work we study the future dynamics of the problem, when Triton and Proteus would be involved in 3:1 and 2:1 resonance. The expansion of the disturbing function in the retrograde case shows that these resonances are of higher order when compared to the classical direct cases. Even so, we show that, in the presence of these resonances, the eccentricity of Proteus will be strongly excited and Larissa's orbit can be easily crossed, since in general, Proteus' eccentricity increases to very high values. Therefore the whole structure of the Neptunian inner Satellites starts to be affected, when Triton's semi major axis decreases to about  $9.883R_N$ . A very simple model which might have affected the obliquity of Neptune due to the planetary migration, is also discussed.

## Agradecimentos

Agradeço aos meus pais pelo incentivo e preocupação.

À minha namorada Ana pelo apoio e por compreender os momentos de ausência.

Ao meu orientador Tadashi Yokoyama pela ampla contribuição neste trabalho.

Aos meus colegas de pós-graduação Marcelo e Marcos Tadeu pelas discussões e pelo companheirismo.

A seção de pós-graduação do IGCE (especialmente à Eliana) por todo o apoio no transcorrer deste trabalho.

Ao DEMAC e IGCE pela infra-estrutura, apoio técnico e financeiro.

À FAPESP pelo auxílio financeiro (proc. 01/07031-1).

## Índice

<b>Introdução</b> . . . . .	.6
Notações . . . . .	.7
<b>Capítulo I</b>	
Desenvolvendo a função perturbadora . . . . .	8
A - Caso clássico direto . . . . .	.8
B - Caso clássico retrógrado . . . . .	12
C - Inclinação generalizada . . . . .	16
<b>Capítulo II</b>	
Perturbação do achatamento e Variação do Equador . . . . .	.22
A - Achatamento . . . . .	22
B - Plano invariável . . . . .	.26
C - Equações da precessão . . . . .	29
D - Uma solução de equilíbrio . . . . .	34
E - Variação de $\tilde{I}$ para diversos $a_T$ . . . . .	36
<b>Capítulo III</b>	
Perturbações sobre os satélites internos . . . . .	39
A - Comparação entre funções médias clássica retrógrada e de inclinação generalizada . . . . .	39
B - Comparações entre médias e exatas para algumas razões de semi-eixo . . . . .	.43
C - Ressonância 2:1 . . . . .	.45
D - Ressonância 3:1 . . . . .	.50
E - Influência da variação secular do semi-eixo $a_T$ . . . . .	52
F - O efeito da precessão . . . . .	.55

G - O efeito do achatamento . . . . .	.59
H - Aplicação com a função perturbadora de inclinação arbitrária . . . . .	.60
I - Librações . . . . .	.63

**Capítulo IV**

Possíveis variações das obliquidades dos planetas . . . . .	.68
A - Ressonância Spin-Nodo . . . . .	.68
B - Possíveis variações de $\varepsilon$ . . . . .	.72

**Conclusão**

**Bibliografia**

**Apêndice**

A - Conversão dos coeficientes modificados de Laplace . . . . .	.87
B - Relações importantes envolvendo derivadas de $a_j$ e $a_i$ . . . . .	.88
C - Função Perturbadora Clássica . . . . .	.90
D - Rotações - Passagem para coordenadas cartesianas . . . . .	.91
E - Equações da precessão em coordenadas não singulares . . . . .	.92

# Possíveis conseqüências na evolução de Triton em queda

## Introdução

Triton é um satélite de Netuno de massa bastante significativa ( $M_T/M_N \approx 2.09 \times 10^{-4}$ ) e devido a efeitos da maré, está em processo de queda. Sua órbita é praticamente única, no sentido que Triton é retrógrado e além disso não é um satélite exterior, isto é, seu semi-eixo é  $\approx 14.325R_N$  e sua excentricidade é  $\approx 0.000016$  (praticamente circular).

Mais internamente, próximo ao planeta Netuno, a Voyager descobriu em 1989 mais seis minúsculos satélites de massas muito pequenas.

A literatura apresenta vários trabalhos sobre a possível e controvertida origem de Triton, bem como alguns aspectos relativos ao futuro de Triton (Littleton 1936; McCord 1966; Counselman III 1973; Harrington and Van Flandern 1979; Farinella et al 1980; McKinnon 1984, 1995; Chyba 1989; Goldreich et al 1989; etc).

Sobre os satélites internos de Netuno, o número de trabalhos sobre a dinâmica não é tão grande, já que estes só foram descobertos em 1989 (Owen et al 1991, Banfield and Murray 1992). O que sem dúvida é bastante raro, é o estudo da dinâmica futura destes satélites levando em conta que o semi-eixo de Triton irá diminuindo.

À medida que o semi-eixo vai decrescendo, seu movimento médio entrará numa relação de ressonância com o movimento médio dos satélites mais internos, descobertos pela Voyager (Proteus, Larissa, Galatea, Despina, Thalassa e Naiad).

É sabido que nas ressonâncias diretas asteroidais, podem ocorrer grandes variações de excentricidade. Caso o sistema Triton-Proteus se encontre numa ressonância 3:1, 2:1, etc, poderíamos imaginar situações similares aquelas já conhecidas nos problemas asteroidais. Por exemplo, no caso 3:1 poderíamos pensar que a excentricidade de Proteus sofreria aumentos significativos a ponto de cruzar as órbitas dos demais satélites mais internos.

Ocorre que aqui, a ressonância orbital se processa entre um satélite em órbita direta e Triton que está em órbita retrógrada. Neste caso a função perturbadora do caso retrógrado mostra que os termos ressonantes são de ordem superior se comparados com o caso direto. Isto significa que o efeito ressonante seria bem mais fraco e eventualmente pouco ou nada importante ocorreria nestas comensurabilidades, agravando-se o fato de que a excentricidade de Proteus é  $\approx 0.0001$  e a inclinação é  $< 1^\circ$ .

Neste trabalho damos início ao estudo da dinâmica futura dos satélites internos de Netuno. Inicialmente desenvolvemos a função perturbadora clássica do problema restrito dos 3 corpos no caso retrógrado com o objetivo de examinar a ordem dos termos ressonantes. Generalizamos este desenvolvimento para inclinações arbitrárias, supondo porém excentricidades pequenas.

Em algumas oportunidades (Nicholson 2002, Dobrovolkis 1980) a importância da precessão do equador de Netuno é ressaltada. Desta forma, neste trabalho incluímos o efeito da precessão do equador do planeta devido a Triton e seu efeito é analisado.

As experiências aqui realizadas mostram que o efeito isolado, devido exclusivamente a ressonância orbital é praticamente desprezível nos casos 2:1 e 3:1. Porém se computado o efeito do achatamento, as integrações mostram que as excentricidades e inclinações sofrem significativas perturbações a ponto de causarem a ejeção de Proteus.

O principal efeito da maré é diminuir o semi-eixo de Triton. Desta forma, para estudar a passagem pela ressonância, e tendo em vista as incertezas nas constantes da maré, resolvemos simular esta passagem usando a força de arrasto, a qual num curto intervalo de tempo, durante a passagem, deve ser similar a maré. Não se observou nenhum caso de captura em libração.

Apresentamos por último, um estudo hipotético de possíveis variações da obliquidade dos planetas, causadas pela migração planetária.

### Notações

Neste trabalho, a menos de algumas alterações mencionadas no decorrer do texto, iremos considerar a seguinte notação:

$\vec{r}$  =vetor posição do corpo

$R_N$  =raio equatorial de Netuno

$M_N$  =massa de Netuno

$m$  =massa do satélite

$a$  =semi-eixo maior

$e$  =excentricidade

$I$  =Inclinação

$f$  =anomalia verdadeira

$M$  =anomalia média

$\Omega$  =longitude do nodo ascendente

$\omega$  =argumento do periastro

$\varpi$  =longitude do periastro

$J_2$  =coeficiente numérico do harmônico de segunda ordem (coeficiente do achatamento)

$\theta = \Omega + \omega + f$

$\psi$  =ângulo formado entre os vetores posição do satélite perturbado e do perturbador.

O elementos referidos ao corpo perturbado (satélite interno de Netuno) serão indexados pela letra  $i$ , e os que se referem ao perturbador (Triton) serão indexados pela letra  $T$ .

Obs.: A menos de que seja dito o contrário, a unidade de comprimento adotada será o raio equatorial de Netuno.



## Capítulo I - Desenvolvendo a função perturbadora

Conforme dito na introdução, Triton é um satélite de órbita retrógrada com alta inclinação. Neste capítulo desejamos apresentar o desenvolvimento da função perturbadora do problema restrito dos três corpos no caso em que a inclinação é arbitrária, porém com excentricidade pequena.

Inicialmente é apresentado, de maneira bem rápida, o caso clássico direto, referido a um plano arbitrário. Lembremos que em vários textos (Leverrier 1855, Brouwer e Clemence 1961) este desenvolvimento já está feito, porém em todas estas referências tais casos estão referidos a um plano particular, isto é, o plano de referência é o do perturbador. Neste trabalho a obtenção é feita partindo de um plano qualquer e temos automatizado os cálculos para qualquer ordem da excentricidade ou inclinação. Em particular fizemos até ordem quatro e será usado no capítulo IV, mostrando uma hipotética variação na obliquidade do equador de Urano, como decorrência da migração planetária.

Após feito o caso clássico direto (baixa inclinação e baixa excentricidade) apresentamos o desenvolvimento no caso retrógrado, porém ainda com baixa excentricidade e inclinação  $\approx 180^\circ$ . Tal desenvolvimento é importante já que neste caso é possível constatar algumas diferenças com o caso direto (em especial uma relacionada a propriedade de D'Alembert). Também é possível examinar a ordem de grandeza dos cossenos ressonantes.

Finalmente o caso com inclinação arbitrária será abordado na seção C.

### A - Caso Clássico direto

Desenvolveremos neste capítulo a função perturbadora classicamente conhecida, com pequenas inclinações e excentricidades. Os elementos referentes ao corpo perturbador serão indexados pela letra  $j$  nesta seção.

O movimento do corpo a ser estudado é dado por

$$\ddot{\vec{r}}_i = \nabla_i(U_i + \mathfrak{R}_i) \quad (1)$$

onde

$$U_i = \frac{G(M_N + m_i)}{\|\vec{r}_i\|} \quad (2)$$

e  $\mathfrak{R}_i$  é a função perturbadora dada por:

$$\mathfrak{R}_i = Gm_j \left( \frac{1}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|} - \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j}{\|\vec{r}_j\|^3} \right) = Gm_j \left( \frac{1}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|} - \frac{\|\vec{r}_i\| \|\vec{r}_j\| \cos(\psi)}{\|\vec{r}_j\|^3} \right)$$

Ou ainda,

$$\mathfrak{R}_i = Gm_j \left[ \left( \|\vec{r}_i\|^2 + \|\vec{r}_j\|^2 - 2\|\vec{r}_i\|\|\vec{r}_j\|\cos(\psi) \right)^{-1/2} - \frac{\|\vec{r}_i\|\cos(\psi)}{\|\vec{r}_j\|^2} \right] \quad (3)$$

A partir de agora, por facilidade de notação, faremos:  $\|\vec{r}_i\| = r_i$  e  $\|\vec{r}_j\| = r_j$

A função perturbadora é dividida em duas partes;  $h$  e  $Q$ , dadas abaixo:

$$h = \left( r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos(\psi) \right)^{-1/2} \quad (4)$$

$$Q = \frac{\vec{r}_i \cos(\psi)}{r_j^3} \quad (5)$$

Logo,

$$\mathfrak{R}_i = Gm_j(h - Q)$$

Para descrevermos esta função, primeiramente é necessário escrevermos o  $\cos(\psi)$  em termos dos elementos orbitais. Sabemos que:

$$\cos(\psi) = \frac{\vec{r}_i \vec{r}_j}{r_i r_j} = \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_i r_j} \quad (6)$$

E também sabemos escrever as coordenadas cartesianas em termo dos elementos orbitais (ver apêndice). Daí:

$$\begin{aligned} \cos(\psi) = & (\cos(\Omega_i) \cos(f_i + \omega_i) - \cos(I_i) \sin(\Omega_i) \sin(f_i + \omega_i)) \\ & (\cos(\Omega_j) \cos(f_j + \omega_j) - \cos(I_j) \sin(\Omega_j) \sin(f_j + \omega_j)) + \\ & (\sin(\Omega_i) \cos(f_i + \omega_i) + \cos(I_i) \cos(\Omega_i) \sin(f_i + \omega_i)) \\ & (\sin(\Omega_j) \cos(f_j + \omega_j) + \cos(I_j) \cos(\Omega_j) \sin(f_j + \omega_j)) + \\ & \sin(I_i) \sin(f_i + \omega_i) \sin(I_j) \sin(f_j + \omega_j) \end{aligned} \quad (7)$$

Para que possamos escrever a função perturbadora em uma série de potências de  $\sin(I_i/2)$  e  $\sin(I_j/2)$ , vamos substituir no  $\cos(\psi)$ ,  $\cos(I_i)$  por  $1 - 2\sin(I_i/2)^2$  e  $\sin(I_i) = 2\sin(I_i/2) - \sin(I_i/2)^3 \dots$ , valendo as mesmas fórmulas para  $I_j$ . Aqui estamos desprezando termos de ordem superior a 4.

Para simplificar um pouco a notação neste capítulo faremos  $s_i = \sin(I_i/2)$  e  $s_j = \sin(I_j/2)$ .

$$\begin{aligned} \cos(\psi) = & (s_j^2 - s_i^2 s_j^2) \cos(\theta_i + \theta_j - 2\Omega_j) + (-s_j^2 + 1 - s_i^2 + s_i^2 s_j^2) \cos(\theta_i - \theta_j) + \\ & (-s_i^2 s_j^2 + s_i^2) \cos(-2\Omega_i + \theta_i + \theta_j) + \cos(-2\Omega_i + \theta_i + 2\Omega_j - \theta_j) s_i^2 s_j^2 + \\ & (-s_i^3 s_j + 2s_i s_j - s_i s_j^3) \cos(\theta_i - \Omega_i - \theta_j + \Omega_j) + \\ & (s_i^3 s_j - 2s_i s_j + s_i s_j^3) \cos(\theta_i - \Omega_i + \theta_j - \Omega_j) \end{aligned} \quad (8)$$

onde  $\theta_i = f_i + \Omega_i + \omega_i$  e  $\theta_j = f_j + \Omega_j + \omega_j$

Observe que  $\cos(\psi)$  está muito perto de  $\cos(\theta_i - \theta_j)$ , uma vez que supomos  $s_i$  e  $s_j$  pequenos. Portanto podemos aproximar  $h$  numa série de Taylor em torno do ponto  $\cos(\psi) = \cos(\theta_i - \theta_j)$ :

$$h = \{r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos(\theta_i - \theta_j)\}^{-1/2} + r_i r_j \{r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos(\theta_i - \theta_j)\}^{-3/2} y + 3r_i^2 r_j^2 \{r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos(\theta_i - \theta_j)\}^{-5/2} \frac{y^2}{2!} + \dots$$

onde  $y = \cos(\psi) - \cos(\theta_i - \theta_j)$ .

Novamente, como  $r_i \approx a_i$  e  $r_j \approx a_j$  (pois  $e_i$  e  $e_j$  estão próximos de zero) podemos aproximar  $h$  por uma série de Taylor em torno dos pontos  $r_i = a_i$  e  $r_j = a_j$ , assim:

$$h = A' + B' + 3C'$$

sendo,

$$A' = \rho_{ij} + \frac{\partial \rho_{ij}}{\partial a_i} (r_i - a_i) + \frac{\partial \rho_{ij}}{\partial a_j} (r_j - a_j) + \frac{\partial^2 \rho_{ij}}{\partial a_i^2} \frac{(r_i - a_i)^2}{2!} + \frac{\partial^2 \rho_{ij}}{\partial a_j^2} \frac{(r_j - a_j)^2}{2!} + \dots$$

$$B' = \{\delta_{ij} + \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial a_i} (r_i - a_i) + \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial a_j} (r_j - a_j) + \frac{\partial^2 \delta_{ij}}{\partial a_i^2} \frac{(r_i - a_i)^2}{2!} + \frac{\partial^2 \delta_{ij}}{\partial a_j^2} \frac{(r_j - a_j)^2}{2!}\} y$$

$$C' = \gamma_{ij} \frac{y^2}{2!}$$

E

$$\rho_{ij} = \{a_i^2 + a_j^2 - 2a_i a_j \cos(\theta_i - \theta_j)\}^{-1/2} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} A_k \cos(k\theta_i - k\theta_j)$$

$$\delta_{ij} = a_i a_j \{a_i^2 + a_j^2 - 2a_i a_j \cos(\theta_i - \theta_j)\}^{-3/2} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} B_k \cos(k\theta_i - k\theta_j)$$

$$\gamma_{ij} = a_i^2 a_j^2 \{a_i^2 + a_j^2 - 2a_i a_j \cos(\theta_i - \theta_j)\}^{-5/2} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} C_k \cos(k\theta_i - k\theta_j)$$

$A_k$ ,  $B_k$  e  $C_k$  são chamados coeficientes modificados de Laplace. Estes por sua vez podem ser convertidos em coeficientes de Laplace (ver apêndice).

Sabemos escrever  $r - a$  em termos da excentricidade, anomalia média e semi-eixo maior (aproximação por uma série truncada nas excentricidades); e  $y$  é dado por (8). Se desejarmos apenas os termos seculares e de longo período realizamos uma dupla média em relação as longitudes médias, eliminando assim os termos de curto período. Então:

$$\langle \mathfrak{R}_i \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{R}_i d\lambda_i d\lambda_j = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} G m_j h d\lambda_i d\lambda_j$$

Como, a parte indireta da função só apresenta termos de curto período então a média pode ser realizada somente sobre a parte direta.

Assim foi possível desenvolvermos a função perturbadora clássica até quarta ordem, e depois realizamos uma média nas longitudes médias. A função obtida é equivalente a de Yuasa-1973 e para fazermos a verificação basta considerarmos  $\sin(I_i) = 2 \sin(I_i/2) - \sin(I_i/2)^3$  (aproximação por série de Taylor), já que em Yuasa as séries são desenvolvidas em termos de  $\sin(I_i)$ .

## B - Caso Clássico retrógrado

Como nos interessa investigar a perturbação que Triton, um corpo de órbita retrógrada, exerce sobre outro satélite, iremos dar início a nosso estudo desenvolvendo a função perturbadora no caso retrógrado onde a inclinação do perturbado será pequena e direta, enquanto que a do perturbador será também baixa ( $\approx 180^\circ$ ) porém retrógrada.

Como a inclinação do perturbador está próxima de 180 graus, não podemos desenvolver nossa série em termos de potências de  $\sin(I_j/2)$  como é feito no caso clássico. Em vez disso desenvolveremos em série de potências de  $\sin(I_j)$ . A partir deste ponto o desenvolvimento torna-se análogo ao caso de órbitas diretas. Também truncaremos nosso desenvolvimento na quarta ordem de  $e_i$ ,  $e_j$ ,  $\sin(I_i/2)$  e  $\sin(I_j)$ .

Na expressão (7) da seção A nós substituímos  $\cos(I_j)$  por  $-1 + \frac{1}{2} \sin(I_j)^2 + \frac{1}{8} \sin(I_j)^4$ . Esta é a primeira diferença entre o desenvolvimento do caso direto e o retrógrado. Deste modo obtemos:

$$\begin{aligned}
 \cos(\psi) = & \cos(\theta_i + \theta_j - 2\Omega_j) + s_i s_j \cos(\theta_i - \Omega_i - \theta_j + \Omega_j) - s_i s_j \cos(\theta_i - \Omega_i + \theta_j - \Omega_j) + \\
 & s_i^2 \cos(-2\Omega_i + \theta_i + 2\Omega_j - \theta_j) - s_i^2 \cos(\theta_i - 2\Omega_j + \theta_j) + \frac{1}{4} s_j^2 \cos(\theta_i - \theta_j) - \\
 & \frac{1}{4} s_j^2 \cos(\theta_i - 2\Omega_j + \theta_j) - \frac{1}{4} s_i^2 s_j^2 \cos(-2\Omega_i + \theta_i + 2\Omega_j - \theta_j) + \\
 & \frac{1}{4} s_i^2 s_j^2 \cos(-2\Omega_i + \theta_i + \theta_j) + \frac{1}{4} s_i^2 s_j^2 \cos(\theta_i - 2\Omega_j + \theta_j) - \frac{1}{4} s_i^2 s_j^2 \cos(\theta_i - \theta_j) + \\
 & \frac{1}{16} s_j^4 \cos(\theta_i - \theta_j) - \frac{1}{16} s_j^4 \cos(\theta_i - 2\Omega_j + \theta_j) + \frac{1}{2} s_i^3 s_j \cos(\theta_i - \Omega_i + \theta_j - \\
 & \Omega_j) - \frac{1}{2} s_i^3 s_j \cos(\theta_i - \Omega_i - \theta_j + \Omega_j)
 \end{aligned} \tag{9}$$

sendo  $\theta_i = f_i + \Omega_i + \omega_i$ ,  $\theta_j = f_j + \Omega_j + \omega_j$ ,  $s_i = \sin(I_i/2)$  e  $s_j = \sin(I_j)$

Como consequência direta desta aproximação percebemos que  $\cos(\psi)$  agora está muito próximo de  $\cos(\theta_i + \theta_j - 2\Omega_j)$ , diferente do caso direto em que  $\cos(\psi) \approx \cos(\theta_i - \theta_j)$ . Portanto agora, desenvolveremos  $h$  numa série de Taylor em torno do ponto  $x = \cos(\theta_i + \theta_j - 2\Omega_j)$

Desta vez vamos apresentar explicitamente todos os termos seculares e de longo período até ordem quatro. Apresentamos também os termos ressonantes 2:1 e 3:1.

Whipple e Shelus (1993) quando estudaram satélites externos de Júpiter, adotaram uma nova definição de  $\varpi$  para estes satélites. Aqui também nós passaremos a usar tal definição, isto é,  $\varpi_j = \Omega_j - \omega_j$ . Observamos que sem esta definição algumas propriedades clássicas de D'Alembert não se verificam. Exemplo: O termo  $-\frac{4\alpha}{a_j} b_{3/2}^{(2)} e_i e_j \cos(\varpi_i + \varpi_j - 2\Omega_j)$  onde  $\varpi_j$  acima está escrito na forma antiga  $\varpi_j = \Omega_j + \omega_j$ . Se porém definirmos  $\varpi_j$  na forma  $\Omega_j - \omega_j$  então recuperamos todas as propriedades de D'Alembert. O cuidado que se deve tomar é que agora as equações de Lagrange também devem ser convenientemente corrigidas.

Nas expressões abaixo adotamos então  $\varpi_i = \Omega_i + \omega_i$ ,  $\varpi_j = \Omega_j - \omega_j$ ,  $\lambda_i = M_i + \varpi_i$ ,  $\lambda_j = M_j + \varpi_j$ .

### Termos seculares e de longo período

$$\begin{aligned}
R_1 = & Gm_j \left[ \frac{1}{128} \frac{(-16 s_i s_j e_j e_i a_i^3 a_j d2b32_0 - 64 s_i s_j e_j e_i a_i^2 a_j^2 db32_0) \cos(\Omega_i - \varpi_j + \Omega_j - \varpi_i)}{a_j^5} + \right. \\
& \frac{1}{128} (-16 s_i s_j a_i^3 a_j e_j^2 d2b32_1 - 64 s_i s_j a_i^2 a_j^2 e_i^2 db32_1 - 16 s_i s_j a_i^3 a_j e_i^2 d2b32_1 + 32 s_i^3 s_j a_i a_j^3 b32_1 + \\
& 24 a_i^2 b52_2 s_i s_j^3 a_j^2 + 192 a_i^2 b52_0 s_i^3 s_j a_j^2 - 64 s_i s_j a_i^2 a_j^2 e_j^2 db32_1 + 96 a_i^2 b52_2 s_i^3 s_j a_j^2 - \\
& 32 s_i s_j a_i a_j^3 e_j^2 b32_1 - 64 s_i s_j a_i a_j^3 b32_1 - 32 s_i s_j a_i a_j^3 e_i^2 b32_1 + 48 a_i^2 b52_0 s_i s_j^3 a_j^2) \frac{\cos(\Omega_i - \Omega_j)}{a_j^5} + \\
& \frac{1}{128} \frac{(48 a_i^2 b52_2 s_i^2 s_j^2 a_j^2 + 24 a_i^2 b52_0 s_i^2 s_j^2 a_j^2 + 16 a_i b32_1 s_j^2 s_i^2 a_j^3) \cos(2\Omega_i - 2\Omega_j)}{a_j^5} + \frac{1}{128} \\
& \frac{(24 s_j^2 e_i^2 a_i a_j^3 b32_1 + 2 s_j^2 e_i^2 a_i^3 a_j d2b32_1 + 16 s_j^2 e_i^2 a_i^2 a_j^2 db32_1) \cos(-2\Omega_j + 2\varpi_i)}{a_j^5} \\
& + \frac{1}{128} \frac{(8 s_i^2 e_i^2 a_i^3 a_j d2b32_1 + 64 s_i^2 e_i^2 a_i^2 a_j^2 db32_1 + 96 s_i^2 e_i^2 a_i a_j^3 b32_1) \cos(2\Omega_i - 2\varpi_i)}{a_j^5} \\
& + \frac{1}{128} \frac{(96 s_i s_j a_i a_j^3 e_i^2 b32_1 + 8 s_i s_j a_i^3 a_j e_i^2 d2b32_1 + 64 s_i s_j a_i^2 a_j^2 e_i^2 db32_1) \cos(\Omega_i + \Omega_j - 2\varpi_i)}{a_j^5} \\
& + \frac{1}{128} \frac{(64 s_i s_j e_j e_i a_i^2 a_j^2 db32_{-2} + 16 s_i s_j e_j e_i a_i^3 a_j d2b32_{-2}) \cos(\Omega_i - \varpi_j - \Omega_j + \varpi_i)}{a_j^5} \\
& + \frac{1}{128} (24 e_j^2 e_i^2 b12_2 a_j^4 + 2 e_j^2 e_i^2 a_i^4 d4b12_2 - 24 e_j^2 e_i^2 a_i db12_2 a_j^3 + 12 e_j^2 e_i^2 a_i^2 d2b12_2 a_j^2 + \\
& 16 e_j^2 e_i^2 a_i^3 d3b12_2 a_j) \frac{\cos(-2\varpi_j + 2\varpi_i)}{a_j^5} + 1/16 \frac{e_j^2 s_i^2 a_i^3 d2b32_1 \cos(2\Omega_i - 2\varpi_j)}{a_j^4} + \\
& \frac{1}{128} \frac{(-64 e_j s_i^2 e_i a_i^2 a_j^2 db32_0 - 16 e_j s_i^2 e_i a_i^3 a_j d2b32_0) \cos(2\Omega_i - \varpi_j - \varpi_i)}{a_j^5} + \frac{1}{64} \frac{e_j^2 s_j^2 a_i^3 d2b32_1 \cos(-2\Omega_j + 2\varpi_j)}{a_j^4} + \\
& 1/16 \frac{s_i s_j a_i^3 e_j^2 d2b32_1 \cos(\Omega_i + \Omega_j - 2\varpi_j)}{a_j^4} + \frac{1}{128} \frac{(16 s_i s_j e_j e_i a_i^3 a_j d2b32_0 + 64 s_i s_j e_j e_i a_i^2 a_j^2 db32_0) \cos(\Omega_i + \varpi_j - \Omega_j - \varpi_i)}{a_j^5} + \\
& \frac{1}{128} \frac{(-4 s_j^2 e_j e_i a_i^3 a_j d2b32_0 - 16 s_j^2 e_j e_i a_i^2 a_j^2 db32_0) \cos(\varpi_j - 2\Omega_j + \varpi_i)}{a_j^5} + \\
& \frac{1}{128} (-16 e_j^3 e_i a_i db12_1 a_j^3 - 40 e_j^3 e_i a_i^3 d3b12_{-1} a_j - 16 e_j e_i^3 a_i^2 d2b12_1 a_j^2 + 16 e_j s_i^2 e_i a_i^3 a_j d2b32_0 + \\
& 64 e_j e_i a_i^2 a_j^2 s_i^2 db32_2 - 64 e_j e_i a_i db12_1 a_j^3 + 16 s_j^2 e_j e_i a_i^2 a_j^2 db32_0 - 88 e_j^3 e_i a_i^2 d2b12_1 a_j^2 + \\
& 16 e_j^3 e_i b12_1 a_j^4 - 32 e_j e_i a_i^2 d2b12_1 a_j^2 - 4 e_j^3 e_i a_i^4 d4b12_1 + 64 e_j s_i^2 e_i a_i^2 a_j^2 db32_0 - 4 e_j e_i^3 a_i^4 d4b12_1 + \\
& 16 e_j e_i a_i^3 a_j s_i^2 d2b32_2 + 4 s_j^2 e_j e_i a_i^3 a_j d2b32_0 - 24 e_j e_i^3 a_i^3 d3b12_{-1} a_j + 4 e_j e_i a_i^3 a_j s_j^2 d2b32_2 + \\
& 16 e_j e_i a_i^2 a_j^2 s_j^2 db32_2 + 64 e_j e_i b12_1 a_j^4) \frac{\cos(-\varpi_j + \varpi_i)}{a_j^5} + \frac{1}{128} (120 a_i^2 b52_0 s_i^2 s_j^2 a_j^2 + e_i^4 a_i^4 d4b12_0 - \\
& 4 s_j^2 e_i^2 a_i^3 a_j d2b32_1 + 4 e_j^2 e_i^2 a_i^4 d4b12_0 + 48 a_i^2 b52_2 s_i^4 a_j^2 - 4 a_i b32_1 s_j^4 a_j^3 - 16 a_i b32_1 s_j^2 a_j^3 + \\
& 16 e_j^2 a_i^2 d2b12_0 a_j^2 + 6 a_i^2 b52_0 s_j^4 a_j^2 + 24 e_j^4 a_i db12_0 a_j^3 + 36 e_j^4 a_i^2 d2b12_0 a_j^2 + 32 e_i^2 a_i db12_0 a_j^3 + \\
& 4 e_i^4 a_i^3 d3b12_0 a_j + 32 e_j^2 a_i db12_0 a_j^3 + 96 a_i^2 b52_0 s_i^4 a_j^2 - 64 a_i b32_1 s_i^2 a_j^3 + 12 e_j^4 a_i^3 d3b12_0 a_j + \\
& 16 e_i^2 a_i^2 d2b12_0 a_j^2 + 3 a_i^2 b52_2 s_j^4 a_j^2 + 32 e_j^2 e_i^2 a_i^3 d3b12_0 a_j + 24 a_i^2 b52_2 s_i^2 s_j^2 a_j^2 - 32 e_j^2 s_i^2 a_i a_j^3 b32_1 + \\
& 56 e_j^2 e_i^2 a_i^2 d2b12_0 a_j^2 + 16 e_j^2 e_i^2 a_i db12_0 a_j^3 - 64 e_j^2 s_i^2 a_i^2 a_j^2 db32_1 - 4 e_j^2 s_j^2 a_i^3 a_j d2b32_1 - \\
& 8 e_j^2 s_j^2 a_i a_j^3 b32_1 - 16 e_j^2 s_j^2 a_i^2 a_j^2 db32_1 - 16 e_j^2 s_i^2 a_i^3 a_j d2b32_1 - 64 s_i^2 e_i^2 a_i^2 a_j^2 db32_1 - \\
& 8 s_j^2 e_i^2 a_i a_j^3 b32_1 - 32 s_i^2 e_i^2 a_i a_j^3 b32_1 - 16 s_i^2 e_i^2 a_i^3 a_j d2b32_1 + 16 a_i b32_1 s_j^2 s_i^2 a_j^3 - 16 s_j^2 e_i^2 a_i^2 a_j^2 db32_1 + \\
& \left. 64 b12_0 a_j^4 + e_j^4 a_i^4 d4b12_0) \frac{1}{a_j^5} \right]
\end{aligned}$$

