

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Departamento de Física

Campus de Rio Claro

**Estimativa do Expoente de Hurst, por meio da Transformada Wavelet, de
Séries Temporais de Precipitação de Chuvas das Regiões Climáticas do
Estado de São Paulo no período de 1978 a 1997.**

Luiz Roberto Salomão

Orientador: Prof. Dr. José Roberto Campanha

Dissertação de Mestrado elaborada
junto ao Programa de Pós-Graduação
em Física - Área de concentração em
Física Aplicada, para obtenção do
título de Mestre em Física.

Rio Claro (SP)

2006

517.355 Salomão, Luiz Roberto

S173e Estimativa do expoente de Hurst, por meio da transformada wavelet, de séries temporais de precipitação de chuvas das regiões climáticas do estado de São Paulo no período de 1978 a 1997 / Luiz Roberto Salomão. – Rio Claro : [s.n.], 2006
110 p. : il., figs., gráfs., tabs., mapas

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: José Roberto Campanha

1. Fourier, Transformações de. 2. Sistema complexo. 3. Dimensão fractal. 4. Persistência e antipersistência. 5. Movimento browniano fracionário. 6. Espectro de potência wavelet. 7. Fourier, Transformada de. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI – Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Departamento de Física

Campus de Rio Claro

Estimativa do Expoente de Hurst, por meio da Transformada Wavelet, de Séries Temporais de Precipitação de Chuvas das Regiões Climáticas do Estado de São Paulo no período de 1978 a 1997.

Aluno: Luiz Roberto Salomão

Orientador: Prof. Dr. José Roberto Campanha

Comissão Examinadora

Prof. Dr. José Roberto Campanha - Orientador
IGCE/UNESP/Rio Claro

Prof. Dr. Hari Mohan Gupta
IGCE/UNESP/Rio Claro

Prof. Dr. Roberto Nicolau Onody
IFSC/USP/São Carlos

Rio Claro, 26 de outubro de 2006.

Resultado: Aprovado.

A minha esposa Sueli e a meus filhos Rafael e Maria Carolina.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. José Roberto Campanha pela atenção, dedicação e paciência que sempre marcou a sua orientação e pela amizade que permitiu que este trabalho fosse realizado de forma agradável.

Aos Prof. Dr. Hari Mohan Gupta e Prof. Dr. Roberto Nicolau Onody pelas sugestões que permitiram o aprimoramento deste trabalho.

Aos professores e funcionários do Departamento de Física do Instituto de Geociências pela amizade e carinho com que me receberam.

Aos amigos da Academia da Força Aérea pelo incentivo.

Aos companheiros de estudo Rosana, Natale, Luciano e Shinaider pela colaboração e apoio.

A minha esposa por suportar com amor e carinho todas as minhas manias.

A todos muito obrigado.

SUMÁRIO

Índice	vi
Índice de figuras	viii
Índice de tabelas	xii
Resumo	xiii
Abstract	xiv

ÍNDICE

CAPÍTULO 1	01
Objetivo	01
1.1 - Introdução	02
1.2 - Características climáticas do estado de São Paulo	04
CAPÍTULO 2	10
2.1 - Série de Fourier	10
2.2 - Integral de Fourier	11
2.3 - Transformada de Fourier	12
2.4 - Transformada wavelet	17
2.5 - Escala e Deslocamento	18
2.6 - Tipos de wavelet (mais comuns)	20
2.7 - Aplicação da transformada wavelet	23
CAPÍTULO 3	28
3.1 - Fractais	28
3.2 - Dimensão	30
3.3 - Poeira de Cantor	31
3.4 - Triângulo de Sierpinsky	33
3.5 - Contagem de caixas	33
3.6 - Expoente de Hurst	34
3.7 - Auto-Afinidade	40
3.8 - Estimativa de H para série temporal auto-afim	42

CAPÍTULO 4	44
4.1 - Validade do expoente de Hurst estimado por wavelet.....	45
4.2 - Expoente de Hurst e o tamanho da série temporal	52
4.3 - Ausência de medições em séries temporais de precipitação de chuvas	54
4.4 - Escolha da wavelet mais adequada para estimar o expoente de Hurst.....	65
CAPÍTULO 5	67
5.1 - Obtenção e tratamento dos dados pluviométricos.....	67
5.2 - Estimativa do expoente de Hurst para cada série de precipitação.....	68
5.3 - Séries com os períodos seco e úmido bem definidos	79
5.4 - Espectro de potência wavelet para as séries temporais de chuva.....	81
CAPÍTULO 6	89
Referências Bibliográficas	93
Apêndice I	100
Apêndice II	101
Apêndice III	102
Apêndice IV	103
Apêndice V	105
Apêndice VI	106
Apêndice VII	108

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 -	Mapa do estado de São Paulo com as regiões climáticas (MONTEIRO, 1973).	06
Figura 2.1 -	Gráfico da função $f_1(t)$ para valores de t próximos de 5.	13
Figura 2.2 -	Gráfico da função $f_2(t)$ para valores de t próximos de 5.	14
Figura 2.3 -	a) Gráfico da transformada de Fourier da função f_1 . b) Gráfico da transformada de Fourier da função f_2 .	14
Figura 2.4 -	Esquema simplificado de janelamento.	16
Figura 2.5 -	Deslocamento da wavelet "chapéu mexicano".	19
Figura 2.6 -	Mudanças de escala para a wavelet "chapéu mexicano".	19
Figura 2.7 -	Escalogramas das transformadas wavelet das funções f_1 e f_2 em função da escala.	25
Figura 2.8 -	Escalogramas das transformadas wavelet das funções f_1 e f_2 em função da frequência.	26
Figura 2.9 -	a) Espectro de potência em função do período para a função f_1 . b) Espectro de potência em função do período para a função f_2 .	27
Figura 3.1 -	Possível linha costeira de um país em três escalas diferentes.	29
Figura 3.2 -	Representação da escala para um segmento de reta (a), para uma figura plana (b) e para um sólido (c).	31
Figura 3.3 -	Representação do conjunto poeira de Cantor	32
Figura 3.4 -	Cálculo da dimensão da figura poeira de Cantor.	32
Figura 3.5 -	Representação do triângulo de Sierpinsky.	33
Figura 3.6 -	Quadriculado com caixas de lado δ cobrindo a figura que se quer calcular a dimensão fractal	34

Figura 3.7 -	Esquema de um reservatório de água (FEDER, 1989).	36
Figura 3.8 -	Exemplos de movimento browniano fracionário gerado pelo algoritmo de Joachim Johansson (Apêndice III).	38
Figura 3.9 -	Variação da correlação de um movimento browniano fracionário em função do expoente de Hurst.	39
Figura 3.10 -	Quadriculado usado para cálculo da dimensão fractal de processo auto-afim.	41
Figura 4.1 -	Gráfico com os primeiros passos do algoritmo mpdwalk.	46
Figura 4.2 -	Gráficos de chuva cumulativa dos desvios da média e série fbm gerada com o mesmo H que a série de chuva.	48
Figura 4.3 -	a) Desvios da média e histograma para uma série de chuva com média 0, e variância 0,010. b) Desvios da média e histograma para uma série de fbm com média 0 e variância 0,058.	48
Figura 4.4 -	Gráficos mostrando o valor médio estimado do expoente de Hurst para séries de movimento browniano obtidas por meio de quatro tipos de geradores de movimento browniano fracionário.	51
Figura 4.5 -	a) Gráfico do valor médio de H para cem séries com número de elementos entre 10 e 500. b) Gráfico do valor médio de H para cem séries com número de elementos entre 500 e 8192.	53
Figura 4.6 -	a) Gráfico de precipitação de chuvas no município de Pilar do Sul, posto Usina Batista no período de 01/01/1978 a 31/12/1997 (E4028). b) Gráfico da soma cumulativa dos dados de precipitação de chuvas da série E4028 (corrigidos pela média e pela reta que passa no primeiro e último ponto).	56

- Figura 4.7 - a) Medidas substituídas em posições aleatórias.
b) Medidas substituídas seguidamente a partir da posição 2796 no sentido do final da série.
c) Medidas substituídas seguidamente a partir da posição 5973 no sentido do início da série. 59
- Figura 4.8 - a) Gráfico de precipitação de chuvas do município de Cananéia, posto Morro Redondo (G5002).
b) Gráfico de precipitação de chuvas do município de Eldorado, posto Ouro Leve (F5020).
c) Gráfico de H com o número de elementos usados para o cálculo da média (G5002).
d) Gráfico de H com o número de elementos usados para o cálculo da média (F5020). 61
- Figura 4.9 - a) Medidas retiradas em posições aleatórias
b) Medidas retiradas seguidamente a partir da posição 5973 em direção ao início da série 64
- Figura 4.10 - Valor médio do expoente de Hurst em função da wavelet usada para estimá-lo. 65
- Figura 5.1 - a) Gráfico de uma série temporal de precipitação de chuvas.
b) Gráfico de uma série temporal de precipitação de chuvas corrigida pela média. Para esta série a média das precipitações considerando os 20 anos é de 3,6260 mm e temos 5491 dias com precipitação zero. 69
- Figura 5.2 - a) Gráfico da soma cumulativa de uma série temporal de precipitação de chuvas.
b) Gráfico da soma cumulativa de uma série temporal de precipitação de chuvas corrigida pela reta que passa pelo primeiro e último ponto. 70
- Figura 5.3 - Valor médio de H para cada região e sub-região climática do estado de São Paulo. 78

Figura 5.4 -	a) gráfico de precipitação de chuvas da cidade de Assaré. b) gráfico de precipitação de chuvas da cidade de Cratos.	80
Figura 5.5 -	Espectro de potência de séries de precipitação de chuvas da região climática II (a, b e c).	83
Figura 5.6 -	Espectro de potência de série de precipitação de chuvas da região climática III.	83
Figura 5.7 -	Espectro de potência de séries de precipitação de chuvas da região climática V.	85
Figura 5.8 -	Espectro de potência de série de precipitação de chuvas da região climática VII.	86
Figura 5.9 -	Espectro de potência de séries de precipitação de chuvas da região climática VIII.	87
Figura 5.10 -	Espectro de potência de séries de precipitação de chuvas da região climática IX.	88
Figura VII-1	Iterações da função de dilatação.	109
Figura VII-2	Wavelet Daubechies de ordem 8 construída após oito iterações da função de dilatação.	110

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1.1 -	As regiões climáticas segundo as unidades geomorfológicas (MONTEIRO, 1973)	05
Tabela 1.2 -	Resumo do clima das regiões do estado de São Paulo e as cidades onde foram coletados os dados de chuva.	09
Tabela 4.1 -	Média dos valores do expoente de Hurst estimados por wavelet das séries de movimento browniano fracionário. Com cada algoritmo utilizado para simular fbm foram geradas 100 séries para cada valor de H. Epm é o erro padrão da média (VIEIRA, 1999).	52
Tabela 4.2 -	Valores de H usando a média das medidas anteriores para as ausências de medições.	62
Tabela 4.3 -	Valores de H usando a união dos trechos sem ausências de medições.	64
Tabela 5.1 -	Valores de H para as séries da região climática I	71
Tabela 5.2 -	Valores de H para as séries da região climática II	72
Tabela 5.3 -	Valores de H para as séries da região climática III	73
Tabela 5.4 -	Valores de H para as séries da região climática IV	73
Tabela 5.5 -	Valores de H para as séries da região climática V	74
Tabela 5.6 -	Valores de H para as séries da região climática VI	75
Tabela 5.7 -	Valores de H para as séries da região climática VII	75
Tabela 5.8 -	Valores de H para as séries da região climática VIII	76
Tabela 5.9 -	Valores de H para as séries da região climática IX	77
Tabela 5.10 -	Valores de H para as séries da região nordeste.	80

RESUMO

Este trabalho pode ser separado em duas partes. Na primeira apresentamos, de forma resumida, a natureza fractal das séries de precipitação de chuvas, a estimativa do expoente de Hurst (H), a transformada wavelet, o seu uso na estimativa de H e a comprovação, por meio de testes com séries de movimento browniano fracionário geradas com H estabelecido a priori, que temos um bom método para estimar H com a transformada wavelet. Na segunda parte é feita uma análise das séries temporais de precipitação de chuvas (séries de chuva). As séries de chuvas foram obtidas junto ao Departamento de Águas e Energia Elétrica (DAEE) do estado de São Paulo e são constituídas de medições diárias, em milímetros, da quantidade de chuva em postos meteorológicos distribuídos em todo o estado. Algumas séries apresentam ausências de medições que acabam transformando uma série longa em duas ou mais séries menores. Em função disso foi estabelecido um procedimento que permite aproveitar essas séries com ausências (dias sem medições) para estimar o expoente de Hurst. A partir de considerações climáticas o estado foi dividido em nove regiões. Foram selecionadas séries com 20 anos de registros de chuva (de janeiro de 1978 a dezembro de 1997). Dos valores de H encontrados foi feita uma média para cada região climática do estado de São Paulo.

Palavras chaves: sistema complexo, série temporal, chuva, movimento browniano fracionário, wavelet, expoente de Hurst.

ABSTRACT

This work can be separated into two parts. In the first part is briefly presented the fractal nature of the rain precipitation series, the estimate of the Hurst exponent (H), the wavelet transform, its use in the estimate of H and the evidence, by tests with generated series of fractional brownian motion with H established a priori, that we have a good method to estimate H with wavelet transform. In the second part an analysis of rain precipitation series is made. The rain series had been obtained from the Departamento de Águas e Energia Elétrica (DAEE) of the state of São Paulo and contain daily measurements, in millimeters, of the amount of rain in distributed meteorological stations all over the state. Some series present absences of measurements, transforming a long series into two or more lesser series. A procedure was established, allowing to use these series with absences (days with no measurements) to estimate the Hurst exponent. From climatic considerations the state was divided into nine regions. The regions with rain data over a period of 20 years have been selected as rain series (from january 1978 to december 1997). From the several values of H , we computed an averaged value of H for each climatic regions of the state of São Paulo.

Keywords: complex system, temporal series, rain, fractional Brownian motion, wavelet, Hurst exponent.

CAPÍTULO 1

Objetivo

A análise de séries temporais de precipitação de chuvas tem importância fundamental em termos de previsão meteorológica e também em termos de estabelecer as características do clima de uma determinada região.

Neste trabalho, iremos estimar o expoente de Hurst das séries temporais de precipitação de chuvas das regiões climáticas do estado de São Paulo no período de janeiro de 1978 a dezembro de 1997.

Para a estimativa do expoente de Hurst usaremos o método da transformada wavelet aplicado às séries de precipitação de chuvas. Além disso, discutiremos a precisão do método ao estimar o expoente de Hurst (H), a adequação deste método para a análise de séries de chuvas e o aproveitamento das séries de chuvas com interrupções de suas medidas para a estimativa do expoente de Hurst.

1.1 - Introdução

Na leitura da previsão do tempo em um jornal normalmente estamos interessados na possibilidade de chuva durante o dia. Costumamos ignorar os outros dados presentes, tais como, pressão, temperatura, umidade, ventos, deslocamento de frentes polares e ou continentais entre outras. Na previsão é levada em conta uma série de variáveis atmosféricas, posição geográfica e relevo.

A precipitação de chuvas faz parte de um sistema chamado clima que pela quantidade de variáveis envolvidas e pelo relacionamento não linear entre elas (GLEICK,1990), podemos dizer que se trata de um sistema complexo. De um lado temos uma parte cíclica que apresenta as estações climáticas com o clima se repetindo, com mais ou menos intensidade, todo ano e por outro lado a incerteza do momento em que acontecerão os fenômenos climáticos como, por exemplo, a chuva.

Apesar da aparente aleatoriedade da chuva estudos recentes têm encontrado certa 'ordem' sob a forma de uma invariância de escala, certos padrões de precipitação se repetem, em escala maior ou menor, ao longo de uma série temporal de chuvas. Esta invariância de escala também é encontrada na Geometria Fractal como um dos seus fundamentos (LOVEJOY e MANDELROT, 1985).

As séries temporais de precipitação de chuvas foram estudadas por PETERS, HERTLEIN e CHRISTENSEN, 2002, OLSSON, NIEMCZYNOWICZ e BERNDTSSON, 1993, RODRIGUEZ, ITURBE e DE POWER, 1989, SVENSSON, OLSSON, BERNDTSSON, 1996, que as caracterizaram como um sistema complexo por possuírem propriedades fractais e ou multifractais.

Na natureza encontramos várias estruturas fractais e podemos citar como exemplos as árvores, a folha da samambaia, a linha da costa erodida pela água e pelos ventos e o contorno das nuvens. Os processos temporais também apresentam essa similaridade estatística em várias escalas e temos como exemplo a ocorrência de terremotos, a variação de caudais de rios, o aparecimento de manchas solares e as séries temporais de precipitação de chuvas.

Harold E. Hurst, engenheiro inglês, trabalhou no projeto de construção de uma represa no rio Nilo, a partir de 1906 e um dos seus trabalhos foi determinar como seria a

liberação de água do reservatório para não secar e também não transbordar. Na análise de dados das cheias do rio Nilo, desenvolveu um método estatístico chamado Análise de R/S (HURST, BLACK, SIMAIKA, 1965) que deu origem ao expoente de Hurst.

A estimativa do expoente de Hurst (H) nos fornece informações sobre correlação e persistência (PETERS, 1996), que é um excelente indicador para o caso de séries, como a de precipitação de chuvas, que se situam entre uma série periódica e uma aleatória.

O expoente de Hurst de séries temporais de chuvas descreve a irregularidade ou a aleatoriedade presente na série e também se há ou não efeitos de longo alcance presente, contribuindo, assim, para conhecimento de como serão as séries no futuro e de como o clima está ou não se modificando (BRESLIN e BELWARD, 1999).

Existem vários estimadores do expoente de Hurst, a análise de R/S, método da transformada de Fourier, método variacional, método do periodograma, método da transformada wavelet, entre outros, e cada tem os seus pontos fortes e fracos. Alguns subestimam e outros superestimam o valor de H e existem, também, aqueles que apresentam um erro muito grande. Neste trabalho optamos pelo método da transformada wavelet por apresentar, nos testes feitos (capítulo quatro) com séries de movimento browniano fracionário com o valor de H estabelecido a priori, um bom resultado para todos os valores de H.

As séries temporais analisadas neste trabalho são séries de precipitação de chuvas, resultado de medições em postos meteorológicos distribuídos por todo o estado de São Paulo, fornecidas pelo Departamento de Águas e Energia Elétrica do estado de São Paulo. As séries apresentam medições em períodos diferentes e algumas apresentam ausências de medições por períodos de alguns dias a anos. No capítulo quatro apresentamos um teste para verificar o possível aproveitamento destas séries, com ausências de medições, para a estimativa do expoente de Hurst.

Na escolha das séries de chuva estabelecemos que todas as séries deveriam ser analisadas para um mesmo período de tempo (capítulo cinco), assim todas as séries estariam sob a influência dos mesmos fatores determinantes do clima do estado de São Paulo. Para determinar o tamanho das séries de chuvas a serem analisadas levamos em conta a abundância de séries longas em cada região climática do estado de São Paulo (se o período de medição fosse muito grande o número de séries diminuía rapidamente) e a variação de H em função do número de elementos da série (capítulo quatro).

Ainda no capítulo cinco foi feita uma comparação das séries de chuvas do estado de São Paulo com séries de chuvas do estado do Ceará que apresentam períodos seco e úmido bem definidos e uma análise do espectro de potência wavelet que mostra além do período anual um segundo e terceiro períodos em algumas séries.

1.2 - Características climáticas do estado de São Paulo

O estado de São Paulo localiza-se, em termos de clima, entre a zona intertropical, caracterizada pela predominância de massas tropicais e equatoriais, e a zona subtropical controlada pelas massas tropicais e polares. As variações das grandes áreas de circulação de ar, criadas pela rotação da Terra e pela transferência de calor do Equador para os pólos, afetam diretamente o clima no estado.

Esta localização permite segundo MONTEIRO, 1973, separar três climas regionais determinados, principalmente, pela quantidade anual de chuvas: o sudeste e noroeste permanentemente úmidos e o norte com período seco bem definido. Ainda em função da distribuição diária das chuvas as regiões foram subdivididas classificando em nove regiões o clima do estado.

Na figura 1.1 podemos ver a separação em três climas regionais, A₁, A₂ e B, separados pela linha vermelha e as nove regiões, I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII e IX separadas pela linha preta. As regiões aparecem separadas por uma faixa branca, uma vez que, é impossível estabelecer uma linha para a separação do clima. Na tabela 1.1 temos a caracterização das regiões climáticas segundo as unidades geomorfológicas.

Devido ao alto índice pluviométrico existente no território paulista como um todo, as diferenças entre as regiões se reduzem praticamente às variações que ocorrem no período outono-inverno, quando as variações de abastecimento e atividades das massas polares são maiores. Nos anos em que há grande atividade polar o estado de São Paulo recebe grande quantidade de chuva e quando há pouca atividade polar os sistemas intertropicais se sobressaem e os períodos secos são maiores.

A Frente Polar Atlântica é a principal causadora das chuvas no território paulista e a sua oscilação do rio do Prata até próximo ao Equador é que determina o tamanho dos períodos de seca e chuva (PEREIRA JUNIOR e CHRISTOFOLETTI, 2003).

Na tabela 1.2 apresentamos um resumo do clima de cada região e as cidades onde foram coletados os dados de chuva usados neste trabalho.

Climas Zonais	Climas regionais	FEIÇÕES CLIMÁTICAS INDIVIDUALIZADAS NOS CLIMAS REGIONAIS, SEGUNDO AS UNIDADES GEOMORFOLÓGICAS					
		Litoral	Planalto Atlântico	Vale do Paraíba	Mantiqueira	Depressão	Planalto Ocidental
Controlados por massas equatoriais e tropicais	Climas úmidos das costas expostas às massas T A_1	Norte	I Bacia superior do Paraíba	III Vale do Paraíba	IV Serra (borda do Planalto)		
	Climas tropicais alternadamente secos e úmidos A_2				Contrafortes	V Setor Norte VI "Perceé" do Tietê	Norte Serra de São Carlos VII Serra de Botucatu VIII Oeste
Controlados por massas tropicais e polares	Climas úmidos da face oriental e sub-tropical dos continentes dominado por massa T B	Centro Sul	II Bacia Paulistana Bacia do Paranapanema				IX Sudoeste

Tabela 1.1 As regiões climáticas segundo as unidades geomorfológicas (MONTEIRO, 1973)

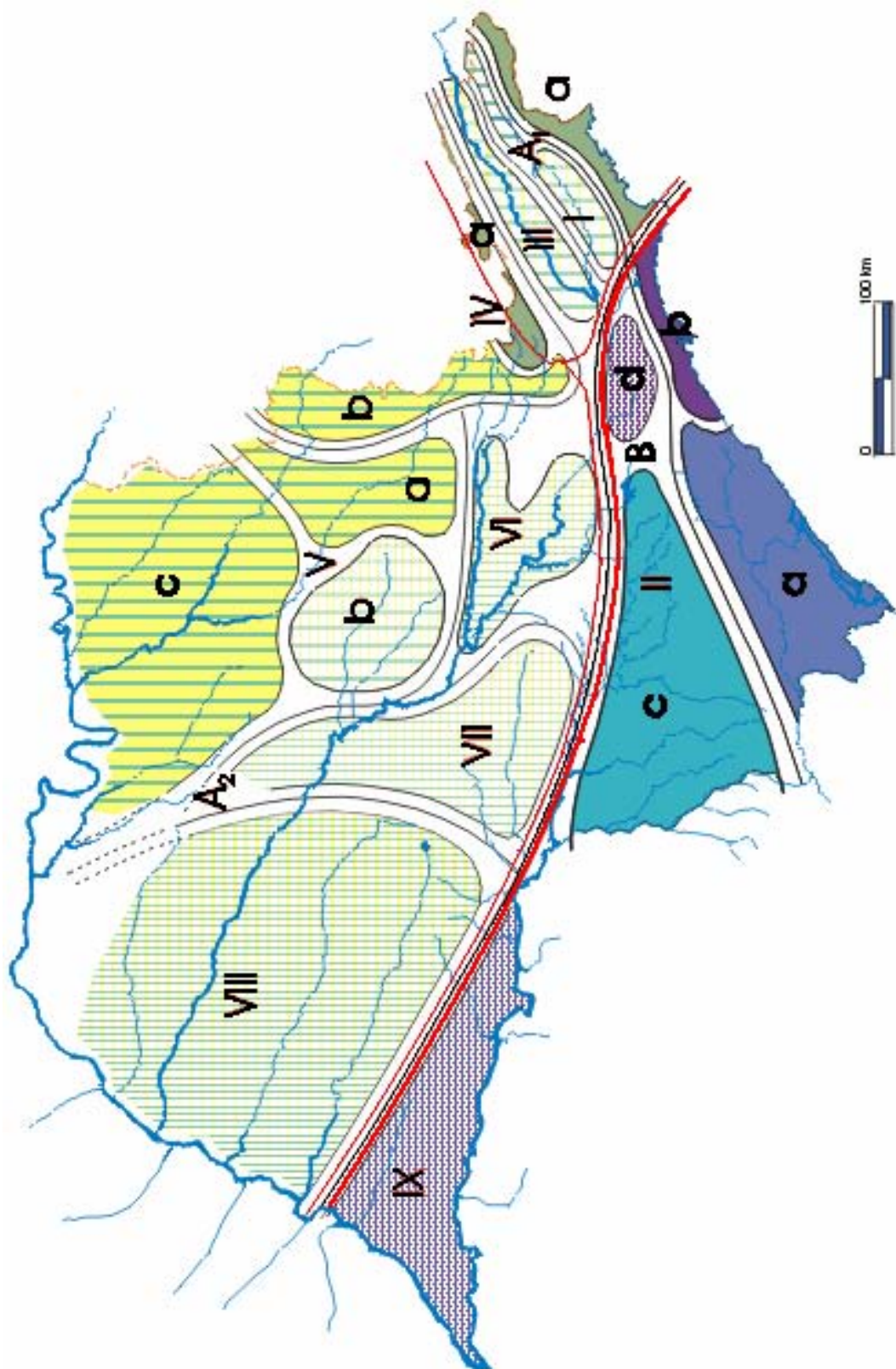


Figura 1.1 Mapa do estado de São Paulo com as regiões climáticas (MONTEIRO, 1973).

TABELA 1.2

Região	Clima	Precipitação anual média (1978 a 1997)
I	<p>LITORAL E PLANALTO ATLÂNTICO NORTE</p> <p>Clima úmido da costa, controlado por massas equatoriais e tropicais, expostas às massas Tropicais Atlânticas.</p> <p>Sub-região I: Cunha (Ferraz), São Luiz do Paraitinga (Catucaba), Natividade da Serra (Laranjal), Natividade da Serra, Paraibuna (Alegre), Natividade da Serra (B. Alto), São Luiz do Paraitinga (Briet) e Cunha (Vargem do Tanque)</p> <p>Sub-região Ia: Ubatuba (Picinguaba), Ilha Bela, São Sebastião (São Francisco), Caraguatatuba (Porto Novo), Ubatuba (Maranduba) e Cunha (Rio Manso).</p>	1620 mm
II	<p>LITORAL E PLANALTO ATLÂNTICO SUL</p> <p>Clima úmido da face oriental e subtropical do continente dominado por massa Tropical e controlado por massas polares.</p> <p>Sub-região IIa: Cananéia (Morro Redondo), Iguape (Momuna), Itariri (B. Igreja), Miracatu (Pedra do Largo), Juquiá (Escalvado), Registro (Jurumirim), Registro, Eldorado, Eldorado (Ouro Leve) e Cajati (Barra do Azeite).</p> <p>Sub-região IIb: Monguaguá, São Vicente, Guarujá (Pereque) e Santos (Caeté).</p> <p>Sub-região IIc: Pilar do Sul (U. Batista), Coronel Macedo, Itapeva, Itararé (B. Boa Vista), Barra do Chapéu, Ribeirão Branco (Pinará), Capão Bonito (F. Santa Inês), São Miguel Arcanjo (Taquaral), Piedade (B. Ribeirão Bonito), Guapiara (B. Pinheiro), Itapeva (Guarizinho), Itapetininga (Eng. Hermilio) e Itapetininga (Gramadinho).</p> <p>Sub-região IId: Mogi das Cruzes (taiacupeba), Mauá, Santo André (Paranapiacaba), São Bernardo do Campo (Rio Acima) e São Paulo (Santo Amaro).</p>	1764 mm
III	<p>O VALE DO PARAÍBA</p> <p>Clima úmido da costa, controlado por massas equatoriais e tropicais, expostas às massas Tropicais Atlânticas.</p> <p>Guararema (Paratei), Jacarei, São José dos Campos (Pararangaba), Caçapava (Quirino), Taubaté (Macuco), Guaratinguetá (Brumado), Silveiras e Lorena</p>	1442 mm

TABELA 1.2 (continuação)

Região	Clima	Precipitação anual média (1978 a 1997)
IV	<p>A MANTIQUEIRA</p> <p>Clima úmido da costa, controlado por massas equatoriais e tropicais, expostas às massas Tropicais Atlânticas.</p> <p>Sub-região IVa: Piracaia (Crioulos), São José dos Campos (Guirra), São José dos Campos (S. F. Xavier), Monteiro Lobato (S. Benedito) e Campos do Jordão (Capivari).</p> <p>Sub-região IVb: Atibaia, Pinhalzinho, Socorro, Lindóia, Aguas de Lindóia, Espírito Santo do Pinhal (U. Pinhal), São João da Boa Vista (F. Paraíso), Aguas da Prata (Fatura), São José do Rio Pardo e Caconde.</p>	1707 mm
V	<p>O CENTRO-NORTE</p> <p>Clima tropical alternadamente seco e úmido, controlado por massas equatoriais e tropicais.</p> <p>Sub-região Va: Mococa (Sitio Esplanada), Santa Rosa do Viterbo (Bom Sucesso), Tambau, Santa Rita do Passa Quatro (Usina), Porto Ferreira, Casa Branca (Venda Branca), Pirassununga (Fernando Costa), Santa Cruz da Conceição (S.S.Geraldo), Leme (Cresciumal), Mogi Guaçu (Capetinga), Rio Claro (F. São José), Santa Gertrudes e Araras (Santa Cruz).</p> <p>Sub-região Vb: Matão, Tabatinga (Araruba), Santa Lucia, Araraquara (Chibarro), Bocaina, Ribeirão Bonito, Brotas (Campo Redondo), Itirapina e Torrinha (U. Três Saltos).</p> <p>Sub-região Vc: Icem, Colombia (F. Campo Grande), Guaira (F. Antas), Ituverava, Pedregulho (Alto do Lajeado), Itirapuá, Sales de Oliveira (F. Conquista), Morro Agudo, Colina, Olímpia (F. Cruz Alta), Novais, Monte Alto, Sertãozinho (U. Sta Elisa) e Altinópolis (Aguas Virtuosas).</p>	1525 mm
VI	<p>A PERCÈE⁽¹⁾ DO TIETE</p> <p>Clima tropical alternadamente seco e úmido, controlado por massas equatoriais e tropicais.</p> <p>Anhembi, Itu (Pirapitingui), Mairinque (D. Catarina), Boituva, Laranjal Paulista, Capivari, Rio das Pedras e Campinas.</p>	1361 mm

(1) Caminho natural (FREIRE, 1900, CORRÊA & STEINBERG, 1980).

TABELA 1.2 (continuação)

Região	Clima	Precipitação anual média (1978 a 1997)
VII	<p>A SERRA DE BOTUCATU</p> <p>Clima tropical alternadamente seco e úmido, controlado por massas equatoriais e tropicais.</p> <p>Aguas de Santa Bárbara, Itatinga (Lobo), Bauru, Iacanga (F. Barreirinho), Borborema (F. Ano Bom do Tiete), Borborema (F. Laranjal), Santa Cruz do Rio Pardo (Sodrelia), Avaré (F. Sta Gabriela), Paulistânia, Pardinho, Lençóis Paulista (Gleba Rio Claro), Novo Horizonte (F. Uirapuru), Avaré, Agudos e Reginópolis.</p>	1422 mm
Região	Clima	Precipitação anual média (1978 a 1997)
VIII	<p>O OESTE</p> <p>Clima tropical alternadamente seco e úmido, controlado por massas equatoriais e tropicais.</p> <p>Andradina, Alto Alegre, Andradina (Três Irmãos), Auriflama, Brauna (F. N.S. Aparecida), Floreal, Flórida Paulista (F. Sto André), Gastão Vidigal, Itapura, Jales, José Bonifácio, Marília (Dirceu), Marília (Amadeu Amaral), Mirandópolis (Yuba), Muritinga do Sul (F. Boa Vista), Osvaldo Cruz, Panorama, Pereira Barreto (Ideal), Planalto (São Jerônimo), Pontalinda, Rubiacéia (Caramuru), Santa Fé do Sul, Sud Mennucci, Tupã (Varpa), Tupã, Turiuba, Ubarana (F. cataco) e Valparaíso (Perpetuo Socorro).</p>	1317 mm
IX	<p>O SUDOESTE</p> <p>Clima úmido da face oriental e subtropical do continente dominado por massa Tropical e controlado por massas polares.</p> <p>Presidente Epitácio (Sul Mineira), Maracai (B. Agua do Mato), Mirante do Paranapanema, Marabá Paulista, Santo Anastácio (F. Santa Isabel), Narandiba, Presidente Venceslau (F. Clotilde), Iepe (Jaguarete), Rosana (Itaporã), Teodoro Sampaio (Santaida), Teodoro Sampaio, Rosana (Nova do Pontal), Presidente Epitácio (Sucurita), Florinea e Candido Mota (F. Sta Rosa).</p>	1332 mm

Tabela 1.2 - Resumo do clima das regiões do estado de São Paulo e as cidades onde foram coletados os dados de chuva..

CAPÍTULO 2

ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS

Neste capítulo pretende-se fazer uma breve introdução à análise de séries temporais baseando-se em transformada de Fourier e transformada wavelet.

2.1 - Série de Fourier

Joseph Fourier, em 1807, estabeleceu que se uma função $f(x)$ for periódica de período $2L$, definida entre $-L$ e $+L$, com $x \in \mathbb{R}$, ela pode ser expressa por meio de uma soma de funções trigonométricas senos e cossenos. Define-se série de Fourier de $f(x)$, segundo TOLSTOV (1962) e MORETTIN (1999), como:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \quad (2.1)$$

onde

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Os valores de a_n e b_n determinam a contribuição de cada seno e cosseno da série na representação de $f(x)$.

2.2 - Integral de Fourier

Na representação de $f(t)$ por meio da série de Fourier (equação 2.1), se o período da função tende a infinito, a série de Fourier se torna a integral de Fourier (SPIEGEL, 1976).

Considerando que $f(t)$ e $f'(t)$ são seccionalmente contínuas e $f(t)$ é absolutamente integrável em $(-\infty, \infty)$, o teorema da integral de Fourier afirma que uma função $f(x)$ pode se expandida em integrais de senos e cossenos:

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(\alpha) \cos(\alpha x) + B(\alpha) \sin(\alpha x)] d\alpha$$

onde
$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx$$

Aqui A e B são funções que medem a contribuição dos cossenos e senos para a representação de $f(x)$.

A integral de Fourier pode ser colocada em outras formas

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha=0}^{\infty} \int_{u=-\infty}^{\infty} f(u) \cos[\alpha(x-u)] du d\alpha$$

ou usando a fórmula de Euler $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\alpha(x-u)} du d\alpha$$

ou

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\alpha u} du \quad (2.2)$$

A segunda integral da equação 2.2 é uma função de α e será integrada juntamente com a $f(x)$ de menos a mais infinito. Os valores de α é que definem o argumento das funções seno e cosseno.

2.3 - Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é definida (TOLSTOV, 1999) por:

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\alpha u} du \quad (2.3)$$

e a transformada inversa por:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha \quad (2.4)$$

A transformada de Fourier separa o sinal em suas componentes (senos e cossenos) de diferentes frequências. Podemos também entender a transformada como uma ferramenta matemática para transportar o sinal observado no tempo ou espaço para o domínio da frequência.

Em muitas situações não conhecemos a função matemática que representa o resultado de uma série de medidas. O que temos, na realidade, são registros discretos de um determinado fenômeno $f(t)$ do tipo $f_0, f_1, f_2, \dots, f_{N-1}$, com N observações amostradas em intervalos de tempo Δt , durante um período T . Define-se a transformada de Fourier discreta como

$$F_n = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} f_t e^{-i\omega_n t} \quad (2.5)$$

e a transformada inversa por

$$f_t = \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i\omega_n t} \quad (2.6)$$

com $\omega_n = \frac{2\pi n}{N\Delta t}$.

O número de operações computacionais para o cálculo da transformada de Fourier discreta ou sua inversa, a partir das equações 2.5 e 2.6, é da ordem de N^2 . Isto se torna um problema quando o N é muito grande. COOLEY e TUKEY, 1965, desenvolveram um algoritmo chamado de FFT (Fast Fourier Transform) que reduz o número de operações para $N\log_2 N$.

