



Unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

# **POSSÍVEIS RESSONÂNCIAS NOS SISTEMAS DE MARTE - PHOBOS E NETUNO - TRITON - PROTEUS**

Marcelo Roberto Mana

Orientador: Prof. Dr. Tadashi Yokoyama

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao  
Programa de Pós-Graduação em Física,  
Área de Concentração em Física Aplicada,  
Para obtenção do título de Mestre em Física.

Rio Claro (SP)  
2003

## Resumo

Phobos e Triton são dois satélites que estão decaindo devido efeitos da maré. Ambos passarão por várias “ressonâncias seculares ” sendo que Triton, cruzará também ressonâncias orbitais envolvendo os satélites mais internos de Netuno. Este problema foi inicialmente estudado por Yokoyama (2002) considerando várias hipóteses simplificadas. Aqui fazemos importantes generalizações incluindo a elipticidade da órbita de Marte, perturbações planetárias, precessão do equador e integrações por tempos muito mais significativos. Os resultados mostram interessantes capturas e escapes, os quais são altamente sensíveis às condições iniciais. Na dupla ressonância (Marte-Phobos) , observa-se uma variação da inclinação muito mais significativa do que aquela apontada em Yokoyama (2002). Nas ressonâncias orbitais para o problema de Netuno-Triton, verifica-se a não ocorrência de capturas nas comensurabilidades retrógradas. O efeito da perturbação do achatamento é muito importante. Por outro lado, mesmo para valores relativamente próximos dos semi-eixos (satélite e Triton) que ocorrerão no futuro, algumas experiências mostraram que o satélite interno pode permanecer estável por tempo relativamente longo, já que os planos de suas órbitas estarão ainda mais separados devido o efeito da maré que aumentará o  $\sin(I_T)$ .

## Abstract

Under the action of the tides, the orbits of Phobos and Triton are spiralling in towards their host planets. The main purpose of this work is to analyze some interesting features that will occur while these orbits are contracting, i. e., these satellites will pass through some secular and orbital resonances. Here we revisit a previous work of Yokoyama (2002) taking a more complete model for the motion of the planet. The integrations are extended to much longer time. Then it is shown that the escapes are very sensitive to the initial conditions. The possibility of the existence of an “universal inclination ” is briefly discussed. Phobos will face an interesting case of “double resonance ” which plays an important role , because a new resonance will be subsequently encountered. For Neptune-Triton system, it is shown that the effect of some orbital retrograde resonances can be very weak if the oblateness of the planet is neglected. No capture in these resonances seems to be possible. Due to the high inclination of Triton’s orbit, in some cases an inner satellite can survive for some moderate time even when it’s semi major axis is rather close to Triton’s semi major axis.

# Agradecimentos

A Deus pela vida e saúde que recebi.

A Tadashi Yokoyama pela orientação e amizade durante estes anos.

Aos meus pais pela ajuda e por cuidarem do Nero. Aos meus irmãos Alexandre Mana e Daniel Fernando Mana.

Aos meus amigos Marcelo Henrique Soares, Márcio Henrique Soares, Rodrigo Octávio Dias de Freitas, Caio Ribeiro Coutinho, Rafael Augusto dos Santos Kapp pelo apoio de sempre.

Aos professores Antonio Carlos Manzini e José Clóvis Adão Macedo pelo incentivo.

Aos amigos de Pós-Graduação Clair do Nascimento e Marcos Tadeu dos Santos pelas discussões e ajudas durante o decorrer deste projeto.

Ao meu filho Tico (in memoriam) que me acompanhou durante 13 anos de minha vida.

Ao meu filho Nero pela paciência e compreensão durante minha ausência.

Aos meus cachorros Indy e Mel.

À FAPESP pelo auxílio financeiro (proc. 01/14405-2), à FUNDUNESP pelos recursos computacionais.

A Eliana e toda equipe da seção de Pós-Graduação do IGCE, por todo apoio e atenção ao orientador e seus orientados.

# Conteúdo

<b>Agradecimentos</b>	<b>3</b>
<b>Conteúdo</b>	<b>4</b>
<b>1. Introdução</b>	<b>6</b>
<b>2. Estudo de algumas ressonâncias seculares de Marte-Phobos</b>	<b>8</b>
2.1 Introdução.....	8
2.2 Equações do movimento.....	9
2.3 Caso em que a órbita de Marte é circular e kepleriana.....	14
2.4 Inclusão dos termos de ordem $\left(\frac{R_p}{a}\right)^3$ na função perturbadora do achatamento.....	21
2.5 Elipticidade da órbita de Marte.....	23
2.6 Estudo sobre a possibilidade de uma inclinação universal.....	26
2.7 Introdução de perturbação planetária e das equações da precessão.....	34
2.8 Introduzindo a precessão do equador utilizando a correção $R_I$ .....	44
2.9 A dupla ressonância.....	50

<b>3. O Sistema Netuno-Triton</b>	<b>59</b>
<b>4. Conclusões</b>	<b>64</b>
<b>5. Apêndice A</b>	<b>66</b>
A.1 Dedução da Hamiltoniana da seção 2.....	66
A.2 Dedução da expressão (2).....	71
A.3 Dedução das expressões (5) e (10).....	73
A.4 Dedução da expressão (6).....	76
A.5 Dedução da expressão (16).....	82
A.6 Tabela completa conforme Ward (1979).....	84
A.7 Dedução da expressão (17).....	88
<b>6. Apêndice B</b>	<b>93</b>
<b>7. Bibliografia</b>	<b>103</b>

# 1. Introdução

Phobos é um satélite de Marte distante  $\approx 2.76R_M$  do planeta e está num processo de queda devido efeitos da maré. Atualmente sua inclinação é  $\approx 1^\circ$  ( em relação ao equador) e sua excentricidade é  $\approx 0.015$ .

Um outro satélite que também se encontra em queda é Triton. Duas características fundamentais deste satélite de Netuno são: sua massa, que é relativamente grande ( $M_T/M_n \cong 2.09 \times 10^{-4}$ ) e também sua inclinação ( $I_T \approx 157^\circ$  relativamente ao equador), o que faz com que sua órbita seja retrógrada.

O efeito dissipativo da maré é bastante lento, mas por outro lado, é sabido que ao longo do tempo, tal efeito tem sido decisivo na configuração da dinâmica atual dos sistemas de satélites e planetas. Junto com a dinâmica, a maré também é responsável por uma série de consequências físicas, em especial nos processos de dissipação de energia, o que pode ocasionar constantes mudanças nas superfícies dos satélites (fenômenos de vulcanismo).

Neste trabalho estamos interessados apenas na parte dinâmica e ao contrário de muitos outros, o nosso interesse consiste em estudar a possível dinâmica **futura** destes dois satélites. Basicamente pretendemos estender a análise apresentada em Yokoyama (2002).

De maneira bastante resumida, podemos dizer que um dos efeitos mais notórios da maré consiste em fazer com que o semi-eixo do satélite diminua (ou cresça) secularmente. Isto faz com que as frequências fundamentais de todo o problema variem continuamente. Desta forma é quase inevitável que neste processo, ocorram algumas combinações ressonantes destas frequências. Sabemos então que o surgimento ou a passagem por alguma ressonância pode trazer drásticas mudanças na dinâmica. Por exemplo, as atuais inusitadas inclinações de Miranda, Thebe, Almathea, etc, tem sido atribuídas às passagens por ressonâncias, causadas por efeitos de marés. No entanto, mais importante do que estas simples passagens, o efeito torna-se muito mais sério quando ocorre a captura nestas ressonâncias. Evidentemente isto ocorre em circunstâncias particulares e estas em alguns casos são possíveis de serem previstas pela teoria dos invariantes adiabáticos. Este é o caso de Phobos, onde a provável captura fará variar drasticamente sua inclinação. No caso de Triton, haverá também a passagem por várias ressonâncias, porém em nenhuma delas deverá ocorrer captura. Em Yokoyama (2002) foram feitos estes primeiros estudos destas futuras ressonâncias de Phobos e Triton. Porém em tal trabalho, o autor considerou um modelo simplificado, onde a órbita do planeta era considerada circular ( “kepleriana ”) e portanto perturbações planetárias agindo no planeta hospedeiro foram ignoradas. Por outro lado, as integrações ali realizadas não eram suficientemente longas para testar a possibilidade de escape de librações. Também a função perturbadora do achatamento estava restrita apenas ao termo  $J_2$ . Neste trabalho, adicionaremos o termo  $J_3$  no achatamento e também as perturbações planetárias que agem em Marte serão consideradas, tomando a teoria secular de Bretagnon. Desta forma, como esta teoria está referida a eclíptica de 1850, escrevemos o nosso problema também neste sistema de referência. Por outro lado, devido às perturbações solares, ocorre a precessão do equador de Marte. Este efeito foi então computado através das equações em  $(\tilde{I}, \tilde{\Omega})$ . O tempo de integração foi estendido

para um intervalo bem mais longo onde pudemos exibir interessantes situações de escape. Nossos resultados mostram que neste modelo mais geral e completo, as capturas em “ressonâncias seculares” ainda continuam ocorrendo, mas os escapes são bastante sensíveis às condições iniciais. Isto, de certa forma, desencoraja a procura de uma inclinação universal, fato que é bastante conhecido no caso de capturas em ressonâncias orbitais (Beauge & Ferraz-Mello, 1993; Gomes 1997). Como dito antes, uma vez capturado, a inclinação de Phobos começa a crescer continuamente e vai de  $1^0$  até cerca de valores maiores que  $63.5^0$ . Significa portanto que o sistema dinâmico cruza mais uma ressonância (a clássica inclinação crítica). Até agora, os testes realizados, não mostram captura nesta segunda ressonância. No que diz respeito ao problema da dupla ressonância, as simulações mostram que a inclusão da elipticidade de Marte é extremamente importante. Isto fica bastante claro num caso onde ocorrem quase que simultaneamente duas ressonâncias (dupla ressonância). A dinâmica pós-passagem nesta comensurabilidade tem influência importante na captura ou não da próxima ressonância a ser cruzada.

Para o sistema Netuno-Triton, não nos preocupamos em computar as perturbações planetárias uma vez que estas são bem menos significativas do que aquelas que agem nos planetas inferiores. Então usamos o plano equatorial de Netuno como o de referência, onde testamos previamente a importância do termo de correção  $R_I$  devido ao fato deste plano não ser um referencial inercial. Examinamos então a seguinte questão: durante a queda de Triton, seu semi-eixo continuamente variará de forma que o seu movimento médio entrará em ressonância orbital com os movimentos médios dos satélites internos (Proteus, Naiad, Larissa, Galatea, Despina, Thalassa). Uma série de integrações numéricas mostra que em geral, no caso de ressonâncias retrógradas, estas são bem mais fracas e aparentemente não existem as clássicas librações que se fazem presente nas comensurabilidades diretas. Desta forma, se não existem librações, pela teoria dos invariantes adiabáticos não devem existir capturas. Não fizemos ainda uma cobertura completa de explorações numéricas das passagens por estas ressonâncias até o momento. As experiências iniciais tem mostrado que o efeito isolado destas (sem incluir o achatamento) é extremamente fraco ao contrário do que é sabido por exemplo nas ressonâncias asteroidais diretas. Por outro lado, em alguns casos, notou-se que mesmo quando o semi-eixo do satélite interno está relativamente próximo ao de Triton, é possível ter uma estabilidade por um tempo razoavelmente longo. Isto provavelmente se deve à alta inclinação de Triton. No entanto, a inclusão do achatamento, principalmente nos casos ressonantes traz efeitos muito importantes sobretudo na ressonância 2:1, onde se observa a ejeção do satélite interno.



# 2. Estudo de algumas ressonâncias seculares de Marte-Phobos

## 2.1. Introdução

Phobos e Deimos são dois satélites de Marte. Ao contrário de Deimos, Phobos está em processo de queda devido a maré. Vamos então nos ocupar de Phobos e estudar sua dinâmica futura.

Nesta parte do nosso trabalho estaremos considerando a função perturbadora solar e do achatamento seguindo as idéias contidas em Yokoyama (2002). Neste caso tomaremos o equador de Marte como o plano de referência fixo.

O objetivo nesta seção é estudar:

- Os casos onde a integração foi feita por tempos bem longos para observar as situações de escape.
- A influência que traz os termos de ordem superior  $O\left(\frac{R_p}{a}\right)^3$  da função perturbadora do achatamento.
- O comportamento do problema no caso em que Marte tem órbita elíptica.
- Estudar a sensibilidade das condições iniciais para os possíveis escapes. Neste caso, examinar a possibilidade da existência de uma inclinação universal a exemplo do que mostram Gomes (1997), Beaugé and Ferraz-Mello (1993).
- A influência das perturbações planetárias, introduzindo a teoria secular dos planetas (Ward (1979), Bretagnon (1973)), bem como as consequências da perturbação do Sol sobre o equador de Marte (precessão), utilizando-se das equações  $\dot{\tilde{\Omega}}$  e  $\dot{\tilde{I}}$ .
- A precessão seguindo as idéias contidas em Goldreich (1965) e comparar com os resultados obtidos pelas integrações de  $\dot{\tilde{\Omega}}$  e  $\dot{\tilde{I}}$ .
- O caso em que ocorre a dupla ressonância, incluindo a elipticidade da órbita de Marte.

## 2.2. Equações do movimento

Num sistema de coordenadas fixado no centro de massa do planeta e considerando o equador como plano de referência, as equações para um satélite perturbado pelo achatamento e pelo Sol são :

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{k^2(M+m)}{r^3}\mathbf{r} - k^2M_{\odot}\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\odot}}{|r-r_{\odot}|^3} + \frac{\mathbf{r}_{\odot}}{r_{\odot}^3}\right) + \mathbf{P}_{J_2} \quad (1)$$

onde as componentes do último termo (achatamento do planeta) são (Apêndice A):

$$\begin{aligned} P_x &= -k^2MJ_2R_p^2\left[\frac{3x}{2r^5} - \frac{15}{2}\frac{z^2x}{r^7}\right] \\ P_y &= -k^2MJ_2R_p^2\left[\frac{3y}{2r^5} - \frac{15}{2}\frac{z^2y}{r^7}\right] \\ P_z &= -k^2MJ_2R_p^2\left[\frac{9z}{2r^5} - \frac{15}{2}\frac{z^3}{r^7}\right] \end{aligned} \quad (2)$$

onde:

- $M, M_{\odot}$ : massa do planeta e do Sol, respectivamente.
- $m$ : massa do satélite.
- $\mathbf{r}, \mathbf{r}_{\odot}$ : vetor posição do satélite e do Sol.
- $k^2, J_2$ : constante gravitacional e coeficiente de achatamento.
- $R_p$ : raio equatorial do planeta.

Com o intuito de obtermos o termo de longa variação do sistema, podemos escrever a função perturbadora de parte do achatamento na seguinte forma (Brouwer e Clemence 1961):

$$R_{J_2}^* = \frac{k^2MR_p^2}{r^3}J_2\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sin^2\phi\right) \quad (3)$$

e para a perturbação solar

$$\tilde{R}_{\odot} = \frac{k^2 M_{\odot} r^2}{r_{\odot}^3} \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 S \right) \quad (4)$$

onde  $S$  é a distância angular entre Sol-satélite e  $\phi$  é a latitude do satélite

Os termos de ordem 3 na razão  $\frac{R_p}{r}$  e  $\frac{r}{r_{\odot}}$  foram desprezados nas equações 3 e 4 respectivamente.

Para obtermos a perturbação secular do problema, tomamos a média em relação à anomalia média ( $l$ ) do satélite. Esta média pode ser feita analiticamente, o que elimina a necessidade de uma expansão em excentricidade ou inclinação. Considerando o equador do planeta como o plano de referência, o sistema secular é escrito como:

$$R_{J_2} = \frac{1}{4} n^2 J_2 R_p^2 (3 \cos^2 I - 1) (1 - e^2)^{-3/2} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} R_{\odot} = & \frac{k^2 M_{\odot} a^2}{2a_{\odot}^3} \left[ \frac{3}{2} P(A^2 + B^2 + C^2 + 2E^2 - \frac{2}{3}) + \right. \\ & \frac{3}{2} A^2 Z \cos(2g + 2f_{\odot} + 2g_{\odot} + 2\Omega - 2\Omega_{\odot}) + \\ & \frac{3}{2} B^2 Z \cos(2g + 2f_{\odot} + 2g_{\odot} - 2\Omega + 2\Omega_{\odot}) + \\ & \frac{3}{2} C^2 Z \cos(2g - 2f_{\odot} - 2g_{\odot} + 2\Omega - 2\Omega_{\odot}) + \\ & \frac{3}{2} D^2 Z \cos(2g - 2f_{\odot} - 2g_{\odot} - 2\Omega + 2\Omega_{\odot}) + \\ & \frac{3}{2} Z (E^2 + 2CD) \cos(2g - 2f_{\odot} - 2g_{\odot}) + \\ & \frac{3}{2} Z (E^2 + 2AB) \cos(2g + 2f_{\odot} + 2g_{\odot}) + \\ & 3Z(-E^2 + AD + BC) \cos 2g + \\ & 3P(-E^2 + AC + BD) \cos(2f_{\odot} + 2g_{\odot}) + \\ & 3P(AB + CD) \cos(2\Omega - 2\Omega_{\odot}) + \\ & 3ACZ \cos(2g + 2\Omega - 2\Omega_{\odot}) + \\ & 3ADP \cos(2f_{\odot} + 2g_{\odot} + 2\Omega - 2\Omega_{\odot}) + \\ & 3EP(A - D) \cos(2f_{\odot} + 2g_{\odot} + \Omega - \Omega_{\odot}) + \\ & 3EP(-A - B + C + D) \cos(\Omega - \Omega_{\odot}) + \\ & 3EZ(A - C) \cos(2g + \Omega - \Omega_{\odot}) - \\ & 3AEZ \cos(2g + 2f_{\odot} + 2g_{\odot} + \Omega - \Omega_{\odot}) + \\ & 3BCP \cos(2f_{\odot} + 2g_{\odot} - 2\Omega + 2\Omega_{\odot}) + \\ & \left. 3BDZ \cos(2g - 2\Omega + 2\Omega_{\odot}) + \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 3EP(B - C) \cos(2f_{\odot} + 2g_{\odot} - \Omega + \Omega_{\odot}) + \\
& 3EZ(B - D) \cos(2g - \Omega + \Omega_{\odot}) - \\
& 3BEZ \cos(2g + 2f_{\odot} + 2g_{\odot} - \Omega + \Omega_{\odot}) + \\
& 3CEZ \cos(2g - 2f_{\odot} - 2g_{\odot} + \Omega - \Omega_{\odot}) + \\
& 3DEZ \cos(2g - 2f_{\odot} - 2g_{\odot} - \Omega + \Omega_{\odot})]
\end{aligned} \tag{6}$$

onde:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{4}(1 + \cos I)(1 - \cos \epsilon) \\
B &= \frac{1}{4}(1 - \cos I)(1 + \cos \epsilon) \\
C &= \frac{1}{4}(1 + \cos I)(1 + \cos \epsilon) \\
D &= \frac{1}{4}(1 - \cos I)(1 - \cos \epsilon) \\
E &= \frac{1}{2} \sin I \sin \epsilon \\
P &= 1 + \frac{3}{2}e^2 \\
Z &= \frac{5}{2}e^2
\end{aligned} \tag{7}$$

A expressão (5) é bem conhecida (Kozai (1959)) dada em Yokoyama (2002) enquanto (6) (obtida de modo análogo) é:

$$R_{\odot} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{R}_{\odot} dl \tag{8}$$

onde  $l$  = significa a anomalia média do satélite. Para maiores detalhes da obtenção de (5) e (6) ver Apêndice A.

Definamos  $a, e, I, f, g, \Omega, n$  como os elementos orbitais usuais: semi-eixo maior, excentricidade, inclinação, anomalia verdadeira, argumento do pericentro, longitude do nodo ascendente e movimento médio do satélite, enquanto que para o Sol, acrescentamos o símbolo  $\odot$ .

Primeiramente trabalharemos com um modelo bem simplificado. O movimento do planeta será considerado uma órbita circular fixa. Isto implica que  $l_{\odot} = f_{\odot}$  é uma função linear do tempo, enquanto que  $g_{\odot}$  e  $\Omega_{\odot}$  são constantes se o plano de referência (no caso, o equador de Marte) estiver fixo no espaço. Assim, usando  $R_{J_2}$  e  $R_{\odot}$ , as equações de Lagrange (Brouwer and Clemence 1961) podem descrever a dinâmica do sistema.

As principais frequências não perturbadas (sem a perturbação solar) do presente problema, além do movimento médio solar  $n_{\odot}$ , são :

- $\dot{g} = \frac{3nJ_2R_p^2}{4a^2(1-e^2)^2}(5 \cos^2 I - 1)$
- $\dot{\Omega} = -\frac{3nJ_2R_p^2 \cos I}{2a^2(1-e^2)^2}$

Essas frequências foram obtidas considerando-se somente a equação (5) nas equações de Lagrange, pois o valor de  $R_{J_2}$  é bem mais significativo que a da perturbação solar.

Atualmente, o semi-eixo maior de Phobos é aproximadamente  $2.76R_M$ , onde  $R_M$  é o raio equatorial de Marte. A variação do semi-eixo, desprezando possíveis dissipações em Phobos é dada por (Szeto 1983, Yoder 1982):

$$\frac{da}{dt} = -3k_2na \frac{m}{M} \left(\frac{R_M}{a}\right)^5 \frac{1}{Q_{2200}} \quad (9)$$

onde:

$n, a$ : movimento médio e semi-eixo maior de Phobos, respectivamente

$R_M, k_2$ : raio equatorial e número de Love de segunda ordem de Marte.

$Q_{2200}$ : função dissipativa (em nosso trabalho consideramos  $Q_{2200} = 80$  (constante))

De acordo com os resultados de Shor, Szeto (1983) encontrou  $\frac{da}{dt} = -(1,4 \pm 0.5) \times 10^{-7}$  cm/s atualmente.

O interessante na dinâmica deste satélite é que durante o decaimento de seu semi-eixo, as frequências do nodo e da longitude do pericentro passarão por vários valores e portanto cruzarão várias ressonâncias seculares que envolvem também a perturbação solar.

A atual inclinação de Phobos é de aproximadamente  $1^0$ , enquanto a excentricidade é de 0.015. Assim, para pequenos valores da inclinação e excentricidade, temos as seguintes ressonâncias possíveis no passado:

$2\dot{g} + \dot{\Omega} - 2n_{\odot} = 0$	$a \approx 2.9411$
$2\dot{g} - 2n_{\odot} = 0$	$a \approx 3.1931$
$2\dot{g} - \dot{\Omega} - 2n_{\odot} = 0$	$a \approx 3.4034$
$2\dot{g} - 2\dot{\Omega} - 2n_{\odot} = 0$	$a \approx 3.5854$

Contudo, estas e outras ressonâncias passadas foram estudadas por Yoder (1982). Sendo assim, estudaremos apenas as futuras ressonâncias.

Para  $a \leq 2.76R_M$  temos:

$2\dot{\Omega} + 2n_{\odot} = 0$	$a \approx 2.6196$
$2\dot{g} + 2\dot{\Omega} - 2n_{\odot} = 0$	$a \approx 2.6193$
$\dot{\Omega} + 2n_{\odot} = 0$	$a \approx 2.1490$

Assim, até aqui, fizemos a obtenção completa do modelo mais simples (circular, Kepleriano) conforme dado em Yokoyama (2002). Em nosso trabalho, inicialmente estudaremos a ressonância  $\dot{\Omega} + 2n_{\odot}$ , a qual ocorrerá em  $a = 2.1490$ .

### 2.3. Caso em que a órbita de Marte é circular e kepleriana

Como dissemos anteriormente, para estudar a dinâmica deste problema vamos integrar as equações variacionais de Lagrange (Brouwer and Clemence 1961). Tais equações fornecem as variações dos elementos orbitais do satélite submetido à perturbação do achatamento de Marte e da perturbação solar. Além disso, o ingrediente básico neste problema é o fato de que o satélite está também sujeito à maré, e portanto seu semi-eixo maior está decaindo secularmente.

Em função disso, conforme mencionamos anteriormente, se  $a$  varia continuamente, as frequências fundamentais irão também variar, cruzando assim várias ressonâncias, as quais chamaremos de seculares. O nosso objetivo aqui é examinar qual é a dinâmica do problema quando cruzamos certos valores críticos do semi-eixo que ocasionam tais ressonâncias seculares. Sabemos que em geral, a passagem por ressonâncias podem causar drásticas alterações no problema. Em particular, sempre que houver captura em ressonâncias, o fenômeno se acentua mais ainda.

Um excelente estudo da teoria de captura em librações, escape e probabilidade, pode ser encontrada em Peale (1999), Henrard (1982). A idéia principal se faz apoiada na teoria dos invariantes adiabáticos. Para este problema em particular, os diagramas básicos que conduzem ao fenômeno da captura na ressonância estão dados em Yokoyama (2002). Assim, não iremos repetir os detalhes teóricos e passaremos a explorar mais a parte numérica.

Em Yokoyama (2002) o autor não estendeu as integrações para tempos mais longos e não estudou nenhuma situação de escape. Vamos agora abordar este aspecto neste modelo simplificado. Realizaremos integrações por tempos mais longos ( $5 \times 10^6$  anos).

A captura em libração do ângulo  $\theta = 2\lambda_{\odot} + \Omega - 3\Omega_{\odot}$  pode ser vista nas figuras **1.b.**, **2.b.** e **3.b.**. Notamos então que há escape conforme vemos nas Figuras **1.a.**, **2.a.** e **3.a.**, onde foram realizadas pequenas variações das condições iniciais (mais precisamente, inclinação e excentricidade). Na figura **1.a.** tomamos o valor inicial da inclinação como sendo  $1^{\circ}$  e obtivemos um escape em  $33^{\circ}$  aproximadamente. Comparando com a figura **2.a.**, onde consideramos o valor inicial da inclinação como sendo  $1.10^{\circ}$ , notamos uma significativa mudança no ângulo de escape,  $56^{\circ}$  aproximadamente. Ainda na figura **1.a.**, tomamos o valor inicial da excentricidade como sendo  $e = 0.01$ , e, na figura **3.a.**, na qual mantivemos todas as condições iniciais iguais as da figura **1.a.** alterando apenas o valor inicial da excentricidade  $e = 0.030$ , obtivemos o escape em aproximados  $63^{\circ}$ .

Notemos que, em alguns casos, a amplitude do ângulo de libração sofre algumas mudanças claras. Consideremos a figura **2.b.** Neste exemplo, as mudanças mencionadas ocorrem em:  $a \approx 2.048R_M$ ,  $a = 1.926R_M$  e  $a = 1.820R_M$ . Nestes pontos, as inclinações são aproximadamente  $32.5^{\circ}$ ,  $46.6^{\circ}$  e  $56^{\circ}$ , respectivamente. Na figura **3.b.**, as mudanças no ângulo de libração ocorrem em:  $a \approx 2.044R_M$  ( $I \approx 33^{\circ}$ ),  $a \approx 1.93R_M$  ( $I \approx 46.38^{\circ}$ ),

$a \approx 1.82R_M$  ( $I \approx 56^0$ ),  $a \approx 1.71R_M$  ( $I \approx 63.43^0$ ). Em todos os casos, nos limites dessas mudanças, o ângulo de libração sofre um "pulo". Alguns deles são muito altos, especialmente os primeiros que ocorrem em  $a \approx 2.044R_M$ . Para explicar a razão dessas mudanças na amplitude da libração, em todas figuras, vamos calcular a posição de uma específica combinação ressonante  $k_1\dot{g} + k_2\dot{\Omega} + k_3n_\odot$  para todos  $k_i$ . Para simplificar, consideraremos apenas a figura **3.b**.

No começo, desde que  $I$  é pequeno ( $I \approx 1^0$ ), apenas a ressonância  $2n_\odot + \dot{\Omega}$  é possível. Então, conforme previsto, a captura ocorre em  $a \approx 2.1490R_M$ . No entanto, durante a captura a inclinação começa aumentar, e com isso outras combinações ressonantes são satisfeitas. A primeira ocorre em  $a = 2.044R_M$  ( $I \approx 33.02^0$ ). Neste ponto, as seguintes equações (ressonâncias) podem ser satisfeitas:

$$\begin{aligned}\dot{\Omega} + \dot{g} - n_\odot &= 0 \\ \dot{\Omega} + 2n_\odot &= 0\end{aligned}$$

Analogamente em  $a = 1.933R_M$  ( $I \approx 46.38^0$ ), temos:

$$\begin{aligned}\dot{\Omega} + \dot{g} &= 0 \\ \dot{\Omega} + 2n_\odot &= 0\end{aligned}$$

Em  $a = 1.82R_M$  ( $I \approx 56.064^0$ ), temos:

$$\begin{aligned}\dot{\Omega} + \dot{g} + n_\odot &= 0 \\ \dot{\Omega} + n_\odot &= 0\end{aligned}$$

Finalmente, em  $a \approx 1.71R_M$  ( $I \approx 63.43^0$ ), quando o escape ocorre:

$$\begin{aligned}2\dot{g} + 2n_\odot + \dot{\Omega} &= 0 \\ 2\dot{g} - 2n_\odot - \dot{\Omega} &= 0 \\ 2n_\odot + \dot{\Omega} &= 0 \\ \dot{g} &= 0\end{aligned}$$

Nestes pontos, quando duas ou mais ressonâncias ocorrem simultaneamente, o problema é essencialmente um sistema não-autônomo com dois graus de liberdade. A teoria de invariância adiabática não é válida na região onde estas duas ressonâncias são de mesma importância. Assim, não é de se admirar que os "pulos" ou mudanças na amplitude da libração apareçam durante a passagem por estas regiões. Vale a pena mencionar que, a princípio, cada vez que o sistema passa por um caso de dupla ressonância, o escape pode ocorrer. Contudo, experimentos numéricos indicam que o fenômeno não é previsível. Por exemplo, na figura **1.b**, o primeiro encontro já causou o escape, na figura **2.b** o terceiro encontro e na figura **3.b**, o sistema resistiu à três passagens. Neste caso, temos um interessante escape da inclinação, também conhecida classicamente como a "inclinação crítica". Isto significa que depois do escape, o cenário é alterado para a dinâmica envolvendo a excentricidade e o pericentro, os quais parecem se tornar mais importante.



Nas outras figuras onde ocorrem mudanças bruscas na amplitude do ângulo de libração a explicação é análoga.