### Termos devidos à ressonância 2:1

$$\begin{aligned}
R_2 = & Gm_j \left[ -1/48 \frac{(6 e_i^3 a_i^2 d2b12_2 a_j + 3 e_i^3 a_i db12_2 a_j^2 - 4 e_i^3 b12_2 a_j^3 + e_i^3 a_i^3 d3b12_2) \cos(\lambda_i - 2\lambda_j + 4\varpi_j - 3\varpi_i)}{a_j^4} \right. \\
& 1/48 \frac{(-48 e_j s_i^2 a_i a_j^2 b32_0 - 96 a_i s_i^2 e_j a_j^2 - 12 e_j s_i^2 a_i^2 a_j db32_0) \cos(2\Omega_i - \lambda_i + 2\lambda_j - 3\varpi_j)}{a_j^4} \\
& \left. -1/48 \frac{(-21 e_j e_i^2 a_i^2 d2b12_1 a_j + 9 e_j e_i^2 b12_1 a_j^3 - 21 e_j e_i^2 a_i db12_1 a_j^2 - 3 e_j e_i^2 a_i^3 d3b12_1 - 12 a_i e_j e_i^2 a_j^2) \cos(\lambda_i - 2\varpi_i - 2\lambda_j + 3\varpi_j)}{a_j^4} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -1/48 \frac{(30 e_j^2 e_i a_i db12_0 a_j^2 + 3 e_j^2 e_i a_i^3 d3b12_0 + 24 e_j^2 e_i a_i^2 d2b12_0 a_j) \cos(\lambda_i - \varpi_i - 2 \lambda_j + 2 \varpi_j)}{a_j^4} \\
& -1/48 \frac{(-96 a_i s_j e_j s_i a_j^2 - 12 s_i s_j e_j a_i^2 a_j db32_0 - 48 s_i s_j e_j a_i a_j^2 b32_0) \cos(\Omega_i + 2 \lambda_j - 3 \varpi_j - \lambda_i + \Omega_j)}{a_j^4} \\
& -1/48 \frac{(-8 a_i e_j^3 a_j^2 - 9 e_j^3 a_i^2 d2b12_1 a_j - 12 e_j^3 a_i db12_1 a_j^2 - e_j^3 a_i^3 d3b12_1 + 4 e_j^3 b12_1 a_j^3) \cos(\lambda_i - 2 \lambda_j + \varpi_j)}{a_j^4} \\
& 1/48 \frac{(12 s_i^2 e_i a_i a_j^2 b32_1 + 12 s_i^2 e_i a_i^2 a_j db32_1) \cos(2 \Omega_i - \lambda_i + 2 \lambda_j - 4 \varpi_j + \varpi_i)}{a_j^4} \\
& -1/48 \frac{(12 s_i s_j e_i a_i a_j^2 b32_1 + 12 s_i s_j e_i a_i^2 a_j db32_1) \cos(-\lambda_i + 2 \lambda_j - 4 \varpi_j + \Omega_i + \Omega_j + \varpi_i)}{a_j^4} \\
& -1/48 \frac{(3 s_j^2 e_i a_i^2 a_j db32_1 + 3 s_j^2 e_i a_i a_j^2 b32_1) \cos(-\lambda_i + 2 \lambda_j - 4 \varpi_j + 2 \Omega_j + \varpi_i)}{a_j^4} \\
& -1/48 \frac{(-3 s_j^2 e_j a_i^2 a_j db32_0 - 12 s_j^2 e_j a_i a_j^2 b32_0 - 24 a_i s_j^2 e_j a_j^2) \cos(2 \lambda_j - 3 \varpi_j + 2 \Omega_j - \lambda_i)}{a_j^4}
\end{aligned}$$

### Termos devidos à ressonância 3:1

$$\begin{aligned}
R_3 &= Gm_j \left[ \frac{3}{128} \frac{a_i^2 b52_1 s_j^4 \cos(-\lambda_i + 3 \lambda_j - 6 \varpi_j + 4 \Omega_j)}{a_j^3} \right. \\
&+ \frac{1}{384} \frac{(1296 a_i s_j e_j^2 s_i a_j^3 + 24 e_j^2 s_i s_j a_i^3 a_j d2b32_0 + 648 e_j^2 s_i s_j a_i a_j^3 b32_0 + 288 e_j^2 s_i s_j a_i^2 a_j^2 db32_0) \cos(-\lambda_i + \Omega_i + 3 \lambda_j - 4 \varpi_j + \Omega_j)}{a_j^5} + \\
&\frac{1}{384} \frac{(324 a_i s_j^2 e_j^2 a_j^3 + 162 e_j^2 s_j^2 a_i a_j^3 b32_0 + 6 e_j^2 s_j^2 a_i^3 a_j d2b32_0 + 72 e_j^2 s_j^2 a_i^2 a_j^2 db32_0) \cos(-\lambda_i + 3 \lambda_j - 4 \varpi_j + 2 \Omega_j)}{a_j^5} + \\
&3/8 \frac{a_i^2 b52_1 s_i^4 \cos(-\lambda_i + 3 \lambda_j - 6 \varpi_j + 4 \Omega_i)}{a_j^3} + \\
&\frac{1}{384} \frac{(648 e_j^2 s_i^2 a_i a_j^3 b32_0 + 24 e_j^2 s_i^2 a_i^3 a_j d2b32_0 + 288 e_j^2 s_i^2 a_i^2 a_j^2 db32_0 + 1296 a_i s_i^2 e_j^2 a_j^3) \cos(2 \Omega_i - \lambda_i + 3 \lambda_j - 4 \varpi_j)}{a_j^5} + \\
&3/4 \frac{a_i^2 b52_1 s_i^3 s_j \cos(-\lambda_i + 3 \lambda_j - 6 \varpi_j + 3 \Omega_i + \Omega_j)}{a_j^3} + 3/16 \frac{a_i^2 b52_1 s_i s_j^3 \cos(-\lambda_i + 3 \lambda_j - 6 \varpi_j + \Omega_i + 3 \Omega_j)}{a_j^3} + \\
&\frac{9}{16} \frac{a_i^2 b52_1 s_i^2 s_j^2 \cos(-\lambda_i + 3 \lambda_j - 6 \varpi_j + 2 \Omega_i + 2 \Omega_j)}{a_j^3} \\
&+ \frac{1}{384} \frac{(-288 s_i s_j e_j e_i a_i a_j^3 b32_1 - 48 s_i s_j e_j e_i a_i^3 a_j d2b32_1 - 384 s_i s_j e_j e_i a_i^2 a_j^2 db32_1) \cos(-\lambda_i + \Omega_i + 3 \lambda_j - 5 \varpi_j + \Omega_j + \varpi_i)}{a_j^5} + \\
&\frac{1}{384} \frac{(-96 s_j^2 e_j e_i a_i^2 a_j^2 db32_1 - 72 s_j^2 e_j e_i a_i a_j^3 b32_1 - 12 s_j^2 e_j e_i a_i^3 a_j d2b32_1) \cos(-\lambda_i + 3 \lambda_j - 5 \varpi_j + 2 \Omega_j + \varpi_i)}{a_j^5} + \\
&\frac{1}{384} \frac{(24 s_i s_j e_i^2 a_i a_j^3 b32_2 + 24 s_i s_j e_i^2 a_i^3 a_j d2b32_2 + 96 s_i s_j e_i^2 a_i^2 a_j^2 db32_2) \cos(-\lambda_i + \Omega_i + 3 \lambda_j - 6 \varpi_j + \Omega_j + 2 \varpi_i)}{a_j^5} + \\
&\frac{1}{384} \frac{(6 s_j^2 e_i^2 a_i a_j^3 b32_2 + 24 s_j^2 e_i^2 a_i^2 a_j^2 db32_2 + 6 s_j^2 e_i^2 a_i^3 a_j d2b32_2) \cos(-\lambda_i + 3 \lambda_j - 6 \varpi_j + 2 \Omega_j + 2 \varpi_i)}{a_j^5} + \\
&\frac{1}{384} \frac{(-48 e_j s_i^2 e_i a_i^3 a_j d2b32_1 - 288 e_j s_i^2 e_i a_i a_j^3 b32_1 - 384 e_j s_i^2 e_i a_i^2 a_j^2 db32_1) \cos(2 \Omega_i - \lambda_i + 3 \lambda_j - 5 \varpi_j + \varpi_i)}{a_j^5} + \\
&\frac{1}{384} \frac{(24 s_i^2 e_i^2 a_i^3 a_j d2b32_2 + 96 s_i^2 e_i^2 a_i^2 a_j^2 db32_2 + 24 s_i^2 e_i^2 a_i a_j^3 b32_2) \cos(2 \Omega_i - \lambda_i + 3 \lambda_j - 6 \varpi_j + 2 \varpi_i)}{a_j^5} + \\
&\frac{1}{384} \frac{(-4 e_j^3 e_i a_i^4 d4b12_0 - 72 e_j^3 e_i a_i^3 d3b12_0 a_j - 324 e_j^3 e_i a_i^2 d2b12_0 a_j^2 - 312 e_j^3 e_i a_i db12_0 a_j^3) \cos(\lambda_i - \varpi_i - 3 \lambda_j + 3 \varpi_j)}{a_j^5} + \\
&\frac{1}{384} (6 e_j^2 e_i^2 a_i^4 d4b12_1 + 96 e_j^2 e_i^2 a_i^3 d3b12_1 a_j + 162 a_i e_i^2 e_j^2 a_j^3 + 264 e_j^2 e_i^2 a_i db12_1 a_j^3 \\
&+ 372 e_j^2 e_i^2 a_i^2 d2b12_1 a_j^2 - 102 e_j^2 e_i^2 b12_1 a_j^4) \frac{\cos(\lambda_i - 3 \lambda_j + 4 \varpi_j - 2 \varpi_i)}{a_j^5} + \frac{1}{384} (-15 e_i^4 b12_3 a_j^4 + \\
&12 e_i^4 a_i^3 d3b12_3 a_j - 4 e_i^4 a_i db12_3 a_j^3 + e_i^4 a_i^4 d4b12_3 + 30 e_i^4 a_i^2 d2b12_3 a_j^2) \frac{\cos(\lambda_i - 3 \lambda_j + 6 \varpi_j - 4 \varpi_i)}{a_j^5} + \\
&\frac{1}{384} (-4 e_j e_i^3 a_i^4 d4b12_2 - 56 e_j e_i^3 a_i db12_2 a_j^3 + 80 e_j e_i^3 b12_2 a_j^4 - 56 e_j e_i^3 a_i^3 d3b12_2 a_j - \\
&180 e_j e_i^3 a_i^2 d2b12_2 a_j^2) \frac{\cos(\lambda_i - 3 \lambda_j + 5 \varpi_j - 3 \varpi_i)}{a_j^5} + \frac{1}{384} (81 a_i e_j^4 a_j^3 + e_j^4 a_i^4 d4b12_1 + 20 e_j^4 a_i^3 d3b12_1 a_j + \\
&102 e_j^4 a_i^2 d2b12_1 a_j^2 + 108 e_j^4 a_i db12_1 a_j^3 - 27 e_j^4 b12_1 a_j^4) \frac{\cos(\lambda_i - 3 \lambda_j + 2 \varpi_j)}{a_j^5} \left. \right]
\end{aligned}$$

Onde

$$dlbm2_k = \frac{d^l b_{m/2}^{(k)}}{d\alpha^l}$$

$$dbm2_k = \frac{db_{m/2}^{(k)}}{d\alpha}$$

$$bm2_k = b_{m/2}^{(k)}$$

Um fato importante a se notar aqui é que os termos de ressonância 2:1 e 3:1 só aparecem na terceira e quarta ordem (respectivamente) da função. Isto indica que ressonâncias retrógradas teriam papel menos importante do que no caso das diretas.



## C - Inclinação generalizada

Na seção anterior estudamos a função perturbadora no caso retrógrado, e isso nos foi útil para entender melhor algumas particularidades deste caso. Agora, porém, pretendemos aplicar nossos resultados ao sistema Netuno-Triton-satélite interno. Anteriormente supúnhamos a inclinação do perturbador próxima de 180 graus, no entanto, Triton possui uma inclinação de aproximadamente 157 graus (muito distante de 180°). Pensando nisso, nesta seção iremos desenvolver uma função perturbadora para inclinação arbitrária.

O desenvolvimento desta função demanda um grande volume de contas. Por esse motivo a partir de agora consideraremos a excentricidade de Triton nula (é uma aproximação tolerável, visto que sua excentricidade é de 0.000016 e oscila muito pouco).

Como vimos anteriormente  $\cos(\psi)$  pode ser escrito em termo dos elementos orbitais. Deste modo, lembrando também que  $r_i$  e  $r_j$  podem ser escritos em termos dos mesmos elementos, podemos escrever toda nossa função nessas variáveis. O que diferencia este caso do caso clássico são as aproximações realizadas. Para que possamos tomar a inclinação do perturbador qualquer, a função perturbadora não será truncada em senos de  $I_j$  ou mesmo em  $I_j/2$ . Porém realizaremos truncamentos na inclinação e na excentricidade do satélite perturbado. As séries foram truncadas na ordem cinco de  $e_i$  e  $\sin(I_i/2)$ .

Para obtermos o desenvolvimento do  $\cos(\psi)$ , vamos substituir na expressão (7),  $\cos(I_i)$  por  $1 - 2 \sin(I_i/2)^2$  e  $\cos(I_j)$  por  $1 - 2 \sin(I_j/2)^2$ . Observe que estas duas primeiras substituições são exatas e não aproximadas. Ainda na expressão (7), fazemos  $\sin(I_i) = 2 \sin(I_i/2) - \sin(I_i)^3 - \frac{1}{4} \sin(I_i/2)^5$  (esta é uma aproximação por série de Taylor), e mantemos o  $\sin(I_j)$  inalterado. A partir daqui usaremos a seguinte notação:

$$\sin(I_i/2) = s_i$$

$$\sin(I_j/2) = s_2j$$

$$\sin(I_j) = s_j$$

Logo, fazendo as substituições mencionadas acima, temos:

$$\begin{aligned} \cos(\psi) = & (1 - s_i^2 - s_2j^2 + s_i^2 s_2j^2) \cos(\theta_i - \theta_j) + (s_i s_j - \frac{1}{2} s_i^3 s_j - \frac{1}{8} s_i^5 s_j) \cos(\theta_i - \theta_j - \Omega_i + \Omega_j) \\ & - (s_i s_j - \frac{1}{2} s_i^3 s_j - \frac{1}{8} s_i^5 s_j) \cos(\theta_i + \theta_j - \Omega_i - \Omega_j) + (s_i^2 - s_i^2 s_2j^2) \cos(\theta_i + \theta_j - \Omega_i) \\ & + (s_2j^2 - s_i^2 s_2j^2) \cos(\theta_i + \theta_j - \Omega_j) + s_2j^2 s_i^2 \cos(\theta_i - \theta_j - 2\Omega_i + 2\Omega_j) \end{aligned} \quad (10)$$

onde  $\theta_i = f_i + \Omega_i + \omega_i$  e  $\theta_j = f_j + \Omega_j + \omega_j$

Procedendo da mesma maneira que nos demais casos da função perturbadora temos:

$$\mathfrak{R}_i = Gm_j(h - Q)$$

onde

$$h = \{r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos(\psi)\}^{-1/2}, Q = \frac{r_i \cos(\psi)}{r_j^2}$$

No caso clássico (órbitas diretas)  $\cos(\psi) \approx \cos(\theta_i - \theta_j)$  em  $h$ . Deste modo podíamos desenvolver uma série de Taylor ao redor deste ponto. No caso retrógrado, o desenvolvimento era feito em torno de  $\cos(\theta_i + \theta_j - 2\Omega_j)$ . Porém aqui não iremos aproximar o valor de  $\cos(\psi)$  em  $h$ .

Lembrando, ainda, que  $r_j - a_j = 0$  (pois  $e_j = 0$ ) e  $r_i - a_i = O(e_i)$ , temos:

$$h = \rho_{ij} + \frac{\partial \rho_{ij}}{\partial a_i} (r_i - a_i) + \frac{\partial^2 \rho_{ij}}{\partial a_i^2} \frac{(r_i - a_i)^2}{2!} \quad (11)$$

$$\rho_{ij} = \{a_i^2 + a_j^2 - 2a_i a_j \cos(\psi)\}^{-1/2} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} A_k \cos(k\psi)$$

Note que se conhecemos  $\cos(\psi)$  em termos dos elementos orbitais, também conhecemos  $\cos(k\psi)$  em função desses elementos para cada  $k$  dado. De fato,

$$\begin{aligned} \cos(k\psi) &= 2^{k-1} \cos(\psi)^k - k2^{k-3} \cos(\psi)^{k-2} + \frac{k(k-3)2^{k-5} \cos(\psi)^{k-4}}{2!} - \\ &\frac{k(k-4)(k-5)2^{k-7} \cos(\psi)^{k-6}}{3!} + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

(Dwight H. B. 1961)

Observe que esta série é finita para cada  $k$  fixado, portanto não consiste em uma aproximação. Esta expressão nos mostra que  $\cos(k\psi)$  pode ser escrito como um polinômio de grau  $k$  aplicado em  $\cos(\psi)$ . Por exemplo:  $\cos(2\psi) = 2\cos(\psi)^2 - 1$  e  $\cos(3\psi) = 4\cos(\psi)^3 - 3\cos(\psi)$ .

Nossa função está escrita em termos dos ângulos  $\theta_i$  e  $\theta_j$ , que por sua vez dependem de  $f_i$  e  $f_j$ . Agora vamos colocar nosso desenvolvimento em termos das longitudes médias. Sabemos que anomalia verdadeira  $f_i$  se relaciona com a anomalia média  $M_i$  pela expressão (truncada na ordem 5 de excentricidade):

$$\begin{aligned} f_i &= M_i + 2e_i \sin(M_i) + \frac{5}{4}e_i^2 \sin(2M_i) + \left(\frac{13}{12} \sin(3M_i) - \frac{1}{4} \sin(M_i)\right)e_i^3 + \\ &\left(\frac{103}{96} \sin(4M_i) - \frac{11}{24} \sin(2M_i)\right)e_i^4 + \left(\frac{5}{96} \sin(M_i) - \frac{43}{64} \sin(3M_i) + \frac{1097}{960} \sin(5M_i)\right)e_i^5 \end{aligned}$$

E como estamos tomando  $e_j = 0$ , temos:

$$f_j = M_j$$

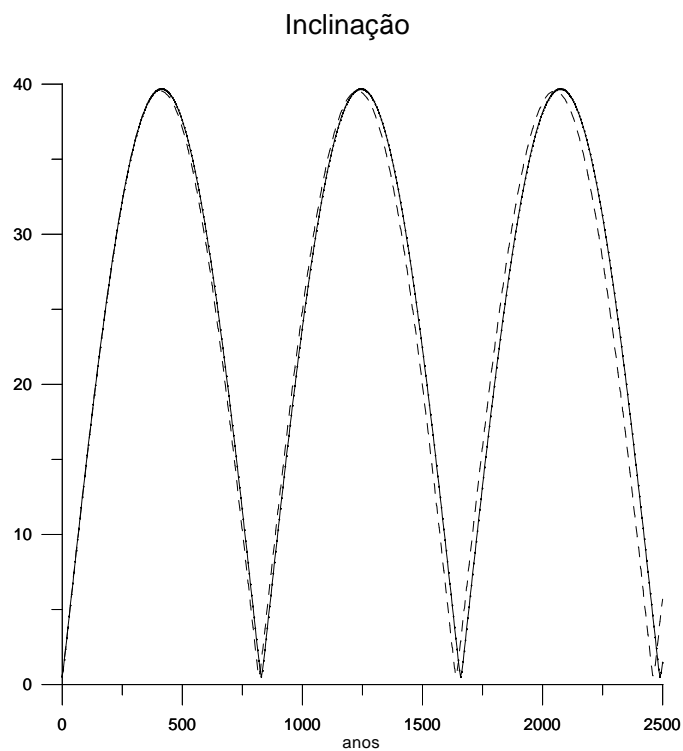
Sabendo ainda que  $\lambda_i = M_i + \varpi_i$  e  $\lambda_j = M_i + \varpi_j$ , podemos escrever toda a expressão em termos da longitude média.

Para terminar o desenvolvimento da parte direta da função fizemos  $k$  variar de  $-8$  a  $8$ , o que parece ser razoável como iremos ver nos gráficos mais adiante. Lembremos que ao efetuarmos os cálculos e substituições estamos sempre truncando as séries até ordem 5 de  $e_i$  e  $s_i$ .

A expressão completa, ainda que restrita em  $k = -8$  até  $k = 8$ , é extremamente grande e portanto não será apresentada neste texto. Aqui novamente extraímos a média da função perturbadora:

$$\langle \mathfrak{R}_i \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{R}_i d\lambda_i d\lambda_j \quad (13)$$

Abaixo colocamos alguns gráficos que mostram que nosso desenvolvimento tem uma boa convergência quando comparado com as equações exatas.



linhacheia: equações médias  
 linhatracejada: equações exatas

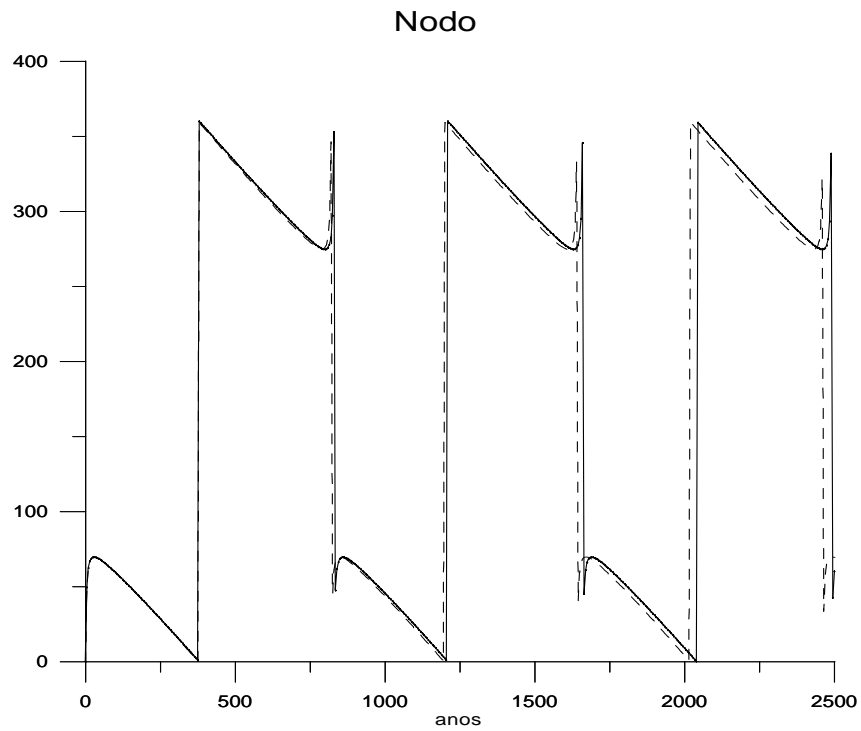
Aquisição incluímos a perturbação de Triton.

Condições iniciais:

Satélite:  $a=3.5$  raios equatoriais,  $e=0.001$ ,  $I=0.5$ ,  
 $\Omega=0$ ,  $\lambda=0$ ,  $\omega=0$

Triton:  $a=14.325$  raios equatoriais,  $e=0.000016$ ,  $I=1$  60°,  
 $\Omega=172.1^\circ$ ,  $\lambda=153.3^\circ$ ,  $\omega=0$

Figura 1: Comparação entre resultados de integrações médias e exatas de um satélite fictício de Netuno. Nesta figura notamos que mesmo que a inclinação do satélite se eleve muito as equações médias ainda reproduzem bem as exatas.



linhacheia: equações médias  
 linhapontilhada: equações exatas

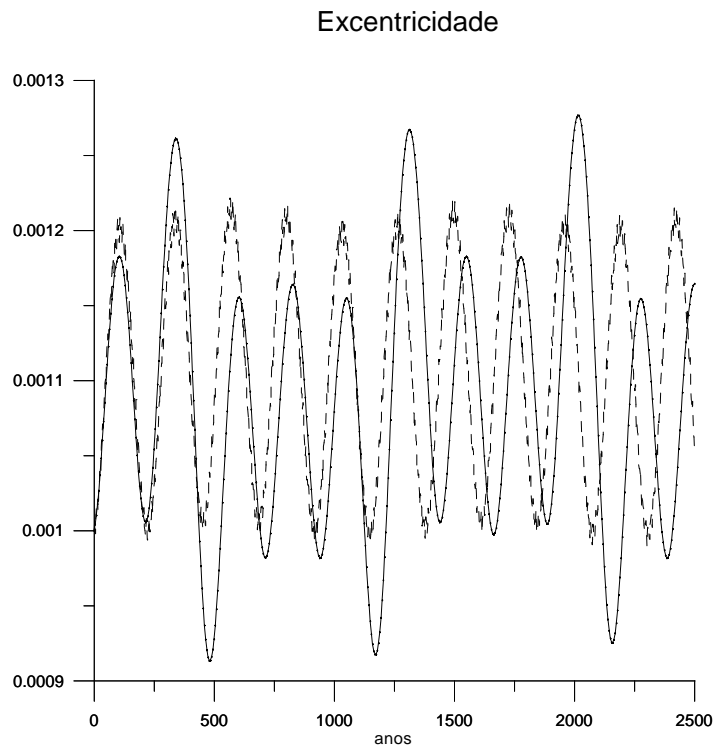
Aqui incluímos a perturbação de Triton.

Condições iniciais:

Satélite:  $a=3.5$  raios equatoriais,  $e=0.001$ ,  $I=0.5$ ,  
 $\Omega=0$ ,  $\lambda=0$ ,  $\omega=0$

Triton:  $a=14.325$  raios equatoriais,  $e=0.000016$ ,  $I=1$   $60^\circ$ ,  
 $\Omega=172.1^\circ$ ,  $\lambda=153.3^\circ$ ,  $\omega=0$

Figura 2: Comparação entre resultados de integrações com equações médias e exatas. Aqui mostramos o nodo de um satélite fictício. As médias reproduzem muito bem o comportamento das exatas.



linhacheia: equações médias  
 linhatraceda: equações exatas

Aquisição incluímos perturbação de Triton.  
 Condições iniciais:  
 Satélite:  $a=3.5$  raios equatoriais,  $e=0.001$ ,  $i=0.5$ ,  
 $\Omega=0$ ,  $\lambda=0$ ,  $\omega=0$

Triton:  $a=14.325$  raios equatoriais,  $e=0.000016$ ,  $i=1$   $60^\circ$ ,  
 $\Omega=172.1^\circ$ ,  $\lambda=153.3^\circ$ ,  $\omega=0$

Figura 3: A figura ilustra uma comparação entre as excentricidades obtidas através de integrações numéricas (de um satélite fictício) entre médias e exatas.

## Capítulo II - Perturbação do Achatamento e Variação do Equador

### A - Achatamento

A dinâmica de um satélite interno depende fortemente do achatamento do planeta. Classicamente a função do achatamento está referida ao equador planetário. Como este também pode variar devido a aproximação de Triton (de massa significativa) então devemos trabalhar num plano independente. Nesta seção vamos escrever a parte do achatamento em relação a um plano qualquer e na seção seguinte vamos escolher qual será tal plano.

O potencial gravitacional do sistema Netuno-satélite (pode ser Triton ou outro satélite qualquer), considerando Netuno um elipsóide homogêneo de massa  $M_N$  e supondo simetria de rotação em torno do eixo z, pode ser dado por:

$$U = \mu \left[ \frac{J_2 R_N^2 P_2(\sin(\beta))}{r^3} \right] \quad (14)$$

onde,

$$\mu = GM_N$$

$\beta$ =latitude equatorial do satélite

$P_2$ =Polinômio de Legendre de ordem 2

Obs.: Na verdade este potencial é dado por uma série, porém aqui consideramos apenas a parcela mais importante desta série.

Logo, a função perturbadora do achatamento é dada por:

$$R_{J_2} = \mu J_2 R_N^2 \left[ \frac{-1 + 3 \sin(\beta)^2}{2r^3} \right] \quad (15)$$

Em termos dos elementos orbitais, a parte secular desta expressão pode ser escrita assim:

$$R_{J_2} = \frac{\mu J_2 R_N^2 (3 \cos(i)^2 - 1) (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}}}{4a^3} \quad (16)$$

Aqui  $i$  é a inclinação do satélite em relação ao plano equatorial.

Como veremos mais adiante, o plano do equador não é um plano inercial. Sendo assim, para que possamos realizar integrações numéricas através das equações de Lagrange é

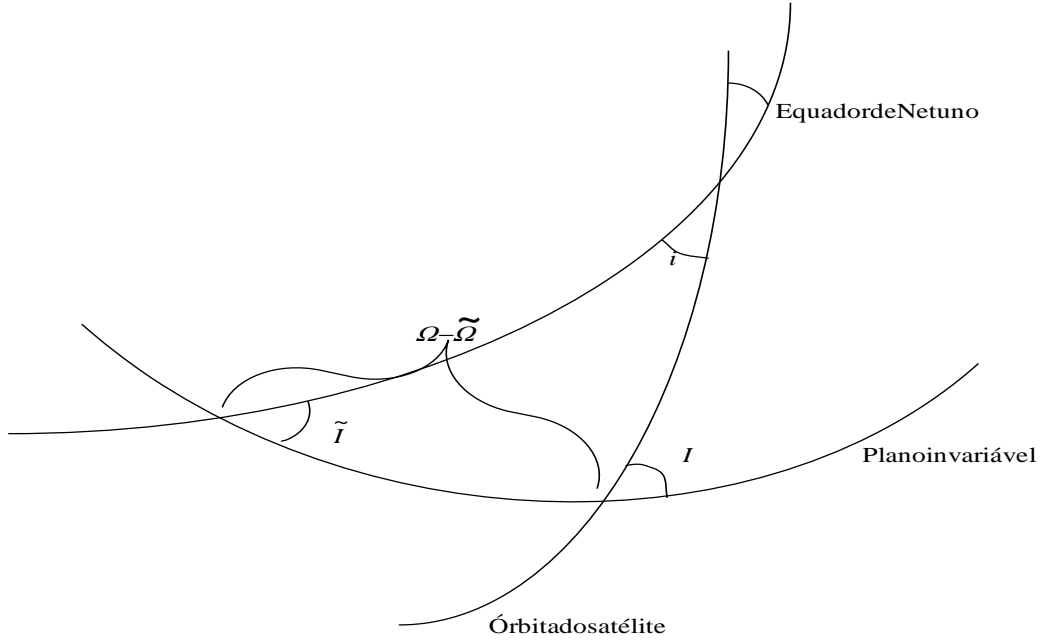


Figura 4: Posição dos planos

necessário que tenhamos a função  $R_{J_2}$  dada em elementos referidos a um plano inercial. Por isso utilizaremos a trigonometria esférica para obter  $\cos(i)$  a partir do plano inercial. Observe a figura:

Da geometria do problema resulta:

$$\cos(i) = \cos(\tilde{I}) \cos(I) + \sin(\tilde{I}) \sin(I) \cos(\Omega - \tilde{\Omega}) \quad (17)$$

Substituindo  $\cos(i)$  em  $R_{J_2}$ , obtemos a expressão do achatamento num plano inercial qualquer:

$$R_{J_2} = S_0 \left\{ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2(\tilde{I}) \right) \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2(I) \right) + \frac{3}{8} \sin(2\tilde{I}) \sin(2I) \cos(\Omega - \tilde{\Omega}) + \frac{3}{8} \sin^2(\tilde{I}) \sin^2(I) \cos(2\Omega - 2\tilde{\Omega}) \right\} \quad (18)$$

$$S_0 = \frac{GM_N R_N^2 J_2}{a^3 (1 - e^2)^{3/2}}$$

Como faremos também algumas integrações nas coordenadas cartesianas, vamos agora escrever (17) nas coordenadas  $(x, y, z)$  referidos a um plano qualquer. Obtemos que em (17) se  $\beta =$  latitude equatorial então:  $\sin(\beta) = \frac{z}{r}$ . No novo sistema inercial de coordenadas este  $z$  se escreve (veja apêndice para maiores detalhes):

$$z = \sin(\tilde{I}) \sin(\tilde{\Omega}) X - \sin(\tilde{I}) \cos(\tilde{\Omega}) Y + \cos(\tilde{I}) Z$$



Vamos agora incluir o efeito da perturbação do achatamento e de Triton.

Apresentamos uma rápida integração (figura 5) que permite testar a expressão  $R_{J_2}$  acima obtida. Aproveitando incluímos também a perturbação de Triton.

Na figura 5 apresentamos a variação da inclinação, nodo e excentricidade comparando o desempenho das equações médias e exatas. O plano de referência é arbitrário e as condições iniciais de Triton foram:  $a_j = 7.92R_N$ ,  $e_j = 0.000016$ ,  $I_j = 153.029^\circ$ ,  $\lambda_j = 270^\circ$ ,  $\omega_j = 0^\circ$ ,  $\Omega_j = 0^\circ$ ; e as do satélite perturbado foram:  $a_i = 4.751R_N$ ,  $e_i = 0.001$ ,  $I_i = 1^\circ$ ,  $\lambda_i = 0^\circ$ ,  $\omega_i = 0^\circ$ ,  $\Omega_i = 0^\circ$ .

A comparação da função perturbadora média com os resultados obtidos usando equações exatas, mostra que mesmo sendo  $\alpha \approx 0.6$ , o desempenho da função perturbadora generalizada obtida no capítulo I é muito bom.

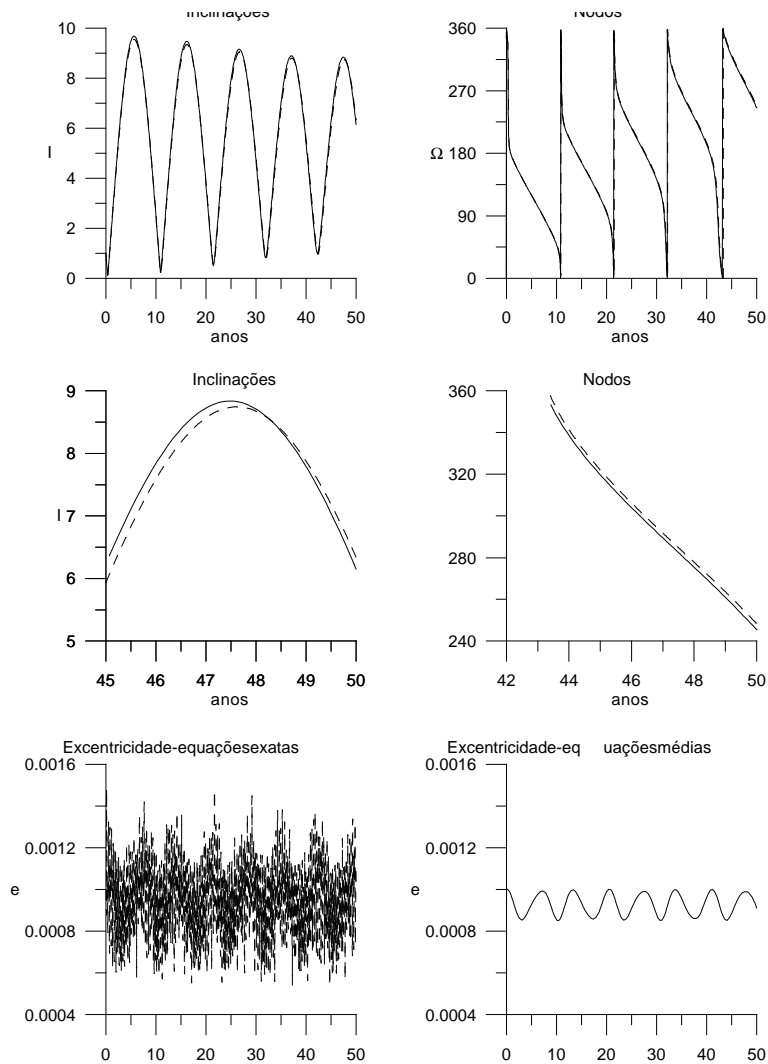


Figura 5: Esta figura ilustra uma comparação entre a função de inclinação generalizada e as equações em coordenadas cartesianas. Aqui foram incluídos perturbação de Triton e achatamento de Netuno. As linhas tracejadas representam os resultados obtidos através das equações exatas e as linhas contínuas os resultados das equações médias. Inicialmente comparamos inclinação e nodo, que aparentemente não apresentam diferença entre médias e exatas, mas olhando por um período menor (como nos dois gráficos do meio) vemos que existe uma pequena diferença. Por último observamos a comparação entre excentricidades.

