

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”**  
**INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS**  
**DEPARTAMENTO DE FÍSICA**  
**CAMPUS DE RIO CLARO**

**ESTUDO DE LEI DE POTÊNCIA EM**  
**DISTRIBUIÇÕES ESTATÍSTICAS DE CONSUMO DE**  
**ÁGUA**

Autor: *Luiz Cressoni Filho*

Orientador: *Prof. Dr. José Roberto Campanha*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física como requisito para a obtenção do título de Mestre na área de concentração em Física Aplicada.

Rio Claro  
S.P. – Brasil  
2002

*“A mais bela e profunda experiência do  
Homem é o sentido do mistério.  
Ele é o princípio básico da Religião, assim  
como de todos os esforços da Arte e da Ciência.  
Quem nunca o experimentou parece-me,  
senão morto, pelo menos cego.  
Para mim, é suficiente pensar sobre esses  
segredos e humildemente tentar alcançar, com minha  
mente, uma simples imagem da sublime estrutura de tudo  
o que existe.”  
Albert Einstein*

## AGRADECIMENTOS

*Ao Gilson Bressan e Edinho, da ALTEC em Araras, ao Eng. Sérgio Roberto Croffi, superintendente do DAE de Rio Claro, ao Sr. João Domingos Rubio, da SANASA em Campinas e todos os demais funcionários das referidas empresas pela gentileza de fornecer os dados das cidades de Cordeirópolis, Araras, Rio Claro e Campinas utilizados neste estudo.*

*Ao Prof. Dr. José Roberto Campanha pela orientação, apoio e paciência a mim dispensados.*

*A Deus, por ter-nos dado um Universo tão interessante para viver e estudar.*

## DEDICATÓRIA

*À minha esposa Érica, pelo apoio e paciência (quase) ilimitados e por ter “segurado as pontas” durante o tempo em que me dediquei a este trabalho.*

*Às minhas filhas Beatriz e Laura, pelos sorrisos e abraços carinhosos nos momentos em que eu mais precisava e por terem dado um novo sentido à minha vida.*

*Aos meus pais, amigos e todos aqueles que, direta ou indiretamente facilitaram e tornaram possível a realização desta dissertação.*

*A todos, meu sincero muito obrigado!*

## SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 .....	1
Introdução .....	1
CAPÍTULO 2 .....	3
Revisão da Literatura .....	3
2.1- Complexidade e Criticalidade .....	3
2.1.1 – Leis da Física versus Complexidade .....	4
2.1.2 – O que pode explicar uma teoria da Complexidade .....	7
2.1.3 – Catástrofes .....	7
2.1.4 – Geometria Fractal .....	8
2.1.5 – Ruído “1/f” .....	8
2.1.6 – Lei de Zipf .....	9
2.1.7 – Leis de potência e criticalidade .....	9
2.1.8 – Sistemas em equilíbrio .....	10
2.1.9 – Caos e complexidade .....	11
2.2 – Distribuições Estatísticas .....	12
2.2.1 – Processos Gaussianos .....	13
2.2.2 – Estabilidade de Distribuições Estatísticas .....	18
2.2.2.2 – Teorema do limite central .....	21
2.2.3 – Bacias de atração .....	29

CAPÍTULO 3 .....	31
Materiais e métodos .....	31
3.1 – Redes de Distribuição de água .....	31
3.2 – Metodologia.....	34
CAPÍTULO 4 .....	51
Conclusão e trabalhos futuros.....	51
4.1 - Conclusão .....	51
4.2 – Trabalhos futuros .....	53
Referências Bibliográficas .....	54
Anexo .....	58

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: seqüência de imagens ilustrando a convolução de duas funções.....	19
Figura 2.2: Exemplos de diferentes <i>pdfs</i> :.....	20
Figura 2.3: Comportamento de $P(S_n)$ .....	20
Figura 2.4: Simulação de $P(S_n)$ .....	22
Figura 2.5: mesmas distribuições de 1.3, .....	23
Figura 2.6: Representação do conjunto de distribuições estáveis e bacias de atração .....	30
Figura 3.1-a: Densidade de freqüência do consumo de água em Codeirópolis (até $100\text{m}^3$ ) .....	36
Figura 3.1-b: Densidade de freqüência do consumo de água em Codeirópolis (todos – escala Log).....	37
Figura 3.2-a: Densidade de freqüência do consumo de água em Araras (até $100\text{m}^3$ ) .....	38
Figura 3.2-b: Densidade de freqüência do consumo de água em Araras (todos – escala Log).....	39
Figura 3.3-a: Densidade de freqüência do consumo de água em Rio Claro (até $100\text{m}^3$ ) .....	40
Figura 3.3-b: Densidade de freqüência do consumo de água em Rio Claro (todos – escala Log).....	41
Figura 3.4-a: Densidade de freqüência do consumo de água em Campinas (até $100\text{m}^3$ ) .....	42
Figura 3.4-b: Densidade de freqüência do consumo de água em Campinas (todos – escala Log).....	43
Figura 3.5: Ajuste teórico sobre a distribuição de densidades de freqüências de consumo de água em Cordeirópolis.....	45
Figura 3.6: Ajuste teórico sobre a distribuição de densidades de freqüências de consumo de água em Araras .....	46
Figura 3.7: Ajuste teórico sobre a distribuição de densidades de freqüências de consumo de água em Rio Claro .....	47
Figura 3.8: Ajuste teórico sobre a distribuição de densidades de freqüências de consumo de água em Campinas.....	48

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1: Empresas fornecedoras dos dados.....	35
Tabela 3.2: Resultados obtidos .....	49



## Resumo

CRESSONI, L. F., *Estudo de lei de potência em distribuições estatísticas de consumo de água*. 66p. Dissertação de Mestrado em Física Aplicada – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

A importância da água para os seres humanos é indiscutível. Com a organização da sociedade humana em grupos cada vez maiores, não só a água, mas todo o processo de captação, tratamento e distribuição dela, torna-se cada vez mais uma preocupação importante. Redes de distribuição de água são estruturas que aparentemente apresentam características fractais e o que este trabalho propôs foi a análise dessas em algumas cidades, observando-se os valores de consumo lidos nos hidrômetros, em busca de algumas características que possam indicar a existência de fractais que descrevem essas redes. Notou-se que as distribuições estatísticas dos consumos de água obedecem à distribuição gaussiana com máximo em torno de  $18 \text{ m}^3$  para pontos de baixo consumo (residências, por exemplo) e à lei de potência para pontos de consumo médio e elevado (residências de alto padrão, comércio e indústria). Observou-se que o expoente da lei de potência ( $\alpha$ ) varia com o número de habitantes, obedecendo a lei de escala. Foi proposto como uma possível explicação para estas características o mecanismo de realimentação positiva.

*Palavras chave:*

Lei de Potência. Redes de distribuição de água. Fractais.

## Abstract

CRESSONI, L. F., *Study of fractal processes in water distribution networks by power law analysis*. 66p. Dissertação de Mestrado em Física Aplicada – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

The importance of water to human beings is unquestionable. With human society forming ever larger groups, water, as well as the processes of capturing, treating and distributing water are increasingly important concerns. Water distribution networks are structures that apparently show fractal characteristics. This work is an analysis of water distribution networks in different cities. The analysis utilized water consumption readings from hydrometers to search for characteristics that describe the networks. This study determined that the statistical distribution of water consumption follows a Gaussian distribution for low values of consumption (residential users) and Power law for large values (high-level residences, commerce and industry). It also determined that the exponent ( $\alpha$ ) of the Power Law varies with the number of citizens, obeying to a scale law. The Positive Feedback Mechanism is proposed as a possible explanation for these characteristics.

*Key words:*

Power law. Water distribution Networks. Fractals.

# CAPÍTULO 1

## Introdução

Sistemas com grande número de interações (conhecidas ou não) possuem propriedades emergentes, ou seja, propriedades que não são conseqüências diretas das leis conhecidas, mas sim uma característica do sistema como um todo, o que gera *complexidade*. Essa variabilidade se apresenta em todas as escalas e emerge das simples e invariantes leis da Física, de modo que a maior parte dos sistemas que se observam no dia-a-dia parece distante dessas leis básicas. Entretanto, é impossível e inútil tentar explicar esses fenômenos naturais em detalhes, começando da Física de partículas e seguindo a trajetória de todas as partículas ao longo do tempo.

As teorias de sistemas complexos são de natureza estatística e, portanto, não predizem detalhes específicos.

Distribuições estatísticas são recursos matemáticos muito utilizados em Física e receberam grande destaque nas modernas áreas da Física Estatística e, mais notavelmente, na Mecânica Quântica. Os estudos de alguns sistemas complexos são realizados pela análise das distribuições estatísticas de dados sobre grandezas relevantes desses sistemas.

O que este trabalho propõe é a análise das distribuições estatísticas de consumo de água em cidades de diferentes tamanhos, estruturas econômicas e industriais, observando-se os valores de consumo lidos nos hidrômetros, em busca da lei de potência que descrevem essas redes.

Uma cidade possui consumidores de água de vários tipos, começando por consumidores residenciais, comerciais e industriais. Na parte residencial, o consumo depende basicamente da situação financeira e hábitos culturais da família, isto é, tamanho da casa, piscinas e etc. Já para indústrias, as necessidades de água são completamente diferentes e depende, basicamente, do ramo de atividade. Isto cria um sistema complexo.

Este estudo é importante do ponto de vista físico porque trata as redes de distribuição de água como um sistema complexo e do ponto de vista de planejamento urbano, por se tratar de uma atividade importante para a cidade.

## CAPÍTULO 2

### Revisão da Literatura

#### 2.1- Complexidade e Criticalidade

Uma das questões mais interessantes sobre o Universo é como ele evoluiu, a partir de poucos tipos básicos de partículas, até gerar vida, história, economia e literatura, por exemplo, ao invés de ter se tornado um simples gás de partículas ou se condensado em um grande cristal. Observam-se fenômenos complexos em todos os lados embora, até recentemente, pouco esforço tenha sido devotado para entender o porquê desta complexidade (BAK, 1997).

BAK (1997) argumenta que comportamentos complexos observados na natureza refletem a tendência de grandes sistemas com vários componentes a evoluírem num estado crítico, fora de equilíbrio, onde pequenas perturbações podem levar a eventos, denominados *avalanches*, de todos os tamanhos. A

maioria das mudanças acontece de maneira catastrófica ao invés de seguir caminhos graduais e suaves. A evolução para este delicado estado ocorre sem a interferência de nenhum agente externo e é estabilizado apenas pelas interações dinâmicas entre os elementos individuais do sistema, ou seja, o estado é *auto-organizado*.

### 2.1.1 – Leis da Física versus Complexidade

A começar pelo *Big Bang*, o universo supostamente evoluiu de acordo com algumas leis. Ao longo do tempo, com o trabalho dos cientistas, estas leis puderam ser conhecidas e todos os fenômenos na natureza, em qualquer escala, então, deveriam ser explicados por elas.

As leis da Física, de modo geral, são simples e expressas em equações matemáticas que podem ser escritas em poucas páginas. Entretanto, a matemática envolvida na solução destas equações – mesmo para situações simples – é extremamente complicada quando existem mais do que dois objetos a serem considerados. Os problemas se tornam insolúveis analiticamente e podem ser apenas aproximados com o auxílio de cálculos numéricos em computadores. Entretanto, são usualmente considerados problemas práticos ao invés de questões físicas fundamentais.

A filosofia da Física sempre foi reducionista, ou seja, ela parte do princípio de que o mundo pode ser entendido em termos das propriedades de pequenas partes fundamentais. Uma vez que se decompõe o mundo às mais simples leis e as partículas mais fundamentais tenham sido identificadas, o trabalho está completo.

Em alguns casos particulares, a Física explica com sucesso o comportamento de sistemas constituídos de várias partes (átomos, moléculas ou elétrons) como, por exemplo, cristais e gases.

Cristais são bem entendidos pelas leis da Física, pois os trilhões de átomos que os compõem estão distribuídos uniformemente em redes e formam um sistema ordenado, onde cada átomo possui sua posição bem definida. Cristais podem ser entendidos precisamente porque todos os seus pontos parecem iguais.

No outro extremo, gases podem ser entendidos pelas leis da Física, pois suas inúmeras partículas interagem pouco entre si. Ao contrário dos cristais, gases formam sistemas aleatórios, desordenados. Novamente, a tratabilidade do sistema surge de sua uniformidade. Um gás parece o mesmo em todos os pontos, embora, num determinado instante, os átomos individuais possuam posições e velocidades diferentes.

Entretanto, o mundo não é composto apenas de cristais e gases, e sim de sistemas muito mais complicados que se encontram entre os limites da ordem total dos cristais e da desordem total dos gases.

Sistemas com grande número de interações (conhecidas ou não) possuem propriedades emergentes, ou seja, propriedades que não são conseqüências diretas das leis conhecidas, mas sim uma característica do sistema como um todo, o que gera *complexidade* (BAK, 1997). Essa variabilidade se apresenta em todas as escalas e emerge das simples e invariantes leis da Física, de modo que a maior parte dos sistemas que se observam no dia-a-dia parece distante dessas leis básicas. Entretanto, é impossível e inútil tentar explicar esses fenômenos naturais em detalhes, começando da Física de partículas e seguindo a trajetória de todas as partículas ao longo do tempo.

No estudo de sistemas complexos, o fato das leis da Física serem determinísticas é quase irrelevante e, embora se acredite que todos sistemas complexos, inclusive os extremamente complexos sistemas biológicos, obedeçam a essas leis, é simplesmente impossível fazer a conexão entre a Física de partículas e, continuando a citar o exemplo biológico, a química responsável pela formação de moléculas; o agrupamento destas em células e ainda o arranjo de um conjunto de células em organismos vivos.

Uma teoria geral de sistemas complexos deve ser, necessariamente, abstrata (BAK, 1997). Ela deve ser de natureza estatística e, portanto, não pode prever detalhes específicos. A confrontação entre teoria e experimentos e observações, essencial em qualquer procedimento científico, faz-se então comparando as características estatísticas em padrões gerais.

Abstração e natureza probabilística de teorias deste tipo não são, entretanto, novidades em Física. A Mecânica Estatística, por exemplo, que trata de grandes sistemas em equilíbrio, não pode prever as posições e velocidades dos átomos ou moléculas individuais do sistema, mas apenas informações de grandezas médias, como temperatura e pressão. A Mecânica Quântica também não pode fornecer informações específicas sobre velocidade e posição de partículas como elétrons, mas apenas a probabilidade de um experimento encontrar a partícula em determinado estado. Novamente, o que pode interessar é alguma propriedade média do grupo de partículas, como (no caso de elétrons) a corrente elétrica num condutor.

A capacidade de prever é a principal diferença entre ciência e pseudociência; prever estatísticas sobre um fenômeno, ao invés de detalhes específicos, também é uma maneira perfeitamente legítima de confrontar teoria com observação.



Além disso, a complexidade resulta de eventos, em geral, imprevisíveis. Em alguns casos, pode ser usada para explicar o que aconteceu, mas não prever o que acontecerá no futuro.

### **2.1.2 – O que pode explicar uma teoria da Complexidade**

Como apresentado anteriormente, em sistemas complexos, a variabilidade praticamente exclui a possibilidade de observações detalhadas condensadas em um pequeno número de equações. No melhor dos casos, a teoria pode explicar porque há a variabilidade ou quais padrões podem emergir, mas não garantir um determinado valor em um sistema em particular.

Em sistemas complexos, o estado final do sistema é estabilizado pelas várias interações dinâmicas entre os elementos e, por isso, diz-se que o estado final é auto-organizado criticamente (BAK, 1987).

### **2.1.3 – Catástrofes**

Devido à sua natureza, sistemas complexos podem exibir comportamento catastrófico com partes do sistema afetando outras em efeitos dominó. Entretanto, cientistas observaram que mesmo eventos como catástrofes seguem padrões simples.