Estes são alguns exemplos das situações de captura-escape. Notemos que as situações de escape são muito sensíveis às condições iniciais. Em alguns casos vemos uma tentativa de escape durante as librações, bem como uma mudança na amplitude da variação do ângulo  $\theta = 2\lambda_{\odot} + \Omega - 3\Omega_{\odot}$  (figuras **2.b** e **3.b** por exemplo). Para tentar entender melhor estas variações de amplitude e tentativas de escape, refizemos as integrações com diferentes precisões do Radau (LL=10, LL=12). A aparência geral das figuras se manteve inalterada. Aliado a estas tentativas de escape, outra pergunta que se faz necessária, diz respeito às causas dos escapes. É classicamente sabido (Peale 1999) que, uma vez capturado e à medida que o ponto de equilíbrio se desloca afastando-se continuamente da origem, obrigatoriamente a inclinação tende a crescer secularmente (ver diagrama (Fig. 2) em Yokoyama 2002). Estes diagramas são obtidos fazendo-se uma série de simplificações, onde tomando-se a hipótese de que  $I$  é pequeno, pode-se chegar à Hamiltoniana:

$$H = \frac{3n^2 J_2 R_M^2}{4(1-e_0^2)^{3/2} G^2} \left[ -G + \frac{p_1^2 + q_1^2}{2} \right]^2 + \frac{A_0 a^2 p_1}{2\sqrt{2}} + n_{\odot}(p_1^2 + q_1^2)$$

onde

$$A_0 = \frac{3k^2 M_{\odot} \sqrt{2/G} \sin^2(\epsilon/2) \sin \epsilon}{2a_{\odot}^3}$$

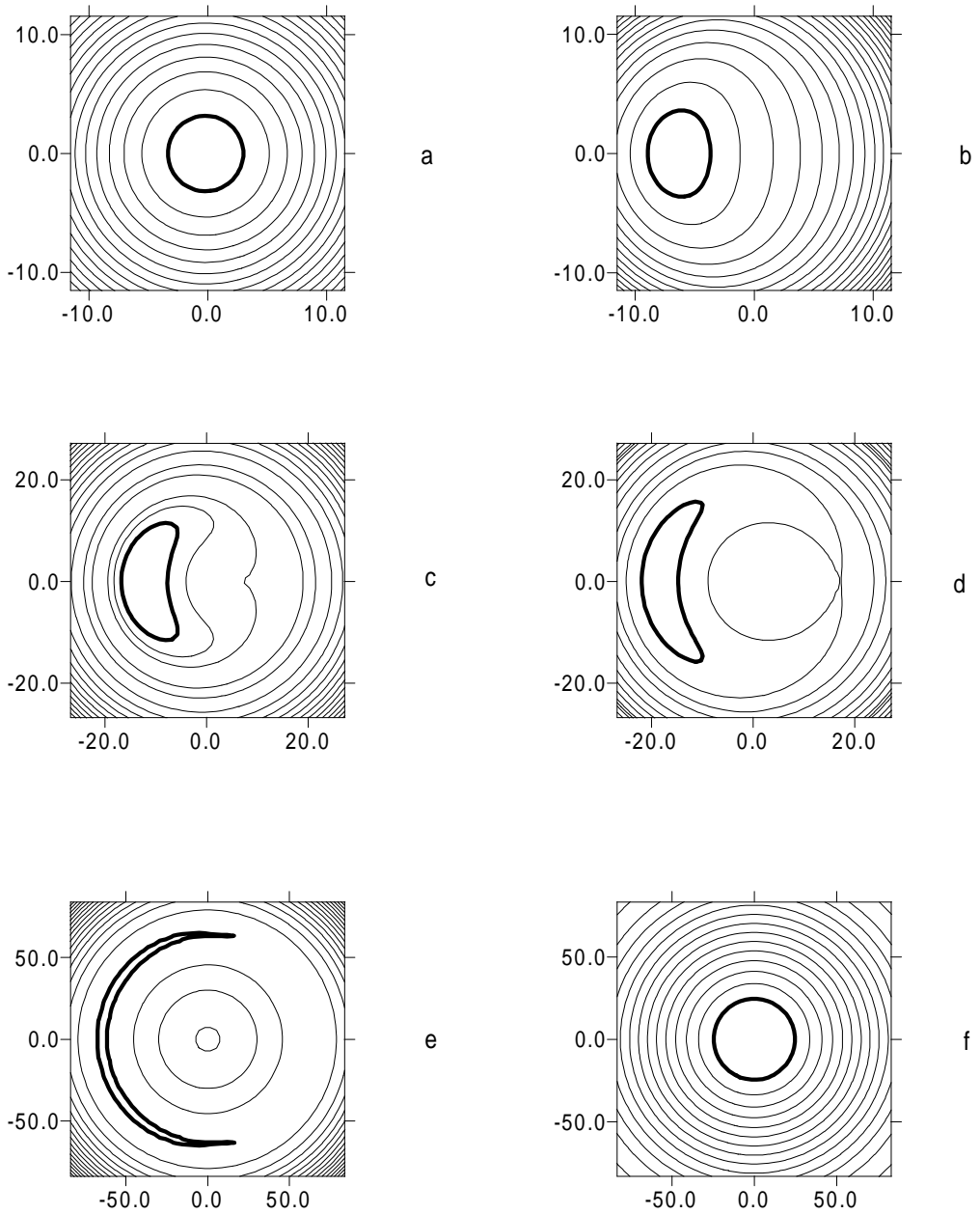
$e_0 = \text{constante}$

$$p_1 = \sqrt{2(G-H)} \cos(2\lambda_{\odot} + \Omega)$$

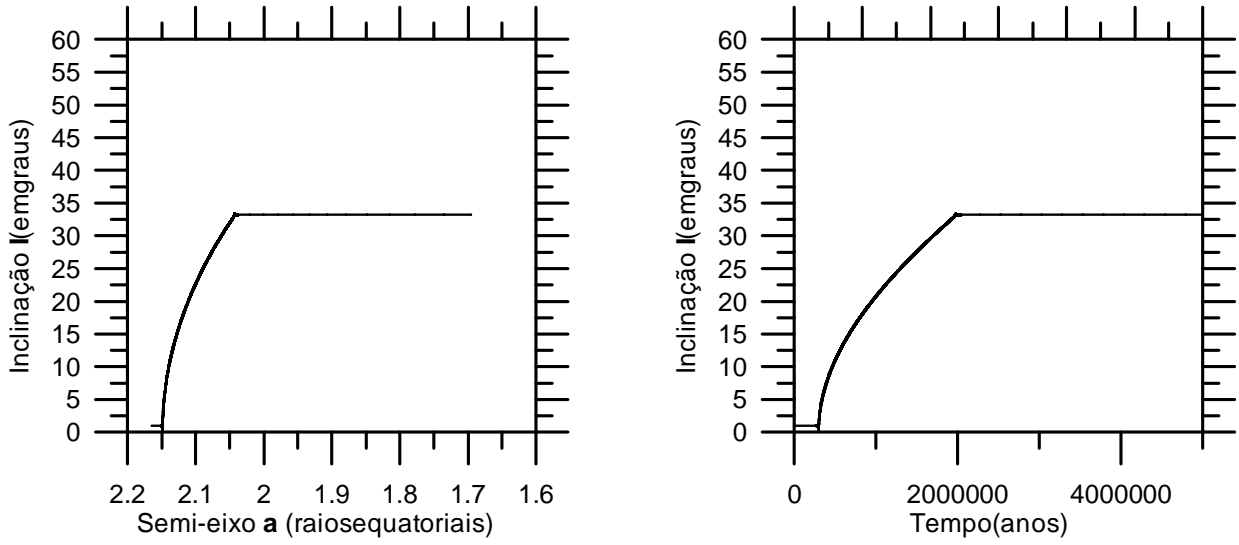
$$q_1 = -\sqrt{2(G-H)} \sin(2\lambda_{\odot} + \Omega)$$

Para maiores detalhes sobre a obtenção desta Hamiltoniana ver Apêndice A.

A evolução do diagrama (Diagrama I) à medida que  $a$  decresce determina simplesmente a localização e surgimento dos pontos de equilíbrio no espaço de fases  $(p, q)$  (Yokoyama 2002). Observemos porém que tal Hamiltoniana só é válida para  $I$  pequeno e no momento do escape, o atual  $I$  já é muito grande. Portanto, a tentativa de explorar alguma degenerescência dos pontos de equilíbrio a partir desta formulação no momento do escape não é válida. Este estudo ainda está em curso e deve ser feito considerando-se uma Hamiltoniana sem restrições quanto ao valor de  $I$ . No entanto, devido à alta sensibilidade das condições iniciais, é de se esperar que modelos unidimensionais, ou simples generalização na inclinação, não sejam muito eficientes.



**Diagrama I:** Evolução do espaço de fases  $(p, q)$  obtido da hamiltoniana  $H$  para valores de semi-eixo maior decrescentes. Os valores de  $a$  até  $f$  para o semi-eixo são: 2.170, 2.1493, 2.14823865171, 2.147, 2.122, 2.05, respectivamente.



**Figura 1.a:** Esquerda: Inclinação de Phobos no caso em que o plano de referência é o equador de Marte. A função perturbadora do achatamento foi truncada nos termos de ordem  $J_2$ .

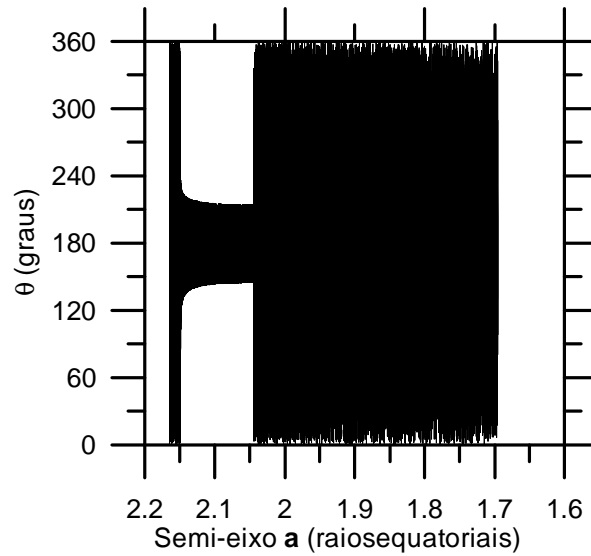
O escape ocorre em aproximados  $33^\circ$ .

Elementos orbitais iniciais do satélite:  $e = 0.01$ ,  $a = 2.165R_M$ ,  $I = 1^\circ$ ,  $\Omega = 90^\circ$  e  $g = 0^\circ$

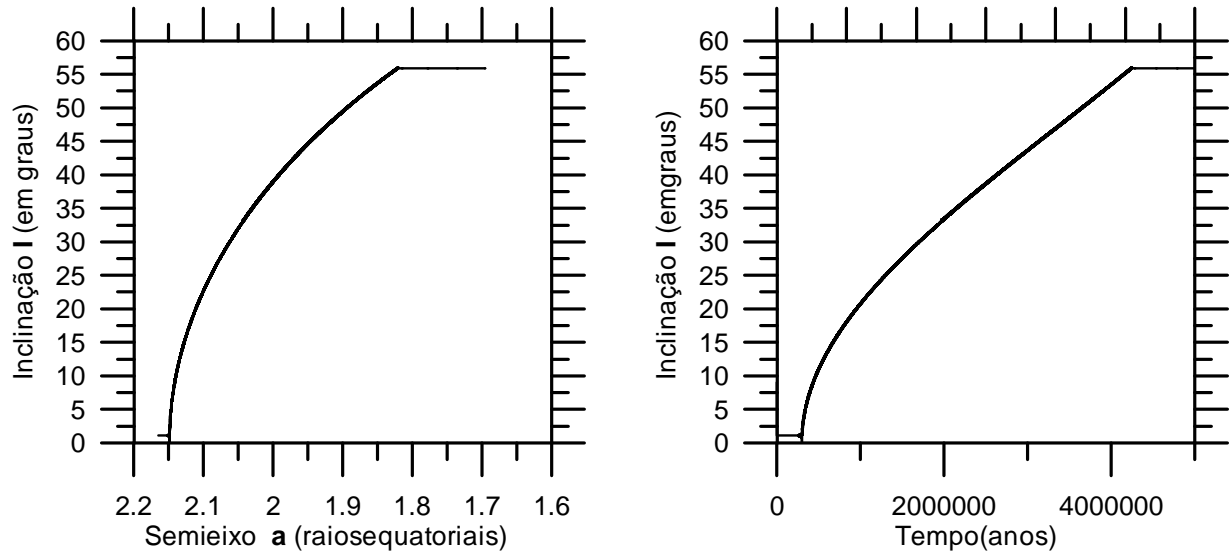
Elementos orbitais iniciais de Marte:  $a_M = 1.5236R_M$ ,  $e_M = 0.0933$ ,  $g_M = 0^\circ$ ,  $\Omega_M = 0^\circ$

A obliquidade de Marte foi de  $\epsilon = 25.19^\circ$

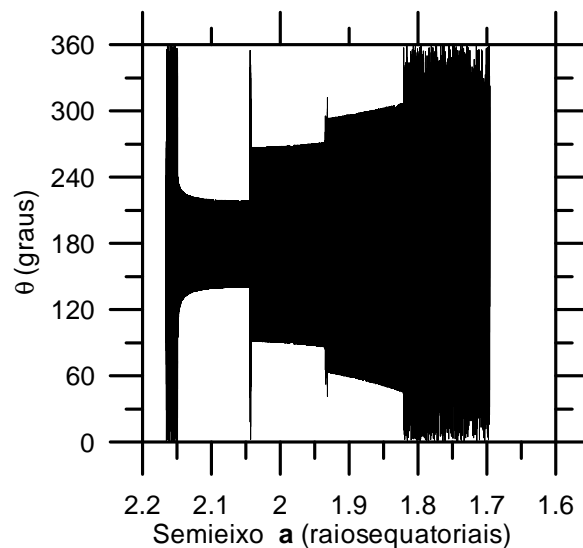
Direita: Tempo pela inclinação. O tempo de captura foi de aproximadamente 2000000 anos.



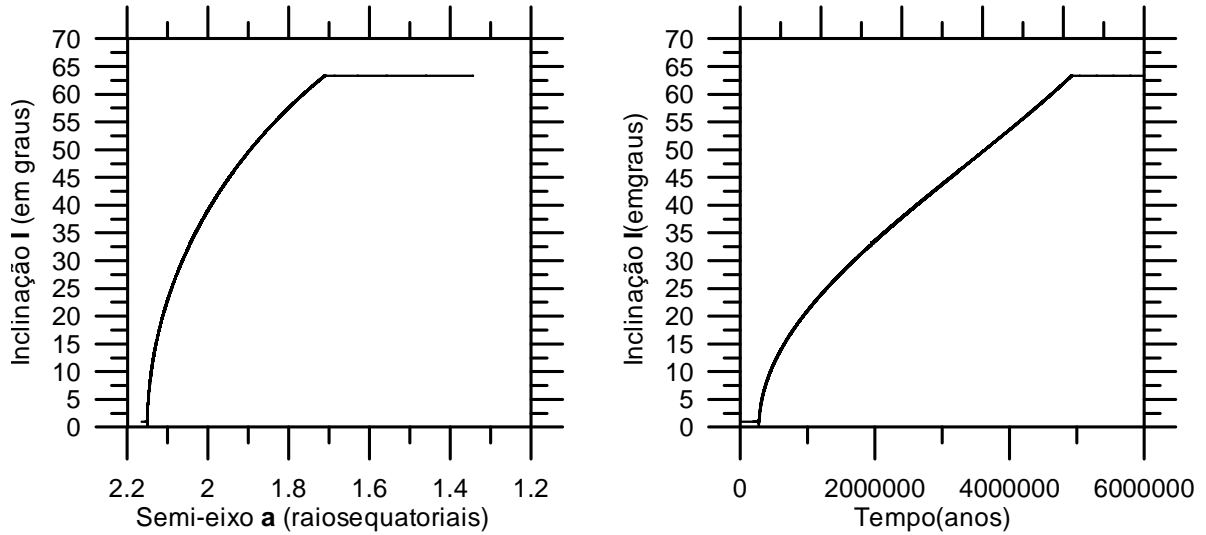
**Figura 1.b:** Libração e escape do ângulo  $\theta = 2\lambda_\odot + \Omega - 3\Omega_\odot$ . As condições iniciais são as mesmas da figura 1.a



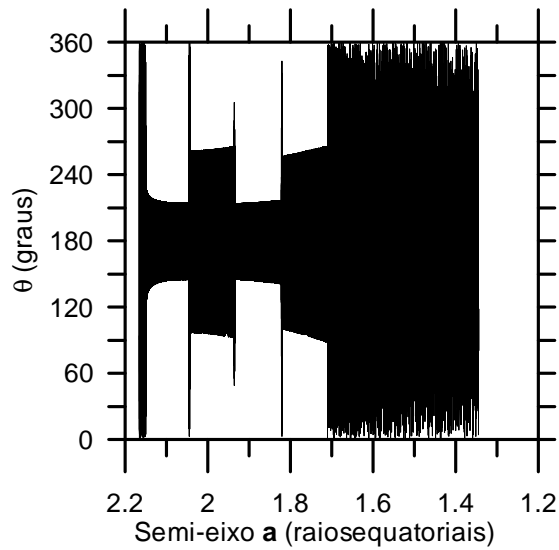
**Figura 2.a:** Esquerda: Idêntico a Figura 1.a. O escape ocorre em aproximados  $56^{\circ}$ . Os elementos orbitais iniciais de Marte são os mesmos considerados na Figura 1.a, bem como a obliquidade. Elementos orbitais iniciais do satélite:  $e = 0.01$ ,  $a = 2.165R_M$ ,  $I = 1.1^{\circ}$ ,  $\Omega = 90^{\circ}$  e  $g = 0^{\circ}$ . Direita: Tempo pela inclinação. O tempo de captura foi de aproximadamente 4150000 anos.



**Figura 2.b:** Libração e escape do ângulo  $\theta = 2\lambda_{\odot} + \Omega - 3\Omega_{\odot}$ . As condições iniciais são as mesmas da Figura 2.a.



**Figura 3.a:** Esquerda: Idêntico a Figura 1.a. O escape ocorre em aproximados  $63^{\circ}$ . Os elementos orbitais iniciais de Marte são os mesmos considerados na Figura 1.a, bem como a obliquidade. Elementos orbitais iniciais do satélite:  $e = 0.030$ ,  $a = 2.165R_M$ ,  $I = 1^{\circ}$ ,  $\Omega = 90^{\circ}$  e  $g = 0^{\circ}$ . Direita: Tempo pela inclinação. O tempo de captura foi de aproximadamente 4900000 anos.



**Figura 3.b:** Libração e escape do ângulo  $\theta = 2\lambda_{\odot} + \Omega - 3\Omega_{\odot}$ . As condições iniciais são as mesmas da Figura 3.a.

## 2.4. Inclusão dos termos de ordem $(\frac{R_p}{a})^3$ na função perturbadora do achatamento

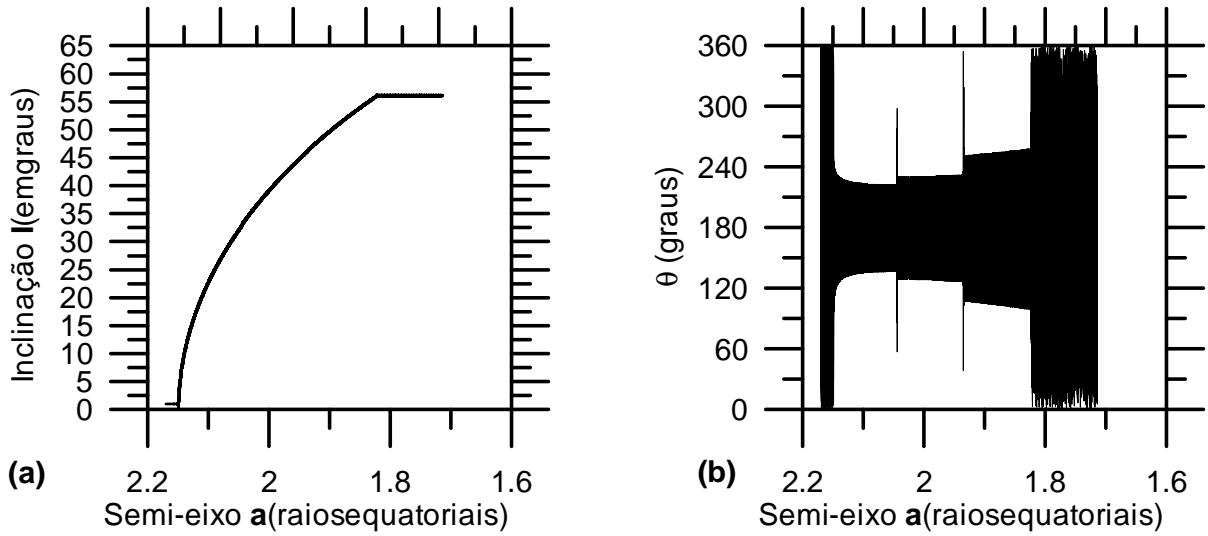
Até o presente momento, estávamos considerando apenas os termos de ordem  $(\frac{R_p}{a})^2$  na função perturbadora devido ao achatamento. Como à medida que o satélite vai caindo (e portanto  $a$  decrescendo) a razão  $\frac{R_p}{a}$  vai crescendo. Assim, precisamos analisar qual será a importância dos termos  $(\frac{R_p}{a})^3$  que foram desprezados.

Então vamos agora verificar como a inclusão destes termos podem influir na dinâmica do problema. A dedução completa da obtenção desta parcela está dada no Apêndice A e ela se escreve como:

$$\begin{aligned} \langle R_{J_3} \rangle_l &= \frac{n^2 J_2 R_p^2}{4} [(3 \cos^2 I - 1)(1 - e^2)^{-3/2}] - \\ &- \frac{3}{8} \left[ \frac{n^2 J_3 e \sin I \sin g (5 \sin^2 I - 4)}{a(1 - e^2)^{5/2}} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

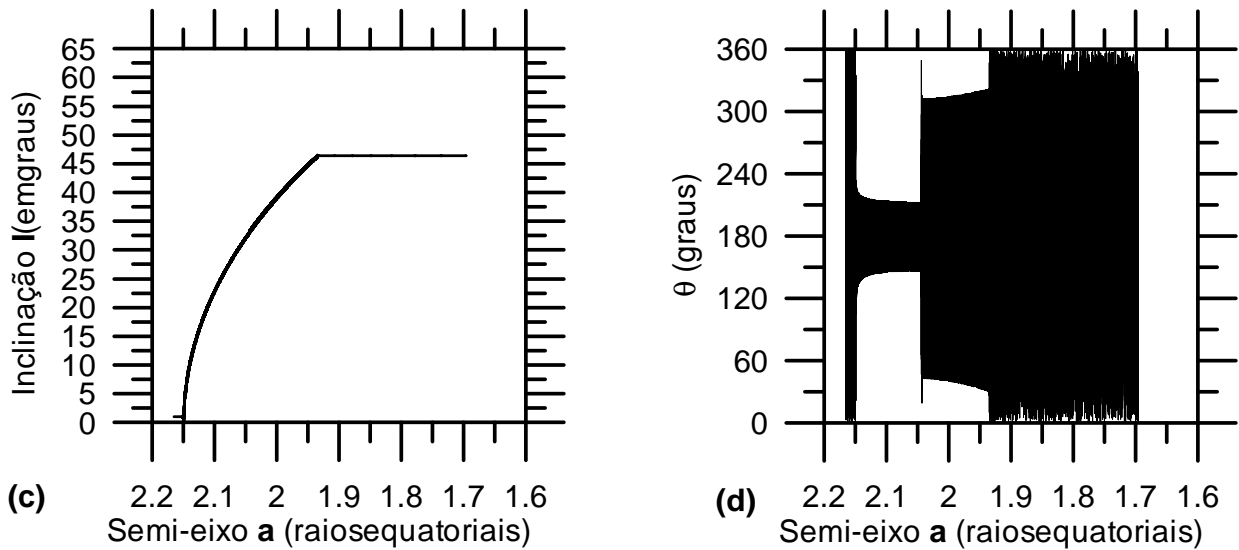
O resultado da inclusão deste termo pode ser visto na Figura 4.a. Após vários testes, praticamente não se observou quase nenhuma influência no aspecto qualitativo (ou seja, as capturas que ocorriam antes continuam ocorrendo no mesmo  $a$ ,  $t$ ,  $I$ ), isto devido ao fato de  $J_3$  ser muito pequeno ( $J_3 = 0.000036$ ).

Quanto ao aspecto numérico, o problema confirma novamente ser bastante sensível no que diz respeito aos escapes. Esta sensibilidade pode ser notada quando, por exemplo, comparamos a figura 4.a., onde o escape ocorreu em  $56^0$  com a figura 4.c. na qual o escape aconteceu em  $47^0$ . Notemos que ambas figuras possuem as mesmas condições iniciais.



**Figura 4.a:** Inclinação de Phobos no caso em que o plano de referência é o equador de Marte. A função perturbadora do achatamento foi truncada nos termos de ordem  $J_3$ . A órbita de Marte é circular. O escape ocorre em aproximados  $56^\circ$ . Os elementos orbitais iniciais de Marte são os mesmos considerados na Figura 1.a, bem como a obliquidade. O tempo de captura foi de aproximadamente 4330000 anos. Elementos orbitais iniciais do satélite:  $e = 0.015$ ,  $a = 2.165R_M$ ,  $I = 1^\circ$ ,  $\Omega = 90^\circ$  e  $g = 0^\circ$ .

**Figura 4.b:** Libração e escape do ângulo  $\theta = 2\lambda_\odot + \Omega - 3\Omega_\odot$ . As condições iniciais são as mesmas da Figura 4.a.



**Figura 4.c:** Idêntico a figura 4.a, porém a função perturbadora do achatamento foi truncada nos termos de ordem  $J_2$ . O escape ocorre em  $47^\circ$  aproximadamente. O tempo de captura foi de aproximadamente 3340000 anos.

**Figura 4.d:** Libração e escape do ângulo  $\theta = 2\lambda_\odot + \Omega - 3\Omega_\odot$ . As condições iniciais são as mesmas da figura 4.a.

## 2.5. Elipticidade da órbita de Marte

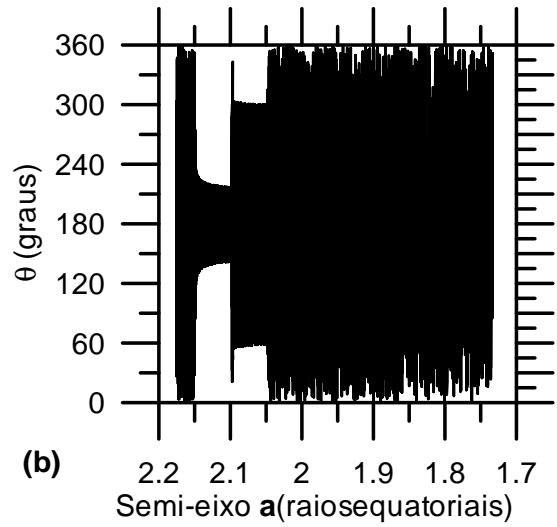
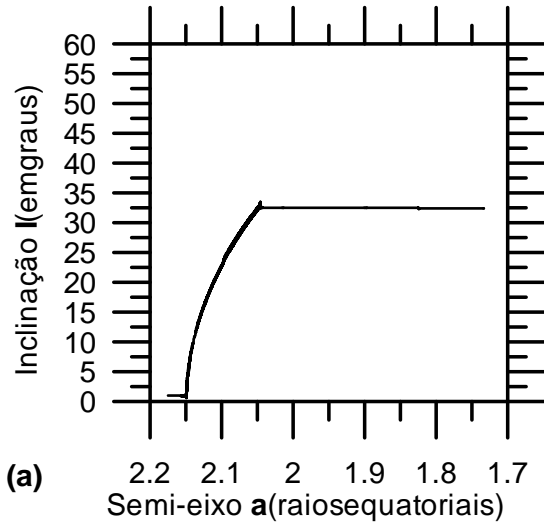
Vamos agora incluir a elipticidade da órbita de Marte, porém ainda vamos considerá-lo Kepleriano. Como em seguida tomaremos a teoria secular para a órbita de Marte (onde  $e_{Marte} \neq 0$ ) é importante examinar antes o caso Kepleriano não circular.

Analisemos as figuras **5.a** e **5.c**. Novamente, tomando o valor inicial da inclinação como sendo  $1^\circ$  (**5.a**), temos um escape por volta de  $33^\circ$ , enquanto que, mantendo as mesmas condições iniciais, mas alterando o valor inicial da inclinação para  $1.15^\circ$ , o escape ocorre em  $53^\circ$  (**5.c**), mostrando a sensibilidade que os escapes possuem perante as condições iniciais, mesmo no caso elíptico.

As figuras **6.a** e **5.c** possuem as mesmas condições iniciais. Em **6.a** a órbita é circular, enquanto que em **5.c**, elíptica. A função perturbadora devido ao achatamento está desenvolvida até termos de ordem  $O(\frac{R_p}{a})^2$  em ambas figuras. Vemos que, em **6-a**, o escape ocorre por volta de  $47^\circ$  e, em **5-c**,  $53^\circ$  aproximadamente. Portanto, as situações de escape se alteram quando muda-se da órbita circular para a elíptica.

Percebemos então que as situações de escapes continuam sendo são tremendamente sensíveis as mudanças nos valores das condições iniciais, ao tipo de órbita (circular ou elíptica) e aos acréscimos de termos ( $\frac{R_p}{a}$ ) de ordem 2 e 3 na função perturbadora devido ao achatamento.

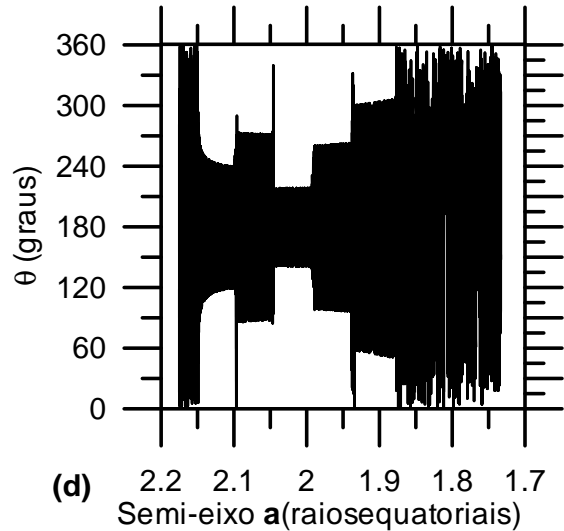
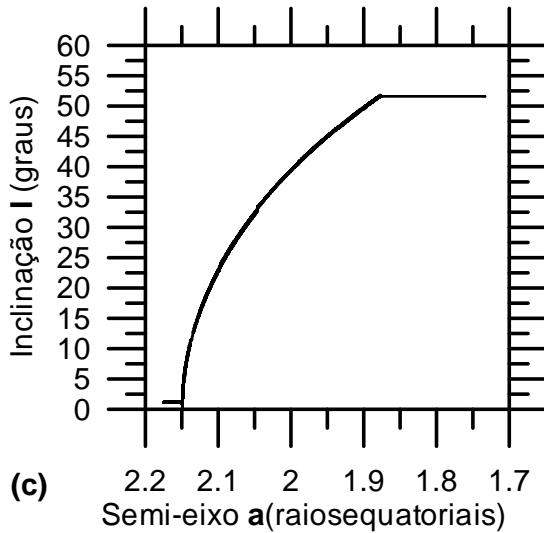




**Figura 5.a:** Inclinação de Phobos no caso em que o plano de referência é o equador de Marte. A função perturbadora do achatamento foi truncada nos termos de ordem  $J_2$ . A órbita de Marte é elíptica, embora Kepleriana. O escape ocorre em aproximados  $33^\circ$ . Os elementos orbitais iniciais de Marte são os mesmos considerados na Figura 1.a, bem como a obliquidade. O tempo de captura foi de aproximadamente 2060000 anos.

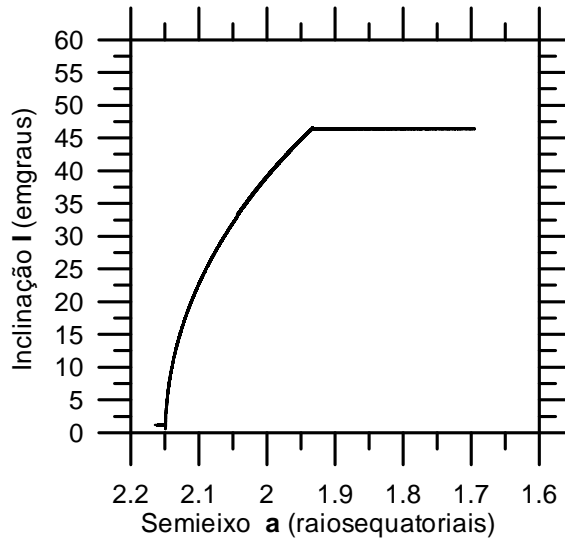
Elementos orbitais iniciais do satélite:  $e = 0.010$ ,  $a = 2.175R_M$ ,  $I = 1^\circ$ ,  $\Omega = 90^\circ$  e  $g = 0^\circ$ .

**Figura 5.b:** Libração e escape do ângulo  $\theta = 2\lambda_\odot + \Omega - 3\Omega_\odot$ . As condições iniciais são as mesmas da figura 5.a.



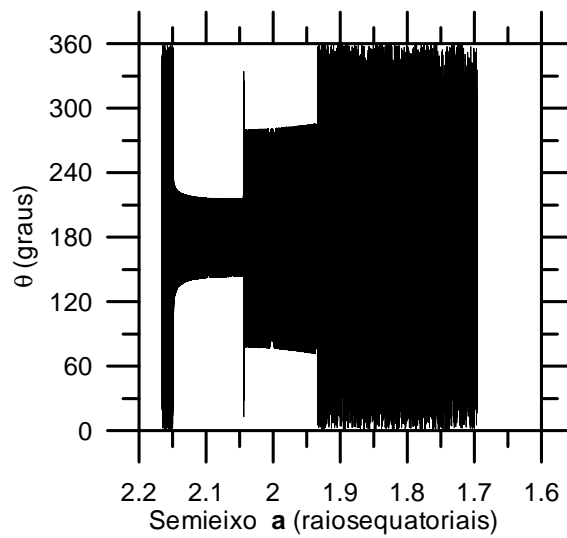
**Figura 5.c:** Mesmo modelo da figura 5.a. Elementos orbitais iniciais do satélite:  $e = 0.010$ ,  $a = 2.175R_M$ ,  $I = 1.15^\circ$ ,  $\Omega = 90^\circ$  e  $g = 0^\circ$ . O escape ocorre em aproximadamente  $53^\circ$ . O tempo de captura foi de aproximadamente 4000000 anos.

**Figura 5.d:** Libração e escape do ângulo  $\theta = 2\lambda_\odot + \Omega - 3\Omega_\odot$ . As condições iniciais são as mesmas da figura 5.c.



**Figura 6.a:** Idêntico a figura 5.c, porém consideramos a órbita de Marte circular. O escape ocorre em aproximados  $47^\circ$ . As condições iniciais de Marte e a obliquidade são as mesmas da figura 1.a. O tempo de captura foi de aproximadamente 3265000 anos.

Elementos orbitais iniciais do satélite:  $e = 0.010$ ,  $a = 2.175R_M$ ,  $I = 1.15^\circ$ ,  $\Omega = 90^\circ$  e  $g = 0^\circ$



**Figura 6.b:** Libração e escape do ângulo  $\theta = 2\lambda_\odot + \Omega - 3\Omega_\odot$ . As condições iniciais são as mesmas da figura 6.a.

## 2.6. Estudo sobre a possibilidade de uma Inclinação Universal

Gomes (1997) e Beaugé and Ferraz-Mello (1993) mostram que em ressonâncias orbitais existem as chamadas excentricidades universais, ou seja, os escapes (quando ocorrem) sempre se dão em valores pré estabelecidos que obedecem uma relação universal.

Neste trabalho, procuramos investigar a possibilidade da existência de uma inclinação universal, seguindo de perto o formalismo apresentado em Gomes (1997).

Consideremos o conjunto canônico das variáveis de Delaunay  $(L, G-L, H-G, \lambda, \varpi, \Omega)$ , onde  $L = \sqrt{\mu a}$ ,  $G = L\sqrt{1-e^2}$ ,  $H = G \cos I$ ,  $\mu = n^2 a^3$  onde  $n$  é o movimento médio do corpo perturbado.

