



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.002/12

Os Formalismos das simetrias de Becchi-Rouet-Stora-Tyutin e de Batalin-Vilkovisky e
Aplicações

Davi Röhe Salomon da Rosa Rodrigues

Orientador

Nathan Jacob Berkovits

Agosto de 2012

Agradecimentos

A todo mundo que realmente importa.

À FAPESP pelo apoio financeiro.

Resumo

Sistemas com simetrias de gauge não podem ser quantizados da forma usual e necessitam de outros métodos capazes de fixar as condições de gauge. Sistemas que apresentem vínculos possuem graus de liberdade internos gerados por transformações de gauge. Nestes casos as equações de movimento não são suficientes para determinar a evolução de um sistema e é preciso impor vínculos ao sistema. Para fixar essas condições é necessário a adição de fantasmas. Depois que os vínculos foram fixados resta ainda uma transformação que envolve os campos físicos e fantasmas. Essa simetria é chamada simetria BRST. As propriedades do operador BRST permite determinar um conjunto de soluções independentes que satisfaçam os vínculos e, através desse processo é possível quantizar um sistema. Em alguns casos o operador BRST não é capaz de fixar todas as condições, para isso foi desenvolvido o formalismo BV. Além de fantasmas, também adiciona-se anticampos. Nesta dissertação foi feita uma revisão sobre vínculos, transformações de gauge e apresentou-se a simetria BRST. Utilizando as propriedades do operador BRST foi possível encontrar um método para determinar o operador BRST e apresentou-se o operador BV. Ao longo do texto apresenta-se exemplos para facilitar a compreensão da teoria.

Palavras Chaves: Sistemas vinculados, Vínculos, Simetrias de Gauge, Simetria BRST, Simetria BV, Partícula Relativística, Corda Bosônica Relativística

Áreas do conhecimento: Teoria Quântica de Campos.

Abstract

Systems with gauge symmetries cannot be quantized in the same way simpler systems can. This is due to the fact that gauge systems are constrained and it is impossible to find its time evolution just by using the equations of motion. One way to deal with this problem is by adding the so-called ghost fields, whose role is to fix the gauge. Once this fixation is done, there is still a transformation between physical and ghost fields. This symmetry is called BRST symmetry. In this approach, one is led to consider the BRST operator, which allows a set of independent solutions that satisfy the constraints to be found and the system to be properly quantized. However, there are still some conditions that cannot be fixed within the BRST formalism. For that reason, the BV formalism was developed. In the BV formalism, besides the ghost fields, it is necessary to include antifields in order to fix the constraints. This dissertation presents a review on constraints, gauge transformations and the BRST symmetry. Using the properties of the BRST operator, it is shown how to find the BRST operator itself. Also, the BV operator is presented. Some examples are presented in almost every step.

Sumário

1	Introdução	p.7
2	Sistemas com vínculos	p. 12
2.1	Sistemas que envolvam Campos	p. 14
2.2	Vínculos	p. 14
2.3	As transformações geradas por vínculos de primeira classe	p. 20
2.4	Fixação de Gauge	p. 22
2.5	Exemplo: O Campo Abeliano	p. 24
2.6	Funções de estrutura	p. 26
3	Transformações de Gauge	p. 30
3.1	Gauges redutíveis e irreduzíveis	p. 32
3.1.1	Exemplo	p. 33
3.2	Álgebra das transformações de gauge	p. 33
4	Exemplos de Sistemas com Vínculos	p. 37
4.1	A Partícula Relativística	p. 37
4.2	A Corda Bosônica Relativística	p. 41
4.2.1	O gauge conforme	p. 46
4.3	O Campo de Maxwell	p. 47
5	A simetria BRST	p. 48
5.1	Vínculos em sistemas quânticos	p. 49
5.2	O operador BRST	p. 50
5.3	Fixação de Gauge pelo Método de Faddeev-Popov	p. 51

5.4	A simetria BRST	p. 54
5.5	A quantização BRST	p. 54
5.6	A Partícula Relativística	p. 55
5.7	A Corda Bosônica Relativística	p. 58
6	Um formalismo BRST mais geral e o formalismo BV	p. 64
6.1	Um exemplo para motivar o estudo mais geral de BRST	p. 66
6.2	Estrutura algébrica da simetria BRST	p. 69
6.2.1	Álgebra graduada	p. 69
6.2.2	Operadores diferenciais	p. 70
6.3	Construção do operador BRST	p. 72
6.3.1	Operador diferencial de Koszul-Tate (δ)	p. 74
6.3.2	Operador diferencial exterior longitudinal (d)	p. 77
6.3.3	O operador BRST	p. 80
6.3.4	BRST a partir dos parenteses de Poisson	p. 80
6.3.5	BRST-anti-campo ou método BV	p. 85
6.4	Considerações sobre os formalismos BRST e BV	p. 90
7	Aplicações do Formalismo BV	p. 92
7.1	A Partícula Relativística	p. 92
7.2	A Corda Relativística	p. 94
7.3	O Campo de Cordas Abertas	p. 96
8	Conclusão	p. 105
	Apêndice A – Teoria de Campos Conformes	p. 107
A.1	A corda bosônica na métrica conforme	p. 107
A.2	Expansão de produtos de operadores: OPE	p. 108
A.3	O campo bc	p. 110
A.4	Expansão em modos	p. 111

A.5 Operadores de Vértice p. 113

Referências p. 115

Referências p. 115

1 *Introdução*

A Física busca analisar, descrever e compreender os fenômenos naturais. Através de um conjunto de informações possíveis de serem coletadas, busca-se entender o comportamento dos fenômenos e determinar como algo se comporta sob determinadas condições. Para fazer esse estudo, utiliza-se de uma linguagem lógica, a matemática, para descrever os fenômenos e a partir das operações lógicas analisar as possíveis consequências das propriedades dos sistemas.

Nesse contexto surgiu a Mecânica Clássica. Utilizando alguns princípios fundamentais, é possível descrever a evolução de um sistema dados informações coletadas a dois tempos diferentes e as condições ao qual o sistema é submetido. O conjunto de informações necessários são, à priori, o que se chamam de variáveis dinâmicas e correspondem à posição de cada objeto do sistema e sua velocidade. A partir dessas grandezas e das propriedades do sistema define-se uma outra grandeza chamada Ação. A partir da Ação e do Princípio de Mínima Ação é possível encontrar um conjunto de equações que determinam os valores para a posição dos objetos e suas velocidades para cada instante entre os dois tempos de observação.

Muitas vezes o sistema pode apresentar vínculos, isto é, um conjunto de condições que relacionam a posição e a velocidade das partículas do sistema. Essas relações fixas podem gerar um conjunto de transformações entre as variáveis dinâmicas que deixam a evolução do sistema invariante. Isto é, é possível encontrar um conjunto de transformações entre as soluções das equações de movimento. Essas transformações são chamadas transformações de gauge e correspondem a graus de liberdade internos ao sistema. Assim, as equações de movimento são incapazes de determinar unicamente a evolução do sistema. Por exemplo, uma bola de futebol é um sistema com vínculos. Os vínculos dela estão relacionados ao fato de o padrão da estampa se repita ao redor da bola. Considere que você a veja a um momento, deixe o tempo passar e veja ela de novo. Mesmo que a imagem da bola no segundo instante seja igual à primeira, é impossível saber se giraram a bola ou não.

Com o desenvolvimento da Física e o estudo do comportamento das partículas em escalas menores, descobriu-se que esses graus de liberdade extra eram um problema. Para um sistema clássico é possível fazer a observação a qualquer momento e determinar que

transformações estão sendo efetuadas no sistema. Entretanto o mesmo não pode ser feito para escalas menores. Descobriu-se ao estudar sistemas físicos em escalas menores que a partir de determinada escala as grandezas passam a tomar valores descontínuos. É possível determinar intervalos para essas grandezas que são inacessíveis ao sistema. Por exemplo, os elétrons em um átomo só podiam ter determinados níveis de energia. Assim, alguns objetos podiam apresentar o comportamento de onda em certas circunstâncias e de partícula em outras. A luz, por exemplo, corresponde a uma partícula chamada fóton. Como a luz, ou qualquer outra partícula, só podia assumir certos valores mínimos para energia, podia ser grande o suficiente para alterar o comportamento do sistema. Dessa forma, qualquer observação torna-se comprometida. A Física a essas escalas foi chamada Mecânica Quântica.

Devido a dificuldade de observação, a Mecânica Quântica está associada ao Princípio da Incerteza. Essa princípio estabelece uma dificuldade em medir com precisão a posição e a velocidade de uma partícula simultaneamente. Essa dificuldade está associada a seguinte equação:

$$[x, p] = i\hbar. \quad (1.1)$$

Essa equação estabelece uma relação entre a posição e o momento conjugado. Caso haja vínculos no sistema que relacionem a posição e o momento conjugado, a equação (1.1) não é bem estabelecida. Isso advém da dificuldade de determinar a posição e o momento conjugado. Logo, já é possível notar que a Mecânica Quântica apresenta um problema para tratar de sistemas com vínculos.

O Físico P. A. M. Dirac estudou profundamente a questão de sistemas quânticos com vínculos [1]. Ele analisou a possibilidade de existências de vínculos, como eles geravam as transformações de gauge e como era possível classificar os vínculos. A partir desse estudo, foi possível descobrir um método de impor os vínculos ao sistema e determinar as variáveis dinâmicas tal que elas satisfizessem a relação (1.1). E através do estudo da relação (1.1) e de estruturas clássicas já conhecidas, o parenteses de Poisson, ele estabeleceu uma forma de quantizar sistemas, chamada *quantização canônica*.

Outra dificuldade se encontra no fato de que como a observação afeta um sistema quântico, para se determinar a evolução de um sistema só é possível ter acesso a uma observação inicial e final do sistema. Qualquer outra observação que seja feita entre esses dois tempos afeta o experimento e conseqüentemente a observação final. Assim, a múltipla possibilidade de caminhos que podem ser realizados e que satisfação as equações de movimento dificultam a determinação da evolução do sistema. Para sistemas quânticos é preciso então impor os vínculos ao sistema e fixar as transformações de gauge. A fixação das transformações permite que se determine unicamente a evolução do sistema.

No contexto da Teoria Quântica de Campos, que buscava estudar os campos na escala da Física Quântica, verificou-se a presença de campos de gauge. Esses campos tinham

sua dinâmica invariante por determinadas transformações, chamadas transformações de gauge. Tratava-se de uma simetria interna. Essa simetria removia o significado físico de alguns graus de liberdade. Isso dificultava seu processo de quantização. Para resolver esse problema, seguiu-se o procedimento desenvolvido por Dirac. Adicionava-se aos campos os vínculos a fim de tentar restringir as variáveis dinâmicas aos vínculos e poder assim realizar os cálculos. Para esse processo era preciso adicionar campos que não possuíam significado físico, mas correspondiam aos graus de liberdade extra do sistema. Uma vez que os graus de liberdade extra podiam ser descritos dinamicamente, era possível fixá-los. Por não serem físicos, foram chamados de campos fantasmas. Eles possuíam propriedades incomuns, sua estatística era diferente da indicada por sua dinâmica.

Uma vez fixados os vínculos com a adição de campos fantasmas, era possível também fixar o gauge. Em outras palavras, fixava-se uma condição que quebrava a simetria de gauge e assim, tornava a evolução do sistema unicamente determinada. Um dos procedimentos para se realizar isso foi desenvolvido pelos físicos L. D. Faddeev e V. N. Popov, [2], dando origem aos fantasmas de Faddeev-Popov.

Posteriormente descobriu-se que após a fixação dos vínculos, ainda persistia uma simetria residual. Essa simetria relacionava os campos físicos e os campos fantasmas. Essa simetria foi estudada pelos físicos C. Becchi, A. Rouet e R. Stora, [3], e independentemente por Tyutin, [4], e foi portanto, chamada de simetria BRST. Essa simetria possuía propriedades bem particulares. Além de o gerador ser fermiônico, ele é nilpotente. A propriedade de nilpotência permite a determinação de um conjunto de funções, chamado co-homologia, que satisfazem uma série de propriedades. Notou-se que era possível associar todos os estados físicos à co-homologia do operador BRST. Neste processo, fixava-se todos os vínculos do sistema. Esse formalismo se tornou bastante útil para a quantização de Teorias de Gauge.

Com o tempo, iniciou-se um estudo mais abrangente de Teorias de Gauge, como por exemplo sistemas covariantes. Notou-se a existência de várias possibilidades para transformações de gauge que envolviam funções de estrutura de ordem mais alta, redutibilidade do gauge e a existência de álgebras abertas. Esse comportamento foi primeiro notado ao tentar se estudar a álgebra das transformações de gauge do campo gravitacional. Esse estudo foi feito por E. S. Fradkin, G. A. Vilkovisky, I. A. Batalin e outros, [5–9]. Nesse contexto, foi necessário fazer um estudo do formalismo BRST que incluísse todas as novas relações que foram encontradas.

Batalin e Vilkovisky desenvolveram outro método, [10,11], para realizar a quantização de sistemas com simetrias de gauge. Neste método, ao invés de impor os vínculos aos observáveis, impõem-se as transformações de gauge às equações de movimento. Isto é, ao invés de excluir os observáveis que não satisfizessem as condições de vínculo, buscava-se eliminar as soluções das equações de movimento que não satisfizessem as transformações

de gauge. Esse formalismo foi chamado de formalismo BV. Utilizado primeiramente para lidar com sistemas com gauge redutível e com estruturas de gauge de ordem mais alta, descobriu-se que esse formalismo era essencial para lidar com um caso mais especial, o caso de sistemas com álgebra de gauge abertas. Só a estrutura dos vínculos não era capaz de trabalhar essa condição. Mas ao se considerar diretamente as transformações de gauge, esse processo era possível.

Ambos os formalismos BRST e BV estavam relacionados à simetria BRST, isto é, à simetria residual que surgia após a imposição dos vínculos e fixação das transformações de gauge. A estrutura de ambos os formalismos é extremamente análoga. Definindo uma operação de parenteses, no caso BRST corresponde ao parenteses de Poisson e no caso BV, ao parenteses BV, é possível encontrar um gerador da simetria que seja nilpotente. E a partir desse gerador quantiza-se os sistemas. Uma vez que o formalismo BRST está relacionado ao parenteses de Poisson, basta considerar os campos fantasmas e seus momentos conjugados. Já no caso do formalismo BV é preciso incluir anti-campos para satisfazer o parenteses BV.

Os formalismos BRST e BV são semelhantes para os casos simples e obtêm os mesmos resultados. Por seguirem as mesmas ideias, são extremamente análogos. Muitas vezes os termos utilizados em um são também utilizados para designar termos no outro. A diferença só surge para tratamentos de casos mais complicados que tenham graus de liberdade maiores, como na Teoria de Campos Gravitacionais [8] ou na Teoria de Campos de Cordas, [19,26,27].

Nesta dissertação buscou-se estudar o formalismo BRST e BV e suas aplicações. No segundo capítulo, analisa-se a estrutura dos vínculos, suas classificações e como eles geram as transformações de gauge. Estuda-se também casos mais gerais dos vínculos, determinando como é possível encontrar funções de estrutura de ordens mais altas. No terceiro capítulo estuda-se as transformações de gauge e suas estruturas. No quarto capítulo aplica-se todo o estudo de vínculos e simetrias de gauge em três exemplos. Com isso, é possível analisar toda a estrutura que foi antes exposta. No quinto capítulo, estuda-se a simetria BRST. Primeiramente, observa-se como é necessário fixar os vínculos aos estados físicos e obtêm-se uma intuição para o operador BRST. Analisa-se o método de Faddeev-Popov para fixar os vínculos e encontra-se campos fantasmas. Uma vez determinada a Ação com campos fantasmas, estuda-se como a simetria BRST relaciona os campos físicos e fantasmas. Através desse método quantiza-se a partícula relativística e a corda bosônica. No sexto capítulo observa-se a existência de casos mais complexos, como a existência de gauges redutíveis. Neste caso o operador BRST deve ser modificado. Assim, com essa motivação, desenvolve-se um método para determinar o operador BRST no caso mais geral a partir das propriedades mais fundamentais do operador BRST. Redefinindo as operações é possível encontrar o formalismo BV. No sétimo capítulo aplica-se

a simetria BV no caso da partícula relativística e da corda bosônica, mostrando que o resultado final é equivalente ao obtido pela simetria BRST. Aplica-se também o formalismo BV à Teoria de Campos de Cordas Abertas a fim de demonstrar como BV é necessária para casos de simetrias de gauge mais complexas.

2 *Sistemas com vínculos*

Um sistema dinâmico pode ser descrito por um conjunto de variáveis. Essas variáveis definem a configuração do sistema a cada instante. É possível desenvolver um formalismo que determina como essas variáveis interagem entre si e como elas evoluem no tempo dadas suas configurações iniciais e finais.

Na Mecânica Clássica utiliza-se do formalismo da Ação para descrever os sistemas dinâmicos e suas evoluções no tempo. As variáveis dinâmicas são aquelas que determinam a configuração do sistema a cada instante e sua evolução. Há duas opções para a escolha dessas variáveis: o formalismo Lagrangeano e o formalismo Hamiltoniano.

Primeiramente, considere o método Lagrangeano. Neste caso as variáveis dinâmicas são a posição e a velocidade para cada grau de liberdade do sistema. Assim, tem-se que as variáveis são: q^n e \dot{q}^n , onde $n = 1, \dots, N$ são os graus de liberdade. Para descrever a Ação, S , utiliza-se a função Lagrangeana, L , que é uma função das variáveis dinâmicas:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q^n, \dot{q}^n) dt. \quad (2.1)$$

Como se pode ver, a Ação depende das configurações iniciais, ao tempo t_1 , e finais, ao tempo t_2 . Segundo esse formalismo a evolução do sistema é descrita pelo caminho cujas transformações infinitesimais deixam a Ação invariante. Em outras palavras, considere um caminho descrito por funções do tempo $q^n(t)$. Transformando infinitesimalmente esse caminho por δq^n , a Ação S deve se manter invariante, isto é, $\delta S = 0$.

A solução deste problema é conhecida e é dada pela equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^n} = 0, \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.2)$$

Desenvolvendo um pouco mais os termos, obtêm-se:

$$\ddot{q}^m \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^m \partial \dot{q}^n} = \frac{\partial L}{\partial q^n} - \dot{q}^m \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial \dot{q}^n}. \quad (2.3)$$

É possível notar então que para se encontrar uma solução única para q^m é preciso que:

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^m \partial \dot{q}^n} \right) \neq 0. \quad (2.4)$$

Caso contrário, a matriz

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^m \partial \dot{q}^n}. \quad (2.5)$$

não é inversível e as soluções não são unicamente determinadas. Dessa forma, um conjunto de soluções seria possível para cada configuração inicial e final dada. Isso quer dizer que nem todos os graus de liberdade foram fixados pelas equações de movimento. Existem graus de liberdade interno entre as soluções. É possível encontrar uma transformação que leve uma solução que satisfaça a equação de movimento a outra diferente mas que também satisfaça a mesma equação. Essas transformações são chamadas *transformações de gauge*.

A razão de existir as simetrias de gauge pode ser pelo fato das variáveis dinâmicas não serem absolutamente independentes. Pode haver relações entre elas, chamadas vínculos. Esses vínculos levam a uma degenerescência na escolha das variáveis dinâmicas que determinam o sistema fazendo muitas vezes com que elas não tenham mais significado físico.

Uma vez que a existência dos vínculos está relacionada com a matriz (2.5), é interessante definir uma nova variável dinâmica chamada momento conjugado p^n . Esse momento é dado por:

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}. \quad (2.6)$$

Neste caso, a matriz (2.5) é descrita por:

$$\frac{\partial p_m}{\partial \dot{q}^n}. \quad (2.7)$$

Isto é, corresponde ao Jacobiano da transformação de um espaço definido por posição, q^n , e velocidade, \dot{q}^n , chamado espaço de configuração, para um espaço definido por posição, q^n , e momento conjugado, p^n , chamado espaço de fase.

Nesta transformação fica mais explícito o caso em que o determinante de (2.5) é diferente de 0, e corresponde ao caso em que os momentos conjugados e as velocidades não são independentes. Neste caso é possível determinar vínculos do tipo:

$$\phi_m(p, q) = 0 \quad m = 1, \dots, M. \quad (2.8)$$

Esses vínculos são chamados de *vínculos primários*. É possível ver que neste caso, ao se fazer um mapeamento do espaço de fase para o espaço de configuração seria impossível encontrar um mapeamento inverso. Estaria se levando um conjunto de variáveis, (q^n, \dot{q}^n) , com um número de graus de liberdade, para um outro conjunto de variáveis, (q^n, p^n) , com um número menor de graus de liberdade, uma vez que eles estariam restritos aos vínculos primários.

2.1 Sistemas que envolvam Campos

Nesta sessão será feita um pequeno adendo para o caso de sistemas que envolvam campos. Considere que o sistema corresponda uma distribuição contínua no espaço. Isto é, a cada ponto do espaço é possível associar a existência de uma grandeza. Os valores relacionados com essas grandezas não podem variar bruscamente entre um ponto e outro do espaço que sejam muito próximos. Assim, o sistema é determinado a partir de Campos. A cada ponto no espaço-tempo associa-se o objeto $\phi(x^\mu)$ que depende da posição x^μ . Os índices μ se diferenciam do índice i , pois o primeiro varia de 0 a 3 englobando todas as dimensões, enquanto o segundo varia de 1 a 3, englobando apenas as dimensões espaciais.

O sistema portanto pode ser descrito a partir do comportamento desses campos. Isto é, ao invés de se considerar q e \dot{q} , utiliza-se os valores de $\phi(x^\mu)$ e de $\partial_\mu\phi(x^\mu)$ como variáveis dinâmicas. A Ação é escrita como:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}[\phi(x), \dot{\phi}(x)]. \quad (2.9)$$

onde \mathcal{L} é chamada de densidade Lagrangeana, pois ela depende da posição x^μ de cada objeto. Para determinar o sistema completo, é necessário então efetuar também uma integral em todas as dimensões do espaço, $\int d^3x$, e por isso a Ação é dada por uma integral em todo o espaço-tempo, $\int d^4x$.