GUTTENBERG e RICHTER (1949) estudaram a distribuição de terremotos e observaram uma relação simples entre suas frequências de ocorrência e respectivas magnitudes. Um terremoto de determinada magnitude possui dez vezes mais chances de ocorrer do que um de magnitude um ponto acima, na escala desenvolvida por eles. Embora a teoria não possa determinar quando, onde e de

que magnitude ocorrerá um terremoto, ela pode dizer muito sobre a probabilidade da ocorrência de um terremoto de determinada magnitude.

O mesmo comportamento foi observado por MANDELBROT (1982) no estudo de variação de preços de ações de algodão (e outras *commodities*). Nesse estudo, observou que a distribuição da probabilidade de alteração no preço das ações segue uma linha reta num gráfico logaritmo, ou seja, obedece a uma lei de potência, que será discutida em 2.1.7.

#### **2.1.4 – Geometria Fractal**

Estruturas com detalhes em todas as escalas foram chamadas pela primeira vez de *fractais* por MANDELBROT (1997), num estudo sobre o comprimento da costa de Noruega. Nele, observou que a costa aparece como um conjunto hierárquico de fiordes, fiordes dentro de fiordes numa sucessão em todas as escalas. Assim, uma medida do comprimento dessa costa depende da escala usada para medi-la, ou seja, o comprimento depende da “régua” utilizada para efetuar a medição.

Muito trabalho foi feito na caracterização geométrica de fractais, mas o problema da dinâmica da origem de fractais ainda persiste.

#### **2.1.5 – Ruído “1/f”**

O fenômeno chamado ruído 1/f (um sobre f) foi observado em sistemas tão diversos quanto o nível do rio Nilo, a luz emitida por quasares e tráfego em rodovias (MANDELBROT, 1999). Nestes fenômenos, observam-se detalhes em todas as escalas de tempo. O sinal pode ser interpretado como sendo a superposição de sinais em todas as frequências, ou seja, de modo similar à costa

da Noruega que possui fiordes de todos os tamanhos, ruídos  $1/f$  possuem picos de todas as durações. São, portanto, como fractais no tempo. A distribuição de potência do sinal é inversamente proporcional à frequência e é, portanto, a origem do termo “ $1/f$ ”, embora erroneamente chamado de ruído ao invés de sinal.

Ruídos  $1/f$  são diferentes de ruídos brancos aleatórios, onde não existe correlação entre os valores que descrevem o sinal e, geralmente, incluem todas as frequências em iguais quantidades.

Em alguns casos, o espectro pode não ser distribuído como  $1/f$ , mas como  $1/f^\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq 2$  embora, mesmo assim, seja chamado simplesmente de “ $1/f$ ”.

### **2.1.6 – Lei de Zipf**

ZIPF (1949) realizou várias observações sobre regularidades em sistemas de origem humana, como tamanho de cidades e *ranking* do uso de palavras em um determinado texto e descobriu que, em ambos os casos, gráficos logarítmicos destes *rankings* versus o valor do *ranking* dá sempre uma linha reta, denotando uma lei de potência. Zipf tenta explicar esses fenômenos através de um princípio de mínimo esforço.

### **2.1.7 – Leis de potência e criticalidade**

O que é mais importante nos fenômenos estudados acima é que eles não são conseqüências óbvias das dinâmicas neles envolvidas e nota-se que todas as observações são de natureza estatística.

O fato de se mostrarem como linhas retas em gráficos logaritmos são o que se chama de *lei de potência*. Nelas, uma certa quantidade  $N$  pode ser expressa como proporcional a uma potência de uma quantidade  $s$ :

$$N(s) \propto s^{-\tau} \quad (2.1)$$

Tomando-se o logaritmo em ambos os lados, têm-se:

$$\log N(s) \propto -\tau \log(s) \quad (2.2)$$

Isso mostra que um gráfico de  $\log N(s)$  versus  $\log s$  é uma linha reta. O expoente  $\tau$  é a inclinação da reta.

Muitas leis que regem sistemas complexos se apresentam como lei de potência e, então, explicar as características estatísticas deles pode ser resumido matematicamente em se determinar sua lei de potência e, especificamente, o valor do expoente.

### 2.1.8 – Sistemas em equilíbrio

Sistemas em equilíbrio, por definição, não se alteram. Se forem perturbados ligeiramente, o estado de equilíbrio é ligeiramente alterado. A resposta do sistema é proporcional ao tamanho da perturbação e, assim, são chamados de sistemas *lineares*. Grandes flutuações no equilíbrio só podem ocorrer se vários eventos aleatórios atuarem ao mesmo tempo e na mesma direção, o que é extremamente raro. Em geral, sistemas em equilíbrio não exibem os comportamentos descritos anteriormente como catástrofes, ruído  $1/f$  ou fractais.

Sistemas em equilíbrio podem apresentar comportamento complexo apenas em algumas circunstâncias especiais, como em transições de fase, por exemplo. Exatamente no ponto crítico da separação entre as fases há um comportamento caracterizado por detalhes em todas as escalas.

### **2.1.9 – Caos e complexidade**

No estudo de sistemas dinâmicos, foi observado que mesmo sistemas com poucos graus de liberdade podem exibir comportamento caótico, onde pequenas alterações nos valores dos parâmetros das equações que definem o sistema podem levá-lo de um comportamento periódico, previsível, a um caótico, sendo que a transição se dá num ponto crítico.

Entretanto, precisamente no ponto crítico onde a transição para o caos ocorre, o sistema apresenta comportamento complexo. O estado complexo se situa, portanto, entre o comportamento periódico e o caos desses sistemas.

Além disso, sistemas caóticos não produzem estrutura fractal, embora fractais e caos apareçam quase sempre juntos. O que ocorre, na verdade, é que o movimento caótico pode ser descrito em termos de objetos matemáticos conhecidos como *atratores estranhos* em entidades abstratas chamadas “espaços de fase”. Estes atratores quase sempre possuem propriedades fractais, mas não representam fractais geométricos observados no mundo real.

Em resumo, a teoria de caos não pode explicar a complexidade.

## 2.2 – Distribuições Estatísticas

Distribuições estatísticas formam a base do estudo de sistemas compostos por um grande número de partículas e, portanto, são de grande interesse para a Física e outras disciplinas.

Os estudos iniciais de estatística em Física focavam distribuições com médias e variâncias bem definidas. O exemplo principal dessa é a Lei de Erros de Gauss, onde a média representa tradicionalmente o valor mais provável de uma série de medidas sequenciais de uma certa quantidade fixa e a variância era relacionada com a incerteza dessas medidas.

Com as distribuições de Maxwell-Boltzmann ou a de Planck, o enfoque passa para a distribuição, que passa a ter sentido físico. Estar fora da média não implica em erro e uma variância grande não indica uma medição imprecisa. A previsão passa a ser toda a distribuição. Tome-se, por exemplo, um gás: as velocidades das partículas desse gás obedecem a uma distribuição estatística e pode-se determinar, a partir desta, grandezas como temperatura e pressão do gás. Nele, existirão partículas com velocidades longe da média e este fato não constitui nenhum fato extraordinário.

Outras distribuições de probabilidades importantes no estudo de sistemas complexos são as chamadas *distribuições de Lévy*, que possuem variância infinita e, às vezes, inclusive, média infinita. Estas distribuições estão relacionadas a trajetórias aleatórias fractais chamadas “Lévy Flights” e são representadas por saltos auto-similares. Essas distribuições são muito usadas no estudo de sistemas não-lineares, turbulentos, caóticos e fractais assim como a de Gauss é utilizada em sistemas simples (MANDELBROT, 1982).

### 2.2.1 – Processos Gaussianos

Por motivos de simplicidade, analisar-se-á o caso de um movimento aleatório em uma dimensão. Considere-se o caso de um caminho aleatório percorrido por uma partícula em passos de comprimentos iguais e de valor  $r$ , que podem ser dados com probabilidade  $p$  para um lado e  $q$  para o outro lado.

Deste modo, a posição da partícula em qualquer instante e após qualquer número de passos pode ser escrita como:

$$x = mr \quad \text{onde: } m = \dots -2, -1, 0, 1, 2 \dots \quad (2.3)$$

Após  $N$  passos, o valor de  $m$  só pode se encontrar entre os limites:

$$-N \leq m \leq N \quad (2.4)$$

Chamando-se  $n_1$  o número de passos dados no sentido positivo e de  $n_2$  o número de passos no sentido negativo,

$$\begin{aligned} N &= n_1 + n_2 \\ m &= n_1 - n_2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} m &= 2n_1 - N \\ n_1 &= \frac{1}{2}(N + m); \quad n_2 = \frac{1}{2}(N - m) \end{aligned} \quad (2.6)$$

A probabilidade da ocorrência de uma seqüência de  $n_1$  passos no sentido positivo e  $n_2$  no sentido negativo é dada simplesmente por:

$$p \cdot p \cdot p \cdot p \dots p \cdot q \cdot q \cdot q \dots q = p^{n_1} q^{n_2} \quad (2.7)$$

$(n_1 \text{ vezes}) \quad (n_2 \text{ vezes})$

O número de combinações possíveis com  $n_1$  passos no sentido positivo e  $n_2$  no negativo é:

$$\frac{N!}{n_1! n_2!} \quad (2.8)$$

Assim, a probabilidade  $W_n(n_1)$  de se ter, num total de  $N$  passos,  $n_1$  no sentido positivo (ou  $n_2 = N - n_1$ ), em qualquer ordem, é obtido de (2.7) e (2.8):

$$W_n(n_1) = \frac{N!}{n_1! n_2!} p^{n_1} q^{n_2} \quad (2.9)$$

Esta função de probabilidade é chamada de distribuição binomial.

A partir disto, pode-se facilmente obter a probabilidade  $P_N(m)$  de se encontrar a partícula na posição  $m$  após  $N$  passos:

$$P_N(m) = W_N(n_1) \quad (2.10)$$

Substituindo-se (2.6) em (2.10):



$$P_N(m) = \frac{N!}{\left[ \frac{(N+m)}{2} \right]! \left[ \frac{(N-m)}{2} \right]!} p^{\frac{(N+m)}{2}} (1-p)^{\frac{(N-m)}{2}} \quad (2.11)$$

No caso simétrico, onde  $p = q = \frac{1}{2}$ :

$$P_N(m) = \frac{N!}{\left[ \frac{(N+m)}{2} \right]! \left[ \frac{(N-m)}{2} \right]!} \left( \frac{1}{2} \right)^N \quad (2.12)$$

Se  $N$  for grande e se se considerar regiões próximas do máximo de  $W$ , onde  $n_l$  também é grande:

$$|W(n_l+1) - W(n_l)| \ll W(n_l) \quad (2.13)$$

Assim,  $W$  pode, numa boa aproximação, ser considerado uma função contínua de  $n_l$ , embora apenas valores inteiros de  $n_l$  façam sentido físico.

A localização de  $n_l = N p$  do máximo de  $W$  é aproximadamente determinada pela condição:

$$\frac{dW}{dn_l} = 0 \quad (2.14)$$

Onde a derivada é avaliada em  $n_l = N p$ .

Pode-se investigar o comportamento de  $W(n_1)$  próximo do máximo escrevendo-se:

$$n_1 = Np + \eta \quad (2.15)$$

e expandindo-se  $\ln W(n_1)$ :

$$\ln W(n_1) = \ln W(Np) + B_1\eta + \frac{1}{2}B_2\eta^2 + \frac{1}{6}B_3\eta^3 + \dots \quad (2.16)$$

onde  $B_k = \frac{d^k \ln W}{dn_1^k}$  avaliado em  $n_1 = Np$ .

Por (2.14),  $B_1 = 0$ .

Como  $W$  é máximo,  $B_2$  deve ser negativo e, para explicitar esse fato, escrever-se-á  $B_2 = -|B_2|$ . Assim, colocando  $\tilde{W} = \tilde{W}(Np)$ , (2.16) fica:

$$W(n_1) = \tilde{W} \exp \left[ \frac{1}{2}B_2\eta^2 + \frac{1}{6}B_3\eta^3 + \dots \right] \quad (2.17)$$

Na região onde  $\eta$  é suficientemente pequeno, pode-se aproximar (2.17) por:

$$W(n_1) = \tilde{W} \exp \left[ -\frac{1}{2}|B_2|\eta^2 \right] \quad (2.18)$$

A constante  $\tilde{W}$  pode ser determinada pela condição de normalização:

$$\sum_{n_1=0}^N W(n_1) = 1 \quad (2.19)$$

Como  $W$  e  $n_1$  podem ser considerados praticamente contínuos, tem-se:

$$\sum_{n_1=0}^N W(n_1) \approx \int W(n_1) dn_1 = \int_{-\infty}^{\infty} W(Np + \eta) d\eta = 1 \quad (2.20)$$

Obtém-se, então, por (2.18):

$$\tilde{W} \int_{-\infty}^{\infty} W(n_1) dn_1 = \tilde{W} \sqrt{\frac{2\pi}{|B_2|}} = 1 \quad (2.21)$$

Assim, (2.18) torna-se:

$$W(n_1) = \sqrt{\frac{|B_2|}{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}|B_2|(n_1 - \tilde{n}_1)^2\right], \text{ com } \tilde{n}_1 = Np \quad (2.22)$$

Esta forma funcional é chamada “Distribuição Gaussiana” e é bastante comum na natureza. Não é surpreendente, então, encontrar essa distribuição freqüentemente em estatísticas que lidam com um grande número de componentes.

Supõe-se, agora, que a posição da partícula após  $n$  passos seja dada por:

$$S_n \equiv x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad (2.23)$$

Onde  $S_n$  é a soma de  $n$  variáveis  $x_i$  aleatórias independentes e identicamente distribuídas (*iid*) com uma função de densidade de probabilidade (*pdf*)  $P(x)$  arbitrária.

Variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas  $\{x_i\}$  são caracterizadas por momentos que não dependem de  $i$ , onde os momentos  $E\{x_i^n\}$  são definidos como:

$$E\{x_i^n\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i^n P(x) dx \quad (2.24)$$

A equivalência ‘caminho aleatório’ = ‘caminho gaussiano’ é válida apenas quando  $n \rightarrow \infty$  e não é geralmente verdadeira nos casos discretos, onde  $n$  é finito, já que  $S_n$  é caracterizado por uma função de densidade de probabilidade (*pdf*) que é, de modo geral, não-gaussiana e que assume uma forma gaussiana apenas assintoticamente com  $n$ . A *pdf* do processo,  $P[S_n]$  é função de  $n$ , e  $P(x_i)$  é arbitrária.

## 2.2.2 – Estabilidade de Distribuições Estatísticas

### 2.2.2.1– Variação da forma de $P[S_n]$ ao longo do tempo e o conceito de estabilidade

Presumindo independência, tem-se que:

$$P[S_2] = P(x_1) \otimes P(x_2) \quad (2.25)$$

onde o símbolo  $\otimes$  denota efetuar a convolução das densidades de probabilidade  $P(x_1)$  e  $P(x_2)$ .