As equações diferenciais para as 3 primeiras variáveis, considerando apenas efeitos gravitacionais são (Brouwer and Clemence 1961):

$$\dot{L} = \frac{\partial R}{\partial \lambda}; \quad \dot{G} - \dot{L} = \frac{\partial R}{\partial \varpi}; \quad \dot{H} - \dot{G} = \frac{\partial R}{\partial \Omega} \quad (11)$$

onde  $R$  é a função perturbadora, a qual pode ser desenvolvida em série:

$$R = \sum_i C_i(a, e, I) \cos \phi_i$$

com  $\phi_i = p_i \lambda - q_i \lambda_p - k_{1i} \varpi - k_{2i} \Omega$

Pela propriedade de D'Alembert,  $p_i$ ,  $q_i$ ,  $k_{1i}$  e  $k_{2i}$  são inteiros satisfazendo:

$$p_i - q_i - k_{1i} - k_{2i} = 0$$

As derivadas de  $R$  com respeito às variáveis angulares podem ser escritas como:

$$\frac{\partial R}{\partial \lambda} = \sum_i p_i \frac{\partial R}{\partial \phi_i}; \quad \frac{\partial R}{\partial \varpi} = \sum_i -k_{1i} \frac{\partial R}{\partial \phi_i}; \quad \frac{\partial R}{\partial \Omega} = \sum_i -k_{2i} \frac{\partial R}{\partial \phi_i}$$

Somando estas equações e usando a propriedade de D'Alembert, obtemos:

$$\frac{\partial R}{\partial \lambda} + \frac{\partial R}{\partial \varpi} + \frac{\partial R}{\partial \Omega} = \sum_i q_i \frac{\partial R}{\partial \phi_i}$$

Consideremos agora todos os ângulos  $\phi_j$  para os quais  $\frac{q_j}{p_j} = r$  (constante). Vamos assumir  $p$  e  $q$  como os menores  $q_j$  e  $p_j$  tais que  $\frac{q_j}{p_j} = r$ . Assim, podemos escrever:

$$\sum_i q_i \frac{\partial R}{\partial \phi_i} = \sum_j q_j \frac{\partial R}{\partial \phi_j} + \sum_k q_k \frac{\partial R}{\partial \phi_k}$$

onde  $k$  refere-se a todos os ângulos para os quais  $\frac{q_i}{p_j} \neq r$ . Como

$$\dot{L} = \frac{\partial R}{\partial \lambda} = \sum_i p_i \frac{\partial R}{\partial \phi_i}$$

e

$$\dot{L} - \sum_k p_k \frac{\partial R}{\partial \phi_k} = \sum_i p_i \frac{\partial R}{\partial \phi_i} - \sum_k p_k \frac{\partial R}{\partial \phi_k} = \sum_j p_j \frac{\partial R}{\partial \phi_j}$$

podemos escrever

$$\sum_j q_j \frac{\partial R}{\partial \phi_j} = r \sum_j p_j \frac{\partial R}{\partial \phi_j} = r \left( \dot{L} - \sum_k p_k \frac{\partial R}{\partial \phi_k} \right)$$

Somando as equações (11), obtemos:

$$\dot{H} = \frac{q}{p} \dot{L} + D \quad (12)$$

onde

$$D = \sum_k (q_k - r p_k) \frac{\partial R}{\partial \phi_k}$$

Em termos dos elementos elípticos clássicos, temos:

$$\left( \sqrt{1-e^2} \cos I - \frac{q}{p} \right) \frac{\dot{a}}{a} = 2 \left[ \frac{e\dot{e} \cos I}{\sqrt{1-e^2}} + \sqrt{1-e^2} \dot{I} \sin I \right] + \frac{2}{na^2} D$$

Com efeito, sabemos que

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \frac{1}{2} na \dot{a} \\ \dot{G} &= \frac{1}{2} na \dot{a} \sqrt{1-e^2} - \frac{na^2 e \dot{e}}{\sqrt{1-e^2}} \\ \dot{H} &= \frac{1}{2} na \dot{a} \sqrt{1-e^2} \cos I - \frac{na^2 e \dot{e}}{\sqrt{1-e^2}} \cos I - \\ &\quad na^2 \sqrt{1-e^2} \dot{I} \sin I \end{aligned}$$

Substituindo estas derivadas em (12), segue a igualdade.

Agora, quando introduzimos no sistema uma força não-conservativa, a equação (11) torna-se:

$$\dot{L} = \frac{\partial R}{\partial \lambda} + S_L; \quad \dot{G} - \dot{L} = \frac{\partial R}{\partial \varpi} + S_G - S_L; \quad \dot{H} - \dot{G} = \frac{\partial R}{\partial \Omega} + S_H - S_G$$

$S_L$ ,  $S_G$  e  $S_H$  são perturbações médias vindas das forças não-conservativas consideradas. Elas são deduzidas usando as equações de Gauss. Com esses novos termos, usando raciocínios análogos na obtenção de (12), não é difícil chegarmos em :

$$\dot{H} - \frac{q}{p}\dot{L} = S_H - \frac{q}{p}S_L + D \quad (13)$$

Suponhamos que exista apenas uma única ressonância e consideremos na função perturbadora o argumento  $\phi$ . Assim, a dependência de  $R$  em relação a  $\lambda$ ,  $\varpi$  e  $\Omega$  se fará sempre através de:

$$\phi = p\lambda - q\lambda_p - k_1\varpi - k_2\Omega$$

Neste caso, além da equação (13), nós podemos definir outra restrição para os elementos orbitais. Somando as 2 primeiras equações de (11), obtemos:

$$\dot{L} + \dot{G} - \dot{L} = \frac{\partial R}{\partial \lambda} + \frac{\partial R}{\partial \varpi} \Rightarrow \dot{G} = \frac{\partial R}{\partial \lambda} + \frac{\partial R}{\partial \varpi}$$

Agora, como

$$\dot{L} = \frac{\partial R}{\partial \lambda} = p \frac{\partial R}{\partial \phi} \quad \frac{\partial R}{\partial \varpi} = -k_1 \frac{\partial R}{\partial \phi}$$

temos

$$\dot{G} = (p - k_1) \frac{\partial R}{\partial \phi}$$

Sendo assim,

$$\dot{G} = (p - k_1) \frac{\partial R}{\partial \phi} = (p - k_1) \frac{\dot{L}}{p}$$

Agora, se considerarmos uma força não-conservativa agindo no corpo de menor massa, podemos escrever:

$$\dot{G} - \left(1 - \frac{k_1}{p}\right) \dot{L} = S_G - \left(1 - \frac{k_1}{p}\right) S_L$$

Em termos dos elementos clássicos orbitais, a equação acima torna-se:

$$\dot{e} = S_e + \frac{1}{2e} \left[ \left( \frac{p - k_1}{p} \right) \sqrt{1 - e^2} - (1 - e^2) \right] \frac{S_a}{a}$$

E, finalmente, considerando a equação (13) ( $D = 0$  para a função perturbadora média) e usando os resultados já obtidos, temos:

$$(\dot{\cos I}) = S_{\cos I} - \frac{1}{2\sqrt{1 - e^2}} \left[ \frac{q}{p} - \left( 1 - \frac{k_1}{p} \right) \cos I \right] \frac{S_a}{a} \quad (14)$$

onde  $S_a$ ,  $S_e$  e  $S_{\cos I}$  são os termos não conservativos médios (Gomes 1995).

Da equação (14) podemos obter a inclinação universal, bastando para isso anular o termo entre colchetes. Isto fornece a seguinte relação :

$$\cos I = \frac{q}{p}$$

para o caso de uma ressonância específica onde se tomou  $k_1 = 0$  (Gomes 1997).

Assim, até aqui reproduzimos o raciocínio realizado em Gomes (1997). Agora, observemos que em nosso caso o ângulo  $\phi$  é:  $2\lambda_{\odot} + \Omega - 3\Omega_{\odot}$ . A diferença fundamental está na ausência da longitude média  $\lambda$  do satélite em  $\phi$ . Como a variação do semi-eixo está diretamente relacionada com  $\lambda$ , então em princípio, a ausência de  $\lambda$  em  $\phi$  não permite o mesmo procedimento usado em Gomes (1997).

Vamos então seguir um procedimento similar ao acima exposto, tentando obter uma expressão semelhante a equação (14).

Consideremos

$$\phi_i = p_i \lambda - q_i \lambda_{\odot} - k_{1i} \varpi - c_i \Omega - k_{3i} \Omega_{\odot}$$

satisfazendo a propriedade de D'Alembert

$$q_i = p_i - k_{1i} - c_i - k_{3i}$$

Como

$$\frac{\partial R}{\partial \Omega_{\odot}} = \sum_i -k_{3i} \frac{\partial R}{\partial \phi_i}$$

temos

$$\frac{\partial R}{\partial \lambda} + \frac{\partial R}{\partial \varpi} + \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\partial R}{\partial \Omega_{\odot}} = \sum_i q_i \frac{\partial R}{\partial \phi_i}$$

E portanto

$$\dot{H} + \frac{\partial R}{\partial \Omega_{\odot}} = \sum_i q_i \frac{\partial R}{\partial \phi_i}$$

Agora, consideremos todos os ângulos  $\phi_j$  para os quais  $\frac{q_j}{c_j} = r$ . Assumiremos  $p$  e  $c$  como os menores  $q_j$  e  $c_j$  tais que  $\frac{q_j}{c_j} = r$ , ou seja,  $\frac{q}{c} = r$ . Ainda mais, escrevendo:

$$\begin{aligned} \sum_i q_i \frac{\partial R}{\partial \phi_i} &= \sum_j q_j \frac{\partial R}{\partial \phi_j} + \sum_k q_k \frac{\partial R}{\partial \phi_k} \\ \sum_j c_j \frac{\partial R}{\partial \phi_j} &= \sum_i c_i \frac{\partial R}{\partial \phi_i} - \sum_k c_k \frac{\partial R}{\partial \phi_k} \end{aligned}$$

onde o índice  $k$  refere-se a todos os ângulos para os quais  $\frac{q_i}{c_j} \neq r$ , temos

$$\sum_j q_j \frac{\partial R}{\partial \phi_j} = r \sum_j c_j \frac{\partial R}{\partial \phi_j}$$

Como

$$\sum_i c_i \frac{\partial R}{\partial \phi_i} = -\frac{\partial R}{\partial \Omega} = \dot{G} - \dot{H}$$

temos

$$\begin{aligned} \dot{H} + \frac{\partial R}{\partial \Omega_{\odot}} &= \sum_i q_i \frac{\partial R}{\partial \phi_i} = \sum_j q_j \frac{\partial R}{\partial \phi_j} + \sum_k q_k \frac{\partial R}{\partial \phi_k} \implies \dot{H} + \frac{\partial R}{\partial \Omega_{\odot}} = r \sum_j c_j \frac{\partial R}{\partial \phi_j} + \sum_k q_k \frac{\partial R}{\partial \phi_k} \implies \\ \implies \dot{H} + \frac{\partial R}{\partial \Omega_{\odot}} &= r \left[ \dot{G} - \dot{H} - \sum_k c_k \frac{\partial R}{\partial \phi_k} \right] + \sum_k q_k \frac{\partial R}{\partial \phi_k} \implies \\ \implies \dot{H} + \frac{\partial R}{\partial \Omega_{\odot}} &= r \dot{G} - r \dot{H} + \sum_k (q_k - r c_k) \frac{\partial R}{\partial \phi_k} \end{aligned}$$

Assim,

$$\dot{H} + \frac{q}{c} \dot{H} = r \dot{G} - \frac{\partial R}{\partial \Omega_{\odot}} + S, \quad S = \sum_k (q_k - r c_k) \frac{\partial R}{\partial \phi_k}$$

Agora quando introduzimos no sistema uma força não conservativa (maré), temos:

$$\dot{H} = \frac{\partial R}{\partial \lambda} + \frac{\partial R}{\partial \varpi} + \frac{\partial R}{\partial \Omega} + S_H \implies \dot{H} = \sum_j q_j \frac{\partial R}{\partial \phi_j} + \sum_k q_k \frac{\partial R}{\partial \phi_k} - \frac{\partial R}{\partial \Omega_\odot} + S_H$$

E portanto,

$$\dot{H} = r \left[ S_H - S_G + \dot{G} - \dot{H} - \sum_k c_k \frac{\partial R}{\partial \phi_k} \right] + \sum_k q_k \frac{\partial R}{\partial \phi_k} - \frac{\partial R}{\partial \Omega_\odot} + S_H$$

Finalmente,

$$\dot{H} = rS_H - rS_G + r\dot{G} - r\dot{H} - \frac{\partial R}{\partial \Omega_\odot} + S_H + S \quad (\star)$$

Agora, consideraremos apenas o ângulo ressonante em nossa função perturbadora (e portanto,  $S = 0$ ). Seja:

$$\phi = p\lambda - q\lambda_\odot - k_1\varpi - c\Omega - k_3\Omega_\odot$$

Mas, ao somarmos as equações :  $\dot{L} = \frac{\partial R}{\partial \lambda} + S_L$  e  $\dot{G} - \dot{L} = \frac{\partial R}{\partial \varpi} + S_G - S_L$ , temos:

$$\dot{G} = \frac{\partial R}{\partial \lambda} + \frac{\partial R}{\partial \varpi} + S_G$$

Como em nosso caso  $p = 0, q = -2, k_1 = 0, c = -1$  e  $k_3 = 3$ , temos que  $\frac{\partial R}{\partial \lambda} = \frac{\partial R}{\partial \varpi} = 0$ . Então :

$$\dot{G} = S_G$$

Substituindo em  $(\star)$ , temos:

$$(1+r)\dot{H} = (1+r)S_H - \frac{\partial R}{\partial \Omega_\odot} \implies \dot{H} = S_H - \left( \frac{1}{1+r} \right) \frac{\partial R}{\partial \Omega_\odot}$$

Como

$$\dot{H} = \dot{G} \cos I + G(\dot{\cos I})$$

$$S_H = S_G \cos I + GS_{\cos I}$$

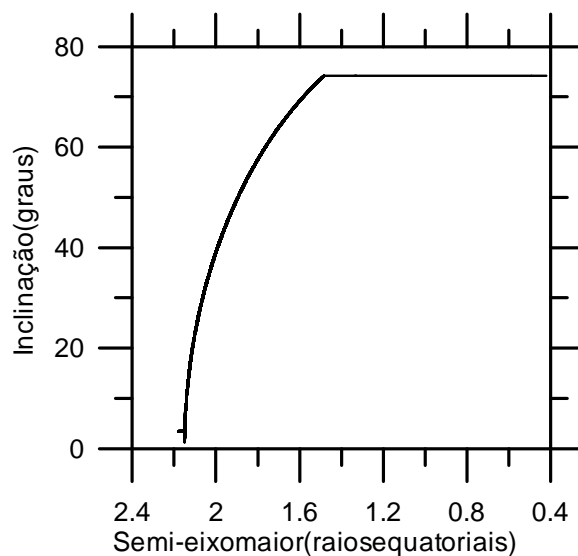


temos:

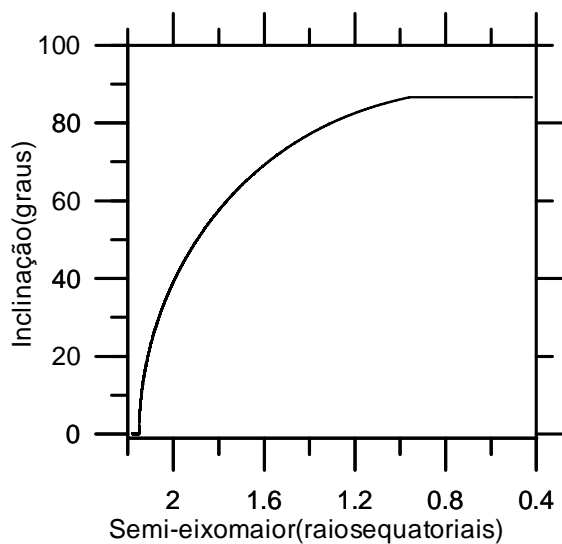
$$(\dot{\cos I}) = S_{\cos I} - \frac{1}{G(1+r)} \frac{\partial R}{\partial \Omega_{\odot}}$$

Com isto, vemos que o termo a direita na equação acima, em geral, não se anula durante todo o processo. Assim, as experiências numéricas parecem confirmar (figura **7.a**, figura **7.b**) que os escapes não seguem um padrão, o que sugere a não existência de uma inclinação universal. Nas figuras acima mencionadas, os escapes ocorreram em  $I \approx 74^{\circ}$  e  $I \approx 87^{\circ}$  respectivamente, onde na função perturbadora só se considerou um único cosseno ressonante. As condições iniciais estão dadas nas figuras e em ambos os casos as equações foram escritas em variáveis regulares:

$$\begin{aligned} p &= \tan I \sin \Omega \\ q &= \tan I \cos \Omega \end{aligned}$$



**Figura 7.a:** Consideramos apenas o cosseno dominante na função perturbadora solar. Os elementos orbitais iniciais de Marte são os mesmos da figura 1.a. A obliquidade foi tomada como sendo  $40^\circ$ . O escape ocorre em aproximados  $74^\circ$ . O tempo de captura foi de aproximadamente 6040000 anos. Elementos orbitais iniciais do satélite:  $e = 0.03$ ,  $a = 2.18R_M$ ,  $I = 3.4^\circ$ ,  $\Omega = 90^\circ$  e  $g = 0^\circ$ .

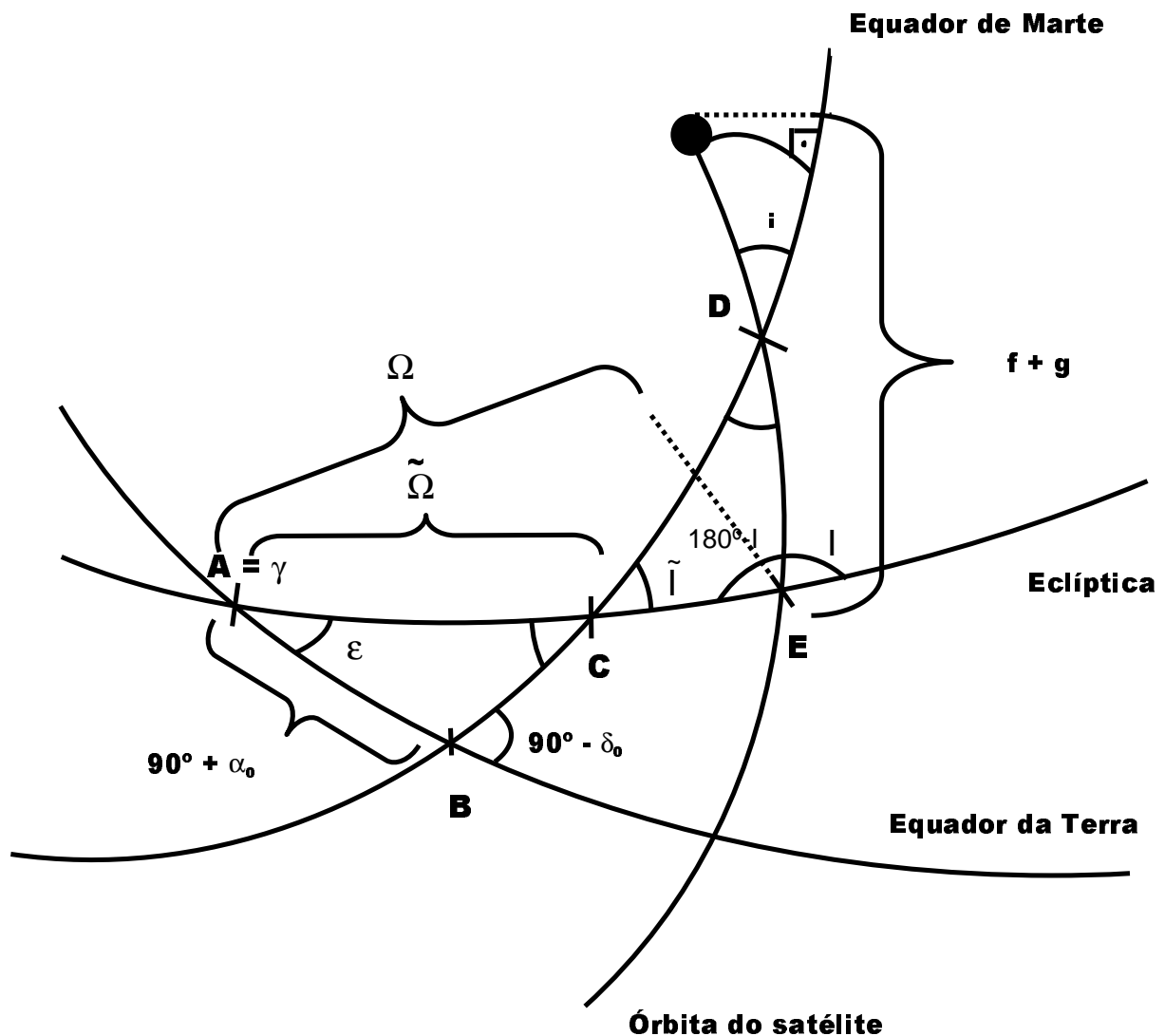


**Figura 7.b:** Idêntico a figura 7.a. O escape ocorre em aproximados  $87^\circ$ . O tempo de captura foi de aproximadamente 6530000 anos. Elementos orbitais iniciais do satélite:  $e = 0.03$ ,  $a = 2.18R_M$ ,  $I = 0.1^\circ$ ,  $\Omega = 90^\circ$  e  $g = 0^\circ$ .

## 2.7. Introdução da Perturbação Planetária e das Equações da Precessão

Anteriormente observamos como ocorre a passagem pela ressonância em  $a = 2.1490$ , quando o argumento ressonante é  $2\lambda_{\odot} + \Omega - 3\Omega_{\odot}$ , na situação em que se considerava o equador de Marte como sendo o plano de referência e sua excentricidade e inclinação constantes. Contudo, uma situação mais realista seria considerar a órbita de Marte como sendo aquela fornecida pelas teorias planetárias, ao invés de considerá-la puramente kepleriana e circular.

Como as teorias seculares dos planetas são obtidas usando o plano de referência da Eclíptica (Laskar (1988), Bretagnon (1973)), devemos então realizar a montagem do nosso problema considerando este plano como sendo referencial. Sendo assim, consideremos a seguinte geometria:



onde  $\tilde{I}$  e  $\tilde{\Omega}$  são os ângulos que dão a orientação do equador do planeta (precessão).

Resolvendo simplesmente algumas relações dos triângulos esféricos acima, temos que:

$$\sin \phi = \sin(f + g)[\cos \tilde{I} \sin I - \sin \tilde{I} \cos I \cos(\Omega - \tilde{\Omega})] - \cos(f + g)[\sin \tilde{I} \sin(\Omega - \tilde{\Omega})]$$

Conforme vimos anteriormente a contribuição de  $\langle R_{J_3} \rangle_l$  é desprezível do ponto de vista qualitativo. Sendo assim, consideraremos somente  $\langle R_{J_2} \rangle_l$  nesta secção .

No plano atual, em virtude do  $\sin \phi$  que obtivemos temos:

$$\langle R_{J_2} \rangle_l = -\frac{n^2 J_2}{2} \left[ (1 - e^2)^{-3/2} \left( \frac{3}{2}(A^2 + B^2) - 1 \right) \right]$$

onde

$$\begin{aligned} A &= \cos \tilde{I} \sin I - \sin \tilde{I} \cos I \cos(\Omega - \tilde{\Omega}) \\ B &= \sin \tilde{I} \sin(\Omega - \tilde{\Omega}) \end{aligned}$$

Como sempre, para comprovar as fórmulas obtidas neste novo sistema, devemos fazer os devidos testes. Então fixamos os valores de  $\tilde{I}$  e  $\tilde{\Omega}$ . O valor de  $\tilde{I}$  pode ser obtido para a época conforme mostramos a seguir usando Davies (1986) e algumas relações de triângulos esféricos.

No triângulo esférico  $ABC$ , temos:

$$\cos \tilde{I} = -\cos(90^\circ + \delta_0) \cos \epsilon_T + \sin(90^\circ + \delta_0) \sin \epsilon_T \cos(90^\circ + \alpha_0)$$

Tomando-se  $\alpha_0 = 317.681^\circ$  e  $\delta_0 = 52.886^\circ$  segundo Davies (1986) e considerando a obliquidade da Terra como sendo  $\epsilon_T = 23.44^\circ$ , temos que  $\tilde{I} = 26.55467005^\circ$ . Fixemos  $\tilde{\Omega}$  como sendo zero.

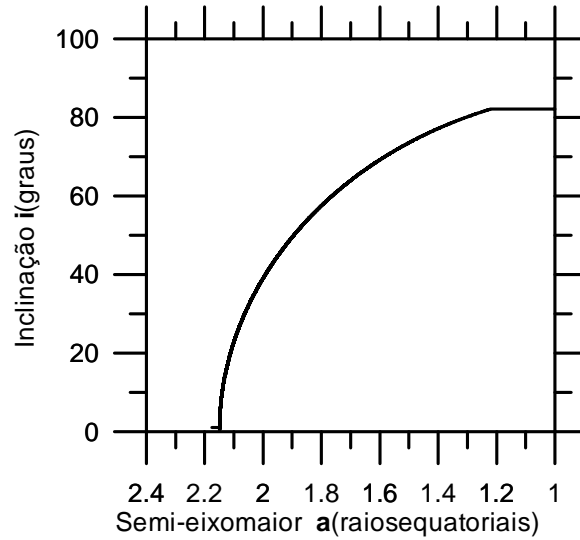
Agora, precisamos tomar as condições iniciais em relação a esse novo plano de referência . Para isto, consideremos uma relação de triângulos esféricos em  $CDE$ :

$$\cos \Omega = \frac{\cos(i) + \cos(\tilde{I}) \cos(180^\circ - I)}{\sin(180^\circ - I) \sin(\tilde{I})} \quad (15)$$

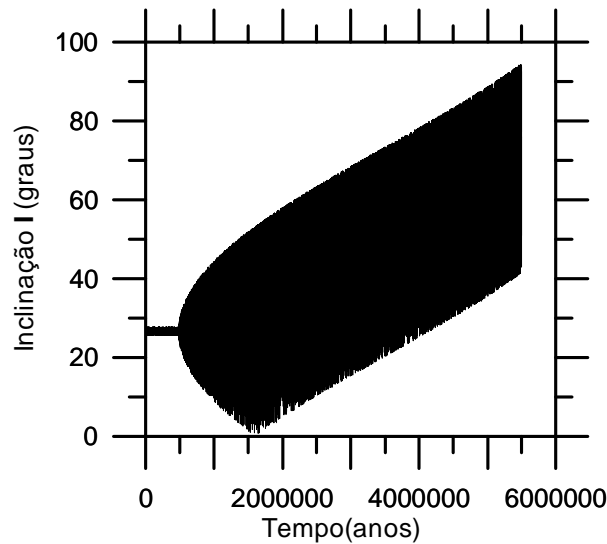
onde  $I$  é a inclinação do satélite relativamente ao plano inercial adotado.

Com isso, considerando  $i = 1^\circ$  (valor da inclinação do satélite em relação ao plano do equador de Marte) obtemos  $I = 26.572125^\circ$  e  $\Omega = 2.235969886^\circ$ .

Neste novo sistema, o ângulo  $I$  varia intensamente (ao contrário do caso em que se considera o equador) chegando a atingir o valor zero, caracterizando uma singularidade nas equações de Lagrange, como podemos perceber na figura **8.b.**. Logo, faz-se necessária uma mudança de variáveis.



**Figura 8.a:** Inclinação de Phobos já reduzido ao Equador. A função perturbadora do achatamento foi truncada nos termos de ordem  $J_2$ . A órbita de Marte é circular. Apenas o cosseno dominante em  $R_\odot$  ( $\cos(2\lambda_\odot - 2\Omega)$ ). O escape ocorre em  $82^\circ$  aproximadamente. Os elementos orbitais iniciais de Marte e a obliquidade são os mesmos da figura 1.a. O tempo de captura foi de aproximadamente 6350000 anos. Elementos orbitais iniciais do satélite:  $e = 0.015$ ,  $a = 2.175R_M$ ,  $I = 26.572125^\circ$ ,  $\Omega = 2.235969886^\circ$  e  $g = 0^\circ$



**Figura 8.b:** Variação do ângulo  $I$  (inclinação do satélite em relação a Eclíptica)

Consideremos a mudança sugerida por Brouwer (1961):

$$\begin{aligned} p &= \tan I \sin \Omega \\ q &= \tan I \cos \Omega \end{aligned}$$

As equações de Lagrange nessas novas variáveis são (Apêndice A):

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{(1+p^2+q^2)^{3/2}}{na^2(1-e^2)^{1/2}} \frac{\partial R}{\partial q} - \\ &\quad - \frac{p}{na^2(1-e^2)^{1/2}(1+p^2+q^2)^{-1/2}[1+(1+p^2+q^2)^{-1/2}]} \left( \frac{\partial R}{\partial \varpi} \right) \\ \frac{dq}{dt} &= -\frac{(1+p^2+q^2)^{3/2}}{na^2(1-e^2)^{1/2}} \frac{\partial R}{\partial p} - \\ &\quad - \frac{q}{na^2(1-e^2)^{1/2}(1+p^2+q^2)^{-1/2}[1+(1+p^2+q^2)^{-1/2}]} \left( \frac{\partial R}{\partial \varpi} \right) \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \varpi} \\ \frac{d\varpi}{dt} &= \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2}} \frac{p(1+p^2+q^2)^{1/2}}{[1+(1+p^2+q^2)^{-1/2}]} \frac{\partial R}{\partial p} + \\ &\quad + \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2}} \frac{q(1+p^2+q^2)^{1/2}}{[1+(1+p^2+q^2)^{-1/2}]} \frac{\partial R}{\partial q} \end{aligned} \tag{16}$$

E a função perturbadora do achatamento até a ordem  $O(\frac{R_p}{a})^2$ :

$$\langle R_{J_2} \rangle_l = \frac{3C_0(S^2 + T^2 - \frac{2}{3})}{(1-e^2)^{3/2}}$$

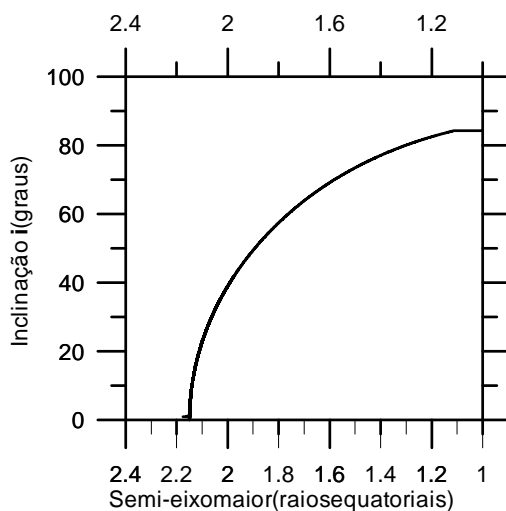
onde:

$$C_0 = -\frac{1}{4a^3} GM J_2 R^2$$

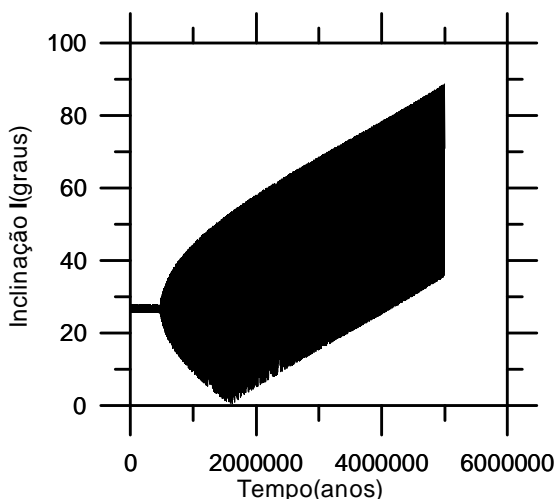
$$\begin{aligned} S^2 + T^2 &= \sin^2 \tilde{I} + \cos^2 \tilde{I} \left( \frac{p^2 + q^2}{1 + p^2 + q^2} \right) - 2 \sin \tilde{I} \cos \tilde{I} \cos \tilde{\Omega} q (1 + p^2 + q^2)^{-1} \\ &\quad - 2 \sin \tilde{I} \cos \tilde{I} \sin \tilde{\Omega} p (1 + p^2 + q^2)^{-1} - \sin^2 \tilde{I} \cos^2 \tilde{\Omega} q^2 (1 + p^2 + q^2)^{-1} \\ &\quad - 2 \sin \tilde{\Omega} \cos \tilde{\Omega} \sin^2 \tilde{I} p q (1 + p^2 + q^2)^{-1} - \sin^2 \tilde{I} \sin^2 \tilde{\Omega} p^2 (1 + p^2 + q^2)^{-1} \end{aligned}$$

Nota-se que, como se esperava, ocorre a captura exatamente como antes, na posição prevista, já que até agora apenas foram introduzidas novas variáveis  $(p, q)$  no lugar de  $(I, \Omega)$ . Na figura **8.a** (circular) e **9.a** (elíptico), foi tomado apenas um cosseno em  $R_\odot$

(aquele responsável pela captura). Observemos que no caso anterior em que se usava o equador como plano de referência, tal cosseno era  $\cos(2\lambda_{\odot} + \Omega - 3\Omega_{\odot})$  e agora na nova geometria este termo se escreve como  $\cos(2\lambda_{\odot} - 2\Omega)$ . Os valores de escape são agora  $82^{\circ}$  e  $84^{\circ}$ , respectivamente (já relacionados ao equador).