Utiliza-se π_μ para designar o momento $\pi(x^\mu)$ conjugado a $\phi(x^\mu)$. Ele é obtido a partir de:

$$\pi_\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^\mu}. \quad (2.10)$$

A equação de movimento para os campos é dada por:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\nu} = 0. \quad (2.11)$$

Tendo em mente as considerações que devem ser feitas para o caso de campos, volta-se a utilizar a notação da sessão anterior.

2.2 Vínculos

Os vínculos primários (2.8) foram descritos no espaço de fase, logo, para descrevê-los é preciso estudar o formalismo Hamiltoniano.

A partir da Lagrangeana $L(q^n, \dot{q}^n)$, no espaço de configuração, é possível determinar o

Hamiltoniano $H(q^n, p_n)$, no espaço de fase, através de uma transformação de Legendre:

$$H = p_n \dot{q}^n - L. \quad (2.12)$$

Para o caso de sistemas descritos por campos, de forma análoga, o Hamiltoniano é obtido a partir da densidade hamiltoniana \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} = \pi_\mu \dot{\phi}^\mu - \mathcal{L}. \quad (2.13)$$

E,

$$H(t) = \int d^3x \mathcal{H}(t, x^i). \quad (2.14)$$

onde a integral é feita só no espaço, uma vez que o Hamiltoniano é uma grandeza determinada a cada instante.

O formalismo de vínculos segue de forma análoga considerando que se tratam de distribuições no espaço. Isto é, as variáveis dinâmicas são em termos das grandezas $\phi(x^\mu)$ e $\partial_\nu \phi(x^\mu)$ ou $\phi(x^\mu)$ e $\pi(x^\mu)$.

De uma forma geral, o Hamiltoniano é então descrito em um espaço dado pela posição, ou valor do campo a cada ponto, e o momento conjugado. Voltando ao caso sem envolver campos, é possível analisar a dependência do Hamiltoniano com suas variáveis dinâmicas, q^n e p_n :

$$\begin{aligned} \delta H &= \delta(p_n \dot{q}^n - L) = \delta p_n \dot{q}^n + p_n \delta \dot{q}^n - \left(\frac{\partial L}{\partial q_n}\right) \delta q_n - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}\right) \delta \dot{q}^n \\ &= \dot{q}^n \delta p_n - \left(\frac{\partial L}{\partial q_n}\right) \delta q_n. \end{aligned} \quad (2.15)$$

O Hamiltoniano, entretanto, não é unicamente determinado. Uma vez que os vínculos primários (2.8) são nulos, a soma de qualquer combinação linear deles ao Hamiltoniano não o altera. Isto é, é possível encontrar um Hamiltoniano equivalente descrito por:

$$H^* = H + u_m \phi_m. \quad (2.16)$$

Essa alteração do Hamiltoniano é equivalente a impor que o Hamiltoniano satisfaça as condições de vínculos ao utilizar o método dos multiplicadores de Lagrange. Essa modificação no Hamiltoniano altera as equações de movimento. Essa alteração do Hamiltoniano faz com que as equações de movimento satisfaçam os vínculos.

Fazendo a variação (2.15) com o Hamiltoniano equivalente (2.16), obtêm-se as seguintes equações de movimento:

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}; \quad (2.17)$$

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} - u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_n}. \quad (2.18)$$

onde os coeficientes u_m , que correspondem aos multiplicadores de Lagrange, são desconhecidos. As equações (2.17) são as equações que descrevem a evolução das variáveis dinâmicas em um sistema com vínculos.

Uma vez que os coeficientes u_m estão multiplicados pelos vínculos, que são nulos, é possível notar que uma variação de u_m não modificaria as equações de movimento a menos de um termo igualmente nulo. É possível então generalizar os coeficientes e considerá-los variáveis dinâmicas $u_m = u_m(q, \dot{q})$. Para encontrar as equações que determinam $u_m(q, \dot{q})$, basta observar a primeira equação de (2.17).

Com essa generalização dos coeficientes, que devem existir em mesmo número dos vínculos primários (2.8), nota-se que o problema da diferença dos graus de liberdade entre o espaço de configuração e o espaço de fase é resolvido. Em ambos os casos tem-se o mesmo número de variáveis dinâmicas, e equações, $u_m(q, \dot{q})$ ou $\phi_m(p, q) = 0$, que restringem os graus de liberdade. O problema da irreversibilidade de (2.5) é resolvido e o problema mais uma vez se torna unicamente determinado.

A ideia de adicionar coeficientes dinâmicos para a solução de problemas com transformações de gauge é extremamente útil e será analisada em mais detalhes nos capítulos posteriores.

O formalismo Hamiltoniano é portanto bastante útil para estudar sistemas com vínculos. Para entender melhor como os vínculos geram as transformações de gauge é preciso estudar uma propriedade do espaço de fase.

No espaço de fase é possível descrever uma operação entre duas funções f e g que é dada por:

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial q_n} \frac{\partial g}{\partial p_n} - \frac{\partial f}{\partial p_n} \frac{\partial g}{\partial q_n}. \quad (2.19)$$

Essa operação é chamada *parenteses de Poisson* e é essencial no estudo do formalismo Hamiltoniano. O parenteses de Poisson satisfaz as seguintes propriedades:

$$[f, g] = -[g, f] \quad (\text{antisimetria}); \quad (2.20)$$

$$[\alpha f_1 + \beta f_2, g] = \alpha [f_1, g] + \beta [f_2, g] \quad (\text{linearidade}); \quad (2.21)$$

$$[f_1 f_2, g] = f_1 [f_2, g] + [f_1, g] f_2 \quad (\text{lei do produto}); \quad (2.22)$$

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0 \quad (\text{Identidade de Jacobi}). \quad (2.23)$$

Essas propriedades são de extrema importância e aparecerão na descrição de outras operações.

Com a utilização dos parenteses de Poisson é possível simplificar as equações de movimento.

Considere que a evolução de um observável dinâmico seja dado por:

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial g}{\partial p_n} \dot{p}_n. \quad (2.24)$$

Utilizando as equações de movimento (2.17) e o parenteses de Poisson, é possível modificar essa equação. A equação obtida é dada por:

$$\dot{g} = [g, H] + u_m [g, \phi_m]. \quad (2.25)$$

Ou,

$$\dot{g} = [g, H^*]. \quad (2.26)$$

onde chama-se $H^* = H + u_m \phi_m$ de Hamiltoniano Total.

Logo, a evolução temporal de um observável dinâmico é determinado pelo parenteses de Poisson do observável com o Hamiltoniano Total.

Um detalhe que merece atenção a partir deste momento é o fato da existência de igualdades chamadas *fortes* e *fracas*. Uma vez que os vínculos são identicamente nulos, é sempre possível somar uma combinação linear deles sem alterar o significado da equação. Quando se supõe possível a soma à solução de combinações lineares dos vínculos, admite-se a existência de uma igualdade fraca. Neste caso o sinal de igualdade é representado por \approx . Caso contrário, a igualdade é forte, isto é, assume-se que não está incluindo possíveis combinações lineares dos vínculos.

Um exemplo é a possibilidade de escrever:

$$\dot{g} \approx [g, H^*]. \quad (2.27)$$

Uma vez que é possível somar termos $u^m \phi_m$ à equação sem alterar seu significado.

Ao se considerar vínculos é preciso estar atento se eles são consistentes, isto é, se eles não são incompatíveis com o sistema. Para verificar essa consistência é preciso analisar como os vínculos evoluem temporalmente. Sendo fixos, eles deveriam ser constantes, tal que $\dot{\phi}_m = 0$. Isso gera um sistema de equações da forma:

$$\dot{\phi}^m = [\phi^m, H^*] \approx 0. \quad (2.28)$$

Desenvolvendo, obtêm-se:

$$[\phi_m, H] + u_j [\phi_m, \phi_j] \approx 0. \quad (2.29)$$

A consistência dessa equação depende da consistência da Lagrangeana ou gera condições para os coeficientes u_m . Caso haja inconsistência, isto é, leve a alguma igualdade impossível, significa que a Lagrangeana inicial não é válida, ela possui equações de movimento impossíveis. Por exemplo, $L = \dot{q} - q$, cuja equação de movimento é $0 = 1$. Caso haja consistência, a equação (2.29) pode fornecer duas soluções:

1. $0 = 0$, neste caso a Lagrangeana fornece equações de movimento e vínculos consistentes entre si.

2. $\chi(q, p) = 0$, neste caso encontra-se um novo vínculo que deve ser satisfeito pelo sistema. Os novos vínculos encontrados são chamados *vínculos secundários*.

É importante ressaltar que os vínculos secundários também devem satisfazer a equação de consistência (2.29) podendo gerar novos vínculos secundários. Através desse processo é possível encontrar todos os vínculos de um sistema.

Uma vez encontrados todos os vínculos que sejam consistentes com as equações de movimento, é interessante obter as soluções que a equação (2.29) fornece para os coeficientes $u_m(q, p)$. As soluções podem ser separadas em uma solução particular $U_m(q, p)$ e uma solução homogênea $V_m(q, p)$.

A solução particular deve existir, caso contrário a equação não é consistente e esse caso foi excluído:

$$[\phi_m, H] + U_j[\phi_m, \phi_j] = 0 \quad (2.30)$$

Todavia, a solução particular pode ser alterada pela combinação linear de soluções homogêneas $V_m(q, p)$ que satisfaçam:

$$V_m[\phi_j, \phi_m] = 0. \quad (2.31)$$

Logo, a solução mais geral para o coeficiente u_m é:

$$u_m = U_m + v_\alpha V_{\alpha m}. \quad (2.32)$$

O Hamiltoniano Total (2.16) pode ser escrito, portanto, como:

$$H_T = H + U_m \phi_m + v_\alpha \phi_\alpha. \quad (2.33)$$

onde

$$\phi_\alpha = V_{\alpha m} \phi_m, \quad (2.34)$$

e v_α é uma constante arbitrária. Define-se assim um Hamiltoniano Total consistente e que fixa todos os vínculos do sistema.

Com o objetivo de obter as transformações de gauge é preciso estudar outra classificação para os vínculos.

Os observáveis dinâmicos de uma forma geral podem ser classificados em *primeira classe* ou *segunda classe* conforme tenham o parenteses de Poisson fracamente igual a zero ou não.

Uma variável dinâmica, A , dependente de q e p , é de *primeira classe* quando o parenteses de Poisson com os vínculos é fracamente igual a zero:

$$[A, \phi_j] = c_{jk} \phi_k \approx 0, \quad j, k = 1, \dots, N. \quad (2.35)$$

Caso contrário, a variável dinâmica é chamada de *segunda classe*.

$$[A, \phi_j] = C_j, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.36)$$

Essa mesma classificação pode ser aplicada aos vínculos, que passam a ser considerados de primeira ou de segunda classe. Os vínculos de primeira classe, γ_α , são o conjunto de vínculos que satisfazem a seguinte igualdade:

$$[\gamma_\alpha, \gamma_\beta] = c_{\alpha\beta}^p \gamma_\rho \approx 0. \quad (2.37)$$

Os vínculos de segunda classe, χ_a são aqueles que satisfazem a seguinte relação:

$$[\chi_a, \chi_b] = C_{ab}. \quad (2.38)$$

onde $\det(C_{ab}) \neq 0$, caso contrário seria possível realizar combinações lineares dos vínculos de segunda classe que satisfizessem a relação (2.37).

É importante notar que a igualdade fraca pode corresponder somente à combinação linear de vínculos de primeira classe. Isso passa a ser mais óbvio ao se demonstrar que o parenteses de Poisson entre dois observáveis, A e B , de primeira classe também é um observável de primeira classe. Utilizando a propriedade de anti-simetria e a Identidade de Jacobi, demonstra-se:

$$\begin{aligned} [[A, B], \phi_j] &= [[A, \phi_j], B] - [[B, \phi_j], A] \\ &= [a_{jk} \phi_k, B] - [b_{jl} \phi_l, A] \\ &= a_{jk} [\phi_k, B] + [a_{jk}, B] \phi_k - b_{jl} [\phi_l, A] - [b_{jl}, A] \phi_l = c_{jm} \phi_m \approx 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

Assim, considerando que A e B correspondam a vínculos de primeira classe, o parenteses de Poisson entre eles deve corresponder à uma combinação linear de vínculos de primeira classe. Isso corresponde justamente à relação (2.37). A partir dessa informação, percebe-se que é possível obter uma álgebra para os vínculos

O Hamiltoniano Total (2.33) é um observável de primeira classe. Para demonstrar isso, basta analisar o parenteses de Poisson:

$$[H + U_m \phi_m + v_\alpha \phi_\alpha, \phi_i] = [H + U_m \phi_m, \phi_i] + [v_\alpha \phi_\alpha, \phi_i]. \quad (2.40)$$

O último termo é calculado por:

$$\begin{aligned} [v_\alpha \phi_\alpha, \phi_i] &= [v_\alpha V_{\alpha m} \phi_m, \phi_i] \\ &= v_\alpha V_{\alpha m} [\phi_m, \phi_i] + [v_\alpha V_{\alpha m}, \phi_i] \phi_m \approx 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde utilizou-se o fato de que o último termo é fracamente nulo e o primeiro termo satisfaz a equação para $V_{\alpha m}$, (2.31).

O termo restante é:

$$[H + U_m \phi_m, \phi_i] \approx 0 \quad (2.42)$$

Já que satisfaz a equação de consistência (2.29) para os vínculos.

Logo,

$$[H + U_m \phi_m + v_\alpha \phi_\alpha, \phi_i] = [H_T, \phi_i] \approx 0. \quad (2.43)$$

E o Hamiltoniano Total é de primeira classe como queríamos demonstrar.

Assim, de uma forma geral, um sistema com vínculos de primeira classe, γ_α , e segunda classe, χ_a , devem satisfazer as seguintes equações:

$$[\gamma_\alpha, \gamma_\beta] = C_{\alpha\beta}^\sigma \gamma_\sigma + T_{\alpha\beta}^{ab} \chi_a \chi_b, \quad (2.44)$$

$$[\gamma_\alpha, \chi_a] = C_{\alpha a}^\sigma \gamma_\sigma + C_{\alpha a}^c \chi_c, \quad (2.45)$$

$$[H_T, \gamma_\alpha] = V_\alpha^\sigma \gamma_\sigma + V_\alpha^{ab} \chi_a \chi_b, \quad (2.46)$$

$$[H_T, \chi_a] = V_a^\sigma \gamma_\sigma + V_a^b \chi_b, \quad (2.47)$$

$$[\chi_a, \chi_b] = C_{ab}. \quad (2.48)$$

onde se utilizou o fato facilmente verificável com as propriedades dos parenteses de Poisson, (2.20), que o produto entre dois vínculos de segunda classe é um vínculo de primeira classe.

2.3 As transformações geradas por vínculos de primeira classe

Sistemas com vínculos possuem graus de liberdade interna. É possível obter nesses sistemas transformações entre as variáveis dinâmicas que não modifiquem a evolução temporal deles. Esses graus de liberdade não podem ser fixados pelas equações de movimento. Existindo vínculos entre as coordenadas p e q é impossível determinar unicamente a evolução de um sistema dinâmico dados apenas as configurações iniciais e finais. A esses graus de liberdade estão relacionados os vínculos. A existência de relações entre as variáveis dinâmicas é justamente o que possibilita as transformações de gauge. É preciso então entender como os vínculos geram as transformações de gauge e como eles estão relacionados à esses graus de liberdade.

Para isso, considere a evolução de um observável com uma variação δt no tempo:

$$g(\delta t) = g_0 + \dot{g} \delta t. \quad (2.49)$$

Usando a equação (2.27), encontra-se:

$$\begin{aligned}
 g(\delta t) &= g_0 + \dot{g}\delta t \\
 &= g_0 + [g, H_T]\delta t \\
 &= g_0 + [g, H + U_m\phi_m]\delta t + v_m[g, \phi_m]\delta t.
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Como se pode ver, a evolução temporal depende do coeficiente v_m que é arbitrário. É possível fazer várias escolhas para esse coeficiente. Tal que, fazendo uma escolha diferente desse coeficiente para a evolução temporal, encontra-se que a diferença entre eles é dada por:

$$\Delta g(\delta t) = \delta t(v_m - v'_m)[g, \phi_m]. \tag{2.51}$$

Ou,

$$\Delta g(\delta t) = \varepsilon_m[g, \phi_m]. \tag{2.52}$$

onde, $\varepsilon_m = \delta t(v_m - v'_m)$.

Isto é, é possível transformar uma possível solução para o observável em outra através dos vínculos ϕ_m . E isso é feito sem que o Hamiltoniano se altere, isto é, varie apenas por termos nulos. Assim, os vínculos de primeira classe geram transformações infinitesimais nas variáveis dinâmicas sem que isso altere a evolução do sistema.

Para verificar a consistência dessas transformações é preciso analisar o que acontece com duas transformações consecutivas. Considere duas transformações consecutivas com $\varepsilon_\beta\phi_\beta$ e $\varepsilon_\alpha\phi_\alpha$:

$$\begin{aligned}
 \Delta_\alpha g' &= \varepsilon_\alpha[g', \phi_\alpha] \\
 \Delta_\alpha(\Delta_\beta g) &= \varepsilon_\alpha[\Delta_\beta g, \phi_\alpha] \\
 &= \varepsilon_\alpha[\varepsilon_\beta[g, \phi_\beta], \phi_\alpha].
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

E subtraia pela ordem inversa:

$$\begin{aligned}
 (\Delta_\alpha\Delta_\beta - \Delta_\beta\Delta_\alpha)g &= \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta ([g, \phi_\beta], \phi_\alpha) - ([g, \phi_\alpha], \phi_\beta) \\
 &= \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta[g, [\phi_\beta, \phi_\alpha]].
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

onde utilizou-se as propriedades dos parenteses de Poisson, (2.16).

O comutador entre duas transformações consecutivas corresponde, então, a outra transformação gerada por: $\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta[\phi_\beta, \phi_\alpha]$. E, como foi visto em (2.39), o comutador entre dois vínculos de primeira classe é um vínculo de primeira classe, (2.37). Portanto,

$$[\Delta_\alpha, \Delta_\beta] = \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta[g, C_{\alpha\beta}^0\phi_\rho]. \tag{2.55}$$

E isso acontece apenas no caso de vínculos de primeira classe. Essa mesma estrutura não é válida para vínculos de segunda classe.

Como o Hamiltoniano também é de primeira classe, é possível mostrar que $[\phi_j, H + U_m \phi_m]$ também gera transformações de gauge. Eles correspondem aos vínculos secundários.

Considere uma transformação do tipo (2.52) e evolua no tempo ε com o operador $H' = H + U_m \phi_m$ e subtraia pelo processo inverso:

$$\begin{aligned} \Delta g &= \varepsilon \varepsilon_m ([[\phi_j, \phi_m], H'] - [[g, H'], \phi_m]) \\ &= \varepsilon \varepsilon_m [g, [\phi_j, H + U_m \phi_m]]. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Dessa forma, o vínculo secundário $[\phi_j, H + U_m \phi_m]$ também gera uma transformação de gauge com parâmetro $\varepsilon' = \varepsilon \varepsilon_m$.

Dirac conjecturou que todos os vínculos secundários de primeira classe geram transformações de gauge. Entretanto, isso é difícil de provar. Mas de forma geral, todos os vínculos de primeira classe geram transformações de gauge.

2.4 Fixação de Gauge

Como já foi dito, uma vez existindo vínculos, as equações de movimento são incapazes de fixar todos os graus de liberdade. Isso gera uma degenerescência para a evolução temporal dos observáveis. Eles não são unicamente determinados.

Observáveis físicos devem satisfazer a seguinte condição:

$$[A_0, \phi_\alpha] \approx 0. \quad (2.57)$$

A razão disso é que o observável está somente relacionado aos estados físicos e estes possuem os graus de liberdade gerados pelos vínculos.

A partir da relação (2.57) percebe-se que o observável não é unicamente determinado, podendo ser alterado por uma combinação linear de vínculos de primeira classe:

$$A'_0 = A_0 + c^\beta \phi_\beta. \quad (2.58)$$

Por isso, é importante ser possível fixar o gauge. Isto é, introduzir uma condição ao sistema que remova a degenerescência dos estados. Caso contrário, ocorreria uma contagem múltipla de estados ao se calcular um observável. Um mesmo estado seria contado várias vezes devido a todas as possíveis configurações permitidas pelas transformações de gauge.

De fato, é possível fixar o gauge. Para isso é preciso impor condições que removam os elementos não observáveis sem alterar os elementos que sejam observáveis. Em outras palavras, é possível remover a degenerescência sem que isso afete o valor do observável.

Para fixar o gauge impõe-se uma condição, ou vínculo, do tipo:

$$G_a(q, p) \approx 0. \quad (2.59)$$

Devem existir tantas fixações de gauge quanto o número de vínculos primários, para que assim toda a degenerescência seja removida.

Esses vínculos devem satisfazer duas propriedades:

1. A configuração do sistema imposta pelo vínculo deve ser acessível através de transformações de gauge. Isto é, deve existir uma transformação de gauge entre a configuração imposta pela fixação e as outras configurações possíveis do sistema. Dado um conjunto de soluções das equações de movimento para as variáveis dinâmicas q e p , deve ser possível modificar o sistema através de transformações infinitesimais do tipo $\delta v^\alpha [F, \phi_\alpha]$, que permitam as variáveis dinâmicas q e p satisfazerem a condição (2.59).
2. A condição de gauge deve eliminar completamente os graus de liberdade extra. Não pode existir nenhuma transformação de gauge que transforme uma solução do sistema que satisfaça (2.59) em outra que também satisfaça. Isso significa que:

$$\delta v^\alpha [G_a, \phi_\alpha] \approx 0. \quad (2.60)$$

Implica que,

$$\delta v^\alpha = 0. \quad (2.61)$$

Por essa razão, devem existir tantas condições de gauge quanto vínculos primários. Somente neste caso o parenteses de Poisson $[G_a, \phi_\alpha]$ é uma matriz quadrada e que pode ser invertível. Para que seja invertível, tem-se que:

$$\det([G_a, \phi_\alpha]) \neq 0. \quad (2.62)$$

Como G_a é um vínculo a ser imposto ao sistema, (2.62) significa que G_a é um vínculo de segunda classe. Já que esse vínculo não pode comutar com nenhum outro vínculo, passa a não existir vínculos de primeira classe para essa configuração do sistema. E, como era esperado, não haverá mais nenhuma transformação de gauge, já que não haverá mais nenhum vínculo de primeira classe que preserve a condição (2.59). Os observáveis tornam-se então, unicamente determinados.