Como um exemplo, consideremos duas funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$ dadas pelas expressões abaixo;

$$f_1 = \text{sen}(2\pi 10t) \text{ para } t < 5 \quad \text{e} \quad f_1 = \text{sen}(2\pi 30t) \text{ para } t \geq 5$$

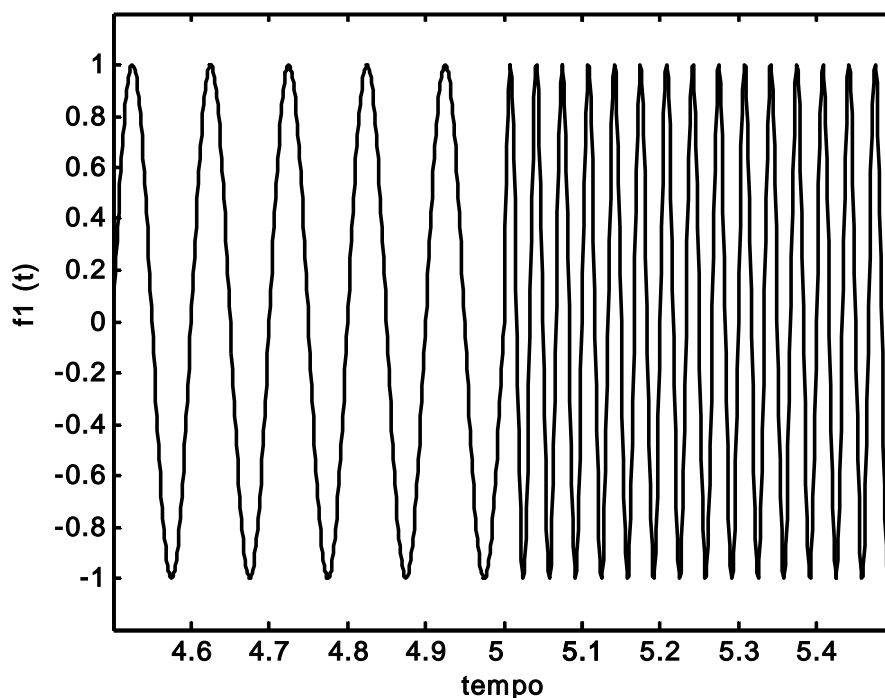


Figura 2.1 - Gráfico da função $f_1(t)$ para valores de t próximos de 5.

e

$$f_2 = \text{sen}(2\pi 10t) + \text{sen}(2\pi 30t) \quad \text{para qualquer } t$$

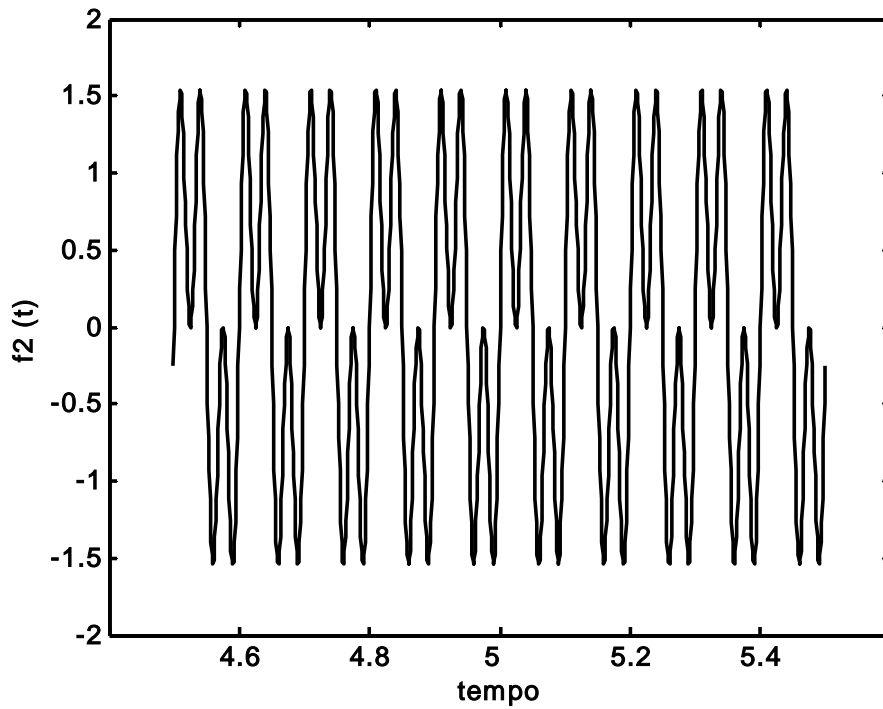


Figura 2.2 - Gráfico da função $f_2(t)$ para valores de t próximos de 5.

Aplicando a definição da transformada rápida de Fourier (equação 2.5) para as funções f_1 e f_2 obtemos os gráficos

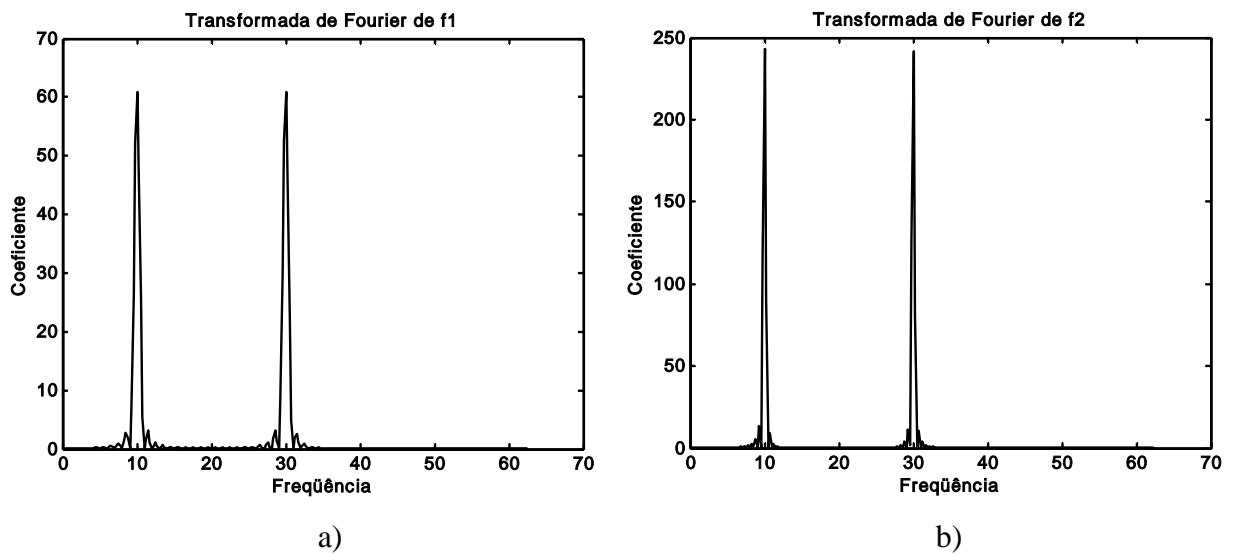


Figura 2.3 - a) Gráfico da transformada de Fourier da função f_1 .

b) Gráfico da transformada de Fourier da função f_2 .

Praticamente não há diferença entre os gráficos da transformada de Fourier das funções f_1 e f_2 . Nos dois gráficos os picos estão em 10 e 30, exatamente os valores usados para a construção das funções f_1 e f_2 . Para algumas situações, por exemplo, em sinais estacionários, a transformada de Fourier representa uma grande informação que é a frequência da onda. As funções f_1 e f_2 são compostas de combinações diferentes de senos com frequências numericamente iguais a 10 e 30 e por meio dos gráficos presentes na *figura 2.3*, não há como identificar onde estão ocorrendo as variações da frequência ao longo do tempo. Aplicando-se a transformada de Fourier a um sinal encontramos as frequências presentes, mas sem relação com o tempo ou espaço. Este é o maior problema da transformada de Fourier.

Na transposição do sinal do domínio do tempo (espaço) para o domínio da frequência perde-se a localização temporal (espacial), ou seja, olhando os coeficientes da transformada de Fourier de um sinal é impossível saber onde determinado evento ocorre.

Para minimizar esse efeito Dennis Gabor (1946) adaptou a Transformada de Fourier para analisar uma pequena porção do sinal. Essa adaptação é chamada de Transformada de Fourier 'janelada' (do inglês short time Fourier transform) - STFT e é definida por KUMAR et All, 1994, como:

$$G f(w, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(u - t) e^{-i w u} du$$

ou

$$G f(w, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g_{w t}(u) e^{-i w u} du \quad (2.7)$$

A transformada inversa é dada por

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G f(w, t) g(u - t) e^{i w u} du dw \quad (2.8)$$

Na equação da transformada de Fourier 'janelada' - STFT - a função g é chamada de função janela e é normalmente uma função real, com $g(0) \neq 0$, que decai rapidamente a zero quando nos afastamos do zero. A função f multiplicada pela função g dá como resultado uma espécie de modulação da função f pela função g e como resultado só temos a onda original nas posições em que g é diferente de zero, como podemos ver na *figura 2.4*.

Após a formação da janela, convolução de $f(x)$ com $g(x)$, aplica-se a transformada de Fourier e o resultado, as frequências encontradas, se referem ao intervalo onde a função $g(x)$ é diferente de zero.

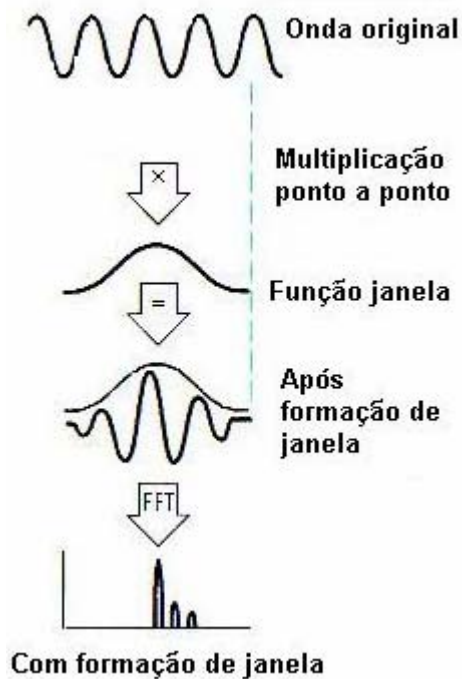


Figura 2.4 - Esquema simplificado de janelamento.

Continuando o processo a função $g(x)$ é deslocada e os passos representados na figura 2.4 são repetidos até que a função janela percorra toda a extensão da função $f(t)$.

Neste processo a mesma janela $g(x)$ percorre todo o sinal independente das variações que ocorrem na função $f(t)$, ou seja, a janela é a mesma para todas as frequências presentes em $f(t)$. Dependendo do tamanho da janela pode-se analisar um espectro de frequência maior ou menor e conseqüentemente localizar com menor ou maior precisão uma determinada frequência.

Quanto maior o tamanho da janela maior a informação sobre a frequência e menor a informação sobre o tempo e vice-versa.

O sucesso deste método depende da escolha da janela $g(x)$. Em alguns casos a escolha de $g(x)$ permite a visualização clara de dado evento e uma escolha diferente da janela faz o evento não aparecer.

O procedimento correto seria fazer várias análises com janelas diferentes o que resultaria em uma quantidade muito grande de gráficos para analisar, além de gastar um tempo enorme em cálculos computacionais.

O próximo passo é trabalhar com janelas de tamanho variável e ao mesmo tempo fazer o deslocamento, o que nos leva à transformada WAVELET.

2.4 - Transformada wavelet

Segundo CHIERECE, 2003, os trabalhos de Alfred Haar, Paul Levey, Alberto Calderon, J. Morlet, Yves Meyer, Stephane Mallat e Ingrid Daubechies formalizaram a transformada wavelet e a sua aplicabilidade, nos mais diversos ramos da ciência, não pára de crescer.

Na análise de Fourier é feita uma decomposição do sinal em funções senos e cossenos com frequências diversas e na análise usando a transformada wavelet a decomposição do sinal é feita por meio da função wavelet que será modificada por meio de dilatações e compressões (uso da escala) e será transladada ao longo de todo sinal. Com isto teremos indicação das frequências presentes no sinal, em que tempo elas ocorrem (informação não fornecida com a transformada de Fourier) e, também, evita a possibilidade de escolha errada da janela na transformada de Gabor.

Segundo DAUBECHIES, 1992, LIMA, 2002, MORETTIN, 1979, podemos definir a transformada wavelet como:

$$C(a;b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{a,b}(t)dt \quad (2.9)$$

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (2.10)$$

onde $\psi(t)$ é a função (wavelet) escolhida para se fazer a análise do sinal $f(t)$. O valor \mathbf{a} é o parâmetro de escala e \mathbf{b} o parâmetro de localização com \mathbf{a} e $\mathbf{b} \in \mathbf{R}$ e $\mathbf{a} \neq 0$. Mudando o valor de \mathbf{a} tem-se o efeito de dilatação ($\mathbf{a} > 1$) ou de contração ($\mathbf{a} < 1$), enquanto que mudanças no parâmetro \mathbf{b} tem o efeito de analisar a função $f(t)$ em torno deste ponto.

A função $\psi(t)$ deve possuir as seguintes características (DAUBECHIES, 1992):

a) satisfazer as condições de normalização

$$\int |\psi(t)|^2 dt = 1$$

b) decair suficientemente rápido para se obter uma boa localização

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt < \infty$$

c) satisfazer a condição de admissibilidade

$$C_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(w)|^2}{|w|} dw < \infty$$

onde $\Psi(w)$ é a transformada de Fourier de $\psi(t)$. Isso é o que garante a transformada wavelet inversa

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(a;b) \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{dadb}{a^2}$$

d) a média ser igual a zero, $\psi(t)$ comporta-se como uma onda (daí o nome wavelet).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

2.5 - Escala e Deslocamento

O deslocamento de uma wavelet tem o mesmo sentido que o janelamento na transformada de Gabor, o deslocamento da função ao longo do sinal.

Matematicamente $\psi(t)$ e $\psi(t-b)$ estão separados por uma distância b . Podemos ver isso na *figura 2.5* onde foi usado $b=1.5$ e a wavelet "Chapéu Mexicano".

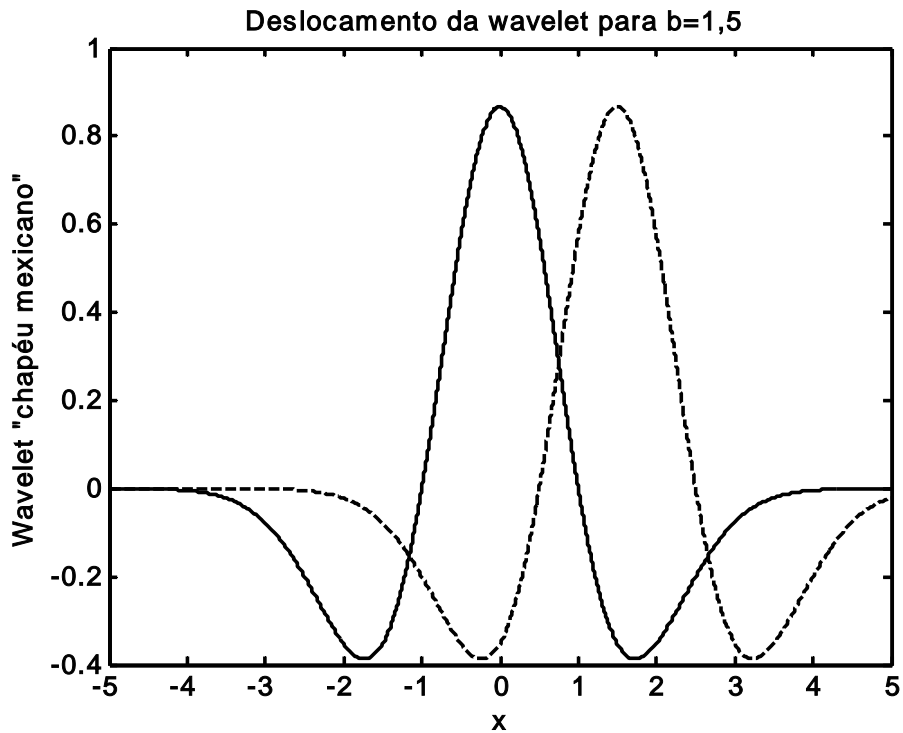


Figura 2.5 - Deslocamento da wavelet "chapéu mexicano".

A escala faz uma dilatação ou uma compressão na wavelet e, como o fator de escala aparece na equação dividindo a variável, fatores de escala menores do que 1 fazem a compressão da wavelet e fatores maiores que 1 fazem a dilatação (figura 2.6).

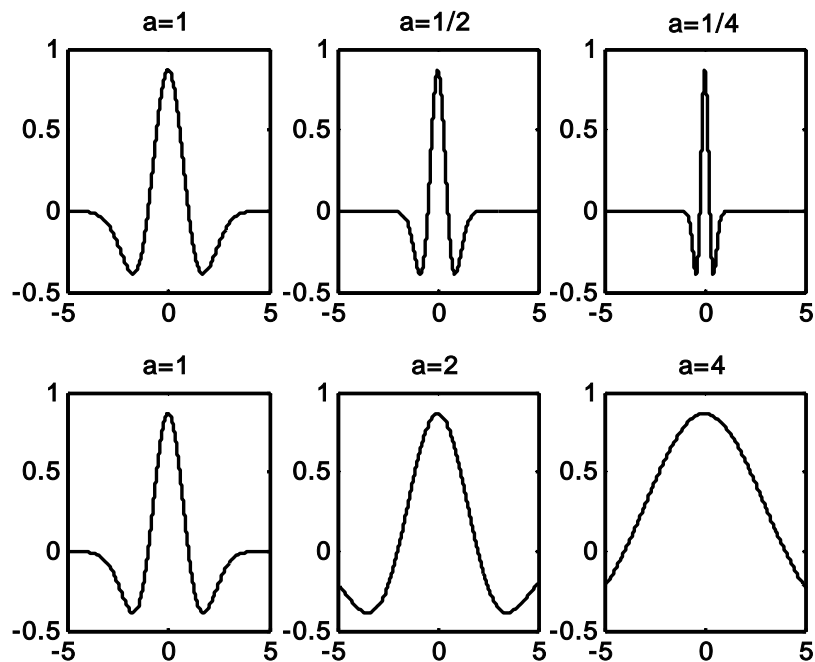


Figura 2.6 - Mudanças de escala para a wavelet "chapéu mexicano".

Com escalas pequenas, wavelets mais comprimidas, estamos comparando com detalhes do sinal que variam rapidamente, ou seja, estamos procurando alta frequência no sinal. Por outro lado, quando trabalhamos com escalas grandes, wavelets mais dilatadas, estamos comparando com detalhes do sinal que variam lentamente, ou seja, estamos procurando baixa frequência.

Os deslocamentos e as mudanças de escala geram novas funções chamadas de wavelet filhas. Na verdade estamos trabalhando com várias funções ortogonais (determinadas pela wavelet "mãe", pela escala e pelo deslocamento) com cada uma cobrindo todo espaço de definição do sinal.

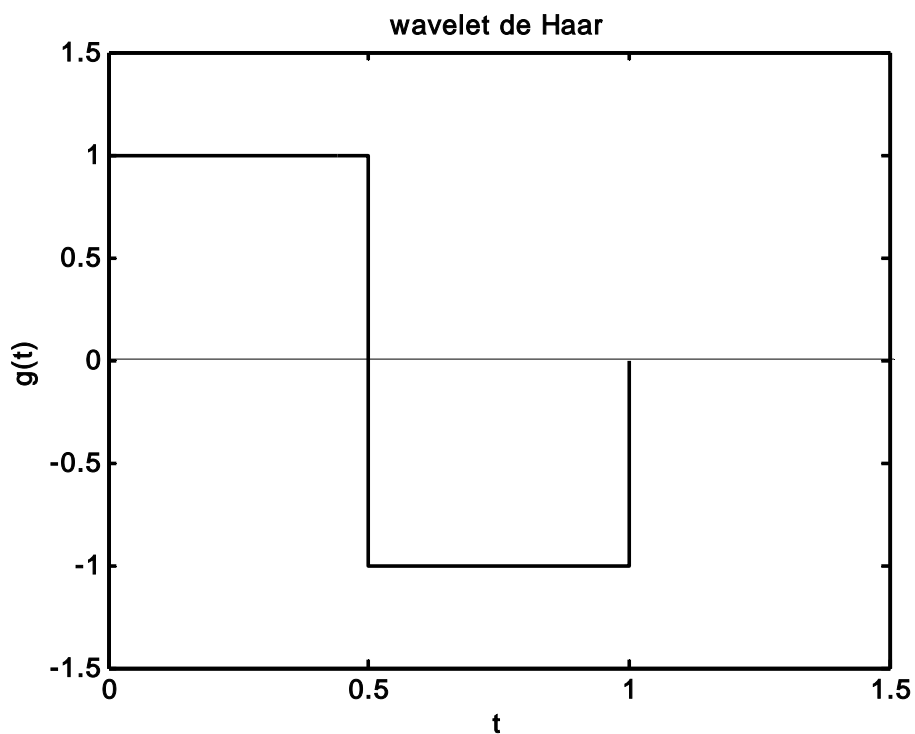
2.6 - Tipos de wavelet (mais comuns)

Wavelet Haar

$$g(t) = 1 \text{ para } 0 \leq t \leq 0,5$$

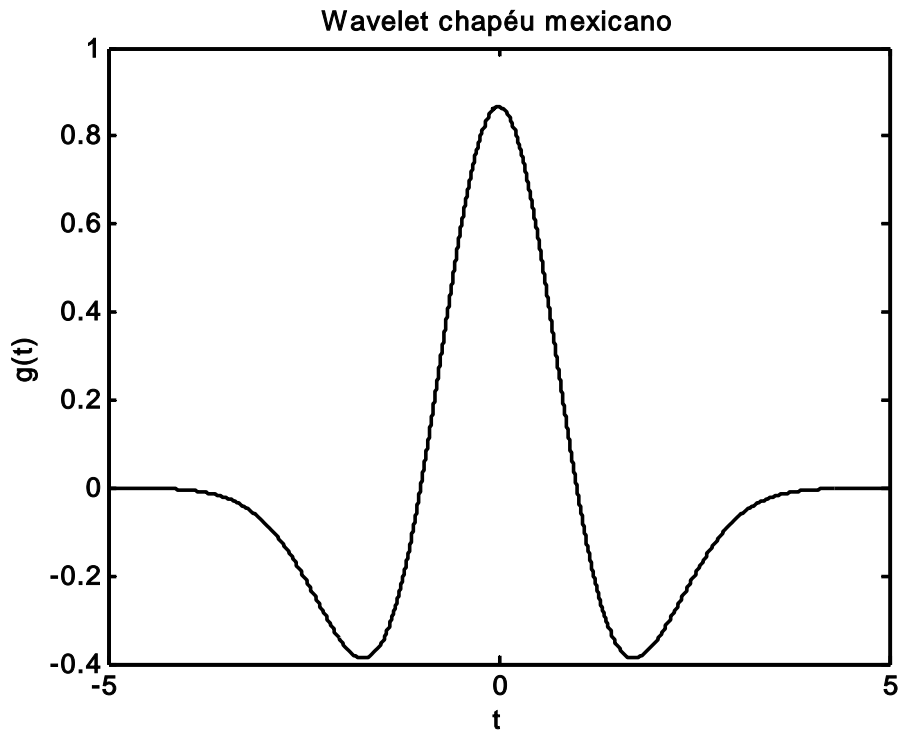
$$g(t) = -1 \text{ para } 0,5 \leq t \leq 1$$

$$g(t) = 0 \text{ para } t > 1 \text{ e } t < 0$$



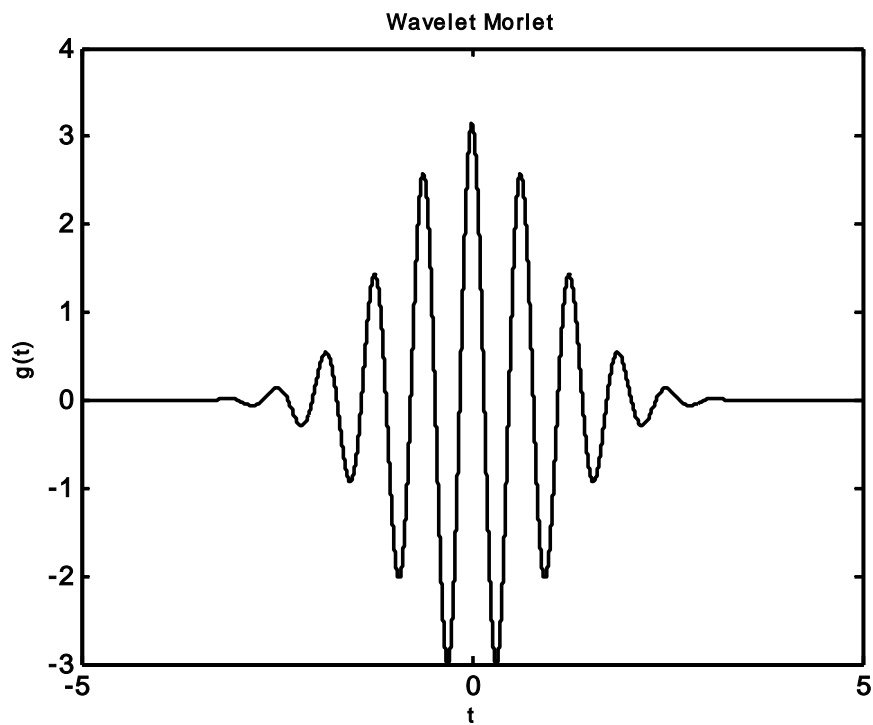
Wavelet Chapéu Mexicano

$$g(t) = (1 - t^2)e^{-t^2/2}$$



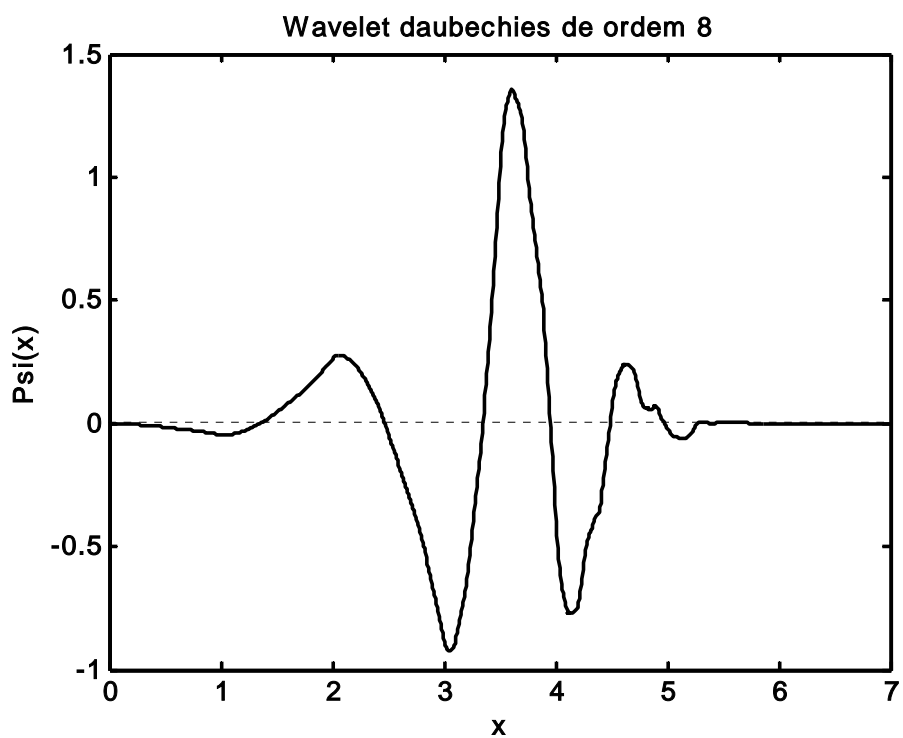
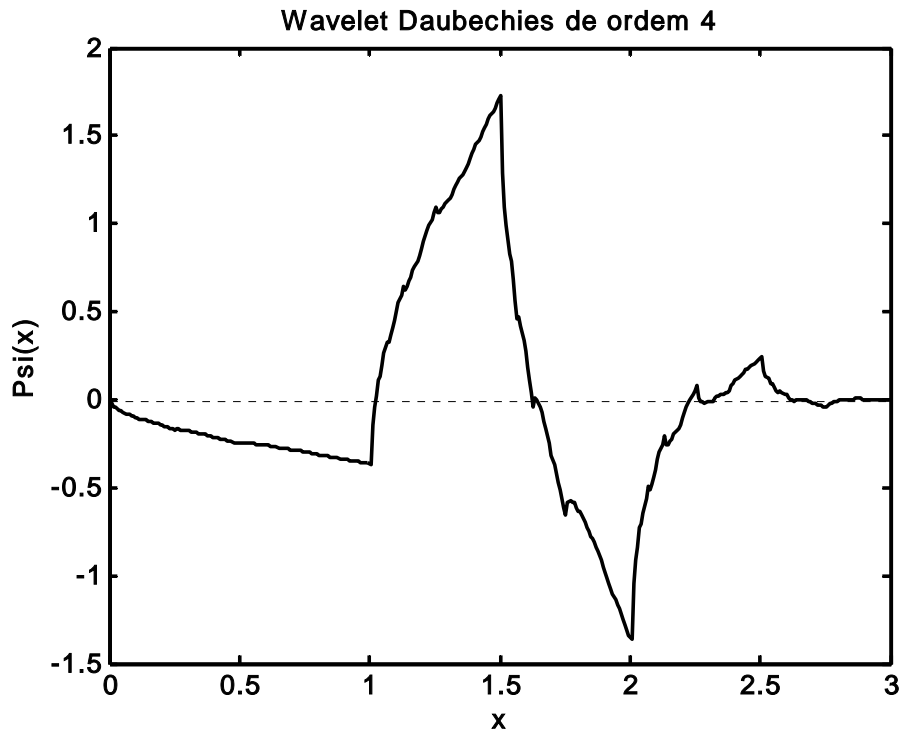
Wavelet Morlet

$$g(t) = e^{i\omega_0 t} e^{-t^2/2}$$



Wavelet Daubechies

A wavelet daubechies é obtida por meio de iterações de uma função de dilatação e no apêndice VII apresentamos, resumidamente, o desenvolvimento matemático e o resultado da aplicação de funções codificadas no software MATLAB para a construção da wavelet Daubechie de ordem 8.



2.7 - Aplicação da transformada wavelet

As equações 2.9 e 2.10 nem sempre podem ser utilizadas diretamente. Em alguns casos conhecemos a função $f(t)$, mas, em outros, não conhecemos a $f(t)$ e temos que fazer a integração numérica, que é o caso de sinais medidos em intervalos de tempo, de qualquer maneira um programa computacional deve ser usado para a aplicação da transformada wavelet.

O programa MATLAB oferece duas possibilidades para a aplicação da transformada wavelet: DWT (do inglês Discret Wavelet Transform) - transformada wavelet discreta e CWT (do inglês Continuous Wavelet Transform) - transformada wavelet contínua. A denominação contínua se refere ao fato da CWT operar com qualquer escala e também pelo fato da wavelet ser deslocada vagarosamente sobre todo o domínio da função (MISIT, 1996).

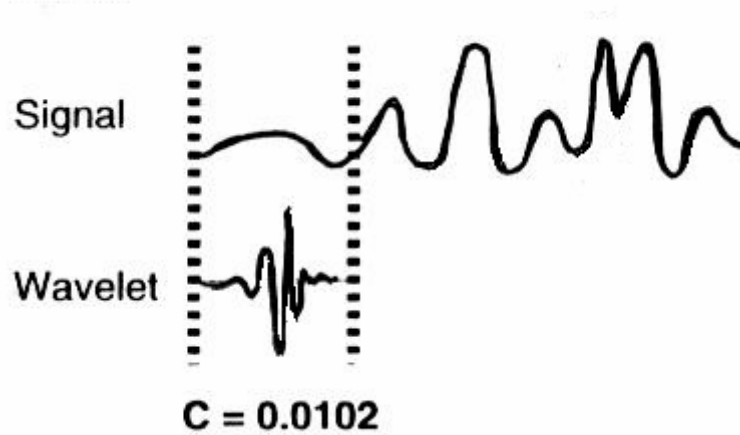
O algoritmo DWT foi desenvolvido por MALLAT, 1988 e consiste no uso de filtros complementares, um passa-alta e outro passa-baixa. Após a passagem pelos filtros o sinal dobra de tamanho e uma parte é eliminada alternadamente. A parte do sinal resultante do filtro passa-alta é a alta frequência correspondendo a escalas pequenas e é chamada usualmente de detalhe. A parte do sinal que passou pelo filtro passa-baixa é a frequência baixa correspondendo a escalas grandes e é chamada de aproximação. Para muitos tipos de sinais a parte de baixa-frequência contém a maior quantidade de informação. A parte do sinal correspondendo à aproximação é novamente submetida ao conjunto de filtros repetindo o processo até a aproximação fique com um só elemento. O conjunto formado pela última aproximação e todos os detalhes forma o conjunto dos coeficientes da transformada wavelet discreta. (MISIT, 1996, MALLAT, 1988).

A transformada contínua wavelet é a soma do sinal multiplicado pela wavelet-mãe e filhas (obtidas por meio de deslocamentos e mudança da escala) ao longo de todo o sinal.

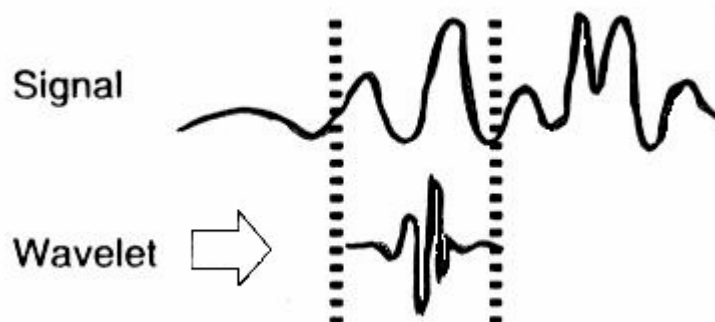
A receita para o cálculo da CWT é apresentada no "Wavelet ToolBox" (Matlab).

1º Passo: Tome a wavelet e compare com a seção inicial do sinal original.

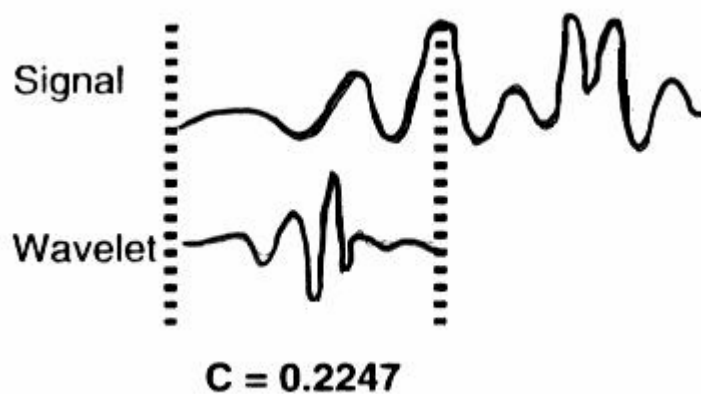
2º Passo: Calcule os coeficientes C , que representam o quanto a wavelet está correlacionada com a seção do sinal. Quanto maior C maior a similaridade entre a wavelet e a seção do sinal. O valor de C depende da forma da wavelet escolhida.



3º Passo: Desloque a wavelet para a direita e repita os passos 1 e 2 até cobrir o sinal todo.



4º Passo



Mude a escala da wavelet e repita os passos 1, 2 e 3.

5º Passo

Repita os passos de 1 a 4 para todas as escalas.

Como resultado da aplicação dos cinco passos obtemos os coeficientes da CWT para diferentes escalas para cada seção do sinal.

A matriz dos coeficientes C tem M linhas por N colunas, onde N é o número de pontos usados no sinal e M o número de escalas usadas. Normalmente a matriz dos coeficientes é representada num gráfico xy e cada ponto da matriz dos coeficientes recebe uma tonalidade de uma cor que quanto maior o coeficiente mais clara é a tonalidade. Este tipo de gráfico é chamado de 'escalograma' (esta palavra não tem no Aurélio).

Retornando às funções f_1 e f_2 (figuras 2.1 e 2.2) e aplicando a transformada wavelet, com função de Morlet, obtemos os escalogramas representados na figura 2.7.

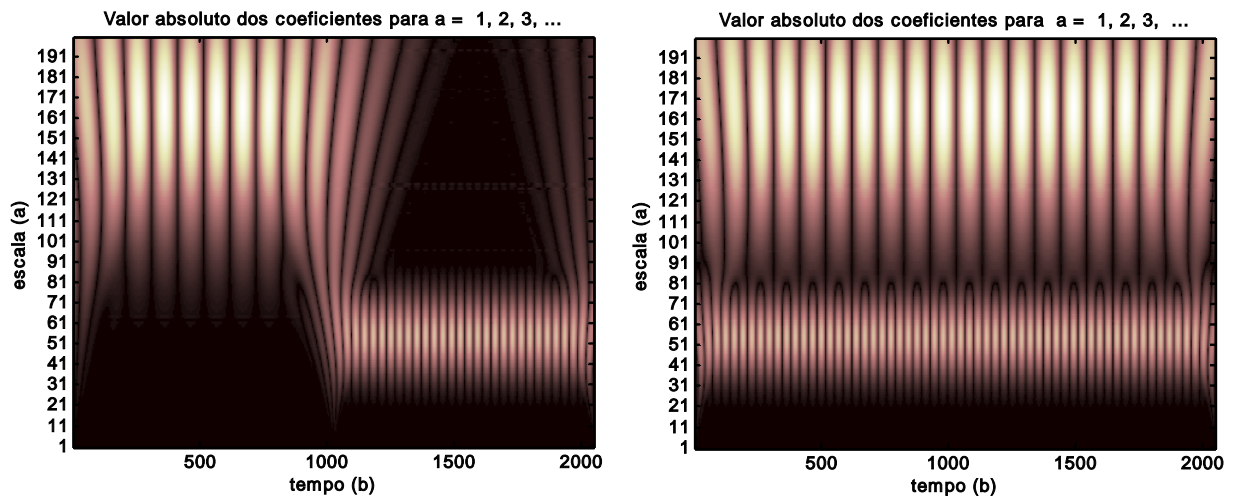


Figura 2.7 - Escalogramas das transformadas wavelet das funções f_1 (esquerda) e f_2 (direita) em função da escala.