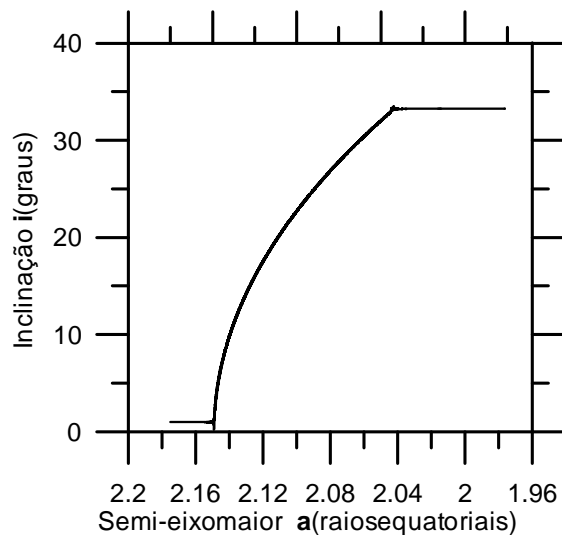


**Figura 9.a:** Idêntico a figura 8.a, porém agora a órbita de Marte é elíptica. O escape ocorre em aproximados  $84^{\circ}$ . Os elementos orbitais iniciais de Marte e a obliquidade são os mesmos considerados na figura 1.a. O tempo de captura foi de aproximadamente 6440000 anos. Elementos orbitais iniciais do satélite:  $e = 0.015$ ,  $a = 2.175R_M$ ,  $I = 26.572125^{\circ}$ ,  $\Omega = 2.235969886^{\circ}$  e  $g = 0^{\circ}$

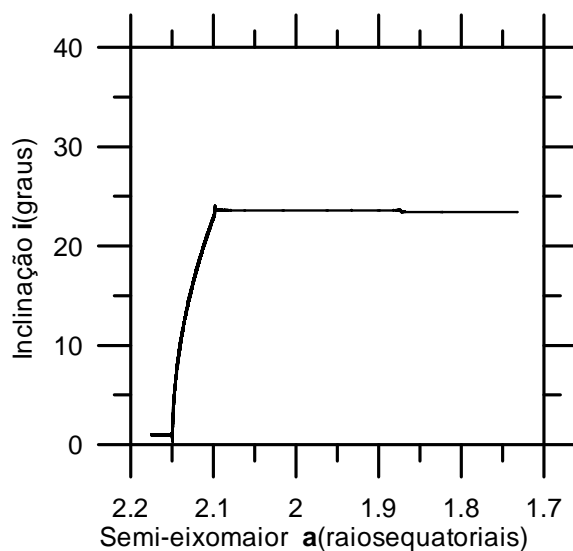


**Figura 9.b:** Variação do ângulo  $I$  (inclinação do satélite em relação a Eclíptica)

Nas figuras **10.a** e **10.b**, incluímos todos os cossenos em  $R_{\odot}$ , mantendo as mesmas condições iniciais estabelecidas nas figuras **8.a** e **9.a**, ocorrendo um escape em  $33^{\circ}$  (10-a, circular) e  $24^{\circ}$  (10-b, elíptico).



**Figura 10.a:** Mesmo modelo da figura 8.a, porém agora consideraremos todos cossenos em  $R_{\odot}$ . A órbita de Marte é circular. O escape ocorre em aproximados  $33^{\circ}$ . Os elementos orbitais iniciais de Marte e a obliquidade são as mesmas da figura 1.a. O tempo de captura foi de aproximadamente 2206000 anos. Elementos orbitais iniciais do satélite:  $e = 0.015$ ,  $a = 2.175R_M$ ,  $I = 26.572125^{\circ}$ ,  $\Omega = 2.235969886^{\circ}$  e  $g = 0^{\circ}$



**Figura 10.b:** Idem a figura 10.a, mas agora a órbita de Marte é elíptica. O escape ocorre em  $24^{\circ}$  aproximadamente. O tempo de captura foi de aproximadamente 1419000 anos.



Feito estes testes iniciais, nosso próximo passo será introduzir a teoria secular de Bretagnon (1973). Para isso, utilizaremos a seguinte notação:

$$\begin{aligned}
e_{\odot} \sin \varpi_{\odot} &= \sum_j M_j \sin(S_j t + \epsilon_j) \\
e_{\odot} \cos \varpi_{\odot} &= \sum_j M_j \cos(S_j t + \epsilon_j) \\
2 \sin \frac{I_{\odot}}{2} \sin \Omega_{\odot} &= \sum_j N_j \sin(S'_j t + \delta_j) \\
2 \sin \frac{I_{\odot}}{2} \cos \Omega_{\odot} &= \sum_j N_j \cos(S'_j t + \delta_j)
\end{aligned}$$

Assim, consideramos a tabela completa conforme em Ward (1979) (ver Apêndice A). Lembremos que até agora a órbita de Marte era considerada fixa. Neste momento, através das relações acima, passaremos a computar tais variações e a mudança do referencial se deveu a este fato.

Devido à perturbação solar, sabemos que o equador sofre perturbações significativas, ou seja, o equador precessiona com um período de aproximadamente 172000 anos. Como é sabido,  $\tilde{I}$  e  $\tilde{\Omega}$  são funções do tempo e são estes ângulos que dão a orientação do equador do planeta. Devemos então obter suas equações diferenciais de longo período. Estas equações foram deduzidas no plano da Eclíptica 1850 (vide Apêndice). As equações de  $\dot{\tilde{I}}, \dot{\tilde{\Omega}}$  considerando-se o Sol como o único perturbador do equador de Marte são:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\Omega}} &= \frac{3Gm_{\odot}MR_p^2J_2}{Cr} \frac{1}{4} \left\{ \cos \tilde{I} (1 - 3 \cos^2 I_{\odot}) + \sin^2 I_{\odot} \cos \tilde{I} \cos(2\tilde{\Omega} - 2\Omega_{\odot}) + \right. \\
&\quad \left. \frac{2 \sin I_{\odot} \cos I_{\odot} \cos(2\tilde{I}) \cos(\tilde{\Omega} - \Omega_{\odot})}{\sin \tilde{I}} \right\} \frac{1}{a_{\odot}^3 (1 - e_{\odot}^2)^{3/2}} \\
\dot{\tilde{I}} &= -\frac{3Gm_{\odot}MR_p^2J_2}{Cr} \frac{1}{4} \left\{ -\sin \tilde{I} \sin^2 I_{\odot} \sin(2\tilde{\Omega} - 2\Omega_{\odot}) - \right. \\
&\quad \left. \cos \tilde{I} \sin(2I_{\odot}) \sin(\tilde{\Omega} - \Omega_{\odot}) \right\} \frac{1}{a_{\odot}^3 (1 - e_{\odot}^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

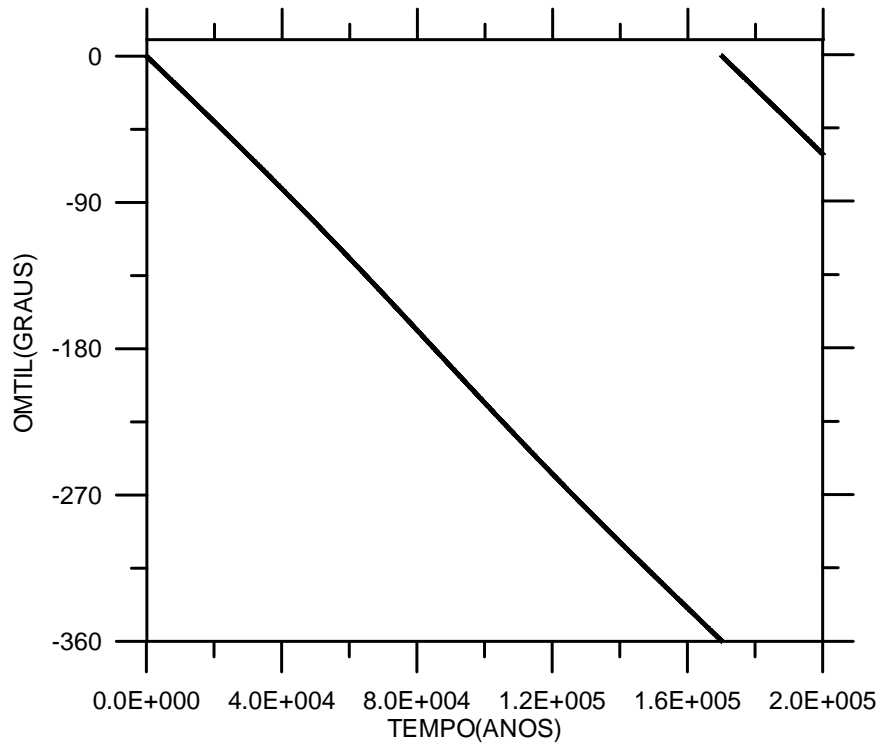
Sendo assim, além da inserção da teoria secular de Marte, devemos computar a variação de  $\tilde{I}$ ,  $\tilde{\Omega}$  através de (17). Para testar (17), uma simples integração isolada comprova o valor de 172000 anos para a precessão do equador de Marte (figura 11)

Inicialmente, consideremos apenas o cosseno dominante em  $R_{\odot}$ . O resultado disto pode ser visto na figura 12.a e 12.b.

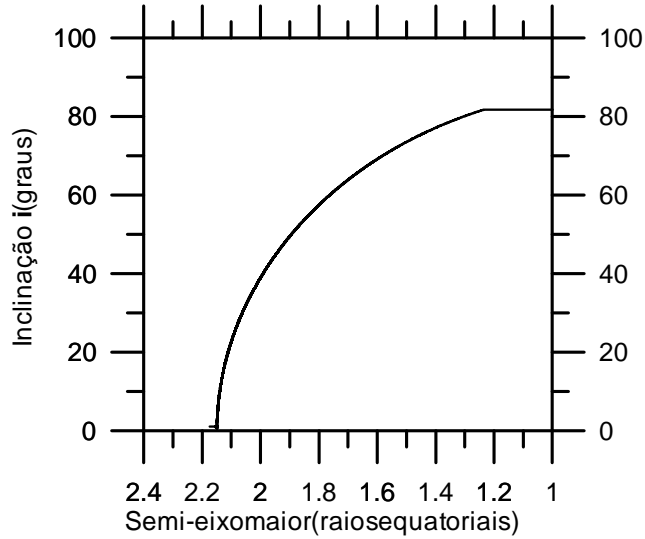
Na figura 12.a temos uma captura seguida de escape em aproximados  $82^{\circ}$ . Já a figura 12.b ilustra a variação da inclinação  $I$  (medida em relação a Eclíptica 1850), onde podemos observar o surgimento de singularidade nas equações de Lagrange.

Ao acrescentarmos todos os cossenos em  $R_{\odot}$ , obtivemos um escape em aproximadamente  $67^{\circ}$  (Figura 13.a). A evolução do ângulo  $I$  pode ser vista na Figura 13.b.

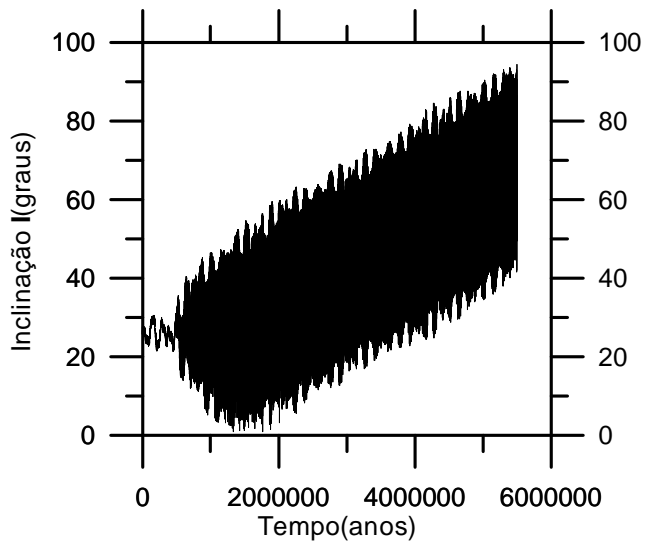
Com isso, percebemos que o acréscimo das perturbações planetárias, qualitativamente dizendo, pouco influenciaram nas situações de captura-escape, embora fossem importantes para se fazer uma análise mais realista deste problema.



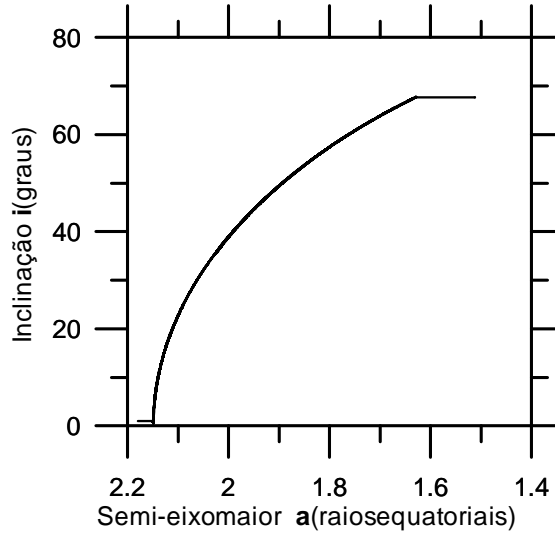
**Figura 11:** Integração das equações da precessão (17), mostrando que o período da precessão do equador de Marte é aproximadamente 172000 anos. Consideramos o momento de inércia como sendo  $C = 0.366m_M$  (onde  $m_M$  é a massa de Marte). Condições iniciais:  $\tilde{\Omega} = 0^{\circ}$  e  $\tilde{I} = 26.55^{\circ}$



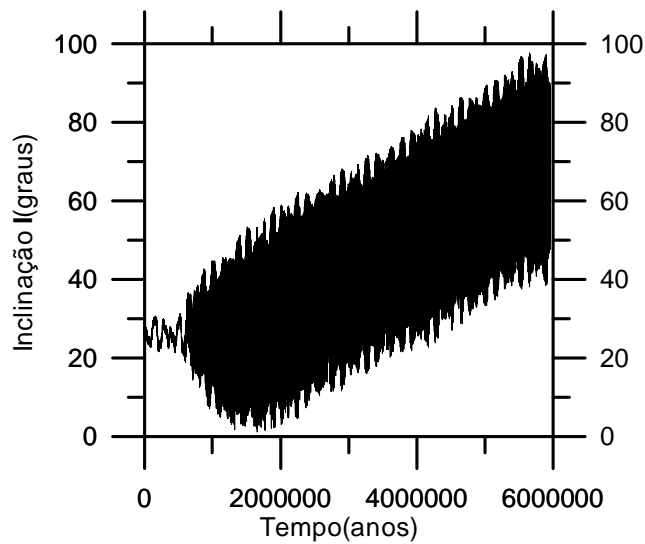
**Figura 12.a:** Inclinação de Phobos reduzido ao plano do Equador. A teoria secular e as equações da precessão foram introduzidas. Apenas o cosseno dominante em  $R_{\odot}$  ( $\cos(2\lambda_{\odot} - 2\Omega)$ ). O escape ocorre em  $82^{\circ}$ . O tempo de captura foi de aproximadamente 6290000 anos. Valores iniciais:  $\tilde{\Omega} = 0^{\circ}$ ,  $\tilde{I} = 26.55467005^{\circ}$ . Elementos orbitais iniciais do satélite:  $e = 0.015$ ,  $a = 2.175R_M$ ,  $I = 26.572125^{\circ}$ ,  $\Omega = 2.235969886^{\circ}$  e  $g = 0^{\circ}$ .



**Figura 12.b:** Variação do ângulo  $I$  (inclinação do satélite em relação à Eclíptica)



**Figura 13.a:** Idêntico a figura 12.a, mas agora todos os cossenos foram considerados em  $R_{\odot}$ . O tempo de captura foi de aproximadamente 5590000 anos. O escape ocorre em aproximados  $67^{\circ}$ . Valores iniciais:  $\tilde{\Omega} = 0^{\circ}$ ,  $\tilde{I} = 26.55467005^{\circ}$ . Elementos orbitais iniciais do satélite:  $e = 0.015$ ,  $a = 2.175R_M$ ,  $I = 26.572125^{\circ}$ ,  $\Omega = 2.235969886^{\circ}$  e  $g = 0^{\circ}$ .



**Figura 13.b:** Variação do ângulo  $I$  (inclinação do satélite em relação à Eclíptica)

## 2.8. Introduzindo a Precessão do Equador utilizando a correção

$R_I$

Nesta seção pretendemos realizar o estudo da precessão sob um outro ponto de vista, seguindo as idéias contidas em Goldreich (1965) com o intuito de comparar com o nosso estudo realizado anteriormente.

Vamos ignorar o efeito das perturbações planetárias atuando diretamente em Marte. Isso devido ao fato de que, na seção anterior, já mostramos que seu efeito não causou significativas alterações no processo de captura (embora fosse importante considerá-la).

O planeta Marte é achatado. Devido à perturbação solar (que é muito importante e forte), sabemos que o equador sofre perturbações significativas, ou seja, há uma precessão de período aproximadamente igual a 172000 anos e, além disso, a obliquidade  $\varepsilon$  também varia significativamente.

Inicialmente tomaremos o caso mais simples. Como o equador se movimenta, ele não pode ser considerado um referencial inercial. As equações de Lagrange que temos usado só valem para referenciais inerciais. Para corrigir isso, teremos que modificar a função perturbadora. Isto será mostrado na íntegra no Apêndice B seguindo o formalismo de Goldreich (1965). Para tanto, basta acrescentar um termo  $R_I$  na função perturbadora original.

$$R_I = [GMa(1 - e^2)]^{1/2} \hat{w} \cdot \vec{\mu}$$

com

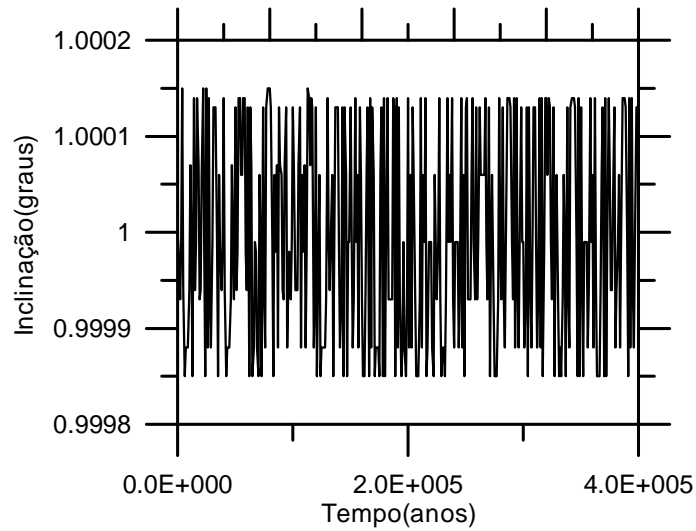
$$\vec{\mu} = P(\sin \varepsilon \vec{j} + \cos \varepsilon \vec{k})$$

$$\hat{w} = (\sin I \sin \Omega \vec{i} - \sin I \cos \Omega \vec{j} + \cos I \vec{k})$$

onde  $P$  é o valor da precessão uniforme e  $\varepsilon$  é a obliquidade.

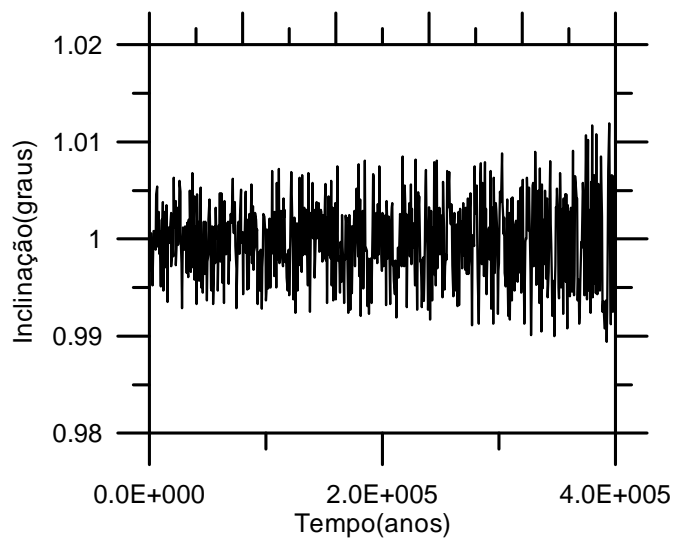
Primeiramente, consideramos apenas a perturbação devido ao achatamento, juntamente com  $R_I$ , desprezando a perturbação solar (conforme feito em Goldreich (1965)). Nesse caso, obtivemos:  $\dot{\Omega} \approx -6.3545944$  rad/ano e  $\frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{172000} \approx 3.6530 \times 10^{-5}$  rad/ano ( $p$ : período da precessão). Assim, como  $|\dot{\Omega}| \gg \frac{2\pi}{p}$ , a inclinação do satélite em relação ao equador quase não varia, conforme previsto em Goldreich (1965) (vide Apêndice B). Isto pode ser observado na figura **14.a**.

Ao acrescentarmos a perturbação solar, obtivemos  $\dot{\Omega} = 6.356419$  rad/ano (e portanto  $|\dot{\Omega}| \gg \frac{2\pi}{p}$ ) e novamente a inclinação em relação ao equador pouco varia conforme ilustrado na figura **14.b**. Com isso, fica claro que as capturas e grandes variações da inclinação não



**Figura 14.a:** Neste gráfico consideramos somente a perturbação devida ao achatamento juntamente com a correção  $R_I$ . A inclinação de Phobos em relação ao equador varia muito pouco. O plano de referência é o Equador de Marte.

Condições iniciais:  $a = 2.18R_M$ ,  $e = 0.015$ ,  $I = 1^\circ$ ,  $g = 0^\circ$  e  $\Omega = 90^\circ$ .



**Figura 14.b:** Idêntico a figura 14.a, acrescentando a perturbação solar na função perturbadora. As condições iniciais também são as mesmas. Esta figura nos mostra que mesmo levando-se em conta que o equador precessiona bastante, esta precessão não influi quase nada na variação do  $I$ .

se devem à inclusão do  $R_I$ , pois tanto na figura **14.a** (sem  $R_\odot$ ) como em **14.b** (com  $R_\odot$ ) vemos que o  $R_I$  não contribui com quase nada, uma vez que Phobos tem  $|\dot{\Omega}| \gg \frac{2\pi}{p}$  em ambos os casos.

Agora, vamos considerar o efeito da variação de  $\varepsilon$  (obliquidade) que até o presente momento era tomado como constante. Notemos que a variação de  $\varepsilon$  também é devida às perturbações planetárias.

Como neste trabalho estamos mais interessados em teorias seculares, mais propriamente nos resultados qualitativos, podemos fazer uso de teorias aproximadas para a variação de  $\varepsilon$ . Desta forma, consideremos a fórmula proposta em Ward (1979, pg. 238, fórmula 2) onde consideramos dez termos nesta série  $j = 1, 2, 3, 4, 9, 11, 16, 20, 21, 26$  (tratam-se dos dez termos que possuem maior amplitude na série, no que diz respeito ao  $N'_j$ ).

$$\Theta = \Theta^* - \sum_j N'_j \sin(S'_j t + at \cos \Theta_0 + \delta_j - \Phi - \Omega_0)$$

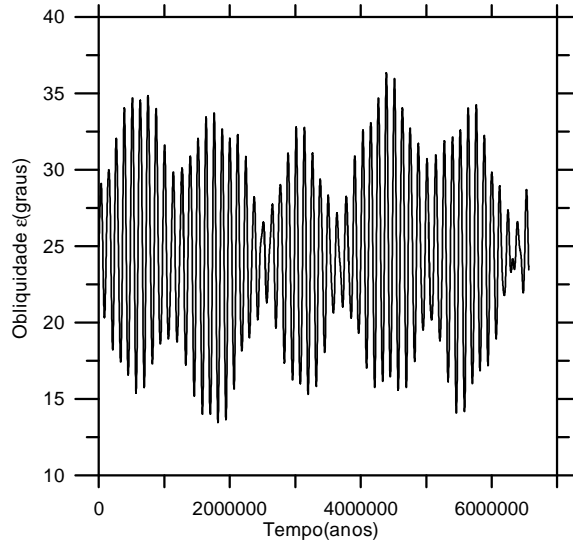
onde os valores  $\Theta_0, \Phi, \Omega_0$  foram tomados segundo Ward (1979, pg. 238).

Podemos ver a evolução da obliquidade com o tempo na figura **15**, onde se nota uma variação de  $13^\circ$  a  $36^\circ$  aproximadamente. Em vista dessa variação, investigaremos qual a influência de  $\varepsilon$  no processo de captura.

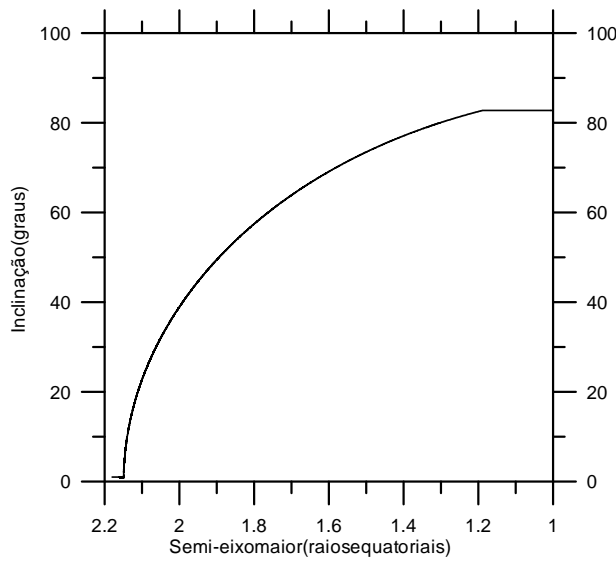
A figura **16** representa uma situação de captura e escape onde consideramos a evolução da obliquidade e também acrescentamos a correção  $R_I$  na função perturbadora. Podemos notar, ao compará-la com a figura **17.a** (plano de referência Eclíptica 1850, uso das equações diferenciais  $\ddot{\Omega}$  e  $\ddot{I}$ , circular) que a situação de captura-escape é a mesma em ambos. Percebe-se uma boa coerência entre as duas situações.

Quando consideramos a variação da obliquidade, as situações de captura dependem do valor de  $\varepsilon$  no instante em que o semi-eixo atinge o valor  $a \approx 2.1490$ . Se por exemplo  $\varepsilon$  for inferior a  $\approx 19^\circ$ , as experiências mostram que não é possível ocorrer captura. Porém, se  $\varepsilon > 19^\circ$ , então sempre constatamos a ocorrência da captura.

Na figura **16**, o valor de  $\varepsilon$  ao redor dessa vizinhança foi de aproximados  $23^\circ$  e, com isso, houve a captura. Observando a figura **18.a**, vemos que não ocorre a captura, pois o valor de  $\varepsilon$  ao redor de  $a \approx 2.1490$  foi de aproximadamente  $17^\circ$ . Na figura **18.b** podemos ver a circulação do ângulo  $\theta = 2\lambda_\odot - \Omega - 3\Omega_\odot$ .

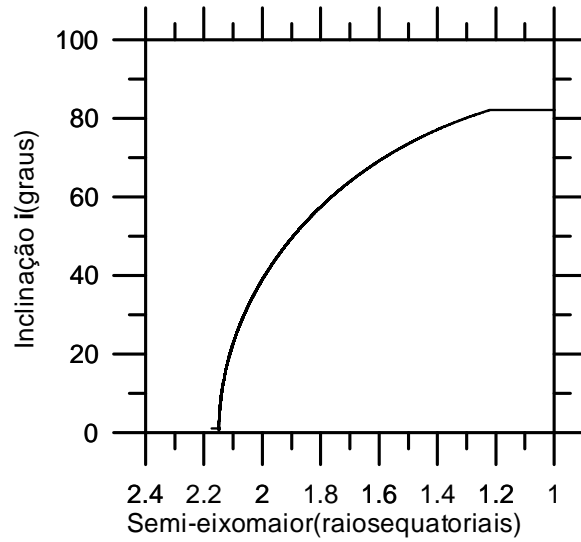


**Figura 15:** Evolução da obliquidade com o tempo. O valor inicial da obliquidade foi de  $\epsilon = 25.19^{\circ}$ . Elementos orbitais iniciais de Marte:  $a = 1.5236R_M$ ,  $e_M = 0.0933$ ,  $g_M = 0^{\circ}$  e  $\Omega_M = 0^{\circ}$ .

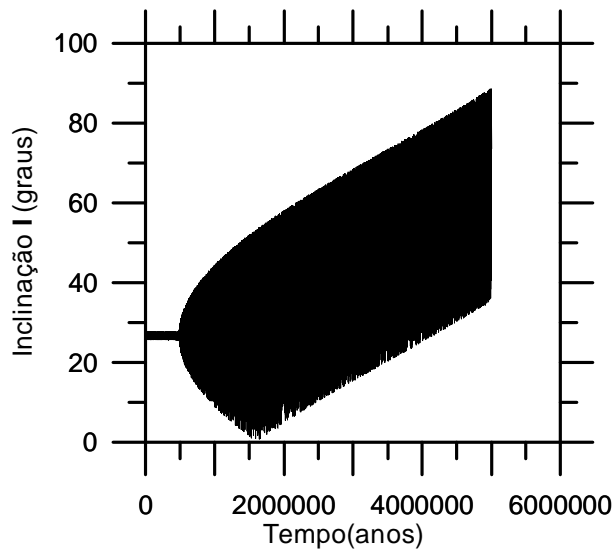


**Figura 16:** Neste gráfico consideramos a longitude do nodo ascendente do Sol fixa e a órbita de Marte circular. Foi incluída também a evolução da obliquidade. O valor da obliquidade ao redor de  $a = 2.1490R_M$  foi de aproximadamente  $\epsilon = 23^{\circ}$ . Consideramos somente o termo  $R_I$  na função perturbadora. Houve captura seguida de um escape em aproximados  $83^{\circ}$ . O tempo de captura foi de aproximadamente 6440000 anos. O plano de referência adotado foi o Equador de Marte. Condições iniciais:  $a = 2.18R_M$ ,  $e = 0.015$ ,  $I = 1^{\circ}$ ,  $g = 0^{\circ}$ ,  $\Omega = 90^{\circ}$ .

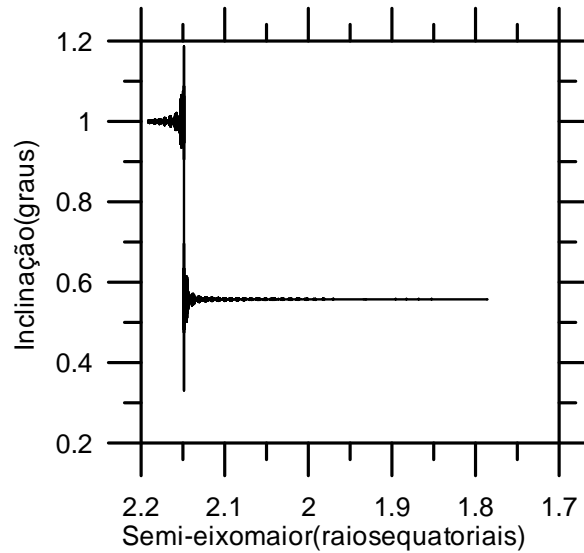




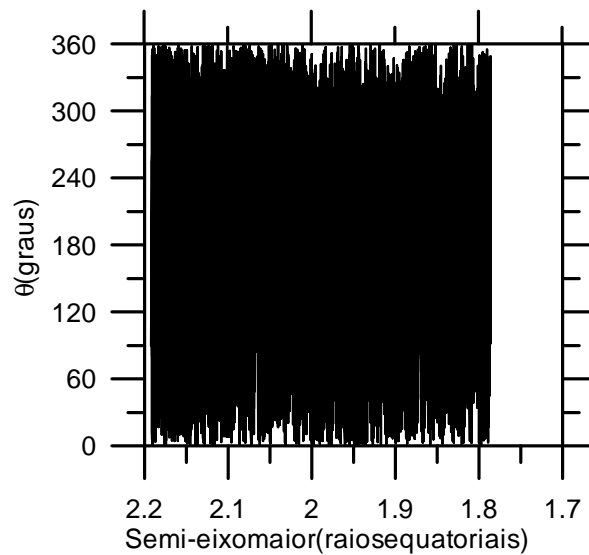
**Figura 17.a:** Inclinação de Phobos reduzido ao plano do Equador. As equações da precessão foram introduzidas. Apenas o cosseno dominante em  $R_{\odot}$  ( $\cos(2\lambda_{\odot} - 2\Omega)$ ). A órbita de Marte é circular. Consideramos:  $\tilde{\Omega} = 0^{\circ}$ ,  $\tilde{I} = 26.55467005^{\circ}$ . O escape ocorre em  $82^{\circ}$  aproximadamente. O tempo de captura foi de aproximadamente 6280000 anos. Os elementos orbitais iniciais de Marte e a obliquidade são os mesmos da figura 1.a. Elementos orbitais iniciais do satélite:  $e = 0.015$ ,  $a = 2.175R_M$ ,  $I = 26.572125^{\circ}$ ,  $\Omega = 2.235969886^{\circ}$  e  $g = 0^{\circ}$ .



**Figura 17.b:** Variação do ângulo  $I$  (inclinação do satélite em relação a Eclíptica).



**Figura 18.a:** Inclinação de Phobos no caso em que o plano de referência é o equador de Marte. Foi incluída a evolução da obliquidade. Consideramos o termo  $R_I$  na função perturbadora. O valor da obliquidade ao redor de  $a = 2.1490R_M$  foi de aproximadamente  $\epsilon = 17^\circ$  e com isso não houve captura. Os elementos orbitais iniciais de Marte e a obliquidade são os mesmos da figura 1.a. Elementos orbitais iniciais do satélite:  $a = 2.1915R_M$ ,  $e = 0.015$ ,  $I = 1^\circ$ ,  $g = 0^\circ$  e  $\Omega = 90^\circ$ .