## B - Plano invariável

As escalas de tempo envolvendo maré são enormes e quase proibitivas em termos de cálculo computacional. Embora neste trabalho não façamos integrações por tempo muito longo, deve-se lembrar que Triton está se aproximando de Netuno. Sendo sua massa não desprezível, torna-se importante saber qual seria a contribuição desta aproximação sobre o equador de Netuno. De forma mais precisa, o que importa saber é se o equador de Netuno poderia ser considerado um referencial inercial dentro da escala de tempo em que pretendemos estudar a evolução de um satélite interno devido a aproximação de Triton.

Para tanto, vamos trabalhar num outro plano de referência e com isso será possível ter uma avaliação da importância da variação do equador.

Num sistema isolado, a soma resultante dos momentos angulares e de rotação do sistema Netuno-Triton será considerada constante. Sendo este vetor constante ele define uma direção e o plano perpendicular a ele é dito plano invariável. A órbita de Triton ao redor de Netuno será considerada circular apenas para definir este plano.

A partir daqui os elementos de Triton serão indexados pela letra T e não por j como era feito até então.

Sejam  $\vec{t}_1$  e  $\vec{n}_1$  o momento angular da órbita de Triton e o momento angular de rotação de Netuno (spin) respectivamente. Agora considere  $\vec{R} = \vec{t}_1 + \vec{n}_1$ , logo, o plano plano invariável será perpendicular a  $\vec{R}$ , como mostra a figura 6.

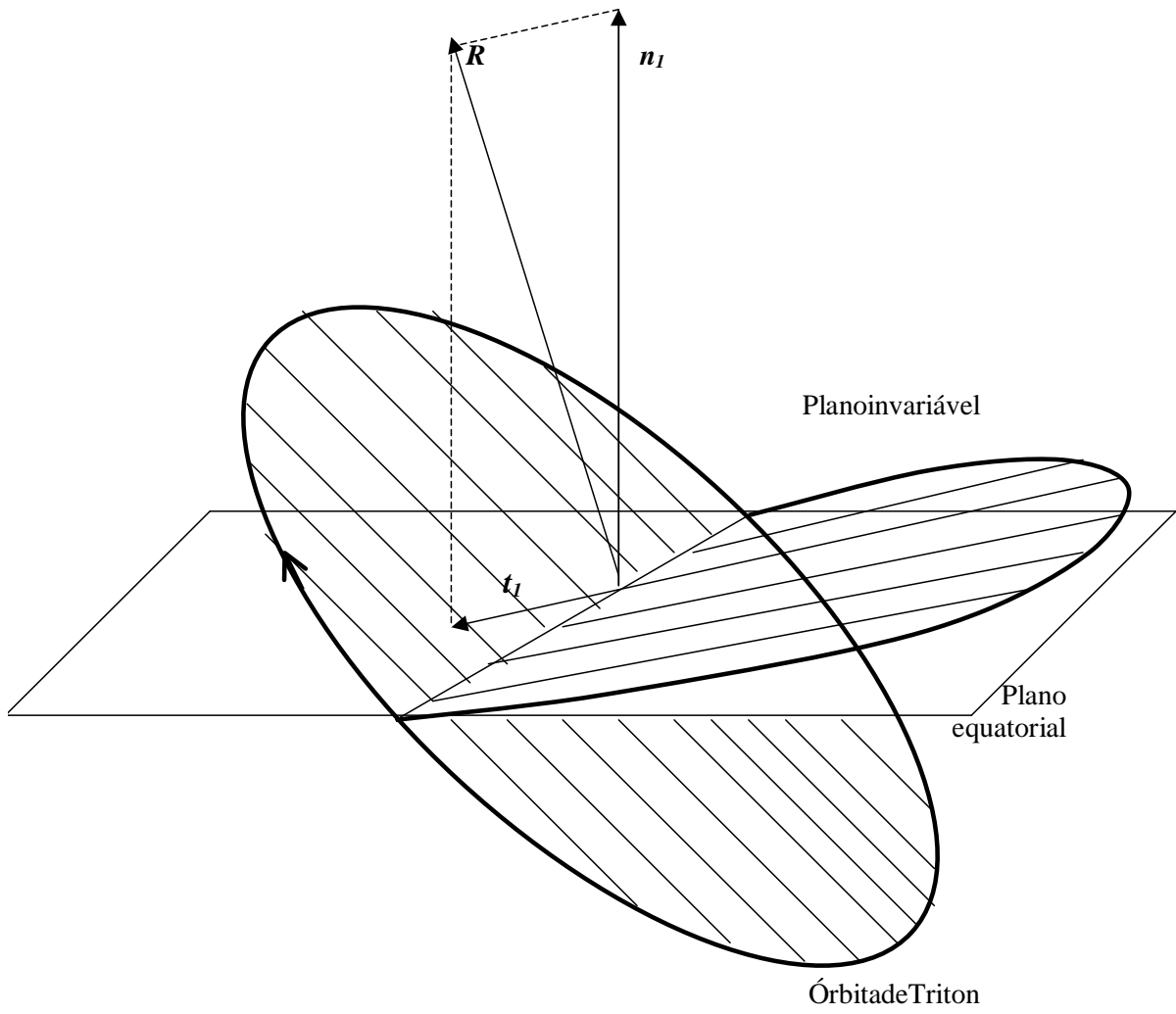


Figura 6: O plano invariável

Sendo  $\vec{t}_1$  perpendicular ao plano da órbita de Triton e  $\vec{R}$  perpendicular ao plano invariável, então o ângulo formado por esses vetores é o mesmo ângulo formado entre o plano invariável e o plano orbital de Triton, ou seja, é a inclinação de Triton sobre o plano invariável. Observe a próxima figura.

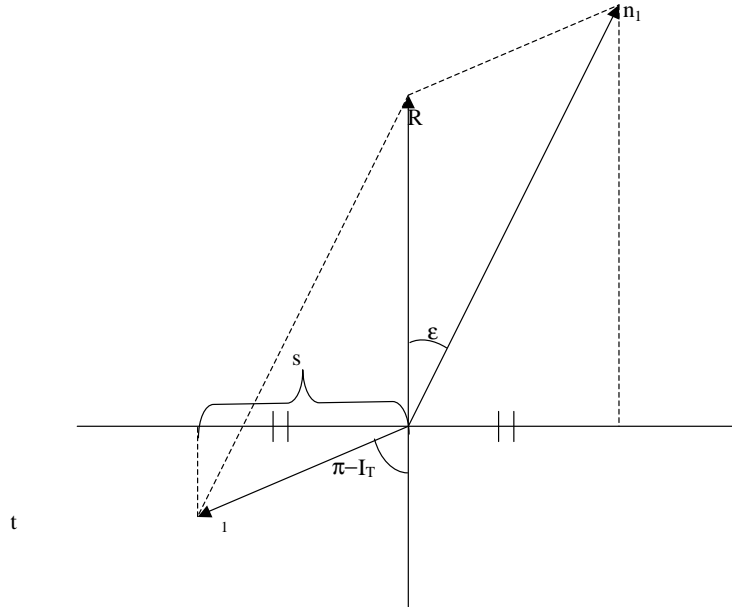


Figura 7: posição dos vetores  $\vec{R}$ ,  $\vec{n}_1$ ,  $\vec{t}_1$

As normas de  $\vec{t}_1$  e  $\vec{n}_1$  são dadas por:

$$\|\vec{t}_1\| = \|m_T \vec{r}_t \times \frac{d\vec{r}}{dt}\| = m_T n_T a_T^2$$

$$\|\vec{n}_1\| = C w_N$$

Onde  $C$  é o momento principal de inércia e  $w_N$  o spin de Netuno. De acordo com a figura temos:

$$\sin(\pi - I_T) = \frac{s}{m_T n_T a_T^2}$$

$$\sin(\varepsilon) = \frac{s}{C w_N}$$

Eliminando  $s$  nas duas expressões anteriores segue imediatamente que:

$$\sin(\varepsilon) = \frac{m_T n_T a_T^2 \sin(I_T)}{C w_N} \quad (19)$$

Esta última fórmula também é apresentada por Borderies, N., 1989.

Portanto esta equação define a inclinação do plano invariável em relação ao plano do equador de Netuno.

### C - Equações da Precessão

Nesta seção vamos então fixar o plano invariável como o de referência. Mostramos que em relação a tal plano as equações da precessão do equador de Netuno se tornam extremamente convenientes, isto é, verifica-se uma situação de equilíbrio entre o nodo do equador e o nodo do plano orbital de Triton.

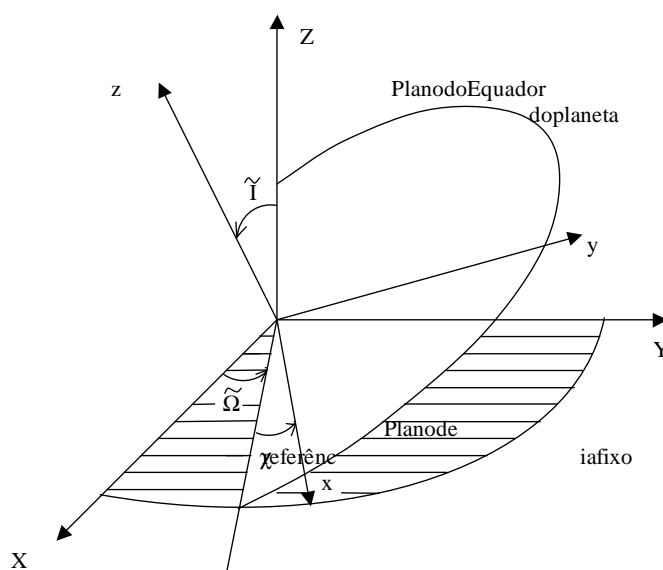


Figura 8: Visualizando os ângulos  $\tilde{I}$  e  $\tilde{\Omega}$ .

Pela figura 8, observamos que:

$\tilde{I}$  = Inclinação do plano do equador em relação ao plano de referência.

$\tilde{\Omega}$  = nodo do equador

Vamos agora obter as equações diferenciais de  $\tilde{I}$  e  $\tilde{\Omega}$  de maneira genérica pois faremos uso delas também no capítulo IV. Considere o planeta Netuno com um sistema móvel de eixos  $(x,y,z)$  no seu equador. Considere agora outro sistema fixo inercial  $(X,Y,Z)$ . Seja um perturbador (por exemplo Triton) que exercerá um torque em Netuno já que este é achatado.

Seja  $W_T$  o campo (potencial negativo) que atua em Triton:

$$W_T = \left( -\frac{GM_N m_T J_2 R_N^2}{r^3} \right) \left( -\frac{1}{2} + \frac{3 \sin(\beta)^2}{2} \right) \quad (20)$$

Num sistema móvel dado no equador o torque é:

$$\vec{T} = (L, M, N) = -r_T \vec{r} \times \nabla_T W_T \quad (21)$$

Efetuada o produto vetorial acima concluímos que

$$\begin{aligned} L &= \left( \frac{\partial W_T}{\partial y_T} \right) z_T - \left( \frac{\partial W_T}{\partial z_T} \right) y_T \\ M &= - \left( \frac{\partial W_T}{\partial x_T} \right) z_T + \left( \frac{\partial W_T}{\partial z_T} \right) x_T \\ N &= \left( \frac{\partial W_T}{\partial x_T} \right) y_T - \left( \frac{\partial W_T}{\partial y_T} \right) x_T \end{aligned} \quad (22)$$

Onde  $x_T, y_T$  e  $z_T$  são as coordenadas cartesianas de Triton dadas em relação ao sistema de eixos fixado sobre o plano do equador.

Note ainda que  $N$  será nulo. De fato, sendo:

$$\sin(\beta) = \frac{z_T}{r_T}$$

Então

$$W_T = W_T \left( r_T, \frac{z_T}{r_T} \right) \longrightarrow \frac{\partial W_T}{\partial x_T} = \frac{\partial W_T}{\partial r_T} \frac{\partial r_T}{\partial x_T}$$

e

$$\frac{\partial W_T}{\partial y_T} = \frac{\partial W_T}{\partial r_T} \frac{\partial r_T}{\partial y_T}$$

Mas

$$r_T = \left( x_T^2 + y_T^2 + z_T^2 \right)^{1/2} \longrightarrow \frac{\partial r_T}{\partial x_T} = \frac{x_T}{r_T}$$

e

$$\frac{\partial r_T}{\partial y_T} = \frac{y_T}{r_T}$$

Logo,

$$\begin{aligned} N &= \frac{\partial W_T}{\partial r_T} \frac{\partial r_T}{\partial x_T} y_T - \frac{\partial W_T}{\partial r_T} \frac{\partial r_T}{\partial y_T} x_T \\ N &= \frac{\partial W_T}{\partial r_T} \left( \frac{x_T y_T}{r_T} - \frac{y_T x_T}{r_T} \right) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Como queríamos demonstrar.

Seja  $\vec{\omega} = (p_N, q_N, w_N)$  o vetor de rotação (spin) de Netuno. De acordo com as equações dinâmicas de Euler (Simon-1980):

$$\dot{p}_N + \frac{C-A}{A} w_N q_N = \frac{L}{A} \quad (24)$$

$$\dot{q}_N - \frac{C-A}{A} w_N p_N = \frac{M}{A} \quad (25)$$

$$w_N = \frac{N}{C} = 0 \quad (26)$$

Sendo que  $L, M, N$  são os mesmos referidos em (24) e ainda A (=B) e C são os momentos principais de inércia.

Agora, pelas equações geométricas de Euler, podemos escrever o vetor  $\vec{\omega}$  relativamente ao sistema de eixos fixos (inercial):

$$p_N = \sin(\tilde{I}) \sin(\chi) \dot{\tilde{\Omega}} + \cos(\chi) \dot{\tilde{I}} \quad (27)$$

$$q_N = \sin(\tilde{I}) \cos(\chi) \dot{\tilde{\Omega}} - \sin(\chi) \dot{\tilde{I}} \quad (28)$$

$$w_N = \cos(\tilde{I}) \dot{\tilde{\Omega}} + \dot{\chi} \quad (29)$$

Derivando a expressão de  $p_N$ :

$$\dot{p}_N = \cos(\tilde{I}) \dot{\tilde{I}} (\sin(\chi) \dot{\tilde{\Omega}}) + \sin(\tilde{I}) (\dot{\chi} \cos(\chi) \dot{\tilde{\Omega}} + \sin(\chi) \ddot{\tilde{\Omega}}) - \sin(\chi) \dot{\chi} \dot{\tilde{I}} + \cos(\chi) \ddot{\tilde{I}}$$

Em geral, no sistema solar a rotação do planeta (spin) é dominante e daí podemos desprezar as quantidades  $\ddot{\tilde{I}}\dot{\tilde{\Omega}}$ ,  $\ddot{\tilde{I}}$  e  $\ddot{\tilde{\Omega}}$  e  $\dot{\tilde{\Omega}}^2$  quando comparadas com  $\dot{\chi}$  (Kurth, 1959). Então ficamos com:

$$\dot{p}_N = \sin(\tilde{I}) \dot{\chi} \cos(\chi) \dot{\tilde{\Omega}} - \sin(\chi) \dot{\chi} \dot{\tilde{I}}$$

Agora colocamos  $\dot{p}_N$  e  $q_N$  na primeira das equações dinâmicas de Euler:

$$\begin{aligned} & \left( \dot{\tilde{\Omega}} \dot{\chi} \cos(\chi) \sin(\tilde{I}) - \dot{\tilde{I}} \dot{\chi} \sin(\chi) \right) + \frac{C-A}{A} w_N \left( \dot{\tilde{\Omega}} \sin(\tilde{I}) \cos(\chi) - \sin(\chi) \dot{\tilde{I}} \right) = \frac{L}{A} \longrightarrow \\ & \longrightarrow \left( \dot{\tilde{\Omega}} \dot{\chi} \cos(\chi) \sin(\tilde{I}) - \dot{\tilde{I}} \dot{\chi} \sin(\chi) \right) + \frac{C}{A} w_N \left( \dot{\tilde{\Omega}} \sin(\tilde{I}) \cos(\chi) - \sin(\chi) \dot{\tilde{I}} \right) - \\ & w_N \left( \dot{\tilde{\Omega}} \sin(\tilde{I}) \cos(\chi) - \sin(\chi) \dot{\tilde{I}} \right) = \frac{L}{A} \end{aligned}$$

Mas  $w_N = \cos(\tilde{I}) \dot{\tilde{\Omega}} + \dot{\chi}$

$$\begin{aligned} & \left( \dot{\tilde{\Omega}} \dot{\chi} \cos(\chi) \sin(\tilde{I}) - \dot{\tilde{I}} \dot{\chi} \sin(\chi) \right) + \frac{C}{A} w_N \left( \dot{\tilde{\Omega}} \sin(\tilde{I}) \cos(\chi) - \sin(\chi) \dot{\tilde{I}} \right) - \\ & (\cos(\tilde{I}) \dot{\tilde{\Omega}} + \dot{\chi}) \left( \dot{\tilde{\Omega}} \sin(\tilde{I}) \cos(\chi) - \sin(\chi) \dot{\tilde{I}} \right) = \frac{L}{A} \longrightarrow \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &\longrightarrow \dot{\tilde{\Omega}}\dot{\chi} \cos(\chi) \sin(\tilde{I}) - \dot{I}\dot{\chi} \sin(\chi) + \frac{C}{A}w_N \left( \dot{\tilde{\Omega}} \sin(\tilde{I}) \cos(\chi) - \sin(\chi)\dot{I} \right) - \\ &\dot{\tilde{\Omega}}^2 \cos(\chi) \cos(\tilde{I}) \sin(\tilde{I}) + \sin(\chi) \cos(\tilde{I})\dot{\tilde{\Omega}}\dot{\tilde{\Omega}} - \dot{\tilde{\Omega}}\dot{\chi} \sin(\tilde{I}) \cos(\chi) + \dot{I}\dot{\chi} \sin(\chi) = \frac{L}{A} \end{aligned}$$

Portanto, desprezando os termos fatorados por  $\dot{\tilde{\Omega}}^2$  e  $\dot{I}\dot{\tilde{\Omega}}$ , temos:

$$\frac{C}{A}w_N \left( \sin(\tilde{I}) \cos(\chi)\dot{\tilde{\Omega}} - \sin(\chi)\dot{I} \right) = L/A \quad (30)$$

De modo análogo, substituindo  $q_N$  e  $p_N$  na segunda equação dinâmica de Euler, obtemos:

$$-\frac{C}{A}w_N \left( \sin(\tilde{I}) \sin(\chi)\dot{\tilde{\Omega}} + \cos(\chi)\dot{I} \right) = M/A \quad (31)$$

Vamos agora explicitar as expressões de  $L$  e  $M$

Sendo  $W_T = W_0 \left( \frac{3z_T^2}{r_T^5} - \frac{1}{r_T^3} \right)$  (pois no plano do equador  $\sin(\beta) = z_T/r_T$ )

Onde

$$W_0 = -\frac{Gm_T M_N J_2 R_N^2}{2}$$

$$\frac{\partial W_T}{\partial y_T} = \frac{\partial W_T}{\partial r_T} \frac{\partial r_T}{\partial y_T} = W_0 \left[ \frac{\partial}{\partial r_T} \left( \frac{3z_T^2}{r_T^5} - \frac{1}{r_T^3} \right) \right] \frac{y_T}{r_T}$$

Vamos definir:

$$W_z = \frac{6W_0 z_T}{r_T^5}$$

Então:

$$\frac{\partial W_T}{\partial z_T} = \frac{\partial W_T}{\partial r_T} \frac{\partial r_T}{\partial z_T} + W_z = W_0 \left[ \frac{\partial}{\partial r_T} \left( \frac{3z_T^2}{r_T^5} - \frac{1}{r_T^3} \right) \right] \frac{z_T}{r_T} + W_z$$

Logo,

$$L = \frac{\partial W_T}{\partial y_T} z_T - \frac{\partial W_T}{\partial z_T} y_T = W_z y_T \quad (32)$$

Por processo análogo concluimos que

$$M = W_z x_T \quad (33)$$

Então das equações (30) e (31), vem:

$$\dot{\tilde{\Omega}} \sin(\tilde{I}) = -\frac{W_z}{Cw_N} (y_T \cos(\chi) + x_T \sin(\chi)) \quad (34)$$

$$\dot{\tilde{I}} = -\frac{W_z}{Cw_N} (-x_T \cos(\chi) + y_T \sin(\chi)) \quad (35)$$

Observe que as coordenadas do perturbador são dadas em relação ao sistema de eixos fixado sobre o equador. Aplicando três rotações de ângulos  $\tilde{\Omega}$ ,  $\tilde{I}$  e  $\chi$ , o sistema inercial coincidirá com o móvel (ver apêndice).

Feito isso, escrevemos tudo em elementos orbitais e tiramos a média das equações. Agora a média será em relação a anomalia média  $M_T$ . Como as coordenadas de Triton são dadas em termos da anomalia verdadeira  $f_T$ , devemos lembrar que:

$$dM_T = \frac{(1 - e_T^2)^{3/2}}{(1 + e_T \cos(f_T))^2} df_T \quad (36)$$

Assim, finalmente obtemos:

$$\dot{\tilde{I}} = \frac{F_0}{4a_T^3(1 - e_T^2)^{3/2}} \left[ -\sin(\tilde{I}) \sin(I_T) \sin(2\tilde{\Omega} - 2\Omega_T) - \cos(\tilde{I}) \sin(2I_T) \sin(\tilde{\Omega} - \Omega_T) \right] \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\Omega}} = & \frac{F_0}{4a_T^3(1 - e_T^2)^{3/2}} \left[ (3 \cos(I_T)^2 - 1) \cos(\tilde{I}) - \frac{2 \sin(I_T) \cos(I_T) \cos(2\tilde{I}) \cos(\tilde{\Omega} - \Omega_T)}{\sin(\tilde{I})} - \right. \\ & \left. \sin(I_T)^2 \cos(\tilde{I}) \cos(2\tilde{\Omega} - 2\Omega_T) \right] \quad (38) \end{aligned}$$

onde,

$$F_0 = -\frac{3Gm_T M_N R_N^2 J_2}{Cw_N}$$

## D - Uma Solução de Equilíbrio

Em teoria de perturbações, muitas vezes, é interessante que a dinâmica do corpo perturbador seja totalmente conhecida. Por exemplo, no problema dos 3 corpos restrito, em geral a dinâmica de perturbador é suposta conhecida (kepleriana). Nesta seção analisaremos então apenas a parte perturbativa formada por Netuno+Triton+achatamento, onde iremos escolher o plano invariável como sendo o de referência.

Neste caso mostraremos que existe uma interessante solução de equilíbrio e que serve de base para o estudo da obliquidade que veremos brevemente no capítulo IV.

As equações que governam o sistema são:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{I}} &= \frac{F_0}{4a_T^3} \left[ -\sin(\tilde{I}) \sin(I_T) \sin(2\tilde{\Omega} - 2\Omega_T) - \cos(\tilde{I}) \sin(2I_T) \sin(\tilde{\Omega} - \Omega_T) \right] \\ \dot{\tilde{\Omega}} &= \frac{F_0}{4a_T^3} \left[ (3 \cos(I_T)^2 - 1) \cos(\tilde{I}) - \frac{2 \sin(I_T) \cos(I_T) \cos(2\tilde{I}) \cos(\tilde{\Omega} - \Omega_T)}{\sin(\tilde{I})} - \right. \\ &\quad \left. \sin(I_T)^2 \cos(\tilde{I}) \cos(2\tilde{\Omega} - 2\Omega_T) \right] \\ \dot{I}_T &= -\frac{1}{n_T a_T^2 \sin(I_T)} \frac{\partial R_{J_2}}{\partial I_T} \\ &= -\frac{S_0}{n_T a_T^2 \sin(I_T)} (-3/8 \sin(2\tilde{I}) \sin(2\tilde{I}) \sin(\Omega_T - \tilde{\Omega}) - 3/4 \sin(\tilde{I})^2 \sin(I_T)^2 \sin(2\Omega_T - 2\tilde{\Omega})) \\ \dot{\Omega}_T &= \frac{1}{n_T a_T^2 \sin(I_T)} \frac{\partial R_{J_2}}{\partial \Omega_T} \\ &= \frac{S_0}{n_T a_T^2 \sin(I_T)} (-3/2(1 - 3/2 \sin(\tilde{I})^2) \sin(I_T) \cos(I_T) + 3/4 \sin(2\tilde{I}) \cos(2I_T) \cos(\Omega_T - \tilde{\Omega}) + \\ &\quad 3/4 \sin(\tilde{I})^2 \sin(I_T) \cos(2\Omega_T - 2\tilde{\Omega}) \cos(I_T))\end{aligned}$$

As últimas duas se referem a inclinação e nodo de Triton que está numa órbita circular. A função perturbadora do achatamento é dada por (20).

Observe acima que  $\dot{I}_T = \dot{\tilde{I}} = 0$  para  $\tilde{\Omega} - \Omega_T = k\pi$ . Então  $\dot{\tilde{\Omega}}$  fica:

$$\dot{\tilde{\Omega}} = -\frac{S_2}{\sin(\tilde{I})} \sin(2\tilde{I} + 2I_T)$$

se  $\tilde{\Omega} - \Omega_T = \pi$

$$\dot{\tilde{\Omega}} = -\frac{S_2}{\sin(\tilde{I})} \sin(2\tilde{I} - 2I_T)$$

se  $\tilde{\Omega} - \Omega_T = 0$

Onde

$$S_2 = \frac{3Gm_T M_N R_N^2 J_2}{4Cw_N a_T^3}$$

Analogamente

$$\dot{\Omega}_T = -\frac{3 GM_N R_N^2 J_2}{4 n_T a_T^5 \sin(\tilde{I})} \sin(2\tilde{I} + 2I_T)$$

se  $\tilde{\Omega} - \Omega_T = \pi$

$$\dot{\Omega}_T = \frac{3 GM_N R_N^2 J_2}{4 n_T a_T^5 \sin(\tilde{I})} \sin(2\tilde{I} - 2I_T)$$

se  $\tilde{\Omega} - \Omega_T = 0$

Observemos então que para  $\tilde{\Omega} - \Omega_T = \pi$ , temos das relações acima:

$$\dot{\tilde{\Omega}} - \dot{\Omega}_T = \frac{3GM_N R_N^2 J_2}{4a_T^3} \sin(2\tilde{I} + 2I_T) \left[ \frac{1}{n_T a_T^2 \sin(I_T)} - \frac{m_T}{Cw_N \sin(\tilde{I})} \right] \quad (39)$$

Ou seja, o termo entre colchetes é exatamente aquele que define o plano invariável (equação 20) e portanto se os ângulos  $\tilde{\Omega}$ ,  $\omega_T$ ,  $\tilde{I}$  e  $I_T$  estiverem referidos ao plano invariável então  $\dot{\tilde{\Omega}} - \dot{\Omega}_T = 0$ .

Notemos que  $\tilde{\Omega}$  e  $\Omega_T$  sempre surgem juntos no sistema de equações diferenciais. Daí, na realidade temos três equações apenas e dizemos que, no plano invariável,  $\tilde{\Omega} - \Omega_T = \pi$ ,  $\tilde{I}$  e  $I_T$  satisfazendo (20) é uma solução de equilíbrio, isto é:

a)  $\Omega_T$  e  $\tilde{\Omega}$  são lineares no tempo, síncronos defasados por  $\pi$ .

b)  $\tilde{I}$ ,  $I_T$  são constantes.

É fácil mostrar que  $\tilde{\Omega} - \Omega_T = 0$  não é solução de equilíbrio pois por definição  $\tilde{I} \in [0, \pi]$ .

Note que estas afirmações são verdades se o achatamento é restrito apenas a parte secular  $R_{J_2}$  como dado em (20).

Assim o plano invariável nada mais é do que um plano inercial qualquer, posicionado tal que a inclinação de Triton e a inclinação do equador permaneçam sempre constantes, e o nodo de Triton precessiona síncrono com o nodo do equador.

Para posicionar este plano relativamente ao equador numa dada data, consideremos conhecido  $\xi_1 =$  inclinação de Triton relativamente ao equador nesta data.

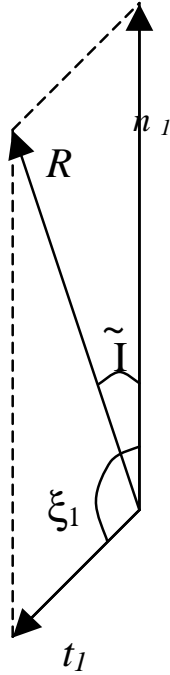


Figura 9: Determinando  $\tilde{I}$

Então  $R = \sqrt{n_1^2 + t_1^2 - 2n_1t_1 \cos(\xi_1)}$

Daí, sendo conhecidos  $n_1, t_1, R$  então  $\tilde{I}$  fica determinado

### E - Variação de $\tilde{I}$ para diversos $a_T$

Uma questão que se coloca é saber qual seria a evolução do equador de Netuno uma vez que Triton está se aproximando. Atualmente o plano invariável está inclinado de apenas  $0.51^\circ$  do equador. Isto é obtido usando a equação (21) onde tomamos os seguintes dados:

- $M_N = 1/19314$  massas do sol
- $a_T = 14.325R_N$
- $m_T = 0.000209M_N$
- $I_T = 156.83^\circ$
- $C = 0.21M_NR_N^2$
- período de rotação de Netuno = 16.11 horas

No entanto, sabemos que durante a queda, o semi-eixo de Triton decai e sua inclinação também varia.

Para simular o efeito da maré atuando em Triton, tomamos as equações do semi-eixo e da inclinação conforme dado. Na realidade existe uma grande incerteza nos valores adotados para as constantes da maré, no entanto, o objetivo aqui é apenas ter uma idéia da variação qualitativa da inclinação do equador de Netuno. As equações da maré são:

$$\left(\frac{dI_T}{dt}\right)_N = -\frac{3}{4} \frac{m_T}{M_N} k_2 \frac{(R_N/a_T)^5 n_T \sin(I_T) \sin(I_T/2)^6}{Q} \quad (40)$$

$$\left(\frac{da_T}{dt}\right)_N = -3 \frac{m_T}{M_N} k_2 \frac{(R_N/a_T)^5 n_T a_T \sin(I_T/2)^8}{Q} \quad (41)$$

onde atribuímos os seguintes valores às constantes:

$Q = 10000$  (coeficiente de dissipação).

$k_2 = 0.46$  (segundo número de Love).

Fixamos então o plano de referência como sendo o invariável atual, o qual será mantido fixo, até o final da integração. Integramos então o conjunto  $\tilde{I}$ ,  $\tilde{\Omega}$ ,  $I_T$  e  $\Omega_T$  adicionando ainda o efeito das duas equações acima devido a maré. O gráfico abaixo mostra o comportamento das várias grandezas. Como se nota, o efeito de Triton é mínimo e  $\tilde{I}$  varia de uma quantidade mínima, isto é, de  $0.5^\circ$  a  $0.34^\circ$ .

Estas integrações foram feitas considerando as equações 38, 40 e 41 bem como  $\dot{I}_T$ ,  $\dot{\Omega}_T$  todas em variáveis não singulares (vide apêndice).

Concluindo esta seção, podemos afirmar que o efeito de Triton sobre o equador de Netuno, mesmo quando Triton se aproxima do planeta, por enquanto é mínimo. No capítulo a seguir retornaremos a esta questão.