Os escalogramas mostram que temos um máximo dos coeficientes em torno da escala 55 e em torno da escala 165 e que no caso da função f_2 acontece ao longo de todo o sinal e no caso de f_1 há uma indicação de onde acontece uma e outra escala.

Ainda estamos sem conhecer o valor das frequências presentes nos sinais. Quando se trabalha com escalas pequenas e encontramos um grande valor dos coeficientes significa que encontramos uma seção do sinal com alta frequência. Desta maneira podemos

relacionar escala com frequência (na verdade o correto seria chamar de pseudo-frequência uma vez que os coeficientes da CWT dependem da escala e do tempo ou espaço) pela relação a seguir:

$$F_a = \frac{F_c}{a\Delta} \quad (2.11)$$

Onde a é a escala, Δ é o período do sinal analisado, F_c é a frequência central da wavelet usada e F_a é a pseudo-frequência correspondente à escala a (MISITI et all, 1996) .

Utilizando a equação 2.11 podemos colocar o gráfico da *figura 2.7* com o eixo Y em frequências.

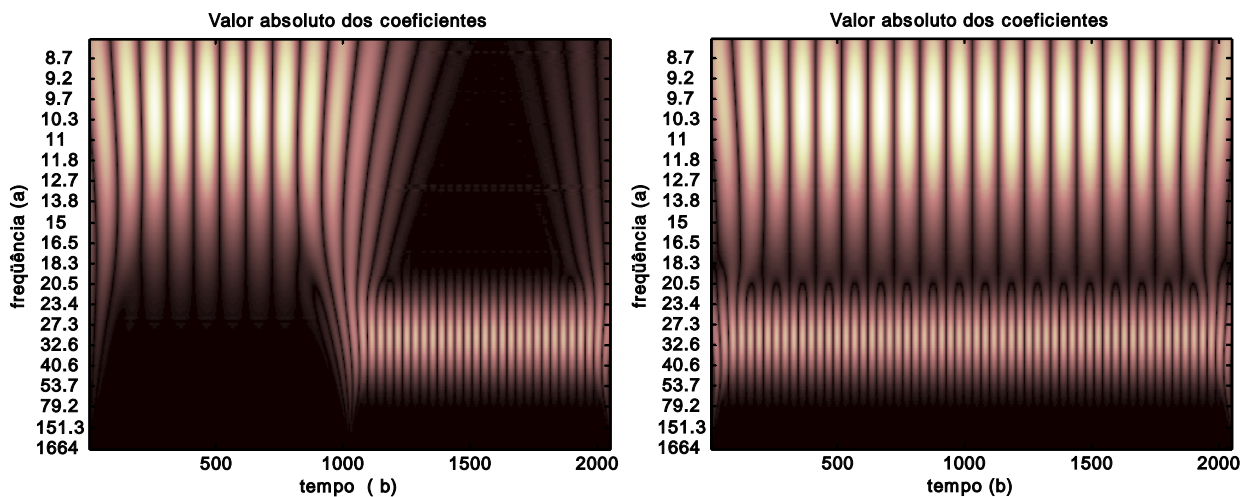


Figura 2.8 - Escalogramas das transformadas wavelet das funções f_1 (esquerda) e f_2 (direita) em função da frequência.

Nos gráficos da *figura 2.8* temos a indicação das frequências presentes no sinal (10 e 30) e onde elas ocorrem.

Na análise usando transformadas wavelet ainda temos uma outra opção que é trabalhar com o espectro de potência da wavelet (do inglês "global wavelet spectra") semelhante ao que é feito em termos do espectro de energia obtido com a transformada rápida de Fourier.

Segundo FARGE, 1992, ZANANDREA et All, 2004, BOLZAN, 2004, STOEVE et All, 2004, pode-se definir uma densidade de potência espectral, como

$$D(a,b) = \frac{|C(a,b)|^2}{a} \quad (2.12)$$

e o espectro de potência wavelet por

$$\mathcal{D}(a,b) = \frac{\sum_a D(a,b)}{a} \quad (2.12)$$

A análise de potência espectral será usada para identificar os períodos presentes nas séries e a sua respectiva energia.

Voltando às funções f_1 e f_2 , que usamos para exemplificar as transformadas de Fourier e wavelet, aplicando a equação 2.12 para os coeficientes da transformada wavelet e representando em um gráfico monolog o espectro de potência wavelet (\mathcal{D}) pelo período (no eixo logarítmico), encontramos novamente os períodos usados na construção das funções. Nos gráficos da *figura 2.9* encontramos os períodos presentes em f_1 e f_2 e não temos mais a indicação de onde ocorrem os períodos.

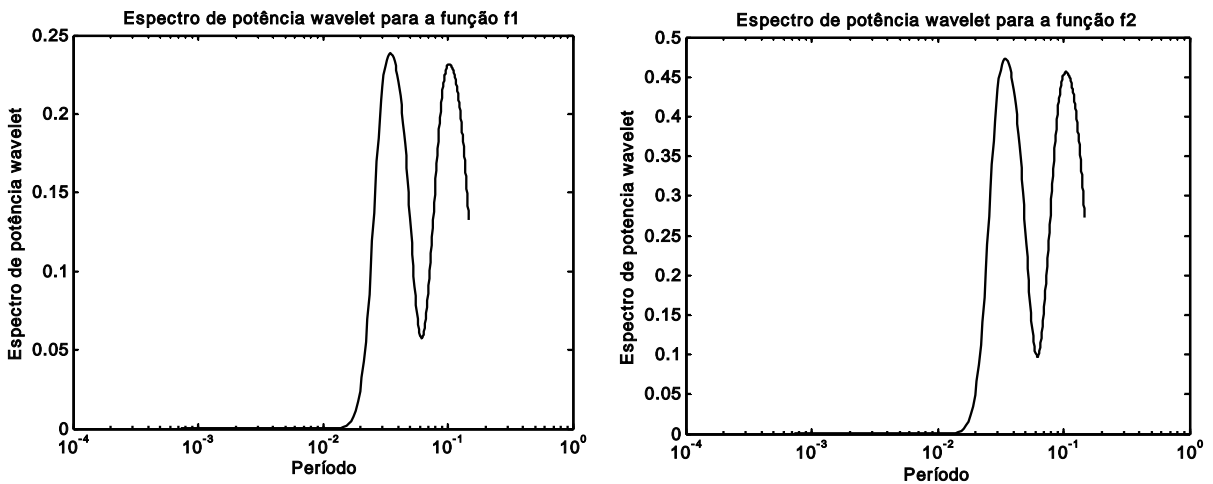


Figura 2.9 Espectro de potência em função do período para a função f_1 (esquerda) e espectro de potência em função do período para a função f_2 (direita).

CAPÍTULO 3

Fractais e expoente de Hurst de séries auto-afins

Com o intuito de analisar as séries temporais pretende-se neste capítulo introduzir o conceito de dimensão fractal, caracterizar o expoente de Hurst, conceituar auto-afinidade e estimar o expoente de Hurst usando a transformada wavelet.

3.1 - Fractais

Os mapas de alguns países apresentam uma linha de contorno com uma série de reentrâncias e saliências que poderão ser vistas ou não dependendo da escala que o mapa foi construído. À medida que aumentamos a escala do mapa verificamos que a rugosidade da linha costeira se torna cada vez mais visível. Na *figura 3.1* temos uma linha sinuosa, em escalas diferentes, que pode representar uma parte de da linha costeira de um país. Se utilizarmos um padrão de medida grande (por exemplo 1km) para a medir a costa o valor encontrado se aproxima do comprimento da linha tracejada e se utilizarmos um padrão de medida pequeno (por exemplo 50m) encontraremos uma valor maior.

Podemos dizer que o comprimento da costa desenhada na *figura 3.1* depende do padrão de medida usado.

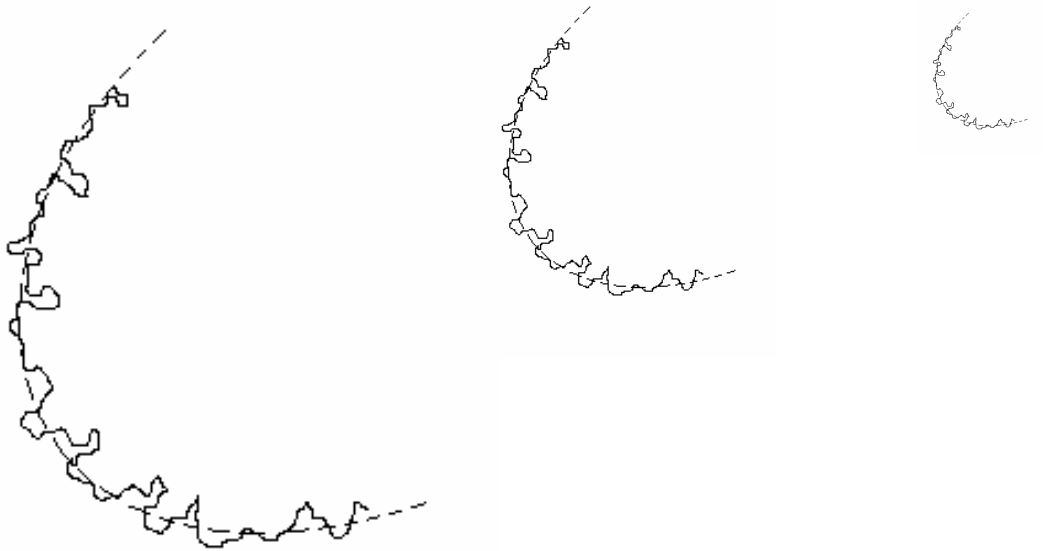


Figura 3.1 - Possível linha costeira de um país em três escalas diferentes.

Nos três desenhos da *figura 3.1* encontramos certos desenhos da costa que se repetem em tamanho maior ou menor, são padrões de linha costeira similares. Esta similaridade acontece com muita frequência na natureza. Além do contorno da costa, encontramos também nas plantas, como na folha da samambaia, na couve-flor, a erosão feita pelos rios, as fraturas no solo após um terremoto, no caminho percorrido pelas cargas elétricas durante os relâmpagos, nas ondas do mar e, assim, poderíamos relacionar uma série muito grande de exemplos.

O conceito de similaridade vem do estudo da Geometria. Dois objetos são similares quando tem a mesma forma embora de tamanhos diferentes. Os ângulos devem ser iguais e os segmentos de reta devem ter um único fator de escala independente da direção.

Um triângulo equilátero é similar a qualquer outro triângulo equilátero. Podemos diminuir os lados indefinidamente e ainda assim teremos um triângulo equilátero. Quando se trabalha com objetos físicos, reais, aumentando-se a escala para ver pedaços cada vez menores do todo, a partir de certo ponto chegamos à dimensão de moléculas e átomos e não teremos mais a similaridade.

Peitgen et al, 1992, utiliza, nos casos em que há detalhes reconhecíveis em todas as escalas macroscópicas enquanto se tratar de objetos reais, o termo auto-similaridade e quando há escalas diferentes para direções diferentes o termo auto-afim.

As figuras em que há similaridade entre o todo e a parte foram chamadas de fractais por Benoit Mandelbrot em 1967 e definiu um fractal com a frase

"Um fractal é uma forma feita de partes similares de algum modo ao todo."

3.2 - Dimensão

Uma característica fundamental dos fractais, segundo MANDELBROT, 1983, é ter uma dimensão fracionária. A dimensão fractal de um objeto foge um pouco do conhecimento comum em termos de dimensão. A geometria euclidiana nos dá uma dimensão zero para o ponto, um para a curva, dois para a superfície e três para um volume. Uma outra maneira de definir a dimensão de um objeto é por meio da medida da quantidade de objetos, em escalas menores, necessários para formar o original.

Como ponto de partida tomemos um segmento de reta de comprimento L . Podemos dividir o segmento em 3 segmentos de comprimento $L/3$ e cada um deles, se multiplicado por 3^1 , se assemelha ao original (*figura 3.2 a*).

Tomando-se um quadrado de lado L e dividindo-o em quadrados menores de lado $L/3$, cada um deles, quando multiplicados por 3^2 , se assemelham ao original (*figura 3.2 b*).

Do mesmo modo um cubo de lado L pode ser dividido em cubos menores com lado $L/3$ e cada um deles, quando multiplicado por 3^3 , se assemelham ao original (*figura 3.2 c*).

Em cada caso o número N de figuras menores que constituem a figura maior é igual ao fator de escala S elevado a potencia D que nos indica a dimensão da figura geométrica.

$$N = S^D \quad \text{ou} \quad D = \frac{\log N}{\log S} \quad (3.1)$$

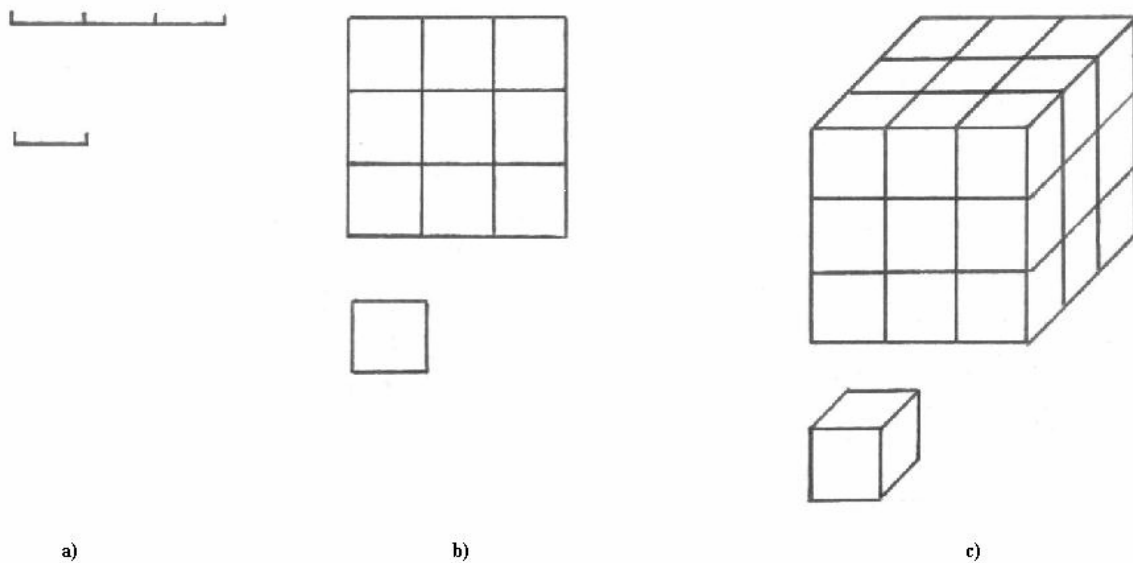


Figura 3.2 - Representação da escala para um segmento de reta (a), para uma figura plana (b) e para um sólido (c).

Esse processo de determinação da dimensão de uma figura pode ser estendido para os fractais e podemos entender melhor o significado de dimensão fractal por meio de exemplos.

3.3 - Poeira de Cantor

O conjunto denominado poeira de Cantor foi apresentada inicialmente por Georg Cantor em 1883. Inicialmente consta de um segmento de reta, de comprimento L , que é dividido em três partes iguais e a do meio é retirada. Como primeiro resultado ficamos com dois segmentos de reta iguais e com comprimento igual a um terço do original. Cada um dos segmentos é novamente dividido em três partes e a parte do meio é retirada, resultando, em quatro segmentos iguais de comprimento um sexto de L . Este procedimento é repetido resultando (figura 3.3) em uma estrutura semelhante a poeira, daí o nome poeira de Cantor (GLEICK, 1990).



Figura 3.3 - Representação do conjunto poeira de Cantor

Do mesmo modo como foi calculada a dimensão para a linha, plano e sólido, a cada interação do conjunto de Cantor, a partir do segmento de reta inicial, temos:

1ª interação	S=3	N=2	nível=1
2ª interação	S=9	N=4	nível=2
3ª interação	S=27	N=8	nível=3
4ª interação	S=81	N=16	nível=4

Usando um gráfico log-log encontramos o valor de D a partir do coeficiente angular da reta $D \log S = \log N$.

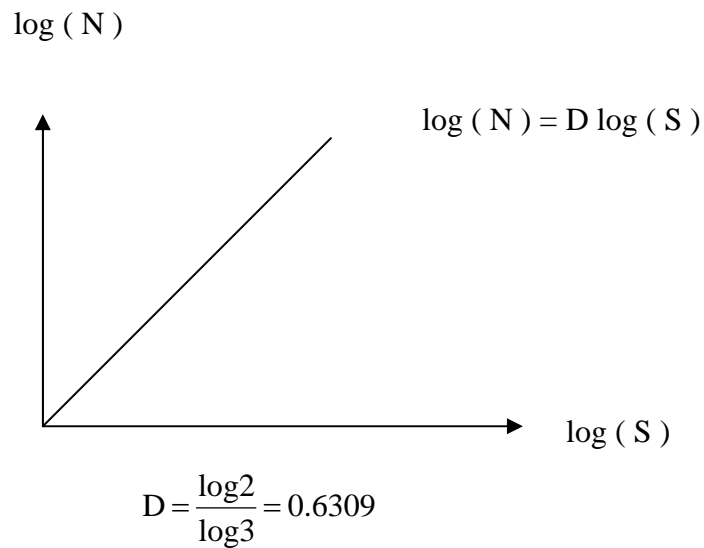


Figura 3.4 - Cálculo da dimensão da figura poeira de Cantor.

3.4 - Triângulo de Sierpinsky

Para a construção do triângulo de Sierpinsky começamos com um triângulo equilátero. Ligam-se os pontos médios dos lados do triângulo e retira-se o triângulo assim formado (*figura 3.5*). Para cada triângulo que restou aplica-se novamente a regra acima e assim continuamente. No limite temos o triângulo de Sierpinsky (FEDER, 1989).

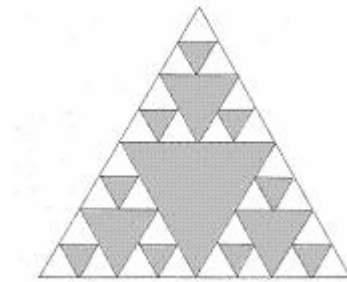


Figura 3.5 - Representação do triângulo de Sierpinsky.

Quando retiramos de um triângulo a figura formada pelos segmentos de reta que ligam os pontos médios dos lados, restam três triângulos internos cujos lados precisam ser multiplicados por dois para igualar ao tamanho do lado do triângulo inicial. Comparando com o procedimento para determinar a dimensão de figuras geométricas simples, *equação 3.1*, temos:

$$N=3 \text{ e } S=2 \qquad D = \frac{\log N}{\log S} = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.585$$

3.5 - Contagem de caixas

A figura da qual se quer calcular a dimensão fractal, nem sempre tem um procedimento conhecido de geração e nestes casos deve-se usar o método de contagem de caixas (box-counting). Consiste em cobrir a figura com um quadriculado, com caixas de lado δ , e contar a quantidade N de caixas que são necessárias para cobrir totalmente a figura. Na segunda etapa o tamanho das caixas é diminuído e a contagem se repete. Fazendo o tamanho das caixas tender a zero a dimensão será dada por

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N}{\log \frac{1}{\delta}} \quad (3.2)$$

O valor do limite é encontrado por meio do coeficiente angular da reta $\log N(\delta) = D \log 1/\delta$ para valores de δ cada vez menores.

O processo de contagem de caixas não pode ser aplicado diretamente em casos de processos em que as escalas são diferentes em direções diferentes (processos auto-afins). Para os processos auto-afins a utilização do método de contagem de caixas só pode ser aplicado se as caixas sofrerem a mesma mudança de escala que as variáveis são submetidas (CAMPANHA, 2004).

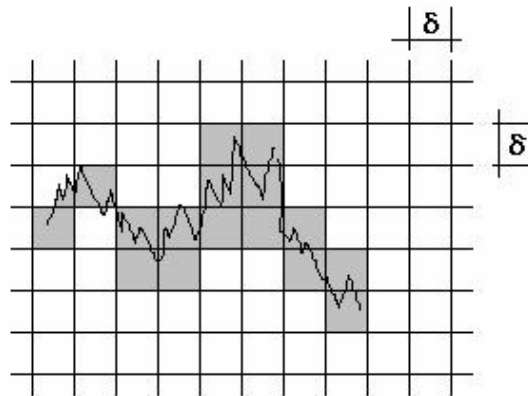


Figura 3.6 - Quadriculado com caixas de lado δ cobrindo a figura que se quer calcular a dimensão fractal

3.6 - Expoente de Hurst

Harold Edwin Hurst, engenheiro inglês trabalhando no Egito, dedicou uma grande parte de sua vida ao estudo do fluxo das águas do rio Nilo e seus afluentes. Inicialmente contratado pelo governo inglês, em 1906, para a construção de uma barragem no Egito, deparou com o problema da determinação da quantidade ideal de água no reservatório, de modo que não faltasse nem houvesse um excesso de água o que colocaria a barragem em perigo. Considerando as chuvas que aconteciam nas nascentes dos afluentes e do próprio Nilo, qual deverá ser a vazão da represa para ficar em um nível aceitável? Para responder a esta

pergunta, Hurst estudou os mais de 800 anos de registros de observações das cheias anuais do rio Nilo e a partir de seus estudos propôs um modelo para o controle da vazão do reservatório da represa. Os seus estudos e modelos estão relatados no livro Long-term storage: an experimental study (Hurst e all, 1965).

Com o intuito de estabelecer uma regra para a descarga de água e manter o nível do reservatório dentro do esperado, Hurst inventou um método estatístico "análise de reescalonamento" (Análise de R/S) para analisar os dados de entrada e saída de água do reservatório em função do tempo. A água que entra no reservatório depende da vazão dos rios e seus afluentes que, por sua vez, está fortemente relacionada com a quantidade de chuvas na região e nas nascentes dos rios. A dependência com a quantidade de chuva indica uma componente com comportamento aleatório que será levada em conta na política de descargas do reservatório para manter seu nível dentro do esperado.

Considerando um determinado ano t , o reservatório recebe uma quantidade de água $\xi(t)$ e deve liberar uma quantidade para manter o nível. A entrada de água média durante n anos é dada por:

$$\langle \xi \rangle_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \xi(t) \quad (3.3)$$

Essa deve ser a quantidade média liberada por ano para manter o nível do reservatório. A água acumulada no reservatório em função do valor médio liberado e da quantidade recebida é

$$X(t, n) = \sum_{m=1}^t [\xi(m) - \langle \xi \rangle_n] \quad (3.4)$$

A diferença entre o valor máximo acumulado e o valor mínimo acumulado é chamado de amplitude ("range") e identificado pela letra R (equação 3.5), que representa a capacidade necessária para manter uma saída média $\langle \xi \rangle_n$ em função de uma entrada anual $\xi(t)$. Retornando ao início, para um reservatório que nunca transborda e nem fica vazio, R representa a diferença entre a máxima e a mínima quantidade de água presente no reservatório (figura 3.7).

$$R(n) = \max_{1 \leq t \leq n} X(t, n) - \min_{1 \leq t \leq n} X(t, n) \quad (3.5)$$

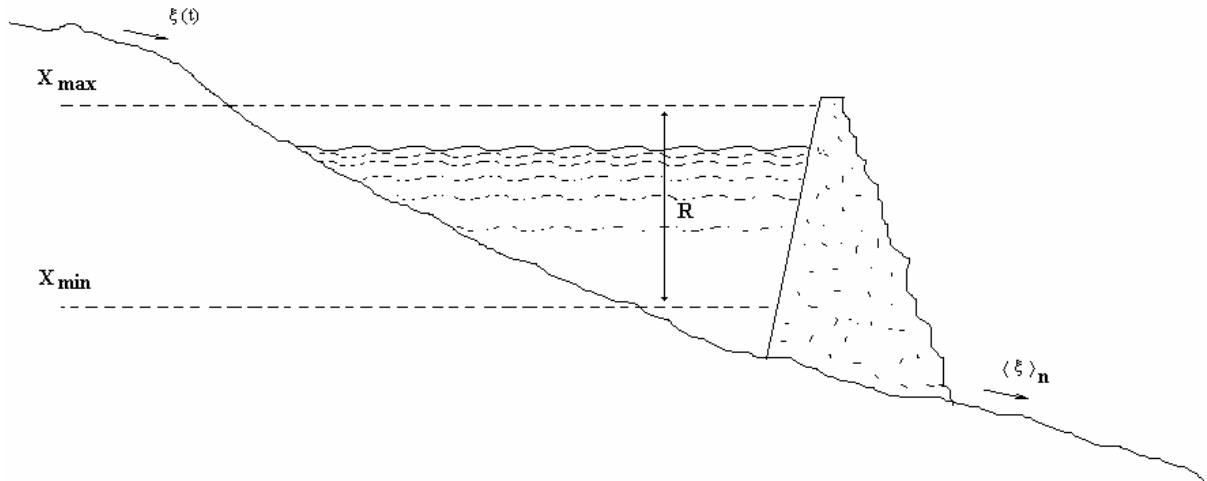


Figura 3.7- Esquema de um reservatório de água (FEDER, 1989).

Hurst usou a relação de R dividido pelo desvio padrão (equação 3.6) para poder trabalhar com uma quantidade adimensional.

$$S = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [\xi(t) - \langle \xi \rangle_t]^2} \quad (3.6)$$

Hurst aplicou a sua estatística para vazão de rios, quantidade de sedimentos após cada cheia dos rios, no tamanho dos anéis dos troncos de árvores e encontrou empiricamente que R/S era proporcional ao tempo de observação elevado a um expoente que posteriormente foi chamado por Benoit Mandelbrot de expoente de Hurst e representado pela letra H.

$$\frac{R}{S} = C n^H \quad C = \text{constante} \quad (3.7)$$

Na análise dos dados de cheias do rio Nilo, Hurst notou que haviam períodos em que uma cheia era seguida de outras cheias e anos de seca eram seguidos de outros anos de seca. Esta ocorrência mostrava haver uma componente não aleatória no histórico de cheias e secas. Havia um efeito memória em que os anos de seca e cheias eram dependentes do que havia acontecido nos anos anteriores. MANDELBROT e WALLIS, 1969, usaram o termo "Efeito José" se referindo à passagem bíblica em que os sonhos do Faraó foram interpretados por José e alertaram sobre sete anos de fartura seguidos de sete anos de dificuldades. As cheias do Nilo acabam depositando uma grande quantidade de sedimentos nas áreas de plantio localizadas às margens do rio, renovando a fertilidade do solo a cada ano.

Uma grande cheia acarretava uma grande fertilização do solo e conseqüentemente uma grande colheita. Anos com pequenas cheias (anos de seca) eram indicativos de pequenas colheitas.

O "Efeito José" se refere a essa memória encontrada por Hurst, anos de cheias eram seguidos de anos de cheias e anos de seca eram seguidos de anos de seca. A explicação encontrada por Hurst foi que no início da estação de chuvas, antes de começar elevar o nível das águas dos rios, a chuva tem que umedecer toda a região e só depois as águas começam a correr em direção aos leitos dos rios. Existe um tempo entre o começo das chuvas e as inundações que vai depender do quanto a região está seca. Se a região está muito seca, grande parte das águas da chuva será usada para umedecer a terra, sobrando pouca água para ocasionar as inundações e assim fertilizar o solo.

Hurst chegou à conclusão que havia um efeito memória. A cheia do ano x_{n+1} dependia da cheia do ano anterior x_n . Aplicando o método R/S para as cheias do rio Nilo, Hurst encontrou um valor de H aproximadamente igual a 0.7 (HURST, 1951).

FELLER, 1951, demonstrou que para uma série composta de variáveis aleatórias que sejam identicamente distribuídas e com variância finita o valor de R/S é igual a

$$R/S = \left(\frac{\pi}{2} n\right)^{1/2} \quad (3.8)$$

Para este caso, $H=1/2$, não há correlação entre os elementos, a série tem as características dos deslocamentos encontrados no movimento descrito por Robert Brown em 1928, que posteriormente foi chamado de movimento browniano.

Na análise dos dados de nível do rio Nilo, Hurst encontrou um valor de $H=0,7$ mostrando que há uma correlação positiva entre os dados. A cheia de um determinado ano influenciava a cheia do ano seguinte.

Os processos em que $H \neq 1/2$ foram chamados por Mandelbrot e Van Ness de movimento browniano fracionário (fbm). Na *figura 3.8* temos a representação de um movimento browniano fracionário para diferentes valores do expoente de Hurst.

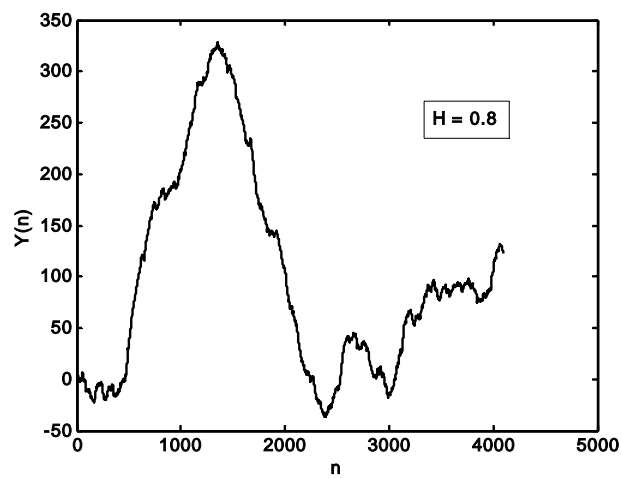
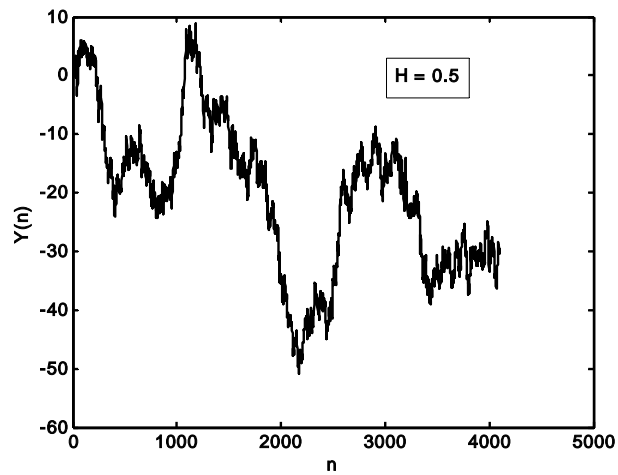
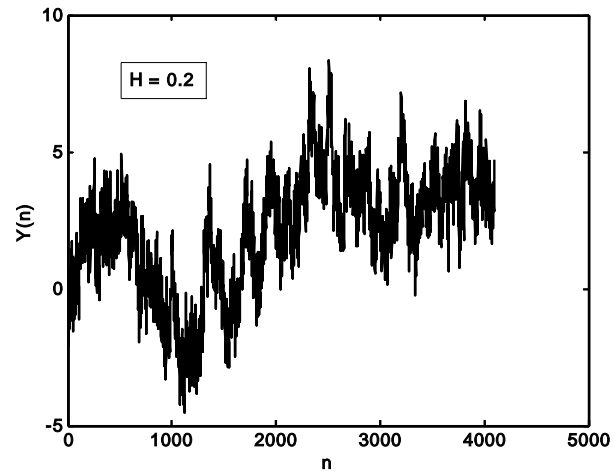


Figura 3.8 - Exemplos de movimento browniano fracionário gerado pelo algoritmo de Joachim Johansson (Apêndice III).

Segundo PEART, 2005, PEITGEN, 1992 e CAMPANHA, 2004, a correlação entre os incrementos do movimento browniano fracionário, $B_H(t)$, é dada por

$$\rho_B(t) = \frac{E[-B_H(-t)B_H(t)]}{E[B_H(t)^2]} = \frac{2^{2H-1} - 1}{V_H} \quad (3.9)$$

onde $E[\quad]$ é o valor médio e V_H é uma constante.

A equação 3.9 mostra que a correlação é determinada em função do parâmetro H e não depende do tempo. A figura 3.9 mostra a variação da correlação com a variação do expoente de Hurst.

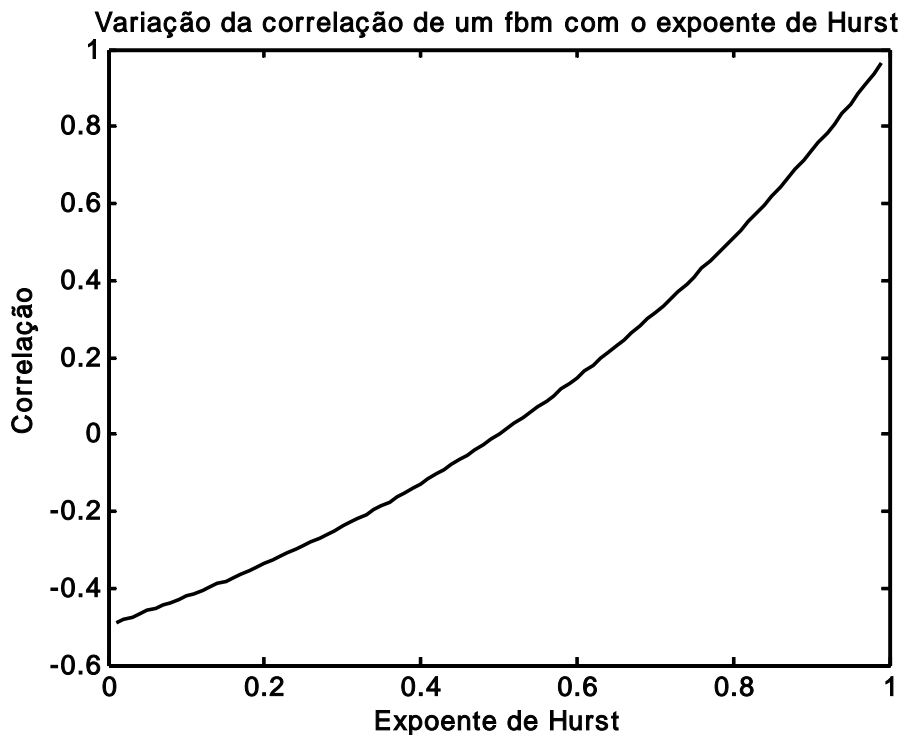


Figura 3.9 - Variação da correlação de um movimento browniano fracionário em função do expoente de Hurst.

Para $H=1/2$ a correlação é zero, os valores da série temporal são independentes uns dos outros e a série é chamada de movimento browniano.

A série em que $H>1/2$, $\rho_B(t)>0$, é chamada de persistente, ou seja, os incrementos futuros são similares aos incrementos do passado. Situação encontrada por Hurst no caso das cheias do rio Nilo.

Quando $H < 1/2$, $\rho_B(t) < 0$, a série é chamada de anti-persistente e os incrementos positivos no passado indicam incrementos negativos no futuro, há uma inversão nos incrementos com maior frequência.

3.7 - Auto-Afinidade

Na *figura 3.9*, os movimentos brownianos fracionários $Y(n)$ são funções de n que na maioria das vezes está diretamente relacionado com o tempo e a diferença entre os comportamentos dos fbm está caracterizado pelo expoente de Hurst.

Segundo Peitgen, 1992, os incrementos do movimento browniano fracionário são proporcionais aos incrementos na variável n elevado ao parâmetro de Hurst.

$$\Delta Y \propto (\Delta n)^H$$

Esta relação mostra que se a variável n sofrer um escalonamento, passando para an , o valor da variável $Y(n)$ será escalonada para $Y(n) a^H$, o que caracteriza um processo auto-afim, escalas diferentes para diferentes variáveis.

$$n \rightarrow an \qquad Y(n) \rightarrow a^H Y(n) \qquad (3.10)$$

Para este caso a dimensão fractal pode ser determinada pelo processo de contagem de caixas desde que as dimensões das caixas sejam escalonadas diferentemente.

Como exemplo tomemos a representação do fbm $Y(n)$ com N pontos, conforme mostra a *figura 3.10*.

O quadriculado foi construído de forma que cada caixa na direção n tem lado $1/N$ e na direção $Y(n)$ tem lado $(1/N)^H$. Desta forma estamos garantindo a diferença de escalonamento da *equação 3.10*.

Cada caixa tem área $1/N^{H+1}$ que corresponde N^{1-H} vezes a área da caixa utilizada no cálculo da dimensão fractal de um processo auto-similar representado na *figura 3.6*.

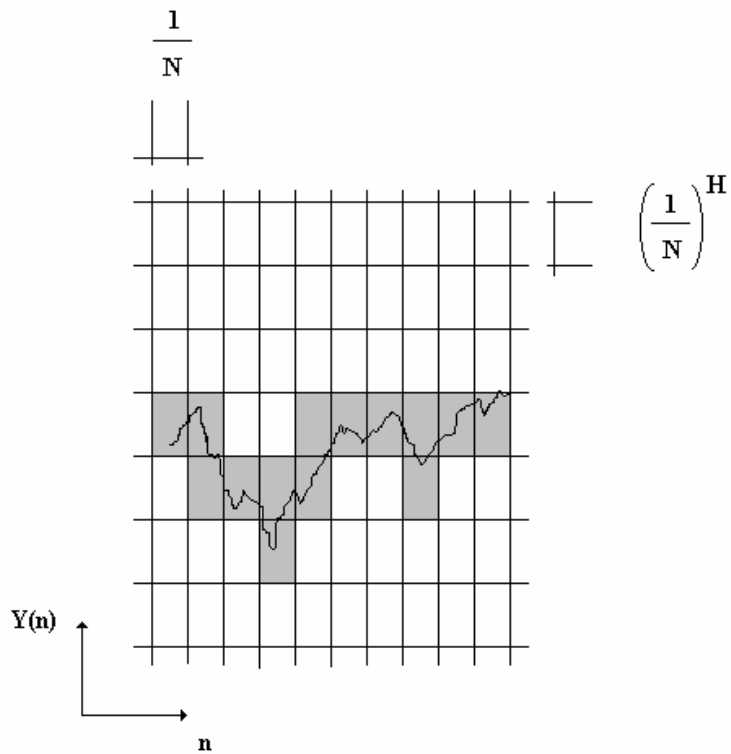


Figura 3.10 - Quadriculado usado para cálculo da dimensão fractal de processo auto-afim.