**Figura 18.b:** Circulação do ângulo  $\theta = 2\lambda_\odot + \Omega - 3\Omega_\odot$ .

## 2.9. A dupla ressonância

Conforme vimos anteriormente, a primeira ressonância encontrada por Phobos será em  $a = 2.6196$ , sendo que a próxima será em  $a = 2.6193$ .

Sendo assim, ambas ressonâncias ocorrem quase que simultaneamente. Com isso, temos dois ângulos críticos,  $(2\varpi - 2\lambda_{\odot})$  e  $(2\lambda_{\odot} + 2\Omega - 4\Omega_{\odot})$ .

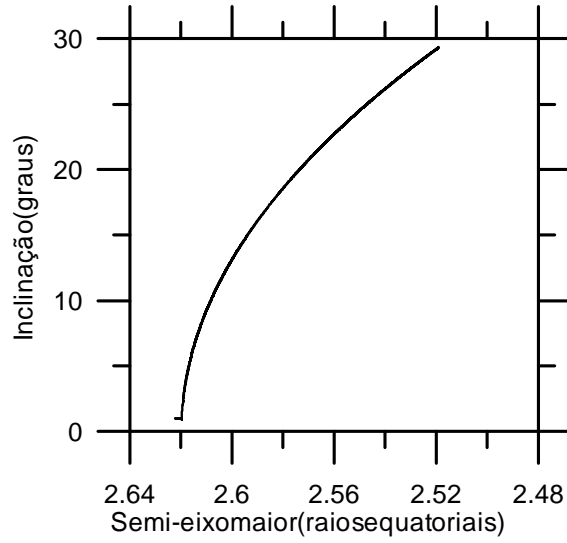
Para facilidade vamos tomar o caso mais simples possível: Marte circular, o plano de referência será o equador e desprezaremos todas as contribuições devidas a  $\tilde{\Omega}, \tilde{I}$  e  $R_I$ . Como dito anteriormente, nosso integrador numérico é o Radau 15, onde fixamos  $LL = 10$ . Vamos inicialmente tomar só um cosseno,  $\cos((2\lambda_{\odot} + 2\Omega - 4\Omega_{\odot}))$ , em  $R_{\odot}$ .

A figura **19.a** mostra captura onde nota-se um grande aumento da inclinação. Se agora incluirmos todos os cossenos restantes, mantendo as mesmas condições iniciais, a captura não será mais observada (figura **20.a**). Uma análise mais detalhada mostrou que o principal termo responsável é o outro cosseno ressonante,  $\cos(2\varpi - 2\lambda_{\odot})$ . Isto é, a captura na primeira ressonância  $(2\lambda_{\odot} + 2\Omega - 4\Omega_{\odot})$  sempre ocorrerá desde que o cosseno  $\cos(2\varpi - 2\lambda_{\odot})$  não esteja presente em  $R_{\odot}$ . Da teoria dos invariantes adiabáticos (Peale, 1999) pode-se mostrar que em geral a segunda ressonância não permite captura, sendo que a primeira sempre permitirá. Porém, como ambas estão muito próximas, o estudo isolado de cada uma delas não deve ser válido. Na realidade, estas duas ressonâncias estão num tipo de competição. Uma delas envolve a variação da excentricidade e a outra a inclinação. Observemos então as figuras **20.a**, **20.b** e **21**.

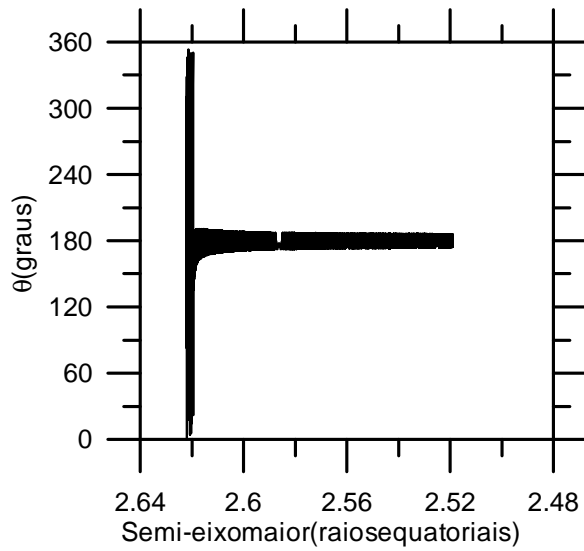
Reproduzindo as figuras apresentadas em Yokoyama (2002), diferentemente da variação da excentricidade (figura **20.b**), notemos que a inclinação (figura **20.a**) depois de sofrer um salto, decresce novamente, para um valor próximo do inicial, antes desse salto.

Ao contrário da figura **20.a**, a figura **21** mostra um aumento da inclinação, sendo que a única diferença é a condição inicial para o semi-eixo maior que foi tomada como sendo  $a = 2.64$ .

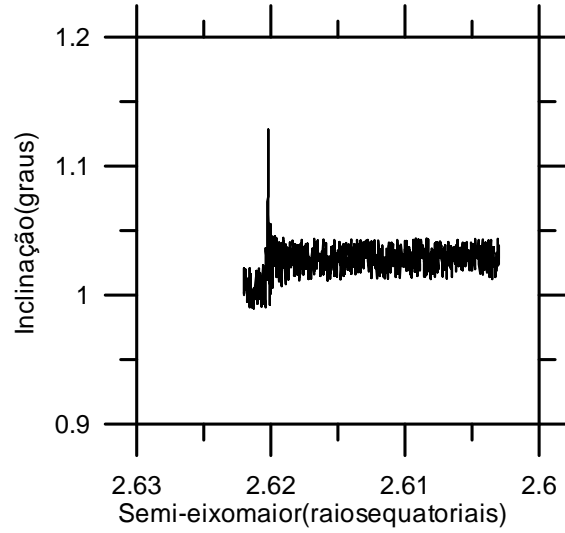
Nosso próximo passo agora será incluir a elipticidade da órbita de Marte e analisar suas consequências. Na figura (**22.a**) consideramos todos os cossenos em  $R_{\odot}$  e observamos uma situação de captura onde, como dissemos antes,  $LL = 10$ . Agora, ao aumentarmos a precisão do integrador para  $LL = 12$ , mantendo as mesmas condições iniciais da figura **22.a**, não obtivemos captura, conforme ilustrado pela figura **22.b**. Notemos que neste caso a inclinação sofreu um salto, chegando a aproximadamente  $4.5^{\circ}$  e depois estabilizou-se em aproximados  $2.7^{\circ}$ .



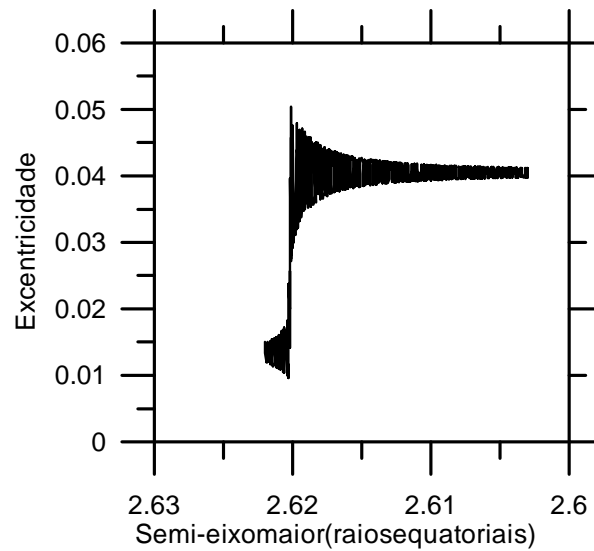
**Figura 19.a:** Inclinação de Phobos em relação ao Equador de Marte. A órbita de Marte é circular. Apenas o cosseno dominante em  $R_{\odot}$  ( $\cos(2\lambda_{\odot} + 2\Omega - 4\Omega_{\odot})$ ) foi considerado. Os elementos orbitais iniciais de Marte e a obliquidade foram tomados iguais aos da figura 1.a. Elementos orbitais iniciais do satélite:  $e = 0.015$ ,  $a = 2.622R_M$ ,  $I = 1^{\circ}$ ,  $\Omega = 0^{\circ}$  e  $g = 0^{\circ}$ .



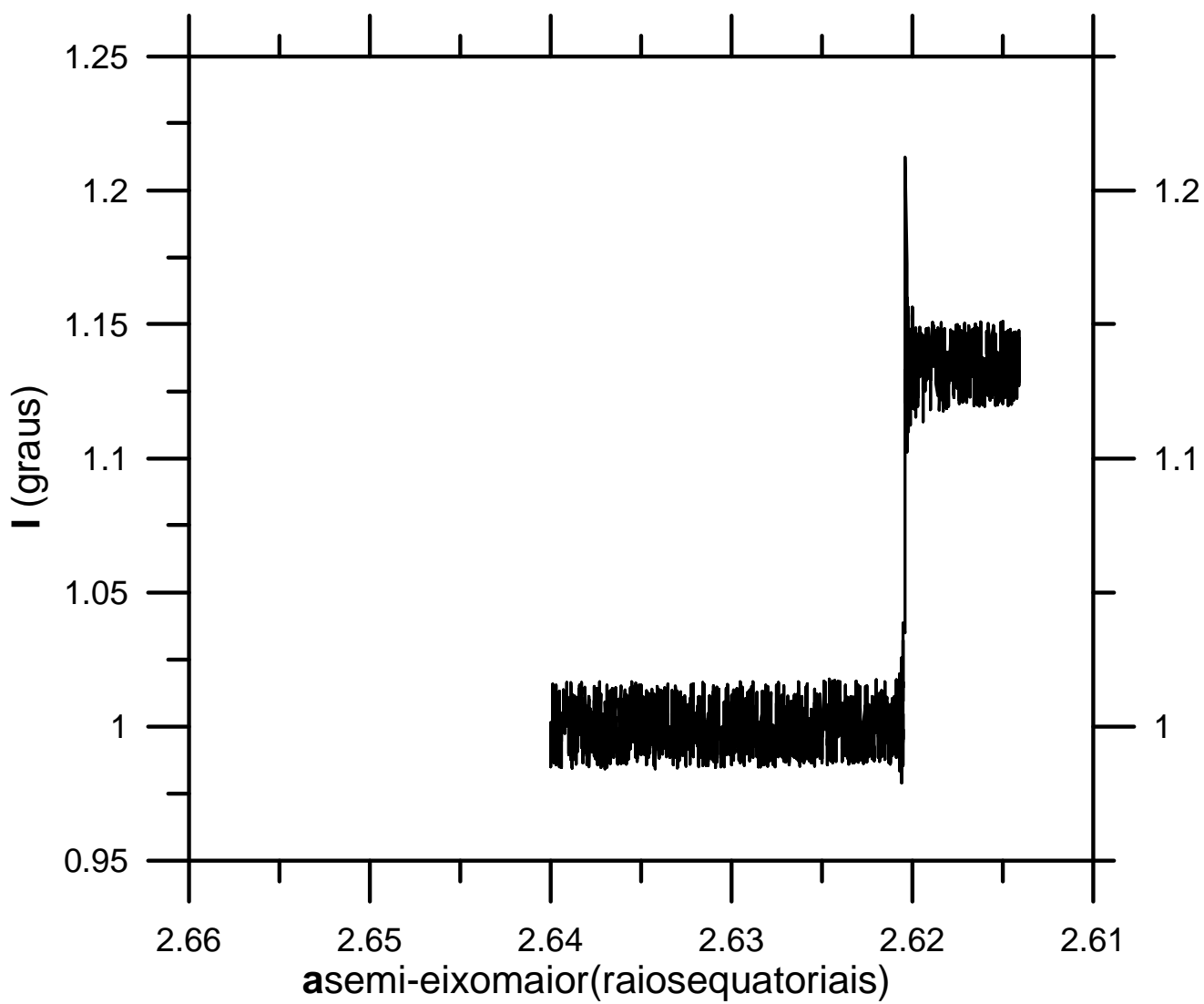
**Figura 19.b:** Libração e escape do ângulo  $\theta = 2\lambda_{\odot} + 2\Omega - 4\Omega_{\odot}$ .



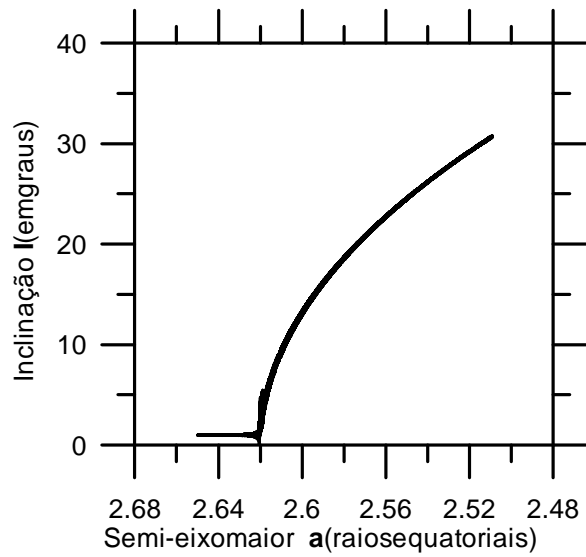
**Figura 20.a:** Inclinação de Phobos em relação ao Equador de Marte. A órbita de Marte é circular. Todos cossenos foram considerados em  $R_{\odot}$ . As condições iniciais dos elementos orbitais de Marte e a obliquidade são as mesmas da figura 1.a. Elementos orbitais iniciais do satélite:  $e = 0.015$ ,  $a = 2.622R_M$ ,  $I = 1^{\circ}$ ,  $\Omega = 0^{\circ}$  e  $g = 0^{\circ}$ .



**Figura 20.b:** Variação da excentricidade. A órbita de Marte é circular. Todos cossenos foram considerados em  $R_{\odot}$ . As condições iniciais são as mesmas da figura 20.a.



**Figura 21:** Idêntico a figura 20.a, porém o valor inicial do semi-eixo maior foi de  $a = 2.64R_M$ . Houve um aumento significativo da inclinação.

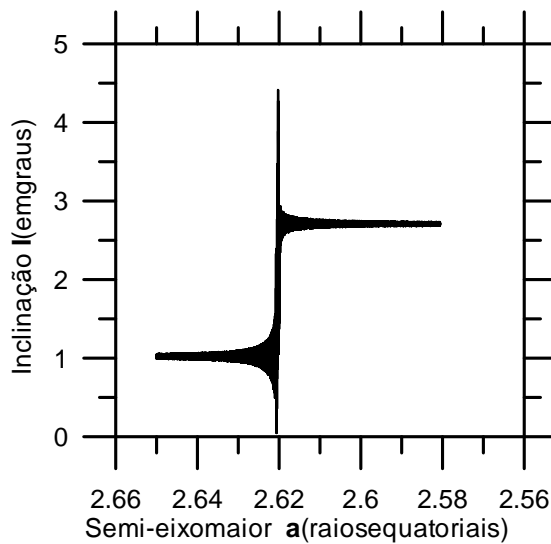


**Figura 22.a:** Inclinação de Phobos no caso em que o plano de referência é o Equador de Marte. Todos cossenos foram considerados em  $R_{\odot}$ .

Precisão do integrador (Radau 15):  $LL = 10$ .

Com esta precisão do integrador obtivemos captura.

Os elementos orbitais iniciais de Marte e a obliquidade são as mesmas da figura 1.a. Elementos orbitais iniciais do satélite:  $e = 0.015$ ,  $a = 2.65R_M$ ,  $I = 1^{\circ}$ ,  $\Omega = 0^{\circ}$  e  $g = 0^{\circ}$ .



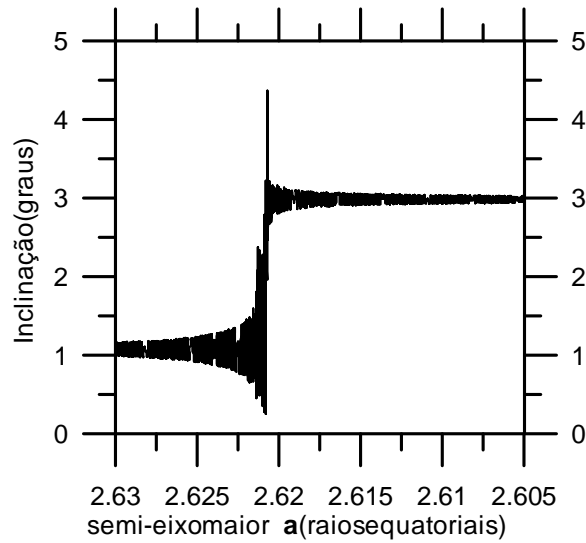
**Figura 22.b:** Idêntico a figura 22.a, porém a precisão do integrador (Radau 15) foi de  $LL = 12$ . Com esta precisão do integrador aumentada não ocorre captura. A inclinação, após sofrer um salto, estabiliza-se em aproximadamente  $2.7^{\circ}$ .

Concluimos que apesar de uma das ressonâncias propiciar captura ( $2\lambda_{\odot} + 2\Omega - 4\Omega_{\odot}$ ), a interação desta com a outra ( $2\varpi - 2\lambda_{\odot}$ ) provoca situações onde a captura verificada em alguns casos é duvidosa ou pelo menos, altamente sensível às condições iniciais. Notamos também que a precisão do integrador é determinante na captura. Como as duas ressonâncias estão muito próximas, na verdade o problema não é mais de um único grau de liberdade. Portanto, a interação entre as duas ressonâncias pode resultar em alguma dinâmica caótica, onde de fato a precisão do integrador torna-se importante.

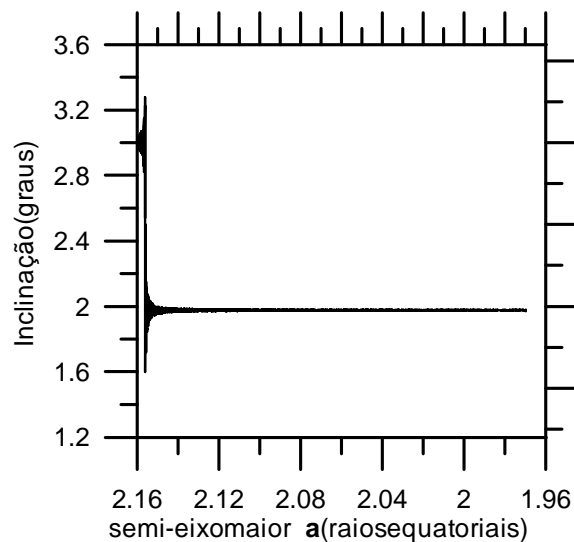
É importante ressaltar que a dupla ressonância ocorre antes daquela estudada até agora. Da teoria dos invariantes adiabáticos, se o valor da inclinação inicial não for suficientemente pequeno, não é possível a captura na ressonância vista nas seções 2.3 a 2.8. Como na dupla ressonância o valor de  $I$  pode ser impulsionado para até  $I \approx 3^0$  (figura **23.a**) então neste caso, não deverá haver captura na ressonância em  $a = 2.1490$  conforme ilustrado na figura **23.b**. No entanto, mesmo assim há situações em que a dupla ressonância não é capaz de alterar significativamente o valor de  $I$ . Na figura **24.a** vemos que o valor da inclinação inicial foi de  $1.4^0$  e esta, após a passagem pela dupla ressonância, manteve-se em  $I \approx 1.4^0$ . Utilizando este valor como condição inicial, mostra-se que ocorre captura em  $a = 2.1490$  (figura **24.b**).

Portanto, vemos que dependendo do valor de  $I$ , após a passagem pela dupla ressonância, a captura em  $a = 2.1490R_M$  pode ou não se realizar.

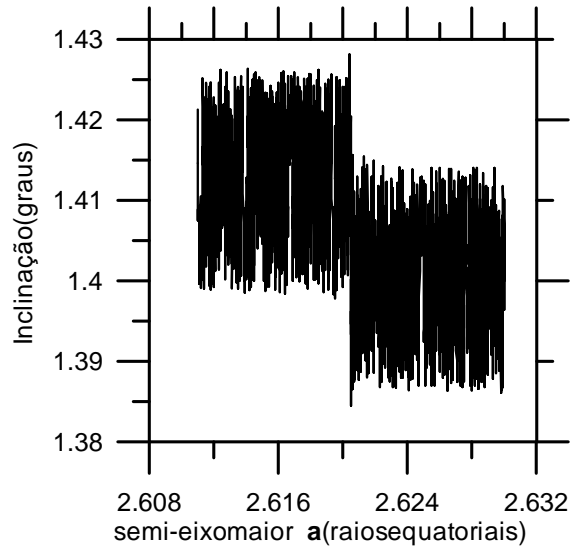




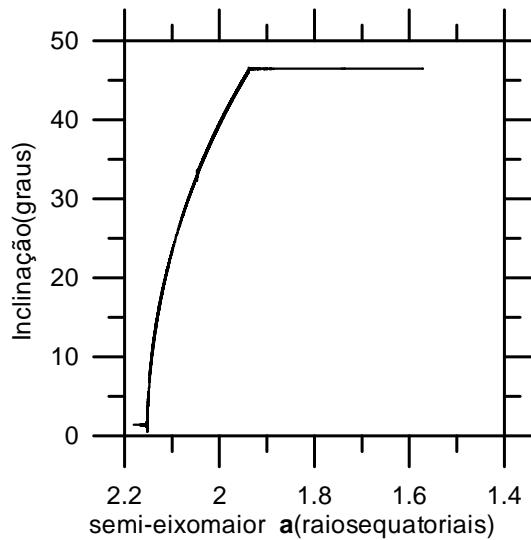
**Figura 23.a:** Inclinação de Phobos no caso em que o plano de referência é o Equador de Marte durante a passagem pela dupla ressonância. Todos os cossenos foram considerados em  $R_\odot$ . A inclinação sofre um salto e depois estabiliza-se em aproximados  $3^\circ$ . Os elementos orbitais iniciais de Marte e a obliquidade são os mesmos da figura 1.a. Elementos orbitais iniciais do satélite:  $e = 0.015$ ,  $a = 2.63R_M$ ,  $I = 1^\circ$ ,  $\Omega = 90^\circ$  e  $g = 0^\circ$ .



**Figura 23.b:** Considerando-se a inclinação inicial de Phobos como  $3^\circ$ , não ocorre a captura na ressonância em  $a = 2.1490R_M$ . Os elementos orbitais iniciais de Marte e a obliquidade são as mesmas da figura 1.a. Elementos orbitais iniciais do satélite:  $e = 0.08$ ,  $a = 2.16R_M$ ,  $I = 3^\circ$ ,  $\Omega = 90^\circ$  e  $g = 0^\circ$ .



**Figura 24.a:** Inclinação de Phobos no caso em que o plano de referência é o Equador de Marte durante a passagem pela dupla ressonância. Todos os cossenos foram considerados em  $R_{\odot}$ . A inclinação estabiliza-se em aproximados  $1.4^{\circ}$ . Os elementos orbitais iniciais de Marte e a obliquidade são os mesmos da figura 1.a. Elementos orbitais iniciais do satélite:  $e = 0.015$ ,  $a = 2.63R_M$ ,  $I = 1.4^{\circ}$ ,  $\Omega = 90^{\circ}$  e  $g = 0^{\circ}$ .



**Figura 24.b:** Considerando-se a inclinação inicial de Phobos como  $1.4^{\circ}$ , ocorre a captura na ressonância em  $a = 2.1490R_M$  e depois um escape em aproximadamente  $47^{\circ}$ . O tempo de captura foi de aproximadamente 3640000 anos. Os elementos orbitais iniciais de Marte e a obliquidade são as mesmas da figura 1.a. Elementos orbitais iniciais do satélite:  $e = 0.05$ ,  $a = 2.18R_M$ ,  $I = 1.4^{\circ}$ ,  $\Omega = 90^{\circ}$  e  $g = 0^{\circ}$ .

$a(R_M)$	e	I	$\Omega$	g	plano ref.	órbita Marte	$O(J_n)$	$\cos R_\odot$	escape	Fig.
2.165	0.010	1.00 <sup>0</sup>	90 <sup>0</sup>	0 <sup>0</sup>	equador	circular	2	todos	33 <sup>0</sup>	1.a
2.165	0.010	1.10 <sup>0</sup>	90 <sup>0</sup>	0 <sup>0</sup>	equador	circular	2	todos	56 <sup>0</sup>	2.a
2.165	0.030	1.00 <sup>0</sup>	90 <sup>0</sup>	0 <sup>0</sup>	equador	circular	2	todos	63 <sup>0</sup>	3.a
2.165	0.015	1.00 <sup>0</sup>	90 <sup>0</sup>	0 <sup>0</sup>	equador	circular	3	todos	56 <sup>0</sup>	4.a
2.165	0.015	1.00 <sup>0</sup>	90 <sup>0</sup>	0 <sup>0</sup>	equador	circular	2	todos	47 <sup>0</sup>	4.c
2.175	0.010	1.00 <sup>0</sup>	90 <sup>0</sup>	0 <sup>0</sup>	equador	elíptica	2	todos	33 <sup>0</sup>	5.a
2.175	0.010	1.15 <sup>0</sup>	90 <sup>0</sup>	0 <sup>0</sup>	equador	elíptica	2	todos	53 <sup>0</sup>	5.c
2.175	0.010	1.15 <sup>0</sup>	90 <sup>0</sup>	0 <sup>0</sup>	equador	circular	2	todos	47 <sup>0</sup>	6.a
2.180	0.030	3.40 <sup>0</sup>	90 <sup>0</sup>	0 <sup>0</sup>	equador	circular	2	1	74 <sup>0</sup>	7.a
2.180	0.030	0.10 <sup>0</sup>	90 <sup>0</sup>	0 <sup>0</sup>	equador	circular	2	1	87 <sup>0</sup>	7.b
2.175	0.015	26.57 <sup>0</sup>	2.23 <sup>0</sup>	0 <sup>0</sup>	eclíptica	circular	2	1	82 <sup>0</sup>	8.a
2.175	0.015	26.57 <sup>0</sup>	2.23 <sup>0</sup>	0 <sup>0</sup>	eclíptica	elíptica	2	1	84 <sup>0</sup>	9.a
2.175	0.015	26.57 <sup>0</sup>	2.23 <sup>0</sup>	0 <sup>0</sup>	eclíptica	elíptica	2	todos	33 <sup>0</sup>	10.a
2.175	0.015	26.57 <sup>0</sup>	2.23 <sup>0</sup>	0 <sup>0</sup>	eclíptica	elíptica	2	1	82 <sup>0</sup>	12.a
2.175	0.015	26.57 <sup>0</sup>	2.23 <sup>0</sup>	0 <sup>0</sup>	eclíptica	elíptica	2	todos	67 <sup>0</sup>	13.a

Tabela de resultados obtidos para a ressonância que ocorrerá em  $a = 2.1490R_M$

### 3. O sistema Netuno-Triton

Devido aos efeitos da maré, Triton está se aproximando de Netuno (caindo). A massa de Triton é relativamente grande,  $\frac{M_T}{M_N} \approx 2.09 \times 10^{-4}$ . A órbita de Triton atualmente é quase circular, ( $e = 0.000016$ ), e sua inclinação em relação ao equador é aproximadamente  $157.345^\circ$ . Nesta trajetória de queda, Triton irá cruzar as órbitas de outros pequenos satélites mais internos. Temos então o problema de aproximações críticas entre Triton e tais satélites (estes por terem massa muito menor, praticamente não são afetados pela maré). A questão que se coloca é investigar a dinâmica dos satélites internos à medida que Triton se aproxima. Abaixo damos as distâncias (semi-eixos), inclinações e excentricidades dos satélites que orbitam o planeta Netuno ([http://ssd.jpl.nasa.gov/sat\\_elem.html](http://ssd.jpl.nasa.gov/sat_elem.html), em 07/03/2003). A notação  $R_N$  significa raios equatoriais médios de Netuno.

Satélite	$a$ (Km)	$a(R_N)$	$I$ (graus)	$e$
Naiad	48200	1.94	4.738	0.0003
Thalassa	50100	2.02	0.205	0.0002
Despina	52500	2.12	0.065	0.0001
Galatea	62000	2.50	0.054	0.0001
Larissa	73500	2.96	0.201	0.0014
Proteus	117600	4.74	0.039	0.0004
Triton	354800	14.32	156.834	0.000016

O efeito da maré é algo bastante complexo e a modelagem matemática em geral é montada fazendo-se várias hipóteses simplificadoras. Do ponto de vista físico, também é inevitável considerar alguns valores empíricos de certas constantes e imaginar situações ideais para que a mecânica newtoniana possa ser utilizada.

Em Kaula (1964), Burns (1986), Chyba (1989), podemos encontrar tratamentos rigorosos da formulação do problema de maré. No caso de altas inclinações e órbitas quase circulares, a dinâmica principal se restringe à variação do semi-eixo e da inclinação .

Quando se menciona inclinação, é fundamental definir qual é o plano de referência que se utiliza. Na mecânica Newtoniana usamos sempre referenciais inerciais. No caso em questão, a escolha mais cômoda seria tomar o equador de Netuno. Porém este, devido a aproximação de Triton, está precessionando e não seria inercial. Vimos no capítulo anterior que para corrigir este fato bastaria acrescentar  $R_I$  na função perturbadora original. Para avaliar a importância de  $R_I$ , tomemos o plano invariável como inercial.

Consideremos as equações de  $\tilde{I}$  e  $\tilde{\Omega}$ , dadas em (17). A integração destas, referidas ao

plano inercial mostram que o período de precessão de  $\tilde{\Omega}$  é  $\approx 620$  anos (igual ao período da precessão de  $\Omega$  de Triton (Nascimento 2003, dissertação de mestrado). A obliquidade (inclinação do plano invariável sobre o equador) é de apenas  $0.5^0$  (Jacobson, 1991). Desta forma a expressão de  $R_I$  é:

$$R_I = [GMa(1 - e^2)]^{1/2}(-P \sin \epsilon \sin I \cos \Omega + P \cos \epsilon \cos I)$$

e substituindo os valores mais usados em nossas integrações até agora,  $e = 0.015$ ,  $I = 1^0$ ,  $\Omega = 0^0$  e  $a = 2.60R_N$ , temos:

$$R_I = [GM2.60(1 - 0.015^2)]^{1/2}\left(-\frac{2\pi}{620} \sin(0.5^0) \sin(1^0) \cos(0^0) + \frac{2\pi}{620} \cos(0.5^0) \cos(1^0)\right)$$

Temos a seguinte razão  $\left|\frac{R_I}{R_{J_2}}\right| \approx 4.17 \times 10^{-8}$

Assim, como era de se esperar, a contribuição de  $R_I$  é muito pequena (desprezível) e portanto tomaremos o equador como nosso plano de referência. Fixado esse plano de referência, de acordo com Chyba (1989), Yokoyama (2002) pode-se mostrar que a variação do semi-eixo e inclinação, restrita aos termos dominantes é dada pelo sistema:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dI_{2220}}{dt}\right)_N &= -\frac{3}{4} \frac{m_T}{M_N} k_2 \frac{(R_N/a)^5 n \sin I \sin^6 I/2}{Q_{2220}} \\ \left(\frac{da_{2220}}{dt}\right)_N &= -3 \frac{m_T}{M_N} k_2 \frac{(R_N/a)^5 n a \sin^8 I/2}{Q_{2220}} \end{aligned} \quad (17)$$

Estas equações podem ser integradas e resulta:

$$\cos\left(\frac{I}{2}\right) = \left(\frac{a_0}{a}\right)^{1/4} \cos\left(\frac{I_0}{2}\right) \quad (18)$$

onde  $a_0$  e  $I_0$  são os atuais valores de  $I$  e  $a$ .