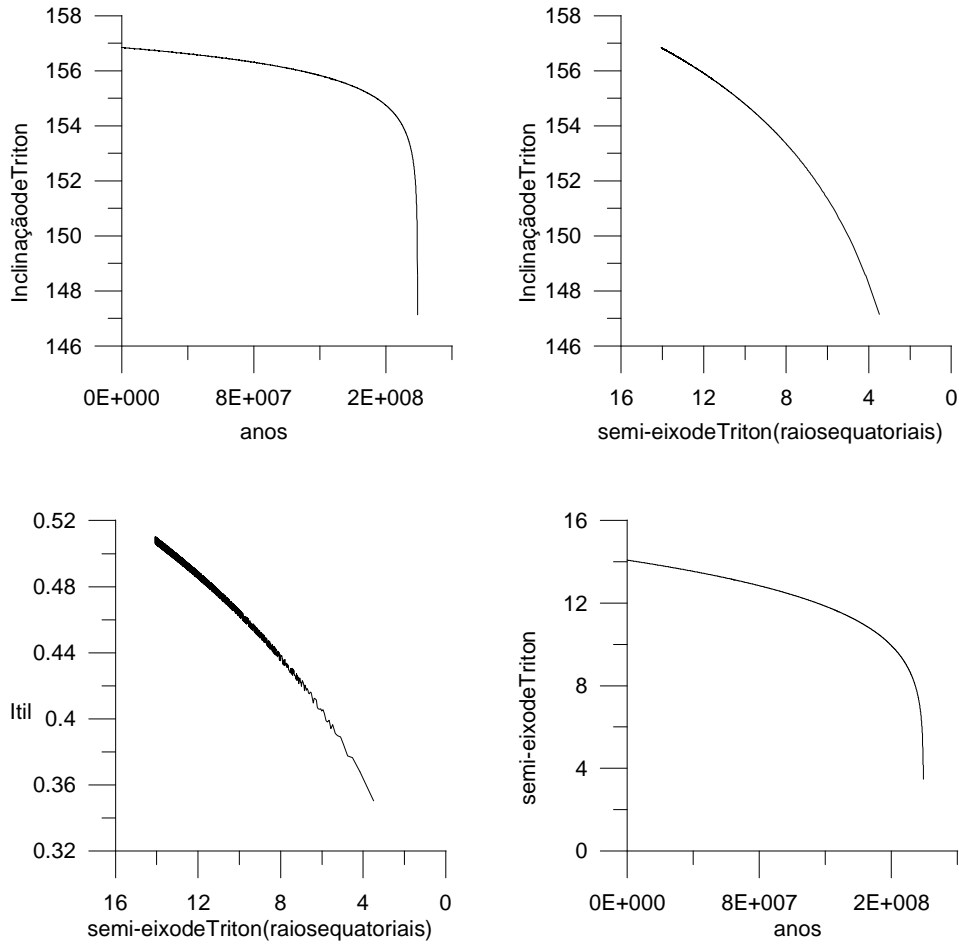


Figura 10: Para realizarmos estas integrações nós aumentamos 50 vezes o efeito da maré sobre Triton, ou seja, multiplicamos por 50 o membro da esquerda das equações (58) e (59), diminuindo assim o tempo de integração. Este procedimento parece não alterar o comportamento geral dos gráficos, pois ao realizarmos o mesmo processo, porém com efeito de maré aumentado 200 vezes, o segundo e o terceiro gráficos permanecem idênticos (os demais mantêm o mesmo comportamento num tempo maior). Condições iniciais:  $\tilde{I} = 0.51^\circ$ ,  $I_T = 156.8$ ,  $\tilde{\Omega} = 180^\circ$ ,  $\Omega_T = 0^\circ$ ,  $a_T = 14.064$  raios equatoriais

### Capítulo III - Perturbações sobre os satélites internos

Vamos agora considerar um satélite interno de Netuno perturbado por Triton e também pelo achatamento. Em função do que vimos nas seções anteriores será adotado como plano de referência o plano invariável.

O sistema diferencial a ser integrado será portanto:  $\tilde{\Omega}, \tilde{I}, \Omega_T, I_T, e_i, I_i, \varpi_i, \Omega_i$ , onde usaremos a nossa função perturbadora geral para inclinações arbitrárias, no caso de equações médias. Faremos também comparações com as equações exatas, a fim de testar a eficiência para alguns valores de  $\alpha = \frac{a_i}{a_T}$ , casos ressonantes, casos com variação de semi-eixo.

#### A - Comparações entre funções médias clássica retrógrada e de inclinação generalizada

Antes de prosseguirmos com os resultados de nossos estudos, veremos que a função perturbadora de inclinação generalizada pode em muitos casos superar a qualidade dos resultados obtidos em relação a função clássica retrógrada. Ou ainda em muitos casos não há convergência da clássica mas a generalizada ainda apresenta bons resultados.

Abordaremos duas situações; na primeira suporemos que o satélite perturbado é o interno e possui órbita direta (com perturbador retrógrado); na segunda o satélite perturbado é externo e possui órbita retrógrada (com perturbador direto).

No primeiro caso, na ausência do achatamento, as experiências numéricas mostram que a inclinação do perturbado varia bastante (se o perturbador possuir alta inclinação). Este fato é prejudicial para os dois desenvolvimentos (clássico e de inclinação arbitrária), já que mesmo no caso generalizado, fizemos truncamento na inclinação do perturbado, conforme mencionado no capítulo I. Desta forma na figura 11, a seguir, incluiremos o achatamento, uma vez que neste caso a inclinação do perturbado se mantém mais suave.



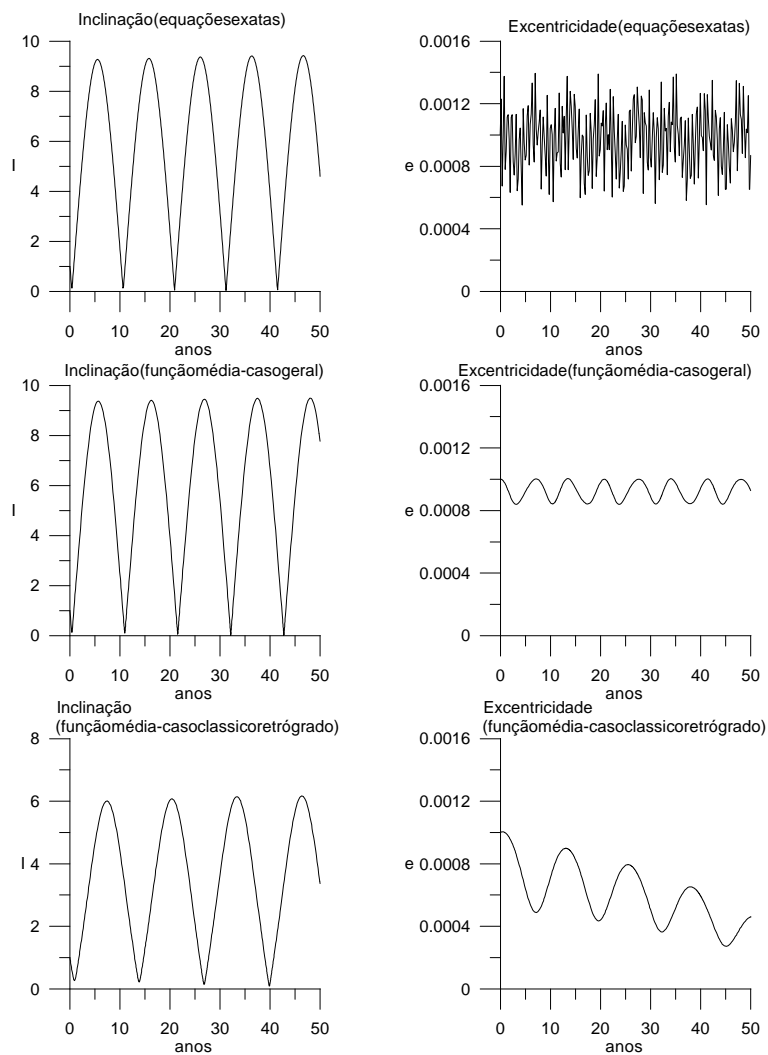


Figura 11: Aqui resultados da integração numérica de Proteus sendo perturbado por Triton (caso interno). Na presença do achatamento a função perturbadora de inclinação generalizada é melhor que a clássica quando comparadas com as equações exatas. Condições iniciais de Proteus:  $a = 4.751, e = 1.E - 3, \omega = 0^\circ, \Omega = 0^\circ, I = 1^\circ, M = 0^\circ$ ; Condições iniciais de Triton:  $a_T = 7.9183, e_T = 1.6E - 5, \omega_T = 180^\circ, \Omega_T = -90^\circ, I_T = 150^\circ, M_T = 90^\circ$

No segundo caso (fig. 12), o achatamento não será incluído (não é relevante). Notemos agora a grande discrepância entre o caso clássico e generalizado, em especial na inclinação.

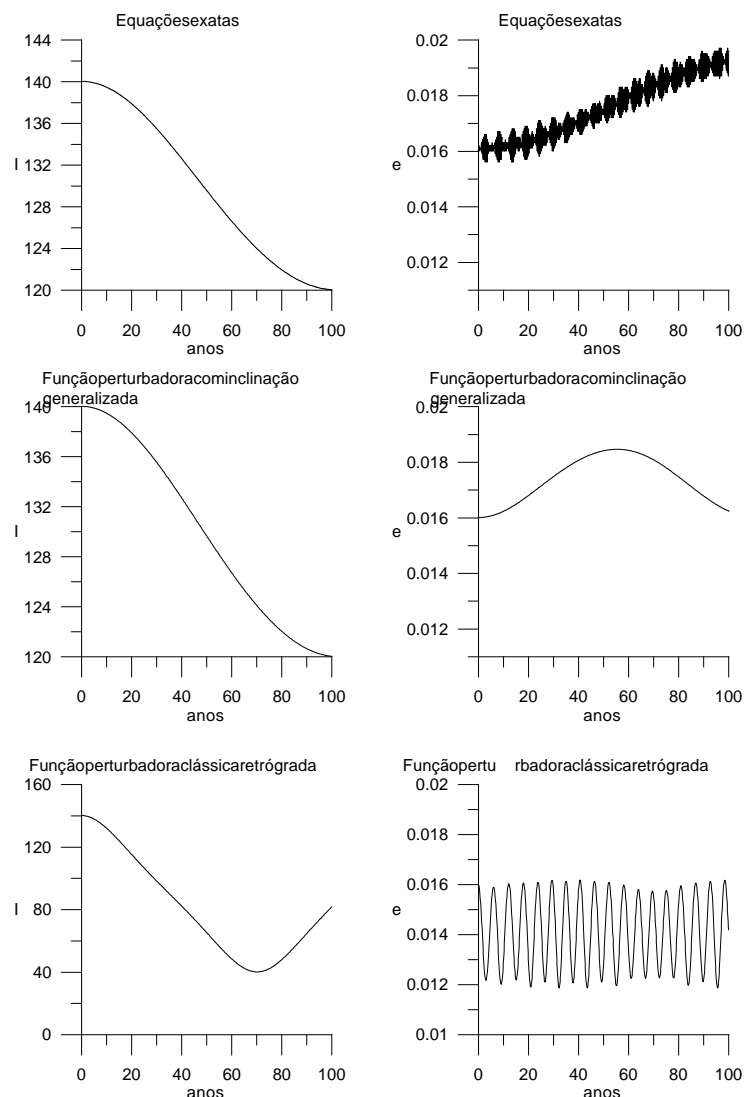


Figura 12: Aqui o satélite perturbado é externo e possui alta inclinação e Triton (perturbador) é interno. O achatamento não foi considerado. Condições iniciais do satélite perturbado:  $a = 7.9183$ ,  $e = 0.016$ ,  $I = 140^\circ$ ,  $\omega = 0^\circ$ ,  $\Omega = 0^\circ$ ,  $M = 0^\circ$ ; condições iniciais do perturbador  $a_T = 4.751$ ,  $e_T = 0.0001$ ,  $I_T = 10^\circ$ ,  $\omega_T = 0^\circ$ ,  $\Omega_T = 0^\circ$ ,  $M_T = 0^\circ$

Observe que, na figura 12, tomamos inclinações altas e uma razão entre os semi-eixos  $\alpha \approx 0.6$ , ou seja, tomamos condições bem críticas para garantir que a função clássica não teria um bom desempenho. Não seria necessário tomar uma inclinação tão alta ( $140^\circ$ ) para perceber que a função de inclinação arbitrária é a melhor, mas sob estas condições fica muito mais evidente a qualidade do nosso desenvolvimento.

Se tomarmos baixas inclinações vemos que tanto o caso clássico como o arbitrário têm

boa convergência quando comparados com as exatas.

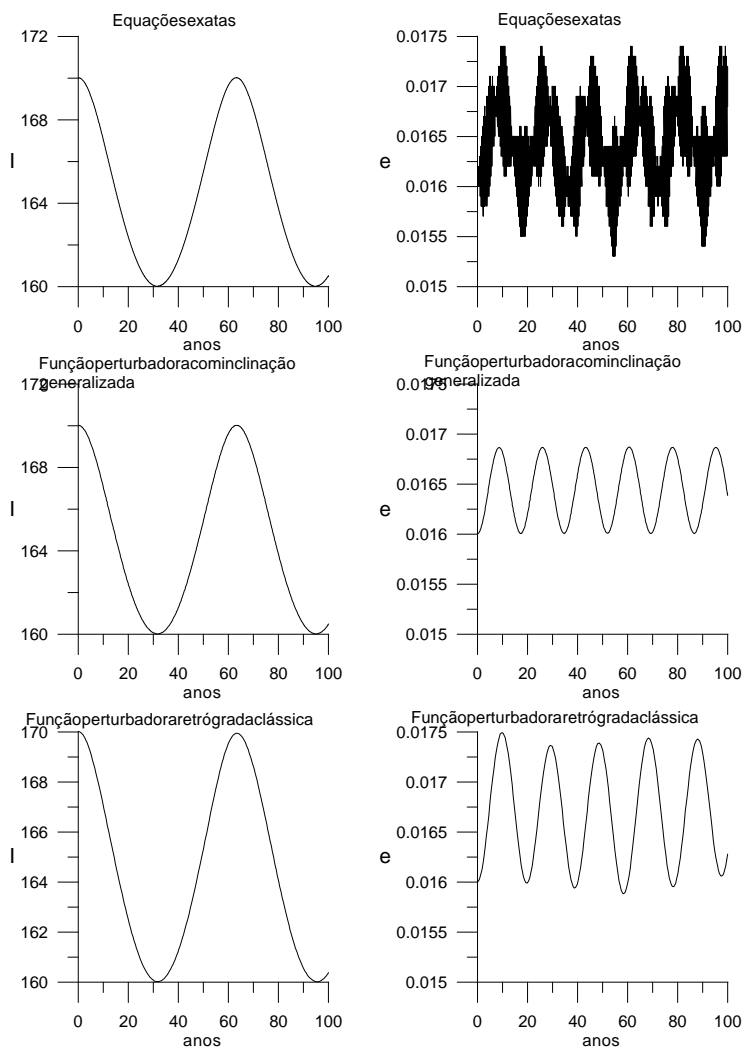


Figura 13: Aqui satélite (externo) perturbado por Triton (interno). Não incluímos o achatamento nesta integração. Condições iniciais do satélite:  $a = 7.9183$ ,  $e = 0.016$ ,  $I = 170^\circ$ ,  $\omega = 0^\circ$ ,  $\Omega = 0^\circ$ ,  $M = 0^\circ$ ; condições iniciais do perturbador:  $a_T = 4.751$ ,  $e_T = 0.0001$ ,  $I_T = 5^\circ$ ,  $\omega_T = 0^\circ$ ,  $\Omega_T = 0^\circ$ ,  $M_T = 0^\circ$ .

Note que para as figuras 12 e 13 foi necessário desenvolver a função generalizada novamente, já que antes supúnhamos a excentricidade do corpo externo como sendo nula. Mas o procedimento para este desenvolvimento é totalmente análogo ao desenvolvido no capítulo I.

## B - Comparações entre médias e exatas para algumas razões de semi-eixo

Os gráficos da figura 14, apresentam a variação da inclinação no caso  $\alpha \approx 0.24$ . A inclinação está referida ao plano invariável.

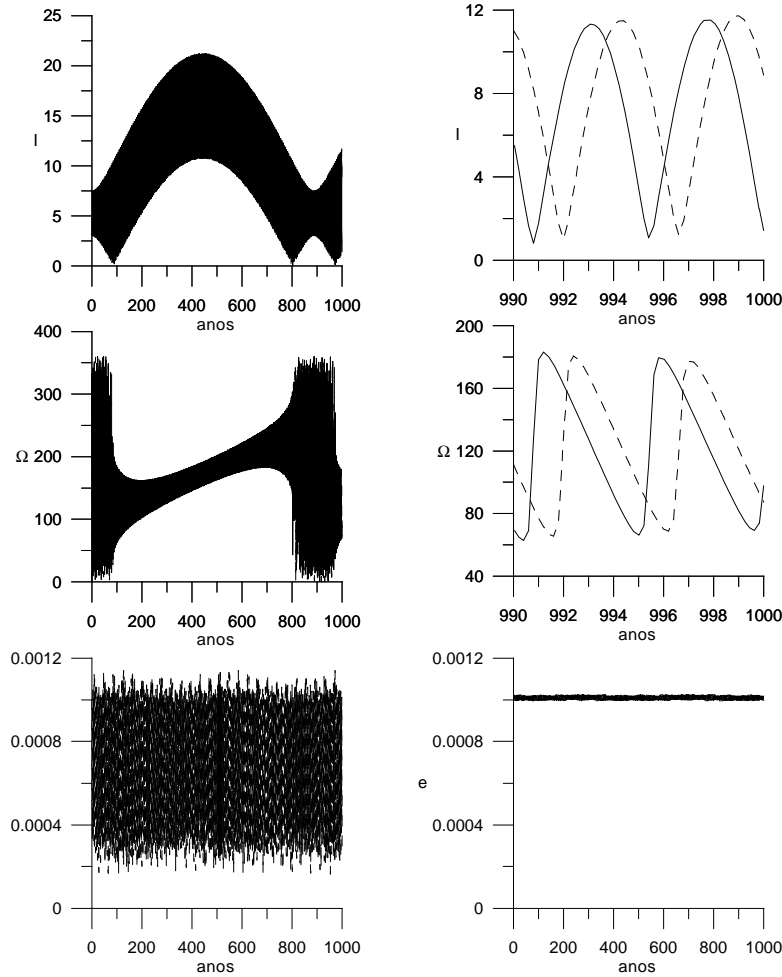


Figura 14: Apresentamos aqui um caso fictício onde  $m_T$  foi aumentada de modo que  $m_T/M_N = 0.00174$ . O primeiro gráfico mostra a inclinação durante 1000 anos, neste caso os gráficos de médias e exatas praticamente se sobrepõem. Se fizermos o gráfico apenas no início da integração também será difícil ver alguma diferença. Por isso, à direita, mostramos os últimos 10 anos. A mesma coisa se observa para o nodo. Vemos que para  $\alpha = 3.5/14.325$  as médias acompanham bem as exatas. As condições iniciais do satélite são:  $a_i = 3.5$  raios equatoriais,  $e_i = 0.001$ ,  $I_i = 3^\circ$ ,  $\lambda_i = 0^\circ$ ,  $\omega_i = 0^\circ$ ,  $\Omega_i = 0^\circ$ . As condições iniciais de Triton são:  $a_T = 14.325$  raios equatoriais,  $e_T = 0.00002$ ,  $I_T = 156.8^\circ$ ,  $\lambda_T = 61^\circ$ ,  $\omega_T = 341.8^\circ$ ,  $\Omega_T = 172.1^\circ$

Na figura 14 vemos uma comparação entre as integrações realizadas com as funções exatas (primeira coluna) e médias (segunda coluna). Esta figura ilustra o comportamento de um satélite fictício de Netuno sendo perturbado pelo seu achatamento e Triton. Incluímos também as equações da precessão. São comparadas as inclinações, os nodos e as excentricidades resultantes das duas integrações.

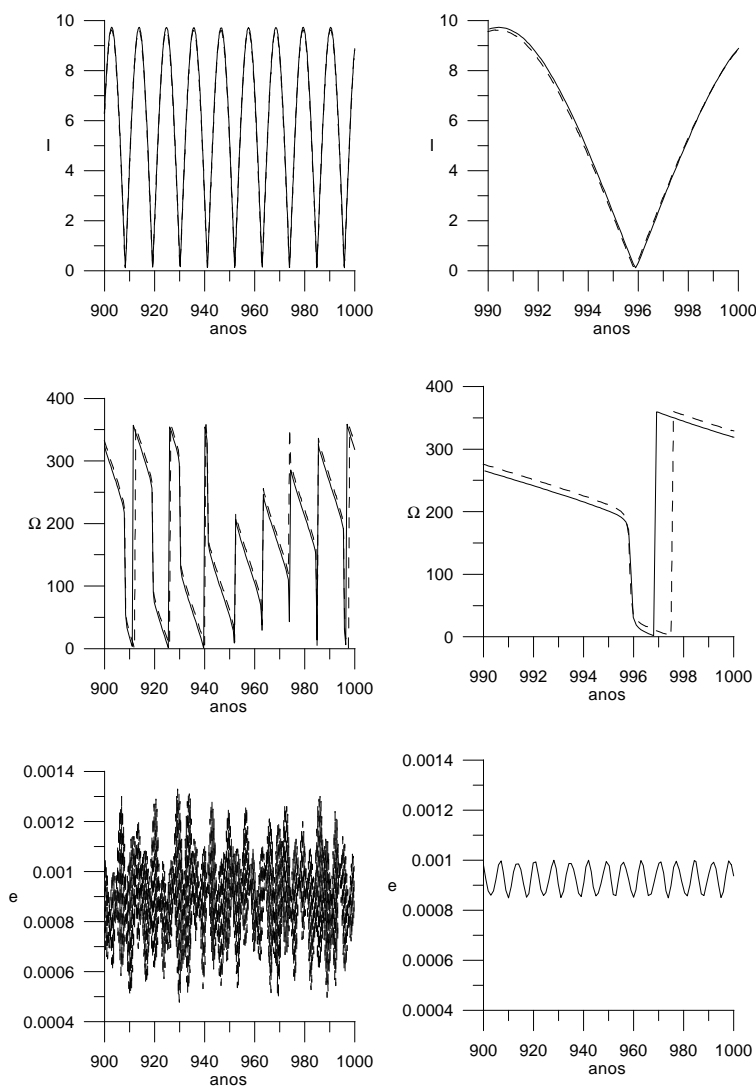


Figura 15: Podemos ver que mesmo para  $\alpha = 4.751/7.92 \approx 0.6$  as médias (linha cheia) acompanham bem as exatas (linha tracejada). Realizamos uma integração de 1000 anos. No início não se nota diferença entre médias e exatas nos gráficos da inclinação e nodo, por esse motivo mostramos apenas os 100 últimos anos destes elementos e depois (para detalhar melhor) os 10 últimos anos. As condições iniciais do satélite são (Proteus):  $a_i = 4.751$ ,  $e_i = 0.001$ ,  $I_i = 1^\circ$ ,  $\lambda_i = 0$ ,  $\Omega_i = 0$ ,  $\omega_i = 0$ . As condições iniciais de Triton são:  $a_T = 7.92$ ,  $e_T = 0.000016$ ,  $I_T = 153.03^\circ$ ,  $\lambda_i = 270^\circ$ ,  $\Omega_i = 270^\circ$ ,  $\omega_i = 270^\circ$

Na figura 15, assim como na 14, comparamos resultados das equações médias e exatas, porém agora mudamos a razão entre os semi-eixos para  $\alpha = 4.75/7.92$ . Observe que mesmo  $\alpha$  bem maior (agora é cerca de 0.6) as médias reproduzem bem as exatas.

Ainda nas figuras 14 e 15, a inclinação sobe muito (inclinação dada em relação ao plano invariável). Na primeira isso se deve ao fato de partirmos de uma inclinação relativamente alta em comparação aos satélites internos existentes, na segunda porque Triton está muito próximo do satélite.

Note que na figura 14 o satélite é fictício, mas na figura 15 o satélite possui o semi-eixo de Proteus. Em ambos os casos a função média reproduz muito bem as exatas. A excentricidade (principalmente na figura 11) aparenta uma diferença maior das exatas, mas isso não é preocupante já que essa diferença é da ordem de décimos de milésimos.

### C - ressonância 2:1

O satélite interno mais próximo a Triton é Proteus (cujo semi-eixo maior é 4.751 raios equatoriais de Netuno). Mostraremos nas próximas figuras algumas comparações entre equações médias e exatas numa vizinhança da ressonância 2:1 que é atingida para  $a_T \approx 7.542$  raios equatoriais

Seja  $a_T^*$  um valor crítico de  $a_T$  para a ressonância 2:1. Vamos considerar agora algumas simulações na vizinhança de  $a_T^* = 7.542$

#### C1 - $a_T < a_T^*$

Aqui mostramos uma integração realizada com o semi-eixo de Triton um pouco abaixo do ressonante

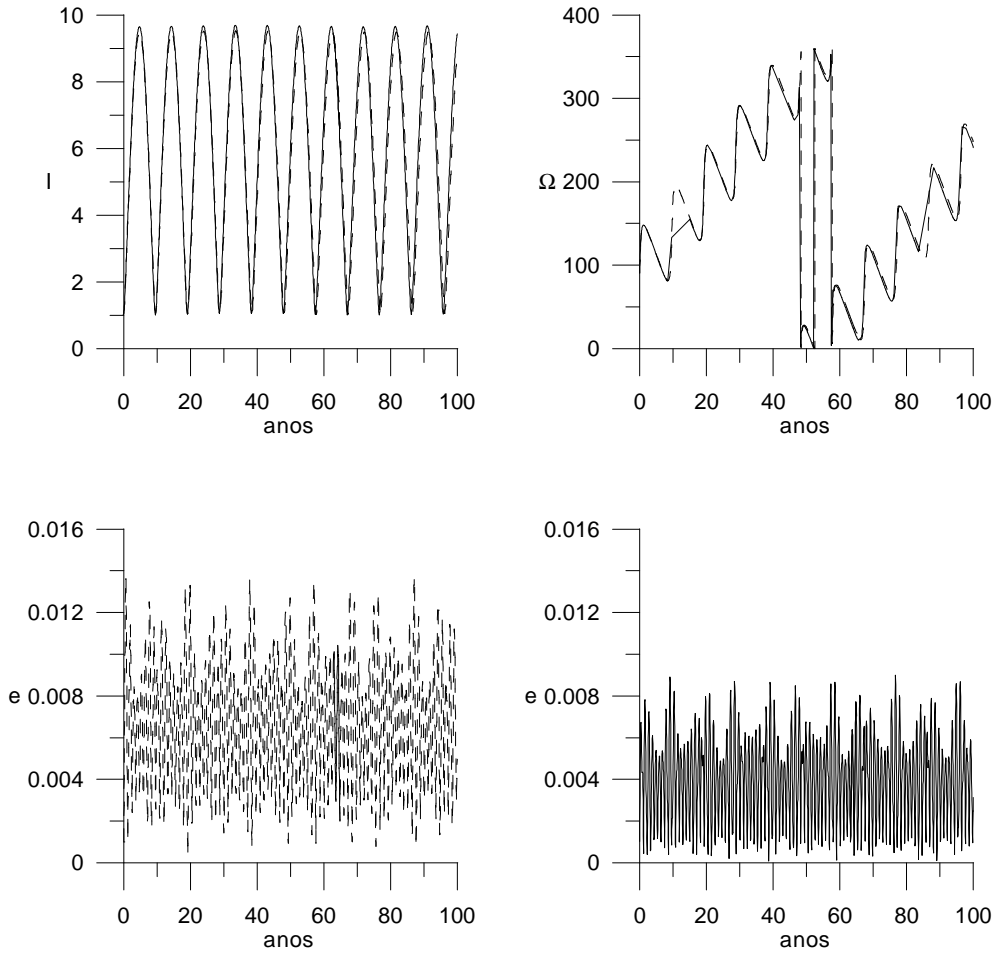


Figura 16: São ilustrados alguns resultados das equações médias (linha cheia) e exatas (linha tracejada). Nesta figura tomamos o semi-eixo de Triton um pouco menor que o semi-eixo que proporciona a ressonância 2:1, isto é, um pouco depois dele passar pela ressonância. Mostramos aqui comparações entre excentricidade, inclinação (em relação ao plano invariável) e nodo ascendente de Proteus. As condições iniciais de Triton são:  $a_T = 7.53$ ,  $e_T = 0.000016$ ,  $I_T = 153^\circ$ ,  $\lambda_T = 270^\circ$ ,  $\omega_T = 0^\circ$ ,  $\Omega_T = 270^\circ$ . E as de Proteus são:  $e_i = 0.001$ ,  $I_i = 1^\circ$ ,  $\lambda_i = 270^\circ$ ,  $\omega_i = 0^\circ$ ,  $\Omega_i = 90^\circ$ . E também  $\tilde{I} = 0.42^\circ$ ,  $\tilde{\Omega} = 90$ .

## **C2** - $a_T > a_T^*$

Agora o semi-eixo de Triton é um pouco maior que 7.542 (semi-eixo correspondente a ressonância 2:1).

Na figura 17 observamos a excentricidade, a inclinação (em relação ao plano invariável) e o nodo ascendente de Proteus. Notamos que a inclinação atinge valores relativamente elevados em relação ao atual, mas isso se explica devido a proximidade de Triton em relação a Proteus.



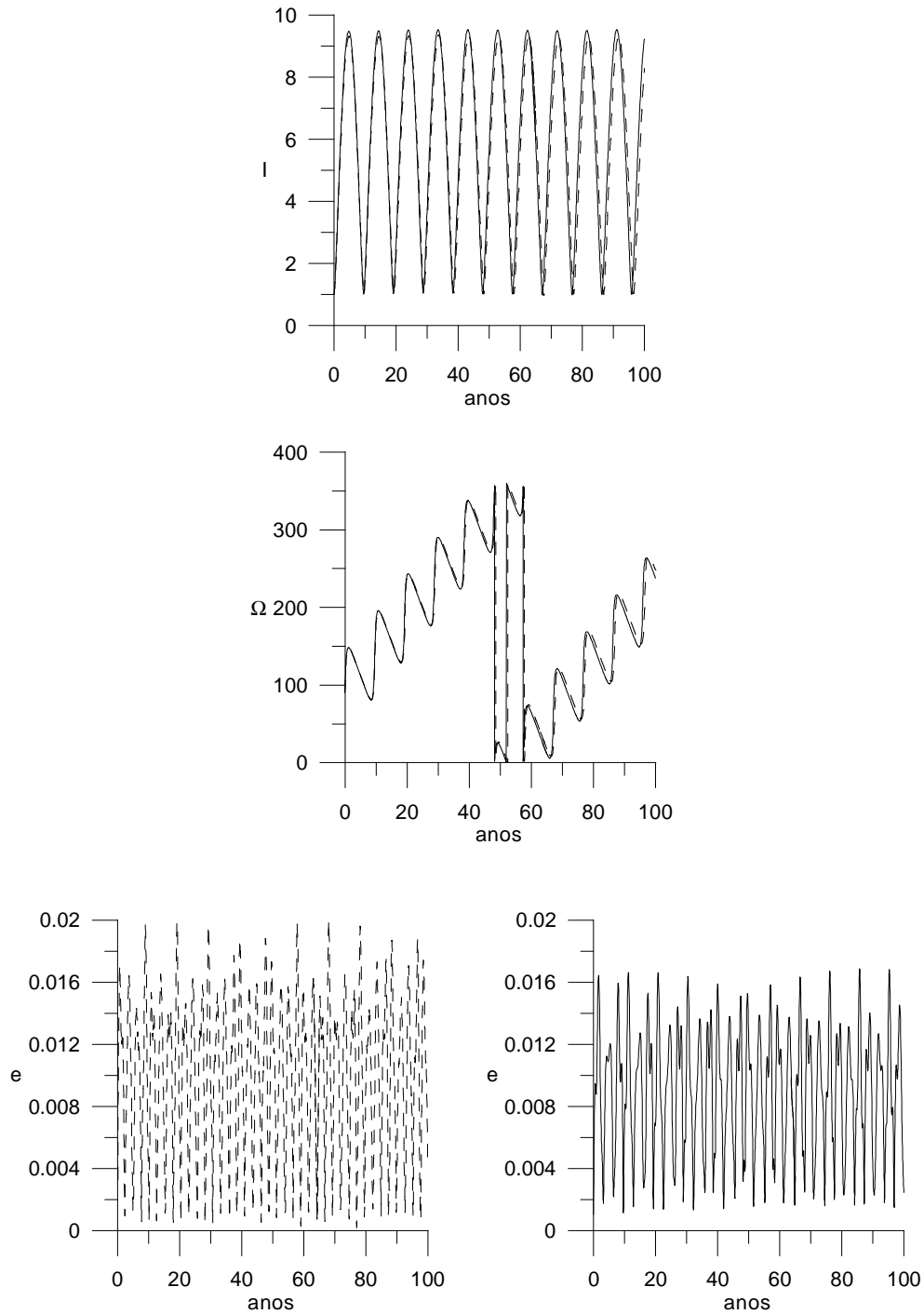


Figura 17: Aqui temos  $a_T = 7.55$ . Os dois primeiros gráficos mostram inclinação e nodo nas equações médias (linha cheia) e exatas (linha tracejada). Estes praticamente estão sobrepostos. Os últimos dois gráficos mostram a excentricidade do satélite (neste caso não sobrepomos os gráficos para melhor distinção das curvas). Condições iniciais de Proteus:  $a_i = 4.751$  raios equatoriais,  $e_i = 0.001$ ,  $I_i = 1^\circ$ ,  $\lambda_i = 270^\circ$ ,  $\omega_i = 0^\circ$ ,  $\Omega_i = 90^\circ$ . Condições iniciais de Triton:  $a_T = 7.55$  raios equatoriais,  $e_T = 0.000016$ ,  $I_T = 153^\circ$ ,  $\lambda_T = 270^\circ$ ,  $\omega_T = 180^\circ$ ,  $\Omega_T = 270^\circ$

### C3 - $a_T = a$ ressonante

Finalmente o caso mais interessante que é Proteus em ressonância 2:1 com Triton.