A convolução de duas funções é dada por:

$$f(x) \otimes g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy \quad (2.26)$$

Como ilustração deste processo, pode-se observar a seqüência abaixo, que exemplifica a convolução de duas funções por método numérico:

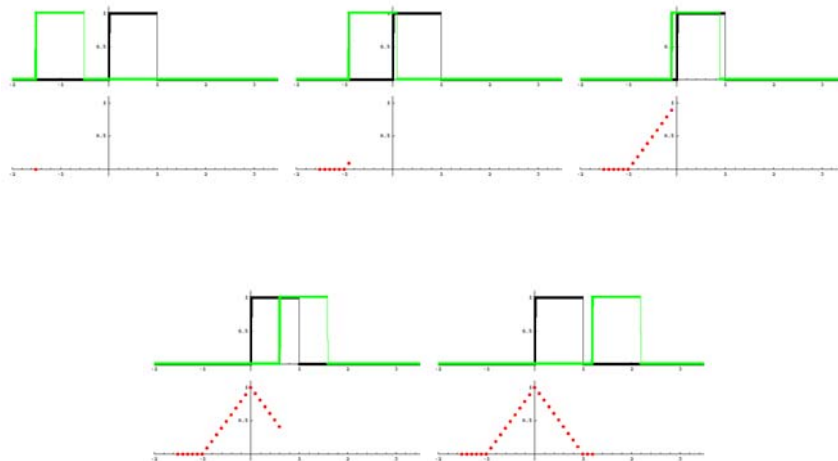
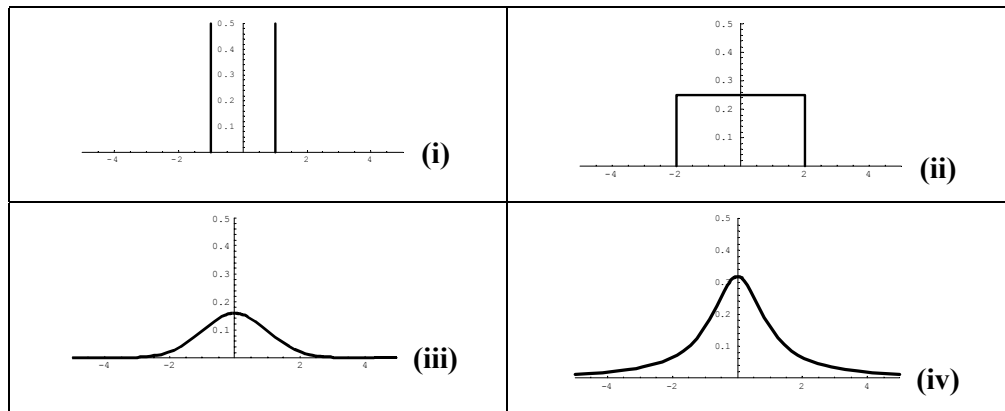


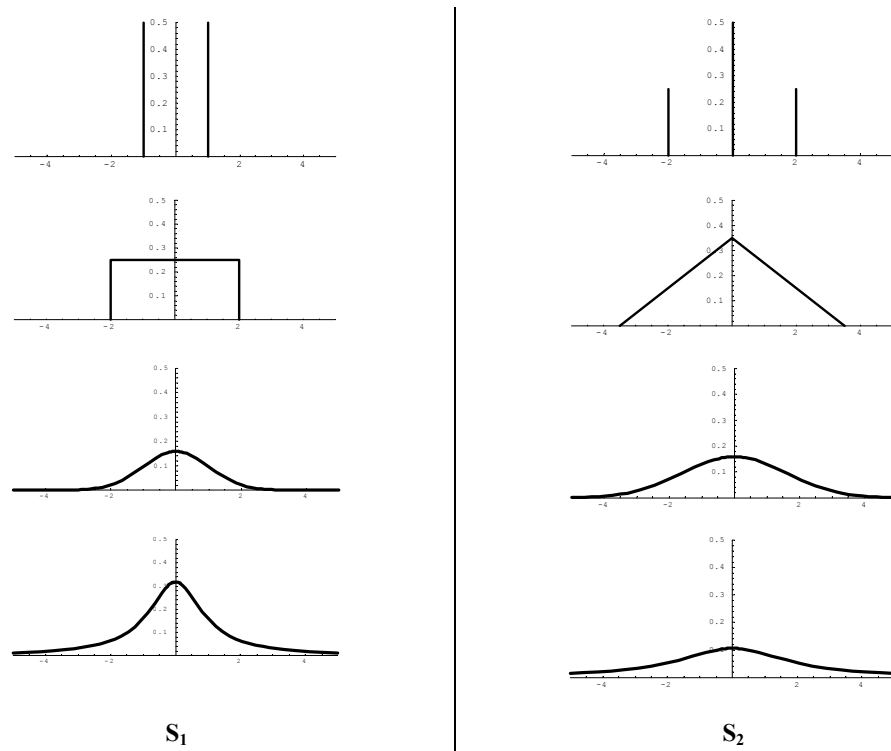
Figura 2.1: seqüência de imagens ilustrando a convolução de duas funções (no caso, uniformes) numericamente: na linha superior, as funções originais e, em pontilhado, a função resultante da operação.

A figura 2.2 mostra quatro tipos de distribuições  $P(x)$ : (i) distribuição delta, (ii) distribuição uniforme, (iii) distribuição gaussiana e (iv) distribuição Loretziana (ou Cauchy). Quando uma destas distribuições caracteriza as variáveis aleatórias  $x_i$ , a *pdf*  $P(S_n)$  muda com o aumento de  $n$  (figura 2.3).



**Figura 2.2:** Exemplos de diferentes *pdfs*:

- (i)  $P(x) = \delta(x+1)/2 + \delta(x-1)/2$ , (ii) distribuição uniforme com média zero e desvio padrão 1, (iii) Gaussiana com média zero e desvio padrão unitário e (iv) Lorentziana com fator de escala unitário.



**Figura 2.3:** Comportamento de  $P(S_n)$

de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas para  $n=1$  e  $n=2$  para as *pdfs* da figura 2.1

Embora todas as distribuições se alterem como função de  $n$ , uma diferença é observada entre as duas primeiras e a gaussiana e lorentziana. As

funções  $P(S_n)$  para as distribuições delta e uniforme se alteram tanto em escala quanto em forma funcional com o aumento de  $n$ , enquanto a gaussiana e lorentziana não se alteram em forma, mas apenas em escala.

Quando a forma funcional de  $P(S_n)$  é a mesma que a forma funcional de  $P(x_i)$ , o processo estocástico é dito *estável*. Assim, processos gaussianos e lorentzianos são ditos *estáveis*, mas, em geral, processos estocásticos não são.

### 2.2.2.2 – Teorema do limite central

Seja uma variável aleatória  $S_n$  composta da soma de várias variáveis aleatórias independentes e com variância finita  $x_i$ , ou seja,  $S_n = \sum_{i=1}^n x_i$  e, ainda como  $E\{x_i\} = 0$ ,  $E\{x_i^2\} = s_i^2$ , então:

$$\sigma_n^2 = E\{S_n^2\} = \sum_{i=1}^n s_i^2 \quad (2.27)$$

e, supondo ainda, que, quando  $\sigma_n \rightarrow \infty$  a condição de Lindeberg seja válida (MANTEGNA, 2000),

$$\frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=1}^n E\{U_i^2\} \rightarrow 1 \quad (2.28)$$

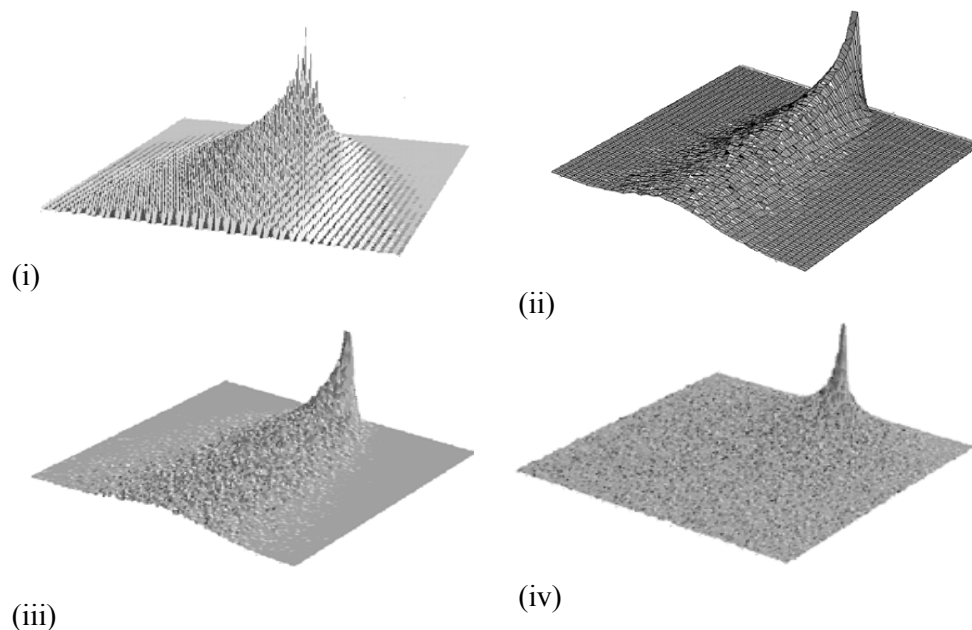
onde, para cada  $\varepsilon > 0$ ,  $U_i$  seja uma variável aleatória truncada igual a  $x_i$  quando  $|x_i| \leq \varepsilon \sigma_n$  e zero nos outros casos. Então, o teorema do limite central afirma que

$$\tilde{S}_n \equiv \frac{S_n}{\sigma_n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\sigma \sqrt{n}} \quad (2.29)$$

e pela *pdf* gaussiana com variância unitária, isto é:

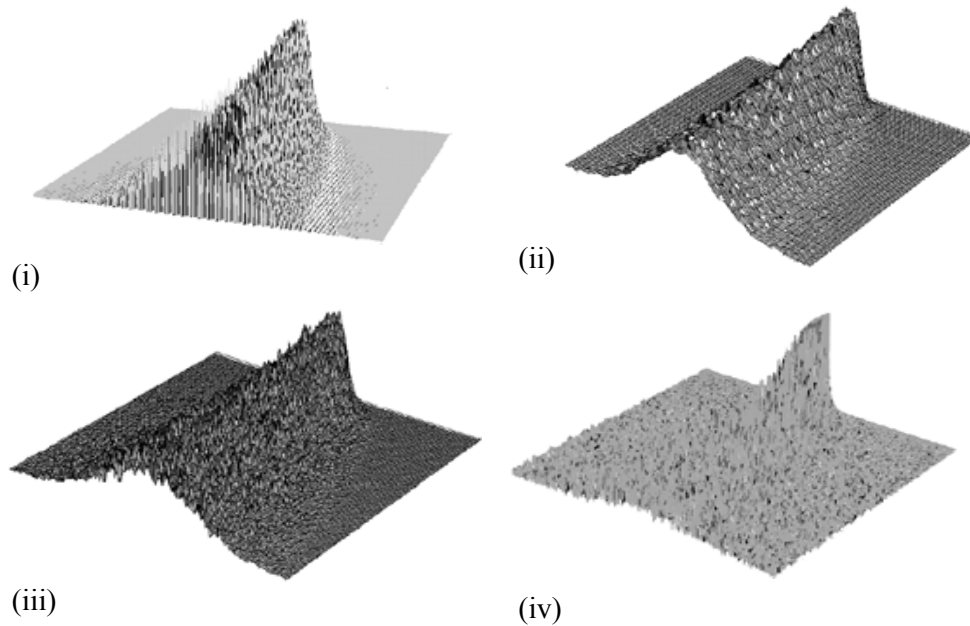
$$P_G(S_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-S_n^2}{2}} \quad (2.30)$$

Utilizando dois exemplos, pode-se ilustrar o ponto principal do teorema, ou seja, a convergência gradual de  $P(S_n)$  para a forma gaussiana com o aumento de  $n$ . Nestes exemplos abaixo, simulou-se o processo estocástico  $S_n$  assumindo que  $x_i$  é caracterizado por (i)  $P(x) = \delta(x+1)/2 + \delta(x-1)/2$ , (ii) uma distribuição uniforme, (iii) uma Gaussiana e (iv) uma Lorentziana. (Figura 2.4). Conforme esperado, a distribuição  $P(S_n)$  alarga-se quando  $n$  aumenta e a forma tende a uma gaussiana nos três primeiros casos e lorentziana no quarto.



**Figura 2.4:** Simulação de  $P(S_n)$  para valores de  $n=1$  a  $n=30$  para os casos onde  $P(x)$  é: (i) distribuição delta, (ii) distribuição uniforme, (iii) distribuição Gaussiana e (iv) Lorentziana (escalas arbitrárias)





**Figura 2.5:** mesmas distribuições de 1.3, agora utilizando-se um fator de escala  $\text{Log}[x]$  para melhorar a visualização

Enfatiza-se, assim, a hipótese fundamental do teorema do limite central. O que é requerido é que as variáveis aleatórias  $x_i$  sejam independentes e possuam *variância finita*.

### 2.2.2.3– Distribuições estáveis

Para variáveis aleatórias Lorentzianas, a função de densidade de probabilidade é:

$$P(x) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{\gamma^2 + x^2} \quad (2.31)$$

Sua transformada de Fourier é dada por:

$$\varphi(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)e^{iqx} dx \quad (2.32)$$

é chamada de função característica do processo estocástico. Para a distribuição Lorentziana, tem-se:

$$\varphi(q) = e^{-|q|\gamma} \quad (2.33)$$

O teorema da convolução afirma que a transformada de Fourier da convolução de duas funções é o produto das transformadas de Fourier das duas funções, isto é:

$$\mathfrak{F}[f(x) \otimes g(x)] = \mathfrak{F}[f(x)].\mathfrak{F}[g(x)] = F(q).G(q) \quad (2.34)$$

Para duas variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (*iid*),

$$S_2 = x_1 + x_2 \quad (2.35)$$

A *pdf* da soma de duas variáveis *iid* é dada pela convolução das duas *pdfs* de cada uma das variáveis:

$$P_2(S_2) = P(x_1) \otimes P(x_2) \quad (2.36)$$

Pelo teorema da convolução, a função característica de  $S_2$  é dada por:

$$\varphi_2(q) = [\varphi(q)]^2 \quad (2.37)$$

ou, no caso geral:

$$P_n(S_n) = P(x_1) \otimes P(x_2) \otimes \dots \otimes P(x_n) \quad (2.38)$$

onde  $S_n$  é definida em (2.23).

No caso de uma distribuição lorentziana, por exemplo, tem-se que, por (2.33) e (2.37):

$$\varphi_2(q) = e^{-2|q|^\gamma} \quad (2.39)$$

Aplicando-se a transformada inversa de Fourier:

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(q) e^{-iqx} dq \quad (2.40)$$

obtem-se a distribuição de probabilidade:

$$P_2(S_2) = \frac{2\gamma}{\pi} \frac{1}{4\gamma^2 + x^2} \quad (2.41)$$

A forma funcional de  $P_2(S_2)$ , e generalizando,  $P_n(S_n)$  é lorentziana. Portanto, a distribuição lorentziana é dita estável.

A mesma análise pode ser usada no caso de variáveis *iid* gaussianas, que obedecem à distribuição:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma}} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right] \quad (2.42)$$

Sua função característica é:

$$\varphi(q) = e^{-\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)q^2} = e^{-\gamma q^2} \quad (2.43)$$

onde  $\gamma \equiv \sigma^2 / 2$ . Assim, por (2.37):

$$\varphi_2(q) = e^{-2\gamma q^2} \quad (2.44)$$

Aplicando-se a transformada inversa de Fourier, obtém-se:

$$P_2(S_2) = \frac{1}{\sqrt{8\pi} \sqrt{\gamma}} \exp\left[-\frac{x^2}{8\gamma}\right] \quad (2.45)$$

Assim, a distribuição gaussiana também é uma distribuição estável. Escrevendo-se (2.45) na forma

$$P_2(S_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sqrt{2\sigma})} \exp\left[-\frac{x^2}{2(\sqrt{2\sigma})^2}\right] \quad (2.46)$$

conclui-se que  $\sigma_2 = \sqrt{2\sigma}$ .

Com isso, demonstra-se que os processos estocásticos Gaussiano e Lorentziano são estáveis. As funções características dos dois processos possuem a mesma forma funcional:

$$\varphi(q) = e^{-\gamma|q|^\alpha} \quad (2.47)$$

onde  $\alpha = 1$  para a distribuição lorentziana e  $\alpha = 2$  para Gaussiana.