Usando a equação 3.2 o valor da dimensão fractal, para o processo auto-afim, será

$$D = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log N \cdot N^{1-H}}{\log N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log N^{2-H}}{\log N} \quad \text{ou}$$

$$D = 2 - H \quad (3.11)$$

No caso da equação 3.11 a dimensão fractal pode assumir valores não inteiros. Quanto menor for H, mais a dimensão fractal se aproxima de 2, e o perfil se torna tão rugoso que é como se preenchesse o espaço como um plano. Por outro lado, quando H cresce, aproximando de 1, o perfil fica suave e a dimensão fractal se aproxima de 1 (figura 3.9). Quando temos o movimento browniano $H=0,5$ a dimensão fractal será 1,5 (PETERS, 1996).

3.8 - Estimativa de H para série temporal auto-afim

Entre os diversos estimadores para o expoente de Hurst, foi escolhido o método que usa a transformada de wavelet, que, segundo SIMONSEN et All, 1998, apresenta resultados mais consistentes em todas as faixas de valores de H.

Seja $f(t)$ uma série temporal auto-afim e escalonando a variável t por λ a função $f(t)$ passará a $\lambda^H f(\lambda t)$, conforme a *equação 3.10*.

$$f(t) = \lambda^{-H} f(\lambda t) \quad (3.12)$$

onde o sinal de igual é entendido como igualdade estatística.

Aplicando a transformada wavelet nos dois lados da *equação 3.12*, temos

$$C[f(t)](a, b) = C[\lambda^{-H} f(\lambda t)](a, b)$$

ou usando a definição da transformada wavelet da *equação 2.9*

$$C[f(t)](a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{-H} f(\lambda t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

Chamando λt de y teremos

$$C[f(t)](a, b) = \frac{\lambda^{-H}}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \psi\left(\frac{y/\lambda - b}{a}\right) \frac{dy}{\lambda}$$

$$C[f(t)](a, b) = \frac{\lambda^{-H}}{\sqrt{\lambda a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \psi\left(\frac{y - \lambda b}{\lambda a}\right) \frac{dy}{\sqrt{\lambda}}$$

$$C[f(t)](a, b) = \frac{\lambda^{-H-1/2}}{\sqrt{\lambda a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \psi\left(\frac{y - \lambda b}{\lambda a}\right) dy$$

$$C[f(t)](a, b) = \lambda^{-H-1/2} C[f(t)](\lambda a, \lambda b) \quad \text{ou}$$

$$C[f(t)](\lambda a, \lambda b) = \lambda^{H+1/2} C[f(t)](a, b) \quad (3.13)$$

Ao escalonarmos a variável t por λ , a função $f(t)$ é escalonada para $\lambda^{-H} f(\lambda t)$ e os coeficientes da transformada wavelet são escalonados por $\lambda^{H+1/2}$.

SIMONSEN ET ALI, 1988, no desenvolvimento do método AWC - "AVERAGE WAVELET COEFFICIENT", propõem que para evitar a dependência do fator de deslocamento na *equação 3.13*, seja calculada a média do módulo dos coeficientes da transformada wavelet para cada escala, uma vez que quando se trata de processos auto-afim estamos muito mais interessados no fator de escala do que no de deslocamento.

$$C[f](a) = \langle |C[f(t)](a, b)| \rangle_b \quad (3.14)$$

O operador $\langle \rangle_b$ determina o valor da média aritmética com respeito à variável b . Com a inserção do valor absoluto dos coeficientes temos a representação da energia da wavelet para cada escala.

Usando a notação da *equação 3.14*, a *equação 3.13* passa a

$$C[f](\lambda a) = \lambda^{H+1/2} C[f](a)$$

Fazendo-se o gráfico $\log C[f](a)$ por $\log a$, se encontrarmos uma linha reta, significa que a função f é auto-afim e que o coeficiente angular da reta é igual a $H+1/2$.

Dessa forma podemos sintetizar os passos do método AWC :

- 1- Calcular os coeficientes da transformada wavelet para a série temporal;
- 2- Calcular a média do valor absoluto dos coeficientes da transformada wavelet;
- 3- Fazer o gráfico do $\log C[f](a)$ por $\log a$, determinar a reta pelo método dos mínimos quadrados e encontrar o coeficiente angular da reta, e ,
- 4- Encontrar o valor do expoente de Hurst por coeficiente angular = $H+1/2$.

CAPÍTULO 4

Wavelet, Expoente de Hurst e Série Temporal de Chuva

Neste capítulo será feita uma discussão de tópicos que permitam a estimativa do expoente de Hurst das séries temporais de precipitação de chuvas.

Quando se usa um estimador para encontrar o expoente de Hurst, sempre fica uma dúvida: qual a validade do estimador que estamos usando? A resposta, pretendemos dar estimando o valor de H , por meio da transformada wavelet, de séries que foram geradas com o expoente de Hurst conhecido e assim, podemos comparar os resultados encontrados.

O segundo tópico a ser analisado se refere à dependência do expoente de Hurst, estimado por meio da transformada wavelet, com o tamanho da série. Esta análise serve de base para definir um tamanho da série temporal de chuva para estimar o expoente de Hurst para as regiões climáticas do estado de São Paulo.

Ao aplicar a transformada wavelet temos que escolher a função wavelet e nem sempre temos uma base segura para isto. Novamente usando séries geradas com o valor de H conhecido estimaremos para uma mesma série o valor de H com várias wavelet e teremos assim um meio de comparação.

Uma outra dificuldade que encontramos ao trabalhar com séries temporais de chuvas é o fato das séries conterem interrupções de medições por um ou mais dias. Como o método de estimar o expoente de Hurst por meio de transformadas wavelet considera a série toda, a falta de medições, impede a estimativa de H. Neste capítulo proporemos alternativas para solucionar esse impasse.

4.1 - Validade do expoente de Hurst estimado por wavelet

Existem vários métodos para a estimativa do expoente de Hurst e entre eles podemos destacar o método R/S, o periodograma, o variacional, o da transformada de Fourier e o da transformada wavelet.

CLEGG, 2005, SIMONSEN e HANSEN, 1998, BRESLIN E BELWARD, 1999 E MIRANDA, 1997, apresentaram em seus trabalhos comparações entre os métodos estimadores fazendo a estimativa de H em séries de fbn e fbm em que se conhece a priori o expoente de Hurst.

O método R/S superestima H para valores do expoente de Hurst próximos de zero e subestima para valores próximos de um. O método variacional subestima o valor de H de um modo geral. O método da transformada de Fourier apresenta um erro, na determinação da inclinação da reta (H é determinado pelo coeficiente angular da reta), maior que no caso do método da transformada wavelet. De um modo geral todos os estimadores apresentam pontos altos e baixos o que dificulta a comparação entre eles. Em função disto optamos por testar o método da transformada wavelet por meio de séries de fbm geradas para um determinado H.

O movimento browniano (BROWN, 1827, EINSTEIN, 1905, WIENER, 1923) e movimento browniano fracionário (MANDELBROT, 1977) já foram amplamente estudados e podem ser tomados como referência para a estimativa do expoente de Hurst.

Existem vários algoritmos que geram um fbm com um valor de H determinado e, entre eles, o que produz um movimento browniano de forma rápida e direta é o chamado de deslocamento do ponto médio, descrito por VOSS, PEITGEN et al, 1988, que é descrito resumidamente a seguir.

Para um processo $X(t)$ que será gerado para o tempo t entre 0 e 1, começamos atribuindo para $X(0)=0$ e para $X(1)$ uma amostra de um número randômico gaussiano.

O próximo ponto será a média entre $X(0)$ e $X(1)$ acrescido de uma compensação D que é um número randômico gaussiano multiplicado por um fator de escala igual a $1/2$.

Na próxima etapa serão dois pontos médios entre $X(0)$ e $X(1/2)$ e $X(1/2)$ e $X(1)$ acrescidos de quantidades D_{10} e D_{20} (números randômicos gaussianos multiplicados pela escala anterior reduzida por $2^{0.5}$). A *figura 4.1* mostra as primeiras etapas para o processo $X(t)$.

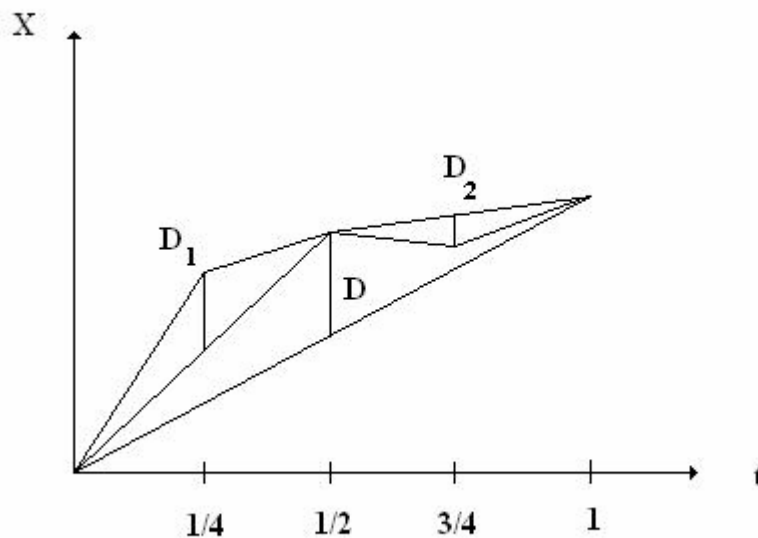


Figura 4.1- Gráfico com os primeiros passos do algoritmo mpdwalk.

Os próximos serão os pontos médios entre $X(0)$ e $X(1/4)$, $X(1/4)$ e $X(1/2)$, $X(1/2)$ e $X(3/4)$, $X(3/4)$ e $X(1)$, acrescidos da compensação D_{j1} multiplicada pela escala, da etapa anterior, reduzida pelo fator $2^{0.5}$.

O processo se repete e novos pontos vão sendo colocados nos pontos médios entre os pontos já existentes e acrescidos do número randômico gaussiano corrigido pela escala diminuída pelo fator $2^{0.5}$.

Quando estamos interessados em gerar movimento browniano fracionário ($H \neq 1/2$) a compensação D será multiplicada, na primeira vez, pelo número de elementos que terá a série menos um, elevado a H . As escalas das etapas seguintes serão sempre a escala da etapa anterior reduzida por um fator 2^H (MIDDLETON, 1995).

Pretende-se usar estas séries, assim geradas, para estimar o expoente de Hurst por meio da transformada wavelet e comparar os valores de H estimados com os valores usados na geração das séries.

Foram escolhidos quatro algoritmos geradores de fbm:

fbmfeder: utiliza a equação 9.25 do livro FRACTALS de Jens Feder, 1988 e foi codificado para o software MATLAB por Juha Merikoski (Apêndice I);

mpdwalk: utiliza o algoritmo do deslocamento do ponto médio descrito por VOSS, PEITGEN et al., 1988 e o programa fornecido por MIDDLETON, 1995 (Apêndice II);

fbmsim: baseia-se no artigo "Simulation of stationary gaussian processes $[0,1]^d$ " de WOOD e CHAN, 1994 e a codificação para o software MATLAB foi apresentada por JOHANSSON, 2000 (Apêndice III), e,

fbmlevinson: utiliza a fatoração de Cholesky/Levinson e o programa escrito por GONÇALVES, 1997 faz parte do FRACTAL ANALYSIS SOFTWARE (Apêndice IV).

O fato de termos escolhido o movimento browniano fracionário para testes do método de estimativa de H é por que podemos gerar fbm com valor de H determinado e também pelo fato das séries temporais de precipitação de chuvas (soma cumulativa dos desvios da média) serem similares (BRESLIN & BELWARD, 1999) com o movimento browniano fracionário (fbm) como podemos ver na *figura 4.2*.

Com as séries da *figura 4.2*, foi calculada a correlação e encontramos um coeficiente de correlação de 0,19 com uma probabilidade de não correlação igual a zero.

A medida da correlação foi feita pelo método de Spearman (VIEIRA, 2003) na função *corr*, do MATLAB, que determina o coeficiente de correlação r ($-1 \leq r \leq 1$) e nos dá, ainda, a probabilidade do teste da hipótese da não correlação.

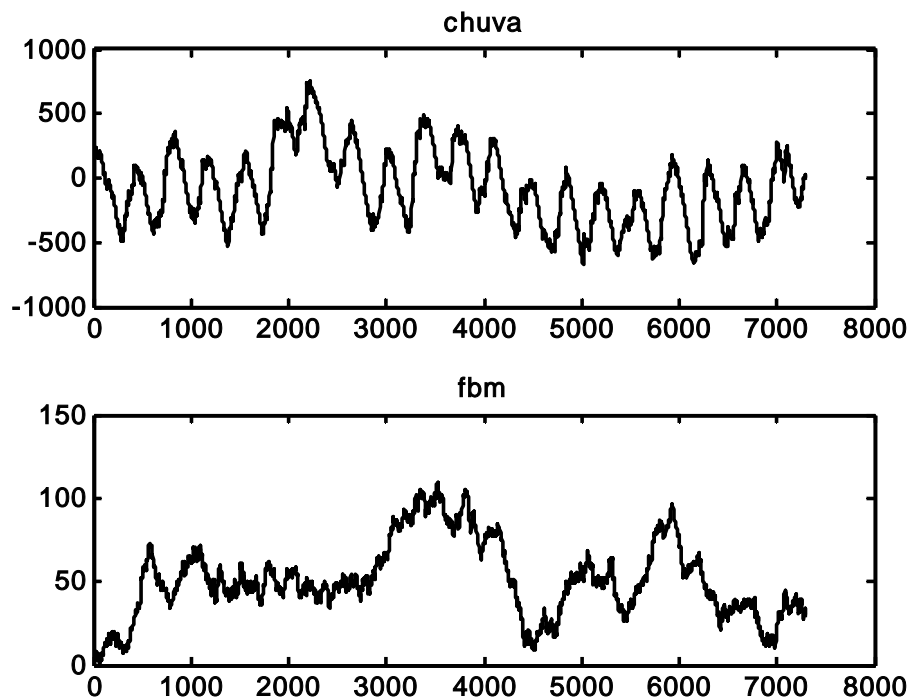


Figura 4.2- Gráficos de chuva cumulativa dos desvios da média e série fbm gerada com o mesmo H que a série de chuva.

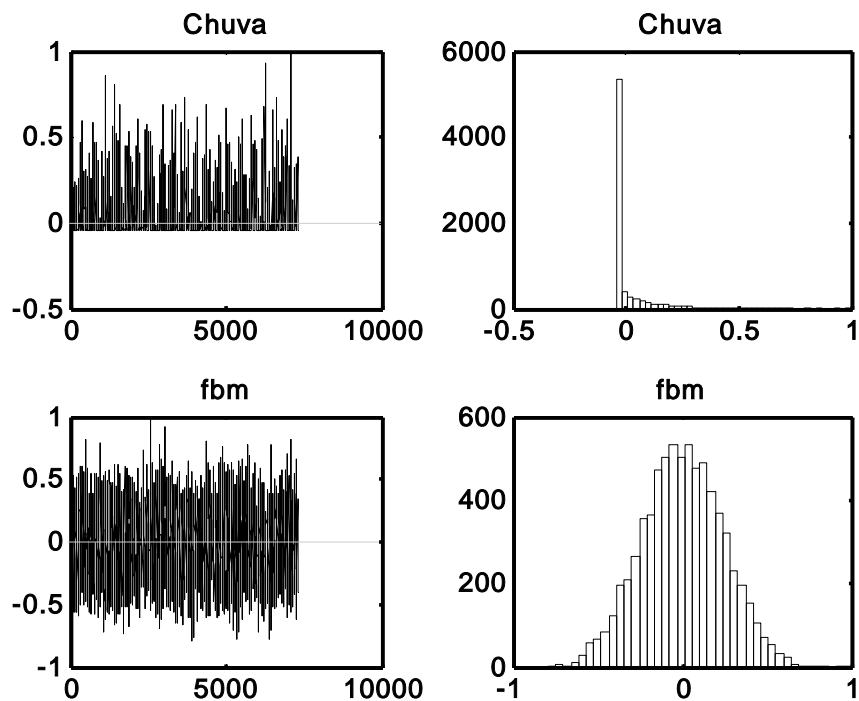


Figura 4.3 - a) Desvios da média e histograma para uma série de chuva com média 0 , e variância $0,010$.
 b) Desvios da média e histograma para uma série de fbm com média 0 e variância $0,058$.

A partir das séries da *figura 4.2*, foram construídas as séries dos respectivos deslocamentos, foi feita uma normalização deixando o maior deslocamento igual a um, construído o histograma e calculada a média e a variância. O resultado pode ser visto na *figura 4.3*.

Pela semelhança entre as séries da *figura 4.1* podemos dizer que as séries de movimento browniano fracionário são adequadas para testar o método de estimativa do expoente de Hurst, mas, tendo em vista a *figura 4.2*, há necessidade de um estudo maior para usar as séries de fbm como modelo para a precipitação de chuvas.

Com estes programas geradores de fbm foram elaboradas cem séries para cada valor de H (0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9), estimados os valores de H por meio da transformada wavelet para cada série, feita uma média dos valores de H e comparados com o expoente de Hurst segundo a qual a série foi gerada. Cada série foi gerada com 7.305 elementos que corresponde, em tamanho, a uma série de precipitação diária de chuva de 20 anos que iremos analisar no capítulo 5.

Para cada gerador foi feito um gráfico com o valor de H utilizado na geração do fbm no eixo das abscissas e o valor médio do H estimado por wavelet no eixo das ordenadas, que pode ser visto na *figura 4.4*.

figura 4.4 a)

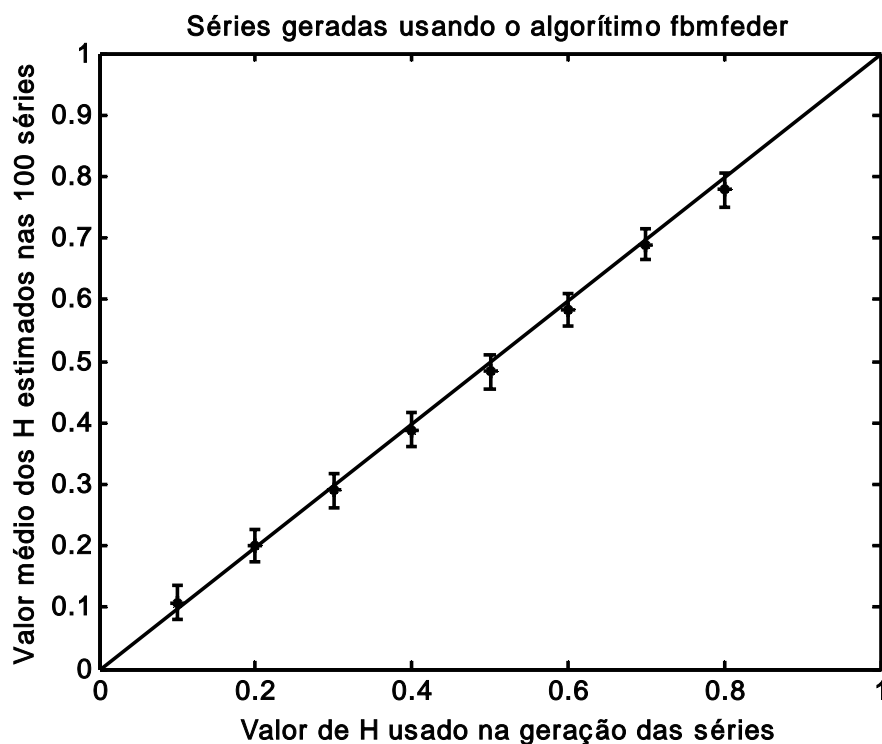


figura 4.4 b)

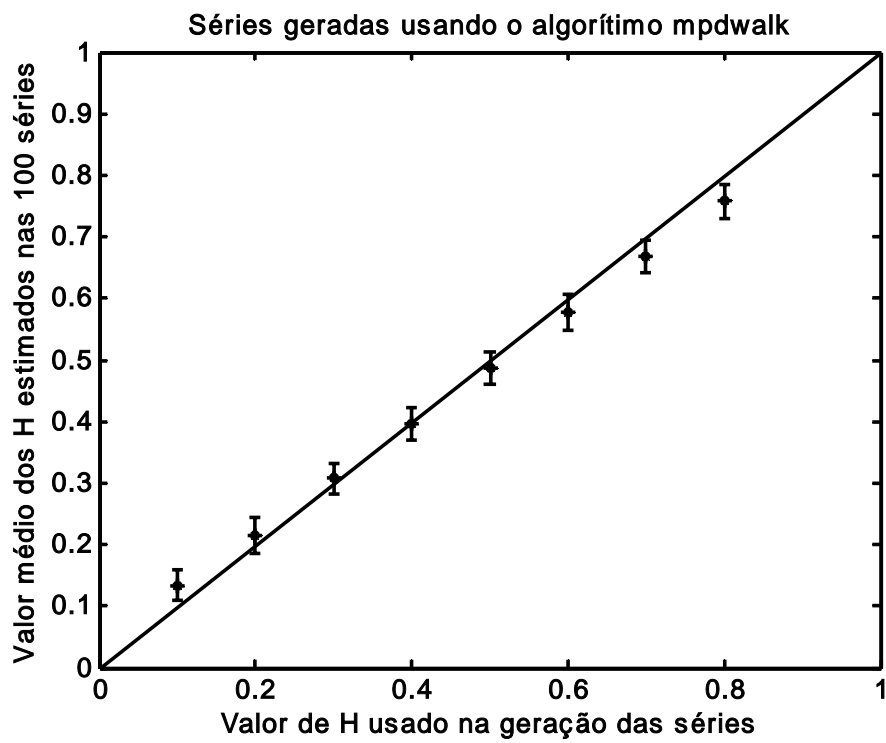


figura 4.4 c)

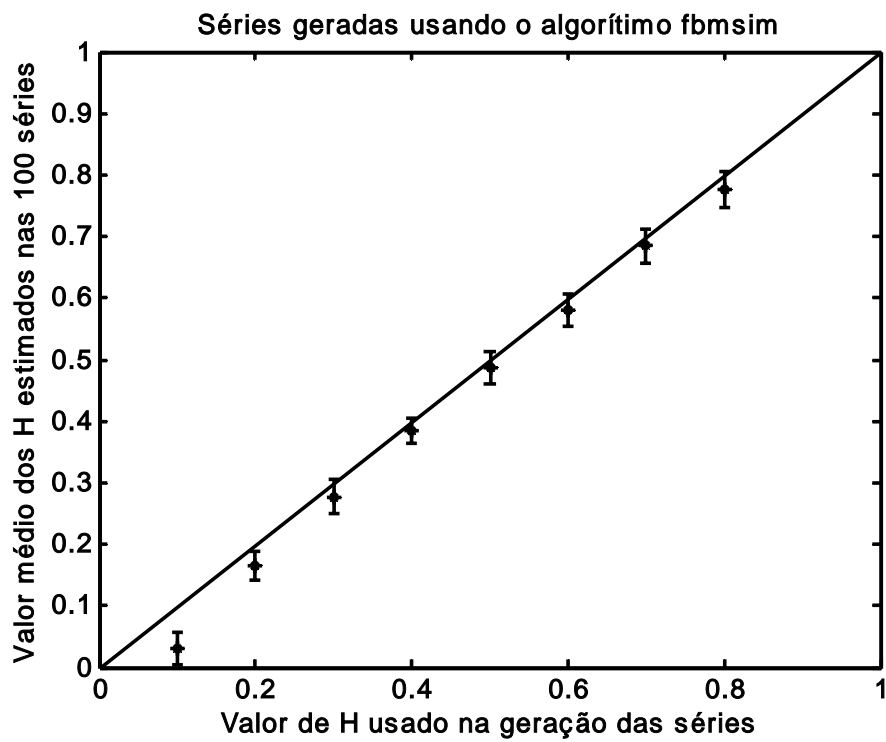


figura 4.4 d)

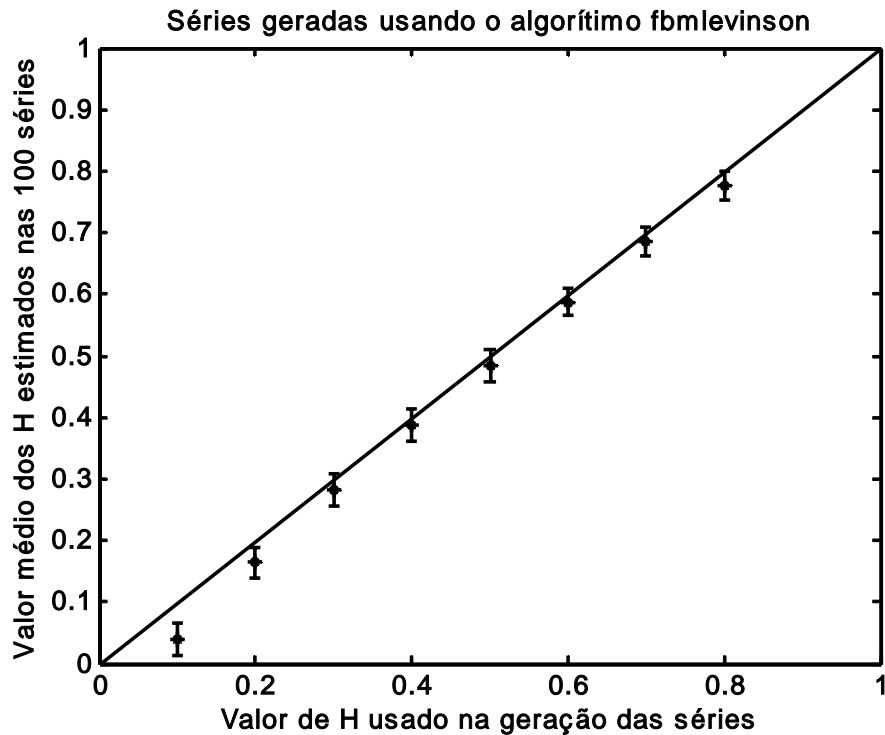


Figura 4.4 - Gráficos mostrando o valor médio do expoente de Hurst para séries de fbm obtidas por meio de quatro tipos de geradores de movimento browniano fracionário. As barras de erro nos gráficos se referem ao desvio padrão.

As análises dos gráficos da figura 4.4 e da tabela 4.1 mostram que os valores estimados do expoente de Hurst, por meio da transformada wavelet, de séries de fbm estão bem próximos dos valores esperados e que apresenta uma regularidade na estimativa de H para todos os valores do expoente de Hurst. O erro padrão da média que aparece na tabela 4.1 indica que os valores estimados de H nas cem séries estão bem próximos uns dos outros e que existe uma coerência nos valores.

Tabela 4.1

Simuladores de movimento browniano fracionário								
H	mpdwalk		fbmsim		fbmfeder		fbmlevinson	
	H _{médio}	Epm	H _{médio}	Epm	H _{médio}	Epm	H _{médio}	Epm
0,1	0,1345	0,0211	0,0320	0,0179	0,1345	0,0211	0,0396	0,0181
0,2	0,2146	0,0194	0,1652	0,0165	0,2146	0,0194	0,1645	0,0154
0,3	0,3072	0,0165	0,2773	0,0157	0,3072	0,0165	0,2821	0,0154
0,4	0,3954	0,0164	0,3847	0,0149	0,3954	0,0164	0,3874	0,0159
0,5	0,4872	0,0170	0,4857	0,0165	0,4872	0,0170	0,4843	0,0151
0,6	0,5784	0,0163	0,5806	0,0174	0,5784	0,0163	0,5877	0,0163
0,7	0,6695	0,0178	0,6846	0,0178	0,6695	0,0178	0,6863	0,0176
0,8	0,7578	0,0189	0,7765	0,0180	0,7578	0,0189	0,7768	0,0178
0,9	0,8420	0,0212	0,8685	0,0221	0,8420	0,0212	0,8672	0,0219

Tabela 4.1 - Média dos valores do expoente de Hurst estimado por wavelet das séries de movimento browniano fracionário. Com cada algoritmo utilizado para simular fbm foram geradas 100 séries para cada valor de H. Epm é o erro padrão da média (VIEIRA, 1999).

4.2 - Expoente de Hurst e o tamanho da série temporal

Para estabelecer a dependência do expoente de Hurst com o tamanho da série, vamos recorrer novamente, às séries de movimento browniano fracionário. A partir de uma série temporal de fbm, gerada pelo algoritmo *mpdwalk* (VOSS, PEITGEN et al, 1988), com tamanho aproximado das séries de chuvas diárias que vamos estudar, estimamos o valor de H e depois diminuimos o tamanho da série e estimamos novamente o valor de H.

Foram geradas cem séries com H=0,5 (movimento browniano) e com 8192 (2^{13}) elementos e para cada série iniciamos diminuindo o tamanho de 500 em 500 e conforme foi diminuindo a série tomamos um passo menor.

Na *figura 4.5* temos dois gráficos que mostram a variação de H com o tamanho da série.

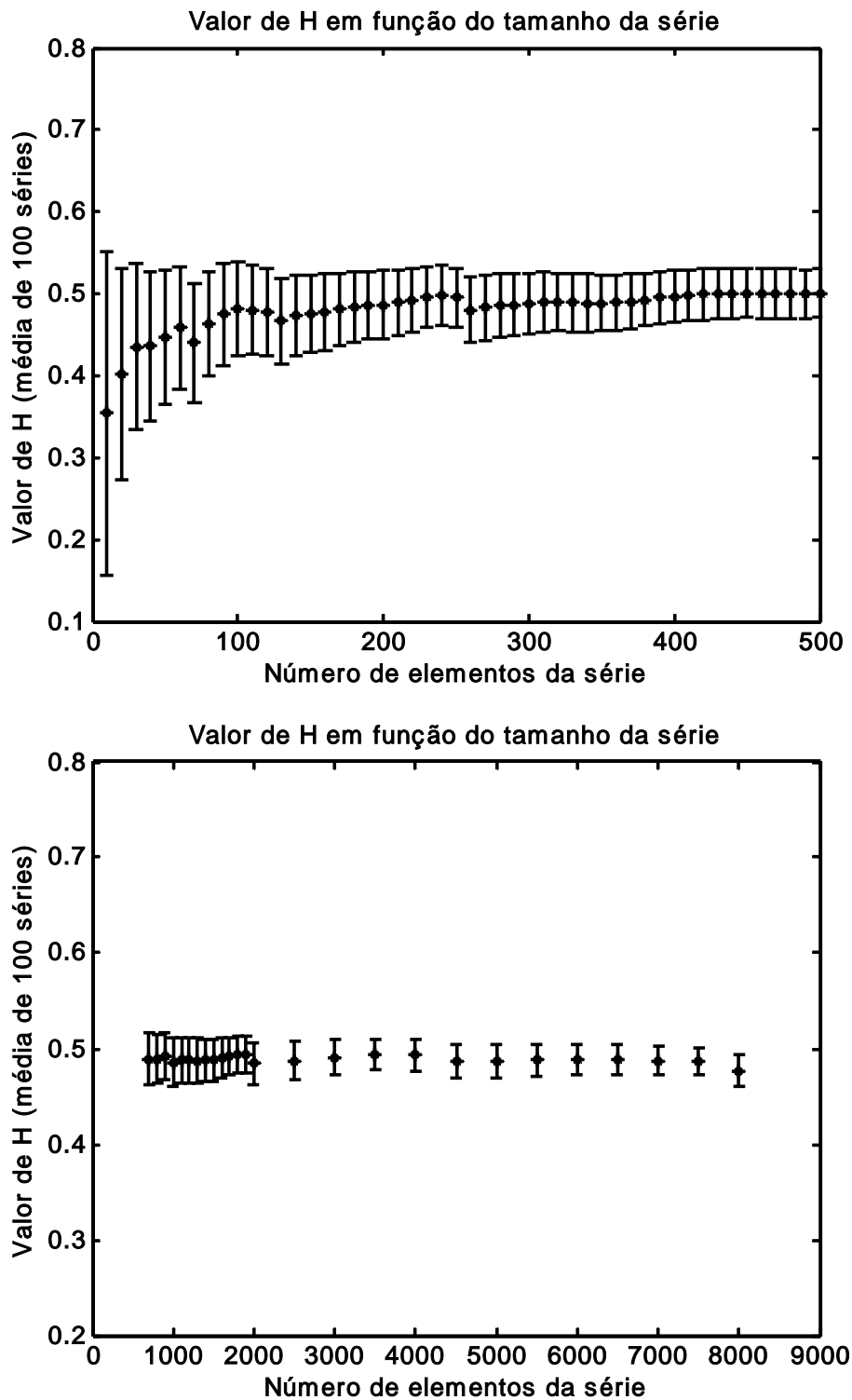


Figura 4.5 a) gráfico do valor médio de H para cem séries com tamanho entre 10 e 500.
b) gráfico do valor médio de H para cem séries com tamanho entre 500 e 8192.

Observação: A barra de erro representada se refere à média dos erros cometidos na estimativa de H por meio da transformada wavelet.

Verifica-se nos gráficos que o valor de H apresenta uma tendência de convergir, para o valor com que a série foi gerada, quando aumenta o número de elementos e também que, para o número de elementos correspondente a vinte anos, o valor estimado de H é bom.

Outro dado importante é que o erro ao estimar H vai diminuindo, na média, conforme aumenta o número de elementos.

4.3 - Ausência de medições em séries temporais de precipitação de chuvas

Quando se trabalha com séries numéricas longas, construídas a partir de dados de precipitação diária de chuvas, é comum encontrar intervalos de um ou mais dias sem medições. As razões que motivaram a falta de medições são as mais variadas, impossibilidades de acesso ao posto meteorológico, dificuldades com o pessoal que faz a coleta diária e até a desativação por falta de equipamento.

A falta de medições numa série (mais ou menos 20 anos) transforma a série longa em um conjunto de séries menores e ao estimarmos o expoente de Hurst (H) para séries pequenas o valor de H varia muito em função do tamanho da série, como foi mostrado no item 4.2, fazendo que o H das séries pequenas seja diferente da série como um todo (longa).

Como o expoente de Hurst está relacionado diretamente com a memória da série, os valores futuros de precipitação de chuva dependem dos registros do presente, propomos, inicialmente, que a medida em falta seja substituída pela média de medidas anteriores e como o expoente de Hurst, também é uma característica da série inteira, uma segunda proposta, é unir os trechos da série com medições e assim estimar o valor do expoente de Hurst.

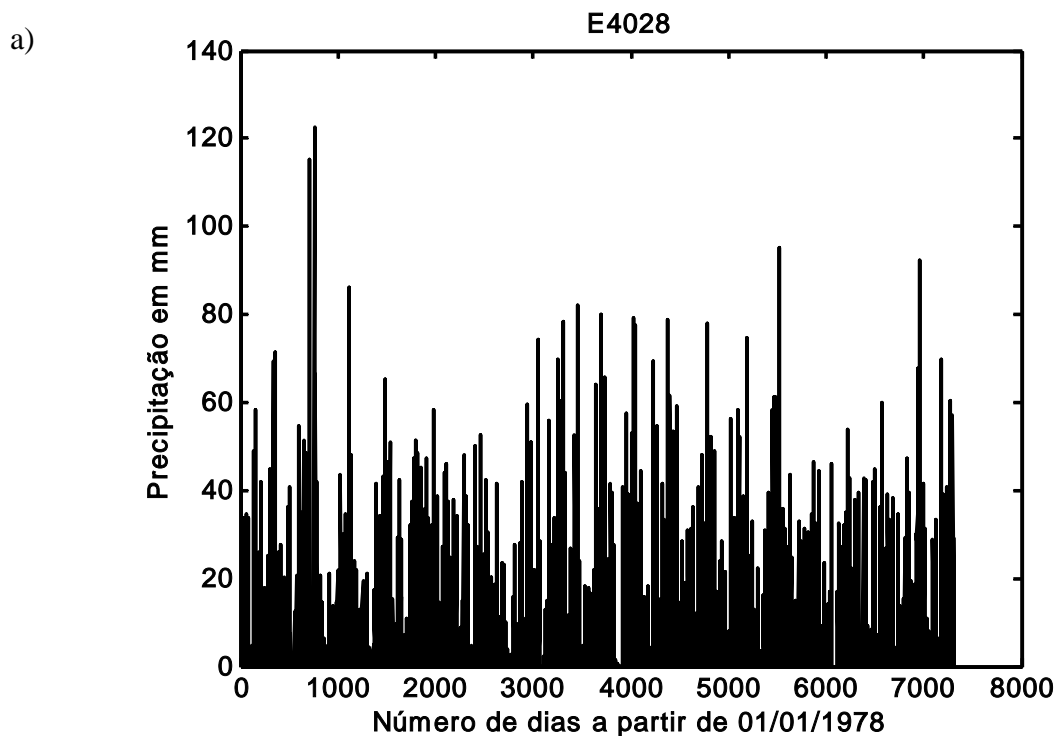
Para as duas propostas fica a pergunta: até quantas medições ausentes podem ser substituídas pela média ou retiradas sem que o valor do expoente de Hurst se altere demasiadamente.

Com uma série de precipitação de chuvas sem interrupções de medidas foi estimado o valor do expoente de Hurst, em seguida retiradas algumas medidas, aplicadas as

propostas e novamente estimado o expoente de Hurst para cada caso. Comparando os resultados podemos verificar até que ponto a falta de uma ou mais medidas afetam a estimativa do expoente de Hurst.

Os dados das séries temporais de chuva foram obtidos no Departamento de Águas e Energia Elétrica do estado de São Paulo (DAEE) e são registros diários de quantidade de chuva, medidas em milímetros, durante períodos variados dependendo de cada posto de coleta de dados. Analisando os registros diários de cada posto, no período de 01/01/1978 a 31/12/1997, encontramos algumas séries sem ausência de medidas, algumas com ausências de poucos dias e outras com falta de registros por meses seguidos.