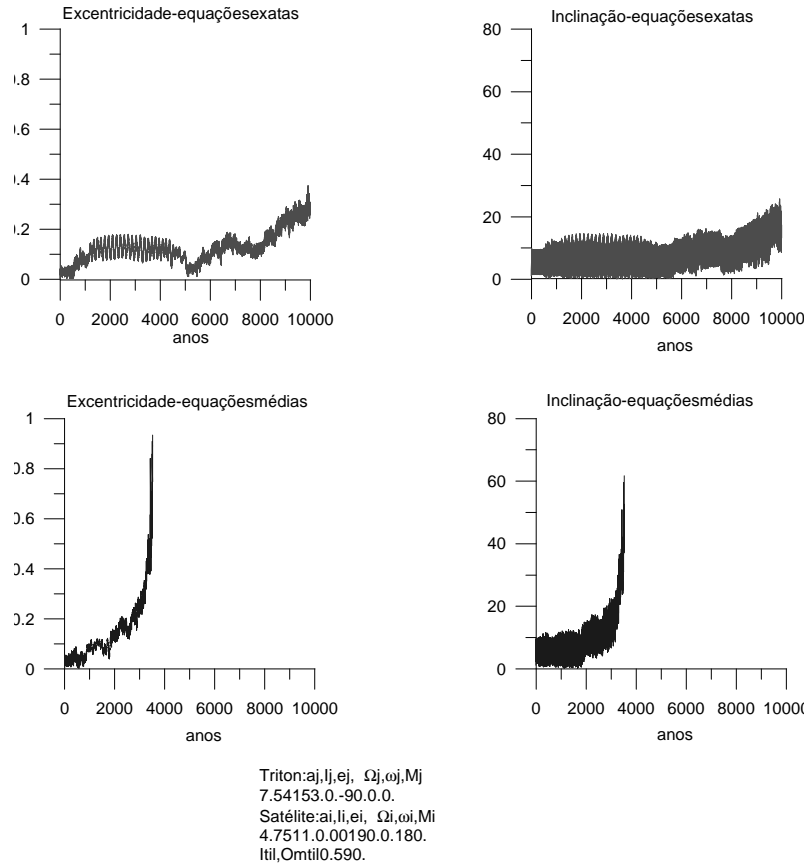


Figura 18: Comparação de integrações médias e exatas.

Na figura 18 ilustramos uma comparação entre integrações com equações médias e exatas. Agora, diferente dos casos anteriores,  $a_T = 7.542$ , ou seja, Triton está em ressonância orbital (2:1) com Proteus. Nota-se que as variações da inclinação e excentricidade são bem irregulares ao compararmos com os casos fora da ressonância. A excentricidade de Proteus sobe muito, isso faz com que nosso desenvolvimento não seja adequado para este caso. Como vemos, em dez mil anos a excentricidade nas equações exatas não chegam a 0.4, enquanto as médias quase atingem  $e = 1$  em menos de 4000 anos. O mesmo problema ocorre com a inclinação. As exatas não atingem 25 graus enquanto as médias passam de 60.

De qualquer forma as integrações mostram que para semi-eixos  $a_T$  suficientemente afastados de 7.542, nada de extraordinário ocorre. Portanto as grandes variações da excentricidade vistas na figura 15 se devem essencialmente à ressonância 2:1. Assim vemos que mesmo sendo de ordem superior em relação as ressonâncias diretas, a ressonância 2:1 é responsável por uma significativa variação da excentricidade de Proteus.

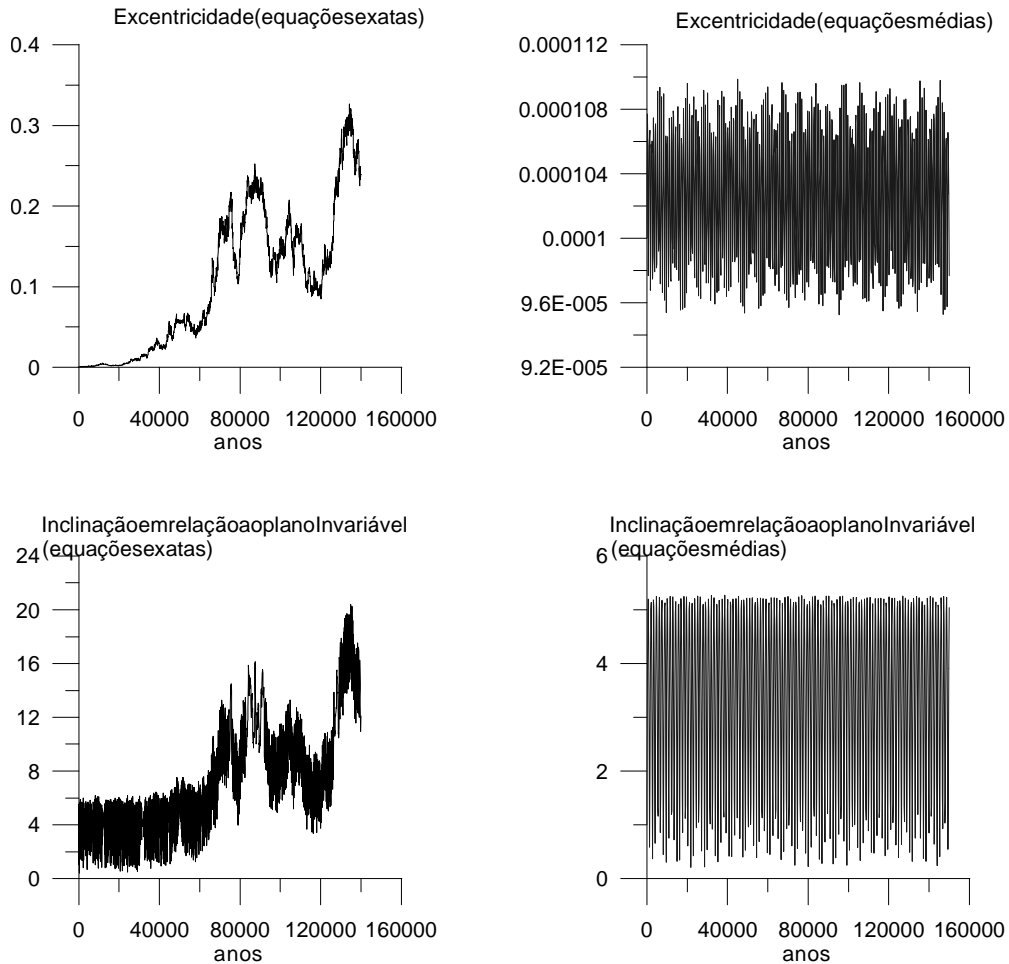
Notemos porém que aqui tomamos  $e = 0.001$  como valor inicial para excentricidade de Proteus, sendo que na realidade este valor pode ser menor ainda (consulte endereço [http://solarsystem.nasa.gov/planets/profile.cfm?Object=Nep\\_Proteus](http://solarsystem.nasa.gov/planets/profile.cfm?Object=Nep_Proteus)). Este detalhe será justificado na seção **D** quando abordaremos a ressonância 3:1.

### **D - Ressonância 3:1**

Uma vez que já mostramos que a comensurabilidade 2:1 é responsável por uma importante variação da excentricidade, vamos repetir o estudo para o caso 3:1.

Como mostramos no capítulo I, esta ressonância é de ordem 4 e em conseqüência poderíamos já esperar um efeito menos significativo do que a 2:1.

De início tomemos  $a_T = 9.883R_N$ . A figura 19 mostra novamente o comportamento da excentricidade e inclinação tanto para equações exatas como para as médias. Novamente se observa que  $e, I$  cresce de maneira irregular porém não tão depressa como no caso 2:1. Vários testes feitos com diferentes condições iniciais confirmam que o crescimento de  $e$  e  $I$  não é tão rápido quanto na ressonância 2:1. Também se observa que o modelo médio é insuficiente, certamente pelas mesmas razões já mencionadas em **C3**.



Condições iniciais  
 Na sequência os elementos:  $a, e, i, \omega, \Omega, M$   
 de Proteus: 4.751, 1.E-4, 1., 0., 0., 0.  
 de Triton: 9.883, 1.6E-5, 154.55, 90., -90., 0.

Figura 19: Esta figura ilustra comparação entre resultados de integrações com equações médias e exatas. Mostramos aqui a excentricidade e a inclinação (em relação ao plano invariável) de Proteus durante a ressonância 3:1 com Triton.

Observemos que nesta figura 19 iniciamos a integração tomando para Proteus  $e = 10^{-4}$ . Em pouco tempo observa-se que  $e > 10^{-3}$ . Como a ressonância (vista na seção **C3**) é atingida depois da 3:1, então assumir como excentricidade inicial  $e = 10^{-3}$  para Proteus na integração apresentada na figura 18, não deve ser crucial, já que durante a passagem pela ressonância 3:1, a excentricidade foi excitada para valores bem acima de 0.001.

### E - Influência da Variação secular do semi-eixo $a_T$

Até aqui estudamos todas as situações com o semi-eixo  $a_T$  quase constante, isto é, sem levar em conta o efeito dissipativo da maré. Do ponto de vista mais realista,  $a_T$  e  $I_T$  são fortemente afetados pela maré. Notemos que a introdução deste efeito se faz trivialmente no caso em que trabalhamos com as equações médias (acrescentamos equações 40 e 41). Porém na vizinhança das ressonâncias, as equações médias são inúteis já que a excentricidade e a inclinação crescem muito.

Vamos então tomar as equações cartesianas. Podemos tomar os modelos clássicos (Mignard, 1979, 1980, 1981) mas no nosso caso, queremos ver apenas a passagem pelo semi-eixo ressonante. Isto se dará num tempo relativamente curto onde o efeito principal seria a variação secular de  $a_T$ . Desta forma, como a implementação do arrasto é muito cômoda e afim de evitar os problemas de referencial mencionados em Chyba et al, 1989, vamos simplesmente simular a maré tomando em seu lugar um efeito de arrasto do tipo  $-k\dot{r}$  onde  $k > 0$ . Tal perturbação só afeta o semi-eixo e não a inclinação como faz a maré.

Como uma primeira abordagem para avaliar a passagem pelo semi-eixo ressonante este modelo deve ser satisfatório, e também é trivial de se implementar no programa.

Na figura 20 temos então as situações com e sem variação do semi-eixo. Usamos  $k = 10^{-10}$  (este valor produz um efeito similar de decaimento no semi-eixo das equações 40 e 41).

Na figura 20 vemos que quando não incluimos a variação do semi-eixo a excentricidade de Proteus chega a 0.6 em aproximadamente 16000 anos na ressonância 2:1. Porém se incluimos a variação do semi-eixo de Triton (com a força de arrasto) em cerca 15000 anos (contados a partir do ponto onde  $e$  começa a crescer) a excentricidade já chegou a 1.

Observa-se que a variação de  $a_T$  acelera o crescimento da excentricidade.

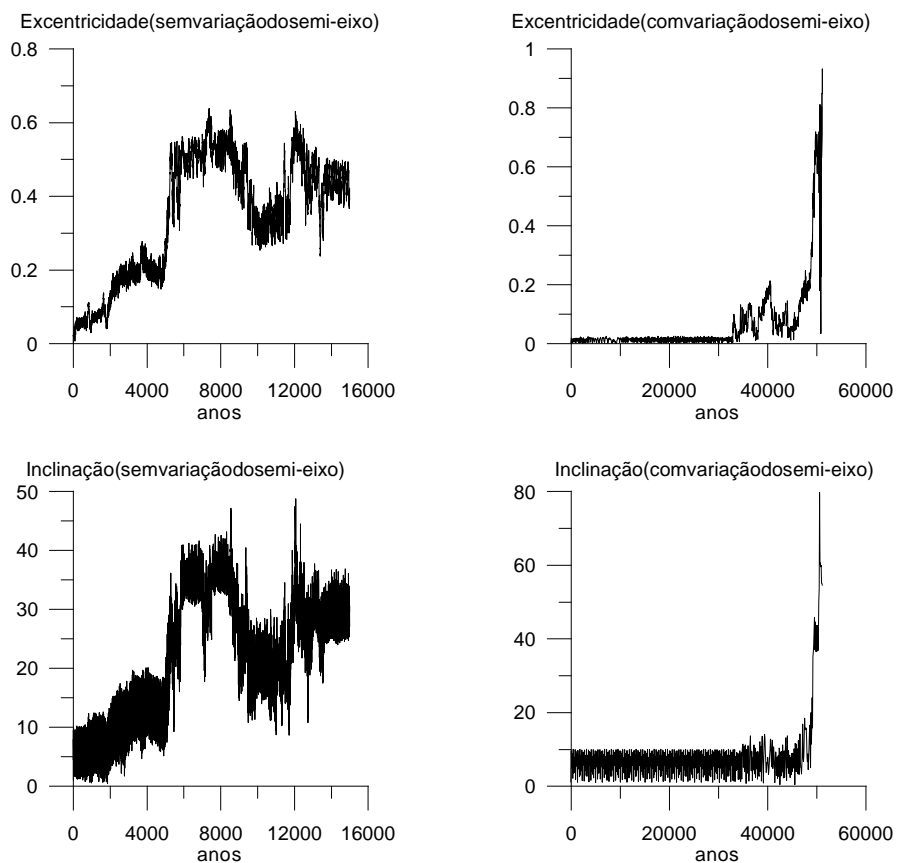


Figura 20: Nesta figura comparamos as excentricidades, e inclinações com e sem variação do semi-eixo. Usamos uma força de arrasto para simular o efeito da maré. Condições iniciais de Proteus:  $a = 4.751$ ,  $e = 0.001$ ,  $I = 1^\circ$ ,  $\omega = 0^\circ$ ,  $\Omega = 90^\circ$ ,  $M = 180^\circ$ . Condições iniciais de Triton:  $a = 7.542$  sem arrasto e  $a = 7.547$  com arrasto,  $e = 0.000016$ ,  $I = 153^\circ$ ,  $\omega = 0^\circ$ ,  $\Omega = -90^\circ$ ,  $M = 0^\circ$ .

Na verdade outros testes mostram que nem sempre a variação do semi-eixo de Triton acelera o escape de Proteus. Um teste realizado sem efeito dissipativo em  $a_T$ , com as condições  $a = 4.751$ ,  $e = 0.001$ ,  $I = 1^\circ$ ,  $M = 180^\circ$ ,  $\omega = 0^\circ$ ,  $\Omega = 90^\circ$ ,  $a_T = 7.5417$ ,  $e_T = 0.000016$ ,  $I_T = 152.732673290787^\circ$ ,  $M_T = 0^\circ$ ,  $\omega_T = 0^\circ$ ,  $\Omega_T = -90^\circ$  mostra um escape após  $t \approx 22000$  anos, sendo que mantidos estes mesmos valores mudando apenas  $M$  para  $M = 0$  (de Proteus), verifica-se um escape em  $t \approx 11500$  anos.

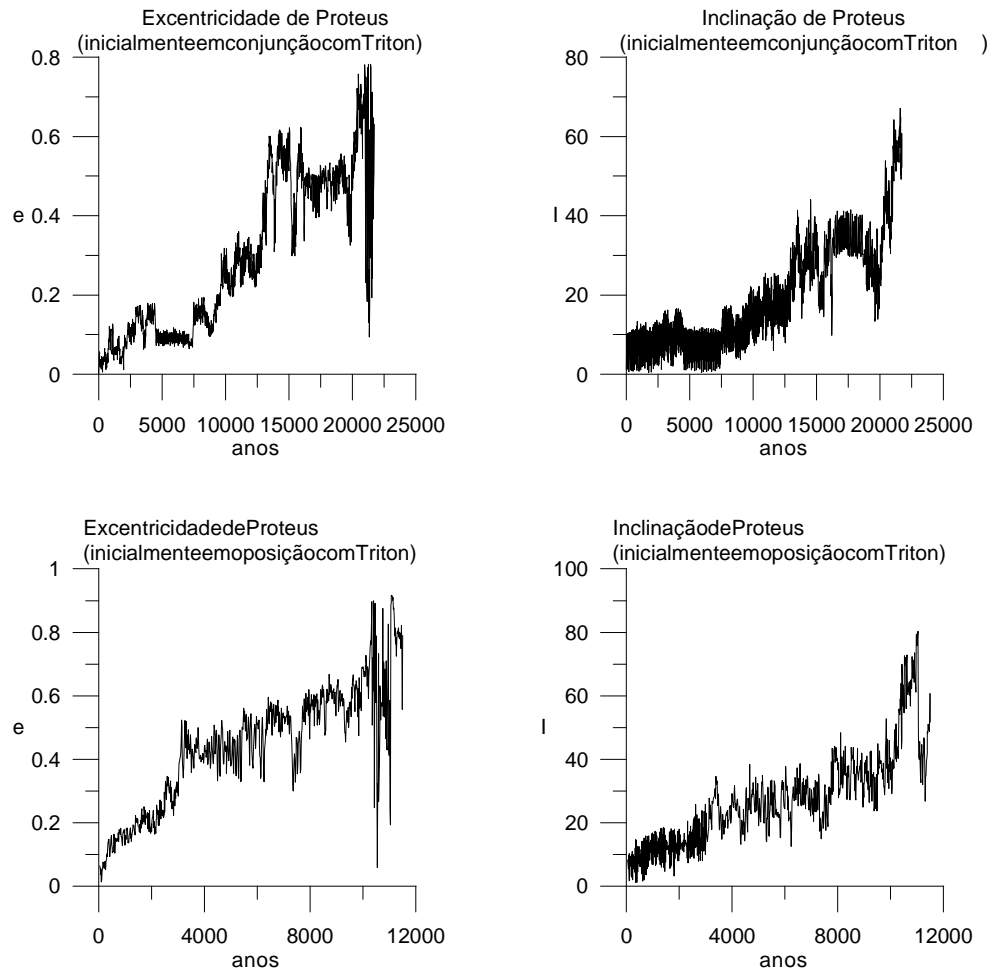


Figura 21: Esta figura ilustra excentricidade e inclinação de Proteus em ressonância 2:1 com Triton. São exibidos dois casos, no primeiro Proteus é colocado inicialmente em conjunção com Triton ( $M = 180^\circ$ ), no segundo Proteus é colocado inicialmente em oposição a Triton ( $M = 0^\circ$ ).

A figura 22 mostra a evolução do semi-eixo de Triton referente a figura 20.

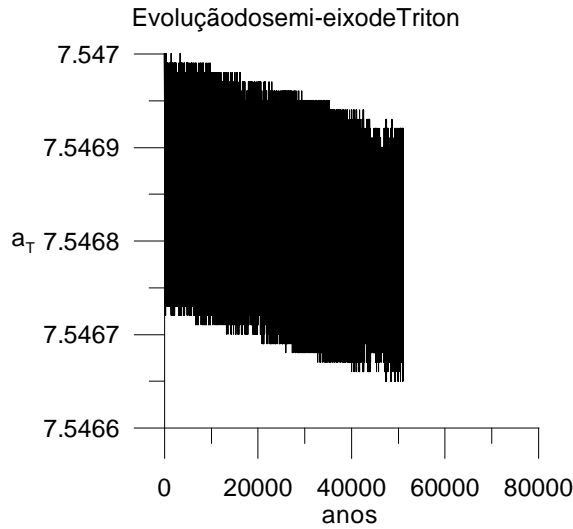


Figura 22: Evolução do semi-eixo de Triton na passagem pela ressonância 2:1. Utilizamos uma força de arrasto para simular o efeito da maré sobre o semi-eixo.

## F - O efeito da precessão

Lembremos que na seção E do capítulo II, mostramos que  $\tilde{I}$  varia de forma quase desprezível. Em princípio, o efeito da aproximação de Triton em direção a Netuno não parece ser muito significativo sobre o equador do planeta. No entanto vamos verificar se alguma pequena variação de  $\tilde{I}$  pode modificar a dinâmica de um satélite que estaria em uma ressonância com Triton.

Vamos considerar novamente o efeito dissipativo devido o arrasto como visto antes. Na figura 23 (parte superior) temos a variação da excentricidade e inclinação no caso da ressonância 2:1. Observe que por volta de 50 mil anos, Proteus é ejetado. Na parte inferior apresentamos as correspondentes situações, porém agora sem computar a precessão, isto é,  $\tilde{\Omega}$  e  $\tilde{I}$  são mantidas constantes. Desta forma, a ejeção se dá depois de 60 mil anos. O que se nota é que a precessão acelera o crescimento da excentricidade e conseqüentemente o aparecimento da instabilidade.

Porém quando estudamos a passagem pela ressonância 3:1 a situação se inverte. Nota-se na figura 21 que a retirada do efeito precessional, ao contrário, acelera significativamente a ejeção de Proteus.

Desta forma, não é possível afirmar o real efeito da precessão durante a passagem por uma ressonância orbital.



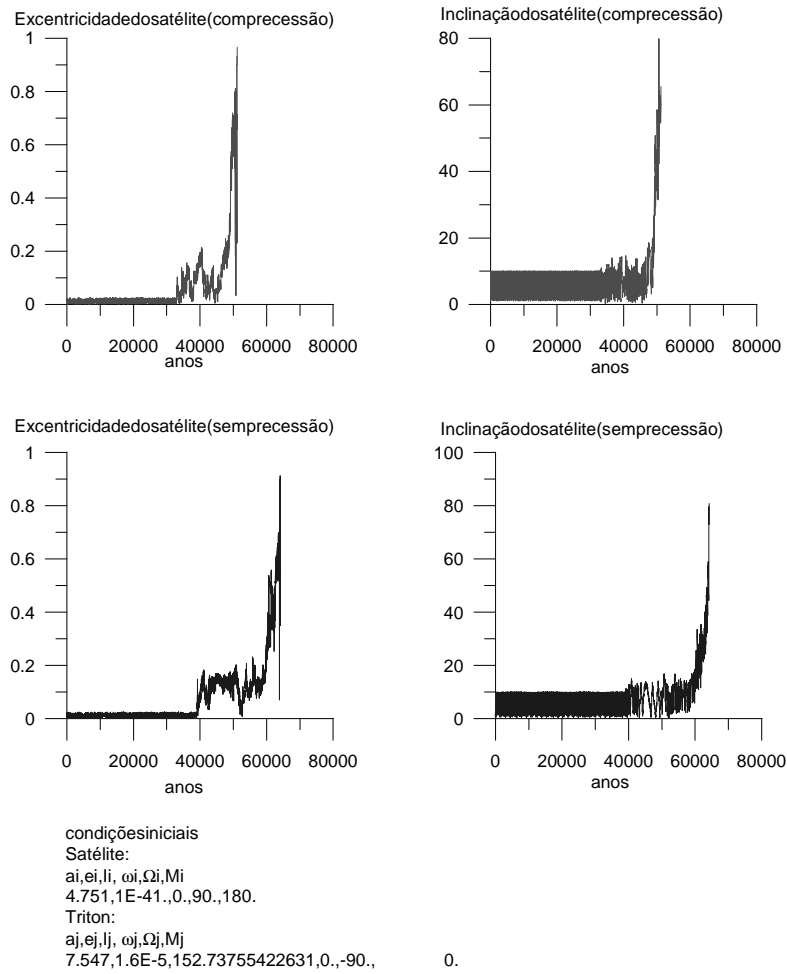


Figura 23: Integração realizada com equações exatas que mostram a evolução da excentricidade e inclinação (de Proteus) durante uma futura passagem pela ressonância 2:1. Comparamos aqui resultados de integrações com e sem o efeito da precessão.

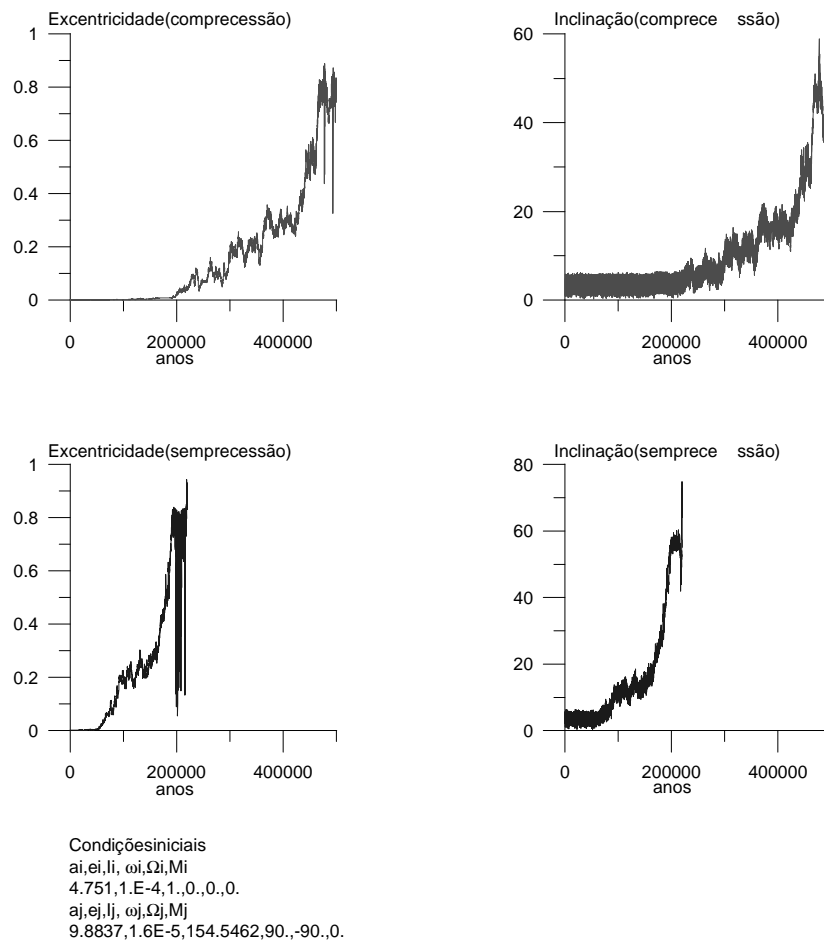


Figura 24: Integração realizada com equações exatas que mostram a evolução da excentricidade e inclinação (de Proteus) durante uma futura passagem pela ressonância 3:1. Comparamos aqui resultados de integrações com e sem o efeito da precessão.

Aparentemente o mais provável é que nas vizinhanças das ressonâncias, o sistema seria bastante caótico e portanto pequenas perturbações trazem efeitos extremamente significativos.

Testamos também a ressonância 5:2 ( $a_{T^*} \approx 8.7517R_N$ ). Realizamos várias simulações fazendo o semi-eixo  $a_T$  cruzar este valor  $a_{T^*}$  com diferentes coeficientes  $k$  do arrasto (diferentes velocidades). Em nenhum caso se observou aumento significativo de excentricidade ou qualquer diferença na passagem por esta ressonância.

Abaixo podemos ver o comportamento típico da excentricidade e inclinação de Proteus durante a passagem pela ressonância 5:2.

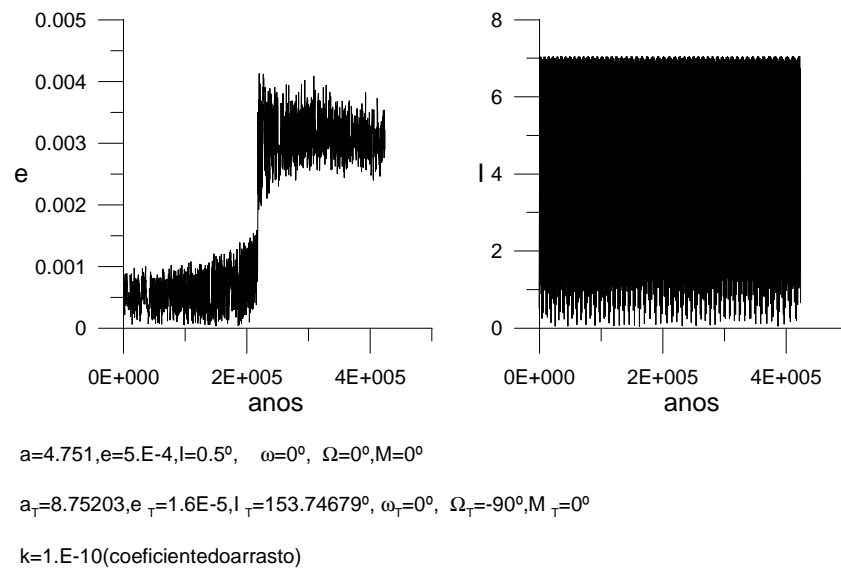


Figura 25: A figura mostra a excentricidade e a inclinação de Proteus na passagem pela ressonância 5:2 nos dois primeiros gráficos. Fizemos o semi-eixo de Triton variar com uma força de arrasto com  $k = 10^{-10}$ .

Como podemos ver na figura 25, há apenas um minúsculo salto da excentricidade de Proteus quando este atinge a ressonância.

## G - O efeito do achatamento

Vamos agora avaliar o efeito do achatamento. Tomaremos o caso próximo da ressonância 2:1 mantendo  $a_T$  fixo.

Na figura 26 temos a situação sem achatamento ( $J_2 = 0$ ). Observemos que se anularmos  $J_2$  também anula-se o efeito da precessão. Nota-se que a excentricidade praticamente não sofre variação alguma mas a inclinação (em relação ao plano invariável) tem grandes oscilações.

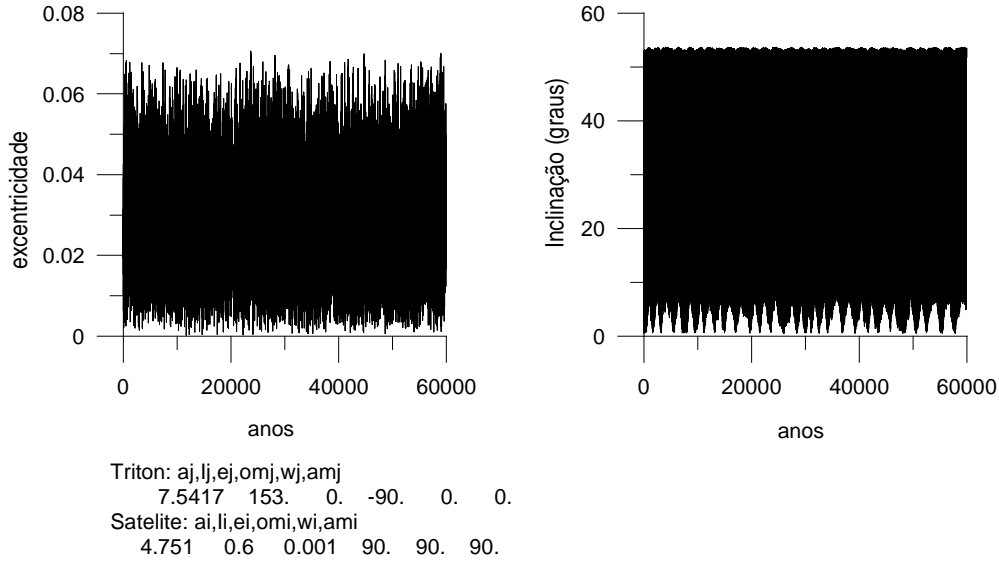


Figura 26: A figura mostra a excentricidade e inclinação de Proteus (no plano invariável com equações exatas) na ressonância 2:1. Aqui não incluímos o achatamento e a excentricidade cresceu pouco.

Agora, mantendo as mesmas condições iniciais da figura 26, integramos o mesmo problema porém agora consideraremos  $J_2 = 0.00365$  e manteremos  $\tilde{I} = 0.42^\circ$ ,  $\tilde{\Omega} = 90^\circ$  constantes (sem precessão).

Notemos a grande diferença: a excentricidade atinge valores proibidos sendo que em menos de 20 mil anos, Proteus é ejetado. A inclinação também sofre grandes variações (irregulares)

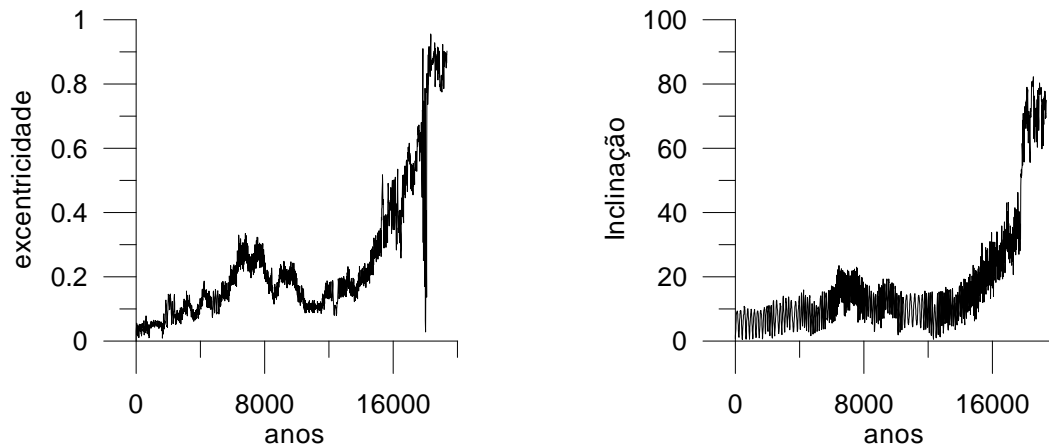


Figura 27: Figura ilustra a excentricidade e inclinação de Proteus na ressonância 2:1. As condições iniciais são as mesmas da figura anterior, porém agora incluímos o achatamento com  $J_2 = 0.00365$ .

## H - Aplicação com a função perturbadora de inclinação arbitrária

Infelizmente não será possível utilizar as equações médias durante toda a evolução do nosso sistema, pois como vimos durante a passagem pelas ressonâncias 2:1 e 3:1, nosso modelo não é adequado. No entanto fora destes casos não há restrição.

Realizamos uma curta integração ( $3 \times 10^6$  anos) fora da ressonância mostrando a evolução de Proteus durante a queda de Triton. Abaixo seguem os resultados.

Nesta figura aumentamos 50 vezes o efeito da maré, isto é multiplicamos  $k_2$  por 50. Isto foi feito apenas para acelerar o decaimento do semi-eixo de Triton.