É necessário entretanto atentar para um detalhe. Embora as restrições acima possam ser satisfeitas localmente, isso não implica que elas satisfaçam globalmente. Já que se considerou apenas transformações infinitesimais, é possível que se encontre transformações

finitas que façam com que a condição de gauge não seja unicamente determinada. Esse problema é chamado de *obstrução de Gribov* e está relacionado às *cópias de Gribov*.

2.5 Exemplo: O Campo Abeliano

Para melhor compreender todas as definições e propriedades mencionadas nas sessões anteriores é válido dar um exemplo: o Campo Eletromagnético.

A densidade Lagrangeana que descreve o Campo Eletromagnético é:

$$\mathcal{L}(A_{\mu\nu}) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (2.63)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.64)$$

Seguindo o procedimento, consideremos o formalismo Hamiltoniano do espaço de fase. Neste caso, o momento conjugado ao campo A_μ é:

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)}. \quad (2.65)$$

Substituindo (2.63) em (2.65), encontra-se:

$$\pi_\mu = F_{0\mu}. \quad (2.66)$$

É fácil ver que pela definição (2.64), por $F_{\mu\nu}$ ser anti-simétrico:

$$\pi_0 = 0. \quad (2.67)$$

Isso corresponde a um vínculo do sistema e é um vínculo primário.

O Hamiltoniano é dado por:

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x (\dot{A}^\mu \pi_\mu - \mathcal{L}) + u^m \gamma_m \\ &= \int d^3x \left[\frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{1}{2} \pi_i \pi^i + A_0 \partial_i \pi^i \right] + \int d^3x C \pi_0. \end{aligned} \quad (2.68)$$

É preciso então analisar a consistência do vínculo. Usando a relação de consistência (2.29):

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_0 &= 0 \\ &= [\pi_0, H] \\ &= -\partial_i \pi^i = 0. \end{aligned} \quad (2.69)$$

A condição de consistência gera então um vínculo secundário:

$$\partial_i \pi^i = 0. \quad (2.70)$$

Esses são os dois vínculos do sistema. A involução é nula:

$$[\partial_i \pi^i, \pi_0] = 0. \quad (2.71)$$

E portanto, são vínculos de primeira classe.

O Hamiltoniano Total é:

$$H^* = \int d^3x \left[\frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{1}{2} \pi_i \pi^i + A_0 \partial_i \pi^i \right] + \int d^3x [C(x, t) \pi_0 + G(x, t) \partial_i \pi^i]. \quad (2.72)$$

As transformações geradas por esses vínculos podem ser encontradas da seguinte forma:

$$\delta A_0 = [A_0, H^*] = C; \quad (2.73)$$

$$\delta A_i = [A_0, H^*] = \partial_i G; \quad (2.74)$$

Elas correspondem a transformações da forma:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda. \quad (2.75)$$

Para simplificar o Hamiltoniano é possível incorporar o campo A_0 na função $G(x, t)$. Assim, o Hamiltoniano não depende mais de A_0 e pode-se eliminar o momento conjugado π_0 . Redefine-se o Hamiltoniano como:

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{1}{2} \pi_i \pi^i + G \partial_i \pi^i \right]. \quad (2.76)$$

No qual o único vínculo se torna $\partial_i \pi^i = 0$.

O gauge de Coulomb é um vínculo que se pode impor aos campos para fixar o gauge. A condição que o impõe ao sistema é:

$$G = \partial_i A^i = 0. \quad (2.77)$$

É possível mostrar que ele satisfaz as condições para fixar completamente o gauge.

Primeiramente é fácil ver que há o mesmo número de vínculos de fixação e de vínculos primários, um.

Essa condição é possível ser obtida através de transformações da forma (2.75). Para isso, basta encontrar λ que satisfaça a seguinte equação:

$$\partial_i (A^i + \partial^i \lambda) = 0. \quad (2.78)$$

A segunda condição é dada pelo parenteses de Poisson entre o vínculo e a fixação de gauge. Calcula-se o determinante $\det([G, \phi])$:

$$\det([G, \phi]) = \det([\partial_i A^i, \partial_i \pi^i]) = \det(\partial_x^i \partial_{y^i} \delta(x^i - y^i)). \quad (2.79)$$

Que pode ser interpretado como o determinante do Laplaciano, $\partial^i \partial_i$. Esse determinante não possui autovalores nulos exceto para soluções constantes, que podem ser eliminadas por condições de contorno. Logo, o gauge de Coulomb satisfaz as condições para fixar o gauge como era de se esperar.

2.6 Funções de estrutura

Como já visto, os vínculos de primeira classe satisfazem a seguinte relação:

$$[\phi_\alpha, \phi_\beta] = C_{\alpha\beta}^\gamma \phi_\gamma. \quad (2.80)$$

Essa identidade indica que os vínculos satisfazem uma álgebra onde a constante $C_{\alpha\beta}^\gamma$ é chamada função de estrutura da álgebra.

Os parenteses de Poisson devem obedecer a identidade de Jacobi. Aplicando a identidade de Jacobi para os vínculos, deve ser possível determinar uma função de estrutura que relacione os três vínculos. Isso pode ser compreendido da seguinte forma, considere:

$$[\phi_\alpha, [\phi_\beta, \phi_\gamma]] + [\phi_\gamma, [\phi_\alpha, \phi_\beta]] + [\phi_\beta, [\phi_\gamma, \phi_\alpha]] = 0 \quad (2.81)$$

Aplicando a identidade (2.80) em (2.81), será obtido:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\text{permutações cíclicas}} ([\phi_\alpha, [\phi_\beta, \phi_\gamma]]) \\ &= \sum_{\text{permutações cíclicas}} ([\phi_\alpha, C_{\beta\gamma}^\rho \phi_\rho]) \\ &= \sum_{\text{permutações cíclicas}} ([\phi_\alpha, C_{\beta\gamma}^\rho] \phi_\rho + C_{\beta\gamma}^\rho [\phi_\alpha, \phi_\rho]) \\ &= \sum_{\text{permutações cíclicas}} (([\phi_\alpha, C_{\beta\gamma}^\sigma] + C_{\beta\gamma}^\rho C_{\alpha\rho}^\sigma) \phi_\sigma) \\ &= \sum_{\text{permutações cíclicas}} (D_{\alpha\beta\gamma}^\sigma) \phi_\sigma. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Isto é, existe uma função:

$$D_{\alpha\beta\gamma}^\sigma = [\phi_\alpha, C_{\beta\gamma}^\sigma] + C_{\beta\gamma}^\rho C_{\alpha\rho}^\sigma. \quad (2.83)$$

que relaciona os vínculos ϕ_α . É possível definir uma função de estrutura a partir dessa função:

$$\sum_{\text{permutações cíclicas}} (D_{\alpha\beta\gamma}^\sigma) = 2U_{\alpha\beta\gamma}^{(2)\sigma\rho} \phi_\rho. \quad (2.84)$$

onde $U_{\alpha\beta\gamma}^{(2)\sigma\rho}$ é chamada de função de estrutura de ordem 2. Dependendo das funções de estrutura e dos vínculos, é possível criar uma álgebra com um número definido de funções de estrutura.

A razão de poder definir uma função de estrutura da forma (2.84) é dada ao se definir um operador: δ .

Considere um tensor completamente anti-simétrico $T^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q}$. O operador δ é definido por:

$$T^{a_1 \dots a_q} \rightarrow (\delta T)^{a_1 \dots a_{q-1}} = T^{a_1 \dots a_{q-1} a_q} \phi_{a_q}. \quad (2.85)$$

Esse operador corresponde a projetar o tensor anti-simétrico na superfície dos vínculos ϕ_α .

Pela propriedade de anti-simetria do tensor $T^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q}$, é possível ver que $\delta\delta = 0$.

$$\begin{aligned} \delta\delta T^{a_1 \dots a_{q-1} a_q} \phi_{a_q} &= T^{a_1 \dots a_{q-1} a_q} \phi_{a_q} \phi_{a_{q-1}} (-1)^{\epsilon_{a_q}} \\ &= -T^{a_1 \dots a_q a_{q-1}} \phi_{a_q} \phi_{a_{q-1}} \\ &= -T^{a_1 \dots a_{q-1} a_q} \phi_{a_q} \phi_{a_{q-1}} \\ &= -T^{a_1 \dots a_{q-1} a_q} \phi_{a_{q-1}} \phi_{a_q} = 0. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Da primeira para a segunda linha permutou-se os dois últimos índices. Da segunda para terceira renomeou-se os índices. E da terceira para quarta trocou-se a ordem dos vínculos, que comutam classicamente.

Logo, é possível demonstrar que: Se $\delta T = 0$, então $T = \delta F$. Para isso determina-se a existência de um tensor F . Considere que:

$$(\delta T)^{a_1 \dots a_{q-1}} = T^{a_1 \dots a_{q-1} a_q} \phi_{a_q}. \quad (2.87)$$

E suponha que $T^{a_1 \dots a_{q-1} a_q}$ pode ser escrito em termos de polinômios homogêneos dos vínculos ϕ_{a_q} . Assim, o operador δ apenas transforma um polinômio homogêneo de ordem f em um de ordem $f + 1$. A solução F será encontrada em termos dos polinômios $T^{(f)}$. A equação (2.87) fornece:

$$T^{(f) a_1 \dots a_q} \phi_{a_q} = 0. \quad (2.88)$$

Derivando em relação a ϕ_{a_p} :

$$\begin{aligned} T^{(f) a_1 \dots a_{q-1} a_p} &= -\frac{\partial T^{(f) a_1 \dots a_q}}{\partial \phi_{a_p}} \phi_{a_q} \\ &= F^{a_1 \dots a_q a_p} \phi_{a_q}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Com,

$$F^{(f)a_1 \dots a_q a_{q+1}} = \frac{\partial T^{(f)a_1 \dots a_q}}{\partial \phi_{a_{q+1}}}. \quad (2.90)$$

Assim, $T^{a_1 \dots a_q}$ pode ser escrito em termos de $\delta F^{a_1 \dots a_q a_{q+1}}$ com F definido a partir de (2.90). Essa pequena demonstração mostra que dado uma relação entre os vínculos:

$$\sum_{\text{permutações cíclicas}} (D_{\alpha_1 \dots \alpha_{n+2}}^{(n)\beta_1 \dots \beta_n}) \phi_{\beta_n} = 0. \quad (2.91)$$

Será sempre possível encontrar uma função de estrutura relacionada a essa identidade dada por:

$$(n+1)U_{\alpha_1 \dots \alpha_{n+2}}^{(n+1)\beta_1 \dots \beta_{n+1}} \phi_{\beta_{n+1}} = \sum_{\text{permutações cíclicas}} (D_{\alpha_1 \dots \alpha_{n+2}}^{(n)\beta_1 \dots \beta_n}) \quad (2.92)$$

onde $(n+1)$ é uma convenção.

Para encontrar essas relações é preciso calcular o parenteses de Poisson entre os vínculos e relações que envolvam as funções de estrutura.

Com o objetivo de simplificar a notação, considere as seguintes redefinições:

$$U_{\alpha}^{(0)} = \phi_{\alpha}, \quad (2.93)$$

$$U_{\alpha\beta}^{(1)\gamma} = -\frac{1}{2}C_{\alpha\beta}^{\gamma} \quad (2.94)$$

$$(2.95)$$

Encontra-se a função de estrutura de segunda ordem considerando o parenteses de Poisson da equação (2.84) com um vínculo ϕ_{λ} :

$$\begin{aligned} 0 &= [(D_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma})_C - 2U_{\alpha\beta\gamma}^{(2)\sigma\rho} \phi_{\rho}, \phi_{\lambda}] \\ &= [(D_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma})_C, \phi_{\lambda}] - 2[U_{\alpha\beta\gamma}^{(2)\sigma\rho} \phi_{\rho}, \phi_{\lambda}] \\ &= [(D_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma})_C, \phi_{\lambda}] - 2([U_{\alpha\beta\gamma}^{(2)\sigma\omega}, \phi_{\lambda}] + 2U_{\alpha\beta\gamma}^{(2)\sigma\rho} U_{\rho\lambda}^{(1)\omega}) \phi_{\omega} \end{aligned} \quad (2.96)$$

O primeiro termo necessita de um pouco mais de contas. Mas utilizando as propriedades de anti-simetria, a equação (2.84) e (2.83), encontra-se que:

$$[(D_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma})_C, \phi_{\rho}] = ([U_{\alpha\beta}^{(1)\sigma}, U_{\gamma\rho}^{(1)\lambda}] \phi_{\lambda})_C + 6(U_{\alpha\beta}^{(1)\omega} U_{\gamma\rho\omega}^{(2)\sigma\lambda} \phi_{\lambda} + 4U_{\rho\omega}^{(1)\sigma} U_{\alpha\beta\gamma}^{(2)\omega\lambda} \phi_{\lambda}). \quad (2.97)$$

Substituindo (2.97) em (2.96), encontra-se:

$$\left(2[U_{\alpha\beta\gamma}^{(2)\sigma\lambda}, U_{\rho}^{(0)}] - [U_{\alpha\beta}^{(1)\sigma}, U_{\gamma\rho}^{(1)\lambda}] - 6U_{\alpha\beta}^{(1)\omega} U_{\gamma\rho\omega}^{(2)\sigma\lambda} + 8U_{\alpha\beta\gamma}^{(2)\sigma\omega} U_{\rho\omega}^{(1)\lambda} \right) \phi_{\lambda} = 0 \quad (2.98)$$

Logo, encontrou-se uma nova relação entre os vínculos que pode ser escrita como uma nova função de estrutura. Pela definição (2.92), tem-se:

$$\left([U_{\alpha\beta\gamma}^{(2)\sigma\lambda}, U_{\rho}^{(0)}] - \frac{1}{2}[U_{\alpha\beta}^{(1)\sigma}, U_{\gamma\rho}^{(1)\lambda}] - 3U_{\alpha\beta}^{(1)\omega} U_{\gamma\rho\omega}^{(2)\sigma\lambda} + 4U_{\alpha\beta\gamma}^{(2)\sigma\omega} U_{\rho\omega}^{(1)\lambda} \right)_C = 3U_{\alpha\beta\gamma\rho}^{(3)\sigma\lambda\zeta} \phi_{\zeta}. \quad (2.99)$$

Dividiu-se por 2 por questão de convenção.

A partir das relações de comutação entre as funções de estrutura é possível encontrar funções de estrutura de ordem mais alta. Para generalizar é preciso considerar o caso que se considera variáveis extras reais fermiônicas η^α que sejam capazes de subir os índices mantendo as propriedades de anti-comutação.

Essa operação é feita da seguinte forma:

$$\eta^{\beta_{n+1}} \dots \eta^{\beta_1} U_{\beta_1 \dots \beta_{n+1}}^{(n) \alpha_1 \dots \alpha_n} = U^{(n) \alpha_1 \dots \alpha_n}. \quad (2.100)$$

Tal que o caso mais geral torna-se:

$$(n+1)U^{(n+1) \alpha_1 \dots \alpha_n \alpha_{n+1}} \phi_{\alpha_{n+1}} = (D^{(n) \alpha_1 \dots \alpha_n})_C. \quad (2.101)$$

onde,

$$\begin{aligned} D_C^{(n) \alpha_1 \dots \alpha_n} &= \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n [U^{(p) \alpha_1 \dots \alpha_p}, U^{(n-p) \alpha_{p+1} \dots \alpha_n}] (-1)^{n-p} \\ &\quad - \sum_{p=0}^{n-1} (p+1) U^{(p+1) \alpha_1 \dots \alpha_p \beta} \frac{\partial U^{(n-p) \alpha_{p+1} \dots \alpha_n}}{\partial \eta^\beta} (-1)^{n-p}. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Essas funções de estrutura determinam completamente todos os vínculos do sistema e as relações entre eles. Elas serão usadas posteriormente para definir o caso mais geral do operador BRST.

3 Transformações de Gauge

Os sistemas dinâmicos com vínculos possuem graus de liberdade interno. É possível encontrar uma transformação que relacione duas possíveis soluções para a evolução do sistema. Como ambas satisfazem as mesmas equações de movimento, é o mesmo que dizer que a transformação não modifica a evolução do sistema. Essas transformações são chamadas transformações de gauge e estão relacionadas à existência de vínculos no sistema.

O fato das transformações deixarem algo invariante corresponde ao conceito de simetria. Ao se falar de transformações de gauge, pode-se falar de *simetrias de gauge*. São transformações que não modificam a Ação. De forma mais particular, como a simetria está relacionada somente a um conjunto específico de transformações, é intuitivo pensar que, haja uma quantidade além da Ação que seja conservada e esteja diretamente relacionada às transformações. Há um teorema que demonstra esse fato, o teorema de Noether.

A análise das simetrias de um sistema físico é feita a partir de sua Ação:

$$S[y(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(y^i, \dot{y}^i, \ddot{y}^i, \dots) dt. \quad (3.1)$$

Todavia, caso haja vínculos, as equações de movimento não determinam unicamente o sistema. Nem todos os graus de liberdade são fixados por ela.

As equações de movimento são obtidas como as soluções que deixam a Ação invariante por transformações infinitesimais δy^i . Para calculá-la, suponha uma variação δS da Ação:

$$\delta S = \int \frac{\delta S}{\delta y^i(t)} \delta y^i(t) dt. \quad (3.2)$$

Se a variação for nula (δS) e independente dos limites de integração, obtém-se:

$$\frac{\delta S}{\delta y^i(t)} \delta y^i(t) = 0. \quad (3.3)$$

E, uma vez que deve independer de $\delta y^i(t)$:

$$\frac{\delta S}{\delta y^i(t)} = 0. \quad (3.4)$$

onde $\delta L / \delta y^i$ é uma derivada variacional e corresponde a:

$$\frac{\delta L}{\delta y^i} = \frac{\partial L}{\partial y^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}^i} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{y}^i} + \dots + (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \frac{\partial L}{\partial d^k y^i / dt^k}. \quad (3.5)$$

Que são as equações de movimento.

A Lagrangeana, entretanto, não é unicamente determinada. É possível sempre adicionar a ela uma derivada total do tempo da forma:

$$\delta L = \frac{dK}{dt}(y^i, \dot{y}^i, \dots, t). \quad (3.6)$$

Tal que $K(t)$ satisfaça:

$$K(t_2) - K(t_1) = 0. \quad (3.7)$$

Quer dizer, se nos contornos $K(t)$ de alguma forma se anular.

Essa liberdade de escolha do Lagrangeano está relacionado às simetrias. Considere a transformação:

$$\delta_\epsilon y^i = R_\alpha^i \epsilon^\alpha \Leftrightarrow \delta_\epsilon y^i = \int dt' R_\alpha^i(t, t') \epsilon^\alpha(t'). \quad (3.8)$$

Neste caso, usou-se uma notação reduzida. Os índices escritos correspondem a todos os índices relacionados nas operações a que estão designando. E,

$$R_\alpha^i(t, t') = \bar{R}_{(0)\alpha}^i(t) \delta(t - t') + \bar{R}_{(1)\alpha}^i(t) \delta'(t - t') + \dots. \quad (3.9)$$

Se essa variação em $y^i(t)$, gerar uma variação no Lagrangeano da forma $\delta L = \frac{dK}{dt}(y^i, \dot{y}^i, \dots, t)$, essa transformação será uma simetria do sistema. Sendo assim, a Ação será invariante por essa transformação. Tal que:

$$\delta_\epsilon S = \frac{\delta S}{\delta y^i} \delta_\epsilon y^i = \frac{\delta S}{\delta y^i} R_\alpha^i \epsilon^\alpha = 0. \quad (3.10)$$

Como a variação deve independer do parâmetro ϵ^α , encontra-se a identidade de Noether:

$$\frac{\delta S}{\delta y^i} R_\alpha^i = 0. \quad (3.11)$$

Isto é, dada a invariância da Ação com uma transformação do tipo (3.8), a Ação irá satisfazer a identidade (3.11).

É possível notar que podem existir transformações de gauge triviais. Isto é, suponha a transformação:

$$\delta_\mu y^i = \mu^{ij} \frac{\delta S}{\delta y^j}. \quad (3.12)$$

Sendo $\mu^{(ij)} = 0$, ou $\mu^{ij} = -\mu^{ji}$. É fácil ver que a identidade (3.11) é trivialmente satisfeita

$$\mu^{ij} \frac{\delta S}{\delta y^i} \frac{\delta S}{\delta y^j} = 0. \quad (3.13)$$

Essas transformações, são chamadas triviais.

3.1 Gauges redutíveis e irreduzíveis

Os vínculos dos sistemas dinâmicos geram transformações de gauge. No caso mais geral é possível considerar também quando as próprias transformações de gauge também possuem vínculos. Isto é, mesmo quando se fixar o gauge, ainda sobra graus de liberdade. Isso pode ser estudado a partir das relações entre os geradores das transformações de gauge. Caso eles sejam independentes, diz-se que o gauge é *irreduzível*. Caso eles sejam dependentes, o gauge é *reduzível*.

Considere os geradores para transformações de gauge:

$$\frac{\delta S}{\delta y^i} \lambda^i = 0 \Leftrightarrow \lambda^i = R_{(0)\alpha_0}^i \lambda'^{\alpha_0} + \frac{\delta S}{\delta y^i} M^{ij}, \quad M^{(ij)} = 0. \quad (3.14)$$

Adiciona-se um índice (0) para melhor tratar os casos redutíveis. Essa equação indica que, ao se considerar o caso dentro da camada de massa, isto é, que satisfação as equações de movimento, os geradores $R_{(0)\alpha_0}^i$ fornece um conjunto completo para todas as transformações de gauge.