LÉVY e KHINTCHINE (1936) resolveram o problema geral para se determinar a classe completa de distribuições estáveis. Estas possuem, de modo geral, a função característica do processo dada por:

$$\ln \varphi(q) = \begin{cases} i\mu q - \gamma |q|^\alpha \left[ 1 - i\beta \frac{q}{|q|} \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) \right], & [\alpha \neq 1] \\ i\mu q - \gamma |q| \left[ 1 + i\beta \frac{q}{|q|} \frac{2}{\pi} \ln|q| \right], & [\alpha = 1] \end{cases} \quad (2.48)$$

onde  $0 < \alpha \leq 2$ ,  $\gamma$  é um fator de escala positivo,  $\mu$  é o valor médio e pode assumir qualquer valor real e  $\beta$  é um parâmetro de simetria que vai de  $-1$  a  $1$ .

A forma analítica para as distribuições estáveis de Lévy é conhecida apenas para poucos valores de  $\alpha$  e  $\beta$  (MANTEGNA, 2000):

- $\alpha = 1/2, \beta = 1$  (Lévy-Smirnov)
- $\alpha = 1, \beta = 0$  (Lorentziana)
- $\alpha = 2$  (Gaussiana)

Considere-se, a partir de agora, apenas distribuições estáveis simétricas ( $\beta = 0$ ) com média zero ( $\mu = 0$ ). Sob esta suposição, as funções características assumem a forma dada em (2.47). A distribuição estável simétrica de índice  $\alpha$  e fator de escala  $\gamma$  é, por (2.40) e (2.48):

$$P_L(x) \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-|q|^\alpha \gamma} \cos(qx) dq \quad (2.49)$$

Para  $\gamma = 1$ , uma expansão em série que seja válida para valores de  $x$  grandes é dada por (BERGSTRÖM, 1952):

$$P_L(|x|) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(ak+1)}{|x|^{ak+1}} \sin\left[\frac{k\pi\alpha}{2}\right] \quad (2.50)$$

onde  $\Gamma(x)$  é a função *Gama de Euler*.

A partir de (2.50) observa-se que a aproximação assintótica de uma distribuição estável de índice  $\alpha$  para valores de  $|x|$  grandes é:

$$P_L(|x|) \approx \frac{\Gamma(1+\alpha) \sin(\pi\alpha/2)}{\pi |x|^{1+\alpha}} \approx |x|^{-(1+\alpha)} \quad (2.51)$$

O comportamento assintótico para grandes valores de  $x$  é uma *lei de potência*, uma propriedade com conseqüências profundas para os momentos da distribuição. Especificamente,  $E\{|x|^n\}$  diverge para  $n \geq \alpha$  quando  $\alpha < 2$ . Em particular, todos os processos de Lévy com  $\alpha < 2$  possuem *variância infinita*, ou seja, processos estocásticos não-gaussianos estáveis não possuem uma escala característica. Esse fato é uma importante característica de processos *fractais*.

### 2.2.3 – Bacias de atração

Restringindo-se aos casos de variáveis identicamente distribuídas  $x_i$  com uma *pdf* dada por  $P(S_i)$  observa-se que, se à medida que  $n$  aumenta, altera a forma funcional de  $P(S_n)$  e esta assume a forma gaussiana para altos valores de  $n$ .

Assim, a *pdf* gaussiana é chamada de *atrator* no espaço funcional das *pdfs* para todas as *pdfs* que preenchem os requisitos do TLC, ou seja, possuam variância finita, conforme ilustrado na figura 2.6:

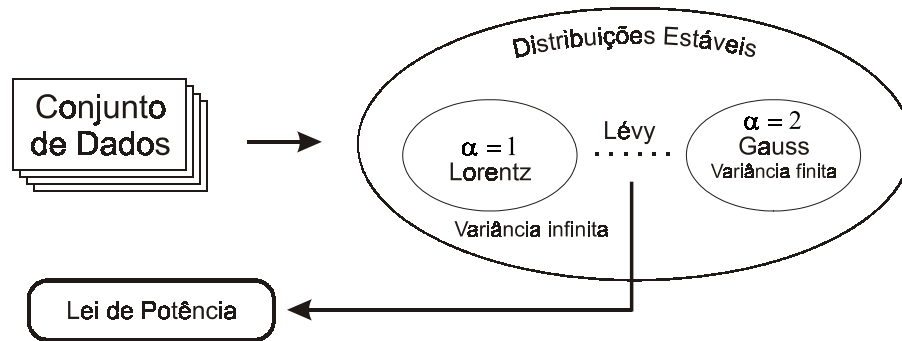


Figura 2.6: Representação do conjunto de distribuições estáveis e bacias de atração

Embora o atrator gaussiano seja o mais importante no espaço funcional das *pdfs*, outros atratores também existem.

A distribuição Gaussiana é uma distribuição estável peculiar: é a única que possui todos os seus momentos finitos. Então, é natural perguntar se outras distribuições estáveis não-gaussianas são também atratores no espaço funcional das *pdfs*, ou seja, existem infinitas distribuições estáveis, com forma funcional desconhecida, mas que representam fenômenos físicos. O teorema de limite apresentado por GNEDENKO (1940) e GNEDENKO e KOLMOGOROV (1954) afirma que a *pdf* da soma de  $n$  variáveis aleatórias *iid* converge, em probabilidade, para uma distribuição estável sob certas condições das *pdf* das variáveis aleatórias.

Como  $\alpha$ , em (2.48) é contínuo entre seus limites, um número infinito de atratores existem no espaço funcional das *pdfs* e formam o conjunto de todas as distribuições estáveis. Uma diferença importante é observada entre o atrator gaussiano e atratores estáveis não-gaussianos: variáveis aleatórias com variância finita estão presentes na bacia de atração gaussiana, enquanto variáveis aleatórias de variância infinita estão na bacia de atração das não-gaussianas.

Processos estocásticos com variância infinita são caracterizados por leis de potência para grandes valores de  $|x|$  e, portanto, distribuições de lei de potência estão presentes nas bacias de atratores não-gaussianos.



## **CAPÍTULO 3**

### **Materiais e métodos**

#### **3.1 – Redes de Distribuição de água**

A importância da água para os seres humanos é indiscutível. Com a organização da sociedade humana em grupos cada vez maiores, não só a água, mas todo o processo de captação, tratamento e distribuição dela, torna-se cada vez mais uma preocupação importante. É sabido que há 2.000 anos a população mundial correspondia a 3% da população atual, entretanto, a disponibilidade de água permanece a mesma. Segundo a ONU (1997), a partir de 1950 o consumo de água, em todo o mundo, triplicou e o consumo médio de água, por habitante, foi ampliado em cerca de 50%.

Assim, estudos que visam ao entendimento e aperfeiçoamento dos processos de captação, tratamento e distribuição de água merecem, atualmente, uma atenção ainda mais especial.

O abastecimento de água das cidades é efetuado utilizando-se, principalmente, os mananciais de superfície. O sistema é constituído basicamente de captações superficiais, adutoras de água bruta e tratada, elevatórias, estações de tratamento de água, reservatórios e rede de distribuição.

Por captação entende-se a retirada de água de um manancial. Essa água, chamada de água bruta (sem tratamento de purificação), é a fonte de abastecimento da população local. Adutoras são tubulações, geralmente de grandes diâmetros e sem ramificações, responsáveis pelo transporte de água bruta da captação para as estações de tratamento e de água tratada nas estações aos reservatórios. Estes acumulam água tratada para abastecimento da cidade, procurando evitar falta de água durante períodos de maior consumo. Desses reservatórios de acumulação, a água é distribuída através de uma rede de tubulações subterrâneas que alimentam as ligações domiciliares de água.

As redes de distribuição de água são tubulações de diâmetros variados e podem ser ramificadas ou fechadas. Por regra geral, diferem-se das adutoras por apresentarem diâmetros inferiores e poder levar água para duas diferentes direções. As redes de distribuição são responsáveis pelo transporte de água entre os reservatórios e os pontos de consumo (residências, indústrias etc.).

Redes de distribuição de água são sistemas geograficamente distribuídos em uma grande área. Como as condições geográficas, climáticas e populacionais em cada área são diferentes, os sistemas de cada região são diferentes entre si. Mesmo assim, as várias estações devem garantir um fornecimento contínuo. As redes de distribuição de água estão em constante expansão devido ao crescimento industrial e populacional e sofrem várias mudanças no decorrer do tempo, tanto na sua estrutura física como nas estratégias de gerenciamento.

Em alguns casos, a água flui por gravidade, diretamente; em outros, porém – o mais comum nas grandes cidades – primeiro é necessário bombeá-la a depósitos elevados, dos quais possa cair. Recomenda-se que, no planejamento dos sistemas de abastecimento, ou em sua ampliação, se faça uma previsão levando em conta o provável aumento da população e o consumo médio por habitante. A determinação das características desses sistemas são influenciadas, principalmente, pelos seguintes fatores: tipo da população, espécie da fonte de abastecimento e suas possibilidades, volume de aplicação industrial, tipo da circulação (se por gravidade ou por bombeamento), estado da rede e conseqüentes perdas naturais ao longo do percurso, tipo da distribuição, se livre ou regulada por medidores.

De um modo geral, o total diário, por pessoa, deve situar-se entre 200 e 500 litros, a variação ficando na dependência maior dos gastos industriais e nos serviços públicos e do tipo da população. Na Grande São Paulo, com uma população de 13.200.000 habitantes, em 1980, a oferta de água era de 2.833.320 de metros cúbicos por dia, ou seja, 0,21m<sup>3</sup> por dia por habitante. Essa proporção tem se mantida equilibrada nos três últimos decênios, mas já foi maior, chegando a 0,32 m<sup>3</sup> por dia por habitante em 1941. Em 1980 o número de ligações de água no município de São Paulo era de 1.279.030<sup>1</sup>.

Represada e captada nos mananciais, tratada e repartida por vários reservatórios, a água é entregue à cidade pela rede externa de abastecimento. Da necessidade de depositar e utilizar a água nos domicílios nasceu a rede interna de abastecimento, constituída de ramais derivados da primeira. Nos países com fatura d'água, não existe propriamente a questão do armazenamento para o consumo e os depósitos domiciliares têm a finalidade de reserva, em caso de falhas eventuais ou acidentes.

---

<sup>1</sup> <http://www.sabesp.com.br> - Página acessada em 26/08/2002

Observa-se, ainda, que, a fim de evitar desperdícios e estabelecer um sistema de cobrança do valor devido à prestação dos serviços de abastecimento d'água, o consumo é controlado por meio de medidores, chamados *hidrômetros*.

A geometria das redes de distribuição de água e seus processos de transporte possuem uma semelhança muito grande com árvores, onde estruturas de grande porte transportam grandes volumes que vão sendo distribuídos em escalas e volumes cada vez menores. Além disso, as estruturas nas escalas menores possuem grande semelhança com as de escalas maiores, ou seja, o sistema possui uma característica de auto-semelhança.

A invariância em escala é uma característica importante de estruturas e processos fractais. O que este trabalho propõe é a análise das redes de distribuição de água em algumas cidades, observando-se os valores de consumo lidos nos hidrômetros, em busca das características fractais que descrevem essas redes.

### **3.2 – Metodologia**

Neste estudo, foram utilizados dados de consumo de água nas cidades de Cordeirópolis (5100 dados em 17.082 habitantes), Araras (30.000 dados em 99.030 habitantes), Rio Claro (54.000 dados em 168.087 habitantes) e Campinas (209.773 dados em 968.172 habitantes) durante um período de um ano, totalizando 3.586.476 dados. Os números de habitantes das cidades são os do Censo IBGE do ano de 2000.

Os dados brutos, fornecidos pelas empresas que gerenciam o fornecimento de água ou que realizam o processamento de dados que geram as

respectivas contas de consumo, conforme a tabela 3.1, constituíam-se de tabelas com uma identificação do ponto de consumo (geralmente um índice) e o valor da quantidade de água (em metros cúbicos, medidos pela diferença de valor entre leituras consecutivas dos hidrômetros) consumida num determinado período, normalmente um mês. As tabelas cobriam uma faixa de tempo de doze meses, com o intuito de excluir possíveis variações de consumo de água de origem sazonal. A partir destes dados, foram calculados os consumos médios durante o ano para cada ponto de consumo identificado e, a partir desses valores médios, determinadas as frequências de consumo.

<b>Cidade</b>	<b>Empresa fornecedora dos dados</b>
Cordeirópolis	ALTEC
Araras	ALTEC
Rio Claro	DAE – Departamento de Água e Esgoto
Campinas	SANASA

**Tabela 3.1:** Empresas fornecedoras dos dados

Baseados nesses dados foram gerados os gráficos seguintes, que representam a densidade de frequência de consumo versus o valor consumido:

Figura 3.1-a: Densidade de frequência do consumo de água em Cordeirópolis (até 100m<sup>3</sup>)

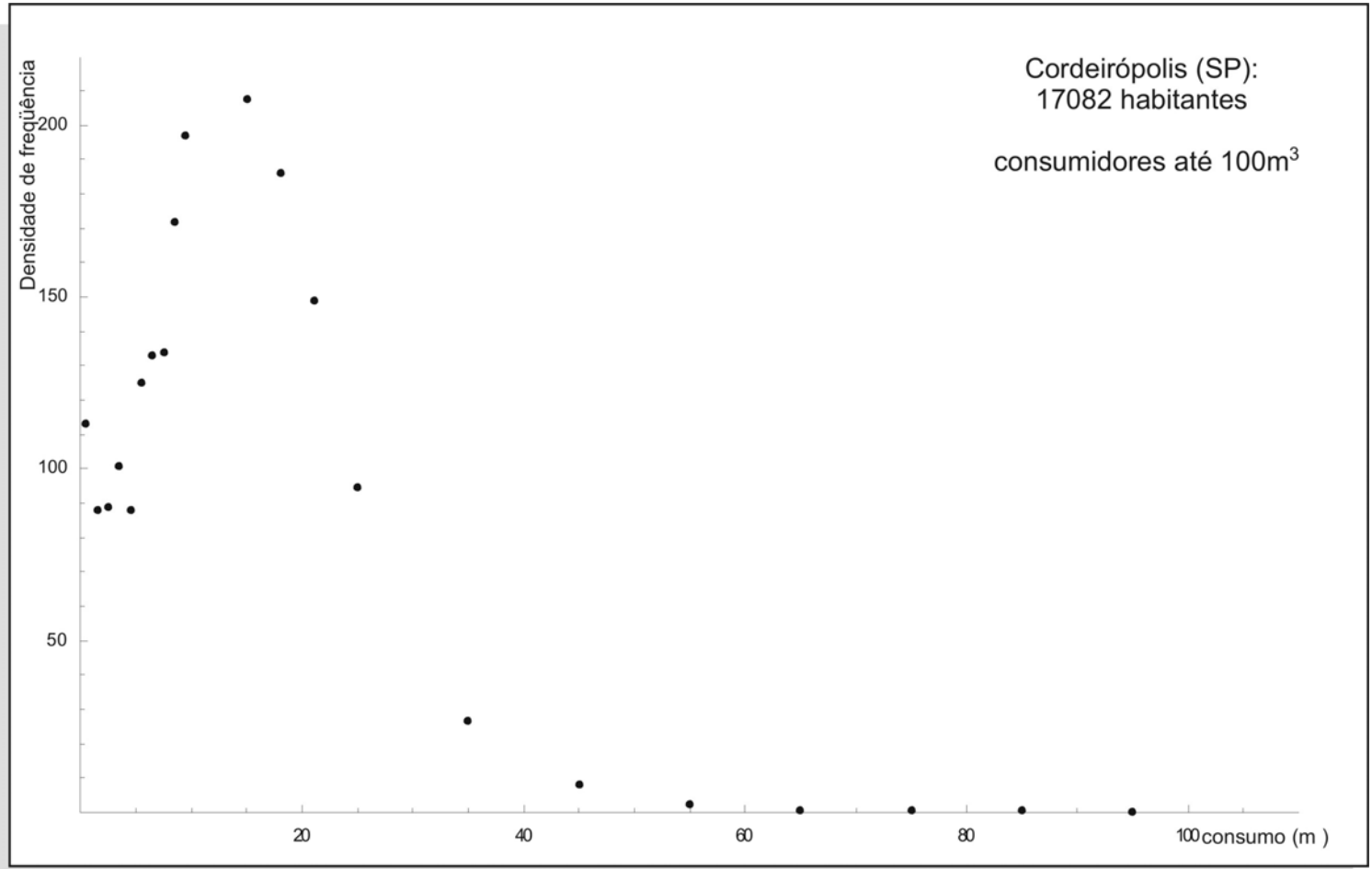


Figura 3.1-1-b: Densidade de frequência do consumo de água em Cordeirópolis (todos – escala Log)