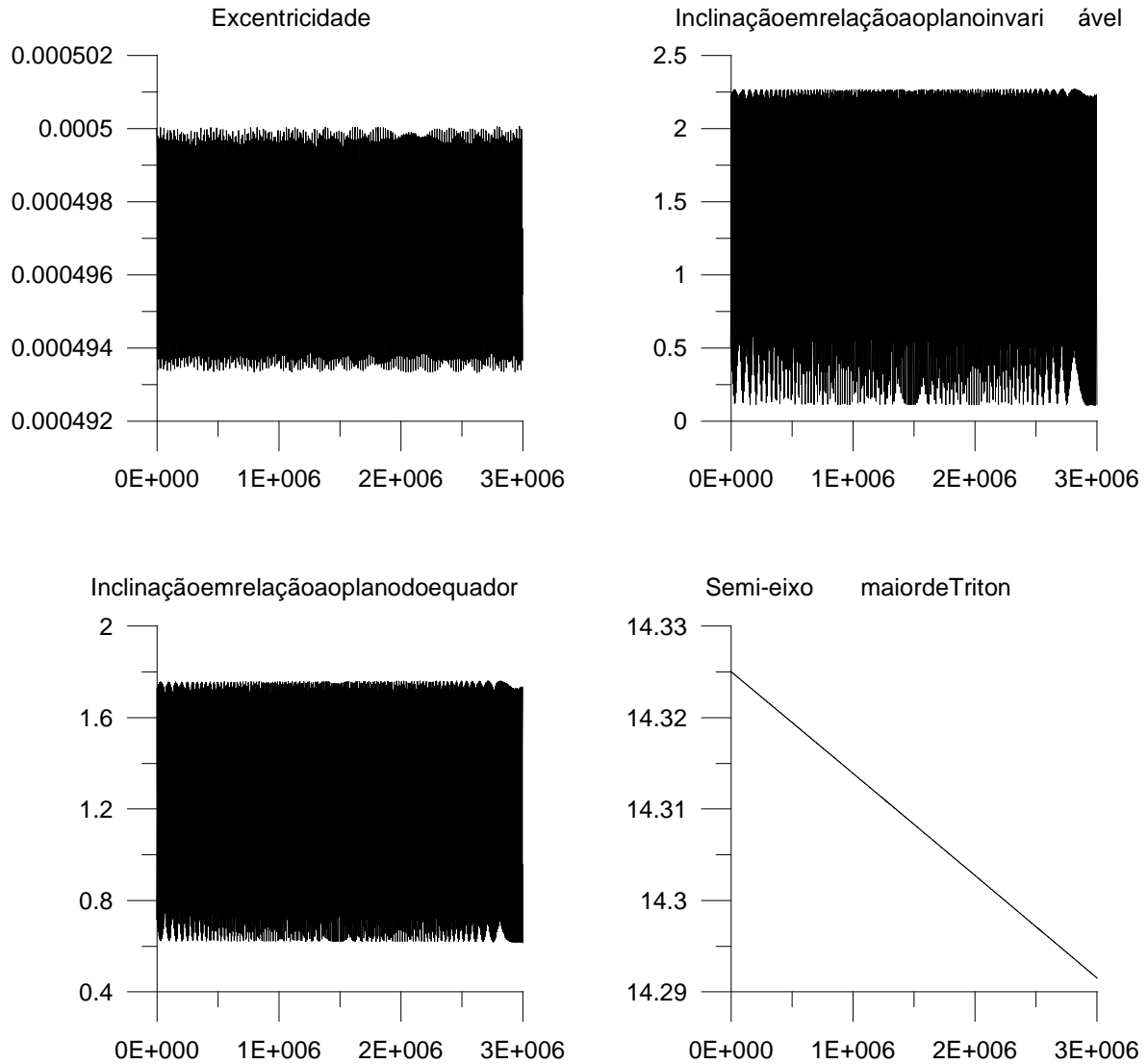


Figura 28: Alguns resultados com as equações médias. Incluímos agora as equações da maré. Mostramos aqui excentricidade, inclinação em relação ao plano invariável, inclinação em relação ao plano do equador e a evolução do semi-eixo no tempo. Condições iniciais de Proteus:  $a = 4.751$ ,  $e = 0.0005$ ,  $\omega = 0^\circ$ ,  $\Omega = 0^\circ$ ,  $I = 0.5^\circ$ ,  $M = 0^\circ$ ; Condições iniciais de Triton:  $a_T = 14.325$ ,  $e_T = 0.000016$ ,  $\omega_T = 0^\circ$ ,  $\Omega_T = -90^\circ$ ,  $I_T = 157^\circ$ ,  $M_T = 0^\circ$ .

Sabe-se que a inclinação de Proteus é pequena e praticamente constante. Porém em nossa integração a inclinação deste satélite apresentou uma variação acima da esperada. Na realidade isto decorre apenas das condições iniciais. Há uma grande sensibilidade na escolha da inclinação inicial. Como podemos ver na figura 29 pequenas alterações nas condições iniciais tornam a inclinação quase constante, tanto no plano invariável quanto no plano do equador.

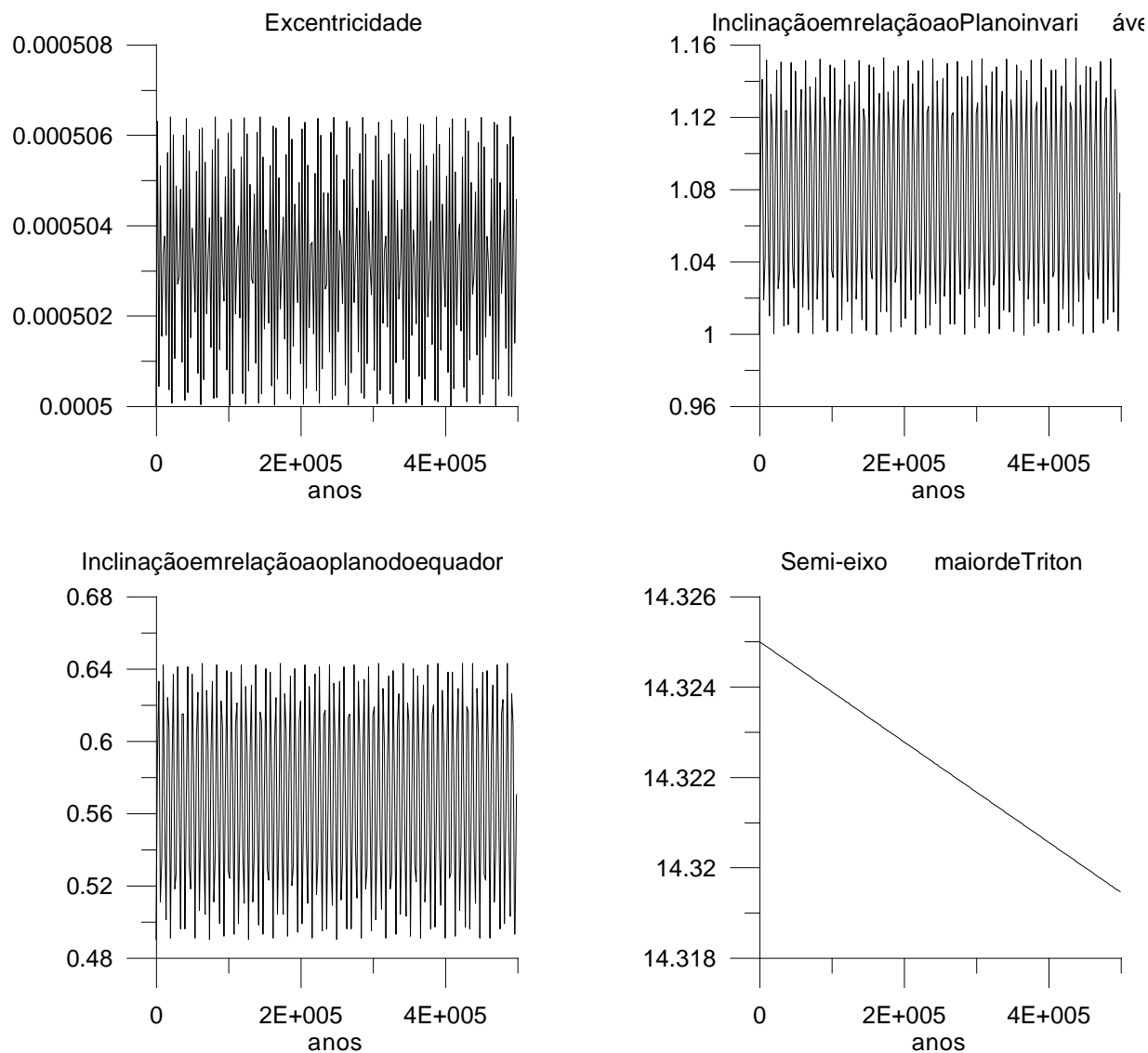


Figura 29: Aqui, como na figura anterior, incluímos as perturbações de Triton, do achatamento de Netuno, os efeitos da maré e equações da precessão. Condições iniciais de Proteus:  $a = 4.751$ ,  $e = 0.0005$ ,  $\omega = 0^\circ$ ,  $\Omega = 90^\circ$ ,  $I = 1^\circ$ ,  $M = 0^\circ$ . Condições iniciais de Triton:  $a_T = 14.325$ ,  $e_T = 0.000016$ ,  $\omega_T = 0^\circ$ ,  $\Omega_T = -90^\circ$ ,  $I_T = 157^\circ$ ,  $M_T = 0^\circ$ .

## I - Librações

Em geral ressonâncias orbitais estão associadas a libração de um determinado ângulo (ou uma combinação linear de ângulos) e neste caso chamaremos esse ângulo de ângulo ressonante.

Até aqui não comentamos nada sobre librações durante as ressonâncias. De fato, nas integrações realizadas até agora não foi possível encontrar tais ângulos de libração, tanto na comensurabilidade 2:1 quanto na 3:1.

Os possíveis candidatos estão presentes na função perturbadora e foram explicitados na seção **B** do capítulo **I**. Como se pode observar, tanto na ressonância 3:1 como na 2:1, não existe um cosseno dominante dentre os termos separados, isto é, todas as parcelas são de mesma ordem (ordem 3 na ressonância 2:1 e ordem 4 na 3:1). Portanto para que um cosseno prevaleça sobre os demais é necessário tomar condições iniciais que majorem seu coeficiente, e ainda garantir que este permaneça maior que os demais durante a evolução do sistema.

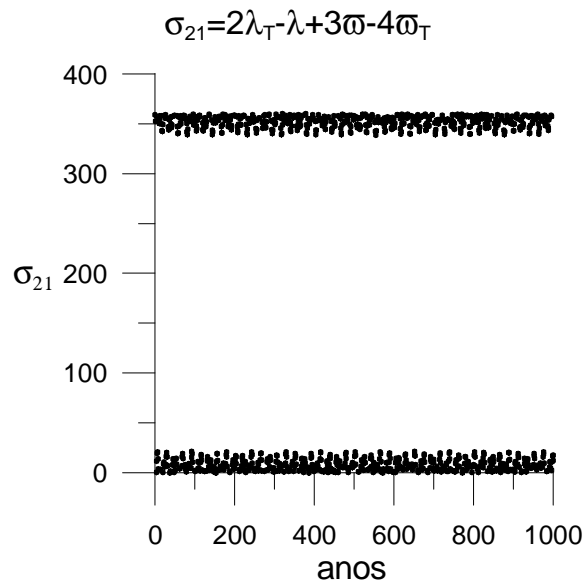
Observamos ainda que todos os cossenos são fatorados por uma excentricidade, seja ela do perturbador ou do perturbado. Em nossas integrações inicialmente as excentricidades são pequenas, a inclinação de Triton é alta e a inclinação de Proteus pode variar bastante, ou seja, este quadro não é propício para o surgimento de uma libração (pois os cossenos ressonantes têm pouca importância e geralmente nenhum se sobressai por muito tempo).

Contudo mostraremos aqui resultados, usando apenas integrações numéricas das equações exatas. Desde que a excentricidade de Proteus seja suficientemente grande, as librações podem ocorrer.

Nas figuras seguintes as massas do Planeta e do perturbador ainda são as de Netuno e de Triton respectivamente. Tomaremos apenas alguns semi-eixos fictícios mas manteremos as ressonâncias. Primeiros analisemos o caso em que o satélite é interno ao seu perturbador (Triton). Nenhuma outra perturbação, além de Triton, foi adicionada nestas integrações.

Observemos aqui uma libração na ressonância do tipo 2:1 retrógrada:



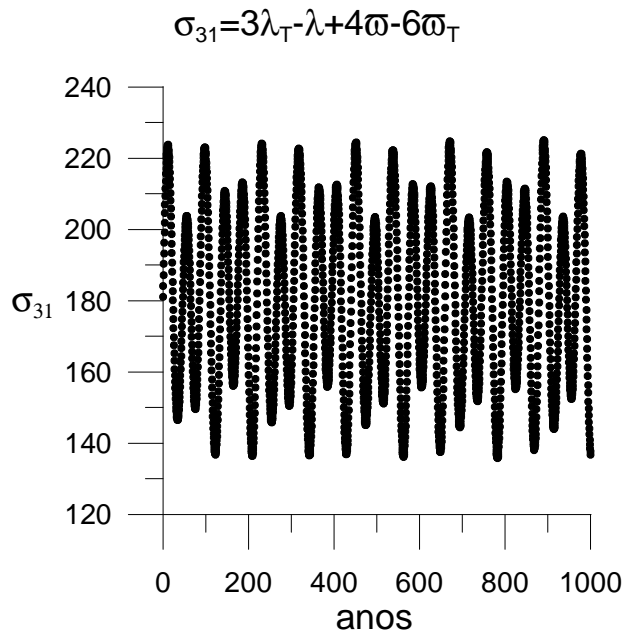


Condições iniciais de Proteus:  
 $a=9.502, e=0.2, I=1^\circ, \omega=0^\circ, \Omega=0^\circ, M=5^\circ$

Condições iniciais de Triton:  
 $a_T=15.09, e_T=0.00002, I_T=178.5^\circ, \omega_T=0^\circ, \Omega_T=0^\circ, M_T=182^\circ$

Figura 30: Aqui libração em torno do zero na ressonância 2:1 retrógrada. Foi necessário aumentar a excentricidade de Proteus e diminuir as inclinações para fazer o ângulo  $\sigma_{21} = 2\lambda_T - \lambda + 3\varpi - 4\varpi_T$  (veja os termos devido a ressonância 2:1 no capítulo I). Lembrar que aqui  $\varpi_T = \Omega_T - \omega_T$ .

E agora uma na ressonância do tipo 3:1 retrógrada:



Condições iniciais de Proteus:

$$a = 9.502, e = 0.2, i = 1.0, \quad \omega = 0.0, \Omega = 0.0, M = 5.0$$

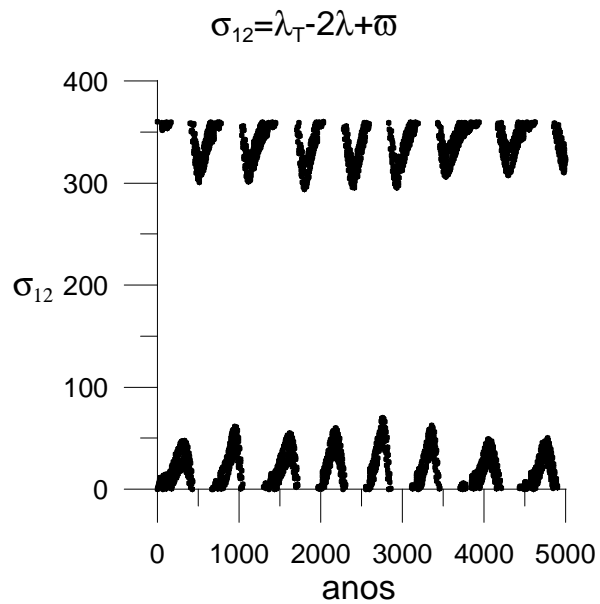
Condições iniciais de Triton:

$$a_T = 19.7662, e_T = 0.00002, i_T = 178.50, \quad \omega_T = 0.0, \Omega_T = 0.0, M_T = 182.0$$

Figura 31: Aqui libração em torno de  $180^\circ$  na ressonância 3:1 retrógrada. Foi necessário aumentar a excentricidade de Proteus e diminuir as inclinações para fazer o ângulo  $\sigma_{31} = 3\lambda_T - \lambda + 4\varpi - 6\varpi_T$  (veja os termos devido a ressonância 3:1 no capítulo I). Lembrar que aqui  $\varpi_T = \Omega_T - \omega_T$ .

Também é possível achar ressonâncias no caso externo, ou seja, quando o satélite tem semi-eixo maior do que o seu perturbador. Neste caso consideraremos o satélite retrógrado e o perturbador (Triton) direto. Deste modo podemos ainda olhar na função perturbadora para encontrar os candidatos a ângulo ressonante, tomando o cuidado de associar o índice  $j$  a Proteus e o índice  $i$  a Triton.

Segue a baixo as librações nas ressonâncias 1:2 e 1:3 retrógradas.



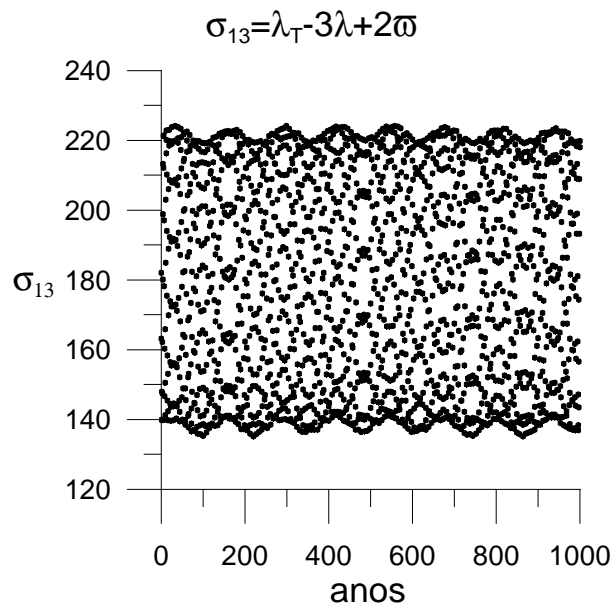
Condições iniciais de Proteus:

$$a=22.7395, e=0.5, l=179^\circ, \quad \omega=0^\circ, \quad \Omega=0^\circ, M=45^\circ$$

Condições iniciais de Triton:

$$a_T=14.325, e_T=1.E-2, l_T=1^\circ, \quad \omega_T=0^\circ, \quad \Omega_T=0^\circ, M_T=90^\circ$$

Figura 32: Aqui libração em torno do zero na ressonância 1:2 retrógrada. Foi necessário aumentar a excentricidade de Proteus e diminuir as inclinações para fazer o ângulo  $\sigma_{12} = \lambda_T - 2\lambda + \varpi$  (veja os termos devido a ressonância 2:1 no capítulo I). Lembrar que aqui  $\varpi = \Omega - \omega$ .



Condições iniciais de Proteus:

$$a = 29.79512659, e = 0.4, I = 179^\circ, \omega = 0^\circ, \Omega = 0^\circ, M = 0^\circ$$

Condições iniciais de Triton:

$$a_T = 14.325, e_T = 0.001, I_T = 1^\circ, \omega_T = 0^\circ, \Omega_T = 0^\circ, M_T = 182^\circ$$

Figura 33: Aqui libração em torno de  $180^\circ$  na ressonância 1:3 retrógrada. Foi necessário aumentar a excentricidade de Proteus e diminuir as inclinações para fazer o ângulo  $\sigma_{13} = \lambda_T - 3\lambda + 2\varpi$  (veja os termos devido a ressonância 3:1 no capítulo I). Lembrar que aqui  $\varpi = \Omega - \omega$ .

Ainda nas ressonâncias 1:2 e 1:3 é possível encontrar librações dos ângulos  $2\lambda - \lambda_T - 3\varpi - 2\Omega$  e  $3\lambda - \lambda_T - 4\varpi + 2\Omega$  respectivamente.

## Capítulo IV - Possíveis variações das obliquidades dos planetas

### A - Ressonância Spin-Nodo

Conforme dito nos capítulos anteriores a presença de um satélite de grande massa influi na dinâmica do equador do planeta. De acordo com o que se veicula atualmente na literatura, acredita-se que os planetas, principalmente os gigantes, ocuparam no passado posições bem diferentes daquelas que hoje contamos (Fernandez e Ip. 1984, 1996, Malhotra 1993, Gomes 1997, 1998, Hahn e Malhotra 1999, etc...).

Por exemplo acredita-se que no passado, o semi-eixo de Netuno tenha sido cerca de 10 a 7 UA menor e Urano 5 a 3 UA menor (Gomes 1998). A inusitada obliquidade atual de Urano é algo que sempre despertou curiosidade. Este capítulo não tem a pretensão de explicar a origem desta obliquidade, mas vamos aqui apontar algumas idéias de como a migração poderia também ter contribuído em parte nos valores das obliquidades atuais. O nosso modelo é ainda o mais simples possível, e no momento é mais qualitativo e acadêmico do que quantitativo.

Consideremos o sistema Urano, Netuno e Sol. Dado um sistema de eixos fixos no Sol, vamos escrever a função perturbadora secular deste problema. Como dissemos, vamos tomar o modelo mais simples possível considerando os planetas em órbitas circulares. A função perturbadora de ordem 4 (dada no apêndice C) que perturba Urano é:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_U = & \frac{GM_N}{a_N} \left\{ \frac{11^{(0)}}{4} (\sin(I_U)^2 + \sin(I_N)^2) - \frac{11^{(0)}}{2} \sin(I_U) \sin(I_N) \cos(\Omega_U - \Omega_N) + \right. \\ & \frac{11^{(0)} + 17^{(0)}}{16} (\sin(I_U)^4 + \sin(I_N)^4) + \left[ -\frac{11^{(0)}}{8} + \frac{17^{(0)}}{4} \right] \sin(I_U)^2 \sin(I_N)^2 - \\ & \frac{17^{(0)}}{4} \sin(I_U)^3 \sin(I_N) \cos(\Omega_U - \Omega_N) - \frac{17^{(0)}}{4} \sin(I_U) \sin(I_N)^3 \cos(\Omega_U - \Omega_N) + \\ & \left. \frac{17^{(0)}}{8} \sin(I_U)^2 \sin(I_N)^2 \cos(2\Omega_U - 2\Omega_N) \right\} \end{aligned} \quad (42)$$

A que atua em Netuno é similar, bastando tomar agora:

$$\mathfrak{R}_N = \frac{\mathfrak{R}_U M_U}{M_N}$$

Também temos

$$\begin{aligned} 11^{(0)} &= -\frac{\alpha}{2} b_{3/2}^{(1)} \\ 17^{(0)} &= \frac{3\alpha^2}{8} [b_{5/2}^{(2)} + 2b_{5/2}^{(0)}] \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{a_U}{a_N}$$

Com isso escrevemos as equações de Lagrange que dão as variações de Urano e Netuno.

Consideremos agora um referencial fixo em Urano. Escrevemos então as equações da precessão do equador onde o perturbador é o sol (o efeito de Netuno é desprezível)

$$\dot{\tilde{I}} = \frac{F_0}{4a_\odot^3} \left[ -\sin(\tilde{I}) \sin(I_\odot) \sin(2\tilde{\Omega} - 2\Omega_\odot) - \cos(\tilde{I}) \sin(2I_\odot) \sin(\tilde{\Omega} - \Omega_\odot) \right] \quad (43)$$

$$\dot{\tilde{\Omega}} = \frac{F_0}{4a_\odot^3} \left[ (3 \cos(I_\odot)^2 - 1) \cos(\tilde{I}) - \frac{2 \sin(I_\odot) \cos(I_\odot) \cos(2\tilde{I}) \cos(\tilde{\Omega} - \Omega_\odot)}{\sin(\tilde{I})} - \sin(I_\odot)^2 \cos(\tilde{I}) \cos(2\tilde{\Omega} - 2\Omega_\odot) \right] \quad (44)$$

$$F_0 = -\frac{3Gm_\odot M_U R_U^2 J_2}{C w_U}$$

Observe que as coordenadas  $\Omega_\odot, I_\odot$  são as de Urano, as quais são dadas pelas equações da Lagrange usando  $\mathfrak{R}_U$  e  $\mathfrak{R}_N$  (Brouwer e Clemence, 1961). Quando  $\tilde{I}$  for muito pequeno vamos preferir tomar as equações acima em variáveis não singulares conforme dadas no apêndice E.

Temos em cada instante  $\tilde{\Omega}, \tilde{I}, \Omega_U, I_U$  ( $\Omega_N, I_N$  não interessa) segundo um referencial arbitrário fixado no planeta Urano. Os versores deste sistema inercial são  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Observemos a figura:

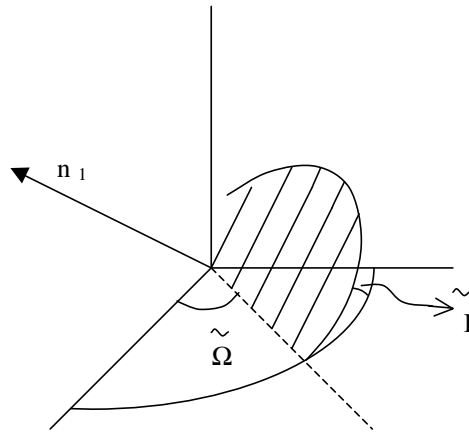


Figura 34: Versores

$\vec{n}_1$  é o versor do momento angular de rotação perpendicular ao equador de Urano. Os ângulos  $\tilde{\Omega}$  e  $\tilde{I}$  são os ângulos de Euler que posicionam este equador em relação ao sistema de eixos arbitrário.

É evidente do gráfico acima que  $\vec{n}_1$  nada mais é do que a componente z do sistema  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  após aplicar as rotações de  $\tilde{\Omega}$  e  $\tilde{I}$ , ou seja:

$$\vec{n}_1 = \sin(\tilde{\Omega}) \sin(\tilde{I})\vec{i} - \cos(\tilde{\Omega}) \sin(\tilde{I})\vec{j} + \cos(\tilde{I})\vec{k}$$

Consideremos agora o vetor momento angular do movimento orbital Urano-Sol. Seja  $\vec{t}_1$  o seu versor (o diagrama é idêntico à figura 34 onde trocamos  $\tilde{\Omega}$  por  $\Omega_\odot$  e  $\tilde{I}$  por  $I_\odot$ ).

Raciocínio idêntico permite escrever o versor  $\vec{t}_1$ , referido ao plano inercial.

$$\vec{t}_1 = \sin(\Omega_\odot) \sin(I_\odot)\vec{i} - \cos(\Omega_\odot) \sin(I_\odot)\vec{j} + \cos(I_\odot)\vec{k}$$

Por definição, a obliquidade é o ângulo entre  $\vec{n}_1$  e  $\vec{t}_1$ , isto é:

$$\cos(\varepsilon) = \vec{n}_1 \cdot \vec{t}_1 = \sin(\tilde{I}) \sin(I_\odot) \cos(\Omega_\odot - \tilde{\Omega}) + \cos(\tilde{I}) \cos(I_\odot)$$

Com isso conseguimos avaliar a evolução de  $\varepsilon$  em relação ao tempo  $t$ .

Observamos ainda que se  $I_\odot \approx 0$  então  $\varepsilon \approx \tilde{I}$ .

Quando trabalhamos com teoria secular dos planetas, podemos observar que em primeira aproximação, em geral, o movimento dos nodos dos planetas é praticamente linear. Por exemplo, se tomarmos as equações de Lagrange, o movimento de  $\Omega_U$  de Urano no caso circular é dado por:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sin(I)} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial I}$$

onde em  $\mathfrak{R}$  tomaremos só o primeiro termo de  $\mathfrak{R}_U$  (equação 42):

$$\frac{GM_N}{a_N} \frac{11^{(0)}}{4} \sin(I_U)^2$$

Nestas condições, se  $I_U \approx 0$ , temos:

$$\dot{\Omega}_U \approx -\frac{GM_N}{4n_U a_U^2 a_N} \alpha b_{3/2}^{(1)}$$

Esta aproximação é útil para visualizar o comportamento de  $\tilde{I}, \tilde{\omega}$  nas equações da precessão. Seja:

$$\eta = -\frac{GM_N}{4n_U a_U^2 a_N} \alpha b_{3/2}^{(1)}$$

então  $\Omega_U \approx \eta(t - t_0)$

No apêndice E apresentamos as equações da precessão em forma Hamiltoniana. Vamos agora estender o espaço de fase e como  $\tilde{\Omega}$  e  $\Omega_U$  aparecem sempre na forma  $\tilde{\Omega} - \Omega_U$ , reduzimos o problema para outro de um só grau de liberdade, isto é:

$$H = C_0 \left\{ \frac{C_1}{2} \alpha_1^2 - C_2 \alpha_1 \sqrt{1 - \alpha_1^2} \cos(\theta_1) - \frac{C_3}{2} (1 - \alpha_1^2) \cos(2\theta_1) \right\} - \eta \alpha_1$$

onde

$$\alpha_1 = \cos(\tilde{I})$$

$$\theta_1 = \tilde{\Omega} - \Omega_U$$

$$C_0 = \frac{3Gm_\odot M_U R_U^2 J_2}{4C w_U a_\odot^3}$$

$$C_1 = 1 - 3 \cos(I_\odot)^2$$

$$C_2 = \sin(2I_\odot)$$

$$C_3 = \sin(I_\odot)^2$$

Um simples estudo mostra que para  $C_2 > 0$  o ponto  $\theta_1 = 0$  é um centro (equilíbrio estável).

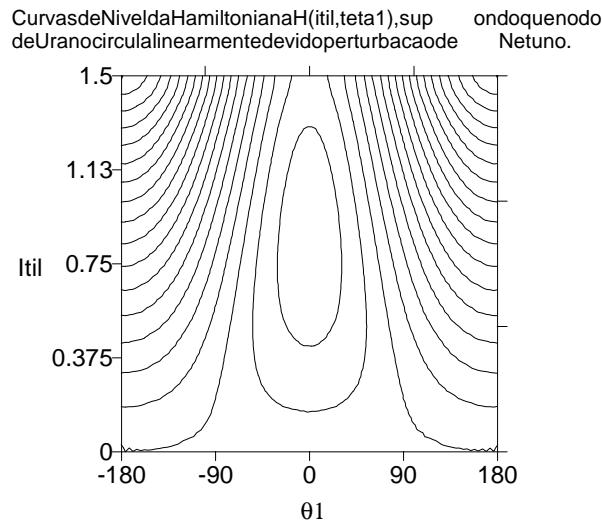


Figura 35: Equilíbrio estável em  $\theta_1 = 0$ . Portanto, condições iniciais na vizinhança deste centro, manterão  $\varepsilon$  pequeno. Aqui: Massa de Urano e de Netuno foram tomadas 12 vezes menor. Os semi-eixos tomados foram  $a_U = 14.820862$  UA,  $a_N = 23.157598$  UA. Período de rotação de Urano = 4 horas.



Voltando em (43) e (44), notamos que para  $I_\odot$  pequeno, o movimento é predominantemente dado por:

$$\dot{\tilde{\Omega}} \approx C_0 C_1 \cos(\tilde{I})$$

$$\dot{\tilde{I}} \approx C_0 C_2 \cos(\tilde{I}) \sin(\tilde{\Omega} - \Omega_\odot)$$

Conforme apontado por Ward (1974), Kurth (1959), Laskar (1993), Atobe et al (2002), etc, em circunstâncias normais, a dinâmica acima é simples, isto é,  $\tilde{\Omega}$  é quase linear no tempo e  $\tilde{I}$  sofre pequenas oscilações periódicas de amplitude  $C_0 C_2$ .

Suponhamos porém  $\dot{\tilde{\Omega}} \approx \eta$ , ou seja, uma ressonância entre o nodo e  $\tilde{\Omega}$ . Neste caso é prevista uma variação de longo período e  $\tilde{I}$  sofre grandes variações cuja amplitude pode ser muito maior do que  $C_0 C_2$ . Neste caso  $\varepsilon$  também pode sofrer grandes variações. Esta é a situação que vamos averiguar.

Durante a migração planetária, os semi-eixos de Urano e Netuno variaram bastante. Provavelmente isto ocorreu também com suas massas e também com as velocidades angulares de rotação (spin). A variação da rotação está por sua vez ligada ao coeficiente  $J_2$  de achatamento do planeta.

Na verdade, muito pouco pode-se afirmar concretamente sobre todos estes valores envolvidos. Assim o objetivo neste capítulo é mais voltado a explorar de maneira qualitativa possíveis situações que poderiam ter afetado a obliquidade dos planetas.

## B - Possíveis variações de $\varepsilon$

O que faremos nesta seção é apenas integrar as equações médias da precessão e da teoria secular dos planetas, supondo o modelo mais simples possível para  $\mathfrak{R}_U$  e  $\mathfrak{R}_N$ .

Estima-se que a migração planetária tenha ocorrido ao longo de aproximadamente 30 milhões de anos. No nosso modelo simplificado não faremos a variação dos semi-eixos dos planetas, isto é, não investigaremos possíveis casos de evolução com captura. Conforme já mostramos no capítulo anterior, a evolução dos semi-eixos causando captura, poderia em alguns casos acelerar a variação do momento associado a variável ressonante. Portanto podemos afirmar que as várias variações de  $\varepsilon$  aqui obtidas com semi-eixos fixos, poderiam ser realizadas em tempo menor, caso tomássemos um modelo com efetiva migração dos semi-eixos.

As condições iniciais serão sempre estas:

$$\tilde{I} = 0.5^\circ$$

$$\tilde{\Omega} = 180^\circ$$

$$I_U = 1^\circ$$

$$I_N = 2^\circ$$

$$\Omega_U = 0^\circ$$

$$\Omega_N = 180^\circ$$

$$C = \text{momento principal de inércia} = 0.21 M_U R_U^2$$

$$R_U = 25559 \text{ km}$$

Como dissemos antes, evitamos tomar  $\tilde{\Omega} - \Omega_U = 0$  já que este é um ponto de equilíbrio estável e se eventualmente este ângulo permanecer em libração, então a ressonância terá um efeito estabilizador, isto é,  $\tilde{I}$  permanecerá quase constante e pequeno.