Quando é possível determinar relações do tipo:

$$R_{(0)\alpha_0}^i R_{(1)\alpha_1}^{\alpha_0} = \frac{\delta S}{\delta y^j} V_{(1)\alpha_1}^{ji}. \quad (3.15)$$

Observa-se que os geradores não são independentes na camada de massa. Neste caso se fala que o gauge é redutível na camada de massa.

Segundo a relação (3.15), determina-se que $R_{(1)\alpha_1}^{\alpha_0}$ também corresponde a um conjunto completo, isto é, a redutibilidade de $R_{(0)\alpha_0}^i$ é completamente determinada pelos fatores $R_{(1)\alpha_1}^{\alpha_0}$. Dessa forma, pode-se escrever:

$$R_{(0)\alpha_0}^i \lambda^{\alpha_0} = \frac{\delta S}{\delta y^j} M_0^{ji} \Rightarrow \lambda^{\alpha_0} = R_{(1)\alpha_1}^{\alpha_0} \lambda'^{\alpha_1} + \frac{\delta S}{\delta y^j} T_0^{j\alpha_0}. \quad (3.16)$$

O caso mais geral permite construir essas relações de dependência recursivamente até determinar um gauge redutível no nível L, onde:

$$R_{(s)\alpha_s}^{\alpha_{s-1}} \lambda^{\alpha_s} = \frac{\delta S}{\delta y^j} M_s^{j\alpha_{s-1}} \Rightarrow \lambda^{\alpha_s} = R_{(s+1)\alpha_{s+1}}^{\alpha_s} \lambda'^{\alpha_{s+1}} + \frac{\delta S}{\delta y^j} T_s^{j\alpha_s}, \quad (3.17)$$

$$R_{(s-1)\alpha_{s-1}}^{\alpha_{s-2}} R_{(s)\alpha_s}^{\alpha_{s-1}} = \frac{\delta S}{\delta y^j} V_{(s)\alpha_s}^{j\alpha_{s-2}}, \quad (3.18)$$

onde definiu-se $\alpha_{-1} \equiv i$. E assim determina-se todos os graus de liberdade das transformações de gauge.

3.1.1 Exemplo

Um exemplo de gauge redutível é a teoria definida pela seguinte Lagrangeana:

$$L = -\frac{1}{12}H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho}. \quad (3.19)$$

onde:

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu\rho} &= \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu}, \\ B_{\mu\nu} &= -B_{\nu\mu}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Esse sistema possui a seguinte transformação de gauge:

$$\delta_\Lambda B_{\mu\nu} = \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu. \quad (3.21)$$

Entretanto, essa transformação é invariante por uma transformação da forma:

$$\delta \Lambda_\mu = \delta_\mu \epsilon. \quad (3.22)$$

Logo, esse gauge é redutível.

Analisando esse problema no formalismo adotado aqui, é fácil ver que para este caso a transformação de gauge é dada por:

$$R_{(0)\mu\nu}^\sigma = \delta_{[\mu}^\sigma \partial_{\nu]}. \quad (3.23)$$

E que, existe um $R_{(1)\sigma} = \partial_\sigma$ tal que

$$R_{(0)\mu\nu}^\sigma R_{(1)\sigma} = \partial_{[\nu} \partial_{\mu]} = 0. \quad (3.24)$$

Uma vez que derivadas parciais comutam. E como visto, o gauge é redutível.

3.2 Álgebra das transformações de gauge

Algo importante a se estudar é o caso do sistema possuir mais de uma transformação de gauge. Como foi visto no capítulo anterior, a existência de uma simetria de gauge está relacionada à existência de vínculos primários. O parenteses de Poisson do vínculo com a variável dinâmica, gera uma transformação de gauge. E o parenteses de Poisson entre dois vínculos de primeira classe também é um vínculo de primeira classe. Sendo assim, é possível combinar as transformações de gauge a fim de se obter uma álgebra \overline{G} .

Uma vez encontrada a álgebra para os vínculos primários, é natural saber como essa álgebra dos vínculos atua nas variáveis dinâmicas e observáveis. Sabendo-se que a trans-

formação de gauge é escrita como:

$$\delta_\eta y^i = \eta^\alpha [y^i, \gamma_\alpha] = S_\alpha^i \eta^\alpha. \quad (3.25)$$

É fácil notar a relação entre $[y^i, \gamma_\alpha]$ e S_α^i . Logo, o que se fará é um estudo de como a álgebra dos vínculos atua nos observáveis.

Considere outra transformação de gauge:

$$\delta_\eta y^i = V_\alpha^i \eta^\alpha. \quad (3.26)$$

onde $\delta_\eta S = 0$. As seguintes transformações também corresponderão a simetrias do sistema:

$$\lambda \delta_\eta y^i + \nu \delta_\varepsilon y^i; \quad (3.27)$$

$$[\delta_\eta, \delta_\varepsilon] y^i = \delta_\eta (\delta_\varepsilon y^i) - \delta_\varepsilon (\delta_\eta y^i). \quad (3.28)$$

Tal que podemos associar às transformações de gauge uma Álgebra de Lie \overline{G} .

De uma forma geral, pode-se considerar um grupo mais amplo G que envolva as transformações triviais, na qual qualquer elemento do grupo possa ser descrito como:

$$\delta y^i \frac{\delta S}{\delta y^i} = 0 \Rightarrow \delta y^i = \mu^\alpha R_\alpha^i + M^{ij} \frac{\delta S}{\delta y^i}, \quad M^{ij} = -M^{ji}. \quad (3.29)$$

onde os termos μ^α e M^{ij} pode depender dos campos.

Como foi dito anteriormente, o parenteses de duas transformações de gauge deve corresponder a uma transformação de gauge, isto é, deve ser da forma (3.29). Considere então as transformações $\delta_\eta y^i = R_\alpha^i \eta^\alpha$, $\delta_\mu y^j = R_\beta^j \mu^\beta$. O parenteses entre duas transformações fornece:

$$[\delta_\eta, \delta_\mu] y^i = \eta^\alpha \mu^\beta \left(R_\alpha^j \frac{\delta R_\beta^i}{\delta y^j} - R_\beta^j \frac{\delta R_\alpha^i}{\delta y^j} \right) \quad (3.30)$$

Tal que, para que satisfaça a condição de que seja uma transformação de gauge,

$$\left(R_\alpha^j \frac{\delta R_\beta^i}{\delta y^j} - R_\beta^j \frac{\delta R_\alpha^i}{\delta y^j} \right) = C_{\alpha\beta}^\gamma R_\gamma^i + M_{\alpha\beta}^{ij} \frac{\delta S}{\delta y^j}, \quad M_{\alpha\beta}^{ij} = -M_{\alpha\beta}^{ji}. \quad (3.31)$$

onde chama-se de álgebra aberta, quando $M_{\alpha\beta}^{ij} \neq 0$, uma vez que depende da equação de movimento para que apenas as transformações de gauge próprias sejam envolvidas.

Caso contrário, a álgebra é fechada. A álgebra das transformações de gauge é chamada propriamente de Álgebra de Lie se $M_{\alpha\beta}^{ij} = 0$ e $C_{\alpha\beta}^\gamma$ independe dos campos.

É importante notar que, uma vez que a as transformações de gauge são geradas pelos vínculos na forma:

$$\delta_\varepsilon F = \varepsilon^a [F, \phi_a], \quad (3.32)$$

Os vínculos, por sua vez, possuem uma estrutura. Essa estrutura produz uma estrutura análoga nas transformações de gauge.

Ao se considerar a identidade de Jacobi para as transformações de gauge,

$$\sum_{\text{permutações cíclicas de } 1, 2, 3} [\delta_1, [\delta_2, \delta_3]] = 0, \quad (3.33)$$

É possível obter:

$$\sum_{\text{permutações cíclicas de } 1, 2, 3} \left(R_{\rho}^i A_{\alpha\beta\gamma}^{\rho} - B_{\alpha\beta\gamma}^{ij} \frac{\delta S}{\delta y^j} \right) \epsilon_1^{\alpha} \epsilon_2^{\beta} \epsilon_3^{\gamma} = 0. \quad (3.34)$$

onde,

$$\begin{aligned} 3A_{\alpha\beta\gamma}^{\rho} \equiv & \left(\frac{\delta C_{\alpha\beta}^{\rho}}{\delta y^k} R_{\gamma}^k - C_{\alpha\sigma}^{\rho} C_{\beta\gamma}^{\sigma} \right) + (-1)^{\epsilon_{\alpha}(\epsilon_{\beta} + \epsilon_{\gamma})} \left(\frac{\delta C_{\beta\gamma}^{\rho}}{\delta y^k} R_{\alpha}^k - C_{\beta\sigma}^{\rho} C_{\gamma\alpha}^{\sigma} \right) \\ & + (-1)^{\epsilon_{\gamma}(\epsilon_{\alpha} + \epsilon_{\beta})} \left(\frac{\delta C_{\gamma\alpha}^{\rho}}{\delta y^k} R_{\beta}^k - C_{\gamma\sigma}^{\rho} C_{\alpha\beta}^{\sigma} \right), \end{aligned} \quad (3.35)$$

E,

$$\begin{aligned} 3B_{\alpha\beta\gamma}^{ij} = & \left(\frac{\delta M_{\alpha\beta}^{ij}}{\delta y^k} R_{\gamma}^k - M_{\alpha\sigma}^{ij} C_{\beta\gamma}^{\sigma} - (-1)^{\epsilon_j \epsilon_{\alpha}} \frac{\delta R_{\alpha}^i}{\delta y^k} M_{\beta\gamma}^{kj} + (-1)^{\epsilon_i(\epsilon_j + \epsilon_{\alpha})} \frac{\delta R_{\alpha}^j}{\delta y^k} M_{\beta\gamma}^{ki} \right) \\ & + \text{permutações cíclicas}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Esses termos são obtidos diretamente do uso das relações (3.30) e (3.31) em (3.33) e com as propriedades dos comutadores.

Caso gauge seja irreduzível, como visto na sessão anterior a equação (3.16) implica em:

$$A_{\alpha\beta\gamma}^{\rho} = \frac{\delta S}{\delta y^j} D_{\alpha\beta\gamma}^{j\rho}. \quad (3.37)$$

onde $D_{\alpha\beta\gamma}^{j\rho}$ é o que pode-se chamar função de estrutura de primeira ordem. Substituindo em (3.34), tem-se que:

$$\sum_{\text{permutações cíclicas de } 1, 2, 3} \frac{\delta S}{\delta y^j} \left(B_{\alpha\beta\gamma}^{ij} - (-1)^{\epsilon_j(\epsilon_i - \epsilon_{\rho})} R_{\rho}^i D_{\alpha\beta\gamma}^{j\rho} \right) \epsilon_1^{\gamma} \epsilon_2^{\beta} \epsilon_3^{\alpha} = 0 \quad (3.38)$$

A completude dos geradores implica em:

$$B_{\alpha\beta\gamma}^{ij} + (-1)^{\epsilon_i \epsilon_{\rho}} R_{\rho}^j D_{\alpha\beta\gamma}^{i\rho} - (-1)^{\epsilon_j(\epsilon_i - \epsilon_{\rho})} R_{\rho}^i D_{\alpha\beta\gamma}^{j\rho} = -\frac{\delta S}{\delta y^k} M_{\alpha\beta\gamma}^{ijk}. \quad (3.39)$$

Sendo que $M_{\alpha\beta\gamma}^{ijk}$ é anti-simétrico nos índices i, j e k . E seguindo dessa forma é possível estabelecer funções que determinam a estrutura do gauge.

Para simplificar as contas, assim como no caso de encontrar as funções de estrutura dos vínculos, considera-se variáveis η^{α} que seguem a seguinte estatística:

$$\eta^{\alpha} \eta^{\beta} = (-1)^{(\epsilon_{\alpha} + 1)(\epsilon_{\beta} + 1)} \eta^{\beta} \eta^{\alpha}. \quad (3.40)$$

E dessa forma, as equações anteriores para as funções de estrutura se tornam:

$$\frac{\delta S}{\delta y^i} R_\alpha^i \eta^\alpha = 0, \quad (3.41)$$

$$\left(2 \frac{\delta R_\alpha^i}{\delta y^j} R_\beta^j - R_\rho^i C_{\alpha\beta}^\rho + \frac{\delta S}{\delta y^i} M_{\alpha\beta}^{ij} \right) (-1)^{\epsilon_\alpha} \eta^\beta \eta^\alpha = 0, \quad (3.42)$$

$$\left(A_{\alpha\beta\gamma}^\rho - \frac{\delta S}{\delta y^i} D_{\alpha\beta\gamma}^{i\rho} \right) (-1)^{\epsilon_\beta} \eta^\gamma \eta^\beta \eta^\alpha = 0, \quad (3.43)$$

$$\left(B_{\alpha\beta\gamma}^{ij} + (-1)^{\epsilon_i \epsilon_{r\theta}} R_\rho^j D_{\alpha\beta\gamma}^{i\rho} - (-1)^{\epsilon_j(\epsilon_i - \epsilon_\rho)} R_\rho^i D_{\alpha\beta\gamma}^{j\rho} + \frac{\delta S}{\delta y^k} M_{\alpha\beta\gamma}^{ijk} \right) (-1)^{\epsilon_\beta} \eta^\gamma \eta^\beta \eta^\alpha = 0. \quad (3.44)$$

Para o caso de gauges redutíveis de ordem n , é preciso inserir os termos $R_{(n)\alpha_n}^{\alpha_{n-1}}$ que produzirão mais termos nas equações acima em um processo análogo ao caso dos vínculos primários.

4 Exemplos de Sistemas com Vínculos

Existem dois sistemas com propriedades muito interessantes para a física e com muitas aplicações.

Eles são a Partícula Relativística e a Corda Bosônica. O fato de serem relativísticas implica no fato de serem sistemas covariantes, que já impõe um vínculo bem forte. Esse vínculo é dado pelo fato de que o Hamiltoniano deve ser nulo. Entretanto a formulação covariante não é a melhor para ser trabalhada uma vez que possui algumas limitações. Para isso será considerada outra formulação com a inclusão de campos auxiliares. Neste caso, o vínculo do Hamiltoniano será gerado naturalmente mas não será tão explícito.

Ao final do capítulo considera-se o caso do Campo de Maxwell, analisando seus vínculos e transformações de gauge.

4.1 A Partícula Relativística

A Ação da Partícula Relativística é usualmente dada por:

$$S(x^\mu) = -m \int d\tau \sqrt{-\dot{x}^2}. \quad (4.1)$$

Essa Ação é invariante por reparametrização: $\tau \rightarrow \tau'$. Isso se dá justamente por ser um sistema covariante.

Essa Ação, entretanto, não é muito conveniente para tratar de partículas sem massa, uma vez que, nesse caso $m = 0$ e a Ação torna-se obviamente nula. Para contornar este problema é possível considerar a seguinte ação:

$$S(x^\mu, e) = \int d\tau \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}{e} - m^2 e \right). \quad (4.2)$$

Na qual se inclui o campo $e(\tau)$.

Neste caso, as equações de movimento são:

$$\frac{\delta S}{\delta x^\mu} = -\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\dot{x}_\mu}{e} \right) = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{\delta S}{\delta e} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\dot{x}^2}{e^2} - m^2 \right) = 0. \quad (4.4)$$

Substituindo a equação de movimento (4.4) na Ação (4.2), obtém-se a Ação (4.1). Logo, as duas Ações são equivalentes. O campo $e(\tau)$ é um campo auxiliar e não possui dinâmica. Devido à adição de um campo auxiliar, a ação deixa de ser invariante por reparametrização para ser invariante por transformações que deixam $e(\tau)d\tau$ invariante, como se pode perceber pelo termo de massa.

A fim de estudar os vínculos do sistema é preciso considerar o formalismo no espaço de fase. Os momentos conjugados aos campos são:

$$\pi_\mu = \frac{\dot{x}_\mu}{e}. \quad (4.5)$$

$$\pi_e = 0. \quad (4.6)$$

E como já era de se esperar, o momento conjugado ao campo corresponde a um vínculo, $\phi_1 = \pi_e$.

O Hamiltoniano é dado por:

$$H = \pi_\mu \dot{x}^\mu + \pi_e \dot{e} - L = \frac{1}{2} e (\pi_\mu \pi^\mu + m^2). \quad (4.7)$$

onde já se impôs o vínculo $\phi_1 = 0$. A partir do Hamiltoniano e do vínculo é preciso analisar a consistência do vínculo. É preciso descobrir se a equação $\dot{\pi}_e = 0$ é consistente e se fornece mais alguma informação. Assim,

$$\begin{aligned} 0 = \dot{\pi}_e &= [\pi_e, H] \\ &= -\frac{1}{2} (\pi_\mu \pi^\mu + m^2) \\ &= H_0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Há então um vínculo secundário, $\phi_2 = \dot{\pi}_e = H_0$. Esse vínculo corresponde ao vínculo do Hamiltoniano nulo para sistemas covariantes. Nessa formulação equivalente, esse vínculo aparece como um vínculo secundário. Ele está relacionado à partícula se encontrar na camada de massa $\pi^2 = -m^2$.

A relação de consistência para esse vínculo secundário fornece:

$$\begin{aligned} 0 = \dot{\pi}_e &= [\dot{\pi}_e, H] \\ &= [\dot{\pi}_e, eH_0] \\ &= \dot{H}_0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Portanto, é uma identidade trivial e a equação é consistente.

Uma vez se conhecendo todos os vínculos, é importante estudar o parenteses de Poisson

entre eles:

$$\begin{aligned} [\phi_1, \phi_2] &= [\pi_e, \pi_e] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Os vínculos são de primeira classe. Como a igualdade é forte, não há funções de estrutura de ordem mais alta.

O Hamiltoniano total é:

$$\begin{aligned} H_T &= \pi_\mu \dot{x}^\mu + \pi_e \dot{e} - L + \lambda^1 \phi_1 + \lambda^2 \phi_2 \\ &= \frac{1}{2} e (\pi_\mu \pi^\mu + m^2) + \pi_e \dot{e} + \lambda^1 \pi_e + \lambda^2 H_0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Uma vez feita essa análise é preciso estudar a transformação gerada por cada vínculo de primeira classe.

O vínculo ϕ_1 gera a seguinte transformação para x^μ :

$$\begin{aligned} \delta_1 x^\mu &= \varepsilon^1 [x^\mu, \phi_1] \\ &= \varepsilon^1 [x^\mu, \pi_e] \\ \delta_1 e &= 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

E para e :

$$\begin{aligned} \delta_1 e &= \varepsilon^1 [e, \phi_1] \\ &= \varepsilon^1 [e, \pi_e] \\ \delta_1 x^\mu &= \varepsilon^1 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Analogamente, para as outras variáveis dinâmicas:

$$\begin{aligned} \delta_1 \pi_\mu &= 0; \\ \delta_1 \pi_e &= 0; \\ \delta_1 \lambda^1 &= \varepsilon^1; \\ \delta_1 \lambda^2 &= -\varepsilon^1. \end{aligned} \quad (4.14)$$

O vínculo ϕ_2 gera a seguinte transformação para x^μ :

$$\begin{aligned} \delta_2 x^\mu &= \varepsilon^2 [x^\mu, \phi_2] \\ &= \varepsilon^2 [x^\mu, -\frac{1}{2} (\pi_\mu \pi^\mu + m^2)] \\ &= \varepsilon^2 \pi^\mu \\ &= \varepsilon^2 \frac{\dot{x}^\mu}{e} \end{aligned} \quad (4.15)$$

E para e :

$$\begin{aligned}\delta_2 e &= \varepsilon^2 [e, \phi_1] \\ &= \varepsilon^2 [e, \pi_e] \\ &= \varepsilon^2\end{aligned}\tag{4.16}$$

Analogamente, para as outras variáveis dinâmicas:

$$\begin{aligned}\delta_2 \pi_\mu &= 0; \\ \delta_2 \pi_e &= 0; \\ \delta_2 \lambda^1 &= 0; \\ \delta_2 \lambda^2 &= \varepsilon \dot{\lambda}^2.\end{aligned}\tag{4.17}$$

Logo, utilizando a fórmula $\delta_\varepsilon y^i = R_\alpha^i \varepsilon^\alpha$, é possível encontrar o valor de R_α^i :

$$R_\sigma^{\mu\tau} = \frac{\dot{x}^\mu(\tau)}{e} \delta(\tau - \sigma),\tag{4.18}$$

$$R_\sigma^{e\tau} = \frac{d}{d\tau} \delta(\tau - \sigma)\tag{4.19}$$

Fornecendo a seguinte identidade de Noether, $(\delta S / \delta y^i) R_\alpha^i = 0$, onde substitui-se as equações de movimento (4.3) e (4.4):

$$\int d\tau \left(- \left(\frac{\dot{x}^\mu}{e} \right) \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\dot{x}^\mu}{e} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}^2}{e^2} + m^2 \right) \frac{d}{d\tau} \right) \delta(\tau - \sigma) = 0\tag{4.20}$$

Integrando por partes o segundo termo, vê-se que essa identidade realmente é válida.