A série escolhida como padrão foi a do posto Usina Batista, do município de Pilar do Sul, com 7305 registros diários no período de 01/01/1978 a 31/12/1997 (série E4020) e para a estimativa do expoente de Hurst foi feito inicialmente uma correção pelo valor médio da série. Esta correção consiste em retirar de cada valor da série o valor médio das precipitações durante todo o período, fazendo que a série passe a ter um valor médio igual a zero.



b)

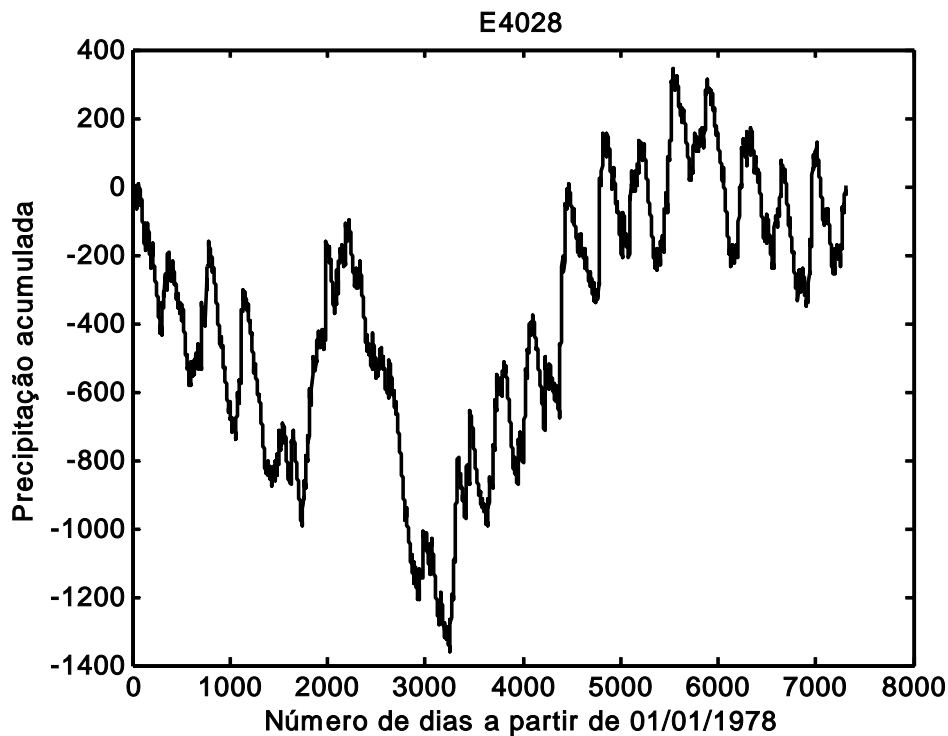


Figura 4.6 a) Gráfico de precipitação de chuvas no município de Pilar do Sul, posto Usina Batista no período de 01/01/1978 a 31/12/1997 (E4028).
b) Gráfico da soma cumulativa dos dados da série E4028 (corrigidos pela média e pela reta que passa no primeiro e último ponto).

Com essa nova série é feita a soma cumulativa dos dados e nova correção é feita com base na reta que passa pelo primeiro e último ponto da série (figura 4.6 b). Com esta última correção pretende-se retirar qualquer tendência originada pelo fato dos valores de precipitação serem todos maior ou igual a zero. Esta última correção é feita retirando de cada ponto da soma cumulativa dos desvios da média, o valor correspondente da reta que passa pelo primeiro e último ponto da série.

A substituição de medições ausentes pela média de medições anteriores foi feita de quatro maneiras diferentes:

- a) a medida que será substituída é sorteada dentro da série, é feita a substituição e o expoente de Hurst é estimado. Uma nova medida é substituída e o processo se repete;
- b) a substituição ocorre em posições consecutivas, a partir de uma posição sorteada, em direção ao final da série;
- c) semelhante ao anterior só que em direção ao início da série, e
- d) a substituição é feita baseada nas ausências presentes em séries de precipitação de postos de coletas próximos ao padrão escolhido.

Para a estimativa do expoente de Hurst foi utilizada a função cwt do software Matlab versão 7 (R14), a wavelet de Daubechies do tipo 8 e a escala baseada em potência de dois com o expoente variando de 0 a n, onde n é o maior inteiro menor que o logaritmo, da base dois, do número de elementos da série (CHIERICE, 2003, DAUBECHIES, 1992, MISITI ET All, 1996).

Uma vez calculado os coeficientes da transformada wavelet foi feito o gráfico do logaritmo, na base dois, da média do valor absoluto dos coeficientes pelo logaritmo, na base dois, da escala. O valor estimado do expoente de Hurst é dado pelo coeficiente angular da reta resultante menos 0,5 (CAMPANHA, 2004 e SIMONSEN et All, 1998).

Segundo TAYLOR, 1982, a incerteza ao se calcular o coeficiente angular da reta é dada por:

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - z_i)^2}{N-2}} \cdot \sqrt{\frac{N}{N \sum_{i=1}^N (x_i)^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2}}$$

onde

x_i logaritmo, na base 2, da escala

y_i logaritmo, na base 2, da média do valor absoluto dos coeficientes

N número de pontos usados para determinar a reta

z_i valores calculados sobre a reta para cada x_i

Nos procedimentos a, b e c, acima, a substituição ocorre até que a diferença entre o valor estimado da série original e o da série substituída seja igual ao erro presente na estimativa do expoente de Hurst. Como a substituição é feita uma por vez foi escolhida, de forma arbitrária, fazer a média das dez medições anteriores à medida que será substituída.

Na utilização do padrão de ausências de medições (item d) foi feito um teste para verificar qual o número de medições anteriores que deve ser usado no cálculo da média. O teste consiste em variar o número de medições anteriores no cálculo da média e ver qual permite estimar o expoente de Hurst mais próximo do valor da série padrão.

Com a série padrão (E4028) foi estimado o expoente de Hurst e encontramos o valor de $0,6339 \pm 0,0337$.

figura 4.7 a)

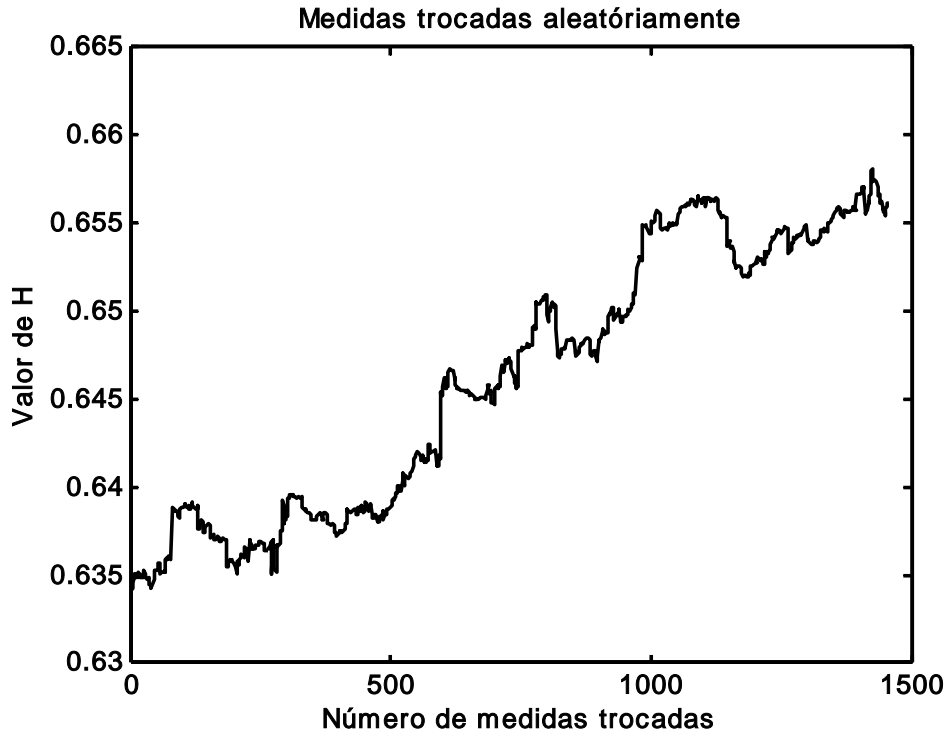


figura 4.7 b)

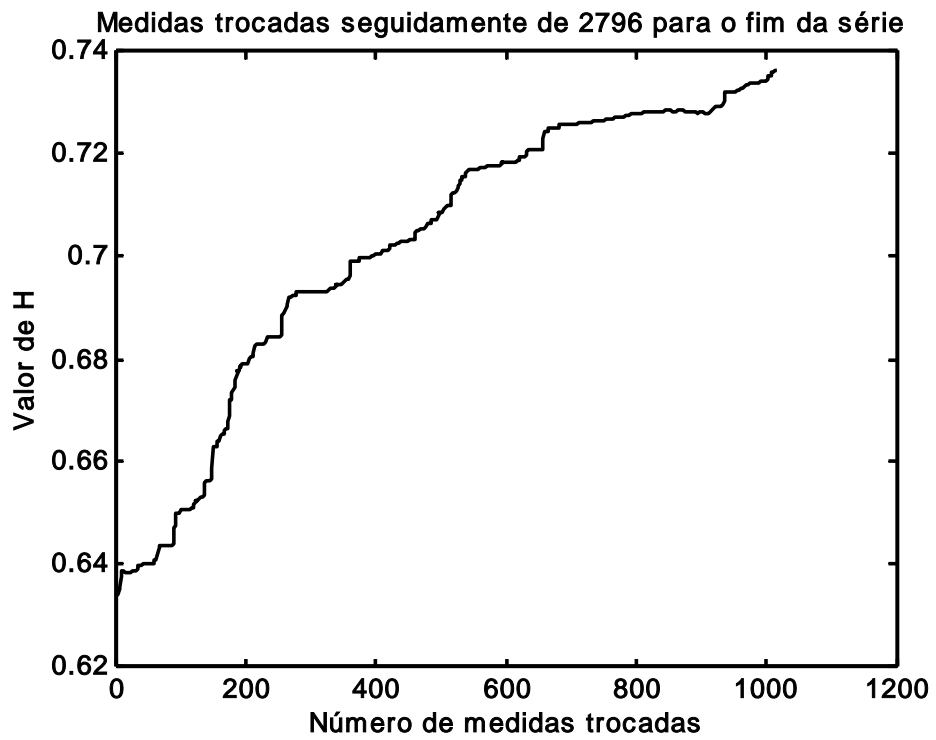


figura 4.7 c)

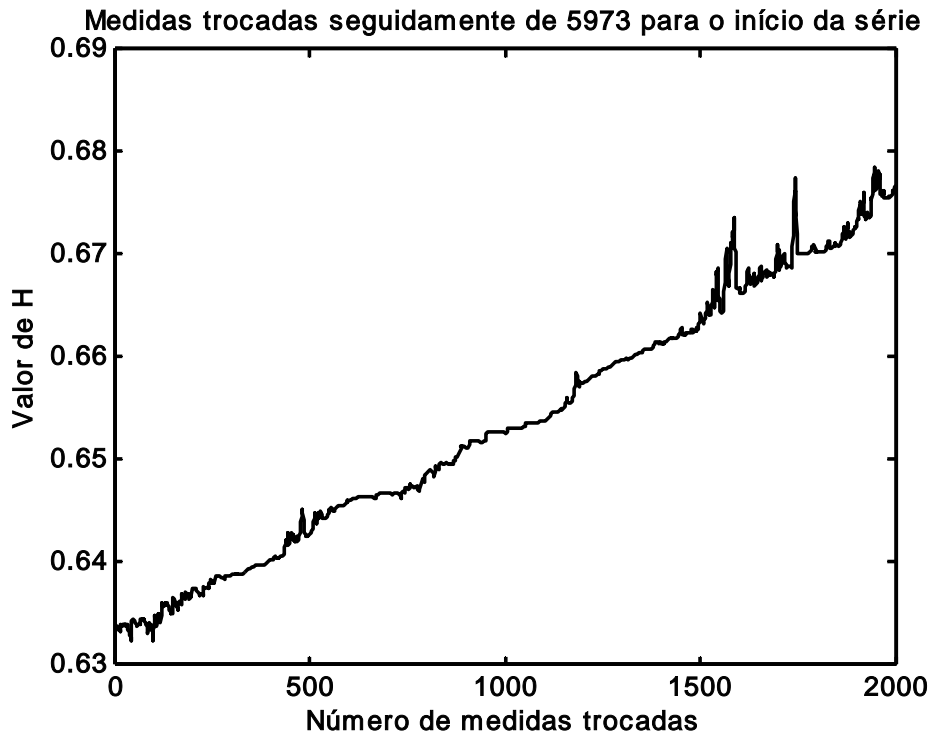


Figura 4.7 a) Medidas substituídas em posições aleatórias.
b) Medidas substituídas a partir da posição 2796 no sentido do final da série.
c) Medidas substituídas a partir da posição 5973 no sentido do início da série.

Com o primeiro tipo de substituição a diferença entre o valor de H da série padrão e o estimado após a substituição ainda é menor que o erro ($\pm 0,0338$) depois de 1424 substituições como podemos ver no gráfico *a* da *figura 4.7*.

No segundo tipo de substituição o início das trocas foi feito a partir da posição 2796 (sorteada) e continuou-se, seguidamente, no sentido do final da série, atingindo o erro após 174 substituições. Da mesma forma a terceira maneira de se fazer as substituições foi iniciada a partir da posição 5973 e seguidamente em sentido ao início da série. Os resultados podem ser vistos nos gráficos *b* e *c* da *figura 4.7*.

Para o último tipo de substituição foram escolhidas nove séries da mesma região que a série E4028 que apresentam diversos padrões de ausências de medições. Na *figura 4.8* temos os gráficos das séries G5002 e F5020 em que as posições em que não há registros de precipitação de chuvas foram marcadas com o número -20 e os gráficos com a variação do expoente de Hurst em função do número de elementos usados para o cálculo da média. Na *tabela 4.2* há a relação das nove séries, com identificação, o número de ausências

de medidas, número de medições usadas no cálculo da média, o valor estimado do expoente de Hurst mais próximo do padrão e a diferença encontrada.

figura 4.8 a)

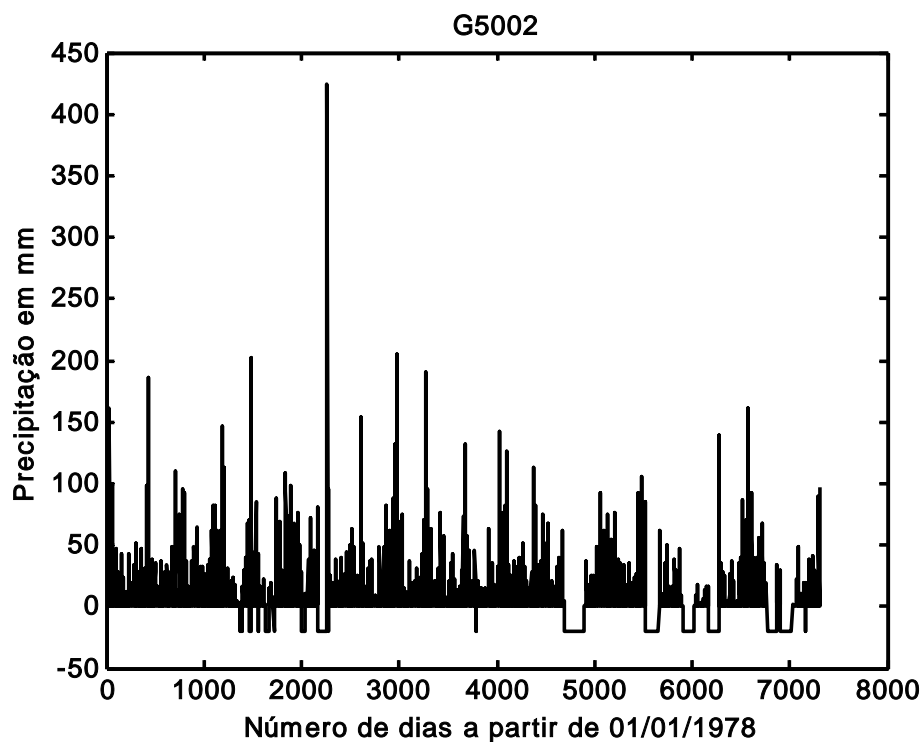


figura 4.8 b)

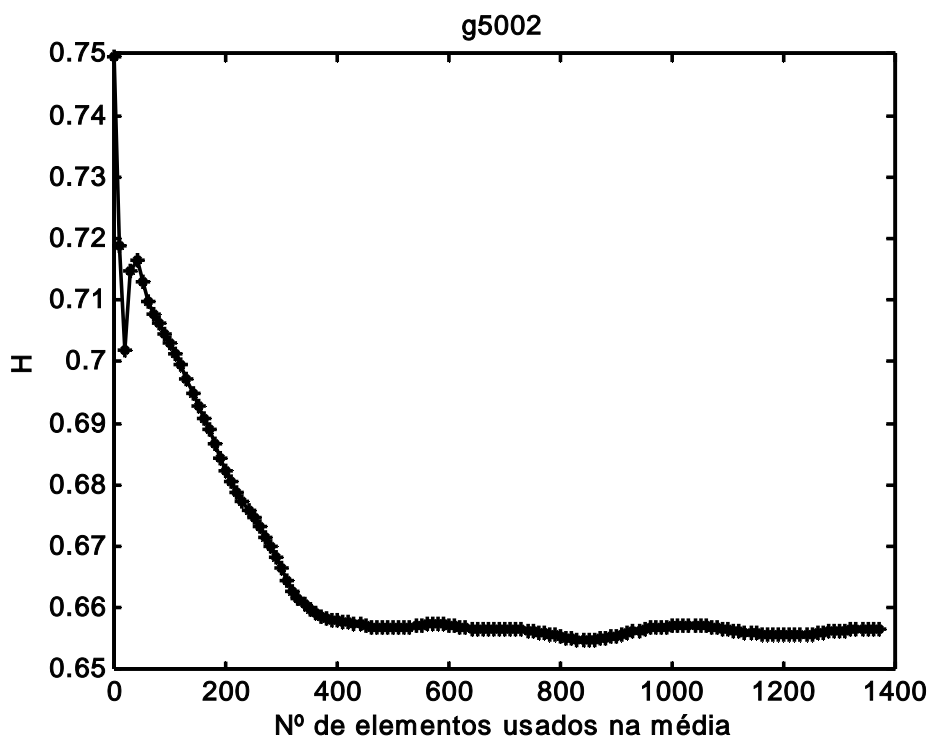


figura 4.8 c)

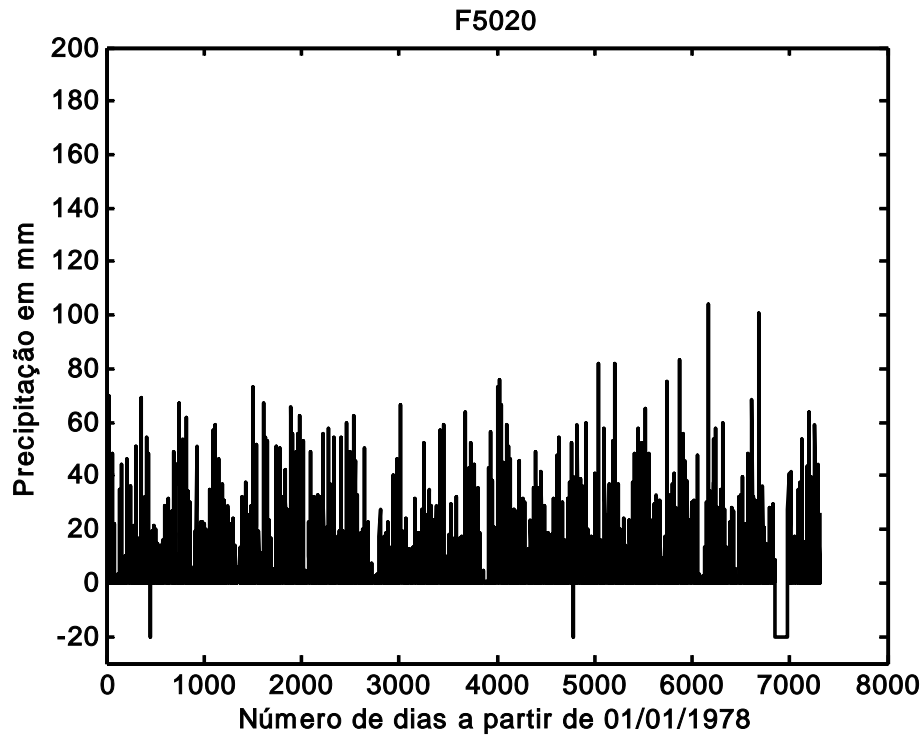


figura 4.8 d)

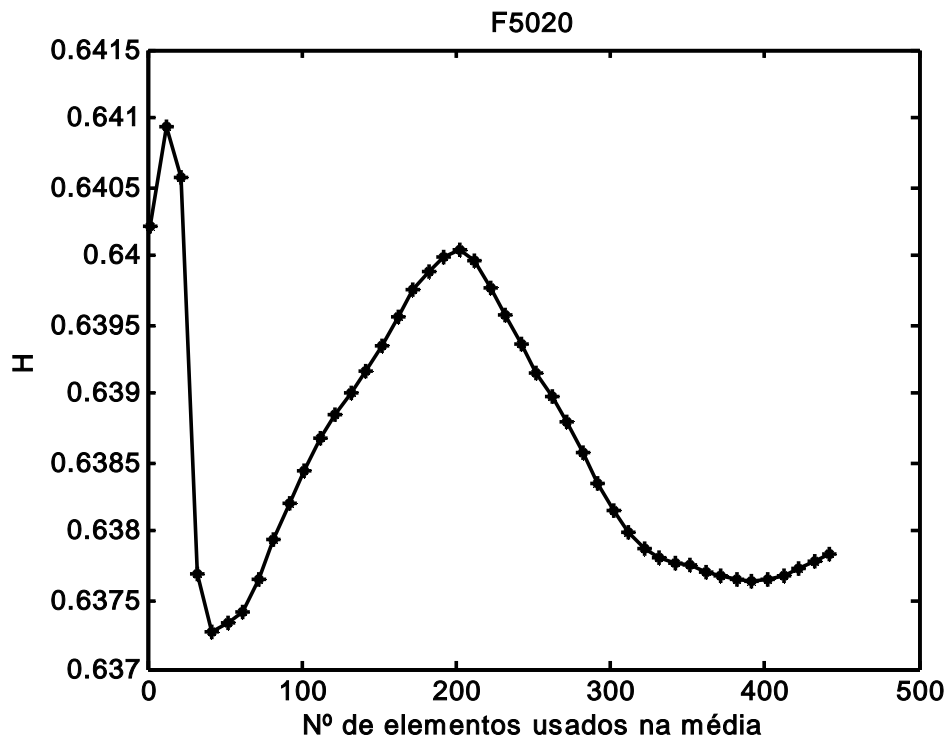


Figura 4.8 a) Precipitação de chuvas de Cananéia, posto Morro Redondo (G5002).
b) Variação de H com o número de elementos usados para o cálculo da média (G5002).
c) Precipitação de chuvas de Eldorado, posto Ouro Leve (F5020).
d) Variação de H com o número de elementos usados para o cálculo da média (F5020).

TABELA 4.2

Série de referência E4028 - $H=0,633947\pm 0,0337344$ $0,6002126 < H < 0,6676814$

Posto	Cidade	Número de ausências	Número de elementos da média	Valor de H	Diferença
G5002	Cananéia (Morro Redondo)	1037	852	0,6549	0,0215
E3043	Guarujá (Perequê)	365	54	0,6469	0,0135
E5018	Itapetininga (E. Hermilio)	266	26	0,6384	0,0050
F5020	Eldorado (Ouro Leve)	139	41	0,6373	0,0039
F4040	Iguape (Momuna)	52	59	0,6334	0,0
F4024	Registro (Jurumirim)	36	82	0,6350	0,0016
E5045	Itapeva	8	3	0,6335	0,0001

Tabela 4.2 - Valores de H usando a média das medidas anteriores para as ausências de medições.

Nos quatro casos de substituição das ausências pela média das medidas anteriores, encontramos que um grande número de medidas pode ser substituído pela média de medidas anteriores sem alterar significativamente o expoente de Hurst. No primeiro caso substituímos 1456 medidas (4 anos) e ainda não atingimos o limite do erro (*figura 4.7 a*).

No caso de substituição em seqüência (de 2976 no sentido do fim da série), o erro é atingido após 174 substituições, bem diferente dos demais casos. Provavelmente isto se dá pelo fato de que após 10 substituições começamos a usar na média valores já substituídos anteriormente (*figura 4.7 b*).

No terceiro caso chegamos ao ponto de 1572 substituições o que representa mais de quatro anos de medidas (*figura 4.7c*) lembrando que para estes três casos não foi feito um teste para ver qual o número ideal de elementos que devem ser usados na média.

O principal resultado fica por conta da substituição utilizando um padrão de ausência de medidas de um posto meteorológico da mesma região climática. Verificamos que o número ideal de medições a ser usado para calcular a média é diferente para cada série usada (*figura 4.8*) e os valores estimados para o expoente de Hurst são praticamente iguais ao estimado na série padrão (*Tabela 4.2*).

A segunda proposta nos leva a juntar as partes sem interrupções de medições e tratar como se fosse uma série completa.

Para esta proposta usamos a mesma série padrão, E4028, e fizemos a retirada de medidas de três maneiras: aleatória, seguidamente a partir de uma posição e usando padrões de ausências de séries da mesma região climática que a padrão (as mesmas usadas na substituição pela média).

Nos dois primeiros casos a cada retirada de uma medida, os dois trechos são unidos, o novo expoente de Hurst é estimado e comparado com o valor da série padrão.

No terceiro caso as posições das ausências das séries escolhidas são transferidas para a série padrão, os trechos com medidas são unidos e o expoente de Hurst é estimado.

A *figura 4.9 a* mostra o gráfico da variação do expoente de Hurst com a retirada aleatória de medições e vemos que a retirada de mais de 1300 medidas o expoente de Hurst não atingiu o limite do erro encontrado na estimativa de H.

figura 4.9 a)

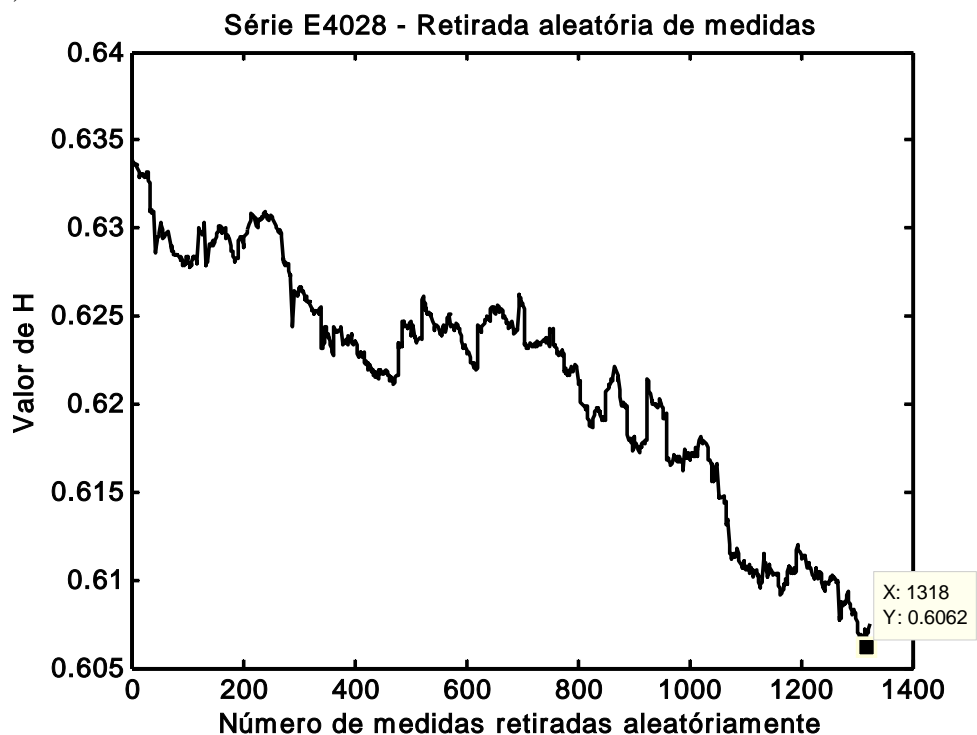


figura 4.9 b)

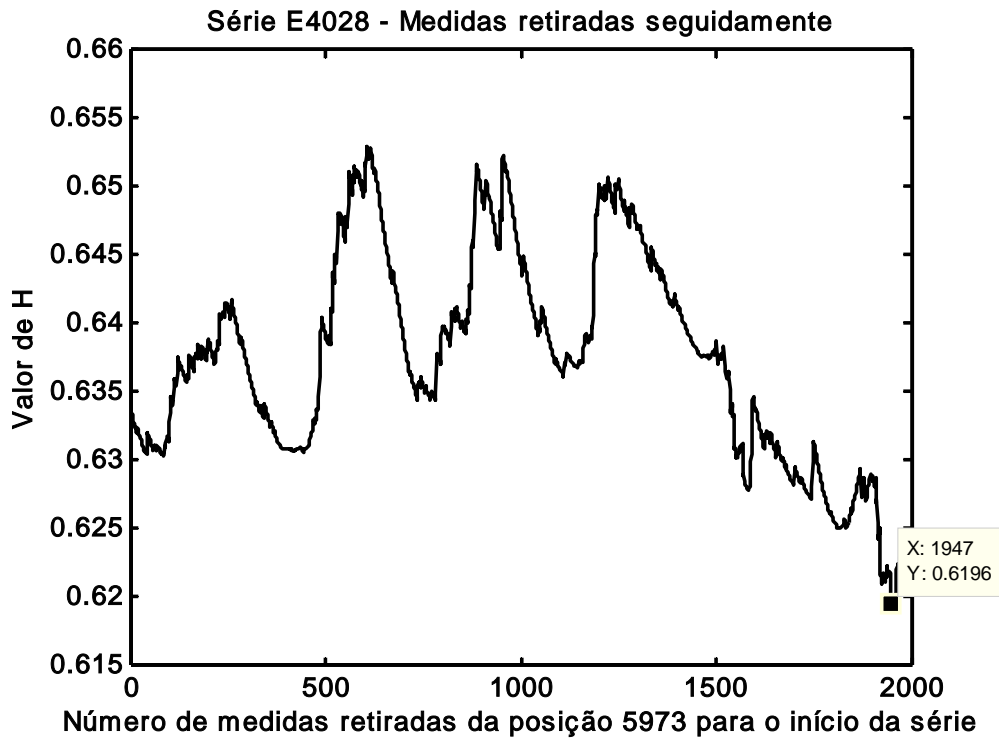


Figura 4.9 a) Medidas retiradas em posições aleatórias.

b) Medidas retiradas seguidamente a partir da posição 5973 em direção ao início da série.

No caso da retirada seguida de medições a figura 4.9 b mostra que mesmo após a retirada de 2000 medidas o expoente de Hurst não atingiu o limite do erro.

Na tabela 4.3 podemos ver que a diminuição da série pela retirada das medidas não altera significativamente o valor de H

TABELA 4.3

Série de referência E4028 - $H=0,633947 \pm 0,0337344$ $0,6002126 < H < 0,6676814$

Posto	Cidade	Número de ausências	Número de elementos da série	Valor de H	Diferença
G5002	Cananéia (Morro Redondo)	1037	6268	0,6422	0,0083
E3043	Guarujá (Perequê)	365	6940	0,6347	0,0008
E5018	Itapetininga (E. Hermilio)	266	7039	0,6417	0,0078
F5020	Eldorado (Ouro Leve)	139	7166	0,6367	0,0028
F4040	Iguape (Momuna)	52	7253	0,6329	-0,0011
F4024	Registro (Jurumirim)	36	7269	0,6354	0,0015
E5045	Itapeva	8	7297	0,6322	-0,0018

Tabela 4.3 - Valores de H usando a união dos trechos sem ausências de medições.

Nesta segunda proposta, união dos trechos com medições, apresenta resultados melhores que os resultados da substituição pela média das medidas anteriores e será utilizada no nosso trabalho.

Os gráficos da *figura 4.9* e a *tabela 4.3* nos mostram que em nenhum dos casos analisados os valores estimados do expoente de Hurst ficou fora dos limites impostos pelo erro cometido ao estimar o valor de H.

4.4 - Escolha da wavelet mais adequada para estimar o expoente de Hurst

Não existe um método científico para a escolha da wavelet a ser usada na análise de uma série usando a transformada wavelet e em função disto, mais uma vez recorreremos às séries de movimento browniano fracionário com o valor de H conhecido a priori.

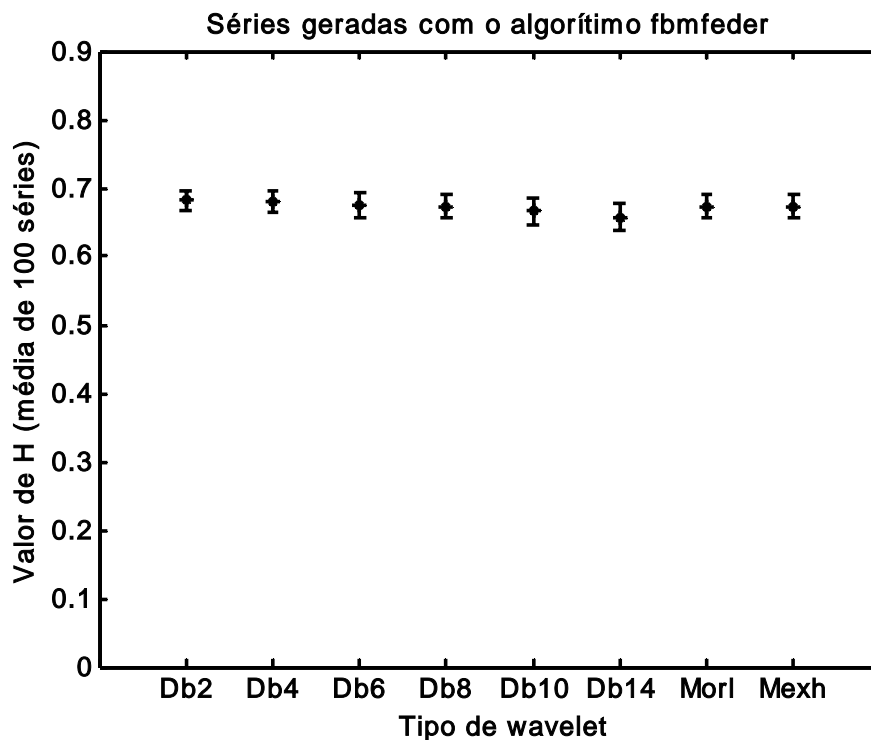


Figura 4.10 Valor médio do expoente de Hurst em função da wavelet usada para estimá-lo.

Utilizando o algoritmo do deslocamento do ponto médio descrito por VOSS, PEITGEN et al, 1988, foram geradas 100 séries, com $H=0.7$ (valor de H próximo aos valores encontrados para as série de precipitação de chuvas) e 8192 elementos. Para cada série o valor de H foi estimado usando oito wavelets diferentes e por fim um valor médio de H foi calculado para cada wavelet.

As wavelets usadas foram as da família Daubechies, (ordem 2, 4, 6, 8, 10,14), Morlet e Chapéu mexicano.

O resultado do teste pode ser visto na *figura 4.10*. Praticamente todas as waveletes estimaram, na média, o mesmo valor do expoente de Hurst e em função disto no nosso trabalho usamos a wavelet Daubechies de ordem 8.

O fato dos valores médios de H aparecerem abaixo da linha $H=0,7$ é uma característica do gerador de fbm utilizado (mpdwalk), uma vez que, na *figura 4.4 b* também aparece o valor médio abaixo de 0,7.

CAPÍTULO 5

Análise de séries temporais de chuvas

Nos trabalhos de CHIERICE, 2003 e FAVARETTO, 2004, foram analisados dados de chuva do estado de São Paulo em séries de chuvas de tamanhos, épocas e regiões climáticas diferentes. Neste trabalho, inicialmente, pretendia-se que todas as séries analisadas fossem do mesmo período e tivessem o mesmo tamanho. Posteriormente resolvemos agrupar as séries por região climática usando a divisão apresentada por MONTEIRO, 1973, em seu atlas A DINÂMICA CLIMÁTICA E AS CHUVAS NO ESTADO DE SÃO PAULO.

A análise das séries foi feita com o intuito de caracterizar cada região climática do estado de São Paulo com o expoente de Hurst.

5.1 - Obtenção e tratamento dos dados pluviométricos

Em 1998 o Departamento de Águas e Energia do estado de São Paulo disponibilizou o seu banco de dados pluviométricos, por meio de um CD('compact disc'), com

registros de todos os postos até o ano de 1997. Os dados estão classificados por cidade, postos meteorológicos, por data e se apresentam com valores de precipitações de chuva, medidos em milímetros, para cada dia. Apresenta ainda o valor total mensal, a chuva máxima e a quantidade de dias com chuvas para cada mês.

Uma primeira análise foi feita no sentido de separar os postos meteorológicos que continham medições por vinte anos ou mais e principalmente que continham medições no período de 01/01/1978 a 31/12/1997. O período de vinte anos foi escolhido em função dos dados disponíveis e por que séries com este tamanho apresentam um expoente de Hurst com poucas variações em função do tamanho. Se aumentássemos o tamanho das séries o número de séries em cada região diminuiria drasticamente.