As condições iniciais para os semi-eixos foram sempre tomadas nos intervalos previstos pela migração planetária sendo que as massas e a velocidade angular foram ajustadas de forma a satisfazer a ressonância  $\dot{\tilde{\Omega}} - \dot{\Omega}_U$ . Em primeira aproximação esta relação significa:

$$\frac{3GM_\odot M_U R_U^2 J_2}{2C a_\odot^3 w_U} \cos(\tilde{I}) \approx \frac{GM_N}{4n_U a_U^2 a_N} \alpha b_{3/2}^{(1)} \cos(I_U)$$

O valor de C é bastante discutível (Borderies 1989, Chyba et al., Jacobson, etc...). Mantivemos sempre constante (0.21).

A rotação e o achatamento estão acoplados conforme a relação:

$$J_2 = J_{2_0} \left( \frac{w}{w_0} \right)^2$$

(Touma e Wisdom 1998)

onde  $w_0$  e  $J_{2_0}$  são respectivamente a velocidade angular de rotação e o coeficiente de achatamento em  $t = t_0$

Uma relação mais elaborada pode ser usada como em Callegari N. e Yokoyama 2001, porém dadas as incertezas sobre C, a fórmula acima é suficiente.

Inicialmente vamos tomar o sistema Urano-Netuno-Sol. A figura 36 mostra uma extraordinária variação de  $\varepsilon$ , porém para um tempo muito acima de 30 milhões de anos. Note que os ângulos  $\tilde{\Omega}$  e  $\Omega$  estão circulando rapidamente, porém a diferença  $\tilde{\Omega} - \Omega$  está bastante lenta, em ressonância.

As massas foram tomadas  $M_U = 1/228690$  massas solares (um décimo da massa atual),  $M_N = 1/193140$  massas solares (um décimo da massa atual). E os semi-eixos foram  $a_U = 16.547754$  UA,  $a_N = 27.579590$  UA. O período de rotação ( $Tr$ ) foi de 3.08 horas.

Observemos agora a figura 37. Neste caso a variação é bem menor ( $\approx 12^\circ$ ) porém este é atingido em  $t \approx 20 \times 10^6$  anos usando  $Tr = 4$  horas,  $M_U = 1/228690$  massas solares,  $M_N = 1/193140$  massas solares,  $a_U = 14.820862$ ,  $a_N = 23.157598$ .

Note que a ressonância não é tão exata como a anterior porém o período de circulação é ainda bem maior do que os períodos de  $\tilde{\Omega}$  e  $\Omega_U$ ; isto é suficiente para causar o aumento de  $\varepsilon$ . Para  $Tr = 3.01$ , e mantendo os dados anteriores, a obliquidade crescerá até  $\approx 27^\circ$ .

Na figura 38 exibimos um caso onde a ressonância é bastante forte porém como escolhemos  $\tilde{\Omega} = \Omega_U = 180^\circ$  então esta diferença permanece em libração em torno de  $\tilde{\Omega} - \Omega_U = 0$ , de forma que  $\tilde{I}$  varia praticamente muito pouco, como era previsto pelas equações da precessão (ponto de equilíbrio). Aqui tomamos  $Tr = 2.5$ ,  $a_U = 15.4253120422363$ ,  $a_N = 25.7088527679443$ ,  $M_U = 1/274428$  massas solares (corresponde a 1/12 da massa atual),  $M_N = 1/231768$  massas solares (corresponde a 1/12 da massa atual).

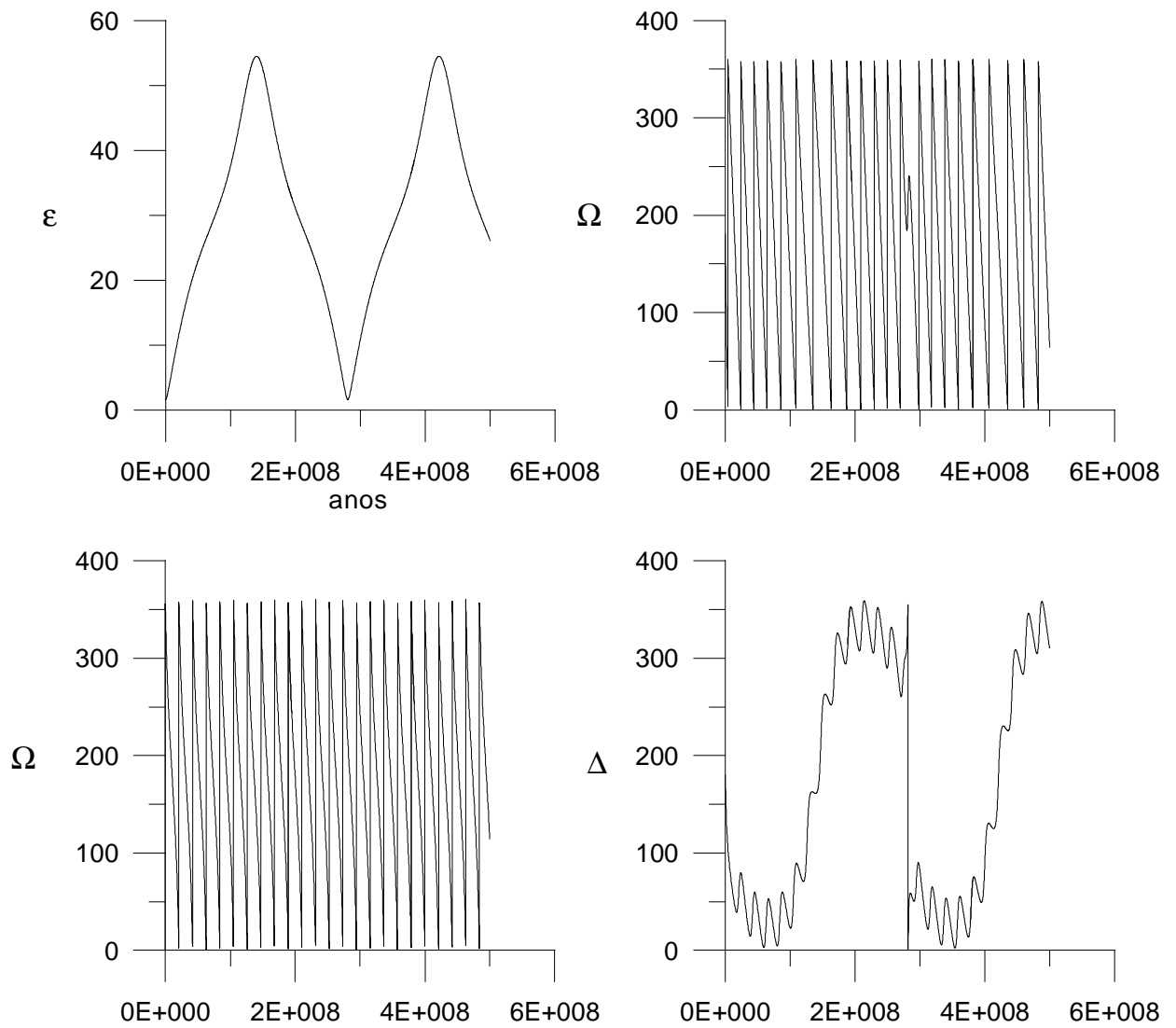


Figura 36: Resultados fictícios do sistema Sol-Netuno-Urano. São mostrados a obliquidade de Urano e  $\tilde{\Omega}$  nos dois primeiros gráficos. Logo a seguir temos o nodo de Urano  $\Omega_U$  e  $\Delta = \tilde{\Omega} - \Omega_U$

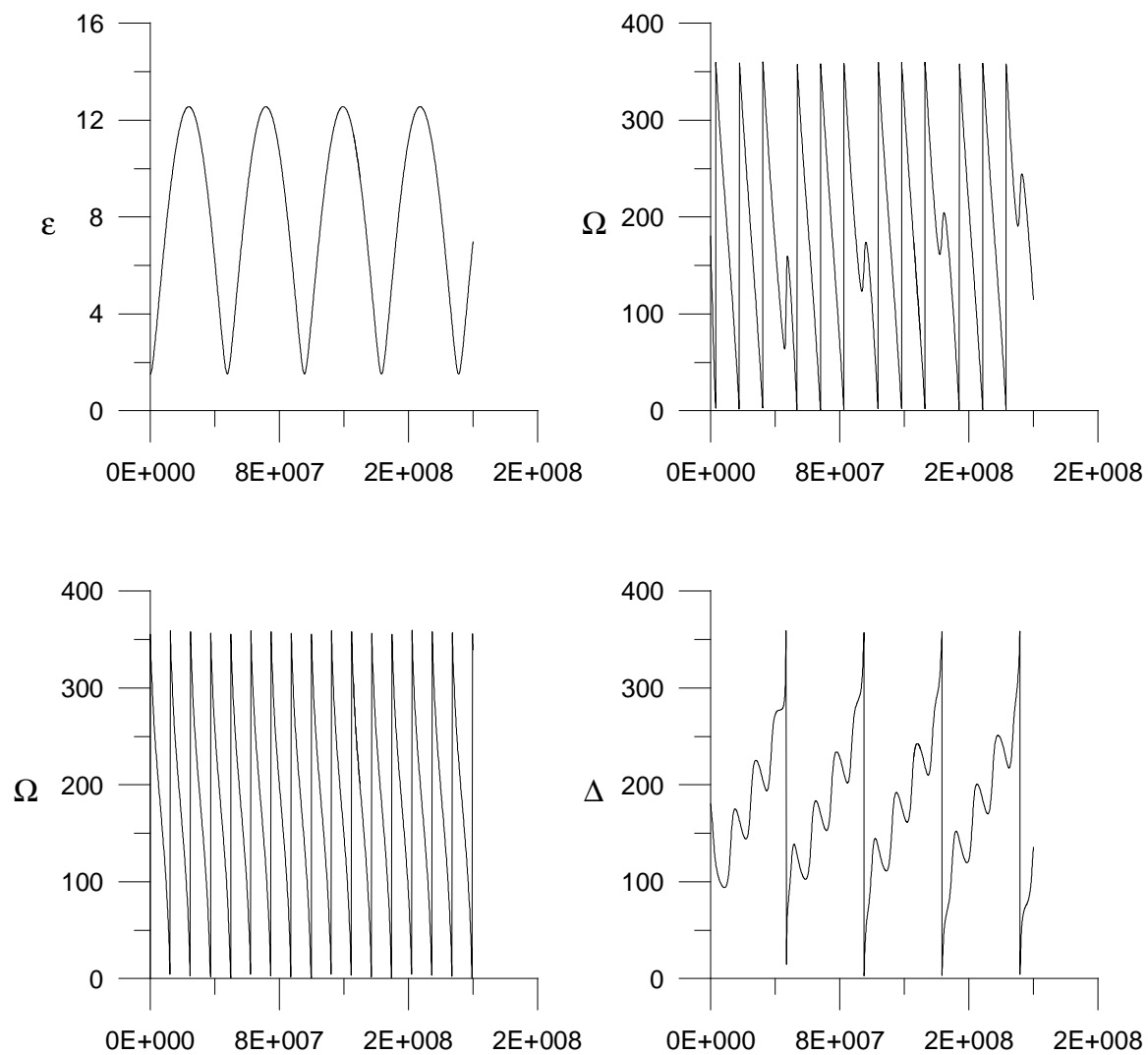


Figura 37: Resultados fictícios do sistema Sol-Netuno-Urano. São mostrados a obliquidade de Urano e  $\tilde{\Omega}$  nos dois primeiros gráficos. Logo a seguir temos o nodo de Urano  $\Omega_U$  e  $\Delta = \tilde{\Omega} - \Omega_U$

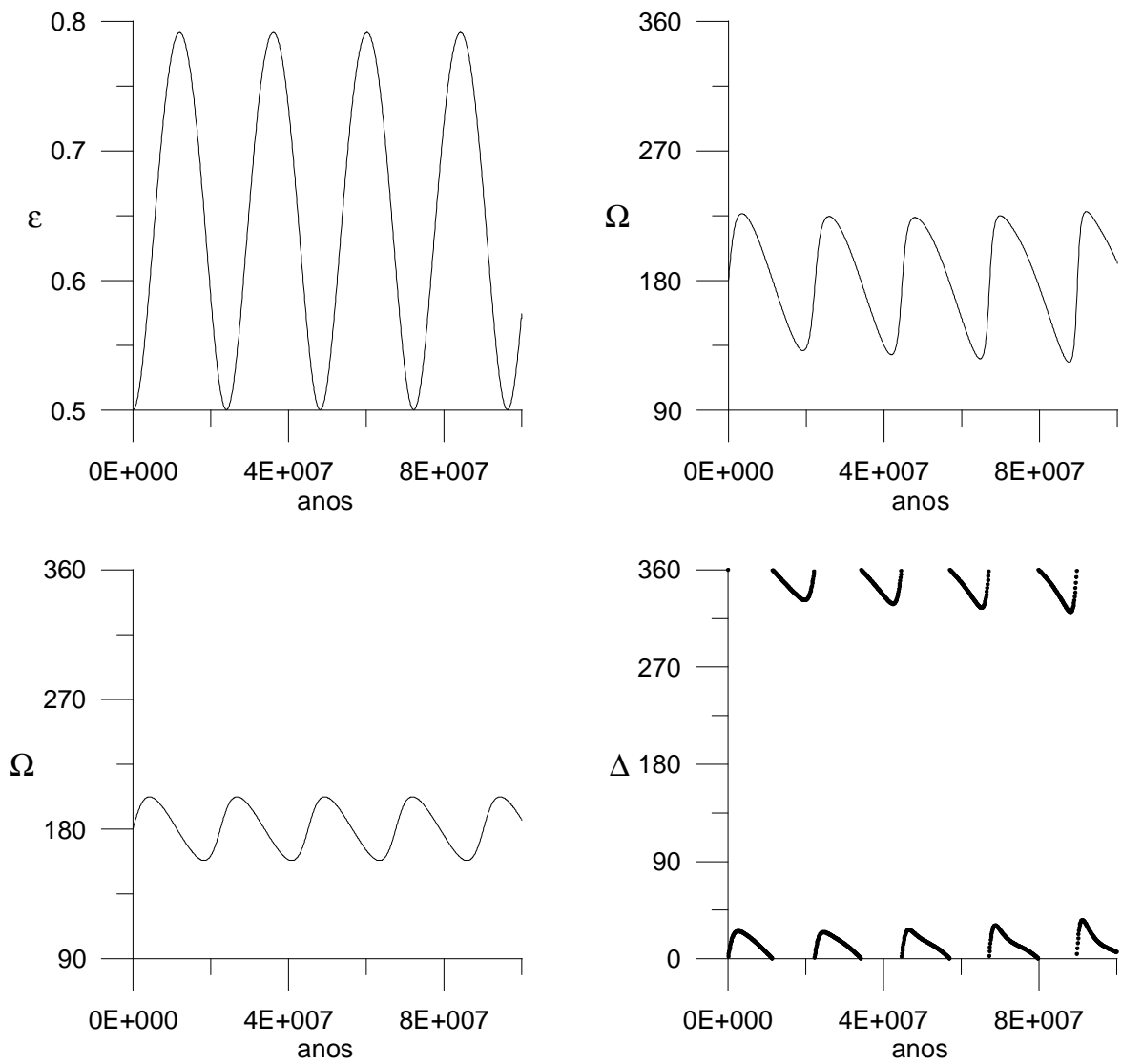


Figura 38: Resultados do sistema Sol-Netuno-Urano. São mostrados a obliquidade de Urano e  $\tilde{\Omega}$  nos dois primeiros gráficos. Logo a seguir temos o nodo de Urano  $\Omega_U$  e  $\Delta = \tilde{\Omega} - \Omega_U$

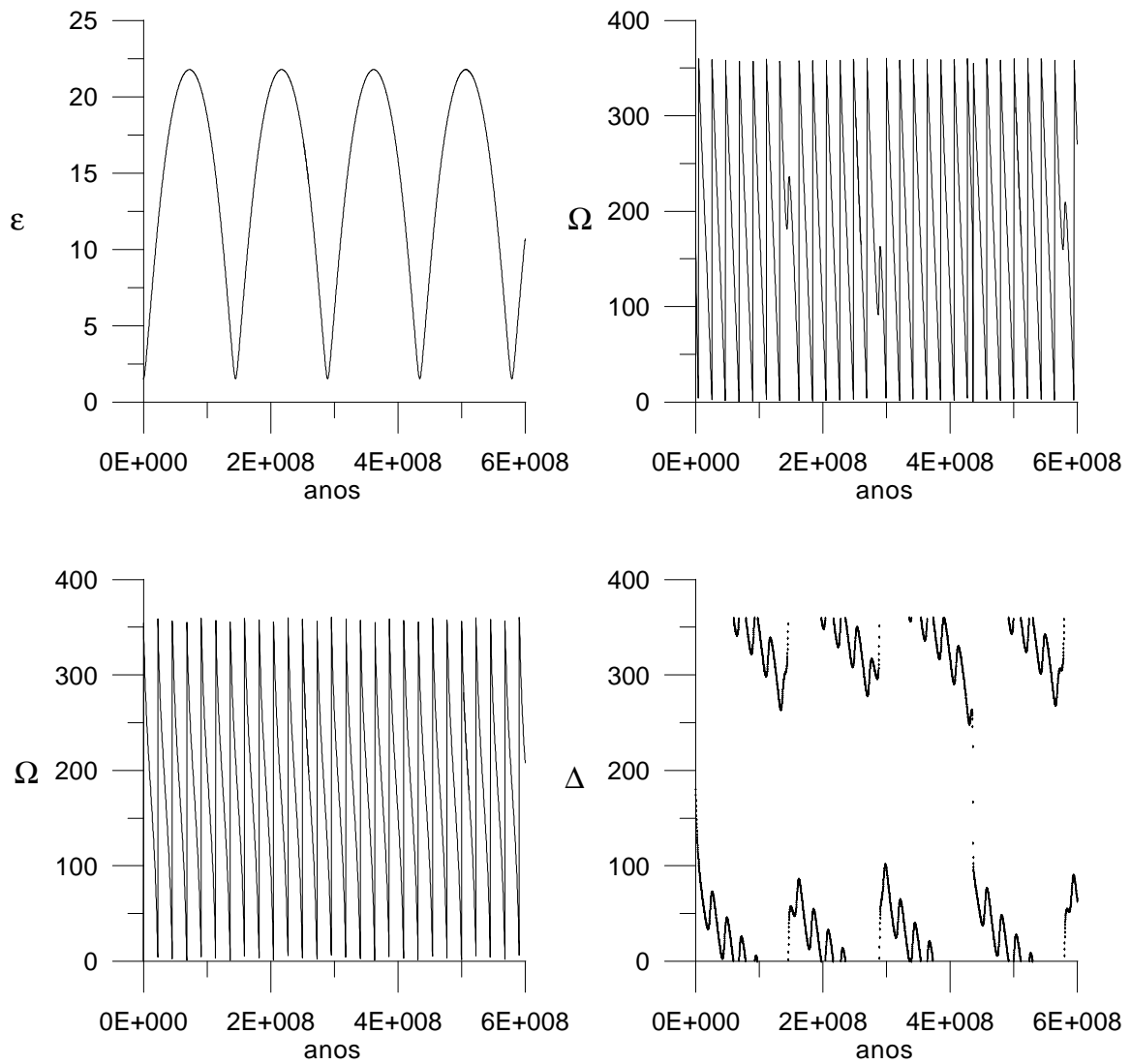


Figura 39: Resultados fictícios do sistema Sol-Netuno-Urano. São mostrados a obliquidade de Urano e  $\tilde{\Omega}$  nos dois primeiros gráficos. Logo a seguir temos o nodo de Urano  $\Omega_U$  e  $\Delta = \tilde{\Omega} - \Omega_U$

Na figura 39 temos um caso similar à figura 29 porém agora  $\tilde{\Omega} - \Omega_U$  transita entre circulação e libração. Nota-se que  $\varepsilon$  atinge valores até superiores a  $20^\circ$ , porém para  $t \approx 100 \times 10^6$  anos. As condições iniciais são as mesmas exceto  $Tr$  que agora é 4 horas.

Vamos agora considerar ao invés de Netuno, Júpiter como o perturbador de Urano.

Na figura 40 usamos massas  $M_J = 1/31420.65$  massas solares (equivalente a  $1/30$  da massa atual),  $M_U = 1/274428$  ( $1/12$  da massa atual),  $Tr = 3$  horas,  $a_U = 15.425312$ ,  $a_J = 5.4$ . Note que o ângulo  $\tilde{\Omega} - \Omega_U$  é bastante lento (aparentemente em libração) e a obliquidade adquire valores muito altos.

Outro caso com grande variação de  $\varepsilon$  é dado na figura 41, onde  $M_J = 1/31420.65$  massas solares (equivalente a  $1/30$  da massa atual),  $M_U = 1/457380$  massas solares ( $1/20$  da massa atual),  $Tr = 3$ ,  $a_U = 15.425312$ ,  $a_J = 5.4$ .

Note que durante toda a integração ( $100 \times 10^6$  anos), a diferença  $\tilde{\Omega} - \Omega_U$  ainda não efetuou uma variação completa, o que justifica o alto valor atingido por  $\varepsilon$ .

Na figura 42 temos o caso similar a figura 30. Aqui  $a_U = 15.425312$ ,  $a_J = 5.4$ ,  $Tr = 2$ ,  $M_J = 1/30$  do atual,  $M_U = 1/12$  do atual.



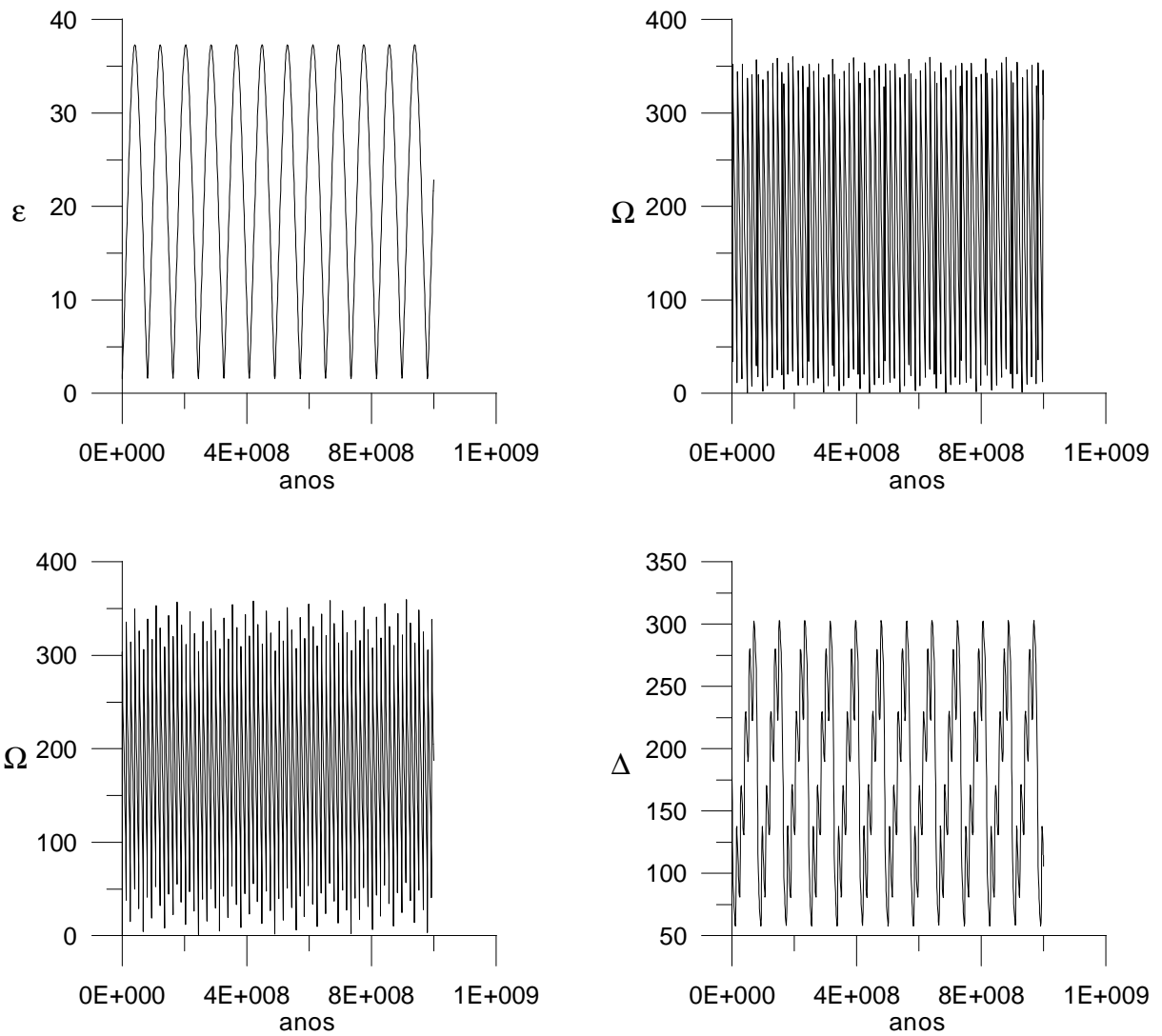


Figura 40: Resultados do sistema Sol-Jupiter-Urano. São mostrados a obliquidade de Urano e  $\tilde{\Omega}$  nos dois primeiros gráficos. Logo a seguir temos o nodo de Urano  $\Omega_J$  e  $\Delta = \tilde{\Omega} - \Omega_J$ .

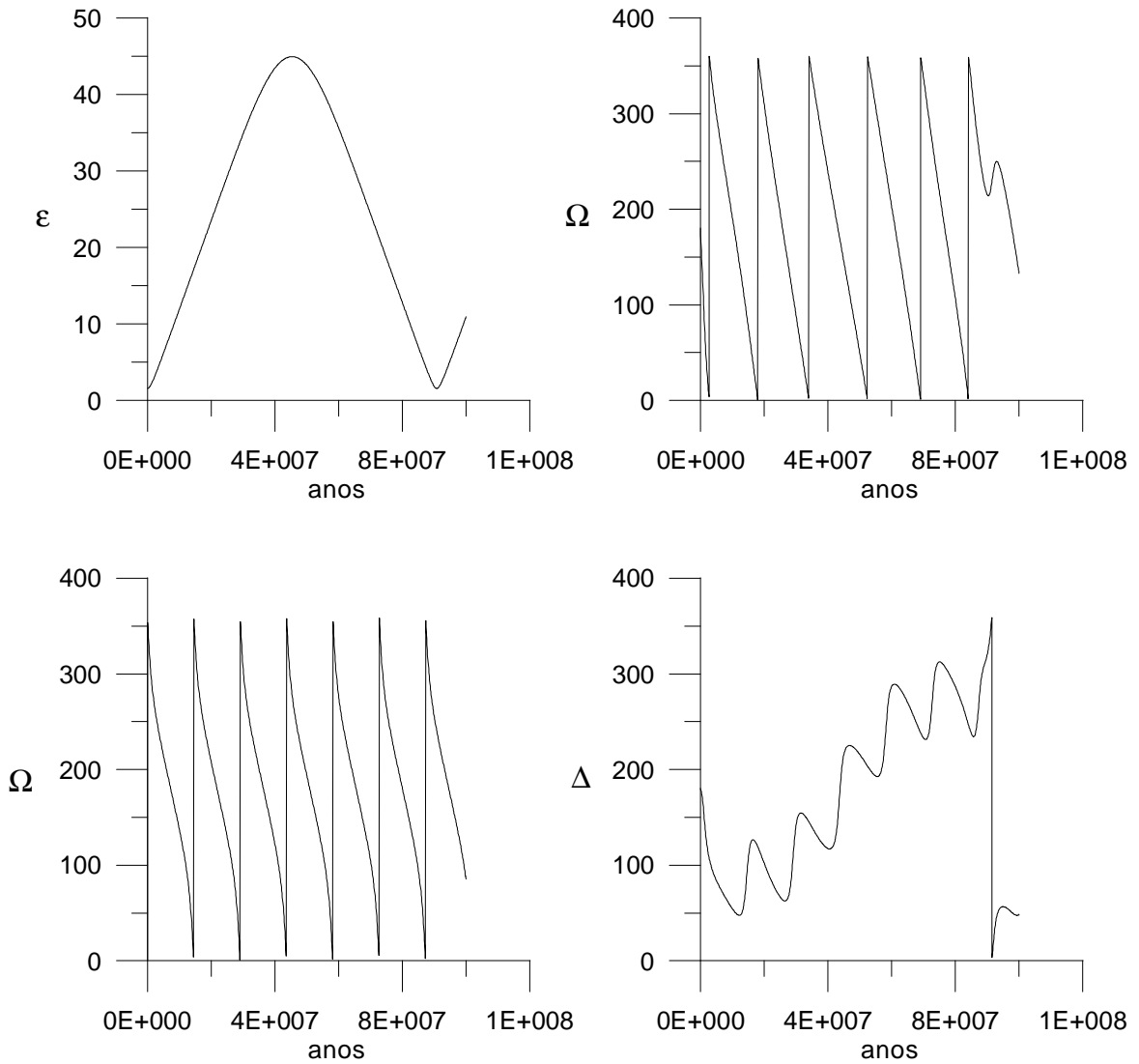


Figura 41: Resultados do sistema Sol-Jupiter-Urano. São mostrados a obliquidade de Urano e  $\tilde{\Omega}$  nos dois primeiros gráficos. Logo a seguir temos o nodo de Urano  $\Omega_J$  e  $\Delta = \tilde{\Omega} - \Omega_J$ .

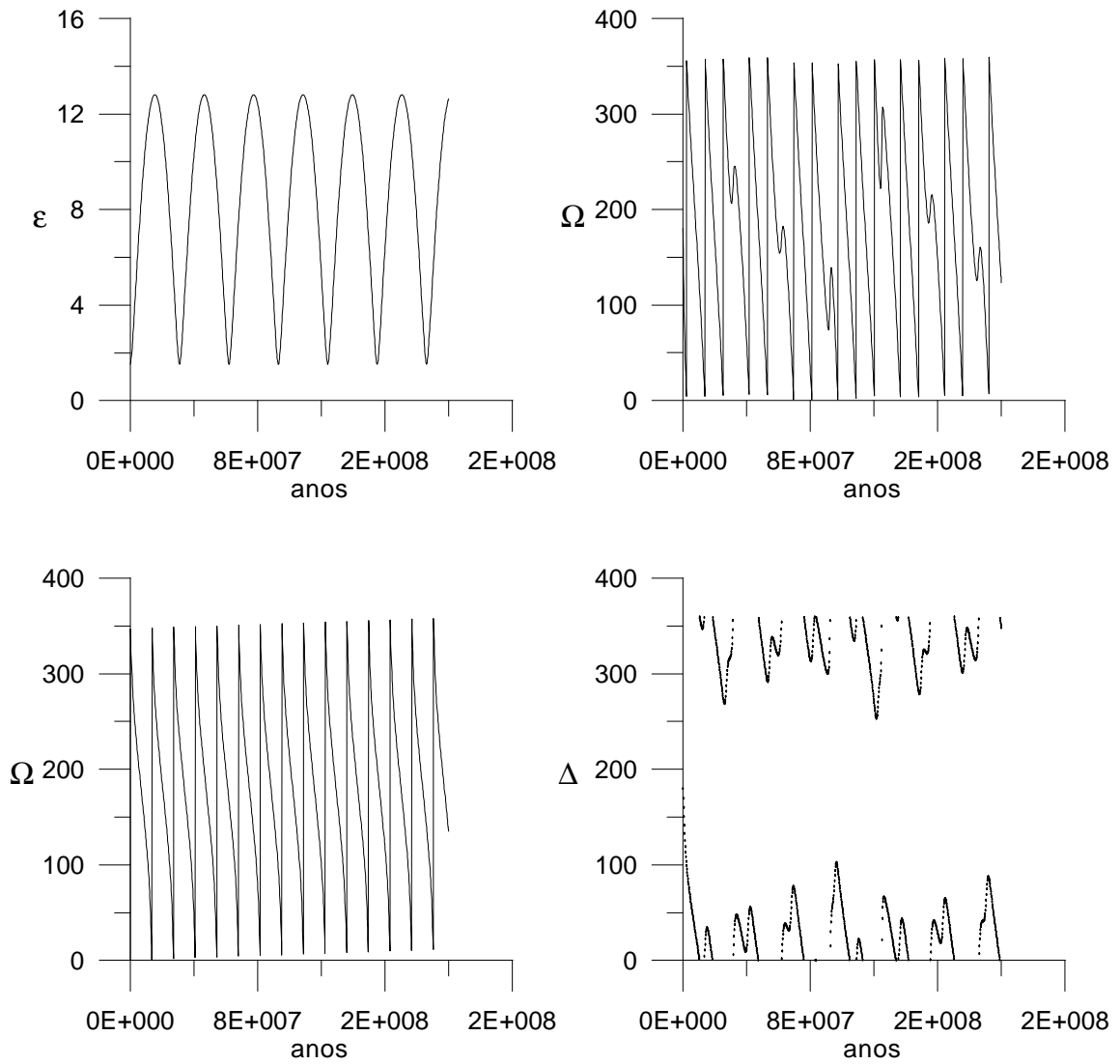


Figura 42: Resultados do sistema Sol-Jupiter-Urano. São mostrados a obliquidade de Urano e  $\tilde{\Omega}$  nos dois primeiros gráficos. Logo a seguir temos o nodo de Urano  $\Omega_J$  e  $\Delta = \tilde{\Omega} - \Omega_J$ .