A álgebra das transformações de gauge é dada por:

$$\begin{aligned}[\delta_1, \delta_2] x^\mu &= \delta_1 \left(\frac{\dot{x}^\mu}{e} \right) \varepsilon_2 - (1 \leftrightarrow 2) \\ &= \varepsilon_2 \left(\left(\frac{d}{d\tau} (\delta_1 x^\mu) \right) \frac{1}{e} - \frac{\dot{x}^\mu}{e^2} \delta_1 e \right) - (1 \leftrightarrow 2) \\ &= \varepsilon_2 \left(\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\dot{x}^\mu}{e} \varepsilon_1 \right) \frac{1}{e} - \frac{\dot{x}^\mu}{e^2} \dot{\varepsilon}_1 \right) - (1 \leftrightarrow 2) \\ &= \varepsilon_2 \varepsilon_1 \left(\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\dot{x}^\mu}{e} \right) \frac{1}{e} \right) - (1 \leftrightarrow 2) \\ &= 0\end{aligned}\tag{4.21}$$

onde utilizou-se a equação de movimento (4.3). Logo, a álgebra é simplesmente:

$$[\delta_1, \delta_2] = 0\tag{4.22}$$

Todavia, é possível redefinir o parâmetro,

$$\varepsilon \rightarrow \varepsilon e.\tag{4.23}$$

E obter as seguintes transformações:

$$\delta x^\mu = \dot{x}^\mu \varepsilon, \quad (4.24)$$

$$\delta e = \frac{d}{d\tau}(e\varepsilon). \quad (4.25)$$

Que correspondem à transformações de reparametrização. As transformações de reparametrização são dadas pelas seguintes estruturas de ordem zero:

$$R_\sigma^{\mu\tau} = \dot{x}^\mu(\tau)\delta(\tau - \sigma), \quad (4.26)$$

$$R_\sigma^{e\tau} = \frac{d}{d\tau}[e(\tau)\delta(\tau - \sigma)]. \quad (4.27)$$

Analogamente ao caso anterior, a álgebra dessas transformações é dada por:

$$\begin{aligned} [\delta_\rho, \delta_\sigma]x^\mu &= \delta_\rho\left(\frac{d}{d\tau}(x^\mu(\tau))\delta(\tau - \sigma)\right)\varepsilon(\sigma) - (\sigma \leftrightarrow \rho) \\ &= \frac{d}{d\tau}(\delta_\rho x^\mu(\tau))\delta(\tau - \sigma)\varepsilon(\sigma) - (\sigma \leftrightarrow \rho) \\ &= \frac{d}{d\tau}\left(\frac{d}{d\tau}(x^\mu(\tau))\delta(\tau - \rho)\right)\delta(\tau - \sigma)\varepsilon(\rho)\varepsilon(\sigma) - (\sigma \leftrightarrow \rho) \\ &= \frac{d^2}{d\tau^2}(x^\mu(\tau))\delta(\tau - \rho)\delta(\tau - \sigma)\varepsilon(\rho)\varepsilon(\sigma) + \\ &\quad + \frac{d}{d\tau}(x^\mu(\tau))\frac{d}{d\tau}(\delta(\tau - \rho))\delta(\tau - \sigma)\varepsilon(\rho)\varepsilon(\sigma) - (\sigma \leftrightarrow \rho) \\ &= \varepsilon(\rho)\varepsilon(\sigma)\dot{x}^\mu(\tau)\left(\frac{d}{d\tau}(\delta(\tau - \rho))\delta(\tau - \sigma) - \frac{d}{d\tau}(\delta(\tau - \sigma))\delta(\tau - \rho)\right) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Logo, obtém-se a função de estrutura do gauge de ordem (1):

$$C_{\sigma\rho}^\tau = \frac{d}{d\tau}(\delta(\tau - \rho))\delta(\tau - \sigma) - \frac{d}{d\tau}(\delta(\tau - \sigma))\delta(\tau - \rho). \quad (4.29)$$

Essa função de estrutura corresponde ao comutador $[H(\sigma), H(\rho)]$ aplicado aos campos. E assim, determinou-se toda a estrutura de vínculos e de simetrias da partícula relativística.

4.2 A Corda Bosônica Relativística

A Corda Bosônica Relativística consiste em uma estrutura unidimensional relativística. Ela está diretamente relacionada com a Partícula Relativística e pode ser vista apenas como uma expansão dessa.

Pode-se considerar a corda como uma generalização da Partícula Relativística adicionando uma dimensão a mais. Ao invés de se considerar que a linha-mundo deve ser mínima, considera que a superfície percorrida pela corda em um intervalo de tempo seja

mínima. A partir desse princípio, chega-se à Ação de Nambu-Goto para a corda:

$$S_{NG}(X^\mu) = -T \int_M d\tau d\sigma \sqrt{-\det(h_{ab})}. \quad (4.30)$$

onde T corresponde à tensão na corda. E,

$$h_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu \quad (4.31)$$

corresponde à métrica da superfície percorrida pela corda.

Essa ação é invariante por duas transformações:

1. As próprias transformações do espaço-tempo, dadas pelo grupo de Poincaré D-dimensional:

$$X'^\mu(\tau, \sigma) = \Lambda^\mu_\nu X^\nu(\tau, \sigma) + a^\mu. \quad (4.32)$$

2. O difeomorfismo da superfície percorrida pela corda, isto é, invariância pela reparametrização das coordenadas. Considerando novas coordenadas $(\tau'(\tau, \sigma), \sigma'(\tau, \sigma))$, tem-se que:

$$X'^\mu(\tau', \sigma') = X^\mu(\tau, \sigma). \quad (4.33)$$

Analogamente ao caso da Partícula Relativística, é possível determinar uma ação equivalente, chamada Ação de Polyakov:

$$S(X^\mu, \gamma_{ab}) = -\frac{T}{2} \int_M d\tau d\sigma (-\gamma)^{1/2} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu. \quad (4.34)$$

onde $\gamma = \det \gamma_{ab}$. É possível observar que a ação é equivalente a de Nambu-Goto, encontrando a equação de movimento para γ_{ab} :

$$\delta_\gamma S = -\frac{T}{2} \int_M d\tau d\sigma (-\gamma)^{1/2} \delta \gamma^{ab} \left(h_{ab} - \frac{1}{2} \gamma_{ab} \gamma^{cd} h_{cd} \right). \quad (4.35)$$

onde usou-se que:

$$\delta \gamma = -\gamma \gamma_{ab} \delta \gamma^{ab}. \quad (4.36)$$

Logo, $\delta_\gamma S = 0$, implica que:

$$\begin{aligned} h_{ab} &= \frac{1}{2} \gamma_{ab} \gamma^{cd} h_{cd}, \\ h_{ab} (-h)^{-1/2} &= \gamma_{ab} (-\gamma)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Na qual se dividiu a primeira equação pela raiz do determinante da própria equação:

$$\begin{aligned} \det(h_{ab}) &= (1/2) \det(\gamma_{ab} \gamma^{cd} h_{cd}) \\ h &= (1/2) \gamma (\gamma^{cd} h_{cd}) \end{aligned} \quad (4.38)$$

onde o $\det(\gamma^{cd}h_{cd}) = \gamma^{cd}h_{cd}$ uma vez que é um escalar.

Substituindo (4.37) em (4.34), obtém-se a ação de Nambu-Goto, como era esperado.

A Ação de Nambu-Goto é manifestamente covariante, enquanto a de Polyakov não. A simetria de reparametrização $\tau \rightarrow \tau'$ é substituída pela simetria que deixa $e d\tau = e' d\tau'$ invariante.

Mais uma vez, analisa-se a ação no espaço de fase. Os momentos conjugados são:

$$\pi_\mu = \frac{\partial L}{\partial \partial_0 X^\mu} = -T(-\gamma)^{1/2} \partial^0_a X_\mu. \quad (4.39)$$

$$\pi_{ab} = \frac{\partial L}{\partial \partial_0 \gamma^{ab}} = 0. \quad (4.40)$$

Logo, existe um conjunto de vínculos primários: $\phi_{ab} = \pi_{ab} = 0$.

O Hamiltoniano é dado por:

$$\begin{aligned} H &= \pi_\mu \partial_0 X^\mu + \pi_{ab} \dot{\gamma}^{ab} - L \\ &= -\frac{1}{2T} (-\gamma)^{-1/2} \pi_\mu \pi^\mu - \frac{T}{2} \int_M d\tau d\sigma (-\gamma)^{1/2} \partial^i X^\mu \partial_i X_\mu. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Analisando a consistência do vínculo, $\dot{\pi}_{ab} = 0$, obtém-se:

$$\begin{aligned} 0 = \dot{\pi}_{ab} &= [\pi_{ab}, H] \\ &= \frac{\delta H}{\delta \gamma^{ab}} \\ &= -\frac{1}{2T} \left(\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu - \frac{1}{2} \gamma_{ab} \partial^c X^\mu \partial_c X^\mu \right) = T_{ab}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

E o que se encontra é um novo vínculo, $\dot{\pi}_{ab} = T_{ab} = 0$, como era de se esperar. Está relacionado ao tensor-energia momento.

A esse vínculo também está relacionado outro vínculo: $\gamma^{ab} T_{ab} = T^a_a = 0$. O tratamento para a consistência dos vínculos neste caso é mais complicado. Uma vez que a priori o formalismo Hamiltoniano prioriza a evolução temporal. Para encontrar os termos é necessário uma visão um pouco intuitiva. Como se sabe, o tensor energia-momento está relacionado a translações infinitesimais.

A estrutura dos vínculos é um pouco mais complicada e será feita posteriormente fixando o background conforme. Isto é, fixando a métrica γ_{ab} .

Entretanto, é possível analisar as transformações de gauge geradas por esses vínculos.

Os vínculos ϕ_{ab} geram transformações do tipo:

$$\delta_1 X^\mu = 0 \quad (4.43)$$

$$\delta_1 \gamma_{ab} = \epsilon_{ab}^1 \quad (4.44)$$

Os vínculos $\dot{\pi}_{ab} = T_{ab} = 0$ geram transformações do tipo:

$$\delta_2 X^\mu = \varepsilon_2^m \partial_m X^\mu, \quad (4.45)$$

$$\delta_2 \gamma_{ab} = \varepsilon_2^m \partial_m \gamma_{ab} + \partial_a \varepsilon_2 \gamma_{mb} + \partial_b \varepsilon_2 \gamma_{am}. \quad (4.46)$$

Uma vez que esse vínculo está relacionado aos índices $\sigma^a = (\tau, \sigma)$, o campo X^μ se comporta como um escalar, enquanto o campo γ^{ab} se comporta como um tensor de rank-2. Essas transformações de gauge estão relacionadas com a simetria de difeomorfismo na superfície mundo:

$$X'^\mu(\tau', \sigma') = X^\mu(\tau, \sigma), \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial \sigma'^c}{\partial \sigma^a} \frac{\partial \sigma'^d}{\partial \sigma^b} \gamma'_{ab}(\tau', \sigma') = \gamma_{ab}(\tau, \sigma). \quad (4.48)$$

Os geradores de difeomorfismo para os campos X^μ e γ^{ab} são, respectivamente:

$$R_{m\sigma^a}^{\mu\sigma^a} = \partial_m X^\mu \delta^2(\sigma^a - \sigma'^a), \quad (4.49)$$

$$R_{abm\sigma^a}^{\sigma^a} = \partial_m \gamma_{ab} \delta^2(\sigma^a - \sigma'^a) + \gamma_{mb} \partial_a \delta^2(\sigma^a - \sigma'^a) + \gamma_{am} \partial_b \delta^2(\sigma^a - \sigma'^a). \quad (4.50)$$

Para estudar a álgebra dessas transformações, analisa-se os comutadores entre duas transformações consecutivas $[\delta_1, \delta_2]$.

$$\begin{aligned} [\delta_{\sigma'^a}, \delta_{\sigma''^a}] X^\mu &= \delta_{\sigma'^a} \varepsilon^m(\sigma'^a) \partial_m X^\mu \delta^2(\sigma^a - \sigma'^a) - (\sigma'^a \leftrightarrow \sigma''^a) \\ &= \varepsilon^m(\sigma'^a) \varepsilon^n(\sigma''^a) \partial_n (\partial_m X^\mu \delta^2(\sigma^a - \sigma'^a)) \delta^2(\sigma^a - \sigma''^a) - (\sigma'^a \leftrightarrow \sigma''^a) \\ &= \varepsilon^m(\sigma'^a) \varepsilon^n(\sigma''^a) (\partial_n (\delta^2(\sigma^a - \sigma'^a)) \delta^2(\sigma^a - \sigma''^a) \partial_m \\ &\quad - \partial_m (\delta^2(\sigma^a - \sigma''^a)) \delta^2(\sigma^a - \sigma'^a) \partial_n) X^\mu. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Logo, a função de estrutura é dada por:

$$C_{mm\sigma'^a\sigma''^a}^o = \partial_n \delta^2(\sigma^a - \sigma'^a) \delta^2(\sigma^a - \sigma''^a) \delta_m^o - \partial_m \delta^2(\sigma^a - \sigma''^a) \delta^2(\sigma^a - \sigma'^a) \delta_n^o. \quad (4.52)$$

Outro vínculo corresponde ao fato do tensor energia momento ter traço nulo:

$$\gamma_{ab} \frac{\delta S}{\delta \gamma_{ab}} = 0 \Rightarrow T_a^a = 0. \quad (4.53)$$

Esse vínculo gera as transformações de Weyl:

$$\delta_3 X^\mu = 0, \quad (4.54)$$

$$\delta_3 \gamma_{ab} = \varepsilon_3 \gamma_{ab}. \quad (4.55)$$

Essa simetria corresponde à simetria de Weyl:

$$X'^{\mu}(\sigma'^a) = X^{\mu}(\sigma^a), \quad (4.56)$$

$$\gamma'_{ab}(\sigma'^a) = e^{2\omega(\sigma^a)} \gamma_{ab}(\sigma^a). \quad (4.57)$$

Apenas o campo auxiliar γ_{ab} sofre essa transformação e o gerador é dado por:

$$R_{ab\sigma'^a}^{\sigma^a} = \gamma_{ab} \delta^2(\sigma^a - \sigma'^a). \quad (4.58)$$

O comutador entre duas transformações de Weyl é nulo. Logo, a função de estrutura é igual a zero.

É preciso também analisar o comutador entre transformações de difeomorfismo e de Weyl para se ter a álgebra completa de todas as transformações de gauge. A composição de um difeomorfismo e uma transformação de Weyl é uma transformação de Weyl. Logo, fazendo o comutador entre essas transformações obtém-se a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} [\delta_{dif}, \delta_{weyl}] \gamma_{ab} &= \delta_{dif}(\epsilon(\sigma'^a) \gamma_{ab}(\sigma^a) \delta^2(\sigma^a - \sigma'^a) - \delta_{weyl}(\partial_m \gamma_{ab} \delta^2(\sigma^a - \sigma'^a) \\ &\quad + \gamma_{mb} \partial_a \delta^2(\sigma^a - \sigma'^a) + \gamma_{am} \partial_b \delta^2(\sigma^a - \sigma'^a)) \epsilon^m(\sigma'^a) \\ &= -\epsilon(\sigma'^a) \epsilon^m(\sigma'^a) \partial_m \delta^2(\sigma^a - \sigma'^a) \delta^2(\sigma^a - \sigma'^a) \gamma_{ab}(\sigma^a). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Outro vínculo que deve ser considerado, mas que comuta com ambos vínculos anteriores é o produzido pelo fato de poder se considerar a existência de uma métrica $\eta_{\mu\nu}$ na ação, que no caso é a métrica de Minkowski. O momento relacionado a essa métrica geraria transformações para os índices de espaço-tempo. Tal que X^{μ} é um vetor e γ_{ab} é um escalar. Essas transformações correspondem à simetria do grupo de Poincaré em D dimensões:

$$X^{\mu}(\sigma^a) = \Lambda^{\mu}_{\nu} X^{\nu}(\sigma^a) + a^{\mu}, \quad (4.60)$$

$$\gamma'_{ab}(\sigma'^a) = \gamma_{ab}(\sigma^a). \quad (4.61)$$

Os geradores são:

$$R_{\mu}^{\nu} = \eta_{\rho\nu} \eta_{\nu\rho} X^{\rho} \quad (\text{rotação}); \quad (4.62)$$

$$R_{\mu}^{\nu} = \partial_{\mu} X^{\nu}, \quad (\text{translação}). \quad (4.63)$$

Para estudar a álgebra dessas transformações, analisa-se os comutadores. As constantes de estrutura são dadas por:

$$C_{\mu\nu\rho\gamma\sigma^a\sigma'^a}^{\mu'\rho'} = (\delta_{\mu}^{\mu'} \delta_{\nu}^{\nu'} \delta_{\rho}^{\rho'} \delta_{\gamma}^{\gamma'} - \delta_{\mu}^{\rho'} \delta_{\nu}^{\gamma'} \delta_{\rho}^{\mu'} \delta_{\gamma}^{\nu'}) \eta_{\nu'\gamma'} \delta^2(\sigma^a - \sigma'^a) \delta^2(\sigma^a - \sigma''^a), \quad (4.64)$$

$$C_{\nu\rho\sigma^a\sigma'^a}^{\mu} = \partial_{\sigma} \delta^2(\sigma^a - \sigma'^a) \delta^2(\sigma^a - \sigma''^a) \delta_{\nu}^{\mu} - \partial_{\sigma} \delta^2(\sigma^a - \sigma''^a) \delta^2(\sigma^a - \sigma'^a) \delta_{\nu}^{\mu}, \quad (4.65)$$

$$C_{\mu\nu\rho\sigma^a\sigma'^a}^{\delta\gamma} = \delta_{\mu}^{\sigma} \partial_{\mu} \delta^2(\sigma^a - \sigma'^a) \delta_{\nu}^{\gamma} \delta_{\rho}^{\delta} \delta^2(\sigma^a - \sigma''^a). \quad (4.66)$$

Que correspondem respectivamente à composição de duas rotações, duas translações, uma rotação e uma translação.

4.2.1 O gauge conforme

Para analisar a álgebra dos vínculos para a corda bosônica é mais simples analisar esse campo em um background conforme. É possível obter esse background uma vez que a ação é invariante por difeomorfismos do campo γ_{ab} . Assim, fixa-se:

$$\begin{aligned}\gamma_{00} &= \gamma_{11} = 1, \\ \gamma_{01} &= \gamma_{10} = 0.\end{aligned}\tag{4.67}$$

E considera-se a seguinte mudança de variáveis:

$$z = \sigma^1 + i\sigma^2, \quad \bar{z} = \sigma^1 - i\sigma^2.\tag{4.68}$$

Tal que as derivadas sejam dadas por:

$$\partial = \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2), \quad \bar{\partial} = \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2).\tag{4.69}$$

Neste caso, a Ação da corda é dada por:

$$S = T \int d^2z \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu.\tag{4.70}$$

A Corda Bosônica se torna então um campo conforme.

Os vínculos correspondentes ao traço do tensor energia momento ser nulo se torna:

$$T_{z\bar{z}} = 0.\tag{4.71}$$

E a conservação $\partial^a T_{ab}$, produz as seguintes equações:

$$\bar{\partial} T = \partial \bar{T} = 0.\tag{4.72}$$

onde $T \equiv T_{zz}$ e $\bar{T} = T_{\bar{z}\bar{z}}$, e pela igualdade (4.72) correspondem respectivamente a uma função holomórfica e anti-holomórfica.

Os vínculos se tornam então apenas as componentes do tensor energia-momento e para analisar o comutador entre as componentes do tensor energia momento. Para isso, considere que seja possível expandir os campos em séries de Laurent:

$$T = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{L_m}{z^{m+2}},\tag{4.73}$$

$$\bar{T} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\bar{L}_m}{\bar{z}^{m+2}}.\tag{4.74}$$

onde 2 corresponde ao peso conforme do tensor energia-momento do campo conforme. Ao realizar o comutador $[T, T']$, usando o formalismo de campos conformes, obtém-se a seguinte álgebra:

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m,-n}. \quad (4.75)$$

Essa álgebra corresponde à álgebra de Virassoro. Tal que os vínculos possam ser descritos pelos elementos da álgebra de Virassoro.

Este caso difere da partícula relativística pois os tensores T_{ab} não são constantes independentemente. Eles satisfazem $\partial^a T_{ab} = 0$ e por isso o comutador não é trivialmente nulo como no caso da partícula relativística.

4.3 O Campo de Maxwell

O Campo de Maxwell, A_μ , corresponde ao campo eletromagnético. Sua dinâmica determina o comportamento das ondas eletromagnéticas e as forças envolvidas.

Como já foi visto na sessão 2.4, ele é um sistema com vínculos. Sua ação com os vínculos impostos é dada por:

$$S = \int d^4(\pi_\mu \dot{A}^\mu - \mathcal{H}^*). \quad (4.76)$$

onde, \mathcal{H}^* é a densidade hamiltoniana:

$$\mathcal{H}^* = \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - \frac{1}{2}\pi_i\pi^i + G\partial_i\pi^i. \quad (4.77)$$

O vínculo $\gamma = 0$ é:

$$\gamma = \partial_i\pi^i. \quad (4.78)$$

Ele gera as seguintes transformações:

$$\delta A_i = \varepsilon[A_i, \gamma] = \partial_i\varepsilon; \quad (4.79)$$

O gerador é então da forma:

$$R_\sigma^{i\sigma'} = \partial_i\delta(\sigma - \sigma'). \quad (4.80)$$

Duas transformações seguidas correspondem à seguinte transformação:

$$[\delta_1, \delta_2]A_i = 0. \quad (4.81)$$

Logo, não há funções de estrutura. O Campo de Maxwell é um campo abeliano.

5 *A simetria BRST*

Um sistema dinâmico com vínculos possui graus de liberdade internos produzidos pelos vínculos de primeira classe, γ_a . Isto é, após se fixar o sistema impondo as equação de movimento, restam transformações entre as variáveis dinâmicas que ainda são possíveis. Como as soluções devem satisfazer os vínculos, deve-se impor os vínculos ao sistema. Isso é feito através do método de multiplicadores de Lagrange. Para determinar unicamente o sistema é preciso também fixar as transformações de gauge. Isso é feito introduzindo uma condição da forma: $G_a = 0$ (2.59).

Campos auxiliares que são adicionados para se impor essas condições podem ter dinâmica. Eles são chamados campos fantasmas, pois, apesar de serem campos dinâmicos presentes na ação, eles não são físicos, isto é, eles não são observáveis. Eles possuem uma série de propriedades bem particulares.

Uma Ação completa, com todos os gauges fixados e os vínculos impostos possui ainda uma simetria residual chamada simetria BRST. Essa simetria envolve os campos físicos e os campos fantasmas. Isso é mais fácil de ver ao interpretar a função do gerador dessa simetria.