Como já mencionado no capítulo 4 algumas séries apresentam faltas de medições e na transformação dos dados para um formato compatível com o 'software' MATLAB (arquivos com extensão .mat), as ausências de medições foram transformadas em uma precipitação de -20 ficando assim mais fácil a sua identificação.

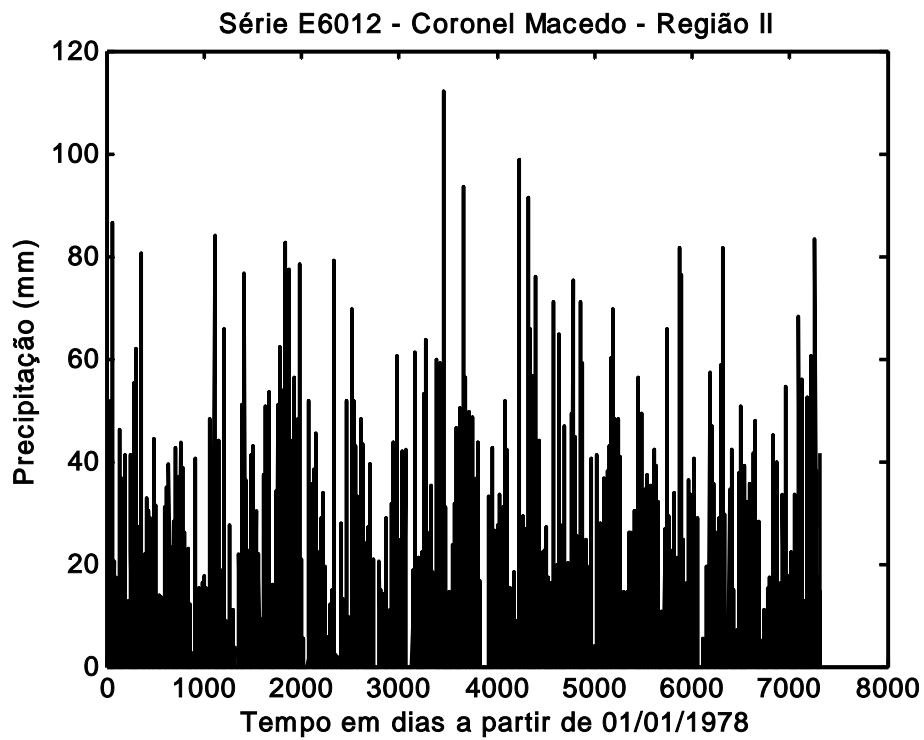
Após a transformação dos dados em uma série de precipitações em seqüência, dia após dia, foi aplicada, para as séries com faltas de medições, a segunda proposta discutida no item 4.3, a união dos trechos da série sem faltas de medições. A utilização da segunda proposta se deve ao fato de que na simulação feita com o padrão de faltas numa série completa, foi a que estimou o expoente de Hurst mais próximo do original.

O próximo passo foi separar para cada região e sub-região climática as séries que seriam analisadas. Em cada região o número de séries usadas foi diferente devido à disponibilidade de séries que atendiam aos nossos requisitos.

5.2 - Estimativa do expoente de Hurst para cada série de precipitação

O gráfico *a)* da *figura 5.1* mostra uma série de precipitação de chuvas e a primeira coisa a fazer é uma correção da série pela média. Esta correção consiste em calcular a média das precipitações e retirar de cada valor da série. Esta correção faz que a série fique com média zero, ou seja, cada pico representa o deslocamento da média que podemos ver no gráfico *b)* da *figura 5.1*.

a)



b)

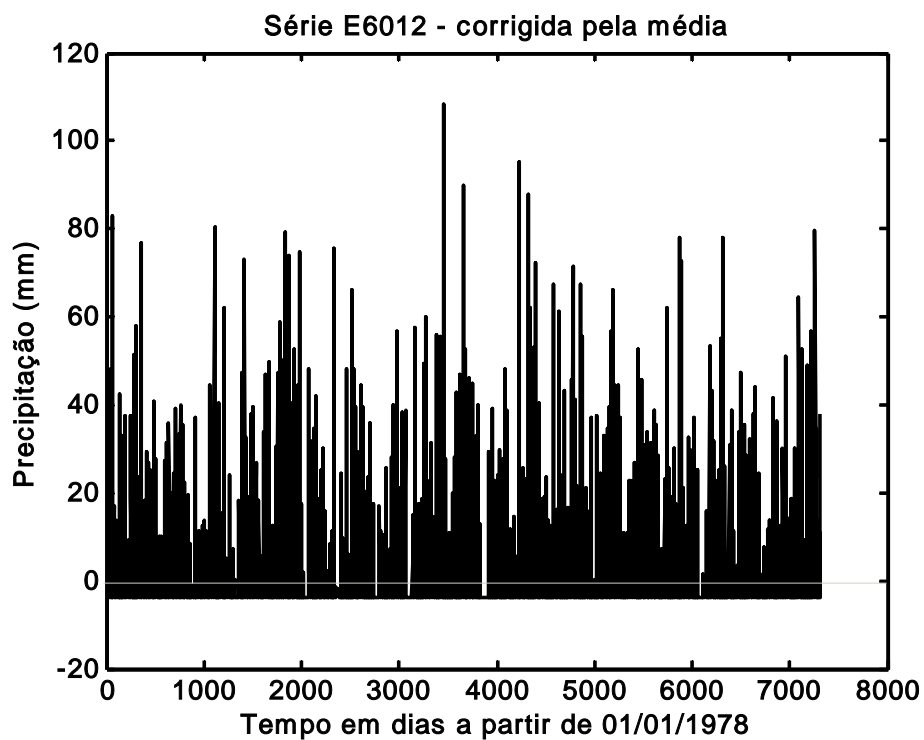


Figura 5.1 - a) Gráfico de uma série temporal de precipitação de chuvas.
b) Gráfico de uma série temporal de precipitação de chuvas corrigida pela média. Para esta série a média das precipitações considerando os 20 anos é de 3,6260 mm e temos 5491 dias com precipitação zero.

O próximo passo é fazer a soma cumulativa dos elementos da série (*figura 5.2-a*) e aplicar uma última correção para retirar qualquer tendência de deslocamento em uma direção preferencial.

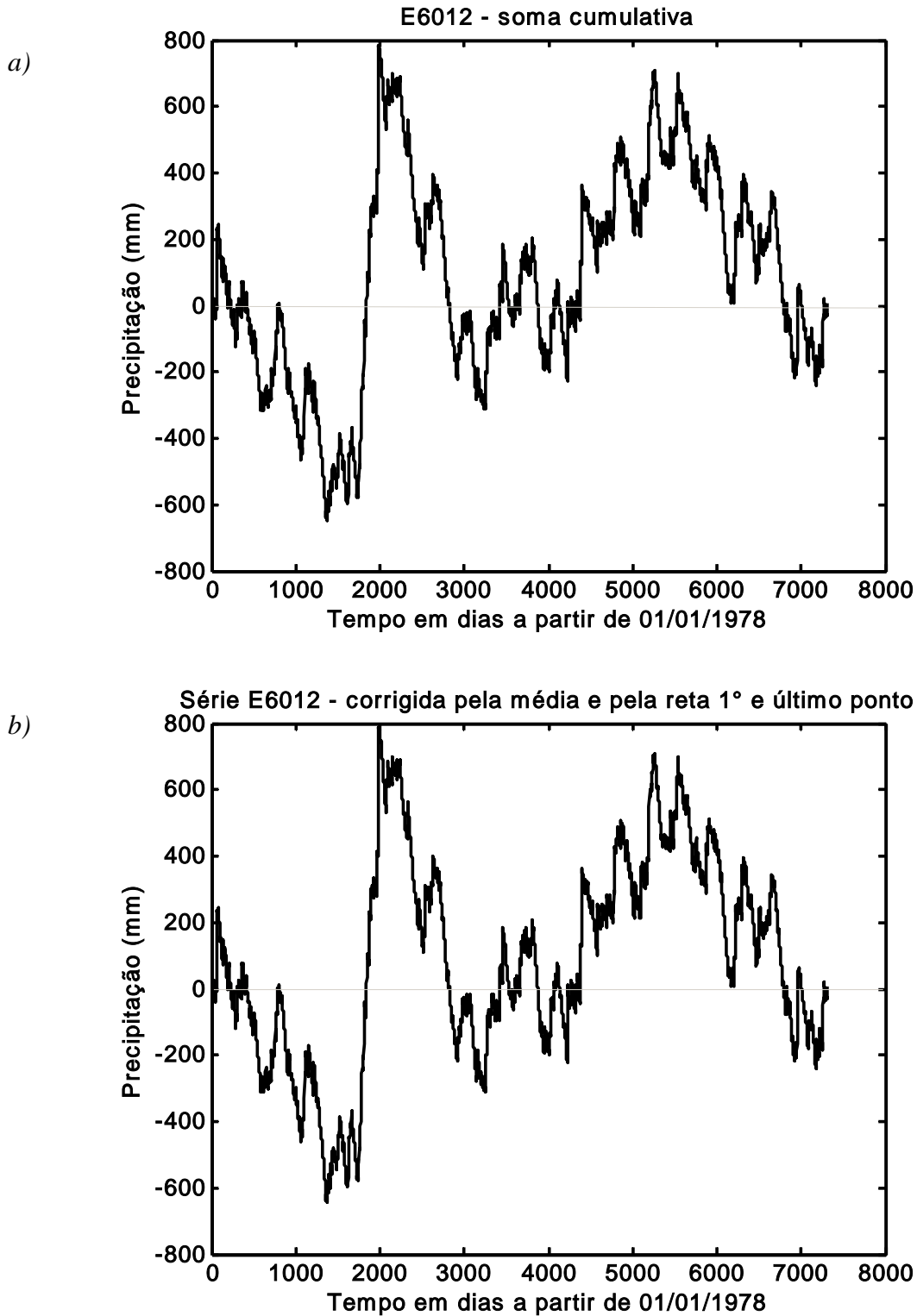


Figura 5.2 - a) Gráfico da soma cumulativa de uma série de precipitação de chuvas.
b) Gráfico anterior corrigido pela reta que passa pelo primeiro e último ponto.

Esta correção consiste em traçar uma reta unindo o primeiro e o último ponto, e retirar de cada elemento da série, na posição t , o valor calculado sobre a reta na posição t (figura 5.2-b).

Neste ponto temos uma série da soma cumulativa dos desvios da média de precipitação de chuvas, sem interrupções, corrigida pela reta que passa pelo primeiro e último ponto pronta para ter o seu expoente de Hurst estimado por meio da transformada wavelet.

Usando o método ACW descrito no item 3.8, com a wavelet Daubechies de ordem 8 e a escala em potência de dois, foram estimados o expoente de Hurst para todas as séries selecionadas das regiões climáticas.

O resultado para as nove regiões climáticas do estado de São Paulo é apresentado nas tabelas 5.1 a 5.9

REGIÃO I

MUNICÍPIO	POSTO	Nº	FALTAS	H	ERRO(H)
Sub-região I					
Cunha (Ferraz)	e2134	1	209	0.7243	0.0290
São Luiz do Paraitinga (Catucaba)	e2055	2	4	0.6050	0.0476
Natividade da Serra (Laranjal)	e2116	3	8	0.6294	0.0489
Natividade da Serra	e2008	4	25	0.6173	0.0444
Paraibuna (Alegre)	e2130	5	12	0.6204	0.0480
Natividade da Serra (B. Alto)	e2024	6	14	0.5800	0.0519
São Luiz do Paraitinga (Briet)	e2135	7	5	0.5876	0.0509
Cunha (Vargem do Tanque)	d1025	8	689	0.6063	0.0543
Sub-região Ia					
Ubatuba (Picinguaba)	e1004	9	122	0.6760	0.0216
Ilha Bela	e2012	10	532	0.6548	0.0306
São Sebastião (São Francisco)	e2045	11	51	0.6536	0.0286
Caraguatatuba (Porto Novo)	e2128	12	844	0.6548	0.0360
Ubatuba (Maranduba)	e2122	13	145	0.6361	0.0312
Cunha (Rio Manso)	e1006	14	11	0.5821	0.0572

Média dos postos 1 a 8 H=0,6213 erro médio 0,0469

Média dos postos 9 a 14 H=0,6429 erro médio 0,0342

Média geral H=0,6306 erro médio 0,0414

Tabela 5.1 - Valores de H para as séries da região climática I

REGIÃO II

MUNICÍPIO	POSTO	Nº	FALTAS	H	ERRO(H)
Sub-região IIa					
Cananéia (Morro Redondo)	g5002	1	1037	0.6598	0.0291
Iguape (Momuna)	f4040	2	52	0.6281	0.0411
Itariri (B. Igrejinha)	f4011	3	2	0.6090	0.0428
Miracatu (Pedra do Largo)	f4012	4	236	0.6442	0.0290
Juquiá (Escalvado)	f4037	5	177	0.6437	0.0297
Registro (Jurumirim)	f4024	6	36	0.6497	0.0304
Registro	f4005	7	1	0.6217	0.0409
Eldorado	f5007	8	5	0.6382	0.0322
Eldorado (Ouro Leve)	f5020	9	139	0.6512	0.0312
Cajati (Barra do Azeite)	f5014	10	193	0.6598	0.0291
Sub-região IIb					
Monguaguá	f3002	11	65	0.6373	0.0233
São Vicente	e3056	12	352	0.6357	0.0308
Guarujá (Pereque)	e3043	13	365	0.5994	0.0357
Santos (Caeté)	e3041	14	27	0.6079	0.0304
Sub-região IIc					
Pilar do Sul (U. Batista)	e4028	15	0	0.6339	0.0337
Coronel Macedo	e6012	16	0	0.6386	0.0184
Itapeva	e5045	17	8	0.6115	0.0286
Itararé (B. Boa Vista)	e6032	18	0	0.6327	0.0219
Barra do Chapéu	f6006	19	39	0.6179	0.0259
Ribeirão Branco (Pinara)	f5039	20	10	0.6435	0.0227
Capão Bonito (F. Santa Inês)	e5071	21	7	0.621	0.0317
São Miguel Arcanjo (Taquaral)	f4031	22	1	0.6268	0.0362
Piedade (B. Ribeirão Bonito)	e4132	23	1	0.6222	0.0345
Guapiara (B. Pinheiro)	f5010	24	5	0.6672	0.0200
Itapeva (Guarizinho)	e5032	25	2	0.6404	0.0286
Itapetininga (Eng. Hermilio)	e5018	26	266	0.6163	0.0338
Itapetininga (Gramadinho)	e5034	27	1	0.6177	0.0393
Sub-região IId					
Mogi das Cruzes (taiacupeba)	e3223	28	233	0.5964	0.0512
Mauá	e3148	29	278	0.5966	0.0498
Santo André (Paranapiacaba)	e3037	30	143	0.6864	0.0226
São Bernardo do Campo (Rio Acima)	e3244	31	52	0.6279	0.0395
São Paulo (Santo Amaro)	e30006	32	203	0.6315	0.0413

Média dos postos 1 a 10	H= 0,6385	erro médio 0,0347
Média dos postos 11 a 14	H=0,6201	erro médio 0,0300
Média dos postos 15 a 27	H=0,6300	erro médio 0,0289
Média dos postos 28 a 32	H=0,6278	erro médio 0,0409
Média geral	H=0,6311	erro médio 0,0325

Tabela 5.2- Valores de H para as séries da região climática II

REGIÃO III

MUNICÍPIO	POSTO	Nº	FALTAS	H	ERRO(H)
Guararema (Paratei)	e3054	1	26	0.6216	0.0440
Jacarei	e2031	2	202	0.6092	0.0479
São José dos Campos (Pararangaba)	e2099	3	32	0.6307	0.0429
Caçapava (Quirino)	e2048	4	6	0.6180	0.0470
Taubaté (Macuco)	e2127	5	440	0.5993	0.0535
Guaratinguetá (Brumado)	d2009	6	118	0.5937	0.0561
Silveiras	d1020	7	0	0.6071	0.0529
Lorena	d2035	8	2	0.6337	0.0438

Média geral H= 0,6142 erro médio 0,0485

Tabela 5.3 - Valores de H para as séries da região climática III

REGIÃO IV

MUNICÍPIO	POSTO	Nº	FALTAS	H	ERRO(H)
Sub-região IVa					
Piracaia (Crioulos)	e3229	1	181	0.6681	0.0345
São José dos Campos (Guirra)	d3070	2	11	0.6189	0.0484
São José dos Campos (S. F. Xavier)	d2021	3	1	0.6081	0.0549
Monteiro Lobato (S. Benedito)	d2026	4	323	0.6647	0.0427
Campos do Jordão (Capivari)	d2001	5	5	0.6024	0.0553
Sub-região IVb					
Atibaia	e3074	6	139	0.6425	0.0422
Pinhalzinho	d3036	7	83	0.6966	0.0378
Socorro	d3030	8	16	0.671730	0.0370
Lindóia	d3014	9	20	0.6423	0.0458
Agua de Lindóia	d3024	10	9	0.6270	0.0490
Espirito Santo do Pinhal (U. Pinhal)	d3003	11	24	0.6241	0.0474
São João da Boa Vista (F. Paraíso)	d3066	12	24	0.6447	0.0463
Agua da Prata (Fartura)	c3043	13	5	0.5682	0.0678
São José do Rio Pardo	c3035	14	5	0.6140	0.0536
Caconde	c3014	15	23	0.6668	0.0482

Média dos postos 1 a 5 H=0,6324 erro médio 0,0472

Média dos postos 6 a 15 H=0,6398 erro médio 0,0475

Média geral H=0,6373 erro médio 0,0474

Tabela 5.4- Valores de H para as séries da região climática IV

REGIÃO V

MUNICÍPIO	POSTO	Nº	FALTAS	H	ERRO(H)
Sub-região Va					
Mococa (Sitio Esplanada)	c4069	1	1	0.6292	0.0518
Santa Rosa do Viterbo (Bom Sucesso)	c4103	2	104	0.6394	0.0483
Tambau	c4093	3	10	0.6404	0.0500
Santa Rita do Passa Quatro (Usina)	c4095	4	1	0.6414	0.0481
Porto Ferreira	c4094	5	31	0.6113	0.0541
Casa Branca (Venda Branca)	c4097	6	22	0.6191	0.0504
Pirassununga (Fernando Costa)	c4085	7	37	0.5983	0.0565
Santa Cruz da Conceição (S.S.Geraldo)	d4032	8	34	0.6283	0.0458
Leme (Cresciumal)	d4030	9	0	0.6324	0.0465
Mogi Guaçu (Capetinga)	d4105	10	0	0.6120	0.0500
Rio Claro (F. São José)	d4016	11	0	0.6313	0.0446
Santa Gertrudes	d4059	12	31	0.6381	0.0417
Araras (Santa Cruz)	d4034	13	7	0.5962	0.0519
Sub-região Vb					
Matão	c5074	14	99	0.6046	0.0561
Tabatinga (Araruba)	c5107	15	69	0.6351	0.0437
Santa Lucia	c5011	16	1	0.6204	0.0531
Araraquara (Chibarro)	c5017	17	14	0.5346	0.0531
Bocaina	d5077	18	0	0.6246	0.0472
Ribeirão Bonito	d5003	19	103	0.6264	0.0457
Brotas (Campo Redondo)	d4098	20	5	0.6659	0.0350
Itirapina	d4014	21	270	0.6551	0.0425
Torrinha (U. Três Saltos)	d5006	22	3	0.6669	0.0392
Sub-região Vc					
Icem	b6001	23	35	0.6493	0.0513
Colombia (F. Campo Grande)	b5063	24	16	0.5845	0.0640
Guaira (F. Antas)	b5040	25	1	0.6013	0.0599
Ituverava	b4034	26	1	0.6462	0.0522
Pedregulho (Alto do Lajeado)	b4062	27	56	0.6206	0.0638
Itirapuá	b4053	28	3	0.6610	0.0491
Sales de Oliveira (F. Conquista)	b4012	29	12	0.6216	0.0518
Morro Agudo	b5004	30	6	0.5983	0.0586
Colina	b5028	31	33	0.6150	0.0564
Olímpia (F. Cruz Alta)	b6053	32	30	0.5977	0.0585
Novais	b5003	33	15	0.6256	0.0553
Monte Alto	c5070	34	5	0.6534	0.0477
Sertãozinho (U. Sta Elisa)	c5114	35	77	0.6228	0.0550
Altinópolis (Aguas Virtuosas)	c4106	36	29	0.6166	0.0537

Média dos postos 1 a 13	H= 0,6244	erro medio 0,0492
Média dos postos 14 a 22	H= 0, 6259	erro medio 0,0462
Média dos postos 23 a 36	H= 0, 6224	erro medio 0,0555
Média geral	H= 0,6240	erro medio 0,0509

Tabela 5.5 - Valores de H para as séries da região climática V

REGIÃO VI

MUNICÍPIO	POSTO	Nº	FALTAS	H	ERRO(H)
Anhembi	d5037	1	41	0.6323	0.0371
Itu (Pirapitingui)	e4023	2	77	0.6320	0.0351
Mairinque (D. Catarina)	e4043	3	10	0.6874	0.0333
Boituva	e4046	4	1	0.6273	0.0374
Laranjal Paulista	e4050	5	74	0.6212	0.0398
Capivari	d4069	6	70	0.6385	0.0377
Rio das Pedras	d4068	7	5	0.6599	0.0349
Campinas	d4044	8	0	0.6376	0.0390

Média geral

H= 0.6420

erro medio 0.0368

Tabela 5.6 - Valores de H para as séries da região climática VI

REGIÃO VII

MUNICÍPIO	POSTO	Nº	FALTAS	H	ERRO(H)
Aguas de Santa Bárbara	d6006	1	115	0.6095	0.0433
Itatinga (Lobo)	d5040	2	6	0.6440	0.0345
Bauru	d6036	3	43	0.6284	0.0393
Iacanga (F. Barreirinho)	c5029	4	2	0.6308	0.0466
Borborema (F. Ano Bom do Tiete)	c6056	5	3	0.6755	0.0359
Borborema (F. Laranjal)	c5082	6	102	0.6007	0.0529
Santa Cruz do Rio Pardo (Sodrelia)	d6028	7	92	0.6230	0.0411
Avaré (F. Sta Gabriela)	d5080	8	56	0.6537	0.0360
Paulistânia	d6091	9	1	0.6415	0.0322
Pardinho	e5060	10	13	0.6441	0.0362
Lençóis Paulista (Gleba Rio Claro)	d5081	11	2	0.6173	0.0385
Novo Horizonte (F. Uirapuru)	c6099	12	38	0.6512	0.0394
Avaré	e5014	13	8	0.6210	0.0367
Agudos	d5041	14	196	0.6360	0.0394
Reginópolis	c6050	15	5	0.6368	0.0424

Média geral

H= 0.6342

erro medio 0.0396

Tabela 5.7 - Valores de H para as séries da região climática VII

REGIÃO VIII

MUNICÍPIO	POSTO	Nº	FALTAS	H	ERRO(H)
Andradina	b8004	1	161	0.6023	0.0457
Alto Alegre	c7011	2	3	0.5759	0.0523
Andradina (Três Irmãos)	b8029	3	12	0.5956	0.0500
Auriflama	b7045	4	38	0.5954	0.0544
Brauna (F. N.S. Aparecida)	c7016	5	2	0.6143	0.0415
Floreal	b7037	6	19	0.6090	0.0558
Flórida Paulista (F. Sto André)	c8030	7	0	0.6149	0.0452
Gastão Vidigal	b7043	8	39	0.6179	0.0478
Itapura	b8023	9	7	0.5971	0.0504
Jales	b7008	10	31	0.5570	0.0655
José Bonifácio	c6088	11	90	0.6252	0.0456
Marília (Dirceu)	d6098	12	0	0.6218	0.0428
Marília (Amadeu Amaral)	d7067	13	1	0.6365	0.0343
Mirandópolis (Yuba)	c8056	15	3	0.6278	0.0439
Muritinga do Sul (F. Boa Vista)	c8051	16	17	0.6254	0.0468
Osvaldo Cruz	c7067	17	21	0.6404	0.0382
Panorama	c8019	18	10	0.6136	0.0420
Pereira Barreto (Ideal)	b8030	19	5	0.5841	0.0508
Planalto (São Jerônimo)	c6101	20	13	0.5772	0.0568
Pontalinda	b7038	21	19	0.5609	0.0627
Rubiaceia (Caramuru)	c7081	22	12	0.5654	0.0552
Santa Fé do Sul	b7024	23	0	0.5973	0.0563
Sud Mennucci	b7046	24	32	0.5538	0.0636
Tupã (Varpa)	d7061	25	11	0.5810	0.0479
Tupã	c7043	26	2	0.5715	0.0523
Turiuba	b7050	27	81	0.6029	0.0531
Ubarana (F. cataco)	c6089	28	7	0.6484	0.0407
Valparaíso (Perpetuo Socorro)	c7049	29	4	0.6153	0.0444

Média geral

H= 0,6010

erro medio 0,0495

Tabela 5.8 - Valores de H para as séries da região climática VIII

REGIÃO IX

MUNICÍPIO	POSTO	Nº	FALTAS	H	ERRO(H)
Presidente Epitácio (Sul Mineira)	c9007	1	36	0.6087	0.0339
Maracai (B. Agua do Mato)	d7041	2	2	0.5935	0.0398
Mirante do Paranapanema	d8008	3	2	0.6149	0.0306
Marabá Paulista	d8035	4	8	0.6360	0.0265
Santo Anastácio (F. Santa Isabel)	d8038	5	0	0.6287	0.0308
Narandiba	d8040	6	28	0.6253	0.0302
Presidente Venceslau (F. Clotilde)	d8048	7	309	0.6173	0.0265
Iepe (Jaguarete)	d8053	8	10	0.5835	0.0431
Rosana (Itaporã)	d9001	9	47	0.6284	0.0222
Teodoro Sampaio (Santaida)	d9002	10	21	0.5776	0.0355
Teodoro Sampaio	d9003	11	10	0.5872	0.0363
Rosana (Nova do Pontal)	d9016	12	31	0.5765	0.0366
Presidente Epitácio (Sucurita)	d9019	13	17	0.6283	0.0269
Florinea	d7054	14	103	0.5969	0.0341
Candido Mota (F. Sta Rosa)	d7056	15	33	0.5882	0.0385

Média geral

H= 0,6060

erro medio 0,0328

Tabela 5.9 - Valores de H para as séries da região climática IX

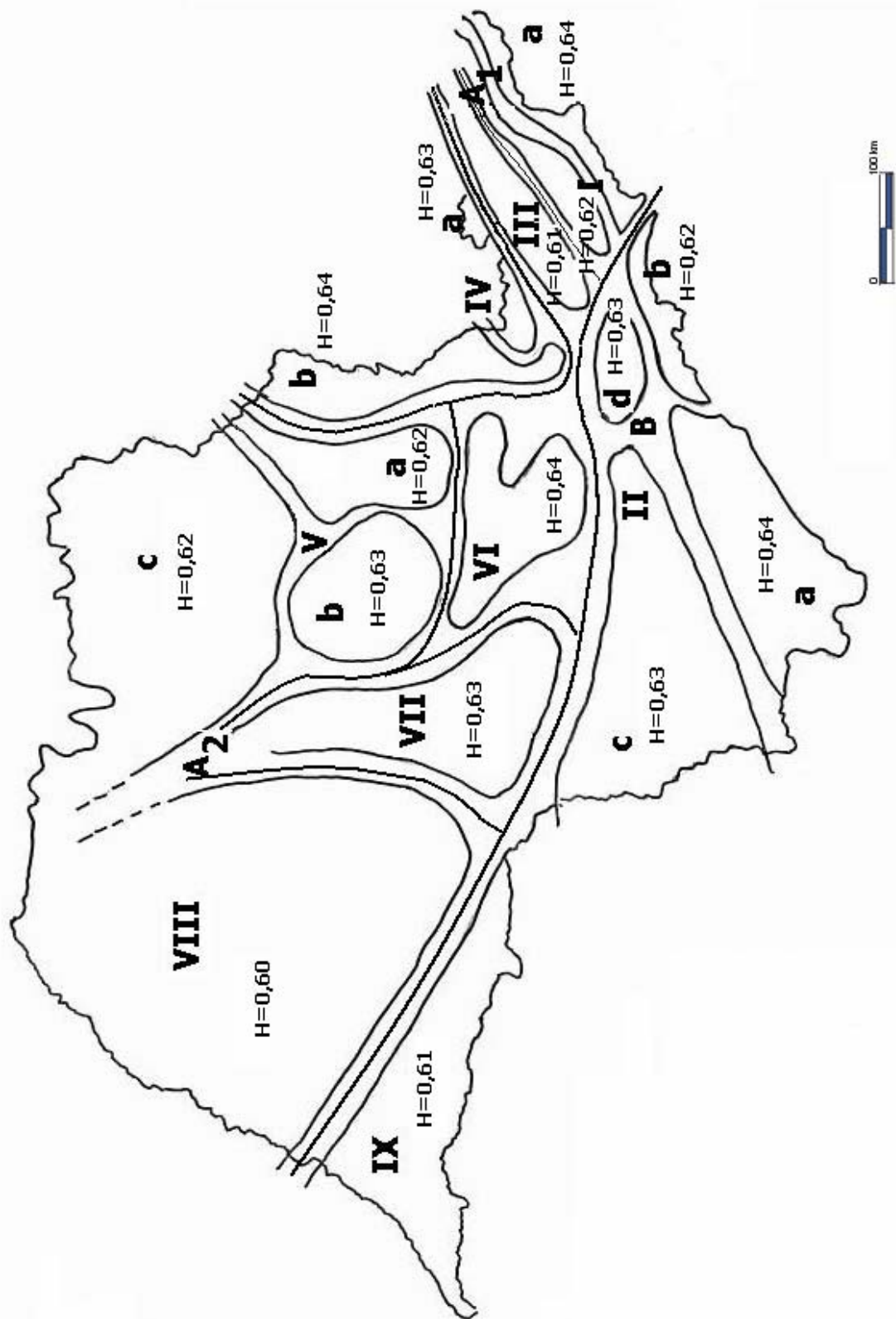


Figura 5.3 - Valor médio de H para cada região e sub-região climática do estado de São Paulo.

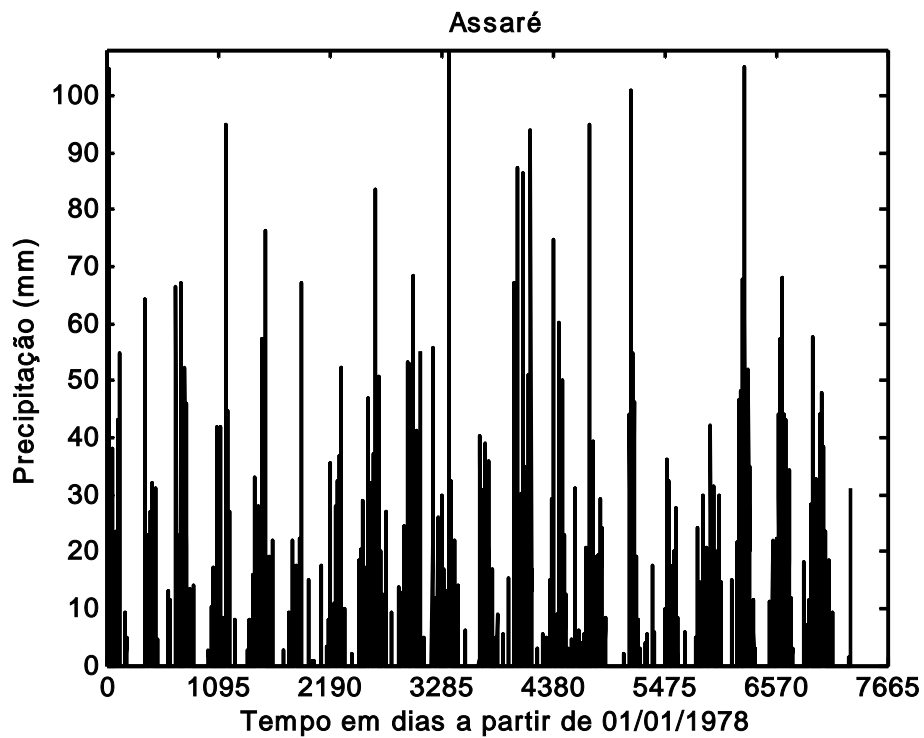
5.3 - Séries com os períodos seco e úmido bem definidos

Com o intuito de comparar o valor estimado do expoente de Hurst, selecionamos séries de precipitação de chuvas em que o período seco e úmido são bem definidos. Tomamos o cuidado de escolher séries do mesmo tamanho e período que as séries analisadas no item anterior.

As séries temporais utilizadas são provenientes de cidades do Ceará e todos os procedimentos utilizados na análise das séries do estado de São Paulo foram usados. Na *figura 5.4* apresentamos dois gráficos de precipitação, das cidades de Assaré e Cratos, onde é marcante a presença do período seco.

Na *tabela 5.10* temos os valores de H estimados, o erro cometido na estimativa, o valor médio e o erro médio das séries.

a)



b)

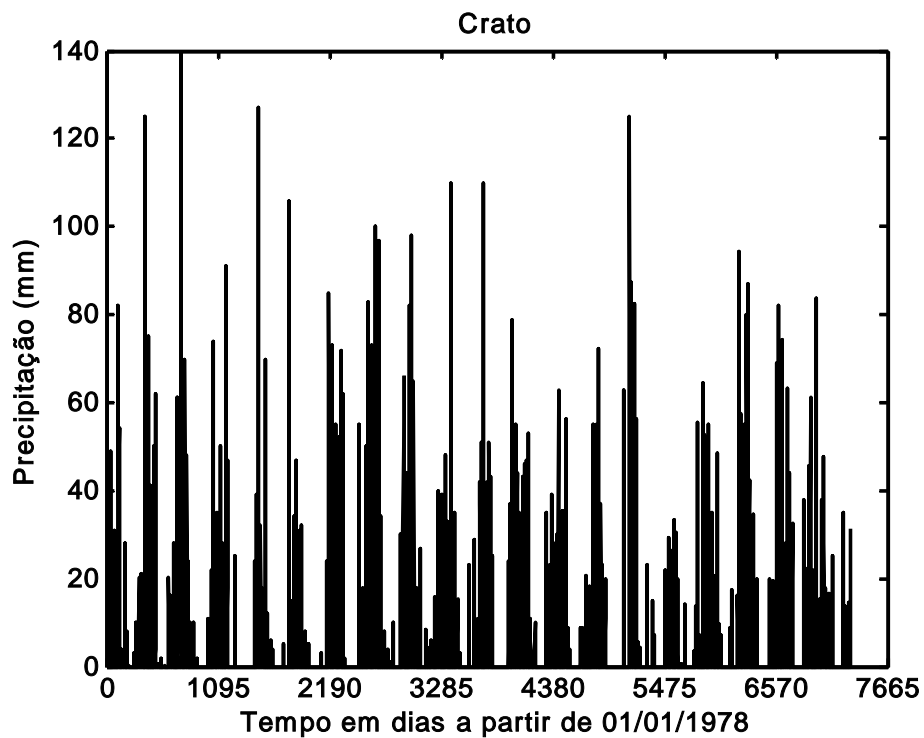


Figura 5.4 - a) gráfico de precipitação de chuvas da cidade de Assaré.
b) gráfico de precipitação de chuvas da cidade de Cratos.

POSTOS ANALISADOS DA REGIÃO NE

MUNICÍPIO	POSTO	Nº	FALTAS	H	ERRO(H)
ASSARÉ		1	0	0,7369	0,0412
BOA VIAGEM		2	0	0,7414	0,0429
ORÓS		3	31	0,7591	0,0417
QUIXERAMOBIM		4	0	0,7689	0,0382
CRATO		5	0	0,7148	0,0476
QUIXADÁ		6	0	0,7716	0,0456
SOBRAL		7	0	0,7943	0,0482
TIANGUÁ		8	0	0,7884	0,0503

Média geral

H=0,7494

erro medio 0,0445

Tabela 5.10 - Valor de H para séries da região nordeste.

5.4 - Espectro de potência wavelet para as séries temporais de chuva

No capítulo 2 foi mostrado a utilização da transformada wavelet para a identificação dos períodos presentes em uma série por meio de escalogramas e pelo espectro de potência wavelet.

TRIGO et al, 1996, estudando a variação dos caudais diários de rios brasileiros e portugueses, BOLZAN, 2004, analisando a variação do número de manchas solares e ZANANDREA et al, 2005, trabalhando com a detecção de sinais de radares, utilizaram o espectro de potência wavelet para identificar períodos presentes nas séries temporais.

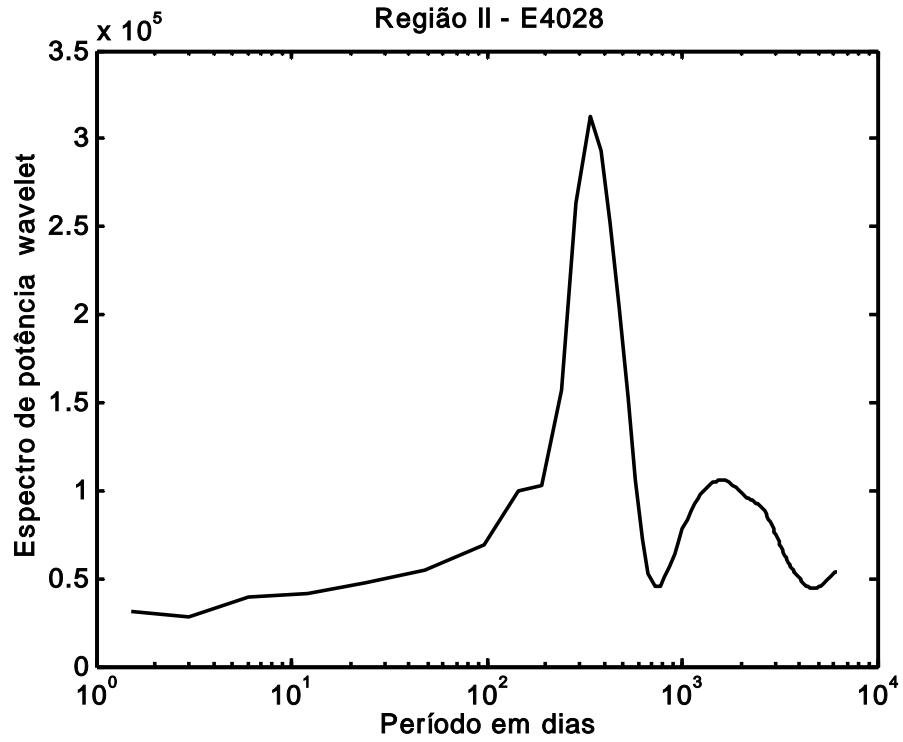
Nas séries de precipitação de chuvas completas (7305 elementos) foi calculado o espectro de potência da wavelet, com o intuito de encontrar os períodos presentes em cada série.