## Conclusão

Neste trabalho iniciamos o estudo da dinâmica futura de satélites internos de Netuno. A aproximação de Triton fará com que surjam ressonâncias orbitais retrógradas entre os movimentos médios de Proteus (o mais externo daqueles descobertos pela Voyager). As experiências mostram que de fato tais ressonâncias orbitais são muito fracas, conforme se evidencia pelo desenvolvimento da função perturbadora. No entanto, quando se inclui o efeito do achatamento as excentricidades e inclinações sofrem grandes perturbações a ponto de causar a ejeção de Proteus. Este poderá cruzar as órbitas dos satélites mais internos. É mostrado também que o efeito da ressonância 2:1 é muito mais forte e rápido do que aquele devido à 3:1. A contribuição da precessão do equador de Netuno é também incluído porém, o seu real papel no processo de influenciar (ou acelerar) o crescimento da excentricidade de Proteus nas ressonâncias, não é bem definido uma vez que a princípio, a evolução temporal do sistema aparenta ser bastante sensível quando em situações de ressonância.

A passagem pelas ressonâncias foi simulada trocando a força dissipativa da maré pela do arrasto. Esta força afeta apenas o semi-eixo e não a inclinação. Não se observou nenhum caso de captura.

Muito mais experimentos numéricos são ainda necessários para evidenciar melhor o efeito das ressonâncias. Dentre elas, será necessário simular a passagem não só por outras comensurabilidades, como também com diferentes velocidades. É preciso lembrar que a velocidade de decaimento do semi-eixo devido a maré é maior quanto menor o semi-eixo. Assim se a passagem for muito rápida por alguma ressonância, o sistema pode não acusar os efeitos característicos devidos a esta ressonância.

Por fim, um estudo bastante simplificado é proposto, objetivando ilustrar uma hipotética variação da obliquidade dos planetas como decorrência da migração planetária.

## Bibliografia

- Atobe et al, 2002. Proceedings of the 34th Symposium on celest. mech. (E. Kokubo, T. Ito, H. Arakida - Editores) Kanagawa, Japão.
- Banfield, D., Murray, N., 1992. A dynamical history of the Neptunian satellites. *Icarus* **99**, 390-401.
- Borderies, N., 1989. Properties of Possible Rings around Neptune. *Icarus* **77**, 135-147.
- Brouwer, D., Clemence, G., 1961. *Methods of celestial mechanics*. Academic Press, New York.
- Chyba, C. F., Jankowski, D. G., Nicholson, P. D., 1989. Tidal evolution in the Neptune-Triton system. *Astr. Astrophys.* **219**, L23-L26.
- Counselman III, C. C., 1973. Outcomes of tides evolution. *Astrophysical Journal* **180**, 307-314.
- Dobrovolskis, A. R., 1980. Where are the rings of Neptune? *Icarus* **43**, 222-226
- Dwight, H. B., 1961. *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*, 4th edition, Macmillan Publishing Co, INC, N. York.
- Farinella, P. et al, 1980. Some Remarks on the Capture of Triton and the Origin of Pluto. *Icarus* **44**, 810-812.
- Fernandez, J. A., IP, W. H., 1984. Some dynamical aspects of the accretion of Uranus and Neptune: the exchange of orbital angular momentum with planetesimals. *Icarus* **58**, 109-120.
- Ferraz-Mello, S., 1979. *Dynamics of the galilean satellites*. Universidade de São Paulo-SP.
- Goldreich, P., 1989. Neptune's story. *Science* **245**, 500-504.
- Gomes, R. S., 1997. Dynamical effects of planetary migration on the primordial asteroid belt. *Astron. J.* **114**, 396-401
- Harrington, R. S., van Flandern, T. C., 1979, The satellites of Neptune and the origin of Pluto. *Icarus* **39**, 131-136.
- Jacobson, R. A., 1990. *Astronomy and Astrophys.* **231**, 241-250.
- Jacobson, R. A., 1991. *Astronomy and Astrophys.* **247**, 565-575.

Kurth, R., 1959. Introduction to the mechanics of the solar system, Pergamon Press, London.

Laskar, J. et al, 1993. Stabilization of the earth's obliquity by the moon. *Nature* **361**, 615-617

Laskar, J. et al, 1993. Orbital, precessional, and insolation quantities for the Earth from -20 Myr to +10 Myr. *Astron. and Astrophys.* **270**, 522-533.

Lazzaro, D., 1987. Tese de doutorado IAGUSP.

Le Verrier, U.J., 1855. *Ann. Obs. Paris* **1**, 258.

Lyttleton, R. A., 1936. On the possible results of an encounter of Pluto with the Neptunian system. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **97**, 108-115.

McCord, T. B., 1966. Dynamical evolution of the Neptunian system. *Astronomical Journal* **71**, 585-590.

McKinnon, W. B., 1984. On the origin of Triton and Pluto. *Nature* **311**, 355-358.

McKinnon, W. B., Leith, A. C., 1995. Gas drag and the orbital evolution of a captured Triton. *Icarus* **118**, 392-413.

Malhotra, R., 1993. The origin of Pluto's peculiar orbit. *Nature* **365**, 819-821.

Mignard, F., 1979. The evolution of the lunar orbit revisited I. *Moon and the Planets* **20**, 301-315.

Mignard, F., 1980. The evolution of the lunar orbit revisited II. *Moon and the Planets* **23**, 185-201.

Mignard, F., 1981. The lunar orbit revisited III. *Moon and the Planets* **24**, 189-207.

Mignard, F., 1981. Evolution of the Martian satellites. *Royal Astronomical Society, Monthly Notices* **194**, 365-379.

Owen, W. M. et al, 1991. Orbits of the six new satellites of Neptune. *Astronomical Journal* **101**, 1511-1515.

Symon, Keith R., 1980. Mecânica Editora LCT, RJ.

Tisserand, F., 1889. *Traité de mécanique Céleste*, vol. II. Gauthier Villars, Paris.

Touma, J., Wisdom, J., 1998. Resonance in the early evolution of the Earth-Moon system. *The Astronomical Journal* **115**, 1653-1663

Ward, W. R., 1974. *J. Geophys. Research* **79**, 3375-3386.

Ward, W. R., 1979. *J. Geophys. Research* **84**, 237-241.

Whipple, A. L., Shelus, P. J., 1993. A secular resonance between Jupiter and its eighth satellite? *Icarus* **101**, 265-271.

Yokoyama, T., 2002. Possible effects of secular resonances in Phobos and Triton. *Planetary and Space Science* **50**, 63-77.

Yuasa, M., 1973. Theory of secular perturbations of asteroids including terms of higher orders and higher degrees. *Pub. Astrn. Soc. Japan* **25**, 399-445.

## Apêndice

### A- Conversão dos coeficientes modificados de Laplace

Aqui vamos mostrar como podemos escrever  $A_k$ ,  $B_k$  e  $C_k$  em função dos coeficientes de Laplace  $(b_{1/2}^{(k)}, b_{3/2}^{(k)}, b_{5/2}^{(k)})$ . Lembrando que:

$$\{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(S)\}^{-q} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_q^{(k)} \cos(kS) \quad (45)$$

Então

$$\begin{aligned} \rho_{ij} &= \{a_i^2 + a_j^2 - 2a_i a_j \cos(S)\}^{-1/2} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} A_k \cos(kS) \longrightarrow \\ \longrightarrow \rho_{ij} &= (a_j)^{-1/2} \{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(S)\}^{-1/2} = \frac{a_j^{-1}}{2} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{3/2}^{(k)} \cos(kS) \end{aligned}$$

Daí pela unicidade de séries:

$$A_k = a_j^{-1} b_{1/2}^{(k)} \quad (46)$$

Também para  $B_k$  temos:

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= a_i a_j \{a_i^2 + a_j^2 - 2a_i a_j \cos(S)\}^{-3/2} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} B_k \cos(kS) \longrightarrow \\ \longrightarrow \delta_{ij} &= a_i a_j (a_j^2)^{-3/2} \{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(S)\}^{-3/2} = \frac{a_i a_j^{-2}}{2} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{3/2}^{(k)} \cos(kS) \end{aligned}$$

Logo,

$$B_k = a_i a_j^{-2} b_{1/2}^{(k)} \quad (47)$$

E para  $C_k$ .



$$\begin{aligned}\gamma_{ij} &= a_i^2 a_j^2 \{a_i^2 + a_j^2 - 2a_i a_j \cos(S)\}^{-5/2} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} C_k \cos(kS) \longrightarrow \\ \longrightarrow \gamma_{ij} &= a_i^2 a_j^2 (a_j^2)^{-5/2} \{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(S)\}^{-5/2} = \frac{a_i^2 a_j^{-3}}{2} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{5/2}^{(k)} \cos(kS)\end{aligned}$$

Então,

$$C_k = a_i^2 a_j^{-3} b_{1/2}^{(k)} \quad (48)$$

### B - Relações importantes envolvendo derivadas em $a_j$ e $a_i$

Seja  $\alpha = \frac{a_i}{a_j}$ , então:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_k}{\partial a_i} &= \frac{1}{a_j} \frac{\partial b^k}{\partial a_i} = \frac{1}{a_j} \frac{\partial b^k}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial a_i} = \frac{1}{a_j^2} \frac{\partial b^k}{\partial a_i} \Rightarrow \frac{\partial A^k}{\partial a_i} = \frac{1}{a_j^2} \frac{\partial b^k}{\partial a_i} \\ \frac{\partial A_k}{\partial a_j} &= -\frac{1}{a_j^2} b^k + \frac{1}{a_j} \frac{\partial b^k}{\partial a_j} = -\frac{1}{a_j^2} b^k + \frac{1}{a_j} \frac{\partial b^k}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial a_j} = \\ &= -\frac{1}{a_j^2} b^k + \frac{1}{a_j} \frac{\partial b^k}{\partial \alpha} \left(-\frac{a_i}{a_j^2}\right) = -\frac{1}{a_j^2} b^k - \alpha \frac{\partial b^k}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{a_j^2}\right) \Rightarrow \\ &\frac{\partial A_k}{\partial a_j} = -\frac{1}{a_j^2} \left[ b^k + \alpha \frac{\partial b^k}{\partial \alpha} \right]\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}A_k + a_j \frac{\partial A_k}{\partial a_j} + a_i \frac{\partial A_k}{\partial a_i} &= \frac{b^k}{a_j} - \frac{1}{a_j} \left[ b^k + \alpha \frac{\partial b^k}{\partial \alpha} \right] + \frac{a_i}{a_j^2} \frac{\partial b^k}{\partial \alpha} = \\ &= \frac{b^k}{a_j} - \frac{b^k}{a_j} - \frac{a_i}{a_j^2} \frac{\partial b^k}{\partial \alpha} + \frac{a_i}{a_j^2} \frac{\partial b^k}{\partial \alpha} = 0\end{aligned}$$

Portanto:

$$A_k + a_j \frac{\partial A_k}{\partial a_j} + a_i \frac{\partial A_k}{\partial a_i} = 0 \quad (49)$$

Derivando esta última expressão podemos obter as seguintes relações:

$$a_i a_j \frac{\partial^2 A_k}{\partial a \partial a_j} = -2a_i \frac{\partial A_k}{\partial a_i} - a_i^2 \frac{\partial^2 A_k}{\partial a_i^2} \quad (50)$$

$$a_j^2 \frac{\partial^2 A_k}{\partial a_j^2} = 2A^k + 4a_i \frac{\partial A_k}{\partial a_i} + a_i^2 \frac{\partial^2 A_k}{\partial a_i^2} \quad (51)$$

De forma análoga podemos demonstrar que:

$$B_k + a_j \frac{\partial B_k}{\partial a_j} + a_i \frac{\partial B_k}{\partial a_i} = 0 \quad (52)$$

$$a_i a_j \frac{\partial^2 B_k}{\partial a \partial a_j} = -2a_i \frac{\partial B_k}{\partial a_i} - a_i^2 \frac{\partial^2 B_k}{\partial a_i^2} \quad (53)$$

$$a_j^2 \frac{\partial^2 B_k}{\partial a_j^2} = 2B^k + 4a_i \frac{\partial B_k}{\partial a_i} + a_i^2 \frac{\partial^2 B_k}{\partial a_i^2} \quad (54)$$

Com estas relações conseguimos escrever todas as derivadas  $\frac{\partial^n}{\partial a_j^n}$  dos coeficientes de Laplace em termos de  $\frac{\partial^k}{\partial a_i^k}$ . Analogamente as mistas também.

## C - Função Perturbadora Clássica

Aqui apresentamos os termos seculares e de longo período (média) da função perturbadora caso clássico direto do Capítulo I (seção A).

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{R}_i = & Gm_j \left[ \frac{15}{4} \frac{a_i^2 b^5 2_0 s_i^2 s_j^2}{a_j^3} + 3/4 \frac{a_i^2 b^5 2_2 s_i^2 s_j^2}{a_j^3} + 3/4 \frac{a_i^2 b^5 2_0 s_i^2 s_j^2 \cos(2\Omega_i - 2\Omega_j)}{a_j^3} + 3/2 \frac{a_i^2 b^5 2_2 s_i^2 s_j^2 \cos(2\Omega_i - 2\Omega_j)}{a_j^3} + \right. \\
 & 1/2 \frac{a_i b^3 2_1 s_i^2 s_j^2 \cos(2\Omega_i - 2\Omega_j)}{a_j^2} + 1/4 \frac{e_j^2 a_i d b 12_0}{a_j^2} + \frac{1}{128} \frac{e_j^4 a_i^4 d 4 b 12_0}{a_j^5} + 1/8 \frac{e_j^2 a_i^2 d 2 b 12_0}{a_j^3} + \frac{9}{32} \frac{e_j^4 a_i^2 d 2 b 12_0}{a_j^3} + \\
 & \frac{7}{16} \frac{e_j^2 e_i^2 a_i^2 d 2 b 12_0}{a_j^3} + (-1/2 \frac{a_i b^3 2_1 s_i s_j^3}{a_j^2} - 1/2 \frac{a_i b^3 2_1 s_i^3 s_j}{a_j^2} + \frac{a_i b^3 2_1 s_i s_j}{a_j^2} + 1/2 s_i s_j e_i^2 a_i (\frac{d b 32_1 a_i}{a_j^3} + \frac{b 32_1}{a_j^2})) + \\
 & 1/4 e_j^2 s_i s_j a_i^2 (2 \frac{d b 32_1}{a_j^3} + \frac{d 2 b 32_1 a_i}{a_j^4}) + 1/2 e_j^2 s_i s_j a_i (\frac{d b 32_1 a_i}{a_j^3} + \frac{b 32_1}{a_j^2}) + 1/4 s_i s_j e_i^2 a_i^2 (2 \frac{d b 32_1}{a_j^3} + \\
 & \frac{d 2 b 32_1 a_i}{a_j^4}) \cos(\Omega_i - \Omega_j) + 1/2 \frac{b 12_0}{a_j} + (-3 \frac{a_i^2 b^5 2_0 s_i s_j^3}{a_j^3} - 3 \frac{a_i^2 b^5 2_0 s_i^3 s_j}{a_j^3}) \cos(\Omega_i - \Omega_j) + (-3/2 \frac{a_i^2 b^5 2_2 s_i s_j^3}{a_j^3} - \\
 & 3/2 \frac{a_i^2 b^5 2_2 s_i^3 s_j}{a_j^3}) \cos(\Omega_i - \Omega_j) - 1/4 s_i^2 e_i^2 a_i (\frac{d b 32_1 a_i}{a_j^3} + \frac{b 32_1}{a_j^2}) - 1/8 s_i^2 e_i^2 a_i^2 (2 \frac{d b 32_1}{a_j^3} + \frac{d 2 b 32_1 a_i}{a_j^4}) - \\
 & 1/4 s_j^2 e_i^2 a_i (\frac{d b 32_1 a_i}{a_j^3} + \frac{b 32_1}{a_j^2}) - 1/8 s_j^2 e_i^2 a_i^2 (2 \frac{d b 32_1}{a_j^3} + \frac{d 2 b 32_1 a_i}{a_j^4}) - 1/4 e_j^2 s_i^2 a_i (\frac{d b 32_1 a_i}{a_j^3} + \frac{b 32_1}{a_j^2}) - \\
 & 1/8 e_j^2 s_i^2 a_i^2 (2 \frac{d b 32_1}{a_j^3} + \frac{d 2 b 32_1 a_i}{a_j^4}) - 1/8 e_j^2 s_j^2 a_i^2 (2 \frac{d b 32_1}{a_j^3} + \frac{d 2 b 32_1 a_i}{a_j^4}) + \frac{3}{32} \frac{e_j^4 a_i^3 d 3 b 12_0}{a_j^4} + 3/16 \frac{e_j^4 a_i d b 12_0}{a_j^2} + \\
 & \frac{1}{128} \frac{e_i^4 a_i^4 d 4 b 12_0}{a_j^5} - 1/2 \frac{a_i b^3 2_1 s_i^2}{a_j^2} + 3/4 \frac{a_i^2 b^5 2_0 s_i^4}{a_j^3} + 3/8 \frac{a_i^2 b^5 2_2 s_i^4}{a_j^3} - 1/2 \frac{a_i b^3 2_1 s_j^2}{a_j^2} + 3/4 \frac{a_i^2 b^5 2_0 s_j^4}{a_j^3} + \\
 & 3/8 \frac{a_i^2 b^5 2_2 s_j^4}{a_j^3} + 1/32 \frac{e_i^4 d 3 b 12_0 a_i^3}{a_j^4} + 1/8 \frac{a_i^2 d 2 b 12_0 e_i^2}{a_j^3} + (3/8 \frac{s_j^2 e_i^2 a_i b 32_1}{a_j^2} + 3/8 s_j^2 e_i^2 a_i (\frac{d b 32_1 a_i}{a_j^3} + \\
 & \frac{b 32_1}{a_j^2})) + 1/16 s_j^2 e_i^2 a_i^2 (2 \frac{d b 32_1}{a_j^3} + \frac{d 2 b 32_1 a_i}{a_j^4}) \cos(-2\Omega_j + 2\varpi_i) + (-3/4 \frac{s_i s_j e_i^2 a_i b 32_1}{a_j^2} - 3/4 s_i s_j e_i^2 a_i (\frac{d b 32_1 a_i}{a_j^3} + \\
 & \frac{b 32_1}{a_j^2})) - 1/8 s_i s_j e_i^2 a_i^2 (2 \frac{d b 32_1}{a_j^3} + \frac{d 2 b 32_1 a_i}{a_j^4}) \cos(-\Omega_i - \Omega_j + 2\varpi_i) + (1/8 \frac{e_j^2 s_i^2 a_i b 32_1}{a_j^2} - 1/8 e_j^2 s_i^2 a_i (\frac{d b 32_1 a_i}{a_j^3} + \\
 & \frac{b 32_1}{a_j^2})) + 1/16 e_j^2 s_i^2 a_i^2 (2 \frac{d b 32_1}{a_j^3} + \frac{d 2 b 32_1 a_i}{a_j^4}) \cos(-2\Omega_i + 2\varpi_j) + (1/16 e_j^2 s_j^2 a_i^2 (2 \frac{d b 32_1}{a_j^3} + \frac{d 2 b 32_1 a_i}{a_j^4}) - \\
 & 1/8 e_j^2 s_j^2 a_i (\frac{d b 32_1 a_i}{a_j^3} + \frac{b 32_1}{a_j^2}) + 1/8 \frac{e_j^2 s_j^2 a_i b 32_1}{a_j^2}) \cos(-2\Omega_j + 2\varpi_j) + (1/2 e_j s_i s_j e_i a_i (\frac{d b 32_0 a_i}{a_j^3} + \\
 & \frac{b 32_0}{a_j^2}) + 1/4 e_j s_i s_j e_i a_i^2 (2 \frac{d b 32_0}{a_j^3} + \frac{d 2 b 32_0 a_i}{a_j^4}) - 1/2 \frac{e_j s_i s_j e_i a_i b 32_0}{a_j^2}) \cos(-\Omega_i - \Omega_j + \varpi_i + \varpi_j) + \\
 & (1/4 \frac{e_j s_i^2 e_i a_i b 32_0}{a_j^2} - 1/4 e_j s_i^2 e_i a_i (\frac{d b 32_0 a_i}{a_j^3} + \frac{b 32_0}{a_j^2}) - 1/8 e_j s_i^2 e_i a_i^2 (2 \frac{d b 32_0}{a_j^3} + \frac{d 2 b 32_0 a_i}{a_j^4})) \cos(-2\Omega_i + \\
 & \varpi_i + \varpi_j) + (-1/2 e_j s_i s_j e_i a_i (\frac{d b 32_0 a_i}{a_j^3} + \frac{b 32_0}{a_j^2}) + 1/2 \frac{e_j s_i s_j e_i a_i b 32_0}{a_j^2} - 1/4 e_j s_i s_j e_i a_i^2 (2 \frac{d b 32_0}{a_j^3} + \\
 & \frac{d 2 b 32_0 a_i}{a_j^4})) \cos(-\Omega_i + \Omega_j + \varpi_i - \varpi_j) + (1/4 \frac{s_j^2 e_j e_i a_i b 32_0}{a_j^2} - 1/4 s_j^2 e_j e_i a_i (\frac{d b 32_0 a_i}{a_j^3} + \frac{b 32_0}{a_j^2}) - \\
 & 1/8 s_j^2 e_j e_i a_i^2 (2 \frac{d b 32_0}{a_j^3} + \frac{d 2 b 32_0 a_i}{a_j^4})) \cos(-2\Omega_j + \varpi_i + \varpi_j) + (3/8 s_i^2 e_i^2 a_i (\frac{d b 32_1 a_i}{a_j^3} + \frac{b 32_1}{a_j^2}) + \\
 & 1/16 s_i^2 e_i^2 a_i^2 (2 \frac{d b 32_1}{a_j^3} + \frac{d 2 b 32_1 a_i}{a_j^4}) + 3/8 \frac{s_i^2 e_i^2 a_i b 32_1}{a_j^2}) \cos(-2\Omega_i + 2\varpi_i) + (-1/8 e_j^2 s_i s_j a_i^2 (2 \frac{d b 32_1}{a_j^3} + \\
 & \frac{d 2 b 32_1 a_i}{a_j^4}) + 1/4 e_j^2 s_i s_j a_i (\frac{d b 32_1 a_i}{a_j^3} + \frac{b 32_1}{a_j^2}) - 1/4 \frac{e_j^2 s_i s_j a_i b 32_1}{a_j^2}) \cos(-\Omega_i - \Omega_j + 2\varpi_j) - 1/4 e_j^2 s_j^2 a_i (\frac{d b 32_1 a_i}{a_j^3} + \\
 & \frac{b 32_1}{a_j^2}) + 1/4 \frac{a_i d b 12_0 e_i^2}{a_j^2} + 1/4 \frac{e_j^2 e_i^2 a_i^3 d 3 b 12_0}{a_j^4} + 1/8 \frac{e_j^2 e_i^2 a_i d b 12_0}{a_j^2} + 1/32 \frac{e_j^2 e_i^2 a_i^4 d 4 b 12_0}{a_j^5} + 1/2 \frac{a_i b^3 2_1 s_i^2 s_j^2}{a_j^2} + \\
 & (-1/4 \frac{e_j s_i^2 e_i a_i b 32_2}{a_j^2} - 1/4 \frac{s_j^2 e_j e_i a_i b 32_2}{a_j^2} + 1/4 e_j s_i^2 e_i a_i (\frac{d b 32_2 a_i}{a_j^3} + \frac{b 32_2}{a_j^2}) + 1/4 s_j^2 e_j e_i a_i (\frac{d b 32_2 a_i}{a_j^3} + \\
 & \frac{b 32_2}{a_j^2})) + 1/8 e_j s_i^2 e_i a_i^2 (2 \frac{d b 32_2}{a_j^3} + \frac{d 2 b 32_2 a_i}{a_j^4}) + 1/8 s_j^2 e_j e_i a_i^2 (2 \frac{d b 32_2}{a_j^3} + \frac{d 2 b 32_2 a_i}{a_j^4})) \cos(\varpi_i - \varpi_j) + \\
 & (-3/16 \frac{e_j^2 e_i^2 a_i d b 12_2}{a_j^2} + \frac{3}{32} \frac{e_j^2 e_i^2 a_i^2 d 2 b 12_2}{a_j^3} + 3/16 \frac{e_j^2 e_i^2 b 12_2}{a_j} + 1/8 \frac{e_j^2 e_i^2 a_i^3 d 3 b 12_2}{a_j^4} + \frac{1}{64} \frac{e_j^2 e_i^2 a_i^4 d 4 b 12_2}{a_j^5}) \cos(2\varpi_i - \\
 & 2\varpi_j) + (-3/16 \frac{e_j e_i^3 a_i^3 d 3 b 12_1}{a_j^4} - 1/8 \frac{e_j e_i^3 a_i^2 d 2 b 12_1}{a_j^3} - 1/32 \frac{e_j e_i^3 a_i^4 d 4 b 12_1}{a_j^5} - 1/2 \frac{e_j e_i a_i d b 12_1}{a_j^2} + 1/2 \frac{e_j e_i b 12_1}{a_j} - \\
 & 1/4 \frac{e_j e_i a_i^2 d 2 b 12_1}{a_j^3} - 1/32 \frac{e_j^3 e_i a_i^4 d 4 b 12_1}{a_j^5} - \frac{11}{16} \frac{e_j^3 e_i a_i^2 d 2 b 12_1}{a_j^3} - 1/8 \frac{e_j^3 e_i a_i d b 12_1}{a_j^2} - \frac{5}{16} \frac{e_j^3 e_i a_i^3 d 3 b 12_1}{a_j^4} + \\
 & 1/8 \frac{e_j^3 e_i b 12_1}{a_j}) \cos(\varpi_i - \varpi_j) + (-1/4 \frac{s_j^2 e_j e_i a_i b 32_0}{a_j^2} - 1/4 \frac{e_j s_i^2 e_i a_i b 32_0}{a_j^2} + 1/8 e_j s_i^2 e_i a_i^2 (2 \frac{d b 32_0}{a_j^3} + \\
 & \frac{d 2 b 32_0 a_i}{a_j^4}) + 1/4 s_j^2 e_j e_i a_i (\frac{d b 32_0 a_i}{a_j^3} + \frac{b 32_0}{a_j^2})) + 1/4 e_j s_i^2 e_i a_i (\frac{d b 32_0 a_i}{a_j^3} + \frac{b 32_0}{a_j^2}) + 1/8 s_j^2 e_j e_i a_i^2 (2 \frac{d b 32_0}{a_j^3} + \\
 & \frac{d 2 b 32_0 a_i}{a_j^4})) \cos(\varpi_i - \varpi_j) + (1/2 \frac{e_j s_i s_j e_i a_i b 32_2}{a_j^2} - 1/2 e_j s_i s_j e_i a_i (\frac{d b 32_2 a_i}{a_j^3} + \frac{b 32_2}{a_j^2}) - 1/4 e_j s_i s_j e_i a_i^2 (2 \frac{d b 32_2}{a_j^3} + \\
 & \frac{d 2 b 32_2 a_i}{a_j^4})) \cos(\Omega_i - \Omega_j + \varpi_i - \varpi_j) \Big]
 \end{aligned}$$

## D - Rotações - Passagem para coordenadas cartesianas

As coordenadas cartesianas (aqui supostas num referencial inercial) de um corpo se relacionam aos elementos orbitais pelas equações:

$$\begin{aligned} X &= r \cos(f + \omega) \cos(\Omega) - r \sin(f + \omega) \sin(\Omega) \cos(I) \\ Y &= r \cos(f + \omega) \sin(\Omega) + r \sin(f + \omega) \cos(\Omega) \cos(I) \\ Z &= r \sin(f + \omega) \sin(I) \end{aligned} \tag{55}$$

Sejam:

$\rho_{\tilde{\Omega}}$  = rotação de ângulo  $\tilde{\Omega}$  em torno do eixo z.  
 $\rho_{\tilde{I}}$  = rotação de ângulo  $\tilde{I}$  em torno do eixo x.  
 $\rho_{\tilde{\chi}}$  = rotação de ângulo  $\tilde{\chi}$  em torno do eixo z.

De acordo com a figura (8) para que possamos obter as coordenadas  $x, y, z$  dadas no plano do equador como função das coordenadas  $X, Y, Z$  dadas no referencial inercial, basta que façamos a seguinte composição de rotações

$$(x, y, z) = \rho_{\tilde{\chi}} \circ \rho_{\tilde{I}} \circ \rho_{\tilde{\Omega}}(X, Y, Z)$$

cujas matrizes são dadas abaixo

$$\begin{aligned} \rho_{\tilde{\Omega}} &= \begin{bmatrix} \cos(\tilde{\Omega}) & \sin(\tilde{\Omega}) & 0 \\ -\sin(\tilde{\Omega}) & \cos(\tilde{\Omega}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \rho_{\tilde{I}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\tilde{I}) & \sin(\tilde{I}) \\ 0 & -\sin(\tilde{I}) & \cos(\tilde{I}) \end{bmatrix} \\ \rho_{\tilde{\chi}} &= \begin{bmatrix} \cos(\tilde{\chi}) & \sin(\tilde{\chi}) & 0 \\ -\sin(\tilde{\chi}) & \cos(\tilde{\chi}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Em particular isto permite escrever:

$$x = \cos(\tilde{\chi})[X \cos(\tilde{\Omega}) + Y \sin(\tilde{\Omega})] + \sin(\tilde{\chi})[-X \cos(\tilde{I}) \sin(\tilde{\Omega}) + Y \cos(\tilde{I}) \cos(\tilde{\Omega}) + Z \sin(\tilde{I})]$$

$$y = -\sin(\tilde{\chi})[X \cos(\tilde{\Omega}) + Y \sin(\tilde{\Omega})] + \cos(\tilde{\chi})[-X \cos(\tilde{I}) \sin(\tilde{\Omega}) + Y \cos(\tilde{I}) \cos(\tilde{\Omega}) + Z \sin(\tilde{I})]$$

$$z = X \sin(\tilde{I}) \sin(\tilde{\Omega}) - Y \sin(\tilde{I}) \cos(\tilde{\Omega}) + Z \cos(\tilde{I})$$

Nestas condições as equações da precessão ficarão

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\Omega}} = & \frac{3Gm_j M_N R_N J_2}{\sin(\tilde{I}) r^5 C w_N} [-X \cos(\tilde{I}) \sin(\tilde{\Omega}) + Y \cos(\tilde{I}) \cos(\tilde{\Omega}) + Z \sin(\tilde{I})] \\ & [X \sin(\tilde{I}) \sin(\tilde{\Omega}) - Y \sin(\tilde{I}) \cos(\tilde{\Omega}) + Z \cos(\tilde{I})] \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{I}} = & \frac{3Gm_j M_N R_N J_2}{r^5 C w_N} [X \cos(\tilde{\Omega}) + Y \sin(\tilde{\Omega})] [X \sin(\tilde{I}) \sin(\tilde{\Omega}) - \\ & Y \sin(\tilde{I}) \cos(\tilde{\Omega}) + Z \cos(\tilde{I})] \end{aligned} \quad (57)$$

Por outro lado na função perturbadora  $R_{J_2}$ , substituindo  $\sin(\beta) = z/r$  temos:

$$R_{J_2} = \frac{\mu J_2 R_N^2}{r^3} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \left[ \frac{X \sin(\tilde{I}) \sin(\tilde{\Omega}) - Y \sin(\tilde{I}) \cos(\tilde{\Omega}) + Z \cos(\tilde{I})}{r} \right]^2 \right\} \quad (58)$$

### E - Equações da precessão em variáveis não singulares

As equações da precessão também devem ser escritas em variáveis não singulares sempre que  $\tilde{I} \approx 0$ . Para isso, vamos inicialmente escrever  $\dot{\tilde{\Omega}}, \dot{\tilde{I}}$  na forma canônica. Seja  $X_c = \cos(\tilde{I})$ , então:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\Omega}} &= \frac{\partial H_1}{\partial X_c} \\ \dot{X}_c &= -\frac{\partial H_1}{\partial \tilde{\Omega}} \end{aligned}$$

onde

$$H_1 = C_0 \left\{ C_1 \frac{X_c^2}{2} - C_2 X_c \sqrt{1 - X_c^2} \cos(\tilde{\Omega} - \Omega_j) - \frac{C_3}{2} (1 - X_c^2) \cos(\tilde{\Omega} - \Omega_j) \right\}$$

$$C_0 = \frac{3Gm_j M_N R_N^2 J_2}{4C w_N a_j^3}$$

$$C_1 = (1 - 3 \cos(I_j)^2)$$

$$C_2 = \sin(2I_j)$$

$$C_3 = \sin(I_j)^2$$

Fazemos agora:  $(X_c, \tilde{\Omega}) \rightarrow (X_1 = 1 - X_c, Y_1 = -\tilde{\Omega})$  e finalmente  $(X_1, Y_1) \rightarrow (z_1, z_2)$ .

Sendo:

$$z_1 = \sqrt{2X_1} \cos(Y_1)$$

$$z_2 = \sqrt{2X_1} \sin(Y_1)$$

Daí as equações não singulares (médias) da precessão são:

$$\dot{z}_1 = -\frac{\partial H}{\partial z_2}$$
$$\dot{z}_2 = \frac{\partial H}{\partial z_1}$$

Com

$$H = C_0 \left\{ \frac{C_1}{2} \left(1 - \frac{f_1}{2}\right)^2 - C_2 \left[ \left(1 - \frac{f_1}{2}\right) \left(1 - \frac{f_1}{2}\right) z_1 \cos(\Omega_j) - \left(1 - \frac{f_1}{2}\right) \left(1 - \frac{f_1}{4}\right)^{1/2} z_2 \sin(\Omega_j) \right] - \frac{C_3}{2} \left[ \left(1 - \frac{f_1}{4}\right) (z_1^2 - z_2^2) \cos(2\Omega_j) - 2 \left(1 - \frac{f_1}{4}\right) z_1 z_2 \sin(2\Omega_j) \right] \right\} \quad (59)$$

$$f_1 = z_1^2 + z_2^2$$