Com esta relação temos então os valores das inclinações de Triton quando este evolui aproximando-se dos satélites internos. Também fazendo uso de (19) podemos achar os vários semi-eixos e inclinações que possibilita as várias ressonâncias seculares envolvendo os elementos lentos de Triton com o movimento médio do Sol. Estas ressonâncias são similares às do capítulo 1, com a diferença que aqui elas se realizam com altas inclinações

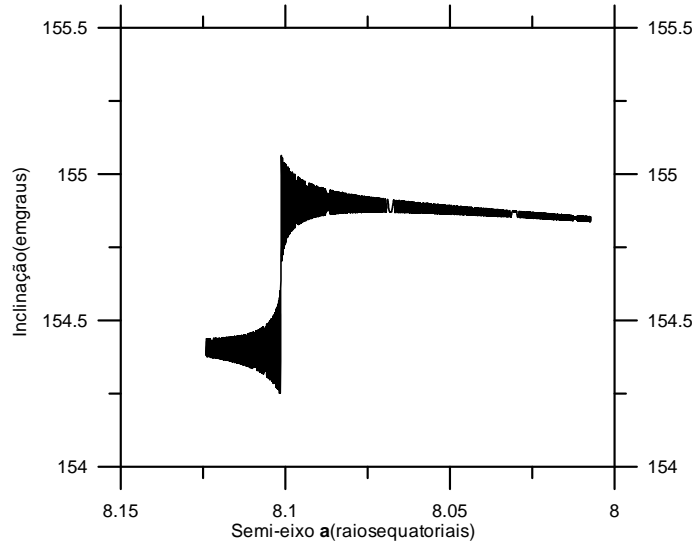
Resolvendo a equação (19), juntamente com cada equação ressonante listada abaixo e considerando  $a_0 = 14.325R_N$  e  $I_0 = 157.345^0$ , obtemos:

$2\dot{g} + 2\dot{\Omega} - 2n_{\odot} = 0$	$a \approx 13.2599$	$I \approx 156.8971^0$
$2\dot{g} + \dot{\Omega} - 2n_{\odot} = 0$	$a \approx 12.5017$	$I \approx 156.5497^0$
$2\dot{g} - 2n_{\odot} = 0$	$a \approx 11.6050$	$I \approx 156.1029^0$
$2\dot{g} - \dot{\Omega} - 2n_{\odot} = 0$	$a \approx 10.4852$	$I \approx 155.4794^0$
$2n_{\odot} - 2\dot{\Omega} = 0$	$a \approx 9.8862$	$I \approx 155.1104^0$
$2\dot{g} - 2\dot{\Omega} - 2n_{\odot} = 0$	$a \approx 8.9194$	$I \approx 154.4510^0$
$2n_{\odot} - \dot{\Omega} = 0$	$a \approx 8.0848$	$I \approx 153.8045^0$

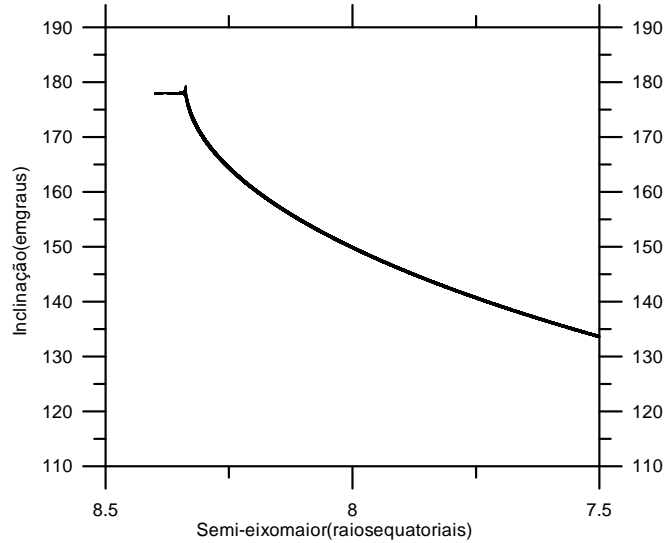
Portanto, a questão que se coloca agora é se a exemplo de Phobos, haverá ou não captura.

Na teoria dos invariantes adiabáticos (Peale 1999), Yokoyama (2002) sabemos que a captura ocorre com certeza absoluta, apenas no caso em que a inclinação (no caso de Peale seria excentricidade) é suficientemente pequena, isto é, a área definida pelo invariante adiabático  $\oint pdq$  é suficientemente pequena tal que ela caiba completamente dentro da área definida pela separatriz quando esta surgir pela primeira vez no diagrama de evolução do semi-eixo  $a$ .

No caso atual, observamos que  $I$  de Triton é muito alto. Assim os vários testes numéricos mostraram que em nenhum dos casos ocorre captura. Porém, mesmo assim, sempre que o semi-eixo cruza valores ressonantes, ocorrem variações sensíveis e bruscas. Isto se nota na figura 25. Também, apenas para ilustrar, apresentamos a figura 26 onde a captura só foi possível quando artificialmente abaixamos a inclinação de Triton para  $I = 178^0$ . O caso é portanto fictício.



**Figura 25:** Inclinação de Triton no caso em que o plano de referência é o equador de Netuno, durante a passagem pela ressonância  $2_{\odot} - \Omega$ . Todos cossenos foram considerados em  $R_{\odot}$ . Elementos orbitais iniciais do satélite:  $e = 0.000016$ ,  $a = 8.124R_N$ ,  $I = 154.4384^0$ ,  $\Omega = 0^0$  e  $g = 0^0$ .



**Figura 26:** Triton fictício sendo capturado na ressonância  $2n_{\odot} - \Omega$ . Elementos orbitais iniciais do satélite:  $e = 0.000016$ ,  $a = 8.4R_N$ ,  $I = 178^{\circ}$ ,  $\Omega = 0^{\circ}$  e  $g = 0^{\circ}$ .

Proteus é um pequeno satélite cujo semi-eixo maior é  $a = 4.74R_N$ . Entre os satélites internos descobertos pela Voyager, ele é o único que está fora da curva de co-rotação (Banfield and Murray, 1992). De qualquer modo, devido a sua massa pequena, muito provavelmente, ele não será afetado pela maré mas, neste caso, o semi-eixo maior de Proteus deveria aumentar e não decrescer. Então, como Triton está caindo, outro conjunto de novas ressonâncias aparecerão. Desta vez serão ressonâncias nos movimentos médios.

O corpo perturbado agora é Proteus, enquanto o perturbador será Triton, o qual atravessará ressonâncias com Proteus numa órbita retrógrada bastante inclinada. Os semi-eixos maiores de Triton para as principais ressonâncias são:  $a_T = 9.882$  (3:1),  $a_T = 7.542$  (2:1),  $a_T = 6.225$  (3:2),  $a_T = 5.755$  (4:3), enquanto que as respectivas inclinações, dadas pela equação (19) são:  $I_T = 155.1077^{\circ}$ ,  $I_T = 153.3369^{\circ}$ ,  $I_T = 152.0005^{\circ}$  e  $I_T = 151.4338^{\circ}$ .

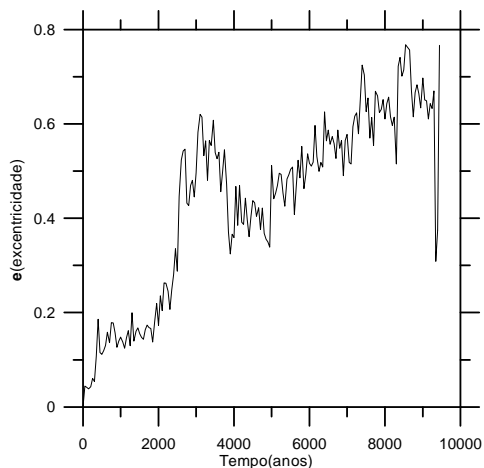
Sabemos que no caso de ressonâncias asteroidais, onde todos os movimentos são diretos, estas comensurabilidades acarretam grandes alterações no problema, com implicações drásticas na dinâmica. No caso atual, como a ressonância é retrógrada, a princípio o efeito tem sido bastante diferente. Fizemos várias integrações do sistema Netuno-Triton-Proteus em coordenadas cartesianas fixadas no equador de Netuno. Além da ressonância 2:1, fizemos alguns testes para a ressonância 3:1, onde também se observa um aumento de excentricidade, porém de forma muito mais lenta e não tão forte como no caso 2:1, onde se observou ejeção de Proteus.

De qualquer modo, podemos afirmar que estas ressonâncias orbitais são muito importantes na dinâmica dos satélites internos. Uma investigação mais detalhada para estas ressonâncias será dada em Nascimento 2003, dissertação de mestrado.

Assim, não constatando nenhum caso de libração nos movimentos médios, tampouco não será possível captura nestas ressonâncias, uma vez que não devem existir centros de

libração , separatrizes,etc..., ingredientes necessários para situações de captura.

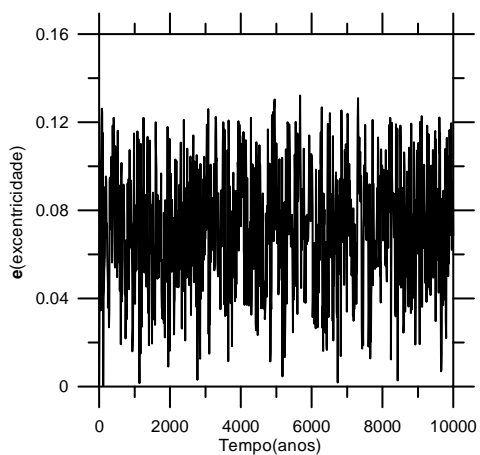
Nas figuras **27.a** e **27.b**, mostramos a importância do efeito do achatamento num caso de ressonância 2:1. Na figura **27.a** acrescentamos  $J_2$  e houve um escape em aproximadamente 10000 anos. Já na figura **27.b** retiramos a perturbação devida ao achatamento e integramos por 10000 anos e nada ocorreu.



**Figura 27.a:** Excentricidade pelo tempo. Integração de um satélite interno perturbado por Triton na ressonância 2:1. O plano de referência adotado foi o equador de Netuno. Adicionamos a perturbação devida ao achatamento ( $J_2$ ). Condições iniciais:

Triton:  $a_T = 7.5417R_N$ ,  $I_T = 152.7327^\circ$ ,  $e_T = 0.000016$ ,  $\Omega_T = 270^\circ$ ,  $g_T = 0^\circ$ ,  $l_T = 0^\circ$

Satélite:  $a_T = 4.7510R_N$ ,  $I_T = 1^\circ$ ,  $e_T = 0.0010$ ,  $\Omega_T = 0^\circ$ ,  $g_T = 0^\circ$ ,  $l_T = 0^\circ$



**Figura 27.b:** Idêntico a figura 27.a, contudo a perturbação do achatamento foi retirada. As condições iniciais também são as mesmas da figura 27.a.



## 4. Conclusões

O problema da evolução do sistema Phobos-Marte foi estudado fazendo uma série de generalizações sobre o trabalho de Yokoyama (2002). Basicamente foram tomados:

- a) inclusão de termos  $J_3$  no achatamento.
- b) precessão do equador de Marte.
- c) inclusão das perturbações planetárias sobre Marte.
- d) variação da obliquidade ( $\epsilon$ ).
- e) integração por tempos mais longos.

As situações de captura continuam válidas mesmo com tais inclusões. Porém, os vários testes mostraram que durante a captura, a evolução do ângulo ressonante passa por vários estágios diferentes, com diferentes amplitudes de libração. Estas transições são bruscas. A extensão por um tempo mais longo, mostra finalmente escape da libração, ocasião em que a inclinação se estabiliza novamente.

Mostramos também que os escapes são altamente sensíveis às condições iniciais. Isto nos leva a acreditar na não-existência de uma inclinação universal a exemplo do que ocorre nas ressonâncias orbitais. Fizemos um breve estudo teórico no intuito de esclarecer este fato.

Concluimos também que a inclusão da elipticidade de Marte causa um significativo aumento da perturbação se comparado com o caso circular. Também ficou evidente que há uma grande sensibilidade de precisão (ou condições iniciais) na dinâmica da dupla ressonância: com precisão  $LL = 10$  é possível captura, porém se  $LL = 12$ , não é possível afirmar que isto continue verdade. No caso da dupla ressonância, as integrações indicam que a captura é possível se a precisão do integrador for baixada para  $LL = 10$ . No caso em que  $LL = 12$ , a captura não foi observada, porém o efeito causa um sensível aumento em  $I$  que chega a  $I \approx 2.7^0$ . Realizamos vários testes e verificamos que a captura em  $a = 2.1490$  pode ou não ocorrer, dependendo do valor de  $I$  após a passagem pela dupla ressonância. Neste trabalho, apresentamos um caso onde com  $I \approx 3^0$  (após passar pela dupla ressonância) não obtivemos captura em  $a = 2.1490$  e, também um caso onde o valor de  $I$  depois da dupla ressonância foi de  $I \approx 1.4^0$  onde ocorreu captura em  $a = 2.1490$ .

Para o problema Triton-Netuno, fizemos uma série de integrações por intervalos de tempo não muito longo. Nestas integrações não se observou situações de librações em ressonâncias orbitais durante a queda de Triton. Ao contrário do caso direto, ressonâncias

retrógradas aparentam ser bem mais fracas e a não existência de librações implica na impossibilidade de capturas. Vários testes também mostraram que na ausência da perturbação do achatamento, o satélite interno pode permanecer estável por um tempo relativamente longo, mesmo que  $a_{Sat}$  seja próximo de  $a_T$ . Isto certamente deve estar relacionado com o fato de que  $\sin(I_T)$  é bastante alto e além disso, este valor tende a crescer no futuro. Porém a inclusão do achatamento traz alterações importantes, principalmente nos casos ressonantes. (Nascimento 2003, dissertação de mestrado).

# 5. Apêndice A

## A.1. Dedução da Hamiltoniana da secção 2.2

Conforme mencionamos na secção 2.2, consideraremos a Hamiltoniana com apenas o cosseno dominante durante a passagem pela ressonância que ocorrerá em  $a = 2.1490$ .

Consideremos

$$\begin{aligned} \widetilde{H} = & \frac{1}{4}n^2 J_2 R_p^2 (3 \cos^2 I - 1)(1 - e^2)^{-3/2} + \\ & \frac{k^2 M_\odot a^2}{2a_\odot^3} \left[ \frac{3}{2}P(A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2E^2 - \frac{2}{3}) + \right. \\ & \left. 3EP(A - D) \cos(2\lambda_\odot + \Omega) \right] \end{aligned}$$

onde supomos a órbita circular ( $e_\odot = 0$ ) e  $g_\odot, \Omega_\odot$  fixos.  $L$  e  $G$  são constantes.

Assim,

$$\widetilde{H}(H, h, \theta(t)), \quad \theta(t) = n_\odot(t - t_\odot)$$

Vamos agora estender o espaço de fases.

$$\widetilde{H} = \widetilde{H}(H, h, \theta(t)) \longrightarrow H^* = H^*(H, h, \theta, p_\theta)$$

onde valem as equações canônicas:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\partial H^*}{\partial p_\theta}$$

$$\frac{dp_\theta}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial \theta}$$

Para tal, basta considerarmos:

$$H^* = \widetilde{H} - n_{\odot} p_{\theta}$$

Nosso próximo passo será reduzir um grau de liberdade. Sendo assim, consideremos a seguinte mudança de variáveis:

$$\alpha_1 = 2\theta + h$$

$$\alpha_2 = \theta$$

Assim,

$$H^* = H^*(H, p_{\theta}, h, \theta) \longrightarrow H^{**} = H^{**}(p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \alpha_1, \alpha_2)$$

Uma condição necessária e suficiente para que esta transformação seja canônica é que satisfaça a condição de **Jacobi-Poincaré**:

$$\sum_i p_i dq_i = \sum_i P_i dQ_i + dS(p_i, Q_i)$$

Em nosso caso, temos que:

$$\sum_i p_i dq_i = \sum_i P_i dQ_i$$

Com isso, chegamos em:

$$2p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2} = p_{\theta}$$

$$p_{\alpha_1} = H$$

Como  $\alpha_2$  é uma variável cíclica em  $H^*$  (portanto  $p_{\alpha_2}$  é uma constante de movimento), temos:

$$H^{**} = H_c + 3H_0 EP(A - D) \cos(\alpha_1) - 2n_{\odot} H$$

onde

$$H_c = \frac{1}{4} n^2 J_2 R_M^2 (3 \cos^2 I - 1) (1 - e^2)^{(-3/2)} + \\ + H_0 \left[ \frac{3}{2} P(A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2E^2 - \frac{2}{3}) \right]$$

$$H_0 = \frac{k^2 M_\odot a^2}{2a_\odot^3}$$

Assim,

$$H^{**} = \widetilde{H} - 2n_\odot H$$

Agora, para obtermos a Hamiltoniana da secção 2.2, consideremos:

$$R_\odot = \frac{Gm_\odot a^2}{2a_\odot^3} \left\{ \frac{3}{2} P(A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2E^2) - P + 3(A - D)EP \cos(2\lambda_\odot + \Omega) \right\}$$

onde

$$P = 1 + \frac{3}{2}e^2, \quad Z = \frac{5}{2}e^2, \quad R_{J_2} = \frac{1}{4}n^2 J_2 (3 \cos^2 I - 1)(1 - e^2)^{(-3/2)}$$

Suponhamos agora  $e^2$  desprezível (além disso  $e \equiv cte$ , pois não existe  $l, g$  em  $R$ ). Temos:

$$R = R_{J_2} + R_\odot = \frac{1}{4}J_2 n^2 \left( \frac{3 \cos^2 I - 1}{(1 - e_0)^{3/2}} \right) + \frac{Gm_\odot a^2}{2a_\odot^3} \left\{ \frac{3}{2}(A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2E^2) + 3(A - D)E \cos(2\lambda_\odot + \Omega) \right\}$$

e ainda

$$3(A - D)E \cos(2\lambda_\odot + \Omega) = \frac{3}{2} \sin^2 \left( \frac{I_\odot}{2} \right) \sin I \cos(2\lambda_\odot + \Omega)$$

$$\frac{3}{2}(A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2E^2) \approx \frac{3}{2} \left( \sin^4 \frac{I_\odot}{2} + \cos^4 \frac{I_\odot}{2} + O(I^2) \right) \equiv cte$$

Agora, desprezando  $I^2$  e considerando  $e_0 \equiv cte$ , temos:

$$R = \frac{1}{4}J_2 n^2 \left( \frac{3 \cos^2 I - 1}{(1 - e_0)^{3/2}} \right) + \frac{Gm_\odot a^2}{2a_\odot^3} \left\{ \frac{3}{2} \sin^2 \frac{I_\odot}{2} \sin I_\odot \sin I \cos(2\lambda_\odot + h) \right\}$$

Considerando os conjuntos de variáveis canônicas  $(G, H, g, h)$  e  $(-G, G-H, -g-h, -h)$  e chamando

$$\begin{aligned} X_1 &= -G, & \theta_1 &= -g - h \\ X_2 &= G - H, & \theta_2 &= -h \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} G &= -X_1 \\ H &= -X_1 - X_2 \end{aligned}$$

Como  $G - H = G - G \cos I = G(1 - \cos I) = G(1 - \sqrt{1 - \sin^2 I})$  e  $\sqrt{1 - \sin^2 I} \approx 1 - \frac{1}{2} \sin^2 I$ , temos:

$$G - H = G \left[ 1 - 1 + \frac{1}{2} \sin^2 I \right] = \frac{G}{2} \sin^2 I \implies \sin I = \sqrt{\frac{2}{G}} \sqrt{G - H}$$

$$\cos I = \frac{H}{G} = \frac{-X_1 - X_2}{-X_1} = \frac{X_1 + X_2}{X_1}, \quad \sin I = \sqrt{\left(\frac{2}{-X_1}\right)} \sqrt{X_2}$$

Assim,

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{4} \frac{n^2 J_2}{(1 - e_0^2)^{3/2}} \left[ 3 \left( \frac{X_1 + X_2}{X_1} \right)^2 - 1 \right] + \\ &+ \frac{G m_\odot a^2}{2 a_\odot^3} \frac{3}{2} \sin^2 \frac{I_\odot}{2} \sin I_\odot \sqrt{-\frac{2}{X_1}} \sqrt{X_2} \cos(2\lambda_\odot - \theta_2) - n_\odot K \end{aligned}$$

Na equação acima,  $-n_\odot K$  é devido a extensão espaço de fase  $(K, X_2, l_\odot, \theta_2)$ .

Agora, façamos mais uma transformação :

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 2l_\odot - \theta_2 \\ \eta_2 &= l_\odot \end{aligned}$$

Pela condição de Jacobi-Poincaré, temos que:

$$K dl_\odot + X_2 d\theta_2 = \xi_1 d(2l_\odot - \theta_2) + \xi_2 dl_\odot$$

Chamando

$$\begin{aligned} X_1 &= X_{10} = -G_0 \equiv cte \\ A_0 &= \frac{G m_\odot}{2 a_\odot^3} 3 \sin^2 \frac{I_\odot}{2} \sin I_\odot \sqrt{-\frac{2}{X_{10}}} \end{aligned}$$

temos

$$R = \frac{1}{4} \frac{n^2 J_2}{(1 - e_0^2)^{3/2}} \left[ \frac{3(X_{10} - \xi_1)^2}{X_{10}^2} - 1 \right] + \frac{A_0}{2} a^2 \sqrt{-\xi_1} \cos \eta_1 - 2n_\odot \xi_1$$

Escrevendo em variáveis não -singulares:

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{-2\xi_1} \cos \eta_1 \\y &= \sqrt{-2\xi_1} \sin \eta_1\end{aligned}$$

Como

$$-\xi_1 = X_2 = G - H$$

e

$$-2\xi_1 = x^2 + y^2$$

temos

$$R = \frac{1}{4} \frac{n^2 J_2}{(1 - e_0^2)^{3/2}} \frac{3}{X_{10}^2} \left[ X_{10} + \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right) \right]^2 + \frac{A_0^2 a^2}{2 \sqrt{2}} x + n_\odot (x^2 + y^2)$$

E assim, finalmente chegamos na Hamiltoniana proposta na secção 2.2

$$\begin{aligned}H &= \frac{3n^2 J_2 R_M^2}{4(1 - e_0^2)^{3/2} G^2} \left[ -G + \frac{p_1^2 + q_1^2}{2} \right]^2 + \\ &+ \frac{A_0 a^2 p_1}{2\sqrt{2}} + n_\odot (p_1^2 + q_1^2)\end{aligned}$$

onde

$$A_0 = \frac{3k^2 M_\odot \sqrt{2/G} \sin^2(\epsilon/2) \sin \epsilon}{2a_\odot^3}$$

$e_0 = \text{constante}$ .

## A.2. Dedução da expressão (2)

As equações do movimento do satélite devido o planeta+achatamento+Sol são (Brouwer e Clemence 1961):

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{GM_Jx}{r^3} + GM_\odot \left[ \frac{x_J - x}{\rho^3} - \frac{x_J}{r'^3} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\tilde{J}_2 R_{eq}^2}{r^3} \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \sin^2 \beta \right) \right] \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{GM_Jy}{r^3} + GM_\odot \left[ \frac{y_J - y}{\rho^3} - \frac{y_J}{r'^3} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\tilde{J}_2 R_{eq}^2}{r^3} \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \sin^2 \beta \right) \right] \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{GM_Jz}{r^3} + GM_\odot \left[ \frac{z_J - z}{\rho^3} - \frac{z_J}{r'^3} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\tilde{J}_2 R_{eq}^2}{r^3} \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \sin^2 \beta \right) \right]\end{aligned}$$

onde:

$r' = r_J$ : vetor posição Marte-Sol

$\rho$ : vetor posição Satélite-Sol

$r$ : vetor posição Marte-Satélite

$\tilde{J}_2 = GM_J J_2$

Sendo assim, podemos calcular as distâncias respectivas:

$$\begin{aligned}r'^2 &= (x_J^2 + y_J^2 + z_J^2) = r_J^2 \\ \rho^2 &= (x - x_J)^2 + (y - y_J)^2 + (z - z_J)^2 \\ r^2 &= x^2 + y^2 + z^2\end{aligned}$$

Com isso, temos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} 2x = \frac{x}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} 2y = \frac{y}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} 2z = \frac{z}{r}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(r^{-3}) = -3r^{-4} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{3x}{r^5}$$



$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(r^{-3}) &= -3r^{-4}\frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{3y}{r^5} \\ \frac{\partial}{\partial z}(r^{-3}) &= -3r^{-4}\frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{3z}{r^5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin^2\beta}{r^3}\right) &= -\frac{5z^2x}{r^7} \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sin^2\beta}{r^3}\right) &= -\frac{5z^2y}{r^7} \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\sin^2\beta}{r^3}\right) &= -\frac{5z^3}{r^7}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\widetilde{J}_2 R_{eq}^2}{r^3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sin^2\beta\right)\right] = \widetilde{J}_2 R_{eq}^2\left[\frac{3x}{2r^5} - \frac{15}{2}\frac{z^2x}{r^7}\right]$$

Sendo assim, temos

$$\begin{aligned}P_x &= -GM_J J_2 R_{eq}^2 \left[ \frac{3x}{2r^5} - \frac{15}{2} \frac{z^2x}{r^7} \right] \\ P_y &= -GM_J J_2 R_{eq}^2 \left[ \frac{3y}{2r^5} - \frac{15}{2} \frac{z^2y}{r^7} \right] \\ P_z &= -GM_J J_2 R_{eq}^2 \left[ \frac{9z}{2r^5} - \frac{15}{2} \frac{z^3}{r^7} \right]\end{aligned}$$

### A.3. Dedução das expressões (5) e (10)

O potencial de achatamento é desenvolvido em uma série (Brouwer and Clemence):

$$U = \frac{\mu}{r} \left[ 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{J_k R^k}{r^k} P_k(\sin \beta) \right]$$

onde

$R$ : raio equatorial do planeta

$\beta$ : latitude em relação ao plano do equador

$P_k$ : polinômios de Legendre

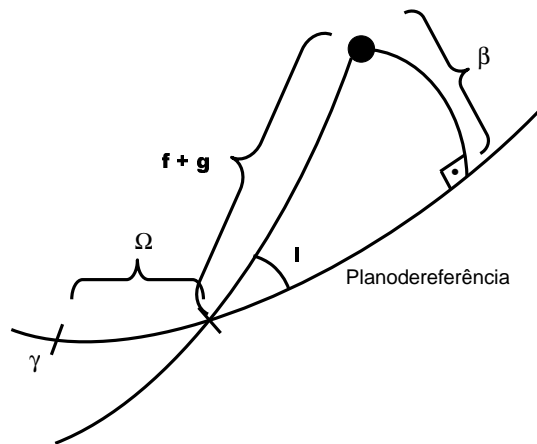
$J_k$ : coeficiente que depende da distribuição de massa no primário.

Façamos, primeiramente, o desenvolvimento desse potencial até  $k = 2$

$$\begin{aligned} U &= \frac{\mu}{r} \left[ 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{J_k R^k}{r^k} P_k(\sin \beta) \right] = \frac{\mu}{r} \left[ 1 - \frac{J_2 R^2}{r^2} \left( \frac{3}{2} \sin^2 \beta - \frac{1}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{\mu}{r} - \frac{\mu J_2 R^2}{r^3} \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \sin^2 \beta \right) \end{aligned}$$

Denotaremos por  $R_{J_2}$  a parcela do potencial responsável pela perturbação . Sendo assim,

$$R_{J_2} = -\frac{\mu J_2 R^2}{r^3} \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \sin^2 \beta \right)$$



Aplicando a Lei dos Senos na figura acima, temos:

$$\frac{\sin \beta}{\sin I} = \frac{\sin(f+g)}{\sin(\pi/2)} \implies \sin \beta = \sin I \sin(f+g)$$

temos que

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \sin^2 \beta\right) &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}(1 - \cos^2 I)(1 - \cos^2(f + g)) = \\
&= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cos^2 I + \frac{3}{4}(\cos^2 I - 1)(\cos 2(f + g)) = \\
&= -\frac{1}{4}(3 \cos^2 I - 1) + \frac{3}{4}(\cos^2 I - 1)(\cos 2(f + g))
\end{aligned}$$

Sendo assim, temos que:

$$-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \sin^2 \beta = -\frac{1}{4}(3 \cos^2 I - 1) + \frac{3}{4}(\cos^2 I - 1)(\cos 2(f + g))$$

Substituindo em (1), temos:

$$\begin{aligned}
R_{J_2} &= -\frac{\mu J_2 R^2}{r^3} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \sin^2 \beta\right) = \\
&= -\frac{\mu J_2 R^2}{r^3} \left(-\frac{1}{4}(3 \cos^2 I - 1) + \frac{3}{4}(\cos^2 I - 1)(\cos 2(f + g))\right) = \\
&= -\frac{\mu J_2 R^2}{a^3} \left(-\frac{1}{4}(3 \cos^2 I - 1) \frac{a^3}{r^3} + \frac{3}{4}(\cos^2 I - 1) \frac{a^3}{r^3} (\cos 2(f + g))\right)
\end{aligned}$$

Calculemos agora, a média de  $R_{J_2}$  em relação à anomalia média do satélite.

**Definição:** Definiremos a média da função  $F$  com relação à  $l$  por:

$$\langle F \rangle_l = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F dl$$

Sendo assim, temos que:

$$\langle R_{J_2} \rangle_l = -\frac{\mu J_2 R^2}{a^3} \left(-\frac{1}{4}(3 \cos^2 I - 1) \left\langle \frac{a^3}{r^3} \right\rangle_l + \frac{3}{4}(\cos^2 I - 1) \left\langle \frac{a^3}{r^3} (\cos 2(f + g)) \right\rangle_l\right)$$

Como

$$\left\langle \frac{a^3}{r^3} \right\rangle_l = (1 - e^2)^{-3/2} \quad \left\langle \frac{a^3}{r^3} (\cos 2(f + g)) \right\rangle_l = 0$$

temos que

$$\langle R_{J_2} \rangle_l = \frac{\mu J_2 R^2}{4a^3} [(3 \cos^2 I - 1)(1 - e^2)^{-3/2}]$$

Façamos agora para  $k = 3$ . Sendo assim, temos que:

$$U = \frac{\mu}{r} \left[ 1 - \frac{J_2 R^2}{r^2} P_2(\sin \beta) - \frac{J_3 R^3}{r^3} P_3(\sin \beta) \right]$$

E portanto

$$R_{J_3} = -\frac{\mu J_2 R^2}{r^3} P_2(\sin \beta) - \frac{\mu J_3 R^3}{r^4} P_3(\sin \beta)$$

$$\frac{\mu J_3 R^3}{r^4} P_3(\sin \beta) = \frac{\mu J_3 R^3}{2a^4} \left[ \frac{a^4}{r^4} (5 \sin^3 \beta - 3 \sin \beta) \right]$$

e fazendo cálculos análogos ao de  $R_{J_2}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle R_{J_3} \rangle_l &= \frac{\mu J_2 R^2}{4a^3} \left[ (3 \cos^2 I - 1)(1 - e^2)^{-3/2} \right] - \\ &- \frac{3}{8} \left[ \frac{n^2 J_3 e \sin I \sin g (5 \sin^2 I - 4)}{a(1 - e^2)^{5/2}} \right] \end{aligned}$$

#### A.4. Dedução da expressão (6)

Nesta seção deduziremos a função perturbadora solar, tomando a média em relação à anomalia média do satélite  $l$ . O plano de referência é o equador de Marte.

Num sistema referencial que possui a origem fixada no centro de gravidade do planeta, o termo principal da função perturbadora devido ao Sol é (Brouwer e Clemence 1961):

$$R_{\odot} = \frac{k^2 M_{\odot} r^2}{r_{\odot}^3} \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 S \right)$$

onde os termos de ordem 3 na razão  $\frac{r}{r_{\odot}}$  foram negligenciados.

Desde que  $S$  é a distância angular entre o satélite e o Sol, temos (Yokoyama, 1998)

$$\begin{aligned} \cos S &= \frac{1}{4}(1 + \cos I)(1 - \cos I_{\odot}) \cos(f + g + f_{\odot} + g_{\odot} + \Omega + \Omega_{\odot}) \\ &+ \frac{1}{4}(1 - \cos I)(1 + \cos I_{\odot}) \cos(f + g + f_{\odot} + g_{\odot} - \Omega + \Omega_{\odot}) \\ &+ \frac{1}{4}(1 + \cos I)(1 + \cos I_{\odot}) \cos(f + g - f_{\odot} - g_{\odot} + \Omega - \Omega_{\odot}) \\ &+ \frac{1}{4}(1 - \cos I)(1 - \cos I_{\odot}) \cos(f + g - f_{\odot} - g_{\odot} - \Omega + \Omega_{\odot}) \\ &+ \frac{1}{2} \sin I \sin I_{\odot} [\cos(f + g - f_{\odot} - g_{\odot}) - \cos(f + g + f_{\odot} + g_{\odot})] \end{aligned}$$

sendo assim, podemos escrever  $\cos S$  como

$$\cos S = A_1 a_1 + B_1 b_1 + C_1 c_1 + D_1 d_1 + E_1 e_1$$

onde

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{4}(1 + \cos I)(1 - \cos I_{\odot}) \\ B_1 &= \frac{1}{4}(1 - \cos I)(1 + \cos I_{\odot}) \\ C_1 &= \frac{1}{4}(1 + \cos I)(1 + \cos I_{\odot}) \\ D_1 &= \frac{1}{4}(1 - \cos I)(1 - \cos I_{\odot}) \\ E_1 &= \frac{1}{2} \sin I \sin I_{\odot} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos(f + g + f_{\odot} + g_{\odot} + \Omega - \Omega_{\odot}) \\ b_1 &= \cos(f + g + f_{\odot} + g_{\odot} - \Omega + \Omega_{\odot}) \\ c_1 &= \cos(f + g - f_{\odot} - g_{\odot} + \Omega - \Omega_{\odot}) \\ d_1 &= \cos(f + g - f_{\odot} - g_{\odot} - \Omega + \Omega_{\odot}) \\ e_1 &= \cos(f + g - f_{\odot} - g_{\odot}) - \cos(f + g + f_{\odot} + g_{\odot}) \end{aligned}$$

**Definição :** Definiremos a média da função  $F$  com relação à  $l$  por:

$$\langle F \rangle_l = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F dl$$

Temos que,

$$\left\langle \frac{r^2}{a^2} \right\rangle_l = 1 + \frac{3}{2}e^2 \quad \left\langle \frac{r^2}{a^2} \cos(2f + K) \right\rangle_l = \frac{5}{2}e^2 \cos K \quad (19)$$

Para obtermos estas duas médias acima faremos uso de algumas relações que envolvem a anomalia excêntrica  $u$ . Da definição de  $u$  temos,

$$r = a(1 - e \cos u)$$

A equação de Kepler é dada por:

$$u - e \sin u = l$$

Utilizando estas duas equações temos:

$$dl = \frac{r}{a} du$$

Assim,

$$\left\langle \frac{r^2}{a^2} \right\rangle_l = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{a^2} dl = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - e \cos u)^3 du = 1 + \frac{3}{2}e^2$$

e

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{r^2}{a^2} \cos(2f + K) \right\rangle_l &= \left\langle \frac{r^2}{a^2} \cos(2f) \cos K \right\rangle_l - \left\langle \frac{r^2}{a^2} \sin(2f) \sin K \right\rangle_l = \\ &= \cos K \left\langle \frac{r^2}{a^2} \cos(2f) \right\rangle_l - \sin K \left\langle \frac{r^2}{a^2} \sin(2f) \right\rangle_l \end{aligned}$$

Como

$$\frac{r}{a} \cos f = \cos u - e \quad \frac{r}{a} \sin f = \sqrt{1 - e^2} \sin u$$

temos

$$\frac{r^2}{a^2} \cos(2f) = (\cos u - e)^2 - (1 - e^2) \sin^2 u$$

Portanto,

$$\left\langle \frac{r^2}{a^2} \cos(2f) \right\rangle_l = \frac{5}{2}e^2 \quad \left\langle \frac{r^2}{a^2} \sin(2f) \right\rangle_l = 0$$

E com estes cálculos verifica-se (1).