O procedimento para a determinação do espectro de potência da wavelet pode ser descrito em cinco etapas:

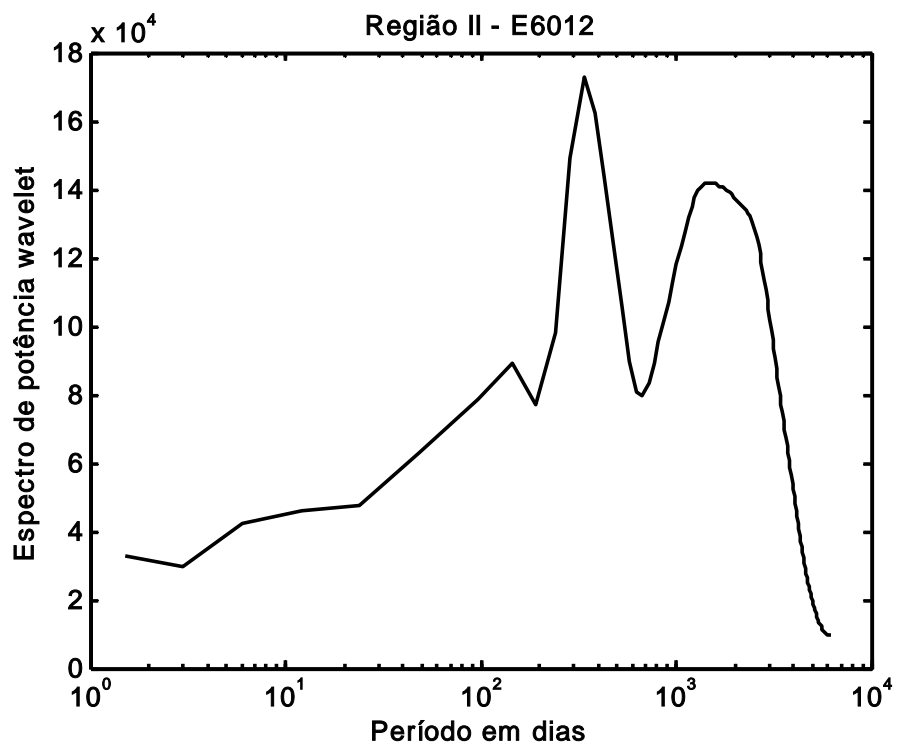
- 1- a wavelet usada foi a Daubechies de ordem 8 e a escala em potência de dois;
- 2- com as séries de precipitação de chuvas (soma cumulativa dos desvios da média devidamente já corrigidas), foi calculada a transformada wavelet, usando a função `cwt` ("continuou wavelets transforms") do programa MATLAB, obtendo os coeficientes da transformada wavelet em função da escala;
- 3- para cada escala foi feita a soma do quadrado do valor absoluto dos coeficientes e depois dividido pelo valor da escala determinando, assim, o espectro de potência wavelet (\mathcal{D});
- 4- usando a função `scal2freq` do programa MATLAB, encontramos as frequências (pseudo-frequências) correspondentes a cada escala e por meio da relação período = frequência⁻¹ obtemos os períodos (T), e,
- 5- confeccionando o gráfico monolog $\mathcal{D} \times T$ (T no eixo logarítimo) podemos encontrar os períodos presentes nas séries temporais de chuva.

Para cada série esse procedimento foi aplicado e os gráficos presentes nas figuras 5.5 a 5.13.

a)



b)



c)

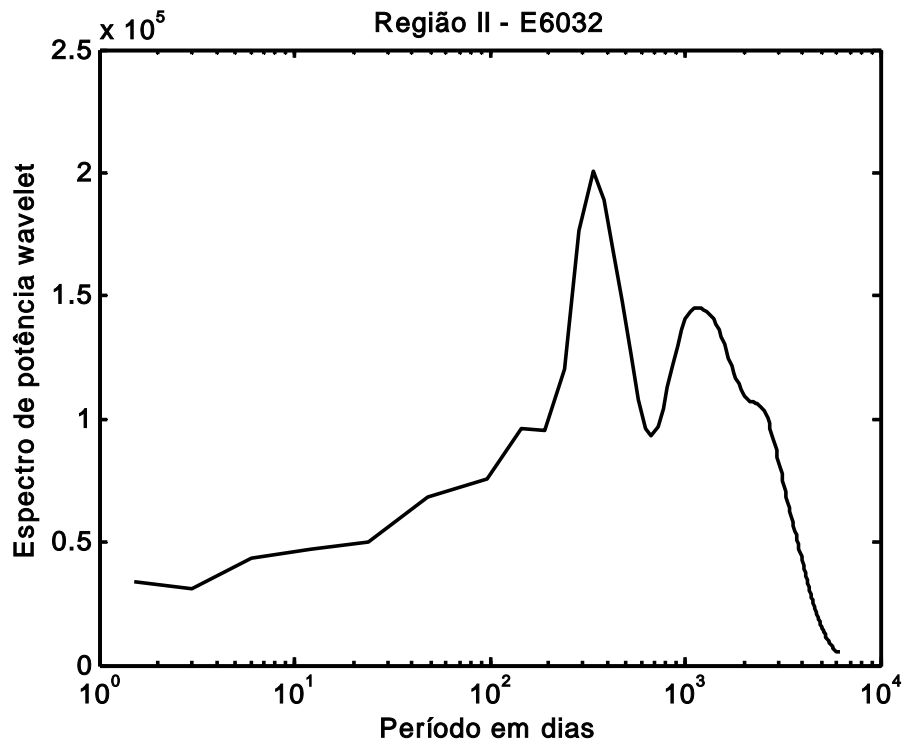


Figura 5.5 - Espectro de potência de séries de precipitação de chuvas da região climática II (a, b e c).

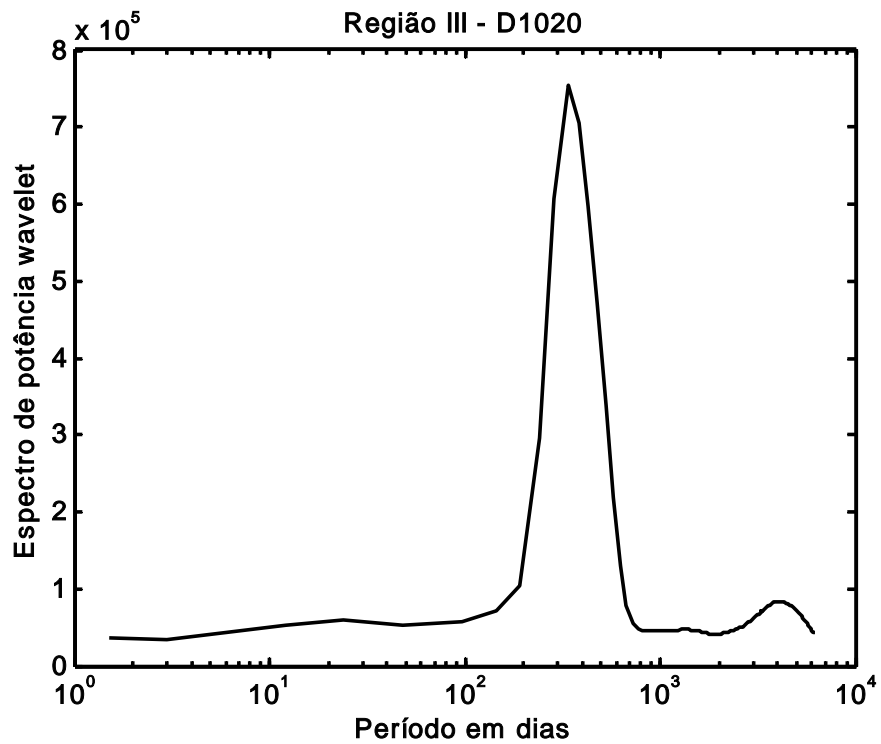
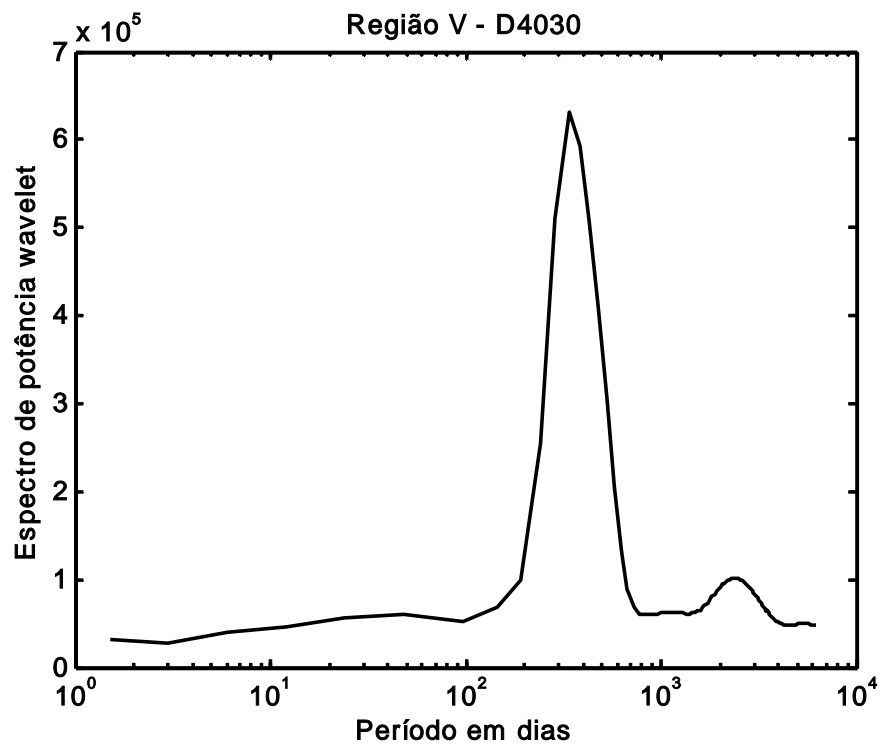
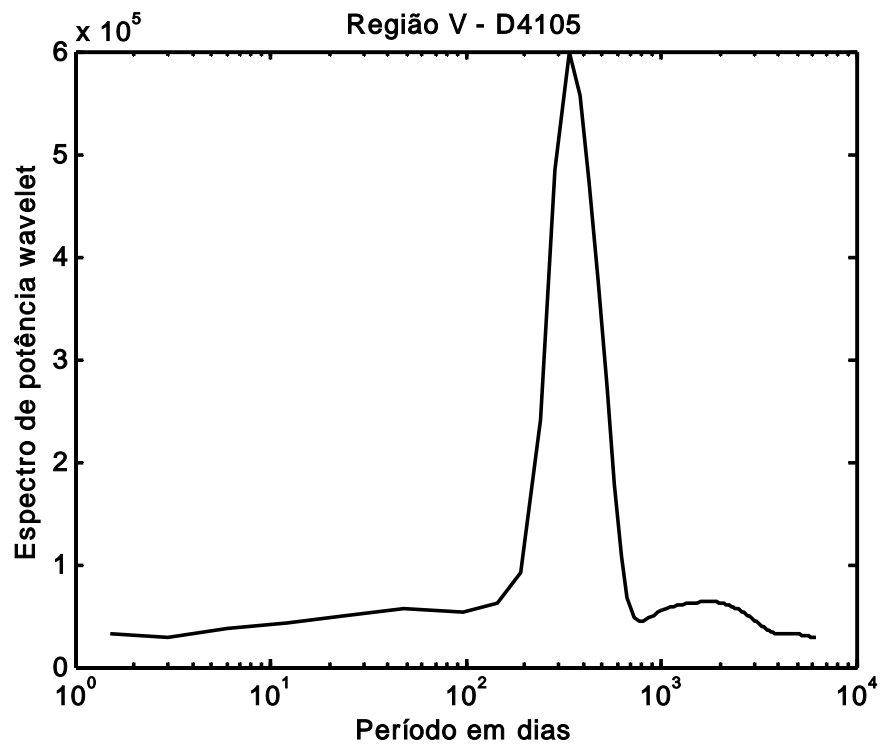


Figura 5.6 - Espectro de potência de série de precipitação de chuvas da região climática III.

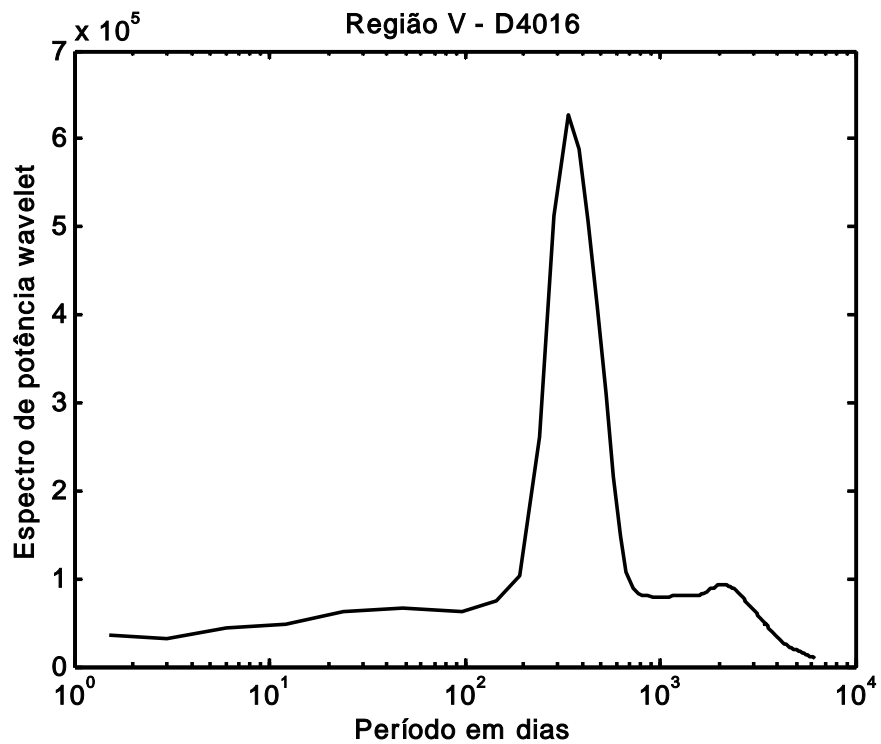
a)



b)



c)



d)

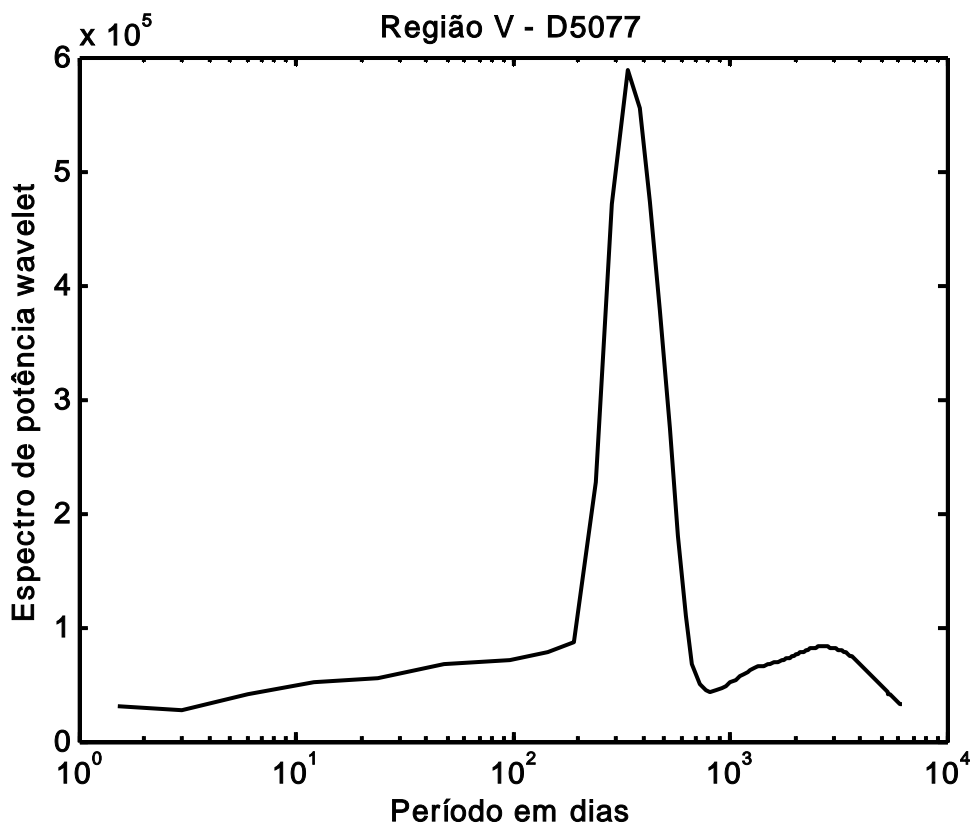


Figura 5.7 - Espectro de potência de séries de precipitação de chuvas da região climática V (a, b, c, d).

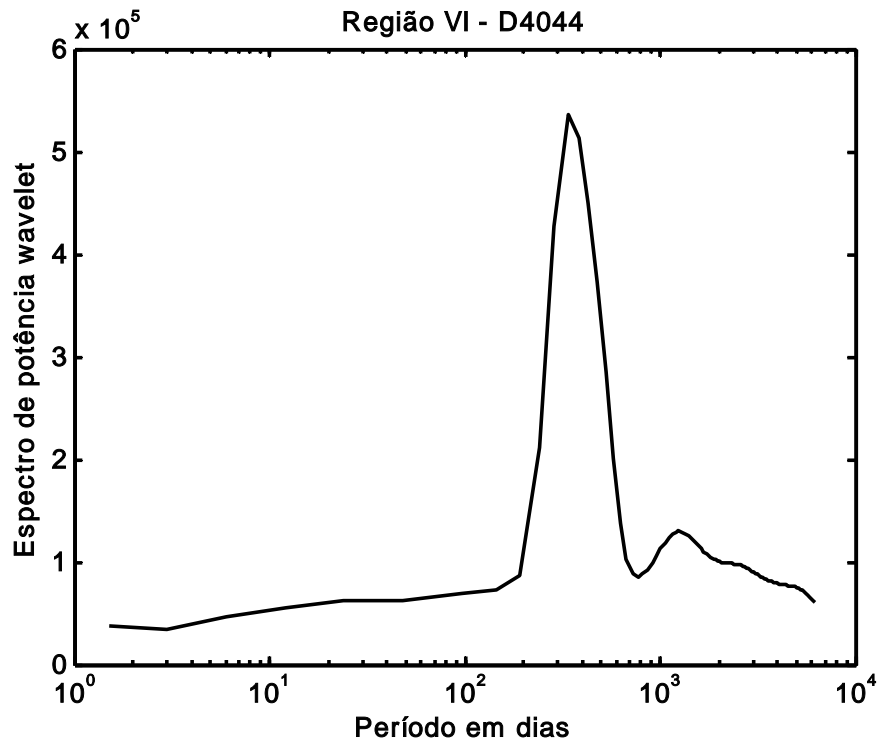
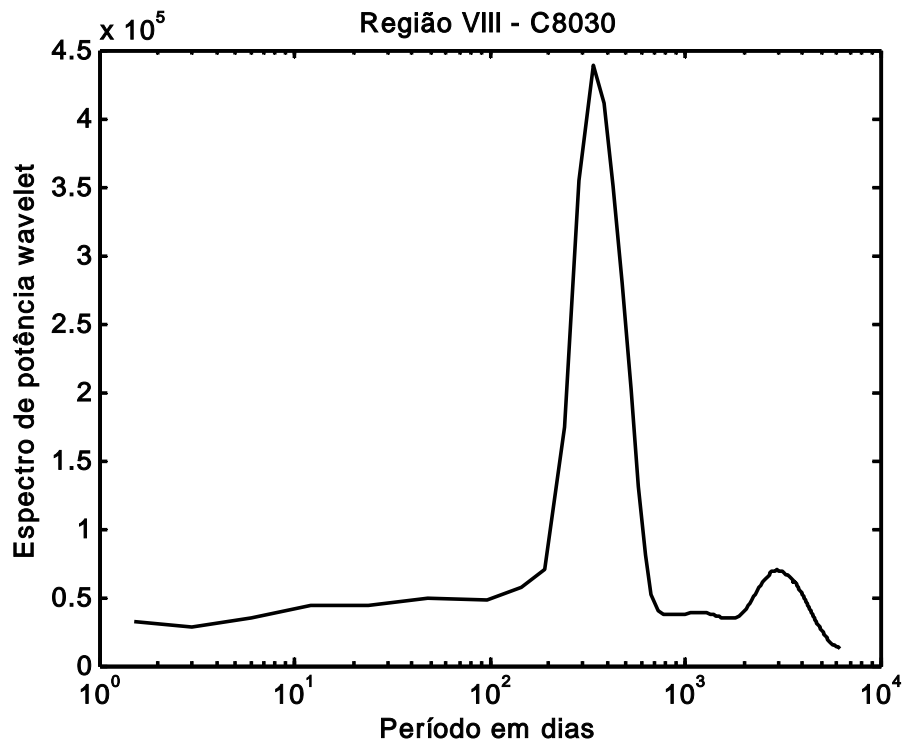
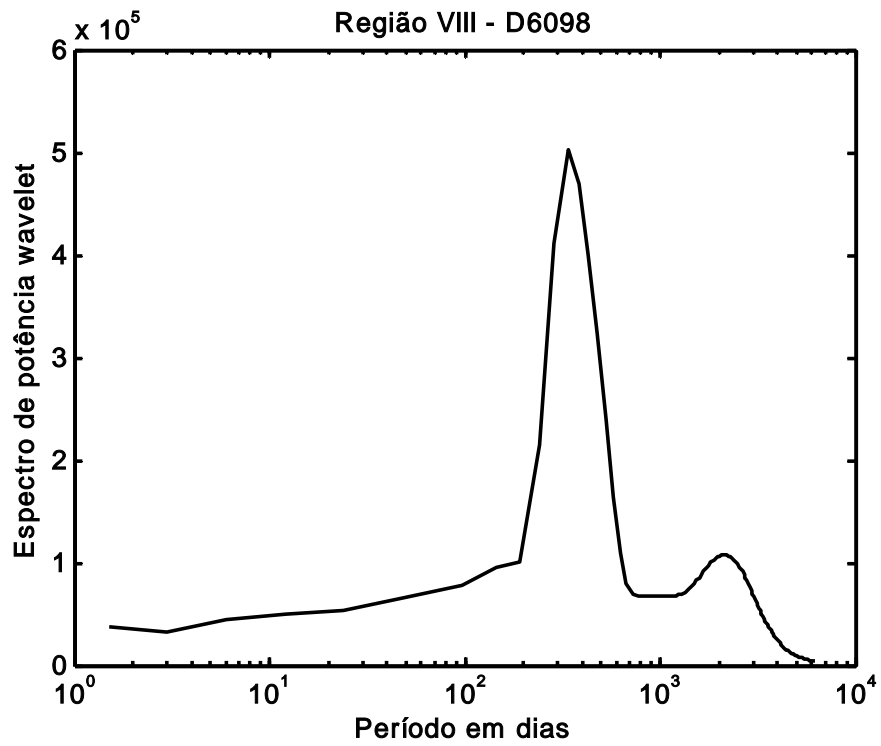


Figura 5.8 - Espectro de potência de série de precipitação de chuvas da região climática VII.

a)



b)



c)

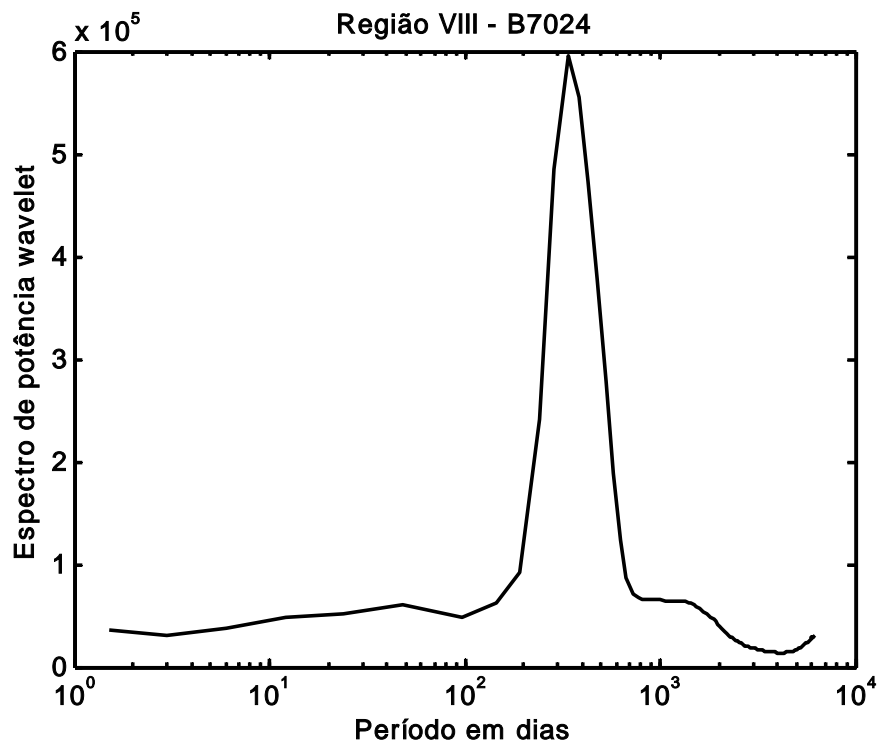


Figura 5.9 - Espectro de potência de séries de precipitação de chuvas da região climática VIII (a, b, c).

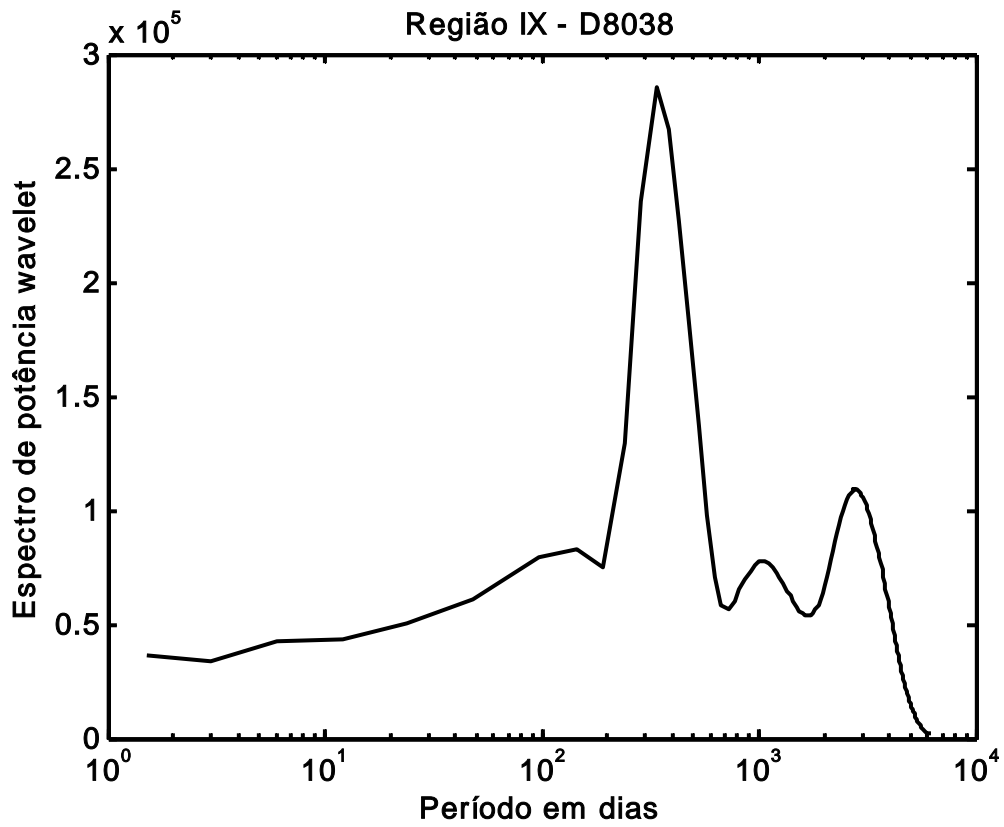


Figura 5.10 - Espectro de potência de série de precipitação de chuvas da região climática IX.

CAPÍTULO 6

Conclusões

1- No capítulo quatro foi discutido sobre a estimativa do expoente de Hurst por meio da transformada wavelet e o processo foi testado utilizando-se séries de fbm geradas com um valor de H conhecido a priori.

O resultado mostrou que o método de estimativa do expoente de Hurst por meio da transformada wavelet é consistente ao apresentar, para os valores de H testados, valores muito próximos dos valores de H estabelecidos a priori.

Um outro ponto a ser ressaltado é o fato do desvio padrão (calculado quando foi feita a média do valor de H para cada conjunto de cem séries) ser pequeno demonstrando coerência nos resultados.

Com estes resultados podemos dizer que o método da transformada wavelet para estimar o expoente de Hurst para um movimento browniano fracionário é confiável e abrangente.

2- Na escolha do tamanho das séries temporais de precipitação de chuvas que foram analisadas, foi levado em conta, principalmente, a disponibilidade dessas séries para cada região climática do estado de São Paulo. O valor escolhido foi de 7305 elementos que

corresponde a uma série diária de precipitação de chuvas no período de primeiro de janeiro de 1978 a trinta e um de dezembro de 1997.

Para testar a dependência do tamanho da série na estimativa do expoente de Hurst recorreremos novamente às séries de movimento browniano fracionário. A partir de séries geradas com $H=0,5$ e com tamanho 2^{13} , o tamanho foi sendo reduzido e o valor de H recalculado.

Os gráficos da figura 4.2 nos mostram que para séries, com tamanhos correspondentes a vinte anos, o valor de H está em uma região de estabilidade (sem grandes variações) e que o valor do erro cometido ao estimar o valor de H é pequeno. Seguindo a tendência dos gráficos se o número de elementos aumentasse o valor de H seria melhor definido, porém, a dificuldade em encontrar séries de precipitação de chuvas seria muito grande.

3- É comum encontrar em séries de precipitação de chuvas ausências de medições que interrompem a série transformando em duas ou mais séries menores. Duas sugestões para aproveitar o maior número de elementos da série foram analisadas. A primeira trata de substituir as ausências pela média de precipitações anteriores, justificada pelo fato que o expoente de Hurst tem características de memória e a segunda simplesmente unir as partes da série sem interrupções baseado no fato que o valor de H é característica da série como um todo.

As duas sugestões testadas apresentaram resultados muito próximos e com um erro muito pequeno e no nosso trabalho optamos pela segunda sugestão por ser mais simples, apresentar um erro menor e principalmente por ser a série de chuvas auto-afim cada um dos trechos unidos guarda as mesmas características estatísticas da série como um todo.

4- Com os métodos testados e aprovados o próximo passo foi estimar o expoente de Hurst para as regiões climáticas do estado de São Paulo.

Nas tabelas 5.1 a 5.9 verificamos que os valores de H dentro de cada região e também entre as regiões não tem uma variação muito grande ficando em torno de 0,6. Na figura 5.3 temos o valor médio de H para cada região e sub-região.

No estado de São Paulo as chuvas, em todas as regiões climáticas, são reguladas pela atuação das correntes da circulação atmosférica da vertente atlântica da

América do Sul sendo a mais influente a Frente Polar Atlântica que atua desde o rio Prata até as proximidades da linha do Equador. Dependendo da atividade das massas polares (tamanho e frequência com que são geradas) é que aparecem as diferenças nas quantidades anuais de chuvas. Um ano de elevada atividade polar implica em elevada pluviosidade para todo o território paulista.

Os índices pluviométricos anuais do estado de São Paulo oscilam entre 1100 a 2000 mm, existindo pequenas áreas serranas do litoral que chegam em torno de 4500 mm (uma das maiores do país) e mesmo as regiões mais secas (pequenas áreas) os índices não são inferiores a 950 mm.

Em função das regiões climáticas receberem praticamente a mesma influência das frentes polares e pelo alto índice pluviométrico era de se esperar que o valor estimado do expoente de Hurst para as regiões estivessem muito próximos uns dos outros, uma vez que, as séries de precipitação de chuvas se referem ao mesmo período de observação.

As diferenças de valores de H, encontrados entre as regiões e sub-regiões, se devem ao fator relevo e ao fato de receber as frentes com força total ou já aliviadas de sua quantidade de água.

Quando foi feito, para efeito de comparação, a estimativa do expoente de Hurst para séries temporais de chuvas de algumas cidades do estado do Ceará, encontramos um valor médio 0,75 para cidades que tem um valor médio anual de precipitação em torno de 857 mm e os períodos seco e chuvoso bem definidos. Isto vem mostrar que os valores de H encontrados no estado de São Paulo foram bem estimados, uma vez que, aqui os períodos seco e chuvoso não são bem definidos.

5- A análise dos períodos presentes nas séries de precipitação de chuvas, por meio do espectro de potência wavelet, só foi feita para as séries que apresentavam todas as medições do período (7305 dias). O resultado do espectro de potência wavelet é um gráfico com o tempo no eixo das abscissas e quando se usa uma série que teve os trechos com medições unidos é equivalente dizer que trechos do eixo do tempo foram eliminados e a análise espectral perde o sentido. Para usar séries que tiveram trechos unidos ou substituídos pela média das medições anteriores há necessidade de se fazer um estudo mais aprofundado para ver a influência da união dos trechos ou a substituição pela média no deslocamento dos períodos presentes.

Dos períodos encontrados nas séries de precipitação de chuvas, o que mais se destaca é o período em torno de 365 dias que está presente em todas as séries.

Devido à pequena quantidade de séries completas dentro de cada região a análise fica prejudicada ficando as diferenças encontradas caracterizadas pelas especificidades do relevo de cada região, uma vez que todas as regiões do estado de São Paulo estão sujeitas às mesmas influências das frentes polares.

Com exceção da região IX todas as outras apresentam um segundo período variando de 1200 a 4000 dias. A região II apresenta um segundo período com valor médio de 1400 dias. O segundo pico da única série disponível da terceira região aparece em torno de 4000 dias, o maior período encontrado.

A região VI apresenta uma única série com período de 1200 dias e a região V aparece com um valor médio de 2200 dias.

As regiões VIII e IX recebem influência direta da Frente Polar do Atlântico sendo que esta passa primeiro na região IX, descarregando a maior parte das chuvas, e depois vai para a região VIII. Provavelmente por causa disso a região VIII não apresenta o segundo período em torno de 1000 dias, como na região IX, coincidindo o terceiro período da IX com o segundo da oitava região. Na região oitava somente as frentes polares de alta intensidade que tem influência na precipitação de chuvas.

A análise feita da periodicidade usando o espectro de potência wavelet foi superficial por termos usado séries com tamanho limitado a 20 anos. Sugerimos como trabalho futuro um estudo mais aprofundado do espectro de potência wavelet com relação à limitação do tamanho da série na identificação da periodicidade e a identificação dos períodos em séries de precipitação de chuvas das várias regiões climáticas do Brasil fazendo uma comparação entre séries do litoral e de regiões centrais.

Referências Bibliográficas

- ABRY, P.; VEITCH, D. Wavelet Analysis of Long Range Dependent Traffic, **IEEE Trans. on Info. Theory**, v. 44, n. 1, p. 2-15, 1998.
- ABRY, P.; VEITCH, D.; FLANDRIN, P.; TAQQU, M. S. Wavelets for the analysis, estimation and synthesis of scaling data. **Self-Similar Network Traffic and Performance Evaluation**. New York: Kihong Park and Walter Willinger. Wiley, p. 39-88, 2000.
- AYOADE, J. O. **Introdução à climatologia para os trópicos**. 8-ed. - Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2002. 332p.
- BARTON, C. C.; LA PONTE, P. R. **Fractals in the earth sciences**. New York: Plenum Press, 1995.
- BOLZAN, M. J. A. Análise da transformada em ondaletas aplicada em sinal geofísico. **Revista brasileira de ensino de física**, v. 26, n. 1, p. 37-41, 2004
- BRESLIN, M. C.; BELWARD, J. A. Fractal dimensions for rainfall time series. **Mathematics and Computers in Simulation**, Amsterdam, v.48, p. 437 - 446, 1999.
- BURGOS, T. R.; VALDÉS, E. P. **Estimation of the fractal dimension of a rainfall times series over a zone relevant to the agriculture in Havana**. Departamento Agrometeorologia INSMET, v. 5, n. 1, january 1999.
- BURROUGHS, P. A. Fractal dimensions of landscapes and other environmental data. **Nature**, London, v. 294, n.5837, p. 240 - 242, Nov. 1981.
- BURRUS, C. S., GOPINATH, R. A. and GUO, H. **Introduction to wavelets and wavelet transforms, A Primer**. N. J., Prentice Hall, 1997.
- CALDERON, A. Intermediate spaces and interpolation, the complex method. *Studia-math*, 24, p. 113-190, 1964.
- CAMPANHA, J. R. **Sistemas complexos e aplicações**. 2004. - Tese de Livre Docência - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.
- CARR, J. R. Statistical self-affinity, fractal dimension and geologic interpretation. **Engineering Geology**, Amsterdam, v. 48, p. 269 - 282, 1997.
- _____; BENZER, W. B. On the practice of estimating fractal dimension. **Mathematical Geology**, New York, v. 23, n. 7, p. 945 - 959, 1991.