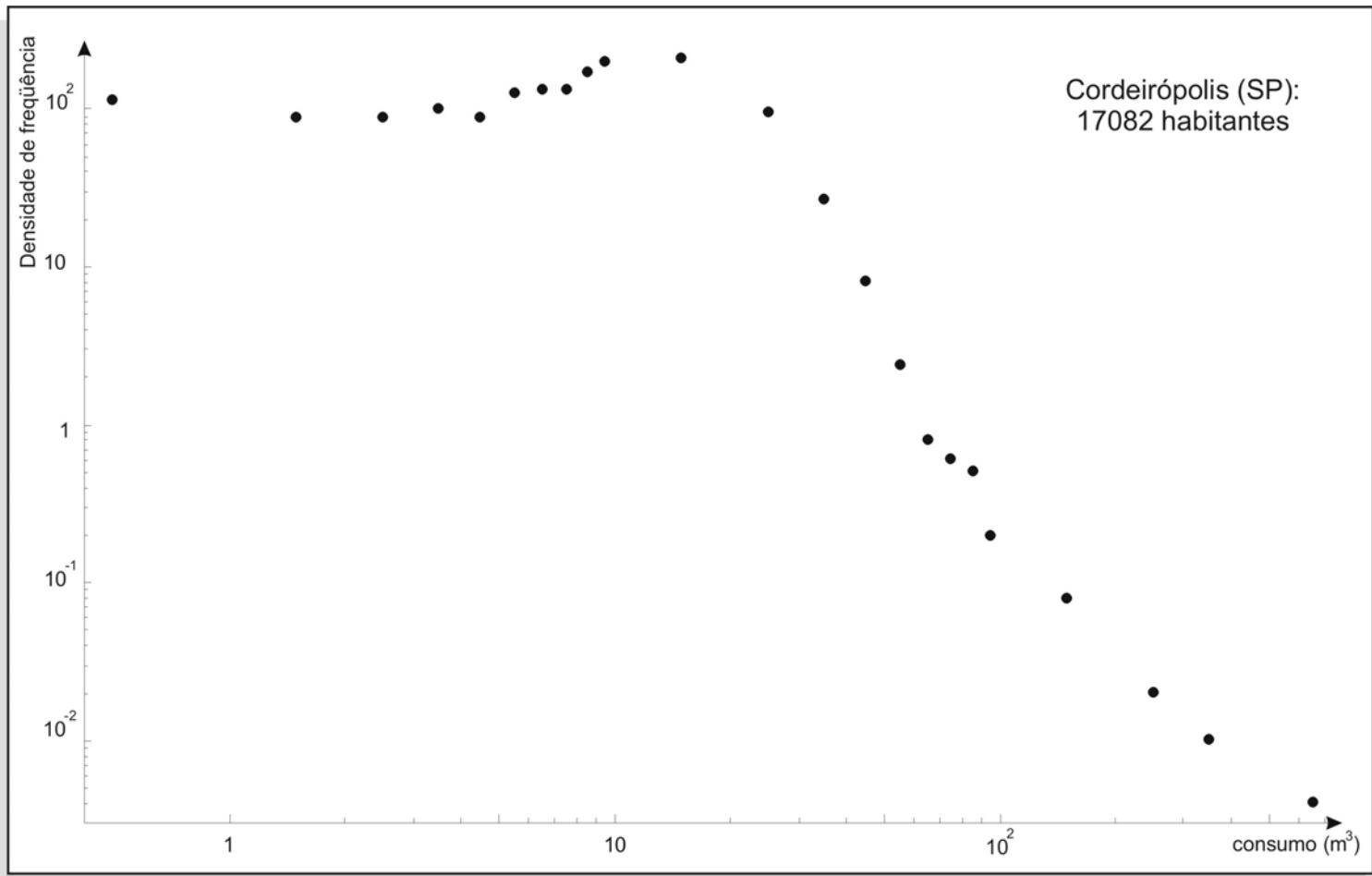


Figura 3.2-a: Densidade de frequência do consumo de água em Araras (até 100m<sup>3</sup>)

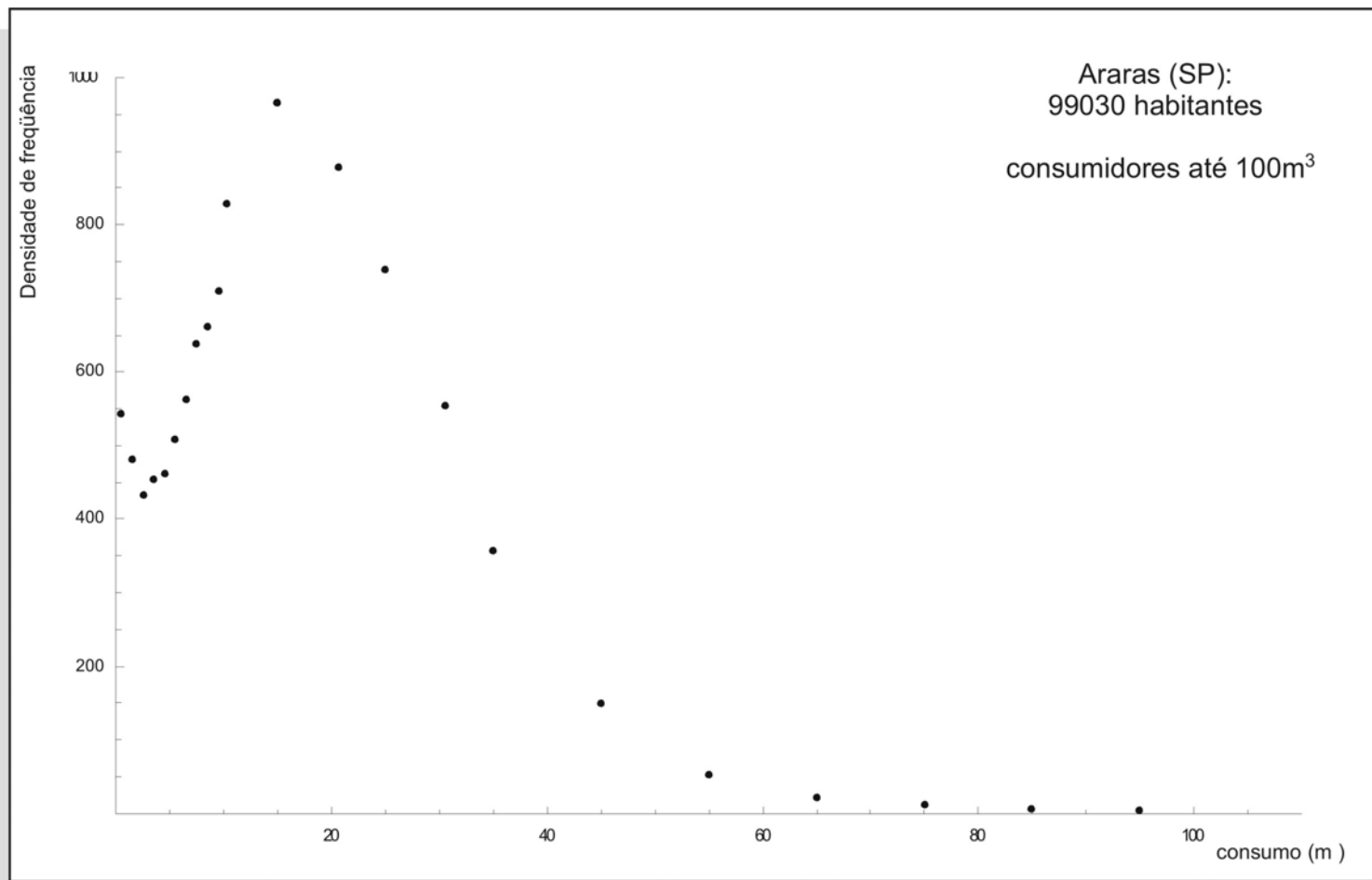




Figura 3.2-b: Densidade de frequência do consumo de água em Araras (todos – escala Log)

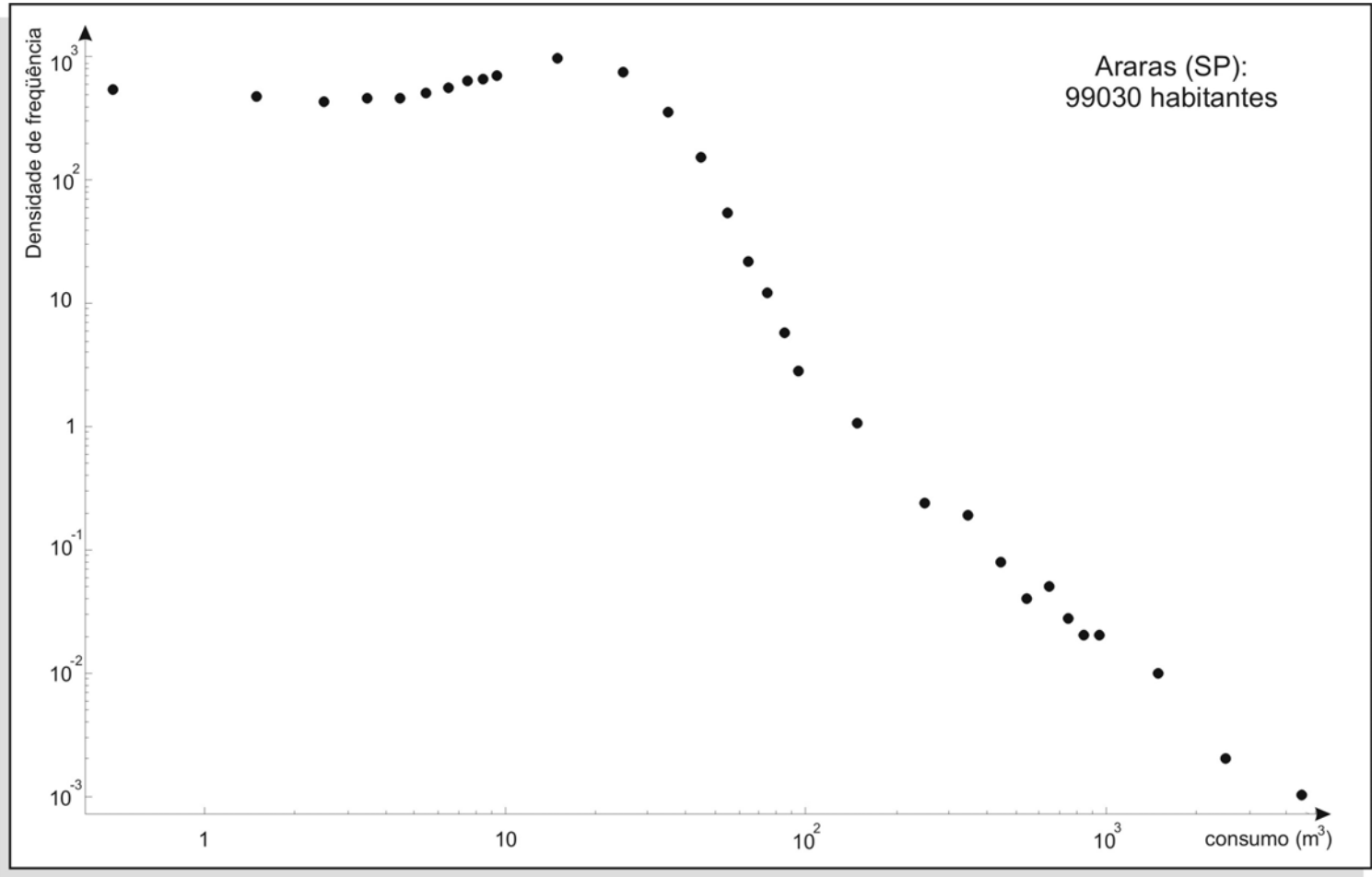


Figura 3.3-a: Densidade de frequência do consumo de água em Rio Claro (até 100m<sup>3</sup>)

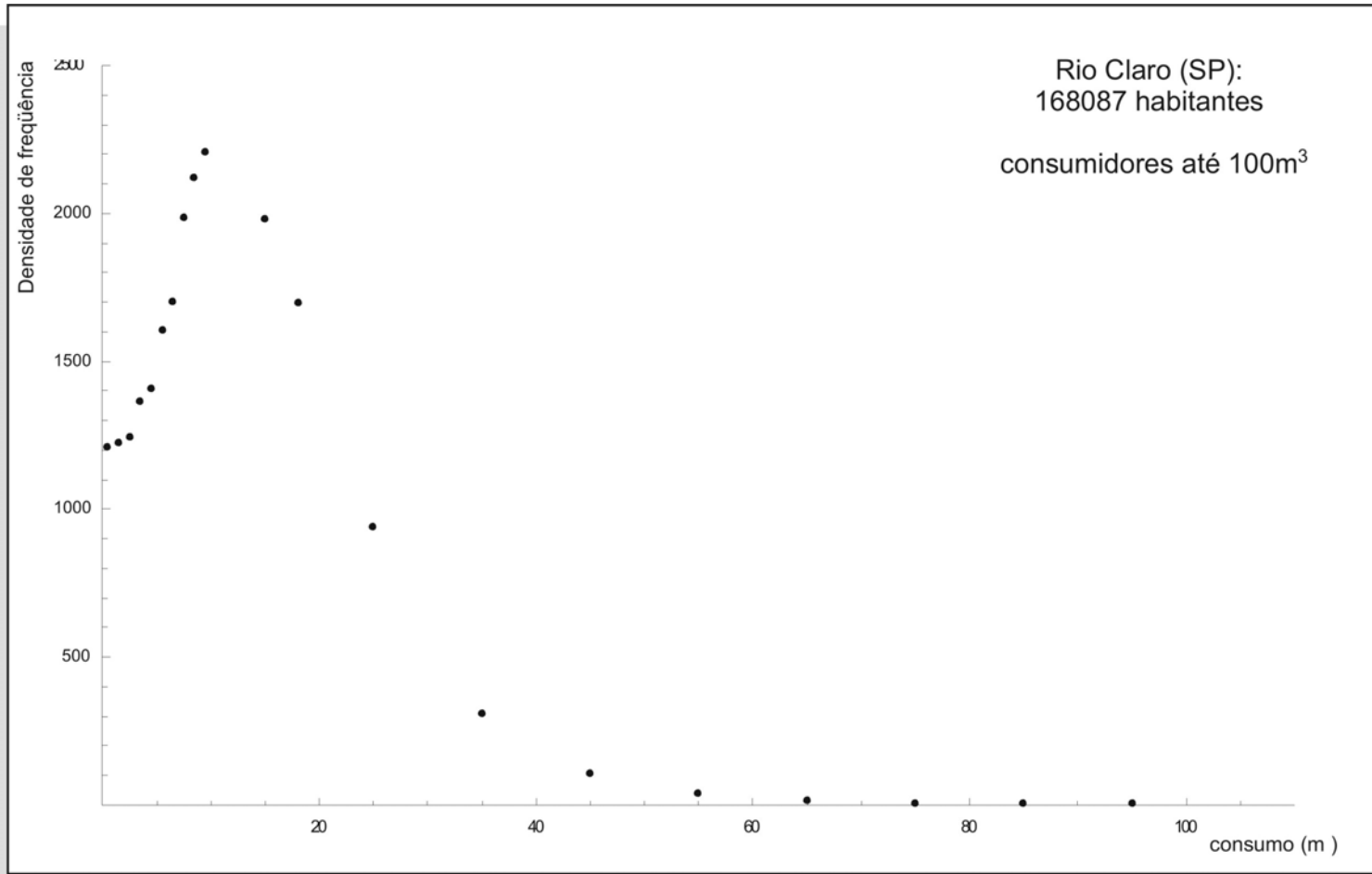


Figura 3.3-b: Densidade de frequência do consumo de água em Rio Claro (todos – escala Log)