Agora façamos parceladamente as médias de  $\left[ \frac{r^2}{a^2} \cos^2 S \right]$ :

Temos que:

$$\begin{aligned} \cos^2 S &= A_1 a_1^2 + 2A_1 a_1 B_1 b_1 + 2A_1 a_1 C_1 c_1 + 2A_1 a_1 D_1 d_1 + 2A_1 a_1 E_1 e_1 + \\ &+ B_1 b_1^2 + 2B_1 b_1 C_1 c_1 + 2B_1 b_1 D_1 d_1 + 2B_1 b_1 E_1 e_1 + \\ &+ C_1 c_1^2 + 2C_1 c_1 D_1 d_1 + 2C_1 c_1 E_1 e_1 \\ &+ D_1 d_1^2 + 2D_1 d_1 E_1 e_1 + \\ &+ E_1 e_1^2 \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} a_1 \frac{r^2}{a^2} &= \cos^2(f + g + f_\odot + g_\odot + \Omega - \Omega_\odot) \frac{r^2}{a^2} = \\ &= \frac{1}{2} [1 + \cos(2f + 2g + 2f_\odot + 2g_\odot + 2\Omega - 2\Omega_\odot)] \frac{r^2}{a^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle a_1 \frac{r^2}{a^2} \right\rangle_l &= \frac{1}{2} \left\langle \frac{r^2}{a^2} \right\rangle_l + \frac{1}{2} \left\langle \frac{r^2}{a^2} \cos(2f + 2g + 2f_\odot + 2g_\odot + 2\Omega - 2\Omega_\odot) \right\rangle_l = \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{3}{2}e^2 \right) + \frac{1}{2} \left[ \frac{5}{2}e^2 \cos(2g + 2f_\odot + 2g_\odot + 2\Omega - 2\Omega_\odot) \right] \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left\langle a_1 \frac{r^2}{a^2} \right\rangle_l = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{5}{2}e^2 \cos(2g + 2f_\odot + 2g_\odot + 2\Omega - 2\Omega_\odot) \right]$$

Segue de modo análogo,

$$\begin{aligned} b_1 \frac{r^2}{a^2} &= \frac{1}{2} [1 + \cos(2f + 2g + 2f_\odot + 2g_\odot - 2\Omega + 2\Omega_\odot)] \frac{r^2}{a^2} \\ \left\langle b_1 \frac{r^2}{a^2} \right\rangle_l &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{5}{2}e^2 \cos(2g + 2f_\odot + 2g_\odot - 2\Omega + 2\Omega_\odot) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1 \frac{r^2}{a^2} &= \frac{1}{2} [1 + \cos(2f + 2g - 2f_\odot - 2g_\odot + 2\Omega - 2\Omega_\odot)] \frac{r^2}{a^2} \\ \left\langle c_1 \frac{r^2}{a^2} \right\rangle_l &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{5}{2}e^2 \cos(2g - 2f_\odot - 2g_\odot + 2\Omega - 2\Omega_\odot) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_1 \frac{r^2}{a^2} &= \frac{1}{2} [1 + \cos(2f + 2g - 2f_\odot - 2g_\odot - 2\Omega + 2\Omega_\odot)] \frac{r^2}{a^2} \\
\left\langle d_1 \frac{r^2}{a^2} \right\rangle_l &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{5}{2} e^2 \cos(2f + 2g - 2f_\odot - 2g_\odot - 2\Omega + 2\Omega_\odot) \right] \\
e_1 \frac{r^2}{a^2} &= \frac{1}{2} [1 + \cos(2f + 2g - 2f_\odot - 2g_\odot) + 1 + \cos(2f + 2g + 2f_\odot + 2g_\odot) - \\
&\quad - 2 \cos(2f + 2g) - 2 \cos(2f_\odot + 2g_\odot)] \frac{r^2}{a^2} \\
\left\langle e_1 \frac{r^2}{a^2} \right\rangle_l &= \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \right) (2 - 2 \cos(2f_\odot + 2g_\odot)) \right] + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[ \frac{5}{2} e^2 [\cos(2g - 2f_\odot - 2g_\odot) + \cos(2g + 2f_\odot + 2g_\odot) - 2 \cos(2g)] \right]
\end{aligned}$$

Agora, calculemos os termos mistos:

$$\begin{aligned}
a_1 b_1 \frac{r^2}{a^2} &= \frac{1}{2} [\cos(2f + 2g + 2f_\odot + 2g_\odot) + \cos(2\Omega - 2\Omega_\odot)] \frac{r^2}{a^2} \\
\left\langle a_1 b_1 \frac{r^2}{a^2} \right\rangle_l &= \frac{1}{2} \left[ \frac{5}{2} e^2 \cos(2g + 2f_\odot + 2g_\odot) + \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \cos(2\Omega - 2\Omega_\odot) \right] \\
a_1 c_1 \frac{r^2}{a^2} &= \frac{1}{2} [\cos(2f + 2g + 2\Omega - 2\Omega_\odot) + \cos(2f_\odot - 2g_\odot)] \frac{r^2}{a^2} \\
\left\langle a_1 c_1 \frac{r^2}{a^2} \right\rangle_l &= \frac{1}{2} \left[ \frac{5}{2} e^2 \cos(2g + 2\Omega + 2\Omega_\odot) + \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \cos(2f_\odot - 2g_\odot) \right] \\
a_1 d_1 \frac{r^2}{a^2} &= \frac{1}{2} [\cos(2f + 2g) + \cos(2f_\odot + 2g_\odot + 2\Omega - 2\Omega_\odot)] \frac{r^2}{a^2} \\
\left\langle a_1 d_1 \frac{r^2}{a^2} \right\rangle_l &= \frac{1}{2} \left[ \frac{5}{2} e^2 \cos(2g) + \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \cos(2f_\odot + 2g_\odot + 2\Omega - 2\Omega_\odot) \right] \\
a_1 e_1 \frac{r^2}{a^2} &= \frac{1}{2} [\cos(2f + 2g + \Omega - \Omega_\odot) + \cos(2f_\odot + 2g_\odot + \Omega - \Omega_\odot) - \\
&\quad - \cos(2f + 2g + 2f_\odot + 2g_\odot + \Omega - \Omega_\odot) - \cos(\Omega - \Omega_\odot)] \frac{r^2}{a^2} \\
\left\langle a_1 e_1 \frac{r^2}{a^2} \right\rangle_l &= \frac{1}{2} \left[ \frac{5}{2} e^2 \cos(2g + \Omega - \Omega_\odot) - \frac{5}{2} e^2 \cos(2g + 2f_\odot + 2g_\odot + \Omega - \Omega_\odot) \right] + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \right) [\cos(2f_\odot + 2g_\odot + \Omega - \Omega_\odot) - \cos(\Omega - \Omega_\odot)] \right] \\
b_1 c_1 \frac{r^2}{a^2} &= \frac{1}{2} [\cos(2f + 2g) + \cos(2f_\odot + 2g_\odot - 2\Omega + 2\Omega_\odot)] \frac{r^2}{a^2} \\
\left\langle b_1 c_1 \frac{r^2}{a^2} \right\rangle_l &= \frac{1}{2} \left[ \frac{5}{2} e^2 \cos(2g) + \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \cos(2f_\odot + 2g_\odot - 2\Omega + 2\Omega_\odot) \right]
\end{aligned}$$



$$b_1 d_1 \frac{r^2}{a^2} = \frac{1}{2} [\cos(2f + 2g - 2\Omega + 2\Omega_\odot) + \cos(2f_\odot + 2g_\odot)] \frac{r^2}{a^2}$$

$$\left\langle b_1 d_1 \frac{r^2}{a^2} \right\rangle_l = \frac{1}{2} \left[ \frac{5}{2} e^2 \cos(2g - 2\Omega + 2\Omega_\odot) + \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right) \cos(2f_\odot + 2g_\odot) \right]$$

$$b_1 e_1 \frac{r^2}{a^2} = \frac{1}{2} [\cos(2f + 2g - \Omega + \Omega_\odot) + \cos(2f_\odot + 2g_\odot - \Omega + \Omega_\odot) - \cos(2f + 2g + 2f_\odot + 2g_\odot - \Omega + \Omega_\odot) - \cos(\Omega - \Omega_\odot)] \frac{r^2}{a^2}$$

$$\left\langle b_1 e_1 \frac{r^2}{a^2} \right\rangle_l = \frac{1}{2} \left[ \frac{5}{2} e^2 [\cos(2g - \Omega + \Omega_\odot) - \cos(2g + 2f_\odot + 2g_\odot - \Omega + \Omega_\odot)] \right] + \frac{1}{2} \left[ \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right) [\cos(2f_\odot + 2g_\odot - \Omega + \Omega_\odot) - \cos(\Omega - \Omega_\odot)] \right]$$

$$c_1 d_1 \frac{r^2}{a^2} = \frac{1}{2} [\cos(2f + 2g - 2f_\odot - 2g_\odot) + \cos(2\Omega - 2\Omega_\odot)] \frac{r^2}{a^2}$$

$$\left\langle c_1 d_1 \frac{r^2}{a^2} \right\rangle_l = \frac{1}{2} \left[ \frac{5}{2} e^2 \cos(2g - 2f_\odot - 2g_\odot) + \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right) \cos(2\Omega - 2\Omega_\odot) \right]$$

$$c_1 e_1 \frac{r^2}{a^2} = \frac{1}{2} [\cos(2f + 2g - 2f_\odot - 2g_\odot + \Omega - \Omega_\odot) + \cos(\Omega - \Omega_\odot) - \cos(2f + 2g + \Omega - \Omega_\odot) - \cos(2f_\odot + 2g_\odot - \Omega + \Omega_\odot)] \frac{r^2}{a^2}$$

$$\left\langle c_1 e_1 \frac{r^2}{a^2} \right\rangle_l = \frac{1}{2} \left[ \frac{5}{2} e^2 [\cos(2g - 2f_\odot - 2g_\odot + \Omega - \Omega_\odot) - \cos(2g + \Omega - \Omega_\odot)] \right] + \frac{1}{2} \left[ \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right) [\cos(\Omega - \Omega_\odot) - \cos(2f_\odot + 2g_\odot - \Omega + \Omega_\odot)] \right]$$

$$d_1 e_1 \frac{r^2}{a^2} = \frac{1}{2} [\cos(2f + 2g - 2f_\odot - 2g_\odot - \Omega + \Omega_\odot) + \cos(\Omega - \Omega_\odot) - \cos(2f + 2g - \Omega + \Omega_\odot) - \cos(2f_\odot + 2g_\odot + \Omega - \Omega_\odot)] \frac{r^2}{a^2}$$

$$\left\langle d_1 e_1 \frac{r^2}{a^2} \right\rangle_l = \frac{1}{2} \left[ \frac{5}{2} e^2 [\cos(2g - 2f_\odot - 2g_\odot - \Omega + \Omega_\odot) - \cos(2g - \Omega + \Omega_\odot)] \right] + \frac{1}{2} \left[ \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right) [\cos(\Omega - \Omega_\odot) - \cos(2f_\odot + 2g_\odot + \Omega - \Omega_\odot)] \right]$$

Portanto a média de  $R_\odot$  em relação à anomalia da satélite é:

$$\langle R_{\odot} \rangle_l = \left\langle \frac{GM_{\odot} a^2}{2a_{\odot}^3} [3 \cos^2 S - 1] \frac{a_{\odot}^3 r^2}{r_{\odot}^3 a^2} \right\rangle_l$$

$$\langle R_{\odot} \rangle_l = \frac{GM_{\odot} a^2}{2a_{\odot}^3} \left( \frac{a_{\odot}^3}{r_{\odot}^3} \right) \left\langle 3 \frac{r^2}{a^2} \cos^2 S - \frac{r^2}{a^2} \right\rangle_l$$

$$\begin{aligned} \left\langle 3 \frac{r^2}{a^2} \cos^2 S - \frac{r^2}{a^2} \right\rangle_l = & P \left[ \left( \frac{A_1^2}{2} + \frac{B_1^2}{2} + \frac{C_1^2}{2} + \frac{D_1^2}{2} + E_1^2 \right) 3 - 1 \right] + \\ & 3 \frac{A_1^2}{2} Z \cos(2g + 2\alpha + 2\beta) + \\ & 3 \frac{B_1^2}{2} Z \cos(2g + 2\alpha - 2\beta) + \\ & 3 \frac{C_1^2}{2} Z \cos(2g - 2\alpha + 2\beta) + \\ & 3 \frac{D_1^2}{2} Z \cos(2g - 2\alpha - 2\beta) + \\ & 3 \left[ \frac{E_1^2 Z}{2} + C_1 D_1 Z \right] \cos(2g - 2\alpha) + \\ & 3 \left[ \frac{E_1^2 Z}{2} + A_1 B_1 Z \right] \cos(2g + 2\alpha) + \\ & 3[-E_1^2 Z + A_1 D_1 Z + B_1 C_1 Z] \cos(2g) \\ & 3[-E_1^2 P + A_1 C_1 P + B_1 D_1 P] \cos(2\alpha) \\ & 3[A_1 B_1 P + C_1 D_1 P] \cos(2\beta) + \\ & 3[A_1 C_1 Z] \cos(2g + 2\beta) + \\ & 3[A_1 D_1 P] \cos(2\alpha + 2\beta) + \\ & 3[A_1 E_1 P - D_1 E_1 P] \cos(2\alpha + \beta) + \\ & 3[-A_1 E_1 P - B_1 E_1 P + C_1 E_1 P + D_1 E_1 P] \cos \beta + \\ & 3[A_1 E_1 Z - C_1 E_1 Z] \cos(2g + \beta) + \\ & 3[-A_1 E_1 Z] \cos(2g + 2\alpha + \beta) + \\ & 3[B_1 C_1 P] \cos(2\alpha - 2\beta) + \\ & 3[B_1 D_1 Z] \cos(2g - 2\beta) + \\ & 3[B_1 E_1 P - C_1 E_1 P] \cos(2\alpha - \beta) + \\ & 3[B_1 E_1 Z - D_1 E_1 Z] \cos(2g - \beta) + \\ & 3[-B_1 E_1 Z] \cos(2g + 2\alpha - \beta) + \\ & 3[C_1 E_1 Z] \cos(2g - 2\alpha + \beta) + \\ & 3[D_1 E_1 Z] \cos(2g - 2\alpha - \beta) \end{aligned}$$

**A.5.** Dedução da expressão (16)

Sejam:

$$\begin{aligned} p &= \tan I \sin \Omega \\ q &= \tan I \cos \Omega \end{aligned}$$

Como

$$\frac{dp}{dI} = 1 \quad \frac{dq}{dI} = 0$$

temos

$$\begin{aligned} \tan I \cos \Omega \frac{d\Omega}{dI} + \sec^2 I \sin \Omega \frac{dI}{dI} &= 1 \\ -\tan I \sin \Omega \frac{d\Omega}{dI} + \sec^2 I \cos \Omega \frac{dI}{dI} &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema, obtemos facilmente que:

$$\frac{d\Omega}{dI} = \frac{\cos \Omega}{\tan I} \quad \frac{dI}{dI} = \frac{\sin \Omega}{\sec^2 I}$$

Analogamente, considerando

$$\frac{dp}{dq} = 0 \quad \frac{dq}{dq} = 1$$

obtemos

$$\frac{d\Omega}{dq} = -\frac{\sin \Omega}{\tan I} \quad \frac{dI}{dq} = \frac{\cos \Omega}{\sec^2 I}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial p} &= \frac{\partial R}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial p} + \frac{\partial R}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial p} \\ \frac{\partial R}{\partial q} &= \frac{\partial R}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial q} + \frac{\partial R}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial q} \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial I} &= \sec^2 I \sin \Omega \frac{\partial R}{\partial p} + \sec^2 I \cos \Omega \frac{\partial R}{\partial q} \\ \frac{\partial R}{\partial \Omega} &= \tan I \cos \Omega \frac{\partial R}{\partial p} - \sin \Omega \tan I \frac{\partial R}{\partial q} \end{aligned}$$

Agora, como

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial \Omega} \frac{d\Omega}{dt} + \frac{\partial p}{\partial I} \frac{dI}{dt}$$

e (Brouwer and Clemence 1961)

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin I} \frac{\partial R}{\partial I} \\ \frac{dI}{dt} &= -\frac{\tan \frac{I}{2}}{na^2(1-e^2)^{1/2}} \left( \frac{\partial R}{\partial \epsilon} + \frac{\partial R}{\partial \varpi} \right) - \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin I} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \end{aligned}$$

obtemos  $\frac{dp}{dt}$  como na equação (14). Segue analogamente as outras derivadas.

**A.6.** Tabela completa conforme Ward (1979)

$$\begin{aligned}
 e_{\odot} \sin \varpi_{\odot} = & 0.000650 \sin(0.00002520585113183 t + 1.51931923677072533) + \\
 & 0.002917 \sin(0.00003561484934662 t + 3.37869057101839187) + \\
 & 0.028231 \sin(0.00008348758236231 t + 5.58018919922362144) + \\
 & 0.061152 \sin(0.00008657443955130 t + 5.37231524932334104) + \\
 & 0.018800 \sin(0.00002039712967301 t + 0.49747503642029811) + \\
 & 0.016093 \sin(0.00012710243922365 t + 2.22904969764551097) + \\
 & 0.000862 \sin(0.00001486041199063 t + 2.52680810402349953) + \\
 & 0.000020 \sin(0.00000323787665066 t + 1.25821291921754286) - \\
 & 0.000199 \sin(0.00009104306421282 t + 0.07548391935242796) + \\
 & 0.000453 \sin(0.00013200162691537 t + 2.73522956371013048) + \\
 & 0.000287 \sin(0.00008614387652111 t + 5.85423468971938821) - \\
 & 0.013379 \sin(0.00012710243922365 t + 2.22904969764551097) + \\
 & 0.000762 \sin(0.00012220325153194 t + 1.72461516083288524) - \\
 & 0.000134 \sin(0.00012156572154128 t + 4.25838276524871162) + \\
 & 0.001092 \sin(0.00002039712967301 t + 0.49747503642029811) + \\
 & 0.000503 \sin(0.00008448154737132 t + 2.64606296115376782) + \\
 & 0.000105 \sin(0.00013263915690603 t + 0.19971663004230955) - \\
 & 0.000180 \sin(0.00008103772186893 t + 1.11846300974695523) + \\
 & 0.000177 \sin(-0.00026424929677390 t + 3.82501349772124044) - \\
 & 0.000240 \sin(0.00005051506454047 t + 3.21874947103025777) + \\
 & 0.006177 \sin(0.00009147362724302 t + 5.87674978613596632) - \\
 & 0.000176 \sin(-0.00025935010908218 t + 4.32944803453386573) + \\
 & 0.000370 \sin(0.00004561587684876 t + 2.71431493421763204) - \\
 & 0.000354 \sin(0.00012753300225385 t + 1.74713025724946247) - \\
 & 0.014852 \sin(0.00008167525185958 t + 4.86788071251071486) + \\
 & 0.000211 \sin(0.00012263381456213 t + 1.24269572043683718) + \\
 & 0.000118 \sin(0.00009211115723368 t + 3.34298218172013906) - \\
 & 0.000286 \sin(0.00004604643987895 t + 2.23239549382158398) + \\
 & 0.000726 \sin(0.00008966129674029 t + 5.16444129942305974) + \\
 & 0.000133 \sin(0.00013018929641264 t + 2.02117574774523012) + \\
 & 0.000184 \sin(0.00012401558203466 t + 2.43692364754579138) - \\
 & 0.008864 \sin(-0.00026116243958491 t + 3.61713954782095959) + \\
 & 0.000148 \sin(0.00004252901965976 t + 2.92218888411791289) - \\
 & 0.000323 \sin(0.00008348758236231 t + 5.58018919922362144) + \\
 & 0.000162 \sin(-0.00029722181459574 t + 1.46357376952787699) - \\
 & 0.001422 \sin(0.00007858839467059 t + 5.07575466241099615) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0.000102 \sin(0.00011954695737314 t - 1.45056967033711759) + \\
& 0.000137 \sin(0.00008902430004468 t + 3.55086660359593198) - \\
& 0.000144 \sin(0.00004295958268996 t + 2.44026944372186438) + \\
& 0.000388 \sin(0.00008040072517332 t + 5.78806314912390185) - \\
& 0.000190 \sin(-0.00014931975338102 t + 1.87106172411044991) + \\
& 0.000173 \sin(0.00003083012616501 t + 2.68723527820831443) + \\
& 0.000135 \sin(0.00008929026883014 t + 3.66790716150419494) - \\
& 0.001087 \sin(0.00008439108113842 t + 3.16347262469156965)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{\odot} \cos \varpi_{\odot} = & 0.000650 \cos(0.00002520585113183 t + 1.51931923677072533) + \\
& 0.002917 \cos(0.00003561484934662 t + 3.37869057101839187) + \\
& 0.028231 \cos(0.00008348758236231 t + 5.58018919922362144) + \\
& 0.061152 \cos(0.00008657443955130 t + 5.37231524932334104) + \\
& 0.018800 \cos(0.00002039712967301 t + 0.49747503642029811) + \\
& 0.016093 \cos(0.00012710243922365 t + 2.22904969764551097) + \\
& 0.000862 \cos(0.00001486041199063 t + 2.52680810402349953) + \\
& 0.000020 \cos(0.00000323787665066 t + 1.25821291921754286) - \\
& 0.000199 \cos(0.00009104306421282 t + 0.07548391935242796) + \\
& 0.000453 \cos(0.00013200162691537 t + 2.73522956371013048) + \\
& 0.000287 \cos(0.00008614387652111 t + 5.85423468971938821) - \\
& 0.013379 \cos(0.00012710243922365 t + 2.22904969764551097) + \\
& 0.000762 \cos(0.00012220325153194 t + 1.72461516083288524) - \\
& 0.000134 \cos(0.00012156572154128 t + 4.25838276524871162) + \\
& 0.001092 \cos(0.00002039712967301 t + 0.49747503642029811) + \\
& 0.000503 \cos(0.00008448154737132 t + 2.64606296115376782) + \\
& 0.000105 \cos(0.00013263915690603 t + 0.19971663004230955) - \\
& 0.000180 \cos(0.00008103772186893 t + 1.11846300974695523) + \\
& 0.000177 \cos(-0.00026424929677390 t + 3.82501349772124044) - \\
& 0.000240 \cos(0.00005051506454047 t + 3.21874947103025777) + \\
& 0.006177 \cos(0.00009147362724302 t + 5.87674978613596632) - \\
& 0.000176 \cos(-0.00025935010908218 t + 4.32944803453386573) + \\
& 0.000370 \cos(0.00004561587684876 t + 2.71431493421763204) - \\
& 0.000354 \cos(0.00012753300225385 t + 1.74713025724946247) - \\
& 0.014852 \cos(0.00008167525185958 t + 4.86788071251071486) + \\
& 0.000211 \cos(0.00012263381456213 t + 1.24269572043683718) + \\
& 0.000118 \cos(0.00009211115723368 t + 3.34298218172013906) - \\
& 0.000286 \cos(0.00004604643987895 t + 2.23239549382158398) + \\
& 0.000726 \cos(0.00008966129674029 t + 5.16444129942305974) + \\
& 0.000133 \cos(0.00013018929641264 t + 2.02117574774523012) + \\
& 0.000184 \cos(0.00012401558203466 t + 2.43692364754579138) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0.008864 \cos(-0.00026116243958491 t + 3.61713954782095959) + \\
& 0.000148 \cos(0.00004252901965976 t + 2.92218888411791289) - \\
& 0.000323 \cos(0.00008348758236231 t + 5.58018919922362144) + \\
& 0.000162 \cos(-0.00029722181459574 t + 1.46357376952787699) - \\
& 0.001422 \cos(0.00007858839467059 t + 5.07575466241099615) + \\
& 0.000102 \cos(0.00011954695737314 t - 1.45056967033711759) + \\
& 0.000137 \cos(0.00008902430004468 t + 3.55086660359593198) - \\
& 0.000144 \cos(0.00004295958268996 t + 2.44026944372186438) + \\
& 0.000388 \cos(0.00008040072517332 t + 5.78806314912390185) - \\
& 0.000190 \cos(-0.00014931975338102 t + 1.87106172411044991) + \\
& 0.000173 \cos(0.00003083012616501 t + 2.68723527820831443) + \\
& 0.000135 \cos(0.00008929026883014 t + 3.66790716150419494) - \\
& 0.001087 \cos(0.00008439108113842 t + 3.16347262469156965)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 \sin \frac{I_{\odot}}{2} \sin \Omega_{\odot} = & 0.001720 \sin(-0.00002720260475885 t + 0.21184980993632371) + \\
& 0.001132 \sin(-0.00003282687979203 t + 5.32711907567832110) - \\
& 0.029428 \sin(-0.00009128702245716 t + 4.34644719238244015) + \\
& 0.062606 \sin(-0.00008638783476544 t + 4.85088155466214133) + \\
& 0.027679 \sin(1.85272302606096995) + \\
& 0.009640 \sin(-0.00012734639746799 t + 2.19288123955643233) - \\
& 0.001256 \sin(-0.00001454363473140 t + 5.52035983606403136) - \\
& 0.001230 \sin(-0.00000335214723530 t + 3.51313241063488890) - \\
& 0.000360 \sin(-0.00012734639746799 t + 2.19288123955643233) - \\
& 0.002202 \sin(-0.00008148864707373 t + 5.35531609147476662) - \\
& 0.003676 \sin(-0.00009128702245716 t + 4.34644719238244015) - \\
& 0.000414 \sin(-0.00009618621014887 t + 3.84201265556981486) + \\
& 0.000858 \sin(-0.00002720260475885 t + 0.21184980993632371) - \\
& 0.000410 \sin(-0.00008575030477478 t + 2.84071290037753821) + \\
& 0.000832 \sin(-0.00005075902278481 t + 1.16827505566472389) - \\
& 0.001074 \sin(-0.00004585983509309 t + 1.67270959247734963) + \\
& 0.000290 \sin(-0.00008681839779564 t + 5.29789458455122819) + \\
& 0.001216 \sin(-0.00012691578595643 t + 1.74586838420027068) - \\
& 0.000502 \sin(-0.00013181497364814 t + 1.24143384738764495) - \\
& 0.015894 \sin(-0.00008820011678680 t + 4.13857324248215974) - \\
& 0.007514 \sin(-0.00008330097757645 t + 4.64300760476186003) + \\
& 0.002272 \sin(-0.00008947474043580 t + 5.05875550456242173) + \\
& 0.000224 \sin(-0.00004767216559581 t + 0.96040110576444337) - \\
& 0.000396 \sin(-0.00004277297790410 t + 1.46483564257706877) + \\
& 0.000428 \sin(-0.00013000269162679 t + 1.95374233410055131) +
\end{aligned}$$

$$0.000412 \sin(-0.00003761160297364 t + 4.63566360833531821) - \\ 0.001212 \sin(-0.00008857119317832 t + 2.64203910456329494) -$$

$$2 \sin \frac{I_{\odot}}{2} \cos \Omega_{\odot} = 0.001720 \cos(-0.00002720260475885 t + 0.21184980993632371) + \\ 0.001132 \cos(-0.00003282687979203 t + 5.32711907567832110) - \\ 0.029428 \cos(-0.00009128702245716 t + 4.34644719238244015) + \\ 0.062606 \cos(-0.00008638783476544 t + 4.85088155466214133) + \\ 0.027679 \cos(1.85272302606096995) + \\ 0.009640 \cos(-0.00012734639746799 t + 2.19288123955643233) - \\ 0.001256 \cos(-0.00001454363473140 t + 5.52035983606403136) - \\ 0.001230 \cos(-0.00000335214723530 t + 3.51313241063488890) - \\ 0.000360 \cos(-0.00012734639746799 t + 2.19288123955643233) - \\ 0.002202 \cos(-0.00008148864707373 t + 5.35531609147476662) - \\ 0.003676 \cos(-0.00009128702245716 t + 4.34644719238244015) - \\ 0.000414 \cos(-0.00009618621014887 t + 3.84201265556981486) + \\ 0.000858 \cos(-0.00002720260475885 t + 0.21184980993632371) - \\ 0.000410 \cos(-0.00008575030477478 t + 2.84071290037753821) + \\ 0.000832 \cos(-0.00005075902278481 t + 1.16827505566472389) - \\ 0.001074 \cos(-0.00004585983509309 t + 1.67270959247734963) + \\ 0.000290 \cos(-0.00008681839779564 t + 5.29789458455122819) + \\ 0.001216 \cos(-0.00012691578595643 t + 1.74586838420027068) - \\ 0.000502 \cos(-0.00013181497364814 t + 1.24143384738764495) - \\ 0.015894 \cos(-0.00008820011678680 t + 4.13857324248215974) - \\ 0.007514 \cos(-0.00008330097757645 t + 4.64300760476186003) + \\ 0.002272 \cos(-0.00008947474043580 t + 5.05875550456242173) + \\ 0.000224 \cos(-0.00004767216559581 t + 0.96040110576444337) - \\ 0.000396 \cos(-0.00004277297790410 t + 1.46483564257706877) + \\ 0.000428 \cos(-0.00013000269162679 t + 1.95374233410055131) + \\ 0.000412 \cos(-0.00003761160297364 t + 4.63566360833531821) - \\ 0.001212 \cos(-0.00008857119317832 t + 2.64203910456329494) -$$



### A.7. Dedução da expressão (17)

Vamos agora deduzir as equações da precessão do equador de Marte causada por apenas um perturbador (no nosso caso o Sol).

No estudo da dinâmica de corpos rígidos devemos considerar os teoremas do momento linear e do momento angular. O movimento de um corpo rígido é completamente definido pelas equações :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{Q}}{dt} &= \vec{F}_{ext} \\ \frac{d\vec{S}}{dt} &= \vec{N}_{ext}\end{aligned}$$

onde  $\vec{Q}$  é o vetor momento linear,  $\vec{S}$  é o vetor momento angular e  $\vec{N}_{ext}$  é o vetor momento externo total (ou torque externo) dado por:

$$\vec{N}_{ext} = \sum_{i=1}^N -\vec{r}_i \times \text{grad}_{P_i} W_i$$

onde  $\text{grad}_{P_i} W_i$  é a ação do campo gravitacional do planeta no ponto  $P_i$  (perturbadores) e  $\vec{r}_i$  é o vetor posição do perturbador.

Consideremos um sistema de coordenadas fixo no centro de massa do planeta e orientado ao longo de seus eixos principais de inércia com vetores unitários  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$ . Sejam ainda,  $A$ ,  $B$  e  $C$  os momentos principais de inércia em relação a estes eixos, enquanto  $p$ ,  $q$  e  $r$  são as componentes do vetor velocidade angular ( $\vec{\omega}$ ).

Classicamente, temos que:

$$\vec{S} = Ap\vec{i} + Bq\vec{j} + Cr\vec{k}$$

As equações dinâmicas de Euler são :

$$A\dot{p} - (B - C)qr = L$$

$$B\dot{q} - (C - A)rp = M$$

$$C\dot{r} - (A - B)pq = N$$

onde  $\vec{N}_{ext} = (L, M, N)$ . Em nosso caso, vamos admitir que o planeta possua simetria axial, ou seja,  $A = B$ . Assim:

$$\begin{aligned} \dot{p} + \frac{C-A}{A}rq &= \frac{L}{A} \\ \dot{q} - \frac{C-A}{A}rp &= \frac{M}{A} \\ \dot{r} &= \frac{N}{C} = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Consideremos um sistema inercial  $(x, y, z)$  e outro móvel  $(x', y', z')$  (fixado no equador do planeta), cujos eixos principais estão nas direções  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  já mencionados.

Como a componente do problema de dois corpos na direção  $\vec{r}_i$  se cancela no produto vetorial, tomaremos  $W_i$  apenas devido ao achatamento.

$$W_i = -\frac{GMm_i J_2 R_p^2}{r_i^3} P_2(\sin \phi_i) = -\frac{GMm_i J_2 R_p^2}{r_i^3} \frac{1}{2} (3 \sin^2 \phi_i - 1)$$

onde:

$M$ : massa do planeta

$R_p$ : raio do planeta

$\phi_i$ : latitude do perturbador relativo ao plano equatorial do planeta.