Neste capítulo, primeiramente se verá a dificuldade de impor os vínculos a um sistema caso haja funções de estrutura para o vínculo. Em sequência se definirá o operador BRST capaz de impor simultaneamente todos os vínculos. Para definir esse operador é necessário já introduzir o conceito de fantasmas. Na sessão seguinte, mostra-se o mecanismo de Faddeev-Popov, [2], para impor os vínculos e fixar o gauge. Esse mecanismo revelará a necessidade de incluir campos fantasmas na ação e em seguida poderá se observar qual é a simetria BRST entre campos fantasmas e campos físicos.

Uma vez que a simetria BRST restringe os estados àqueles que satisfazem os vínculos, ela pode ser vista como um método de quantização. Utilizando a simetria BRST se quantizará a Partícula Relativística e a Corda Bosônica.

5.1 Vínculos em sistemas quânticos

A função do operador BRST é impor os vínculos ao sistema. Isso é mais fácil de ser compreendido na versão quântica.

Como já foi visto na sessão 2.3, classicamente o observável deve satisfazer a condição (2.57). Na versão quântica, considera-se que o parenteses de Poisson corresponde ao comutador da Mecânica Quântica. Isso quer dizer que o observável deve satisfazer a seguinte relação de comutação com os vínculos γ_a :

$$[\mathcal{O}, \gamma_a] \approx 0. \quad (5.1)$$

Esses vínculos são vínculos primários que satisfazem a condição $[\gamma_a, \gamma_b] \propto \gamma_c \approx 0$.

Dessa forma, os observáveis podem ser escritos como:

$$\mathcal{O}' = \mathcal{O} + \lambda^a \gamma_a. \quad (5.2)$$

onde as constantes λ^a definem a escolha de gauge.

Em um sistema quântico, para isso ser válido, seria o mesmo que impor que o valor esperado dos vínculos sejam nulos:

$$\langle \psi | \gamma_a | \chi \rangle = 0. \quad (5.3)$$

Sendo assim, os vínculos não alterariam o valor esperado de um observável.

$$\begin{aligned} \langle \psi | \mathcal{O}' | \chi \rangle &= \langle \psi | \mathcal{O} + \lambda^a \gamma_a | \chi \rangle \\ &= \langle \psi | \mathcal{O} | \chi \rangle + \lambda^a \langle \psi | \gamma_a | \chi \rangle \\ &= \langle \psi | \mathcal{O} | \chi \rangle. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Como era de se esperar, isso é o mesmo que dizer que os estados físicos devem obedecer aos vínculos.

A condição (5.3) é satisfeita ao se considerar que a cada vínculo γ_a pode gerar uma álgebra com operadores \mathcal{A}_0 que aniquila todos os estados físicos, operadores complexos \mathcal{A}_- que também aniquilam os estados físicos e os operadores conjugados $\mathcal{A}_+ = (\mathcal{A}_-)^{\dagger}$.

A partir dessa construção, tem-se que, para um estado físico $|\psi\rangle$:

$$(\mathcal{A}_0 - \text{constante})|\psi\rangle = 0; \quad (5.5)$$

$$\mathcal{A}_-|\psi\rangle = 0; \quad (5.6)$$

$$\langle \psi | (\mathcal{A}_0 - \text{constante}) = 0; \quad (5.7)$$

$$\langle \psi | \mathcal{A}_+ = 0. \quad (5.8)$$

No caso abeliano, é fácil ver que os vínculos podem gerar as transformações de gauge da seguinte forma:

$$\delta|\psi\rangle = \mathcal{A}_+|\chi\rangle. \quad (5.9)$$

Com a condição que:

$$(\mathcal{A}_0 - \text{constante})|\chi\rangle = 0; \quad (5.10)$$

$$\mathcal{A}_-|\chi\rangle = 0. \quad (5.11)$$

Sendo assim, o estado $|\psi\rangle$ continua satisfazendo as condições (5.5) e continua sendo um estado físico.

Todavia, o mesmo não pode ser feito no caso não-abeliano, uma vez que para impor os vínculos consecutivamente, surge um problema:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_-\delta|\psi\rangle &= 0 \\ &= \mathcal{A}_-\mathcal{A}_+|\chi\rangle \\ &= ([\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+] + \mathcal{A}_+\mathcal{A}_-)|\chi\rangle \\ &= (f_{+-}^+ \mathcal{A}_+ + f_{+-}^- \mathcal{A}_-)|\chi\rangle \\ &= f_{+-}^+ \mathcal{A}_+|\chi\rangle \\ &\neq 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

onde foi usado que $\mathcal{A}_-|\chi\rangle = 0$.

Portanto, para impor os vínculos no caso não-abeliano, é preciso uma estrutura mais complexa. E isso é justamente o que faz o operador BRST.

5.2 O operador BRST

O operador BRST deve impor todos os vínculos aos estados físicos. Para isso, é preciso que ele leve em conta não só os vínculos como a álgebra dos vínculos.

O operador BRST pode ser definido como:

$$Q = c^a \gamma_a - \frac{i}{2} c^a c^b C_{ab}^c b_c. \quad (5.13)$$

onde γ_a são os vínculos e C_{ab}^c é a constante de estrutura do gauge:

$$[\gamma_a, \gamma_b] = C_{ab}^c \gamma_c. \quad (5.14)$$

O campo c^a é um campo fantasma. b_a é o campo conjugado a c^a .

$$[c^a, b_b] = \delta_b^a. \quad (5.15)$$

Os campos fantasmas são fermiônicos para o caso de vínculos bosônicos. Os parenteses neste caso foram generalizados para o caso fermiônico. O operador BRST também é, portanto, fermiônico.

Uma propriedade importante desse operador é o fato dele ser nilpotente. Isto é:

$$[Q, Q] = 0. \quad (5.16)$$

Para verificar isso, basta substituir (5.13) em (6.117) e utilizar (5.14) além do fato dos campos fantasmas serem fermiônicos e anti-comutarem.

Estados físicos devem satisfazer a relação:

$$Q|\psi\rangle = 0. \quad (5.17)$$

Dessa forma, eles irão satisfazer todas as condições dos vínculos.

5.3 Fixação de Gauge pelo Método de Faddeev-Popov

Como os estados físicos devem satisfazer os vínculos, deve existir um método de impor esses vínculos à Ação. Isso é o que o método de Faddeev-Popov faz. Através dele restringe-se a Ação a um determinado conjunto de soluções que satisfazem os vínculos. Isto é, transforma-se as transformações de gauge em transformações que envolvam campos fantasmas e através da dinâmica deles fixa-se o gauge.

Esse método pode ser realizado a partir do formalismo de integrais de caminho. Nesta sessão se utilizará o método de Faddeev-Popov para se fixar os vínculos e o gauge de uma Ação. A partir dessa derivação será visto a necessidade de campos fantasmas para fixar o gauge.

Considere a densidade de probabilidade:

$$\int \mathcal{D}\phi_\mu e^{-S}. \quad (5.18)$$

A medida de integração $\mathcal{D}\phi_\mu$ corresponde a integrar sobre todos os possíveis caminhos de evolução. É fácil ver que, caso a Ação possua simetrias de gauge, cada caminho corresponde a um conjunto de soluções. Isso leva a uma contagem infinita sobre todas as possibilidades de caminho e a densidade de probabilidade perde significado uma vez que toma um valor infinito.

Um método de corrigir isso é fixar o gauge, isto é, remover as transformações de gauge e fazer com que o sistema tenha apenas uma solução para cada caminho. Isso produz uma contagem finita e a densidade ganha significado físico. Ao se fixar o gauge, entretanto, está se eliminando um conjunto de soluções. É preciso, então, encontrar o peso do gauge

fixado em relação a todas as outras possibilidades de fixação do gauge. Esse peso é chamado de *medida de Haar*.

Essa "fatia" de evolução possível, e que pode ser transformada em outras "fatias" por uma transformação de gauge, é comumente chamada de *moduli*. Logo, fala-se em calcular o peso do moduli. Esse peso é dado por:

$$\Delta_G^{-1}[\phi_\mu] = \int \mathcal{D}U \delta[G^B(\phi_\mu^U)]. \quad (5.19)$$

onde U corresponde aos elementos do grupo que gera as transformações de gauge. Ele está relacionado com a definição anterior de R_α^i , que corresponde a uma transformação infinitesimal. G^B são as possíveis escolhas de gauge, por exemplo, o gauge de Coulomb. Essa fórmula corresponde justamente a calcular o inverso do peso de todas as possíveis fixações de gauge. Essa medida não depende da transformação de gauge, geradas por U , escolhida. Isto é:

$$\Delta_G^{-1}[\phi_\mu^{U'}] = \Delta_G^{-1}[\phi_\mu^U] = \Delta_G^{-1}[\phi_\mu] \quad (5.20)$$

Assim, o cálculo da densidade de probabilidade se torna:

$$\int \mathcal{D}\phi_\mu \Delta_G \int \mathcal{D}U \delta[G^B[\phi_\mu]] e^{-S}. \quad (5.21)$$

Como nenhum termo depende de U , é possível remover a dependência da integral com os caminhos $\mathcal{D}U$. Assim (5.21) pode ser escrito como:

$$\int \mathcal{D}\phi_\mu \Delta_G \delta[G^B[\phi_\mu]] e^{-S}. \quad (5.22)$$

Resta então calcular Δ_G . Para isso é melhor fazer uma mudança de variáveis. Passar a estudar a integral em função da transformação de gauge ao invés do vínculo:

$$\mathcal{D}U = \mathcal{D}G \det \left| \frac{\delta U}{\delta G} \right|. \quad (5.23)$$

Tal que, substituindo em (5.19):

$$\begin{aligned} \Delta_G^{-1}[\phi_\mu] &= \int \mathcal{D}G \det \left| \frac{\delta U}{\delta G} \right| \delta[G^B(\phi_\mu^U)] \\ &= \det \left| \frac{\delta U}{\delta G} \right|_{G=0}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Ou, ainda, para facilitar a compreensão da fórmula acima, demasiado abstrata nos elementos utilizados, pode-se considerar o caso em que os elementos U possam ser escritos em termos de funções $\varepsilon(x)$. Nesse caso, tem-se que:

$$\Delta_G[\phi_\mu] = \det \left| \frac{\delta G}{\delta \varepsilon(x)} \right|_{G=0}. \quad (5.25)$$

A fim de melhorar a compreensão da equação acima, considere o seguinte exemplo.

Considere a Ação do Campo Eletromagnético. Ela é invariante pela seguinte transforma-

ção de gauge:

$$\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \Lambda(x). \quad (5.26)$$

Logo, a transformação de Gauge pode ser escritas em função de $\Lambda(x)$. Neste caso: $\varepsilon(x) = \Lambda(x)$.

Considere o gauge de Lorentz:

$$\partial^\nu A_\nu = 0 \quad (5.27)$$

É preciso calcular então como a fixação de gauge varia com as possíveis transformações de gauge:

$$\begin{aligned} \frac{\delta G}{\delta \varepsilon(x)} &= \frac{\delta \partial^\nu A_\nu}{\delta \Lambda(x)} \\ &= \partial^\nu \partial_\nu \delta(x - y). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Através disso é então possível encontrar os termos da equação (5.25).

Uma vez compreendido o significado de (5.25) é preciso desenvolver ferramentas matemáticas que permitam o seu cálculo.

Para isto, basta entender integração com variáveis fermiônicas:

$$\det \left| \frac{\delta G}{\delta \varepsilon(x)} \right| = \int \mathcal{D}b \mathcal{D}c \exp \left[i \int d^4x d^4y b^A \frac{\delta G^A(x)}{\delta \varepsilon^B(y)} c^B \right]. \quad (5.29)$$

Usando o mesmo formalismo de integração com variáveis fermiônicas,

$$\delta[G^A] = \int \mathcal{D}B e^{B_A G^A}. \quad (5.30)$$

Com os dois cálculos acima, a equação (5.21) pode ser escrita como:

$$\int \mathcal{D}\phi_\mu \mathcal{D}b \mathcal{D}c \mathcal{D}B e^{-S_{eff}(\phi_\mu, b, c, B)}. \quad (5.31)$$

onde,

$$S_{eff}(\phi_\mu, b, c, B) = S(\phi_\mu) - i \int d^4x d^4y b^A \frac{\delta G^A(x)}{\delta \varepsilon^B(y)} c^B + B_A G^A. \quad (5.32)$$

Como se vê, adiciona-se campos fermiônicos, fantasmas, para poder se fixar o gauge. Esses campos, entretanto, não são físicos. Eles não podem aparecer nos estados finais e iniciais. São apenas "ferramentas matemáticas" para permitir o cálculo.

Ver [21] e [2].

5.4 A simetria BRST

Como foi visto, a ação com os gauges fixados é dada por:

$$S(\phi_\mu, b, c, B) = S(\phi_\mu) - i \int d^4x d^4y b^A \frac{\delta G^A(x)}{\delta \epsilon^B(y)} c^B + B_A G^A. \quad (5.33)$$

Essa ação possui a seguinte simetria:

$$\delta_{BRST} \phi_\mu = -i \epsilon c^A \delta_A \phi_\mu; \quad (5.34)$$

$$\delta_{BRST} B_A = 0; \quad (5.35)$$

$$\delta_{BRST} b_A = \epsilon B_A; \quad (5.36)$$

$$\delta_{BRST} c_A = \frac{i}{2} \epsilon C_{bc}^a c^b c^c. \quad (5.37)$$

onde $\delta_A \phi_\mu = [\phi_\mu, \gamma_A]$ é a transformação de gauge gerada pelo vínculo γ_A .

É fácil ver que essa transformação deixa a ação invariante. O termo $S(\phi_\mu)$ é naturalmente invariante uma vez que a transformação para ϕ_μ é uma transformação de gauge e a ação é naturalmente invariante por transformação de gauge. As variações dos outros termos também se cancelam.

Essa transformação envolve campos físicos e campos fantasmas e corresponde à simetria BRST. A transformação BRST é gerada ao se calcular o parenteses:

$$\delta_{BRST} \Phi^i = \epsilon [Q, \Phi^i]. \quad (5.38)$$

Considerando (5.13), é possível obter (5.34). Para isso, descobre-se que $\epsilon B_A = [Q, b_A]$.

5.5 A quantização BRST

Para quantizar é preciso encontrar os estados físicos que satisfazem o sistema. É isso que o operador BRST permite.

Os estados físicos devem ser invariantes por BRST. Isto é:

$$Q|\psi\rangle = 0. \quad (5.39)$$

Esses estados são chamados estados *fechados*. Uma vez que o operador Q é nilpotente, isso permite a seguinte transformação:

$$|\psi'\rangle = |\psi\rangle + Q|\chi\rangle. \quad (5.40)$$

Estados que possam ser escritos por $Q|\chi\rangle$ são chamados estados *exatos*. Esses estados são ortogonais a todos os estados físicos.

$$\langle\chi|Q|\psi\rangle = 0. \quad (5.41)$$

onde usou-se o fato de que o operador Q é hermitiano.

Logo, encontrar os estados físicos se torna um problema de encontrar a co-homologia do operador Q . Isso significa, encontrar todos os estados fechados que não sejam exatos:

$$\mathcal{H}_{BRST} = \frac{\mathcal{H}_{fechados}}{\mathcal{H}_{exatos}}. \quad (5.42)$$

5.6 A Partícula Relativística

A Ação para a Partícula Relativística é:

$$S = \int d\tau \left(\frac{1}{2} e^{-1} \dot{X}^\mu \dot{X}_\mu + \frac{1}{2} em^2 \right). \quad (5.43)$$

Ela possui a seguinte simetria de gauge:

$$\delta X^\mu = \dot{X}^\mu \varepsilon, \quad (5.44)$$

$$\delta e = \frac{d}{d\tau}(e\varepsilon). \quad (5.45)$$

Para fixar o gauge é preciso fixar o campo auxiliar "e".

Seguindo o método de Faddeev-Popov é preciso determinar a *medida de Haar*. Pela equação (5.25), tem-se que:

$$\begin{aligned} \Delta_G[\varphi_\mu] &= \det \left| \frac{\delta G}{\delta \varepsilon(x)} \right|_{G=0} \\ &= e(\tau) \partial_\tau \delta(\tau - \sigma) \end{aligned} \quad (5.46)$$

Assim, a ação (5.32) sem impor a condição de gauge é:

$$S(X^\mu, e, b, c) = \int d\tau \left(\frac{1}{2} e^{-1} \dot{X}^\mu \dot{X}_\mu + \frac{1}{2} em^2 + e\dot{b}c \right) \quad (5.47)$$

Os campos fermiônicos b e c são os campos fantasmas, e satisfazem:

$$[b, c] = 1 \quad (5.48)$$

É preciso então fixar o gauge, para isso impõe-se que $(e - 1) = 0$:

$$S(X^\mu, e, b, c, B) = \int d\tau \left(\frac{1}{2} e^{-1} \dot{X}^\mu \dot{X}_\mu + \frac{1}{2} em^2 + iB(e - 1) - e\dot{b}c \right) \quad (5.49)$$

Para encontrar a simetria BRST basta conhecer a transformação de gauge e a constante de estrutura, que já foi calculada no capítulo 4, (4.29):

$$C_{\sigma\rho}^{\tau} = \frac{d}{d\tau}(\delta(\tau - \rho))\delta(\tau - \sigma) - \frac{d}{d\tau}(\delta(\tau - \sigma))\delta(\tau - \rho). \quad (5.50)$$

Tal que neste caso, as transformações BRST (5.34) são dadas por:

$$\delta_{BRST}X_{\mu} = i\epsilon c\dot{X}_{\mu}; \quad (5.51)$$

$$\delta_{BRST}e = i\epsilon \frac{d}{d\tau}(ce); \quad (5.52)$$

$$\delta_{BRST}B = 0; \quad (5.53)$$

$$\delta_{BRST}b = \epsilon B; \quad (5.54)$$

$$\delta_{BRST}c = i\epsilon c\dot{c}. \quad (5.55)$$

É possível então fixar o gauge $e = 1$. A ação se torna:

$$S = \int d\tau \left(\frac{1}{2} \dot{X}^{\mu} \dot{X}_{\mu} + \frac{1}{2} m^2 - \dot{b}c \right). \quad (5.56)$$

Todavia, ainda resta a transformação de gauge residual. Essa transformação é:

$$\delta_{BRST}X_{\mu} = i\epsilon c\dot{X}_{\mu}; \quad (5.57)$$

$$\delta_{BRST}b = i\epsilon \left(-\frac{1}{2} \dot{X}^{\mu} \dot{X}_{\mu} + \frac{1}{2} m^2 - \dot{b}c \right); \quad (5.58)$$

$$\delta_{BRST}c = i\epsilon c\dot{c}. \quad (5.59)$$

Para encontrar a transformação de b , foi preciso usar a equação de movimento para e e fixar $e = 1$, uma vez que o campo B não estava mais presente.

Nota-se que a transformação pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \delta_{BRST}b &= i\epsilon \left(\frac{1}{2} \pi^{\mu} \pi X_{\mu} + \frac{1}{2} m^2 - \dot{b}c \right); \\ &= i\epsilon (H - \dot{b}c). \end{aligned} \quad (5.60)$$

onde utilizou-se que $\pi_{\mu} = \dot{X}_{\mu}$.

A carga conservada por essa transformação é:

$$Q = cH. \quad (5.61)$$

Que corresponde à carga BRST, como esperado. É o fantasma c multiplicando o vínculo do Hamiltoniano (5.13).

No processo de quantização é preciso encontrar os estados físicos.

Para encontrar os estados físicos, primeiramente determina-se todos os estados possíveis.

Primeiramente analisa-se os estados gerados pelos campos fantasmas. Os fantasmas ge-

ram um sistema de dois níveis, uma vez que correspondem a um oscilador fermiônico:

$$b|\downarrow\rangle = 0; \quad c|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle; \quad (5.62)$$

$$b|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle; \quad c|\uparrow\rangle = 0. \quad (5.63)$$

Para definir a base, pode considerá-la também auto-estado do momento:

$$p^\mu |k^\mu, \downarrow\rangle = k^\mu |k^\mu, \downarrow\rangle; \quad p^\mu |k^\mu, \uparrow\rangle = k^\mu |k^\mu, \uparrow\rangle. \quad (5.64)$$

A ação do operador BRST nesses estados é:

$$\begin{aligned} Q|k^\mu, \downarrow\rangle &= c(p^\mu p_\mu + m^2)|k^\mu, \downarrow\rangle \\ &= (k^2 + m^2)|k^\mu, \uparrow\rangle. \end{aligned} \quad (5.65)$$

$$\begin{aligned} Q|k^\mu, \uparrow\rangle &= c(p^\mu p_\mu + m^2)|k^\mu, \uparrow\rangle \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Logo, os estados fechados são:

$$|k^\mu, \downarrow\rangle, \quad \text{se } k^2 = -m^2; \quad (5.67)$$

$$|k^\mu, \uparrow\rangle, \quad \text{para todo } k^\mu. \quad (5.68)$$

Os estados exatos são aqueles que podem ser escritos como $Q|\psi\rangle$, e pelo cálculo acima, eles correspondem a:

$$|k^\mu, \downarrow\rangle, \quad \text{se } k^2 \neq -m^2. \quad (5.69)$$

Uma vez que eles podem ser escritos como $Q|k^\mu, \uparrow\rangle$.

Portanto, os estados físicos, estados fechados menos os estados exatos, são:

$$|k^\mu, \downarrow\rangle, \quad \text{se } k^2 = -m^2; \quad (5.70)$$

$$|k^\mu, \uparrow\rangle, \quad \text{se } k^2 = -m^2. \quad (5.71)$$

Como era de se esperar, os estados físicos são as partículas que estão na camada de massa, isto é, satisfazem as equações de movimento.

Há todavia um problema, há sempre duas cópias do espectro esperado, que possuem número fantasma diferente. É possível remover essa degenerescência ao se impor uma condição adicional:

$$b|\psi\rangle = 0. \quad (5.72)$$

Assim, elimina-se uma das cópias.