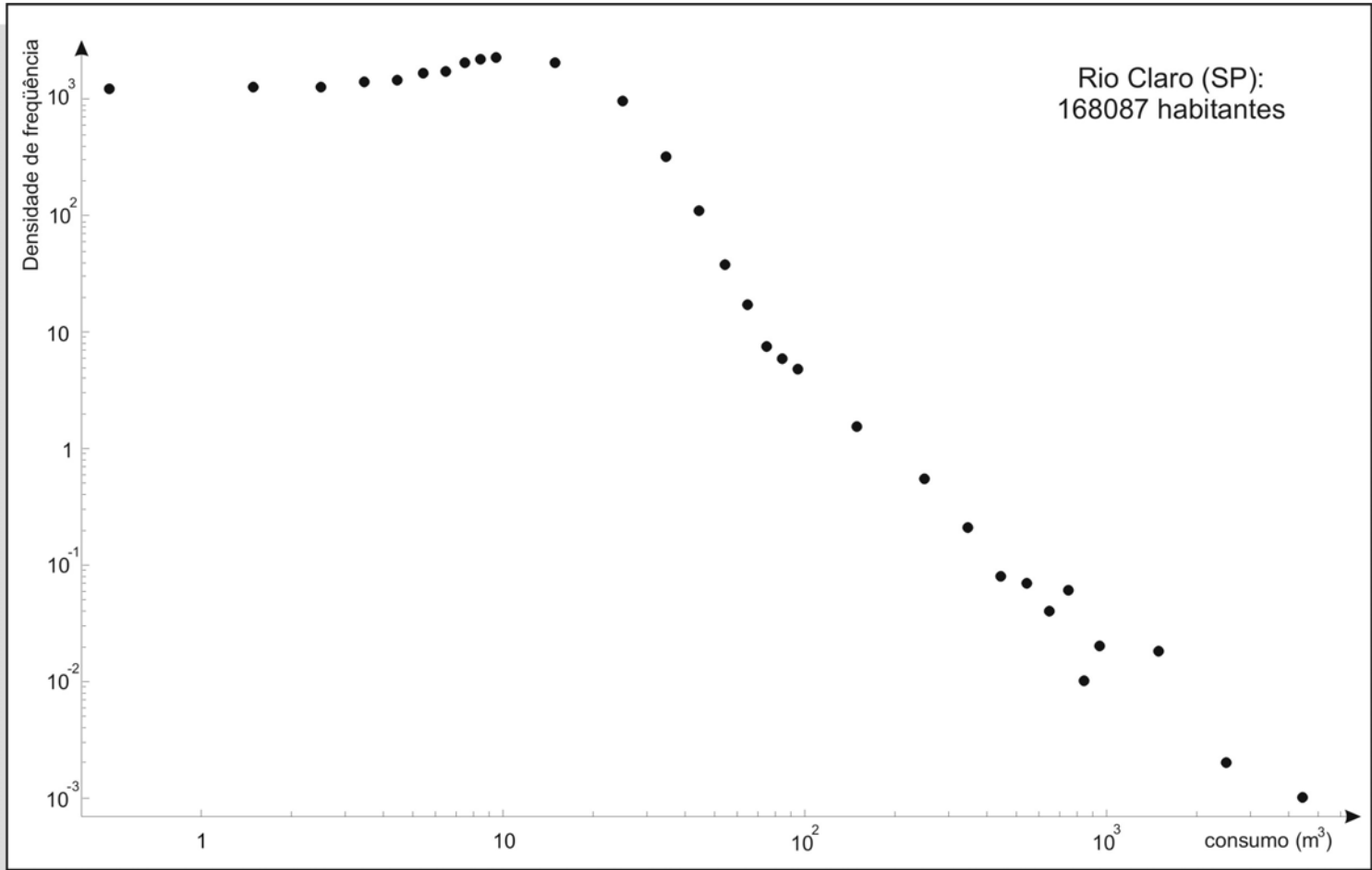


Figura 3.4-a: Densidade de frequência do consumo de água em Campinas (até 100m<sup>3</sup>)

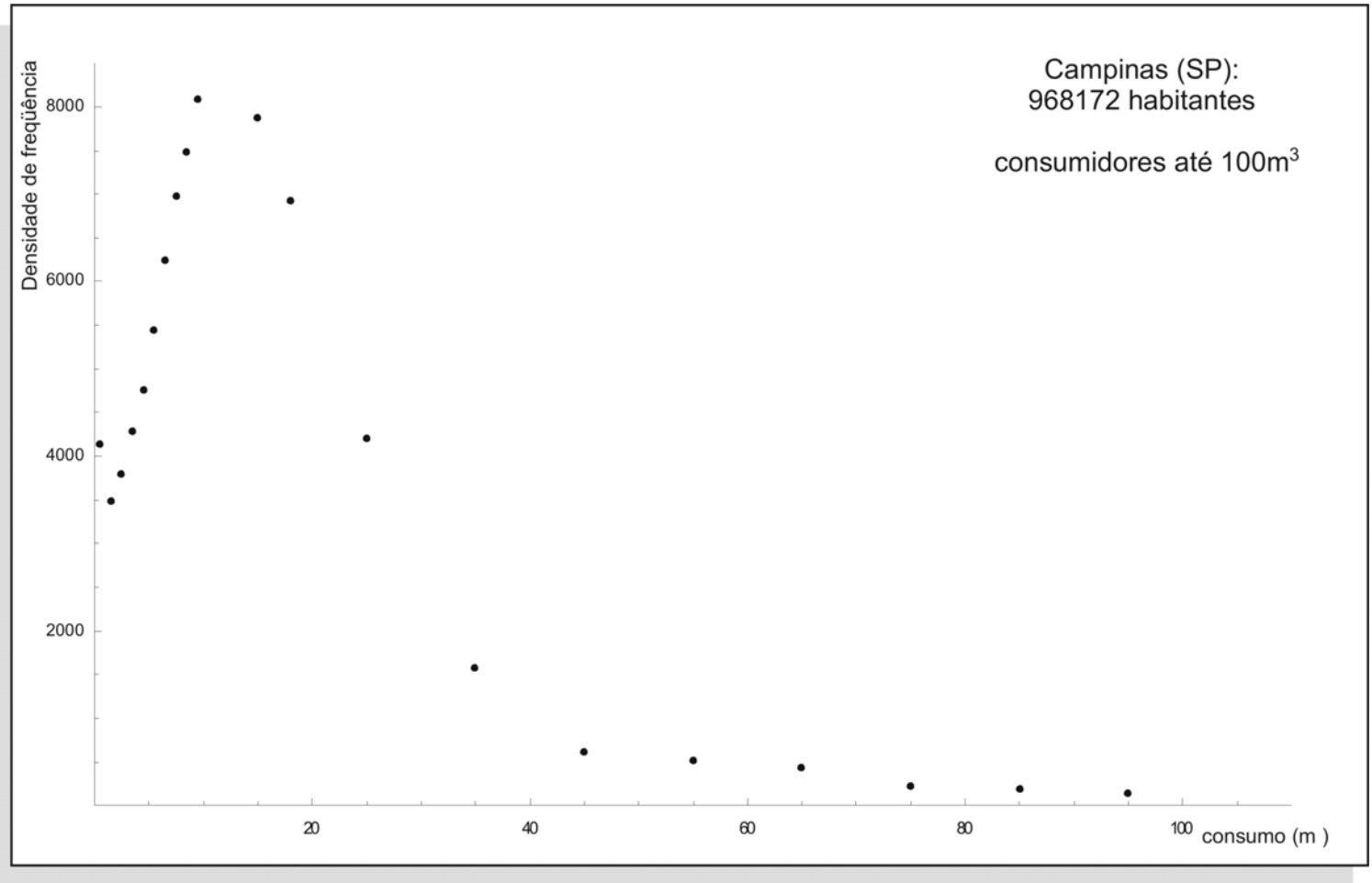
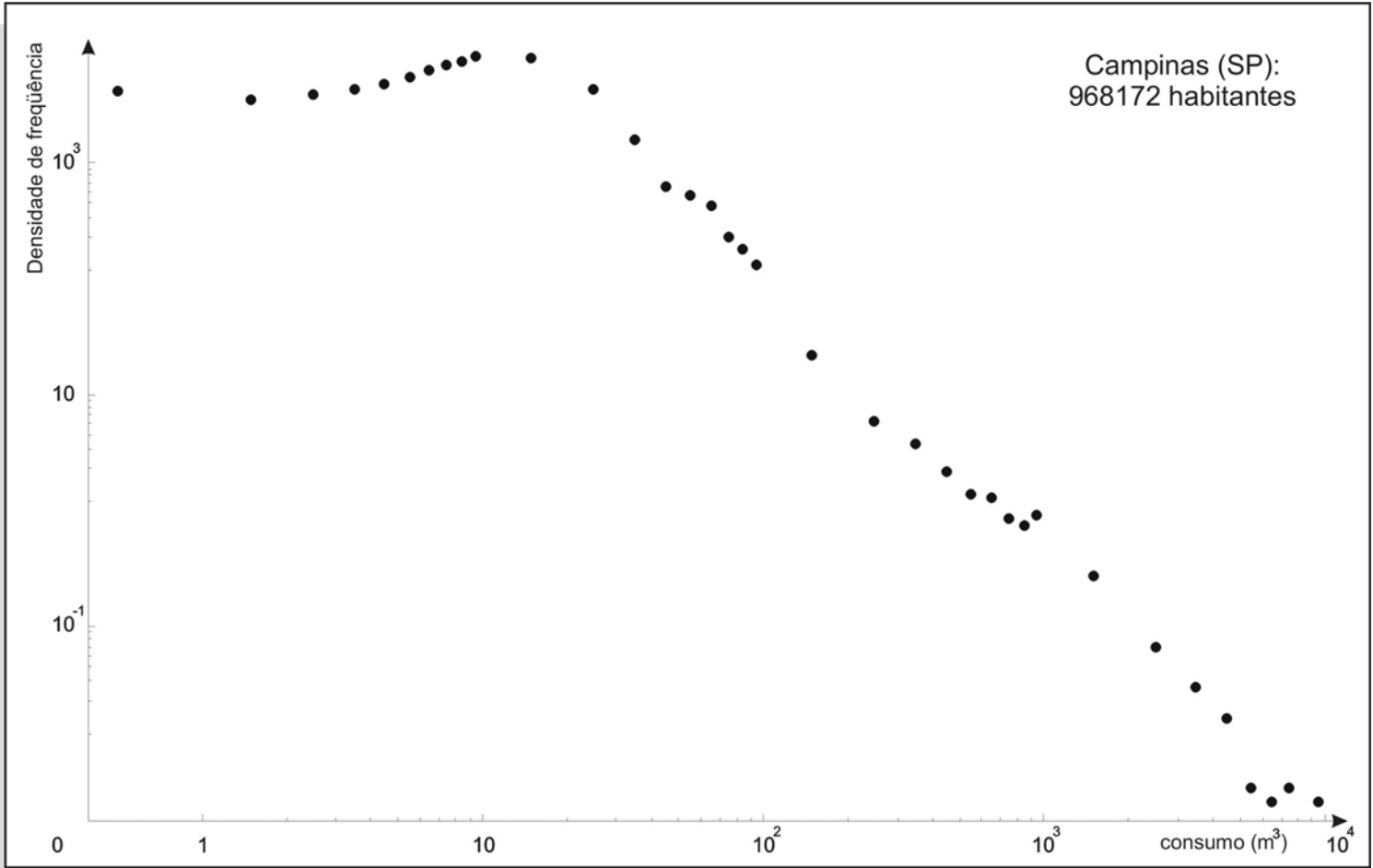


Figura 3.4-b. Densidade de frequência do consumo de água em Campinas (todos – escala Log)



Os gráficos, em escala logarítmica, indicam o comportamento esperado para processos que obedecem à lei de potência.

A partir dessas observações, foram determinados os parâmetros da equação de Lei de Potência abaixo para as quatro cidades estudadas:

$$P(x) = \frac{A \cdot P(x_m)}{A + (x - x_m)^{1+\alpha}} \quad (3.1)$$

onde  $x_m$  é o valor de  $x$  para a densidade de probabilidade máxima e,  $P(x_m)$ , o valor da densidade de probabilidade correspondente.

A análise numérica dos dados foi realizada através do programa Mathematica versão 4.0.0.0 da Wolfram Research com *notebooks* desenvolvidos especificamente para esta análise. Um exemplo deles se encontra anexo.

Os ajustes das curvas teóricas aos dados experimentais foram feitos pelo método de regressão não-linear de Levenberg-Marquardt [MARQUARDT, 1963], já implementado como padrão no programa Mathematica e o resultado desses ajustes podem ser visualizados nos gráficos seguintes:

Figura 3.5: Ajuste teórico sobre a distribuição de densidades de frequências de consumo de água em Cordeirópolis

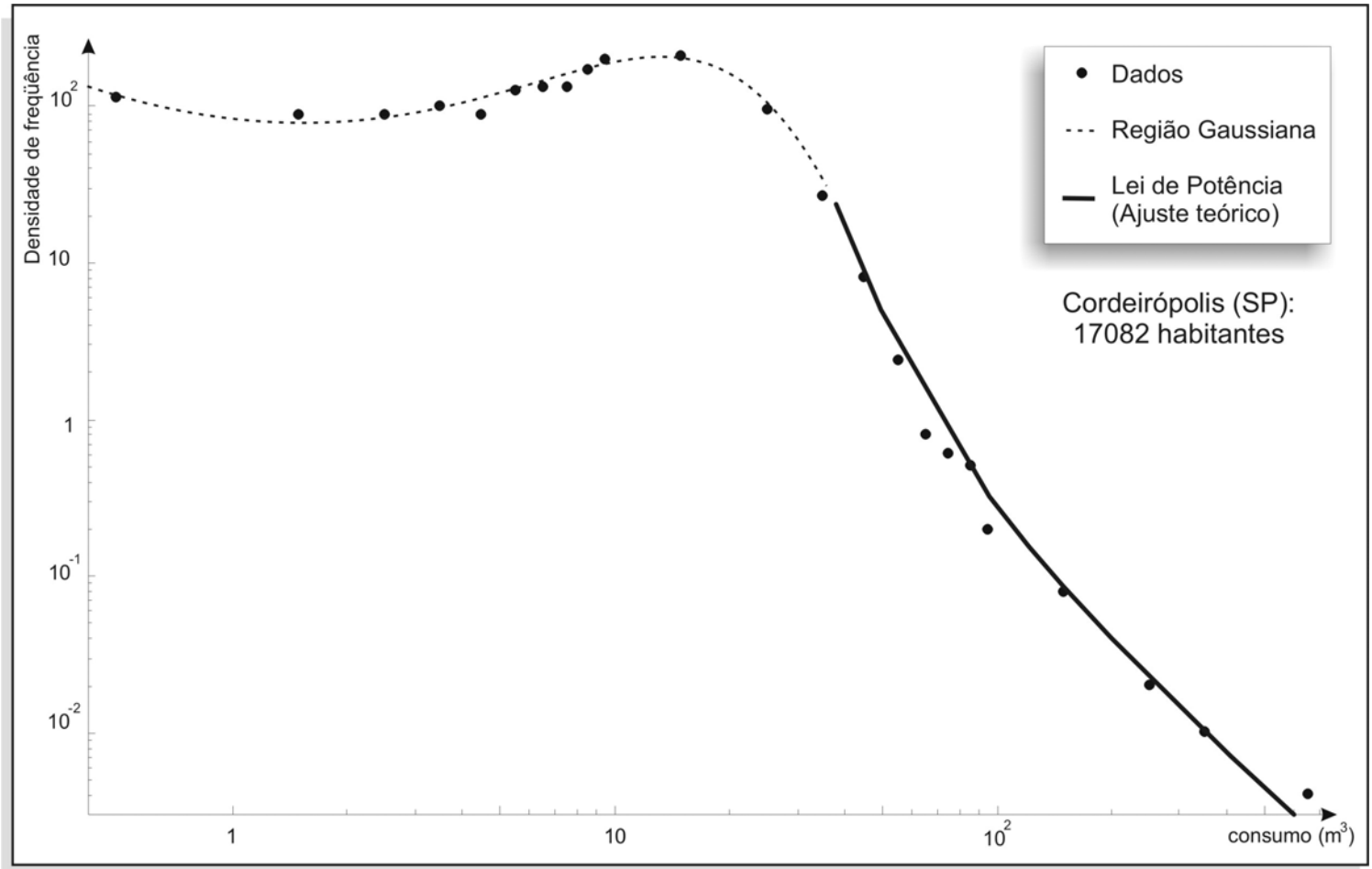


Figura 3.6: Ajuste teórico sobre a distribuição de densidades de frequências de consumo de água em Araras