- CHIERICE, R. A. F. **O uso de wavelets na determinação do expoente de Hurst de uma série temporal diária de chuvas do município de Araras-SP de 1955-2000.** 2003. – f.71. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.
- CHRISTOFOLETTI, A. L. H. **Análise fractal e multifractal da estrutura de estações chuvosas em localidades do Estado de São Paulo.** 1997. -. Tese (Doutorado em Geociências e Meio Ambiente) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1997.
- CLEGG, R., G. A Practical Guide to Measuring the Hurst Parameter, **School of Computing Science Technical Report Series CS-TR-916**, University of Newcastle, 2005
- COOLEY, J. W.; TUKEY, O. W. An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. **Mathematics and Computers**, v 19, p. 297 - 301,1965.
- DAUBECHIES, I. **Ten lectures on wavelets.** Philadelphia: Rutgers University and AT&T Bell Laboratories, 1992.
- DUARTE, P. F. Q. **Análise das periodicidades das séries temporais de nível do mar e pressão atmosférica de Cananéia, utilizando a transformada de ondaletas (wavelets).** 1998. - f. 66. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Instituto Oceanográfico, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1998.
- EINSTEIN, A. On the movement of small particles suspended in a stationary liquid demanded by molecular-kinetic theory of heat. **Annalen der Physik**, v. 17, p. 549-560, 1905.
- FARGE, M. Wavelets transforms and their applications to turbulence. **Annual Review of Fluid Mechanics**, Palo Alto, V. 24, p. 395-457, 1992.
- FAVARETTO, A. B. **Estimativa do expoente de Hurst de séries temporais de chuva do estado de São Paulo usando as transformadas de Fourier, Wavelets e Analise de R/S.** 2004. - f. 89. Dissertação de (Mestrado) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.
- FEDER, J. **Fractals.** New York: Plenum Press, 1989.
- FELLER, W. The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables. **Annals of Mathematical Statistics**, 22,427, 1951.
- GABOR, D. Theory of communication. **Journal of Institute of Electrical Engineers**, v. 93, p. 429 - 457, 1946.
- GALLANT, J. C.; MOORE, I. D.; HUTCHINSON, M. F.; GESSLER, P. Estimating fractal dimension of profiles: a comparison of methods. **Mathematical Geology**, New York, v. 26, n. 4, p. 455 - 481, 1994.

- GAN, K. C.; McMAHON, T. A.; FINLAYSON, B. L. Analysis of periodicity in streamflow and rainfall data by colwell's indices. **Journal of Hydrology**, Amsterdam, v. 123, n. 1/2, p. 105 - 118, 1991.
- GLEICK, J. **Caos: a criação de uma nova ciência**. Rio de Janeiro: Campus, 1990. 310 p.
- GOLDBERGER, A. L. and WEST, B. J. Applications of nonlinear dynamics to clinical cardiology. *Annals of the New York Academy of Sciences*, vol 504, Issue 1, 195-213, 1987.
- GOMES, S. M.; DOMINGUES, M. O.; KAIBARA, M. K. Navegando de Fourier a Wavelets: **Aplicações em Dinâmica e Controle**/J. M. Balthazar...[et all]-São Carlos, SP: ABCM: SBMAC, 2001, 501p.
- GRABBE, J. O. **Chaos & Fractals in Financial Markets**. Disponível em: <http://orlingrabbe.org/chãos_index.htm>
- GROSSMANN, A.; MORLET, J. Decomposition of hardy functions into square-integrable wavelets of constant shape. **SIAM, Journal. Mathematics Analysis**, v. 15, p. 723 - 736, 1984.
- HAAR, A. Zur theorie der orththogonaler funktionensysteme. **Mathematische Annalen**, Berlin, v. 69, p. 331 - 371, 1910.
- HARPEN, M. D. An introduction to wavelet theory and application for the radiological physicist. **Med. Phys.** vol 25, p 1985-1993, 1998.
- HUDGINS, L.; FRIEHE, C. A.; MAYER, M.E. Wavelet transforms and atmospheric turbulence. **Physical Review Letters**, New York, v. 71, n. 20, p. 3279 - 3282, 1993.
- HURST, H. E. Long-term storage of reservoirs. **Transaction of the american society of civil engineers**, 1951.
- HURST, H. E.; BLACK, R. P.; SIMAIKA, Y. M. **Long-term storage: an experimental study**. London: Constable London, 1965. 145p.
- IFEACHOR, E. C.; JERVIS, B. W. **Digital signal processing - a practical approach**. Addison - Wesley, 1994.
- JONES, C. L.; LONERGAN, G. T. ; MAINWARING., D. E. Wavelet packet computation of the Hurst exponent. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, Bristol, v. 29, p. 2509 - 2527, 1996.
- KORVIN, G. **Fractal models in the earth sciences**. Amsterdam: Elsevier, 1992. 396 p.
- KUMAR, P. F.; GEORGIU, E. **Wavelet analysis in geophysics: an introduction**. Efi Fourfoula - Georgiou and Praveen Kumar (eds). 1994.
- LAM, N. S. N.; DE COLA, L. **Fractals in Geography**. New Jersey: PTR Prentice Hall, 1993.

- LIMA, P. C. Wavelet: uma introdução. **Matemática Universitária**, n. 33, p. 13-34, dezembro. 2002.
- LOVEJOY, B. S.; MANDELBROT, B. B. Fractal properties of rain, and a fractal model. **Tellus**. Series A. Dynamic Meteorology and Oceanography, Copenhagen, v. 37, p. 209 - 232, 1985.
- MACAU, E. E. N., Introdução à análise wavelet-fractal de séries temporais. **4º Congresso temático de dinâmica, controle e aplicações - DINCON 2005**, Bauru, 2005.
- MAEDER, R. E. Fractional Brownian Motion, **The Mathematica Journal**, 6(1), 1995.
- MALAMUD, B. D.; TURCOTTE, D. Self-affine time series: measures of weak and strong persistence. **Journal of Statistical Planning and Inference**, Amsterdam, v. 80, p. 173 - 196, 1999.
- MALLAT, S. A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet representation. **IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v. 11, p. 674-693, 1989.
- MALONE, D. **Solutions to Dilation Equations**. 2000, Ph. D. Thesis. University of Dublin, 2000.
- MANDELBROT, B. B. **The fractal geometry of nature**. New York: W. H. Freeman, 1983.
- MANDELBROT, B. B.; WALLIS, J. R. Water Resources Research, 5, 321-340, 1969.
- MANDELBROT, B. B.; VAN NESS, J. W. Fractional Brownian motion, fractional noise and applications. **SIAM Review**, 10, 422-427, 1968.
- MATSUSHITA, M.; OUCHI, S. On the self-affinity of various curves. **Physica D**, Non Linear Phenomena, Amsterdam, v. 38, p. 246 - 251, 1989.
- MAZZARELLA, A. Multifractal dynamic rainfall processes in Italy. **Theoretical and Applied Climatology**, Wien, v. 63, p. 73 - 78, 1999.
- MIRANDA, J. G. V. **Análise fractal de reescalonamento temporal para chuvas**. 1997. - f. 75. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 1997.
- MISITI, M.; MISITI, Y.; OPPENHEIM, G.; POGGI, JM. **Wavelet Toolbox: For use with Matlab**. The Mathworks. 1996.
- MONTEIRO, C. A. F. **A dinâmica climática e as chuvas no estado de São Paulo: estudo geográfico sob a forma de atlas**. São Paulo: IG/USP, 1973.
- MORETTIN, P. A. **Análise harmônica de processos estocásticos**. Rio de Janeiro: IMPA, 1979. 176 p.

- _____. **Ondas e Ondaletas**: Da análise de Fourier à análise de ondaletas. São Paulo: Udup, 1999. 272 p.
- OLSSON, J.; NIEMCZYNOWICZ, J.; BERNDTSSON, R. Fractal Analysis of High-Resolution Rainfall Time Series. **Journal off Geophysical Research**, v. 98, n. D12, p. 23, 265-23, 274. December 20, 1993.
- OLSSON, J.; BERNDTSSON, R.; SVENSSON, C. Multifractal properties of daily rainfall in two different climates. **Water Resources Research**, v. 32 n. 8, p. 2463-2472, August 1996.
- PEART, C. **Modelling network traffic via a multifractal wavelet model**. 2005. - Dissertation submitted for 1 MSc in networks, non-linear dynamics and data analysis. - Department of mathematics. University of York, 2005.
- PEREIRA, D. C. **Análise dinâmica por wavelets em um sistema com fricção seca e amortecimento**. 2002. - f. 72. Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.
- PEREIRA JUNIOR, A.; CHRISTOFOLETTI, A. L. H. Análise fractal da distribuição espacial das chuvas no Estado de São Paulo. **Geografia**, Rio Claro, v. 28, n. 1, p. 97 - 133, jan./abr. 2003.
- PETERS, E. E. **Chaos and order in the capital markets**: a new view of cycles, prices and market volatility. Canada: A Wiley Finance Edition, 1996.
- PETERS, O.; HERTLEIN, C.; CHRISTENSEN, K. A complexity view on rain. **Physical Review Letters**, v. 88, p. 1-4, 2002.
- PEITGEN, H. O.; JURGENS, H.; SAUPE, D. **Chaos and fractals: new frontiers of science**. New York: Springer Verlag, 1992.
- PLOTNICK, R. E.; PRESTEGAARD, K. **Fractal Analysis of Geological Time Series. Fractals in Geography**. Nina Siu-Ngan Lam, Lee de Cola. Prentice Hall, 1993.
- POLIKAR, R. **The story of wavelets**. In: INTERNACIONAL JOINT CONFERENCE ON CIRCUITS, SYSTEMS, COMMUNICATIONS AND COMPUTERS, 3., 1999, Athens: **IEEE / IMACS**, 1999.
- QUINN, D. **Survey of Wavelet Analysis**. 1997.- f 94. M. Sc. thesis - Department of Applied Mathematics, National University of Ireland.
- RODRIGUEZ, I. I.; DE POWER, B. F. ...{et al}. Chaos in Rainfall, **Water Resources Research**, v. 25, n.7, p. 1667-1675, 1989.
- ROWE, A. C.; ABBOTT, P. C. Daubechies wavelets and mathematica. **Computers in physics**, Australia, v. 9, n. 6, p. 635 - 648, 1995.

- SAUPE, D. Algorithms for random fractals. pages: 71-113. **The Science of Fractal Images**. Heinz-Otto Peitgen, Dietmar Saupe (eds.). Springer-Verlag, 1988.
- SEVCIK, C. **A Procedure to Estimate de Fractal Dimension of Waveforms**. Complexity International, 5, 1998. Disponível em: <<http://life.esu.edu.au/complex/ci/vol5/sevcik>>
- SIMONSEN, I.; HANSEN, A.; NES, O. M. Determination of the Hurst exponent by use of wavelet transforms. **Physical Review E**, New York, v. 58, n. 3, p. 2779 - 2787, 1998.
- SPIEGEL, M. R. **Análise de Fourier**. Mcgraw-Hill do Brasil, 1976.
- STRANG, G. Wavelets and Dilatation Equations: A Brief Introduction. **Siam Review**, vol 31, p 613-627, 1989.
- STRANG, G. Wavelets. **American Scientist**, vol 82, p 250-255, 1994.
- STOEV, S.; TAQUU, M. S.; PARK, C.; MARRON, J. S. Strengths and limitations of the wavelet spectrum method in the analysis of internet traffic. **SAMSI technical report # 2004-8**, Boston, 2004.
- TAYLOR, J. R. **An introduction to error analysis**. California university science books, 1982.
- TOLSTOV, G. P. **Fourier Series**. New York: Dover Publication, INC, 1962. 336 p.
- TORRENCE, C. **Wavetest Example Matlab Script For Wavelet, using NINO3 SST DATAS**. Disponível em: <<http://www.paos.colorado.edu/research/wavelet/>>. Acesso em: 19 mar. 2002.
- TORRENCE, C.; COMPO, G. P. A practical guide to wavelet analysis. **Bulletin of the American Meteorological Society**, Colorado, V. 79, n. 1, p. 61-78, janeiro 1998.
- TURCOTTE, D. L. **Fractals and Chaos in Geology and Geophysics**. Cambridge University Press, (2 edition), 1997.
- TRIGO, R. M.; GALVÃO, C. O.; TRIGO, I. F. Aplicação de Wavelets ao estudo da variabilidade de caudais diários: uma comparação entre algumas bacias portuguesas e brasileiras. **IV SILUSBA**, Coimbra, Portugal, 1999.
- VIEIRA, S. **Estatística experimental**. São Paulo: Editora Atlas S. A., 1999.
- VOSS, R. F. Fractals in nature: from characterization to simulation. pages: 21-70. **The Science of Fractal Images**. Heinz-Otto Peitgen, Dietmar Saupe (eds.). Springer-Verlag, 1988.
- WERON, R.; PRZYBYLOWICZ, B. Hurst analysis of electricity price dynamics. **Physica A**, New York, v. 283, p. 462 - 468, 2000.
- YEVJEVICH, V. Stochastic Processes in Hidrology. **Water Resources Publications**, 276 pp., Mcgraw-Hill do Brasil, 1976.

ZANANDREA, A.; SAOTOME, O.; FREITAS, S. V. Detecção de sinais de pulsos de radar através de transformada contínua de wavelets. **XXVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC**, Porto Alegre, p. 478, 2004.

APÊNDICE I

Programa fbmfeder: utiliza a equação 9.25 do livro FRACTALS de Jens Feder, 1988 e foi codificado para o *software* MATLAB por Juha Merikoski.

```
function BalI=fbmfeder(H, TN, Nruns)
% fbm.m - Fractional Brownian Motion (Juha Merikoski)
% Eq.(9.25) of 'Fractals' by Feder (with error corrected)
% Before run set e.g. as follows

%H=0.7; TN=1000; M=700; n=8; Nruns=5;
%TN numero de pontos gerados
%Nruns numero de series geradas
%dB ruido
%BalI fbm
M=700; n=8;
%disp(['H=' num2str(H) ' ; TN=' int2str(TN) ' ; M=' int2str(M) ...
%      ' ; n=' int2str(n) ' ; Nruns=' int2str(Nruns)]);

Hmh=H-1/2;
normf=1/((n^H)*gamma(H+1/2));

powmax=max([n*TN+n*M]);
i pow=1: 1: powmax;
i pow=(i pow/n).^Hmh;

BalI=zeros(Nruns, TN);
dBalI=zeros(Nruns, TN);

for i run=1: Nruns,

    nxi =n*TN+n*M;
    xi =randn(1, nxi);
    B=zeros(1, TN);
    dB=zeros(1, TN);

    for t=1: 1: TN,
        dB(t)=0;
        for i =1: 1: n
            dB(t)=dB(t)+i pow(i)*xi (1+n*(M+t)-i);
        end;
        for i =1: n*(M-1),
            dB(t)=dB(t)+(i pow(n+i)-i pow(i))*xi (1+n*(M+t-1)-i);
        end;
    end;
    BalI(i run, :)=cumsum(dB)*normf;
    dBalI(i run, :)=dB*normf;

    if mod(i run, Nruns/5)==0,
        clc=clock; % disp([' : ' num2str([i run/Nruns clc(4:6)])]);
    end;

end;
```

APÊNDICE II

Programa mpdwalk: utiliza o algoritmo do deslocamento do ponto médio descrito por VOSS, PEITGEN et al, 1988 e foi codificado para o *software* MATLAB por MIDDLETON, 1995.

```
function y=mpdwalk(yb, yf, n, h)
% y=mpdwalk(yb,yf,n,h)
% returns a vector y consisting of steps in a fractional random
% walk from y = yb to y = yf. The number of steps is 2^n, i.e.,
% n is the number of times the line is divided into midpoints.
% H is the Hurst coefficient: H = 0.5 for Brownian walks
% 0.5 < H < 1 implies long-range correlation (persistence)
% 0 < H < 0.5 implies antipersistence. Press space-bar to start.
% Written by Gerry Middleton, December 1995, using the mid-point
% displacement algorithm.

y=zeros(2^n+1, 1);
for i=n:-1:1
    xl=1;
    dx=2^(i-1);
    jlim=2^(n-i);
    for j=1:jlim
        xr=xl+2*dx;
        xm=xl+dx;
        y(xm)=0.5*y(xl)+0.5*y(xr)+randn*dx^h;
        xl=xr;
    end
end
%plot(y); pause; close
```

APÊNDICE III

Programa fbmsim: baseia-se no artigo "Simulation of stationary gaussian processes $[0,1]^d$ " de WOOD e CHAN, 1994 e a codificação para o *software* MATLAB foi apresentada por JOHANSSON, 2000.

```

function BH = fbmsim(gridpts, H, s2)
% BH = fbmsim(gridpts, H, s2)
% fbmsim generates a realisation of fractional Brownian motion, BH, with
% Hurst parameter H in (0, 1) and Var(BH(1)) = s2 at the times specified in
% the vector gridpts which is of the form 0:n where n is an integer > 0.
% The simulated process can later easily be rescaled to another grid
% resolution.

% The method of simulation is based on the article

% Joachim Johansson
% Dept. Mathematical Statistics
% Chalmers University of Technology
% Göteborg, Sweden

% 2000-01-05

maxg = 23; % Maximum value of g before we make an
           % approximation of the circulant matrix

% The names of the variables coincide with the notation in the article
% whenever possible.
n = length(gridpts); % Number of timepoints

% Find our value of g
ok = 0;
g = ceil(log(2*(n-1))/log(2));
while (ok == 0) & (g <= maxg)
    m = 2^g;
    t = [(0:(m/2)) (m-(m/2+1):(m-1))];
    c = 0.5*(abs(t-1).^(2*H) + abs(t+1).^(2*H) - 2*(abs(t).^(2*H)));
    lambda = fft(c);
    if (max(abs(imag(lambda))) < 0.0001) & (min(real(lambda)) > -0.001) ok = 1;
        lambda = real(lambda); lambda = max(0, lambda); else
        g = g+1;
    end;
end;

% We might have to make an approximation of the circulant matrix if
% the value of g is too large.
if (g > maxg)
    ['No suitable g found, approximating C']
    g = ceil(log(2*(n-1))/log(2));
    m = 2^g;
    t = [(0:(m/2)) (m-(m/2+1):(m-1))];
    c = 0.5*(abs(t-1).^(2*H) + abs(t+1).^(2*H) - 2*abs(t).^(2*H));
    lambda1 = fft(c);
    lambda = max(0, lambda1);
    rho = sum(lambda)/sum(lambda1);
    lambda = rho*lambda;
end;

% Generate our realisation of the increment process, Y ...
randn('state', sum(100*clock));
U = randn(1, m/2);
V = randn(1, m/2);

tmp1 = (1/sqrt(2*m))*sqrt(lambda(2:(m/2))).*(U(2:(m/2)) + i*V(2:(m/2)));
tmp2 = (1/sqrt(2*m))*sqrt(lambda(2:(m/2))).*(U(2:(m/2)) - i*V(2:(m/2)));
tmp2 = fliplr(tmp2);
a = [sqrt(lambda(1)/m)*U(1) tmp1(:)' sqrt(lambda(m/2+1)/m)*V(1) tmp2(:)'];
Y = real(fft(a));
Y = Y(1:n);
BH = sqrt(s2)*(cumsum(Y)-Y(1));

```

APÊNDICE IV

Programa fbmlevinson: utiliza a fatoração de Cholesky/Levinson, foi confeccionado por GONÇALVES, 1997 e faz parte do FRACTAL ANALYSIS SOFTWARE.

```
function [x, y, r] = fbmlevinson2(N, H, tmax, sigma, seed) ;
% fbmlevinson
% Levinson synthesis of a fractional Brownian motion
% Paulo Goncalves
% June 6th 1997
%
% Generates a Fractional Brownian Motion (fBm) using Cholesky/Levinson
% factorization
%
% 1. Usage
%
% -----
% [x, y, r] = fbmlevinson(N, H, [seed])
% -----
%
% 1.1. Input parameters
%
% o N : Positive integer
%   Sample size of the fBm
%
% o H : Real in [0, 1]
%   Holder exponent
%
% o seed : real scalar
%   Random seed generator
%
% 1.2. Output parameters
%
% o x : real vector [1, N]
%   Time samples of the fBm
%
% o y : real vector [1, N]
%   Vector of N i.i.d. white standard Gaussian r.v.'s (input process of
%   the generator)
%
% o r : real vector [1, N]
%   First row of the var/cov Toeplitz matrix R of the increment
%   process  $w[k] = x[k+1] - x[k]$ .
%
% 2. See also:
%
% mbmlevinson
%
% 3. Examples
%
% % Synthesis of a fractional Brownian Motion with Holder exponent H
% N = 1024 ; H = 0.8 ;
% t = linspace(0, 1, N) ;
% clf ;
% [x] = fbmlevinson(N, H) ;
% plot(t, x) ;
% title ('Fractional Brownian Motion - H = 0.8') ;
% xlabel ('time') ;
%
% This Software is ( Copyright INRIA . 1998 1999 1 )
%
% INRIA holds all the ownership rights on the Software.
% The scientific community is asked to use the SOFTWARE
% in order to test and evaluate it.
%
% INRIA freely grants the right to use modify the Software,
% integrate it in another Software.
% Any use or reproduction of this Software to obtain profit or
% for commercial ends being subject to obtaining the prior express
% authorization of INRIA.
%
% INRIA authorizes any reproduction of this Software.
%
% - in limits defined in clauses 9 and 10 of the Berne
% agreement for the protection of literary and artistic works
% respectively specify in their paragraphs 2 and 3 authorizing
% only the reproduction and quoting of works on the condition
% that :
%
% - "this reproduction does not adversely affect the normal
```

```

% exploitation of the work or cause any unjustified prejudice
% to the legitimate interests of the author".
%
% - that the quotations given by way of illustration and/or
% tuition conform to the proper uses and that it mentions
% the source and name of the author if this name features
% in the source",
%
% - under the condition that this file is included with
% any reproduction.
%
% Any commercial use made without obtaining the prior express
% agreement of INRIA would therefore constitute a fraudulent
% imitation.
%
% The Software being currently developed, INRIA is assuming no
% liability, and should not be responsible, in any manner or any
% case, for any direct or indirect damages sustained by the user.
%
% Any user of the software shall notify at INRIA any comments
% concerning the use of the Software (e-mail : FracLab@inria.fr)
%
% This file is part of FracLab, a Fractal Analysis Software

if all(H-H(1))
    error('Time-dependant regularity not allowed yet.')
end

switch nargin
    case 2
        tmax = N-1 ;
        sigma = 1 ;
        seed = rand(1) * 1e6 ;
        shift = 1 ;
    case 3
        sigma = 1 ;
        seed = rand(1) * 1e6 ;
        shift = tmax/N ;
    case 4
        seed = rand(1) * 1e6 ;
        shift = tmax/N ;
    case 5
        shift = tmax/N ;
end

t = linspace(0, tmax, N) ;
s = 0 ;
alpha = 2*H ;
r = sigma^2*(abs(t+shift-s).^alpha + abs(t-s-shift).^alpha - ...
2*abs(t-s).^alpha)/2 ;

randn('seed', seed) ;
y = randn(N, 1) ;

x = zeros(1, N) ;

inter1 = r ;
inter2 = [0 r(2:N) 0] ;
Y = y(1)*r ;

k = -inter2(2) ;
aa = sqrt(r(1)) ;

for j = 2:N
    aa = aa*sqrt(1-k^2) ;
    inter = k*inter2(j:N) + inter1(j-1:N-1) ;
    inter2(j:N) = inter2(j:N) + k*inter1(j-1:N-1) ;
    inter1(j:N) = inter ;

    bb = y(j)/aa ;
    x(j:N) = x(j:N) + bb*inter1(j:N) ;
    k = -inter2(j+1)/(aa^2) ;
end

x = cumsum(x(:)) ;

```

APÊNDICE V

Programa para gerar séries de fbm e estimar o valor de H

```

% Programa para gerar séries de fbm e estimar o valor de H
% As séries são geradas com 16384 elementos e usados os 7305 centrais
% A escolha do tipo de gerador a ser usado é feita nas linhas 23 a 27
% As séries serão geradas com H= 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7 (variável hu)
% Para cada valor de H serão geradas 100 séries e para cada uma o valor
% de H é estimado
%
% Programa elaborado por Luiz Roberto Salomão jun/2005
%
clear
close all
clc

hu=0.3;% primeiro H
nupon=16384;%tamanho da serie gerada;
nusada=7304;%tamanho da serie usada (centro da serie gerada);
nh=5; %número de Hs usados
nsg=100;%número de séries geradas para cada H;
for ih=5:nh

for i 100=1:nsg

% xx=função geradora do mov brow
%xx=mpdwalk(0,1,14,hu);%*****
[xx] = fbmlevinson(nupon,hu) ;%*****
%xx=fbmfeder(hu,nupon,1);%*****
%xx = fbmsim(0:nupon,hu,0.5);%*****

%y=xx(4540:11844)';
plot(y(1:nusada)); pause; close;

% Corrige pela reta primeiro e ultimo ponto
len=length(y);
nusada=len;

    a=polysfit([1,nusada],[y(1),y(nusada)],1);
    for v=1:nusada
        x(v)=y(v)-(a(1)*v+a(2));
    end

plot(x(1:nusada)); pause; close;
% Cálculo dos coeficientes da transformada wavelet
escal=floor(log2(len));
coefs=cwt(x,2^(0:escal),'db8');
for i=1:escal
    z(i)=log2(mean(abs(coefs(i,:)))); % log2 abs mean coeficent.
end
% Estimativa de H
eixox=1:escal;
coef=polysfit(eixox,z,1);
s1=num2str(coef(1)-0.5);
f1=polynomial(coef,eixox);
ss = ['Estimativa de H: ' s1];
%plot(eixox,z,'. '), xlabel('log2 escal es'), ylabel('log2 mean abs coef')
%hold on
%plot(eixox, f1, 'g'), title(ss)
%hold off; pause; close;

% Cálculo do erro
reta=polynomial(coef,eixox);
erroy=sqrt(sum((z-reta).^2)/(length(z)-2));
delta=length(eixox)*sum(eixox.^2)-(sum(eixox))^2;
erroh=erroy*sqrt(length(z)/(delta));
err(ih,i 100)=erroh;

hmed(ih,i 100)=coef(1)-0.5;
end

hu=hu+0.1;
end
%Salva os valores de H e do erro
save('hmedfbmlevinson.mat','hmed');
save('errfbmlevinson.mat','err');
for i=1:nh
    hmedio(i)=mean(hmed(i,:));
    erromedio(i)=mean(err(i,:));
    disp(['H médio = ' num2str(hmedio(i)) ' Erro médio = ' num2str(erromedio(i))]);
end

```


APÊNDICE VI

Programa para estimar o expoente de hurst de séries temporais de chuva

```
% Programa para estimar o expoente de hurst de séries temporais de chuva
% utilizando transformada wavelet e fourier
%
% Desenvolvido por Luiz Roberto Salomão jun/2005
%
%
%
clear
close all
clc
fprintf('\n      Estima o H por wavelets (db8) e Fourier      %s\n', datestr(now))
fprintf('\n      \n')
% Carregando o arquivo que contém a série
ss=input('Entre com o nome do arquivo ( nome.mat ): ', 's');
disp(['Arquivo ' ss]);
load(ss);
plot(x0); pause; close;
len=length(x0);

% Correção pela média
media=mean(x0);
x1=x0-media;
plot(x1); pause; close;
% Soma cumulativa
x2=cumsum(x1);
plot(x2); pause; close;
%corrige pela reta que passa pelo primeiro e ultimo ponto
a=polyfit([1, len], [x2(1), x2(len)], 1);
for v=1: len
    x(v)=x2(v)-(a(1)*v+a(2));
end
plot(x); pause; close;
% Define a escala
esc=floor(log2(len));
escala=2.^(0:esc);
% Calcula os coeficientes da transformada wavelet
coefs=cwt(x, escala, 'db8');
% Calcula o log da média do valor absoluto dos coeficientes
for i=1:esc
    z(i)=log2(mean(abs(coefs(i, :))));
end
% Construção do gráfico log2 mean coef X log2 escala (estimativa de H)
eixox=1:esc;
coef=polyfit(eixox, z, 1);
s1=num2str(coef(1)-0.5);
f1=polyval(coef, eixox);
s2 = ['Estimativa de H por wavelet: ' s1];
plot(eixox, z, '.'), xlabel('log2 escala'), ylabel('log2 mean abs coef')
hold on
plot(eixox, f1, 'g'), title(s2)
hold off; pause; close;
% Cálculo do erro ao estimar H
reta=polyval(coef, eixox);
erroy=sqrt(sum((z-reta).^2)/(length(z)-2));
del ta=length(eixox)*sum(eixox.^2)-(sum(eixox))^2;
erroh=erroy*sqrt(length(z)/(del ta));
s3=[s2 ' Erro= ' num2str(erroh)];
disp(s3)
% Estimativa de H por Fourier
%
% Cálculo da transformada de Fourier
y = fft(x);
% Cálculo da 'Potência' e log da primeira metade dos coeficientes
yy = y .* conj(y);
p = log(yy(fi x(2: len/2)));
% Cálculo do log da frequência
f = log(1: len/2 - 1);
% Traçado do gráfico log Potencia X log frequência
plot(f, p), xlabel('log frequência'), ylabel('log potencia');
hold on;
Nmin = 16;
Nmax = floor(15*len/32);
p1 = polyfit(f, p, 1);
p2 = polyfit(f(Nmin: Nmax), p(Nmin: Nmax), 1)';
s4 = num2str(-(p2(1)+1)*0.5);
s5 = ['Estimativa de H por Fourier: ' s4];
f1 = polyval(p1, f);
f2 = polyval(p2, f(Nmin: Nmax));
```

```

plot(f(Nmi n: Nmax), f2, 'r'), title(s5);
hold off; pause; close;
% Cálculo do erro ao estimar o H por Fourier
length(p(Nmi n: Nmax));
length(f2);
erroP=sqrt(sum((f2-p(Nmi n: Nmax)). ^2)/(length(Nmi n: Nmax)-2));
ei xofreq=(Nmi n: Nmax);
del tafreq=length(ei xofreq)*sum((f(Nmi n: Nmax)). ^2)-(sum(f(Nmi n: Nmax)))^2;
errohf=erroP*sqrt(length(ei xofreq)/del tafreq);
s6=[s5 ' Erro= ' num2str(errohf)];
disp (s6);

```

APÊNDICE VII

WAVELETS DAUBECHIES

O resumo aqui apresentado para a construção das wavelets Daubechies se baseia nos trabalhos de DECLAN, 1997, STRANG, 1989, STRANG, 1994, HARPEN, 1998, MALONE, 2000 e BURRUS et all, 1998.

Dada uma função de dilatação (em inglês *dilation*)

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{M-1} h_k \Phi(2x - k) \quad \text{para } -\infty < x < +\infty \quad (1)$$

com coeficientes h_k constantes para $k=0,1,2,3,\dots,M-1$ com M par, a função wavelet pode ser definida por:

$$\Psi(x) = \sum_{k=0}^{M-1} (-1)^k h_{M-1-k} \Phi(2x - k) \quad (2)$$

Os valores de h_k fora do intervalo $\{0,1,\dots,M-1\}$ são iguais a zero.

A condição de ortonormalidade estabelece que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x - a) \Phi(x - b) dx = \delta_{ab} \quad \text{com } a \text{ e } b \in \mathbb{Z}$$

e teremos:

$$\sum_{k=0}^{M-1} h_k h_{k+2q} = 2\delta_{0q} \quad q = 0,1,2,3,\dots \quad (3)$$

A condição que a wavelet tenha decaimento rápido, com $M \geq 2$ e M par, nos leva a:

$$\sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} h_{2k} = \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} h_{2k+1} = 1 \quad (4)$$

Existe uma grande quantidade de conjuntos de h_k que satisfazem as equações 3 e 4. Entretanto se considerarmos que a wavelet tem média igual a zero, teremos um único conjunto de h_k :

$$\sum_{k=0}^{M-1} (-1)^k k^m h_{m-1-k} = 0 \quad \text{com } m = 0, 1, \dots, \frac{M}{2} - 1 \quad (5)$$

Se os coeficientes satisfazem as equações 3, 4, e 5 podemos a partir da equação 1 encontrar a equação de dilatação e calcular a equação da wavelet.

No apêndice C do livro "Introduction to wavelets and wavelet transforms" (BURRUS et all, 1998) e no site <http://www.dsp.rice.edu/software/wavebook.shtml> (acesso em 18 set. 2006), encontramos a codificação para o software MATLAB, da determinação dos coeficientes h_k (função DAUB), da iteração da função de dilatação (função PSA) e da construção da wavelet (função WAVE).

Para a wavelet de ordem 8 os coeficientes h_k , determinados pela função DAUB, são:

$$\begin{aligned} h_1 &= 0,2303 & h_2 &= 0,7148 & h_3 &= 0,6308 & h_4 &= -0,0279 \\ h_5 &= -0,1870 & h_6 &= 0,0308 & h_7 &= 0,0328 & h_8 &= -0,0105 \end{aligned}$$

Partindo de uma função constante, usando a função PSA, a função de dilatação é iterada. A figura VII-1 mostra a função de dilatação após cada iteração e a figura VII-2 a wavelet construída a partir da função de dilatação pela função WAVE.

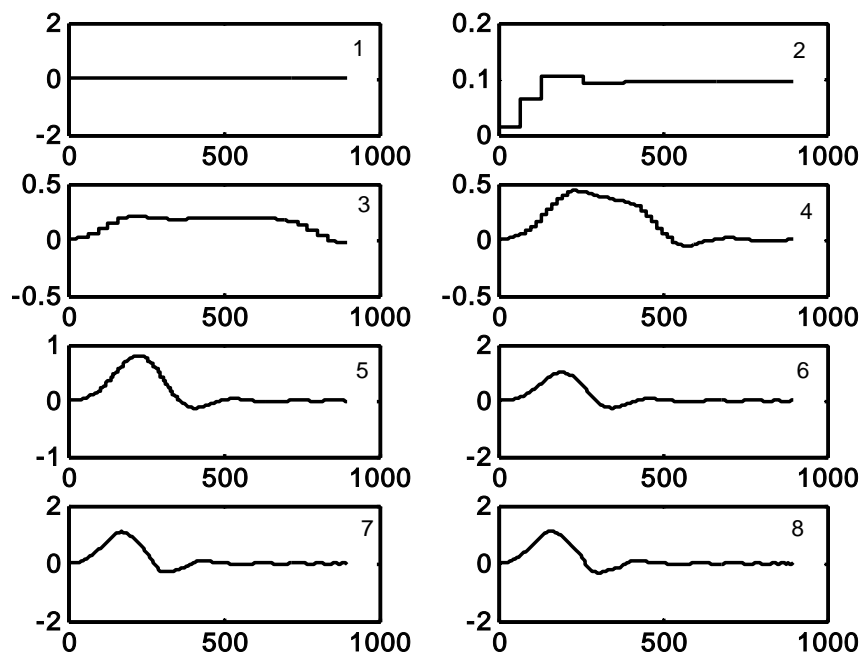


Figura VII-1 - Iterações da função de dilatação

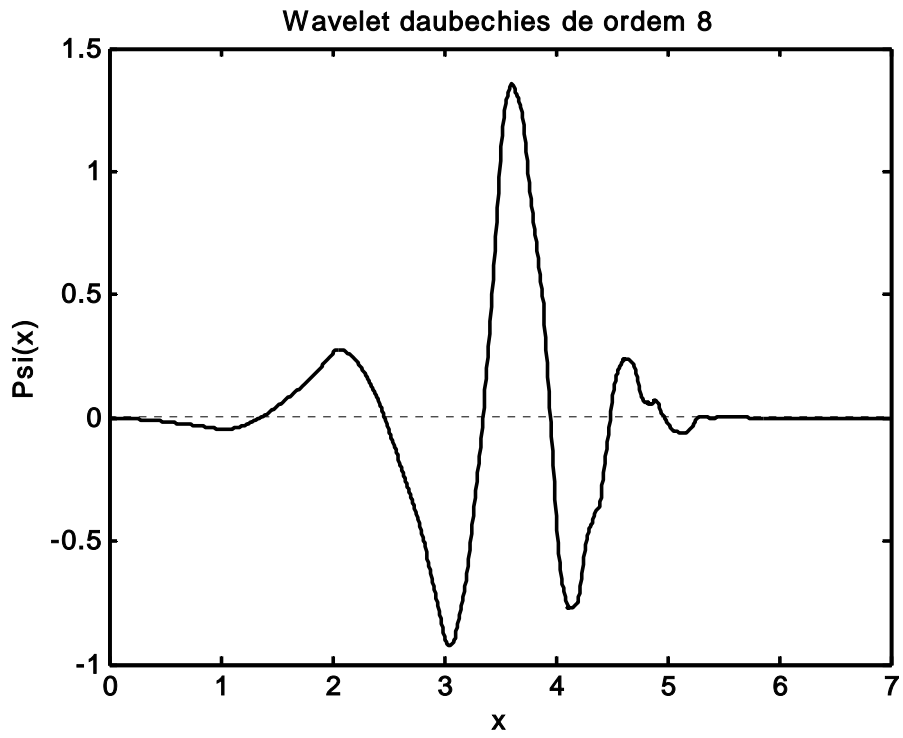


Figura VII-2 - Wavelet Daubechies de ordem 8 construída após oito iterações da função de dilatação.