5.7 A Corda Bosônica Relativística

A Ação para a Corda Bosônica Relativística é:

$$S = \int d^2\sigma g^{1/2} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu. \quad (5.73)$$

Para fixar essa ação, é preciso fixar o campo auxiliar g^{ab} . O campo g^{ab} tem as seguintes transformações de gauge:

$$\delta g_{ab} = \epsilon g_{ab} + \epsilon^m \partial_m g_{ab} + \partial_a \epsilon^m g_{mb} + \partial_b \epsilon^m g_{am}. \quad (5.74)$$

Que consiste na composição entre uma transformação de escala e um difeomorfismo. Analogamente ao caso da partícula relativística, é possível encontrar a partir de (5.25):

$$\begin{aligned} \Delta_G[\varphi_\mu] &= \det \left| \frac{\delta G}{\delta \varepsilon(x)} \right|_{G=0} \\ &= \det \left| \gamma_{ab} + \delta_o^m \partial_m \gamma_{ab} + \partial_a \delta_o^m \gamma_{mb} + \partial_b \delta_o^m \gamma_{am} \right|_{G=0} \\ &= \det \left| \gamma_{ab} + P_{oab} \right|_{G=0} \end{aligned} \quad (5.75)$$

Para calcular o determinante, usa-se o truque da integral fermiônica:

$$\det \left| \gamma_{ab} + P_{oab} \right| = \int \mathcal{D}b^{ab} \mathcal{D}c_a \exp \left[i b^{ab} (\gamma_{abc} + P_{oab} c^o) \right]. \quad (5.76)$$

O primeiro termo da integral fermiônica é facilmente integrável, e mostra que $b_a^a = 0$. Isto é, o campo fantasma b^{ab} possui traço nulo.

Resta então calcular:

$$\det \left| \gamma_{ab} + P_{oab} \right| = \int \mathcal{D}b^{ab} \mathcal{D}c_a \exp \left[i b^{ab} P_{oab} c^o \right]. \quad (5.77)$$

onde P_{oab} é o termo associado a difeomorfismos.

Além deste termo, tem o termo de fixação do gauge. O gauge a ser escolhido é o correspondente à métrica conforme:

$$\begin{aligned} \gamma_{00} &= \gamma_{11} = 1, \\ \gamma_{01} &= \gamma_{10} = 0. \end{aligned} \quad (5.78)$$

A condição de gauge é $(g_{ab} - \gamma_{ab}) = 0$:

$$\delta(g_{ab} - \gamma_{ab}) = \int \mathcal{D}B e^{B^{ab}(g_{ab} - \gamma_{ab})}. \quad (5.79)$$

A Ação neste caso se torna:

$$S = \int d^2\sigma g^{1/2} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu + i B^{ab} (g_{ab} - \gamma_{ab}) - b^{ab} P_{oab} c^o. \quad (5.80)$$

Com a condição de gauge (5.78) e a definição de P_{oab} em (5.76), é possível reescrever (5.77) em termos de coordenadas complexas como:

$$\det|\gamma_{ab} + P_{oab}| = \int \mathcal{D}b^{ab} \mathcal{D}c_a \exp \left[ib^{zz} \partial_z c^{\bar{z}} + b^{\bar{z}\bar{z}} \partial_{\bar{z}} c^z \right]. \quad (5.81)$$

Assim, com o gauge fixado, a Ação da Corda Relativística torna-se:

$$S = \int d^2z \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu - b^{zz} \bar{\partial} c^z + b^{\bar{z}\bar{z}} \partial c^{\bar{z}}. \quad (5.82)$$

Cuja transformação BRST é dada por:

$$\delta_{BRST} X^\mu = i\epsilon (c\partial + \bar{c}\bar{\partial}) X^\mu; \quad (5.83)$$

$$\delta_{BRST} b = i\epsilon (T + bc\partial c); \quad \delta_{BRST} \bar{b} = i\epsilon (\bar{T} + \bar{b}\bar{c}\bar{\partial}\bar{c}); \quad (5.84)$$

$$\delta_{BRST} c = i\epsilon (c\partial\bar{c} + \bar{\partial})c; \quad \delta_{BRST} \bar{c} = i\epsilon (c\partial + \bar{c}\bar{\partial})\bar{c}. \quad (5.85)$$

onde usou-se a notação de campos conformes. Os termos com o traço em cima se referem à componente \bar{z} para vetor ou $\bar{z}\bar{z}$ para matriz. E sem o traço corresponde à z e zz .

Para encontrar a transformação de b , basta encontrar a equação de movimento para g_{ab} na ação antes de ter o gauge fixado. É preciso observar a dependência de P_{oab} com a métrica para obter os termos fantasmas.

Para obter a transformação de c e \bar{c} , basta encontrar o polo da OPE TT e $\bar{T}\bar{T}$.

A corrente conservada nesta transformação é:

$$j = cT + \frac{1}{2} : bc\partial c : + \frac{3}{2} \partial^2 c. \quad (5.86)$$

Similar para \bar{j} .

Como é possível ver, o polo simples da OPE dessa corrente com os campos fornecerá as transformações BRST.

A carga BRST é dada em termos das correntes:

$$Q = \frac{1}{2\pi i} \oint (dzj - d\bar{z}\bar{j}). \quad (5.87)$$

É possível resolver essa integral em termos dos modos fantasmas. Para isso basta considerar as seguintes decomposições:

$$\begin{aligned} T(z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{L_m}{z^{m+2}}; \\ b(z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{b_m}{z^{m+2}}; \\ c(z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{c_m}{z^{m-1}}. \end{aligned} \quad (5.88)$$

Assim, é fácil encontrar os resíduos e a carga BRST é dada por:

$$Q = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (c_n L_{-n} + \bar{c}_n \bar{L}_{-n}) + \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \frac{m-n}{2} (c_m c_n b_{-m-n} + \bar{c}_m \bar{c}_n \bar{b}_{-m-n}) - (c_0 + \bar{c}_0). \quad (5.89)$$

Os operadores de Virassoro são escritos em termos dos operadores de criação e destruição dos modos de vibração das cordas (ver Apêndice A).

Considera-se que a solução da equação de movimento para o campo X^μ seja da forma:

$$X^\mu(z, \bar{z}) = x^\mu - i \frac{\alpha'}{2} p^\mu \ln|z|^2 + i \left(\frac{2}{\alpha'} \right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\alpha_m^\mu}{z^m} + \frac{\bar{\alpha}_m^\mu}{\bar{z}^m} \right). \quad (5.90)$$

Os operadores de Virassoro são então dados por:

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n}^\mu \alpha_{\mu n}. \quad (5.91)$$

Com

$$L_0 = \frac{\alpha' p^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^\mu \alpha_{\mu n}. \quad (5.92)$$

As componentes \bar{L}_m e \bar{L}_0 são análogas, basta considerar os operadores $\bar{\alpha}_{\mu n}$ ao invés de $\alpha_{\mu n}$.

É preciso neste momento distinguir a corda aberta da corda fechada. Ao se definir a ação de cordas e encontrar as equações de movimento é preciso definir as equações de contorno. Elas podem ser de dois tipos:

1. Periódicas:

$$X^\mu(\tau, l) = X^\mu(\tau, 0), \quad \partial^\sigma X^\mu(\tau, l) = \partial^\sigma X^\mu(\tau, 0), \quad \gamma_{ab}(\tau, l) = \gamma_{ab}(\tau, 0). \quad (5.93)$$

Essas condições de contorno podem ser interpretadas como unir os dois finais das cordas. Elas dão origem às cordas fechadas.

Essa condição de contorno permitem dois modos de vibração para cada possível estado, estando relacionadas às soluções de onda dadas por $(\sigma + c\tau)$ e $(\sigma - c\tau)$.

2. Não periódicas, nas quais se fixa os valores para os extremos:

$$X^\mu(\tau, l) = f_l(\tau), \quad X^\mu(\tau, 0) = f_0(\tau); \quad \text{ou} \quad \partial^\sigma X^\mu(\tau, l) = \partial^\sigma X^\mu(\tau, 0) = 0. \quad (5.94)$$

Essas condições de contorno podem ser interpretadas como ter os dois finais das cordas presas a algo, no primeiro caso, ou livres. Elas dão origem às cordas abertas.

Essa condição de contorno permitem apenas um dos dois modos de vibração para cada possível estado.

Assim, impondo as condições de contorno, enquanto para as cordas fechadas é preciso incluir os estados com e sem linha. Para a corda aberta só é permitido incluir os estados com ou sem linha. Por convenção adota-se apenas os estados sem linha.

O vínculo para a massa fornece a seguinte equação:

$$\alpha' m^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(N_{b_n} + N_{c_n} + \sum_{\mu=0}^{25} N_{\mu n} \right) - 1. \quad (5.95)$$

onde 1 é uma constante determinada a satisfazer o espectro de massa correto. Essa relação é encontrada ao se calcular o Hamiltoniano $H = \int d\sigma^1 \pi_{\mu} \dot{X}^{\mu} + b\dot{c} - L$. E N são os operadores números. Eles identificam o número de vezes que cada operador aparece no estado. No plano complexo, o Hamiltoniano é dado por:

$$H = \oint dz \partial X^{\mu} \partial X_{\mu} + \oint d\bar{z} \bar{\partial} X^{\mu} \bar{\partial} X_{\mu} + \oint dz b \partial c + \oint d\bar{z} \bar{b} \partial \bar{c}. \quad (5.96)$$

Substituindo as expansões em série de Laurent:

$$H = \alpha' \left(p^{\mu} p_{\mu} + \sum_{n=1}^{\infty} n \left(b_{-n} c_n + c_{-n} b_n + \sum_{\mu=0}^{25} \alpha_{-n}^{\mu} \alpha_{\mu n} \right) \right) - 1. \quad (5.97)$$

Como $0 = p^{\mu} p_{\mu} + m^2$, obtêm-se (5.95).

Assim, é possível escrever:

$$L_0 = \alpha' (p^{\mu} p_{\mu} + m^2). \quad (5.98)$$

Logo, L_0 está relacionado a fixar a corda à camada de massa.

Uma vez feita essa análise é possível quantizar a corda. Primeiramente considera-se a corda aberta.

No caso das cordas abertas, os vínculos são somente: L_m , para $m \geq 0$. Assim, o primeiro estado é o táquion:

$$|k, 0\rangle \quad (5.99)$$

E:

$$L_0 |k, 0\rangle = 0 \rightarrow -k^2 = -\frac{1}{\alpha'}. \quad (5.100)$$

Esse estado obviamente fornece:

$$Q |k, 0\rangle = 0. \quad (5.101)$$

E não há estados exatos, logo, está contido nos estados físicos.

O próximo nível é dado por $N = 1$, onde $N = N_{b_n} + N_{c_n} + \sum_{\mu=0}^{25} N_{\mu n}$. Neste caso a massa é obviamente nula. Há 26 + 2 estados fechados:

$$|\psi_1\rangle = (e^{\mu} \alpha_{-1\mu} + \beta b_{-1} + \gamma c_{-1}) |k, 0\rangle. \quad (5.102)$$

onde,

$$L_0 |\psi_1\rangle = 0 \rightarrow k^2 = 0. \quad (5.103)$$

Aplicando o operador BRST:

$$\begin{aligned}
Q|\psi_1\rangle &= 0 \\
&= (c_{-1}L_1 + c_1L_{-1} + \dots)|\psi_1\rangle \\
&= (2\alpha')(c_{-1}k^\mu\alpha_{1\mu} + c_1k^\mu\alpha_{-1\mu})(e^\mu\alpha_{-1\mu} + \beta b_{-1} + \gamma c_{-1})|k, 0\rangle \\
&= (2\alpha')(c_{-1}k^\mu e_\mu + \beta k^\mu\alpha_{-1\mu})|k, 0\rangle.
\end{aligned} \tag{5.104}$$

Para que (5.104) seja válida, $k^\mu e_\mu = \beta = 0$. Elimina-se assim 2 estados. Restam apenas 26 estados independentes.

Os estados exatos correspondem a:

$$|psi_{1\text{exatos}}\rangle = Q|\psi'_1\rangle = (2\alpha')(c_{-1}k^\mu e'_\mu + \beta'k^\mu\alpha_{-1\mu})|k, 0\rangle. \tag{5.105}$$

Para e' e β' quaisquer. Portanto, o estado $c_{-1}|k, 0\rangle$ é exato. E a polarização é transversa, uma vez que há a equivalência $e^\mu \cong e^\mu + \beta'k^\mu$. Há portanto apenas 24 estados físicos independentes que correspondem a representação vetorial de $SO(D-2)$, como era de se esperar para uma partícula não massiva em um espaço de 26 dimensões.

Para eliminar as cópias fantasmas, já mencionadas no caso da partícula relativística, impõe-se o gauge: $b_0|k, 0\rangle = 0$.

Fazendo esse processo consecutivamente, é possível encontrar todos os demais estados físicos.

A corda fechada segue o mesmo processo. Todavia, há o dobro de graus de liberdade, uma vez que se introduz o outro modo de vibração, relacionado aos operadores com linha em cima. Neste caso,

$$L_0 = \frac{\alpha'}{4}(p^\mu p_\mu + m^2), \quad \bar{L}_0 = \frac{\alpha'}{4}(p^\mu p_\mu + \bar{m}^2); \tag{5.106}$$

$$\frac{\alpha'}{4}m^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(N_{b_n} + N_{c_n} + \sum_{\mu=0}^{25} N_{\mu n} \right) - 1; \tag{5.107}$$

$$\frac{\alpha'}{4}\bar{m}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\bar{N}_{b_n} + \bar{N}_{c_n} + \sum_{\mu=0}^{25} \bar{N}_{\mu n} \right) - 1. \tag{5.108}$$

No caso da corda fechada é preciso impor a condição:

$$b_0|\psi\rangle = \bar{b}_0|\psi\rangle = 0 \tag{5.109}$$

Para as cordas fechadas o vácuo é dado por:

$$|k; 0, 0\rangle \tag{5.110}$$

$$(L_0 + \bar{L}_0)|k; 0, 0\rangle = 0 \rightarrow m^2 = -\frac{4}{\alpha'}. \tag{5.111}$$

Esse estado obviamente fornece:

$$Q|k;0,0\rangle = 0. \quad (5.112)$$

O primeiro estado excitado corresponde a $N = \bar{N} = 1$, tal que $m = 0$:

$$|\psi_1\rangle = (e^\mu \alpha_{-1\mu} + \beta b_{-1} + \gamma c_{-1})(e'^\mu \bar{\alpha}_{-1\mu} + \beta' \bar{b}_{-1} + \gamma' \bar{c}_{-1})|k;0,0\rangle. \quad (5.113)$$

No qual há 26×26 estados.

O processo de quantização BRST é análogo ao caso anterior, apenas duplicando o número de contagens. Ao final, será obtido 24×24 estados físicos com massa nula, correspondentes ao dÍlaton, grÁvitoN e o tensor anti-simétrico.

6 *Um formalismo BRST mais geral e o formalismo BV*

O estudo da existência de simetrias residuais após a fixação dos vínculos e dos gauges começou com Becchi, Rouet, Stora, [3], e Tyutin, [4]. Inicialmente foram analisados a existência nos casos mais simples: teoria de campos abelianos e não-abelianos. Isso levou a uma definição do operador BRST como:

$$Q = c^a \gamma_a - \frac{i}{2} c^a c^b C_{ab}^c b_c. \quad (6.1)$$

Para vínculos γ_a que obedeçam a seguinte relação:

$$[\gamma_a, \gamma_b] = C_{ab}^c \gamma_c. \quad (6.2)$$

Esse operador BRST levava em conta todas as propriedades observadas até então.

A escolha de gauge $G^a(q, p)$ era feita tal que satisfizesse:

$$G^a(q, p) = 0; \quad (6.3)$$

$$\det([G^a, \gamma_b]) \neq 0. \quad (6.4)$$

A Ação neste caso é dada por:

$$S = \int dt (p_i \dot{q}^i - H_0 - \lambda^a \gamma_a + \pi_a G^a). \quad (6.5)$$

Todavia, com o prosseguimento da análise, descobriu-se que o operador BRST nesta forma não era suficiente. Como foi visto, é possível encontrar teorias com gauges redutíveis, funções de estrutura dos vínculos de ordem mais alta e há casos em que a álgebra do gauge é aberta, como em teorias de gravitação.

Os pesquisadores Fradkin, Vilkovisky e Batalin, [5–9], iniciaram uma análise mais profunda de sistemas covariantes com vínculos. Essa consideração, conduzia a inclusão de outros termos para fixar todas as condições. Por exemplo, era necessário incluir outros

termos oriundos dos seguintes comutadores:

$$[\gamma_a, \gamma_b] = C_{ab}^c \gamma_c; \quad (6.6)$$

$$[H_0, \gamma_a] = \gamma_b V_a^b. \quad (6.7)$$

E a condição de gauge deveria ser covariante, logo, devendo ser escrita como:

$$G^a(q, p) = \lambda^a + \chi^a(q, p, \lambda). \quad (6.8)$$

onde $\chi^a(q, p, \lambda)$ é a condição de fixação do gauge.

A Ação estendida incluindo os fantasmas, b_a e c^a deveria ser:

$$S = \int dt (p_i \dot{q}^i + b_a \dot{c}^a - H). \quad (6.9)$$

onde,

$$H = H_0 + b_a V_b^a c^b - [b_a \chi^a, Q]. \quad (6.10)$$

Ao mesmo tempo estudava-se o operador BRST na existência de vínculos bosônicos e fermiônicos onde havia novas condições a serem impostas ao sistema.

Posteriormente iniciou-se o estudo de campos de gauge redutíveis. Neste caso, era necessário incluir novos termos e campos. Tornou-se necessário adicionar fantasmas de fantasmas para fixar todos os graus de liberdade. Isso será visto em um exemplo mais adiante. O estudo de teorias gravitacionais tornou fundamental fazer uma generalização do formalismo BRST para que este incluísse toda a complexidade da álgebra de gauge.

Para tentar simplificar esse problema, Batalin e Vilkovisky, formularam um novo método para estudar a simetria BRST, [10, 11]. Esse formalismo, ao invés de impor as condições de gauge, dependendo do campo e do momento conjugado, na forma:

$$\gamma_a(\phi, \pi) = 0. \quad (6.11)$$

Tinha por objetivo considerar as equações de movimento e torná-las invariantes de gauge:

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0. \quad (6.12)$$

Neste formalismo, importava mais a estrutura do gauge que a estrutura dos vínculos. E, ao invés de utilizar os parenteses de Poisson, utiliza o parenteses BV. Para isso foi necessário introduzir anti-campos.

Ambos formalismos BRST e BV servem para analisar as simetrias residuais de teorias de gauge. Uma análise mais profunda das semelhanças desses dois métodos conduz às questões essenciais dessas simetrias. Descobriu-se que elas podem ser tratadas da mesma forma ao se considerar diferentes representações de uma mesma estrutura algébrica dada

por parenteses que satisfazem as seguintes propriedades:

$$(F, G) = -(-1)^{(\epsilon_F+1)(\epsilon_G+1)}(G, F) \quad (\text{antisimetria}); \quad (6.13)$$

$$(FG, H) = F(G, H) + (F, H)G \quad (\text{lei do produto}); \quad (6.14)$$

$$(-1)^{(\epsilon_F+1)(\epsilon_H+1)}(F, (G, H)) + \text{perm. cícl.} = 0 \quad (\text{Identidade de Jacobi}). \quad (6.15)$$

$$\text{fantasma}((F, G)) = \text{fantasma}(F) + \text{fantasma}(G) + 1. \quad (6.16)$$

O termo ϵ_F indica a paridade de F . Caso F seja par, $\epsilon_F = 0$, caso seja ímpar $\epsilon_F = 1$.

As transformações da simetria residual é gerada por um operador Q :

$$\delta\psi = \epsilon(\psi, Q). \quad (6.17)$$

onde Q satisfaz:

$$(Q, Q) = 0. \quad (6.18)$$

O formalismo BRST mais geral interpreta o parenteses como sendo o parenteses de Poisson. O processo de quantização é realizado através do processo de transformar o parenteses de Poisson em comutadores de operadores. Neste caso basta adicionar os campos fantasmas.

O formalismo BV interpreta o parenteses como sendo o parenteses BV. O processo de quantização é realizado pela integral de caminho. Neste caso é necessário adicionar campos fantasmas e anti-campos.

Para motivar o estudo dos casos mais gerais de BRST, primeiro será feito o estudo de um campo com gauge redutível. E posteriormente se fará um estudo para analisar como é possível obter os termos inclusos no operador Q .

6.1 Um exemplo para motivar o estudo mais geral de BRST

Considere uma teoria dada pela seguinte Ação:

$$S = - \int d^4x \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho}. \quad (6.19)$$

onde:

$$H_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu}, \quad (6.20)$$

$$B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}. \quad (6.21)$$

Esse sistema possui a seguinte transformação de gauge:

$$\delta_\Lambda B_{\mu\nu} = \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu. \quad (6.22)$$

Entretando, essa transformação é invariante por uma transformação da forma:

$$\delta\Lambda_\mu = \delta_\mu\epsilon. \quad (6.23)$$

E o gauge é, portanto, redutível.

Para fazer a análise dos vínculos, muda-se para o formalismo Hamiltoniano. Para isso, é preciso encontrar o momento conjugado a $B^{\mu\nu}$, que é:

$$\begin{aligned} \pi_{\mu\nu} &= \frac{\delta S}{\delta\partial^0 B^{\mu\nu}} \\ &= -\frac{1}{2}H_{0\mu\nu}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

É fácil ver que há os seguintes vínculos:

$$\phi_{1\mu} = \pi_{\mu 0} = H_{\mu 00} = 0. \quad (6.25)$$

para todo μ .