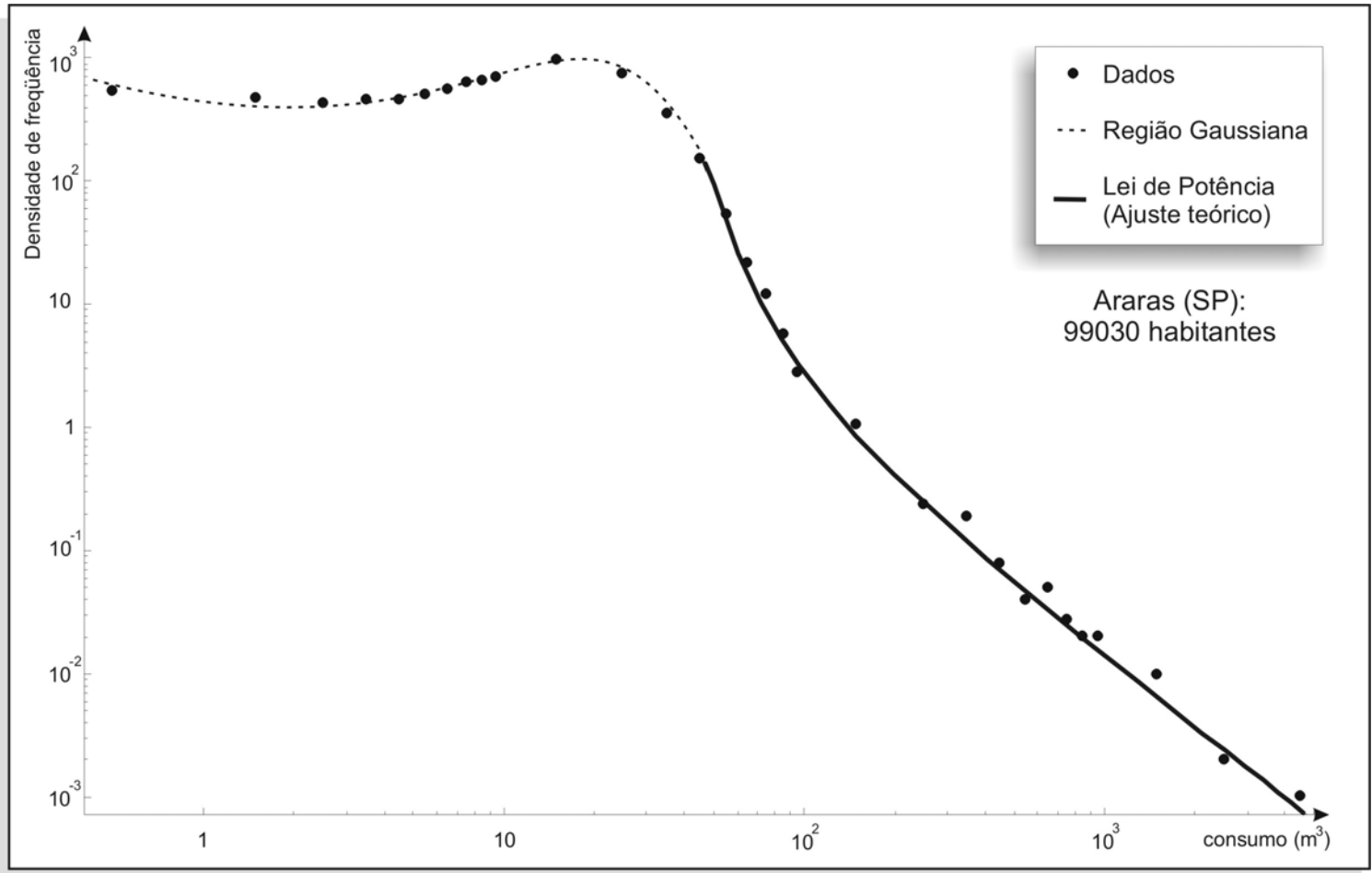




Figura 3.7: Ajuste teórico sobre a distribuição de densidades de frequências de consumo de água em Rio Claro

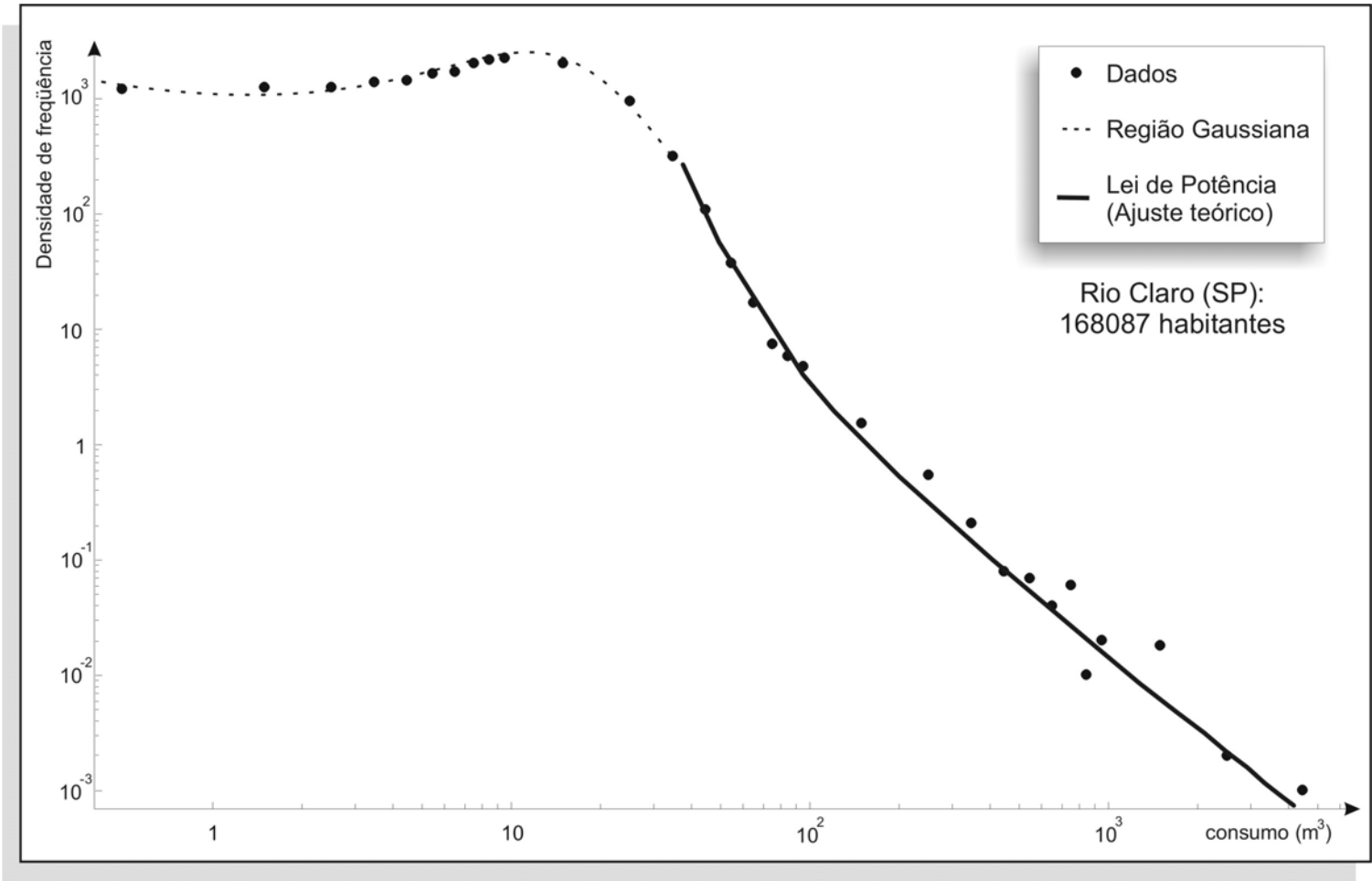
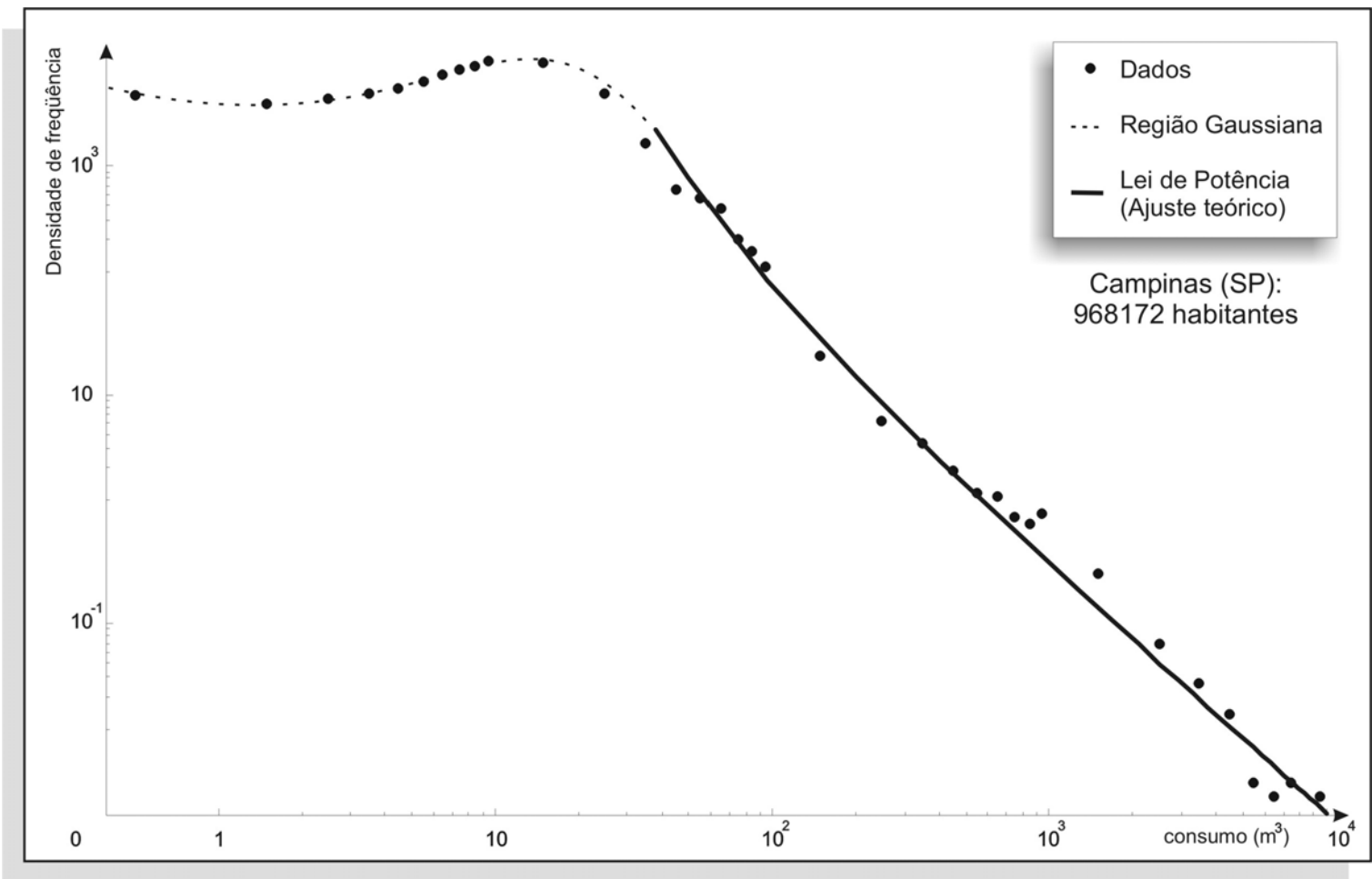


Figura 3.8: Ajuste teórico sobre a distribuição de densidades de frequências de consumo de água em Campinas



Os resultados obtidos pela análise podem ser resumidos na tabela abaixo:

Cidade	Habitantes	Pontos de Consumo	Valor do parâmetro $\alpha$ da equação (3.1)	Valor do parâmetro A da equação (3.1)
Cordeirópolis	17082	5100	$0,96 \pm 0,0977$	66,87
Araras	99030	30000	$1,06 \pm 0,1062$	32,45
Rio Claro	168087	54000	$1,09 \pm 0,0872$	53,56
Campinas	968172	209773	$1,17 \pm 0,0819$	248

Tabela 3.2: Resultados obtidos

Analisando-se os valores do expoente  $\alpha$  da lei de potência versus a população da cidade, observa-se, em escala logarítmica, um aumento linear do valor do expoente (figura 3.9).

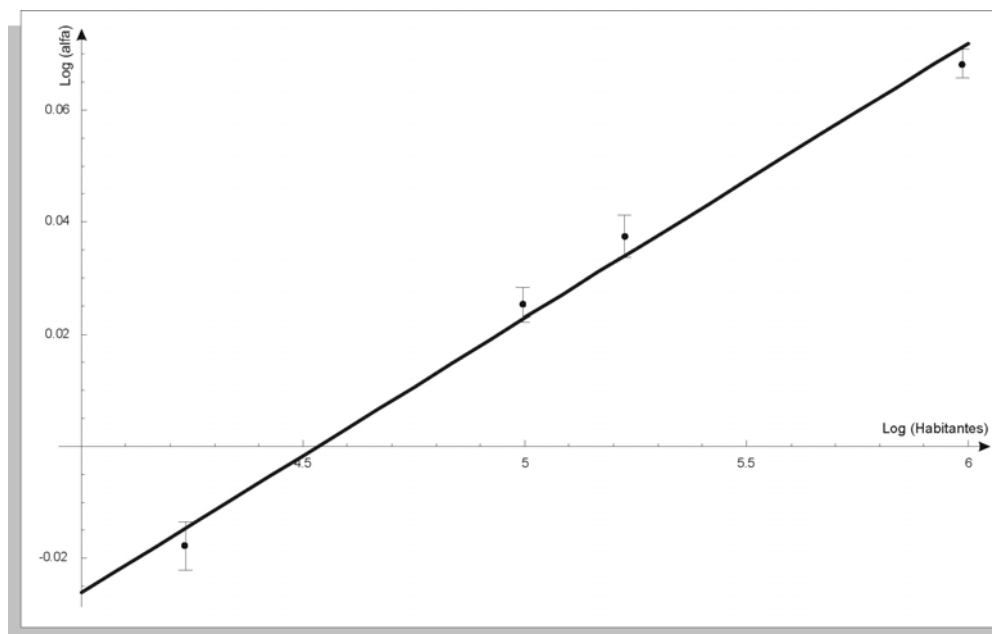


Figura 3.9: Relação entre expoente da lei de potência e número de habitantes

Esta é uma característica de lei de escala que relaciona o valor do expoente  $\alpha$  e a população, podendo ser escrita na forma:

$$\log(\alpha) = K \log(h) + C \quad (3.2)$$

onde  $K$  é o expoente da lei de escala,  $h$  é a população e  $C$  é uma constante.