$m_i$ : massa do perturbador (no nosso caso, Sol)

Definindo  $\vec{r}_i = (X_i, Y_i, Z_i)$  como as coordenadas do perturbador no sistema de referência do centro de massa do planeta e considerando-se (apenas um perturbador):

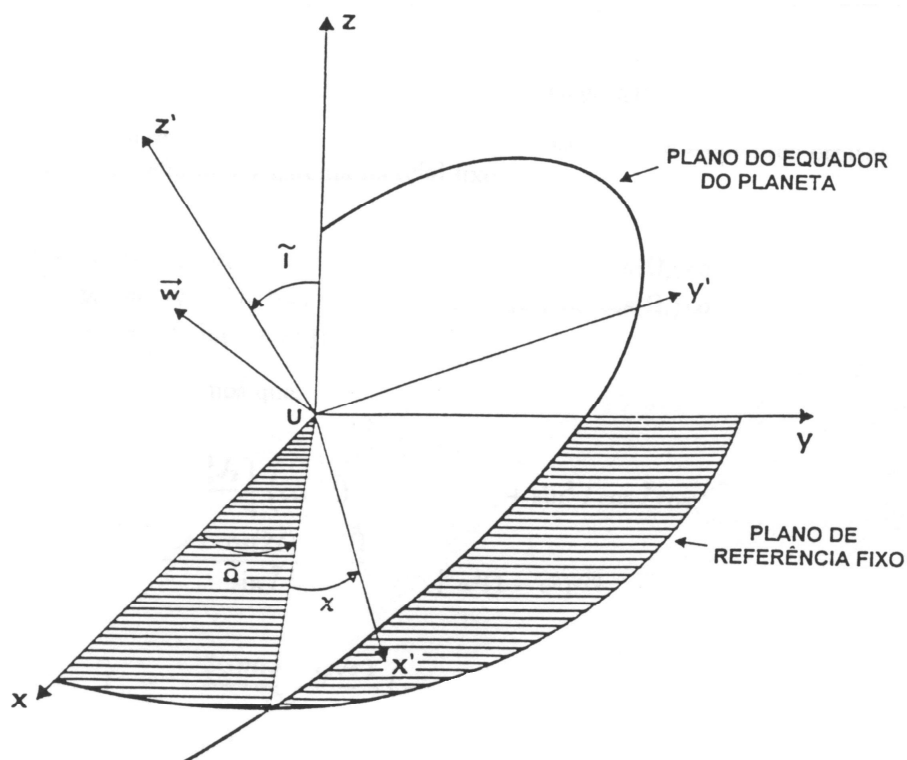
$$\vec{N}_{ext} = -\vec{r}_i \times \text{grad}_{P_i} W_i$$

temos (onde  $\vec{N}_{ext} = (L, M, N)$ ):

$$\vec{N}_{ext} = \begin{cases} L = \frac{\partial W_i}{\partial Y_i} Z_i - \frac{\partial W_i}{\partial Z_i} Y_i \\ M = \frac{-\partial W_i}{\partial X_i} Z_i + \frac{\partial W_i}{\partial Z_i} X_i \\ N = \frac{\partial W_i}{\partial X_i} Y_i - \frac{\partial W_i}{\partial Y_i} X_i \end{cases}$$

Como  $Z_i = r_i \sin \phi_i$  e  $W_i = W_i\left(r_i, \frac{Z_i}{r_i}\right)$ , usando a equação de  $N$  dada acima concluímos que  $N = 0$ , o que justifica (\*).

Seja  $U_{xyz}$  um referencial inercial (por exemplo a eclíptica) conforme ilustrado na figura abaixo:



Podemos escrever as componentes de  $\vec{w}$  (spin) relativamente ao referencial fixo de acordo com as equações geométricas de Euler, onde  $\tilde{I}$ ,  $\tilde{\Omega}$  e  $\chi$  são os ângulos de Euler. Sejam elas:

$$p = \sin \tilde{I} \sin \chi \dot{\tilde{\Omega}} + \cos \chi \dot{\tilde{I}}$$

$$q = \sin \tilde{I} \cos \chi \dot{\tilde{\Omega}} - \sin \chi \dot{\tilde{I}}$$

$$r = \cos \tilde{I} \dot{\tilde{\Omega}} + \dot{\chi} \approx \dot{\chi}$$

Calculando as derivadas em relação ao tempo de  $p$ ,  $q$  e  $r$  e considerando que  $\ddot{\tilde{\Omega}}$ ,  $\dot{\tilde{\Omega}}$ ,  $\dot{\tilde{I}}$  e  $\ddot{\tilde{I}}$  são desprezíveis se comparadas com  $\dot{\chi}$  (pois o plano do equador do planeta gira muito mais rapidamente do que  $\dot{\tilde{\Omega}}$ ,  $\dot{\tilde{I}}$ , etc...) temos:

$$\dot{p} = qr$$

$$\dot{q} = -pr$$

Substituindo essas equações nas equações dinâmicas de Euler chegamos em:

$$\begin{aligned}
Cr(\sin \tilde{I} \cos \chi \dot{\tilde{\Omega}} - \sin \chi \dot{\tilde{I}}) &= L \\
-Cr(\sin \tilde{I} \sin \chi \dot{\tilde{\Omega}} + \cos \chi \dot{\tilde{I}}) &= M \quad (\star\star)
\end{aligned}$$

O próximo passo é obter as expressões para  $L$  e  $M$ .

Escrevendo  $W_i = \frac{W_0}{r_i^3} \left( \frac{3Z_i^2}{r_i^2} - 1 \right)$  apenas para um perturbador com  $W_0 = \frac{-Gm_i M J_2 R_p^2}{2}$  e resolvendo as equações de  $L$  e  $M$  acima apresentadas temos:

$$\begin{aligned}
L &= \left( -\frac{\partial W_i}{\partial Z_i} \right)_{exp} Y_i \\
M &= \left( -\frac{\partial W_i}{\partial Z_i} \right)_{exp} X_i
\end{aligned}$$

onde

$$\left( -\frac{\partial W_i}{\partial Z_i} \right)_{exp} = -\frac{3Gm_i M J_2 R_p^2}{r_i^5} Z_i = W_Z$$

Assim,

$$\begin{aligned}
L &= -W_Z Y_i \\
M &= W_Z X_i
\end{aligned}$$

Obs: A notação  $\left( -\frac{\partial W_i}{\partial Z_i} \right)_{exp}$  significa a derivada explícita de  $W_i$  em relação a variável  $Z_i$ .

Substituindo  $L$  e  $M$  recém obtidos em  $(\star\star)$  e resolvendo o sistema encontrado, chegamos em:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\Omega}} \sin \tilde{I} &= -\frac{W_Z}{Cr} [Y_i \cos \chi + X_i \sin \chi] \\
\dot{\tilde{I}} &= \frac{W_Z}{Cr} [-X_i \cos \chi + Y_i \sin \chi]
\end{aligned}$$

Façamos a seguinte análise: As coordenadas do perturbador  $(X_i, Y_i, Z_i)$  estão referidas ao sistema móvel fixo no equador do planeta. Então se girarmos o sistema inercial dos ângulos  $\tilde{\Omega}$ ,  $\tilde{I}$  e  $\chi$  o sistema inercial coincidirá com o móvel, ou seja, os eixos  $(x', y', z')$  coincidirão com  $(x, y, z)$ . Isto significa matematicamente que:

$$(X_i, Y_i, Z_i) = Rot(\tilde{\Omega}, \tilde{I}, \chi)(x_i, y_i, z_i)$$

Mas sabemos escrever  $(x_i, y_i, z_i)$  explicitamente em termos dos elementos orbitais do corpo perturbador, referido ao sistema inercial fixo:

$$\begin{aligned} x_i &= r_i \cos(f_i + \omega_i) \cos(\Omega_i) - r_i \sin(f_i + \omega_i) \sin(\Omega_i) \cos(I_i) \\ y_i &= r_i \cos(f_i + \omega_i) \sin(\Omega_i) + r_i \sin(f_i + \omega_i) \cos(\Omega_i) \cos(I_i) \\ z_i &= r_i \sin(f_i + \omega_i) \sin(I_i) \end{aligned}$$

Diante destes fatos, temos que:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\Omega}} &= \frac{3Gm_i M R_p^2 J_2}{Cr} \frac{1}{4} \left\{ \cos(\tilde{I})(1 - 3 \cos^2 I_i) + \sin^2 I_i \cos \tilde{I} \cos(2\tilde{\Omega} - 2\Omega_i) + \right. \\ &\quad \left. \frac{2 \sin I_i \cos I_i \cos(2\tilde{I}) \cos(\tilde{\Omega} - \Omega_i)}{\sin \tilde{I}} \right\} \frac{1}{a_i^3 (1 - e_i^2)^{3/2}} \\ \dot{\tilde{I}} &= -\frac{3Gm_i M R_p^2 J_2}{Cr} \frac{1}{4} \left\{ -\sin \tilde{I} \sin^2 I_i \sin(2\tilde{\Omega} - 2\Omega_i) - \right. \\ &\quad \left. \cos \tilde{I} \sin(2I_i) \sin(\tilde{\Omega} - \Omega_i) \right\} \frac{1}{a_i^3 (1 - e_i^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Obs:  $r$  é a componente da velocidade angular. Não confundir com  $\vec{r}_i$ .

## 6. Apêndice B

Nesta seção faremos a demonstração de alguns resultados importantes presentes em Goldreich (1965). São eles:

- Se o movimento do nodo ascendente do satélite  $\Omega_s$  no plano do equador tem curto período (ou seja,  $\Omega$  varia rapidamente) quando comparado com a precessão do planeta então a órbita do satélite manterá a inclinação constante no plano do equador.
- Mudanças na obliquidade do planeta, as quais são lentas quando comparadas com o período do nodo do satélite também não afetarão a inclinação do planeta em relação ao equador.

Na ausência de satélites, um planeta achatado precessionará com período dado por:

$$T = \frac{2(P')^2 C \sec(\phi)}{3D(C - A)} \quad (20)$$

onde:

- $D$ : período de rotação do planeta.
- $P'$ : período de revolução ao redor do Sol.
- $C, A$ : momentos de inércia do planeta em relação aos eixos perpendiculares residentes no plano equatorial.
- $\phi$ : ângulo entre a órbita do planeta e o plano do equador (obliquidade).

Para mostrarmos a equação (21) utilizaremos a equação de  $\dot{\tilde{\Omega}}$  no caso em que  $e_\odot \approx 0$  e  $I_\odot \approx 0^0$ . Sendo assim, temos que:

$$\dot{\tilde{\Omega}} = \frac{3GM_\odot M_M R_M^2 J_2}{4C r a_\odot^3} 2 \cos \phi$$

Como

$$J_2 = \frac{C-A}{M_M R_M^2}, \quad T = \frac{2\pi}{\tilde{\Omega}}, \quad r = \frac{2\pi}{D} \quad \text{e} \quad P' = \frac{2\pi}{n_\odot}$$

Logo:

$$T = \frac{4C \frac{2\pi}{D} a_\odot^3 2\pi}{3n_\odot^2 a_\odot^3 M_M R_M^2 \left(\frac{C-A}{M_M R_M^2}\right) 2 \cos \phi} \implies T = \frac{2C(P')^2 \sec \phi}{3D(C - A)}$$

A inclinação, relativa ao equador, da órbita do satélite, a qual está fixada no espaço, variará com a precessão do planeta.

Seja  $\delta$  o ângulo entre o satélite e o plano orbital do planeta. Então a inclinação varia de  $2\phi$  quando  $\delta \geq \phi$  e de  $2\delta$  para  $\delta \leq \phi$ .

A seguir, definiremos as notações que serão utilizadas nesta seção.

- $\Omega$ : longitude do nodo ascendente do satélite no plano do equador.
- $i$ : inclinação orbital relativa ao plano do equador do planeta.
- $\omega$ : longitude do pericentro medido a partir do nodo ascendente.
- $e$ : excentricidade.
- $a$ : semi eixo maior.
- $f$ : anomalia verdadeira.
- $n$ : movimento médio do satélite sobre o planeta.
- $P$ : período de revolução do satélite,  $P = \frac{2\pi}{n}$ .
- $n'$ : movimento médio do planeta sobre o Sol.
- $P'$ : período de revolução do planeta sobre o Sol,  $P' = \frac{2\pi}{n'}$ .
- $D$ : período de rotação do planeta.
- $R$ : raio médio do planeta.
- $M$ : massa do planeta.
- $C, A$ : momentos de inércia do planeta em relação aos eixos perpendiculares residentes no plano equatorial.
- $\phi$ : ângulo entre a órbita do planeta e o plano do equador (obliquidade).
- $(X, Y, Z)$ : sistema de coordenadas inercial.
- $(x, y, z)$ : sistema rotacional.
- $\vec{\mu}$ : vetor velocidade angular dos eixos  $(x, y, z)$  em relação aos eixos  $(X, Y, Z)$ .
- $J = \frac{3}{2} \frac{C-A}{MR^2}$ .

No caso especial em que a precessão é uniforme, temos que

$$\vec{\mu} = \|\vec{\mu}\| \widehat{K} = \|\vec{\mu}\| (\sin(\phi) \widehat{j} + \cos(\phi) \widehat{k})$$

Seja  $\vec{r}$  o vetor posição do satélite partindo da origem  $O$ . Definamos  $r = \|\vec{r}\|$  e  $\widehat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$

$\widehat{v}$ : vetor unitário no plano orbital o qual é ortogonal a  $\widehat{r}$ . Temos que o vetor  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$  é tangente a trajetória e que,  $\vec{w} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$

Agora, precisamos da matriz que relaciona  $\widehat{r}, \widehat{v}$  e  $\widehat{w}$  com  $\widehat{i}, \widehat{j}$  e  $\widehat{k}$ . Esta é justamente a matriz de Euler e pode ser escrita como:

$$\begin{pmatrix} \widehat{r} \\ \widehat{v} \\ \widehat{w} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \widehat{i} \\ \widehat{j} \\ \widehat{k} \end{pmatrix}$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i & \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i & \sin u \sin i \\ -\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i & -\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i & \cos u \sin i \\ \sin i \sin \Omega & -\sin i \cos \Omega & \cos i \end{pmatrix}$$

onde  $u = \omega + f$

As equações para  $\frac{di}{dt}$  e  $\frac{d\Omega}{dt}$  (Brouwer and Clemence 1961) são :

$$\frac{di}{dt} = \frac{-\tan(\frac{i}{2})}{na^2(1-e^2)^{1/2}} \left( \frac{\partial R}{\partial \epsilon} + \frac{\partial R}{\partial \varpi} \right) - \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \quad (21)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \quad (22)$$

A função perturbadora  $R$  é tomada como sendo função das variáveis  $a, e, i, \epsilon, \varpi$  e  $\Omega$ .

As derivadas no tempo nas equações acima são consideradas com relação ao sistema de coordenadas não -inercial  $(x, y, z)$ .

A função perturbadora é composta de duas partes. A primeira, a qual denotaremos por  $R_0$  é produzida pelo achatamento do planeta. A segunda, denotada por  $R_I$  surge devido ao fato de estarmos trabalhando em um sistema de coordenadas não -inercial. Esta parte da função perturbadora é causada pelas forças de Corolis e centrípeta.

A perturbação  $R_0$  pode ser escrita como:

$$R_0 = \frac{GMJ}{3a} \left( \frac{a}{r} \right)^3 [1 - 3 \sin^2 i \sin^2(\omega + f)] \quad (23)$$

(Kozai 1959)

E a perturbação  $R_I$  será dada por:

$$R_I = [GMa(1-e^2)]^{1/2} \hat{w} \cdot \vec{\mu} \quad (24)$$

onde  $\vec{\mu}$  é o vetor velocidade angular do sistema não -inercial  $(x, y, z)$  relacionado ao sistema inercial  $(X, Y, Z)$ . Nota-se que  $R_I$  contém apenas termos seculares.

Considerando-se apenas a parte secular de  $R_0$  (Kozai 1959):

$$R_{0secular} = \frac{n^2 a^2 J (3 \cos^2 i - 1)}{6(1-e^2)^{3/2}} \quad (25)$$

Nosso objetivo agora será deduzir a função perturbadora  $R_I$ . Para isto, consideremos o Lagrangeano,

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}) - \dot{\vec{r}} \cdot A(\vec{r}) + \frac{1}{2} A^2(\vec{r}) \quad (26)$$

As equações do movimento devido ao Lagrangeano são :

$$\ddot{\vec{r}} = -\nabla V(\vec{r}) + [\dot{A}(\vec{r})] - \nabla[\dot{\vec{r}} \cdot A(\vec{r})] + \frac{1}{2} \nabla[A^2(\vec{r})] \quad (27)$$



Agora, demonstraremos a equação (28).

Sabemos que:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Utilizando-se da equação (27), podemos escrever:

$$\begin{aligned} L((x, y, z), (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})) &= \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z) - \\ &- (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \cdot (A_x, A_y, A_z) + \frac{1}{2}(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2) \end{aligned}$$

onde  $A(\vec{r}) = (A_x, A_y, A_z)$

Calculamos agora as derivadas que serão utilizadas nas equações de Euler-Lagrange. Faremos somente em relação a primeira variável,  $x$ , pois as outras são análogas. Temos que:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - A_x$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= -\frac{\partial V}{\partial x} - \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} - \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} - \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial x} + \\ &+ A_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + A_z \frac{\partial A_z}{\partial x} \end{aligned}$$

Substituindo estas derivadas parciais na equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

temos

$$\ddot{x} - \dot{A}_x + \frac{\partial V}{\partial x} + \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial x} - A_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - A_y \frac{\partial A_y}{\partial x} - A_z \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0$$

Assim,

$$\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} + \dot{A}_x - \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} - \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} - \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial x} + A_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + A_z \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

Analogamente,

$$\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} + \dot{A}_y - \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial y} - \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial y} - \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial y} + A_x \frac{\partial A_x}{\partial y} + A_y \frac{\partial A_y}{\partial y} + A_z \frac{\partial A_z}{\partial y}$$

$$\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z} + \dot{A}_z - \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial z} - \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial z} - \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial z} + A_x\frac{\partial A_x}{\partial z} + A_y\frac{\partial A_y}{\partial z} + A_z\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Sendo assim, finalmente obtemos a equação (28).

Agora, se tomarmos  $A(\vec{r}) = (\vec{r} \times \vec{\mu})$ , onde  $\vec{\mu}$  independe de  $\vec{r}$ , entao a equação (28) torna-se:

$$\ddot{\vec{r}} = -\nabla V(\vec{r}) - 2(\vec{\mu} \times \dot{\vec{r}}) - \vec{\mu} \times (\vec{\mu} \times \vec{r}) - (\dot{\vec{\mu}} \times \vec{r}) \quad (28)$$

Vamos agora demonstrar a equação (29).

Como

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{\mu} = \mu_y\hat{j} + \mu_z\hat{k}$$

Logo,

$$A(\vec{r}) = \vec{r} \times \vec{\mu} = (y\mu_z - z\mu_y)\hat{i} + (-x\mu_z)\hat{j} + (x\mu_y)\hat{k}$$

e

$$\dot{A}(\vec{r}) = \dot{\vec{r}} \times \vec{\mu} + \vec{r} \times \dot{\vec{\mu}}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

Assim,

$$A(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} = (\dot{x}y\mu_z - \dot{x}z\mu_y) + (-\dot{y}x\mu_z) + (\dot{z}x\mu_y)$$

Logo,

$$-\nabla[A(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}}] = (\dot{y}\mu_z - \dot{z}\mu_y)\hat{i} + (-\dot{x}\mu_z)\hat{j} + (\dot{x}\mu_y)\hat{k}$$

Temos também que:

$$A^2(\vec{r}) = A(\vec{r}) \cdot A(\vec{r}) = y^2\mu_z^2 + z^2\mu_y^2 - 2yz\mu_z\mu_y + x^2\mu_z^2 + x^2\mu_y^2$$

$$\frac{1}{2}\nabla[A^2(\vec{r})] = (x\mu_z^2 + x\mu_y^2)\hat{i} + (y\mu_z^2 - z\mu_z\mu_y)\hat{j} + (z\mu_y^2 - y\mu_z\mu_y)\hat{k}$$

Com isso, concluímos que:

$$\begin{aligned}
-\nabla[A(\vec{r}) \cdot \vec{r}] + \frac{1}{2}\nabla[A^2(\vec{r})] &= (\dot{y}\mu_z - \dot{z}\mu_y + x\mu_z^2 + x\mu_y^2)\hat{i} + (-\dot{x}\mu_z + y\mu_z^2 - z\mu_z\mu_y)\hat{j} + \\
&+ (\dot{x}\mu_y + z\mu_y^2 - y\mu_z\mu_y)\hat{k}
\end{aligned} \tag{29}$$

Logo, para mostrarmos a equação (29), basta mostrarmos que:

$$-\nabla[A(\vec{r}) \cdot \vec{r}] + \frac{1}{2}[A^2(\vec{r})] = -(\vec{\mu} \times \dot{\vec{r}}) - \vec{\mu} \times (\vec{\mu} \times \vec{r}) \tag{30}$$

Como

$$\vec{\mu} \times \dot{\vec{r}} = (\dot{z}\mu_y - \dot{y}\mu_z)\hat{i} + (\dot{x}\mu_z)\hat{j} + (-\dot{x}\mu_y)\hat{k}$$

Então

$$-(\vec{\mu} \times \dot{\vec{r}}) = (\dot{y}\mu_z - \dot{z}\mu_y)\hat{i} + (-\dot{x}\mu_z)\hat{j} + (\dot{x}\mu_y)\hat{k}$$

Temos também que

$$\vec{\mu} \times \vec{r} = (z\mu_y - y\mu_z)\hat{i} + (x\mu_z)\hat{j} + (-x\mu_y)\hat{k}$$

Com isso, temos que

$$-\vec{\mu} \times (\vec{\mu} \times \vec{r}) = (x\mu_y^2 + x\mu_z^2)\hat{i} + (y\mu_z^2 - z\mu_y\mu_z)\hat{j} + (z\mu_y^2 - y\mu_y\mu_z)\hat{k}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
-(\vec{\mu} \times \dot{\vec{r}}) - \vec{\mu} \times (\vec{\mu} \times \vec{r}) &= (\dot{y}\mu_z - \dot{z}\mu_y + x\mu_y^2 + x\mu_z^2)\hat{i} + (-\dot{x}\mu_z + y\mu_z^2 - z\mu_y\mu_z)\hat{j} + \\
&+ (\dot{x}\mu_y + z\mu_y^2 - y\mu_y\mu_z)\hat{k}
\end{aligned}$$

Assim, chegamos em (29).

Da Lagrangiana dada pela equação (27) podemos obter a Hamiltoniana  $H(\vec{r}, \vec{p})$  correspondente

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{2}\vec{p}^2 + V(\vec{r}) - \vec{p} \cdot (\vec{\mu} \times \vec{r}) \tag{31}$$

onde

$$\vec{p} = \dot{\vec{r}} + \vec{\mu} \times \vec{r}$$

A obtenção da equação (32) pode ser feita da seguinte forma:

$$H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L$$

$$H = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - L$$

onde,

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - A_x$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} - A_y$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \dot{z} - A_z$$

Desta maneira, temos:

$$\begin{aligned} H &= (\dot{x} - A_x)\dot{x} + (\dot{y} - A_y)\dot{y} + (\dot{z} - A_z)\dot{z} - \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \\ &+ V(\vec{r}) + (\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z) - \frac{1}{2}(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2) \end{aligned}$$

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(\vec{r}) - \frac{1}{2}(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)$$

Como,  $A(\vec{r}) = \vec{r} \times \vec{\mu} = (y\mu_z - z\mu_y)\hat{i} + (-x\mu_z)\hat{j} + (x\mu_y)\hat{k}$

Na notação que está sendo usada:  $A_x = y\mu_z - z\mu_y, A_y = -x\mu_z, A_z = x\mu_y$

Assim,

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(\vec{r}) - \frac{1}{2}(y^2\mu_z^2 + z^2\mu_y^2 - 2yz\mu_y\mu_z + x^2\mu_z^2 + x^2\mu_y^2)$$

Como  $\vec{p} = \dot{\vec{r}} + \vec{\mu} \times \vec{r}$ , segue:

$$\vec{p} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) + (z\mu_y - y\mu_z, x\mu_z, -x\mu_y)$$

$$\begin{aligned} \vec{p}^2 &= \dot{x}^2 + z^2\mu_y^2 + 2\dot{x}z\mu_y + y^2\mu_z^2 - 2\dot{x}y\mu_z - 2zy\mu_y\mu_z + \\ &+ \dot{y}^2 + x^2\mu_z^2 + 2\dot{y}x\mu_z + \dot{z}^2 + x^2\mu_y^2 - 2\dot{z}x\mu_y \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} -\vec{p} \cdot (\vec{\mu} \times \vec{r}) &= \vec{p} \cdot (\vec{r} \times \vec{\mu}) = (\dot{x} + z\mu_y - y\mu_z) \cdot (y\mu_z - z\mu_y) + (\dot{y} + x\mu_z) \cdot (-x\mu_z) + \\ &+ (\dot{z} - x\mu_y) \cdot (x\mu_y) = \dot{x}y\mu_z - \dot{x}z\mu_y + zy\mu_y\mu_z - z^2\mu_y^2 - y^2\mu_z^2 + yz\mu_y\mu_z - \\ &- x\dot{y}\mu_z - x^2\mu_z^2 + \dot{z}x\mu_y - x^2\mu_y^2 \end{aligned}$$

e portanto, segue-se a equação (32).

Pela equação (24) vemos que  $V(\vec{r})$  pode ser escrito como  $-\frac{GM}{r} - R_0$ , onde  $R_0$  e sua parte secular são dados pelas equações (24) e (26), respectivamente. Trata-se de um problema trivial expressar a parte restante da função perturbadora  $R_I = \vec{p} \cdot (\vec{\mu} \times \vec{r})$  em termos dos elementos orbitais. Para isto, lembremos que:

$\vec{p} \cdot (\vec{\mu} \times \vec{r}) = (\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{\mu}$ . Mas  $\vec{r} \times \vec{p}$  é justamente o vetor momento angular (por unidade de massa) da órbita do satélite.

Assim, finalmente chegamos em

$$R_I = \vec{p} \cdot (\vec{\mu} \times \vec{r}) = (\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{\mu} = [GMa(1 - e^2)]^{1/2} \vec{\mu} \cdot \hat{w} \quad (32)$$

Agora, podemos aplicar as equações de variação das constantes, dadas pelas equações (22) e (23), juntamente com a parte secular de  $R$ , dadas por (26) e (33), para obtermos as equações da parte secular de  $\frac{di}{dt}$  e  $\frac{d\Omega}{dt}$ .

Estas são as equações estão escritas abaixo:

$$\frac{di}{dt} = -\mu_x \cos \Omega - \mu_y \sin \Omega \quad (33)$$

e

$$\frac{d\Omega}{dt} = \mu_x \cot i \sin \Omega - \mu_y \cot i \cos \Omega - \mu_z - \frac{Jn \cos i}{(1 - e^2)^2} \quad (34)$$

Com efeito, temos que:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{na^2(1 - e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \quad (35)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2(1 - e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \quad (36)$$

e

$$\vec{\mu} = \mu_x \hat{i} + \mu_y \hat{j} + \mu_z \hat{k}$$

$$\hat{w} = (\sin i \sin \Omega) \hat{i} + (-\sin i \cos \Omega) \hat{j} + (\cos i) \hat{k}$$

$$\vec{\mu} \cdot \hat{w} = \mu_x \sin i \sin \Omega - \mu_y \sin i \cos \Omega + \mu_z \cos i$$

Como  $R = R_0 + R_I$ , temos:

$$R = \frac{n^2 a^2 J (3 \cos^2 i - 1)}{6(1 - e^2)^{3/2}} + [GMa(1 - e^2)]^{1/2} \vec{\mu} \cdot \hat{w}$$

E portanto, temos:

$$R = \frac{n^2 a^2 J (3 \cos^2 i - 1)}{6(1 - e^2)^{3/2}} + [GMa(1 - e^2)]^{1/2} (\mu_x \sin i \sin \Omega - \mu_y \sin i \cos \Omega + \mu_z \cos i)$$

Agora, calculando-se  $\frac{\partial R}{\partial \Omega}$  e  $\frac{\partial R}{\partial i}$  e substituindo nas equações (36) e (37), obtemos:

$$\frac{di}{dt} = -\mu_x \cos \Omega - \mu_y \sin \Omega \quad (37)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{Jn \cos i}{(1 - e^2)^2} + \mu_x \cot i \sin \Omega - \mu_y \cot i \cos \Omega - \mu_z \quad (38)$$

Agora, suponhamos que  $Jn \gg \|\vec{\mu}\|$ . Então, desprezando os termos  $\frac{\vec{\mu}}{Jn}$ , resolvemos a equação (39) para obtermos:

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{Jn \cos i t}{(1 - e^2)^2} \quad (39)$$

onde  $\Omega_0$  é constante.

Substituindo (40) em (34), temos:

$$\frac{di}{dt} = -\mu_x \cos \left( \Omega_0 - \frac{Jn \cos i}{(1 - e^2)^2} t \right) - \mu_y \sin \left( \Omega_0 - \frac{Jn \cos i}{(1 - e^2)^2} t \right) \quad (40)$$

e portanto

$$i(t) = \frac{\mu_x}{\nu} \sin(\Omega_0 - \nu t) - \frac{\mu_y}{\nu} \cos(\Omega_0 - \nu t) + i_0 \quad (41)$$

onde  $\nu = \frac{Jn \cos i}{(1 - e^2)^2}$ ,  $i_0$  constante.

Agora, consideraremos a variação das inclinações de Phobos e Deimos, os dois satélites de Marte. Usando as equações (21) e (42), juntamente com a definição de  $J$ , temos que:

$$i(t) = -\frac{5(1 - e^2)^2 \sin \phi}{2 \cos i \sec \phi} \left( \frac{DP}{P'^2} \right) \cos(\Omega_0 - \nu t) + i_0 \quad (42)$$

onde  $\vec{\nu}$  é considerado de modo que a precessão seja uniforme.

A seguir, demonstraremos a equação (39).

Para essa demonstração utilizaremos os seguintes fatos:

- $J = \frac{3C - A}{2MR^2}$
- $\frac{MR^2}{C} = \frac{5}{2}$

- $n = \frac{2\pi}{P}$
- Pela equação (17), temos:  $C - A = \frac{2(P')^2 C \sec \phi}{3DT}$
- $\mu$ : velocidade angular  $\Rightarrow \mu = \frac{2\pi}{T}$

Sendo assim, podemos escrever  $J$  como:

$$J = \frac{(P')^2 C \sec \phi}{DTMR^2}$$

Portanto, usando a equação (38) juntamente com essas considerações, temos:

$$i(t) = -\frac{\mu \sin \phi \cos(\Omega_0 - \nu t)(1 - e^2)^2}{Jn \cos i} + i_0$$

$$i(t) = \frac{-\frac{2\pi}{T} \sin \phi \cos(\Omega_0 - \nu t)(1 - e^2)^2}{\frac{(P')^2 C \sec \phi}{DTMR^2} \frac{2\pi}{P} \cos i} + i_0$$

Finalmente,

$$i(t) = -\frac{5}{2} \frac{(1 - e^2)^2 \sin \phi}{\cos i \sec \phi} \left( \frac{DP}{(P')^2} \right) \cos(\Omega_0 - \nu t) + i_0 \quad (43)$$

Assim, através da equação (44) verificamos que a inclinação em relação ao equador varia muito pouco.

# 7. Bibliografia

- Banfield, D., Murray, N., 1992, *Icarus* **99**, 390-401.
- Beaugé C. and Ferraz-Mello 1993, *Icarus* **103**, 301-318.
- Bretagnon, P. 1974, *Astron. Astrophys.*, **30**, 141-154.
- Brouwer and Clemence, 1961, *Methods of Celestial Mechanics*, *Academic Press, New York*.
- Burns, J. A., 1972, *Rev. Geophys.*, **10**, 463-483.
- Burns, J. A., 1986. In: Burns, J. A., Matthews, M. S. (Eds.), *Satellites*. U. Arizona, Tucson.
- Callegari, N. J., Yokoyama, T., 2001, *Planet Space Sci.* **49**, 35-46.
- Chyba, C. F., Jankowski, D. G., Nicholson, P. D., 1989, , *Astron. Astrophys.* **219**, L23-L26.
- Davies M. E., 1986, *Celestial Mechanics*, **39**, 103-113.
- Everhart, E., 1985, *IAU Colloquium* **83**, 185-202.
- Goldreich P. 1965, *Astronomical Journal*, **70**, 5-9.
- Goldreich P. 1966, *Rev. of Geophys.* **4**, 411-434.
- Goldreich P., et all 1989, *Science* **245**, 500-504.
- Gomes R. S. 1995, *Celes. Mech. and Dynam. Astron.* **61**, 97-113.
- Gomes R. S. 1997, *Astron. J.* **114**, 2166-2180.
- Henrard J. 1982, *V. Szebehely (ed.)*, 153-171, Reidel Dordrecht.
- Henrard J. and Lemaître A. 1983, *Celes. Mech.* **30**, 197-218.
- Jacobson, R.A., et. al., 1991 *Astron. Astrophys* **247**, 565-575.
- Kaula, W.M., 1964, *Rev. Geophys.* **2**, 661-685.
- Kozai, Y., 1959, *Astron. J.* **64**, 367-377.
- Laskar J. 1988, *Astron. Astrophys.* **198**, 341-362.
- Nascimento, C. 2003, dissertação de mestrado (em preparação).
- Peale, S. J., 1999, *Rev. Astrophys.* **37**, 533-602.
- Szeto, A., 1983, *Icarus* **55**, 133-168.
- Ward W. R. 1979, *Journal of Geophys. Research* **84**, 237-241.
- Yoder, C., 1982, *Icarus*, **49**, 327-346.
- Yokoyama T. 1999, *Planet. Space Sciences* **47**, 619-627.
- Yokoyama T. 2002, *Planet. Space Sciences* **50**, 63-77.