De acordo com os valores da tabela (3.2) determinou-se<sup>2</sup> os seguintes valores para  $K$  e  $C$ :

$$\begin{aligned} K &= 0.05 \pm 0,27 \\ C &= -0,24 \pm 0,91 \end{aligned} \quad (3.3)$$

---

<sup>2</sup> conforme exemplificado no *notebook* anexo

## **CAPÍTULO 4**

### **Conclusão e trabalhos futuros**

#### **4.1 - Conclusão**

A análise dos dados permite concluir que as distribuições estatísticas de consumo de água em cidades de diversos tamanhos obedecem à distribuição Gaussiana para valores de consumo pequeno (máximo em aproximadamente 18 m<sup>3</sup>) e à Lei de Potência para valores altos. Este fato sugere que neles ocorrem processos de realimentação positiva (GUPTA e CAMPANHA, 2000).

No caso específico de redes de distribuição de água, pode-se sugerir como um dos motivos para este mecanismo de realimentação o fato de que famílias de baixa renda tendem a morar em residências pequenas e, portanto, consomem pouca água. À medida que a renda aumenta, a família - além de uma

residência maior - tende a possuir outros elementos consumidores de água como piscinas, empregados, um número maior de carros para serem lavados e etc. Isto faz com que o consumo *per capita* aumente com função da renda.

Cidades maiores tendem a possuir mais famílias de alta renda e, assim, contribui para o aumento do consumo de água da cidade.

Assim, o fato do grupo populacional que consome determinado valor de água estar dentro de uma faixa de consumo elevado parece proporcionar condições para que este grupo consuma ainda mais, aumentando a probabilidade de se encontrar pontos com valores de consumo ainda mais altos.

Um raciocínio similar pode ser apresentado para os consumidores comerciais (lojas pequenas em cidades pequenas e *Shopping Centers* em cidades maiores, por exemplo) e industriais. Além disso, existem outras interações entre comércio e indústria fortes atraindo a população e, simetricamente, grande concentração populacional atraindo comércios e indústrias.

Confirmando o fato do aumento do consumo *per capita*, a análise dos valores do expoente da lei de potência para as cidades estudadas versus a população correspondente levou à observação de lei de escala entre estes dois parâmetros.

## 4.2 – Trabalhos futuros

Estudos de sistemas complexos em redes de distribuição de água possuem inúmeros pontos muito interessantes para análise mais aprofundada.

Dentre eles, sugere-se:

- O estudo de um maior número de cidades, buscando uma comprovação da aparente relação de lei de escala observada entre o expoente da lei de potência e o número de habitantes;

- O estudo de cidades com populações acima de um milhão e abaixo de 15000 habitantes, no intuito de se verificar possíveis alteração nos valores do expoente da lei de potência;

- A mesma análise, mas utilizando-se pontos de consumo separados por tipo de consumidor (residencial, comercial e industrial, por exemplo);

## Referências Bibliográficas

BAK, P, TANG C, WIESENFELD K.

Phys Rev Letters, **59 (1987) 381** & Phys Rev A **38 (1988) 364**

BAK, P.

**How Nature Works - The Science of Self-Organized.** UK: Oxford, 1997

BERGSTRÖM, H.

**On some Expansions of stable distributions.** Ark. Mathematicae II 18, 375-378, 1952

GALTON, F.

**The Geometric Mean in Vital and Social Statistics.** Proceedings of the Royal Society of London 29, 365-367, 1879

GNEDENKO, B. V.

**On the theory of Domains of attraction of stable laws.** Uchenye Zapiski, Moskov. Gos. Univ. Matematkia 45, 61-72, 1940

GNEDENKO, B. V. and KOLMOGOROV, A. N.

**Limit distributions for sums of independent random variables.** Addison-Wesley, Cambridge, MA, 1954



GOPIKRISHNAN, P. PLEROU, V. AMARAL, L. et al

**Scaling of the distribution of fluctuations of financial market indices.** Physical Review E, v. 60, n° 5, November 1999

GUPTA, H. M. CAMPANHA, J. R.

**Power law distribution in education: University Entrance Examination.** International journal of Modern Physics C, v. 11, n° 6, 1273-1279, 2000. World Scientific Publishing Company.

GUTENBERG, B. RICHTER, C.

**Seismicity of the Earth.** Princeton University Press, 1949

HIGUCHI, T.:

**Relationship between the Fractal dimension and the power law index for a time series: A numerical Investigation.** Physica D 46 (1990) 254-264

IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística –

<http://www.ibge.net/home/estatistica/populacao/censo2000/ufs.php?tipo=31>.

*Página acessada em 23/07/2002.*

KHINTCHINE, A. Y. and LÉVY, P.

**Sur les loi stables.** C.R. Acad. Sci. Paris, 202, 374-376, 1936

KORSAN, R. J.

**Fractals and Time Series Analysis.** The Mathematical Journal. v. 3, Issue 1, 1993.

MANDELBROT, B.

**The Fractal Geometry of Nature.** São Francisco: Freeman, 1982

MANDELBROT, B.

**Fractals and Scaling in Finance.** Selecta Volume E. New York: Springer Verlag, 1997

MANDELBROT, B.

**Multifractals and 1/f Noise: Wild Self-Affinity in Physics.** Springer-verlag, 1999

MANTEGNA, R. STANLEY, H.

**Stochastic Process with Ultraslow Convergence to a Gaussian: The truncated Lévy Flight.** Physical Review Letters. v.73, n° 22, November 1994

MANTEGNA, R.

**An Introduction to Econophysics.** UK: Cambridge Press, 2000

MARQUARDT, D.W.

**Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics,** vol. 11, pp. 431–441, 1963.

MITIC, P. THOMAS P.

**Sampling Distributions for Random Data.** Mathematica in Education and Research, v 4 no.3, 1995

LÉVY, P.

**Calcul des probabilités.** Gauthier-Villars, Paris, 1925

PARETO V.

**Cours d'Economie Politique.** Reprint as a volume. Ouvres Completes. Droz  
Geneur 1896-1965

SHLESINGER, M. F, ZASLAVSKY, G. M. KLAFTER, J.

**Strange Kinetics.** Nature, vol. 363, May 1993

SHLESINGER, M. KLAFTER, J. ZUMOFEN, G.

**Beyond Brownian Motion.** Physics today, February 1996

TSALLIS, C.

**Nonextensive Statistics: Theoretical, Experimental and Computational  
Evidences and Connections.** Brazilian Journal of Physics, v. 29 n° 1, March  
1999

TSALLIS, C.

**As distribuições de Levy.** Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 22, n°2,  
Junho de 2000

UNESCO, PNUD, PNUMA, FAO, OMS, OMM, ONUDI, Banco Mundial e SEI.

**Evaluación General de los Recursos de Agua Dulce del Mundo.** Genebra,  
Organização das Nações Unidas, maio de 1997.

ZIPF, G.K.

**Human Behavior and the Principle of Least Effort.** Addison-Wesley, Reading,  
Mass. 1949.

## Anexo

Listagem do notebook desenvolvido para a análise dos dados de consumo de água das cidades. No exemplo, foram carregados os dados de Campinas.

```

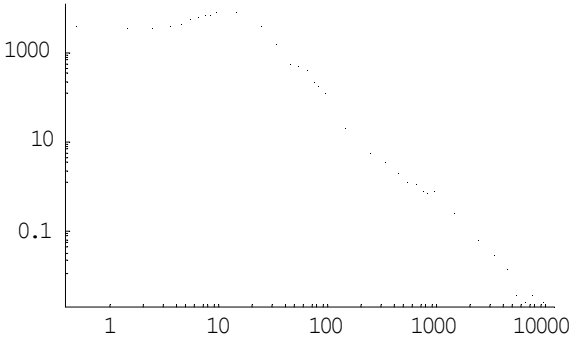
<<Statistics`DataManipulation`
<<Graphics`Graphics`
<<Statistics`NonlinearFit`
<<Graphics`Legend`
<<Graphics`MultipleListPlot`
<<Graphics`Colors`

lista1=ReadList["c:/meus documentos/mestrado/final/campinas.txt"];

ListaBin1 = Transpose[{Range[0.5, 10, 1], BinCounts[lista1, {0, 10,
1}]}];
ListaBin2 = Transpose[{Range[15, 100, 10], BinCounts[lista1, {10, 100,
10}]/10}];
ListaBin3 = Transpose[{Range[150, 1000, 100], BinCounts[lista1, {100,
1000, 100}]/100}];
ListaBin4 = Transpose[{Range[1500, 10000, 1000], BinCounts[lista1, {1000,
10000, 1000}]/1000}];
ListaJunta = DeleteCases[Join[ListaBin1, ListaBin2, ListaBin3, ListaBin4]
, {_, 0}];

Imagem = LogLogListPlot[ListaJunta, PlotJoined -> False, PlotRange ->
All]

```

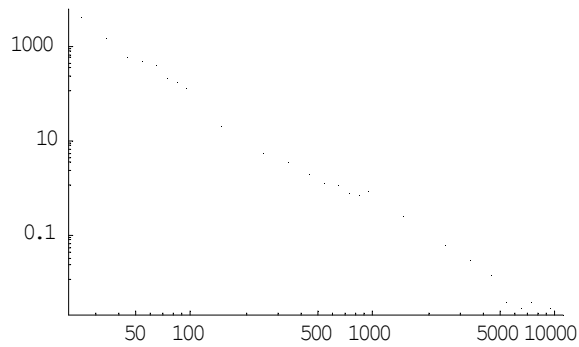


```

Corte = 11;
ListaAjuste = Drop[ListaJunta, Corte];

ImagemPreAjuste = LogLogListPlot[ListaAjuste, PlotJoined -> False,
PlotRange -> All]

```



```

Pxm = ListaAjuste[[1, 2]];
Xm = ListaAjuste[[1, 1]];

Clear [Resultado];
Resultado = NonlinearRegress[Drop[ListaData, 1], AA*Pxm/(AA + (x -
Xm)^(1 + Alfa)),
  x, {AA, Alfa}, RegressionReport -> BestFitParameters,
  ShowProgress -> False, MaxIterations -> 300]
{BestFitParameters -> {AA -> 248.02, Alfa -> 1.17025}}

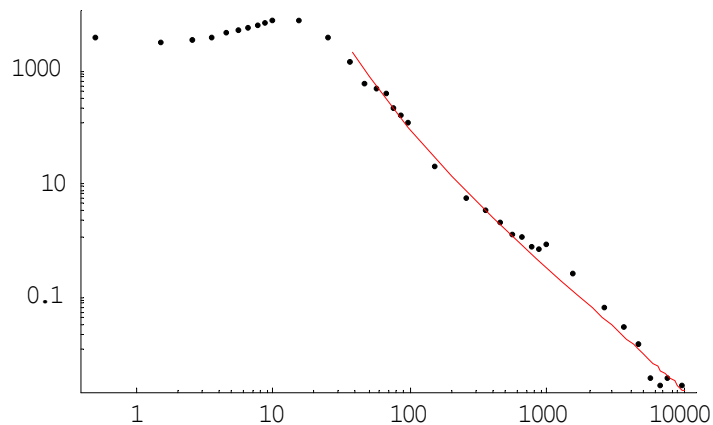
AAA = Resultado[[1, 2, 1, 2]]
AAlfa = Resultado[[1, 2, 2, 2]]

FuncaoAjuste = AAA*Pxm / (AAA + (x - Xm)^(1 + AAlfa));

ImagemAjuste = LogLogPlot[FuncaoAjuste, {x, 1, 10000}, PlotRange -> All,
PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0]];

Show[Imagem, ImagemAjuste]

```



```

Total = 0;
Funcao[x_] := AAA*Pxm / (AAA + (x - Xm)^(1 + AAlfa));

For[i = Corte + 1, i <= Length[ListaData], i++,
  Total = Total + (Funcao[ListaData[[i, 1]]] - ListaAjuste[[i, 2]])^2];

Total = Sqrt[Total/(Length[ListaData] - Corte-1)];

```

Listagem do notebook desenvolvido para a determinação dos parâmetros da Lei de Escala presente na relação entre o expoente  $a$  e o número de habitantes (figura 3.9):

```

Clear[x, y]

Alfas = {Datum[{0.96, 0.0977}], Datum[{1.06, 0.1062}], Datum[{1.09,
0.0872}], Datum[{1.17, 0.0819}]}];

habitantes = {17082, 99030, 168087, 968172};

slope =  $\left\{ \begin{array}{l} \text{NP} \\ \text{NP} \\ \text{NP} \\ \text{NP} \end{array} \right\}$ 

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Log}@10, \text{habitantes}@i\text{DDD} \\ \text{Log}@10, \text{Alfas}@i\text{DDD} \\ \text{Log}@10, \text{habitantes}@i\text{DDD} \\ \text{Log}@10, \text{Alfas}@i\text{DDD} \end{array} \right]_{i=1}^k$$


$$- \left[ \begin{array}{l} \text{Log}@10, \text{habitantes}@i\text{DDD} \\ \text{Log}@10, \text{Alfas}@i\text{DDD} \end{array} \right]_{i=1}^k$$


$$, \left[ \begin{array}{l} \text{Log}@10, \text{habitantes}@i\text{DDD} \\ \text{Log}@10, \text{Alfas}@i\text{DDD} \end{array} \right]_{i=1}^k$$


$$\left\{ \begin{array}{l} \text{NP} \\ \text{NP} \end{array} \right\}$$

Datum[{0.05, 0.27}]

intercept =

$$\left[ \begin{array}{l} \text{NP} \\ \text{NP} \\ \text{NP} \\ \text{NP} \end{array} \right]_{i=1}^k$$


$$\left[ \begin{array}{l} \text{Log}@10, \text{habitantes}@i\text{DDD} \\ \text{Log}@10, \text{habitantes}@i\text{DDD} \\ \text{Log}@10, \text{habitantes}@i\text{DDD} \\ \text{Log}@10, \text{Alfas}@i\text{DDD} \end{array} \right]_{i=1}^k$$


$$- \left[ \begin{array}{l} \text{Log}@10, \text{Alfas}@i\text{DDD} \\ \text{Log}@10, \text{Alfas}@i\text{DDD} \end{array} \right]_{i=1}^k$$


$$, \left[ \begin{array}{l} \text{Log}@10, \text{habitantes}@i\text{DDD} \\ \text{Log}@10, \text{Alfas}@i\text{DDD} \end{array} \right]_{i=1}^k$$


$$\left\{ \begin{array}{l} \text{NP} \\ \text{NP} \end{array} \right\}$$


$$\left[ \begin{array}{l} \text{NP} \\ \text{NP} \end{array} \right]_{i=1}^k$$


$$\left[ \begin{array}{l} \text{Log}@10, \text{habitantes}@i\text{DDD}^2 \\ \text{Log}@10, \text{habitantes}@i\text{DDD}^2 \end{array} \right]_{i=1}^k$$

Datum[{-0.24, 0.91}]

```