O Hamiltoniano com o vínculo fixado é:

$$H = \int d^3x \left(\frac{1}{2}\pi^{\mu\nu}\pi_{\mu\nu} + \frac{1}{2}H^{ijk}H_{ijk} + B^{\mu 0}\partial^\nu\pi_{\mu\nu} \right). \quad (6.26)$$

Calculando a consistência do vínculo (6.25), encontra-se novos vínculos:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_n &= 0 \\ &= [\phi_n, H] \\ &= [\pi_{\mu 0}, H] \\ &= \partial^\nu\pi_{\mu\nu} = 0 \end{aligned} \quad (6.27)$$

Os novos vínculos são:

$$\phi_{2\mu} = \partial^\nu\pi_{\mu\nu} \quad (6.28)$$

Os vínculos (6.25) e (6.28) são de primeira classe, uma vez que o parenteses de Poisson entre eles é nulo.

É possível eliminar o vínculo (6.25), uma vez que se adiciona o vínculo (6.28). Isso acontece porque os campos $B^{\mu 0}$ podem ser incorporados nos multiplicadores de Lagrange dos vínculos (6.28). Assim, o campo $B^{\mu 0}$ e seu momento conjugado $\pi_{\mu 0}$ não são mais variáveis dinâmicas necessárias para descrever a evolução do sistema. O sistema passa então a ser descrito apenas em termos dos campos B^{ij} e π_{ij} e os vínculos são dados por (6.28), $\phi_{2\mu} = \phi_i$.

Assim,

$$H = \int d^3x \left(\frac{1}{2}\pi^{ij}\pi_{ij} + \frac{1}{2}H^{ijk}H_{ijk} + \lambda^i\partial^j\pi_{ij} \right). \quad (6.29)$$

Esses vínculos, entretanto, não são independentes. Como foi visto, o gauge é redutível. Isso quer dizer que é possível estabelecer uma relação do tipo:

$$\phi_i Z_A^i = 0. \quad (6.30)$$

Neste caso, é fácil encontrar Z_A^i uma vez que:

$$\partial^i \phi_j = \partial^i \partial^j \pi_{ij} = 0. \quad (6.31)$$

Portanto:

$$Z_y^{ix} = \partial^i \delta^3(x - y). \quad (6.32)$$

O operador BRST deve neste caso também remover a degenerescência dessa redutibilidade. Para isso é preciso incluir campos (c^2, b_2) , chamados de fantasmas de fantasmas. Esses campos servem para fixar os vínculos dos fantasmas.

As transformações de gauge podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \delta_\Lambda B_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu \Lambda_\nu(x) - \partial_\nu \Lambda_\mu(x) \\ &= (\delta_\nu^\rho \partial_\mu \delta(x - y) - \delta_\mu^\rho \partial_\nu \delta(x - y)) \Lambda_\rho(y) \\ &= R_{\mu\nu x}^{\rho y} \Lambda_\rho(y). \end{aligned} \quad (6.33)$$

onde,

$$R_{\mu\nu x}^{\rho y} = \delta_\nu^\rho \partial_\mu \delta(x - y) - \delta_\mu^\rho \partial_\nu \delta(x - y). \quad (6.34)$$

É necessário estudar a álgebra das transformações de gauge. Ela é dada por:

$$[\delta_{\Lambda_1}, \delta_{\Lambda_2}] B_{\mu\nu}(x) = 0. \quad (6.35)$$

A partir das informações acima é possível escrever o operador BRST como:

$$Q = c^{1i} \phi_i + b_{1i}(x) Z_y^{ix} c^2(y). \quad (6.36)$$

Ou,

$$Q = c^{1i} \partial^j \pi_{ji} + \partial^i b_{1i} c^2. \quad (6.37)$$

Como se pode ver, há a inclusão de novos termos no operador BRST e a inclusão de novos campos, fantasmas de fantasmas.

Para se compreender como é a forma do operador BRST mais geral e posteriormente estudar o caso BV é necessário fazer uma análise mais profunda da álgebra discutida na introdução deste capítulo. Através dela é possível obter todos os demais termos e inclusive analisar os campos que são necessários adicionar para se fixar todos os graus de liberdade.

6.2 Estrutura algébrica da simetria BRST

O fato de que o operador BRST deve obedecer uma relação de nilpotência:

$$(Q, Q) = 0. \quad (6.38)$$

Ele pode ser relacionado ao se considerar o estudo de operadores diferenciais s , nos quais:

$$s^2 = 0 \quad (6.39)$$

A atuação desses operadores diferenciais é então descrita por:

$$s\psi = (\psi, Q) \approx \delta\psi. \quad (6.40)$$

Isto é, a obtenção do operador Q se torna uma questão de encontrar a representação do operador diferencial s dada a definição da operação de parenteses. No estudo dessa representação, encontra-se toda a estrutura do operador BRST. Logo, é justificado fazer o estudo de operadores diferenciais e do espaço em que eles atuam, álgebras graduadas.

O formalismo apresentado a seguir seguiu os passos de [17], capítulo 8.

6.2.1 Álgebra graduada

Ao se lidar com o conceito do espaço estendido da simetria BRST, estuda-se os campos fantasmas, fantasmas de fantasmas e outras extensões. As propriedades desses campos estão relacionadas ao que se pode definir como número fantasma. Campos de número fantasmas diferentes estão relacionados a fixação de graus de liberdade diferentes, todavia, estão relacionados. O campo fantasma tenta fixar os graus de liberdade não fixados pelo campo de ordem imediatamente inferior.

Campos fantasmas não são físicos, uma vez que são, à priori, apenas ferramentas matemáticas para fixar os graus de liberdade. Os campos fantasmas não são observáveis, isto é, não aparecem nas observações inicial e final. Os campos físicos, observáveis, são aqueles com número fantasma nulo.

Para entender melhor o conceito de espaço estendido, é importante estudar o que é uma álgebra graduada. Ela une em um só espaço os espaços correspondentes a cada número fantasma e permite assim, criar relações entre eles.

É interessante notar que esse mesmo conceito de álgebra graduada é usada em outras teorias, como por exemplo, a teoria de interação entre cordas abertas.

Assuma que a álgebra pode ser dividida em:

$$A = \bigoplus_n A_n. \quad (6.41)$$

Temos que nesta notação a identidade está contida em A_0 e define-se uma multiplicação da forma:

$$A_n A_m \subset A_{n+m}. \quad (6.42)$$

E, para um elemento x satisfazendo $x \in A_n$, diz-se que o grau de x é igual a n :

$$\deg x = n \Leftrightarrow x \in A_n. \quad (6.43)$$

Uma transformação linear M tem grau $\deg M$ se, e somente se:

$$\deg(Mx) = \deg M + \deg x. \quad (6.44)$$

Tal que:

$$\deg(M_1 M_2) = \deg M_1 + \deg M_2, \quad (6.45)$$

$$\deg(M_1, M_2) = \deg M_1 + \deg M_2. \quad (6.46)$$

onde o grau de M pode ser negativo, uma vez que pode diminuir o grau em (6.44). Os parenteses acima, na relação (6.45), estão associados a uma álgebra da forma (6.13).

É possível também definir um operador chamado *operador número* N :

$$Nx = (\deg x)x, \quad (6.47)$$

para elementos $x \in A$. Temos que o operador N , para satisfazer (6.47), é par e de grau zero:

$$\varepsilon(N) = 0, \quad \deg(N) = 0. \quad (6.48)$$

E, por causa de (6.42), é um operador diferencial também:

$$N(xy) = (Nx)y + x(Ny). \quad (6.49)$$

Assim se define uma álgebra graduada e suas propriedades. É possível notar que há a definição de grau, que será interpretada no contexto da simetria BRST como número fantasma.

6.2.2 Operadores diferenciais

Uma vez definida o que é uma álgebra graduada é possível relacioná-la ao espaço estendido de campos físicos mais campos fantasmas. Supõe-se que os elementos x de cada álgebra A_n , $x \in A_n$, corresponde a um campo, na álgebra A_n é a álgebra desses campos. Relaciona-se ao grau da álgebra o número fantasma do campo que é elemento daquela álgebra.

É preciso estudar qual a relação entre campos fantasmas de número fantasma diferente. No contexto de álgebras graduadas, isso é feito através de operadores diferenciais. Ao mesmo tempo, nota-se a definição dos operadores diferenciais estão relacionados às propriedades do operador BRST, como, por exemplo, a nilpotência. Como se sabe, a simetria BRST está relacionada a transformações que levam campos físicos em campos fantasmas e vice-versa. Assim, observa-se que ela corresponde de fato a operações entre álgebras de número fantasma diferentes. É portanto, importante entender o conceito de operador diferencial.

Um operador diferencial D é uma derivação ímpar e nilpotente de ordem dois:

$$D^2 \equiv \frac{1}{2}[D, D] = 0, \quad (6.50)$$

$$\varepsilon(D) = 1. \quad (6.51)$$

Vamos supor que existe uma graduação N , em que:

$$\deg D = \pm 1. \quad (6.52)$$

Se $\deg D = -1$, o operador diminui o grau e se comporta como um *boundary operator*. Se o $\deg D = +1$, o operador aumenta o grau e se comporta como um *coboundary operator*. Tal que,

$$D(A_n) \subset A_{n\pm 1}. \quad (6.53)$$

Dado o operador D , definimos o Kernel de D como o conjunto de elementos pertencentes a A que são aniquilados por D :

$$x \in \text{Ker} D \Leftrightarrow Dx = 0. \quad (6.54)$$

Os elementos do Kernel de D são chamados de fechados. A imagem do operador D é definido como a imagem de A pelo operador D .

$$x \in \text{Im} D \Leftrightarrow \exists y \in A : Dy = x. \quad (6.55)$$

Os elementos de A que correspondem à imagem da atuação do operador D em A são chamados de D-exatos. A partir dessas duas definições, pode-se definir a álgebra quociente:

$$H(D) = \frac{\text{Ker} D}{\text{Im} D}. \quad (6.56)$$

Isto é, o conjunto de elementos que pertencem ao Kernel de D menos os elementos que pertencem à imagem de A pelo operador D . Caso $\deg D = +1$, esse conjunto é chamado de co-homologia. Caso $\deg D = -1$, chama-se de homologia. Da mesma forma, podemos separar os elementos de $H(D)$ conforme seu grau:

$$H(D) = \bigoplus_n H_n. \quad (6.57)$$

6.3 Construção do operador BRST

Em um sistema com vínculos, as equações de movimento unicamente não fixam todos os graus de liberdade. Restam graus de liberdade internos correspondentes às transformações de gauge. Em um processo de quantização, é preciso definir caminhos que o sistema pode evoluir. Em outras palavras, é preciso fixar os vínculos e as transformações de gauge.

Foi descoberto que no processo de fixar esses graus de liberdade, ao se incluir campos fantasmas, surgia uma simetria residual chamada simetria BRST. Essa simetria, podia ser vista também de outra forma. A atuação do operador BRST nos campos fixava os graus de liberdade.

O formalismo BRST está relacionado então à fixação de vínculos, a fim de encontrar as possíveis evoluções do sistema, e à inclusão de campos fantasmas.

Há dois métodos para se fazer essa construção:

1. Impondo vínculos ao sistema. Esse procedimento é interpretado como o formalismo BRST.
2. Tentando remover os graus de liberdade não fixados pela equação de movimento. Esse procedimento é interpretado como o formalismo BV.

Ambos podem ser feitos da seguinte forma:

1. Considera-se todas as soluções possíveis do sistema.
2. Define-se que as soluções físicas correspondem à co-homologia do operador BRST.
3. Ao se considerar a existência de uma co-homologia e um operador BRST, considera-se um espaço estendido dado por uma álgebra graduada (que será ser definida).
4. Define-se campos fantasmas que, através do operador BRST, eliminem as soluções do sistema que não satisfaçam as condições de soluções físicas físicas.
5. Se preciso, define-se outros campos fantasmas de ordem mais alta que removam os campos fantasmas dos possíveis campos físicos.

6. A co-homologia do operador BRST conterá todos e apenas os campos físicos.

Matematicamente isso corresponde a encontrar um conjunto de soluções que correspondam a observáveis físicos invariantes por transformações de gauge, tal que satisfaçam a seguinte condição:

$$H^0(s) = (\text{funções invariantes por gauge}). \quad (6.58)$$

onde chamamos de s o operador diferencial que corresponde ao operador BRST.

Para encontrar as soluções físicas há dois processos que devem ser considerados. Primeiro é necessário encontrar as soluções que satisfaçam os vínculos, ou que estejam relacionadas pelas transformações de gauge. Uma vez encontradas essas soluções, é preciso poder definir uma base para essas soluções. Isto é, encontrar o menor conjunto de soluções que levem a todas as outras dadas transformações de gauge. Isso dá origem às órbitas de gauge na superfície dos vínculos.

A esses dois processos é preciso então associar dois operadores diferenciais. Cada um desses operadores estará relacionado a uma álgebra graduada, com sua respectiva graduação. O operador BRST corresponderá a uma união desses dois operadores e de suas álgebras.

No primeiro processo, fazer com que as soluções satisfaçam os vínculos, define-se o operador δ , chamado operador de Koszul-Tate. Ele estará relacionado ao número de anticampo. No segundo processo, definir um conjunto de soluções independentes, define-se o operador d , chamado operador diferencial exterior longitudinal. Ele estará relacionado ao número de fantasma-puro. Dessa forma, pode-se escrever:

$$s = \delta + d. \quad (6.59)$$

Essa definição entretanto não será suficiente. No estudo de co-homologia perturbativa, para que todas as condições sejam satisfeitas será necessário adicionar outros termos, para satisfazer $s^2 = 0$.

A construção (6.59) fornece, entretanto a associação entre os dois operadores. Ao operador BRST pode-se definir um número chamado número fantasma:

$$\text{fantasma}(x) = \text{fantasma-puro}(x) - \text{anticampo}(x). \quad (6.60)$$

E, assim:

$$\text{fantasma-puro}(d) = 1; \quad \text{anticampo}(d) = 0; \quad \text{fantasma}(d) = 1 \quad (6.61)$$

$$\text{fantasma-puro}(\delta) = 0; \quad \text{anticampo}(\delta) = -1; \quad \text{fantasma}(\delta) = 1 \quad (6.62)$$

No caso mais geral apenas os termos δ e d não serão suficientes. Como será visto mais adiante, caso haja funções de estrutura de ordem mais alta para os vínculos ou trans-

formações de gauge, é necessário adicionar outros termos ao operador BRST. Neste contexto, é importante notar que o s deve ainda ser nilpotente, isto é, $s^2 = 0$. Assim é possível construir um operador da forma:

$$s = \delta + d + s^{(1)} + s^{(2)} + \dots \quad (6.63)$$

Segundo a teoria de perturbação homológica. Os números dos índices estão relacionados ao número de anti-campo. É possível obter isso supondo que até ordem zero s pode ser escrito como (6.59) e utilizando (6.40) e (6.39). Neste caso, é fácil ver que é essencial os operadores d e δ tenham om parenteses entre eles nulo. Isso mostra como os operadores δ e d são independentes.

Para continuar a análise do operador BRST, será definido cada um dos operadores diferenciais envolvidos.

6.3.1 Operador diferencial de Koszul-Tate (δ)

Esse operador diferencial está relacionado com os anti-campos. Ele constrói uma *resolução*.

Considere uma álgebra A . Uma *resolução* de A é uma álgebra graduada diferencial \bar{A} com o operador diferencial δ de grau -1 que:

$$H_k(\delta) = 0, \quad k \neq 0 \quad (6.64)$$

$$H_0(\delta) = A. \quad (6.65)$$

Dessa forma, a álgebra A é dada pela álgebra quociente $H_*(\delta) \equiv H_0(\delta)$. da álgebra diferencial de grau $N(\bar{A}, \delta)$.

O operador diferencial δ tem grau -1 e portanto, possui uma homologia. Como já foi visto, a função desse operador é restringir as soluções àquelas que satisfazem os vínculos. Para fazer isso, analise como o operador diferencial δ pode remover soluções indesejadas, aquelas que não estão na superfície dos vínculos ou geram degenerescências.

Considere o campo η^α que satisfaz a seguinte relação:

$$\delta\eta^\alpha = 0. \quad (6.66)$$

A álgebra de funções suaves no espaço de fase $C^\infty(P)$ satisfaz (6.66), [17] (sessão 1.5.1). Essa álgebra de funções possui duas estruturas algébricas: a multiplicação usual, para a qual $C^\infty(P)$ é uma álgebra associativa; e os parentes de Poisson, para a qual $C^\infty(P)$ é uma álgebra de Lie. As duas operações estão relacionadas por:

$$[FG, H] = [F, H]G + F[G, H]. \quad (6.67)$$

Os observáveis devem ser invariantes pela soma de combinações lineares dos vínculos. Isto é, é preciso remover a álgebra de funções N que satisfaçam:

$$N = N^a \gamma_a \approx 0. \quad (6.68)$$

onde γ_a são os vínculos.

Como deseja-se que os campos η^α sejam só aquelas soluções que pertençam a $C^\infty(P)$ mas não pertençam a N é possível associá-lo a um grupo de homologia do operador δ na forma:

$$H_0(\delta) \equiv \frac{\text{Ker}(\delta)_0}{\text{Im}(\delta)_0} = \frac{C^\infty(P)}{N} \equiv C^\infty(\Sigma). \quad (6.69)$$

Em termos de homologia, isso quer dizer que a álgebra de funções N deve corresponder a uma imagem do operador δ . Isto é, N deve poder ser escrito como:

$$N = \delta(\text{alguma coisa}). \quad (6.70)$$

Para fazer isso, define-se um campo \mathcal{P}_α que satisfaça a seguinte relação:

$$(\mathcal{P}_\alpha, \eta^\beta) = -\delta_\alpha^\beta. \quad (6.71)$$

Na qual não definiu-se o que significa a operação relativa aos parenteses.

Assim, é possível definir:

$$\delta \mathcal{P}_\alpha = -\gamma_a. \quad (6.72)$$

onde o sinal é uma convenção.

Dessa forma, é possível escrever:

$$N = N^a \gamma_a \Leftrightarrow N = -\delta(N^a \mathcal{P}_a). \quad (6.73)$$

Assim, com a adição de um campo \mathcal{P}_α foi possível remover a álgebra de funções N da homologia do operador δ , tal que o conjunto de soluções de η^α seja dado apenas por $C^\infty(\Sigma) = C^\infty(P)/N$.

Esse processo é usado de forma análoga para a simetria BRST. Uma Ação contém à priori campos físicos, vínculos e campos fantasmas associados a esses vínculos. Chame os campos físicos e fantasmas de η^α .

Os vínculos γ_α podem ser tanto da ação, como vínculos dos gauges.

Define-se:

1. Número de anti-campo dos vínculos da ação é zero.
2. Número de anti-campo dos demais vínculos é igual ao nível de redutibilidade a que ele se refere.

3. Número de anti-campo dos campos físicos e fantasmas é zero.

Pelo procedimento acima, é possível remover então um conjunto de soluções pela adição de campos \mathcal{P}_α . Para que esses campos satisfaçam (6.72), eles devem ter número de anti-campo igual à o número de anti-campo do vínculo a que ele se refere mais um. E da mesma forma, para que ele satisfaça (6.71), ele deve ter a mesma paridade do campo η^α . Isto é, ele deve satisfazer as seguintes propriedades:

$$\epsilon(\mathcal{P}_\alpha) = \epsilon(\gamma_a) + 1 \quad \text{paridade}; \quad (6.74)$$

$$\text{anticampo}(\mathcal{P}_\alpha) = \text{anticampo}(\gamma_a) + 1 \quad \text{número de anticampo}. \quad (6.75)$$

Um exemplo concreto do que significa o campo \mathcal{P}_α pode ser dado no contexto BV.

Neste caso, a operação (6.71) corresponde ao parenteses BV. E o campo \mathcal{P}_α é chamado de anti-campo do campo η^α :

$$\mathcal{P}_\alpha \rightarrow \eta_j^*. \quad (6.76)$$

A equação (6.66) fornece por solução todas as funções $F \in C^\infty$. Deseja-se então remover as equações que satisfaçam:

$$G(\eta^\alpha) = 0 = \lambda^j(\eta^\alpha) \frac{\delta S}{\delta \eta^\alpha}. \quad (6.77)$$

Que correspondem às soluções triviais. Para isso, assume-se que:

$$\delta \eta_\alpha^* = - \frac{\delta S}{\delta \eta^\alpha}. \quad (6.78)$$

Isso implica que $G = \delta(-\lambda^i \eta_\alpha^*)$ e portanto, ao se calcular a homologia:

$$H_0 = \left(\frac{\text{Ker} \delta}{\text{Im} \delta} \right) = \frac{C^\infty}{\mathcal{N}}. \quad (6.79)$$

onde, \mathcal{N} é tal que:

$$G(\phi^i) \in \mathcal{N} \Leftrightarrow G(\eta^\alpha) = \lambda^j(\phi^i) \frac{\delta S}{\delta \eta^\alpha}. \quad (6.80)$$

Dessa forma, as soluções corresponderão somente às equações de movimento que forem independentes pela adição de soluções triviais. E a partir dessa propriedade é possível ver que o operador δ será de fato uma resolução, isto é, $H_k(\delta) = 0$ para $k \neq 0$. Neste exemplo, a ação só contém os campos físicos e o anti-campo dos campos físicos.

Considere então o caso em que há transformações de gauge da forma:

$$R_i^\alpha \frac{\delta S}{\delta \eta^\alpha} = 0 \quad (6.81)$$

Neste caso, tem-se que a função dada por $R_i^\alpha \eta_\alpha^*$ seria uma solução de $\delta F = 0$. Essas soluções pertencem a H_1 e neste caso o operador δ deixa de ser uma resolução. Para que

ele volte a ser uma resolução, adiciona-se um par de campos: ϕ_i e ϕ_j^* e define-se:

$$\delta\phi_i^* = R_i^\alpha \eta_\alpha^*. \quad (6.82)$$

Dessa forma, $R_i^\alpha \eta_\alpha^*$ pode ser escrita como $\delta(\text{alguma coisa})$. Assim, essa solução é excluída da homologia do operador δ , que volta a ser uma resolução. Os campos físicos se tornam independentes por transformações de gauge.

Os campos ϕ_i e ϕ_j^* correspondem a um campo fantasma e seu anti-campo. Logo, pelo formalismo introduzido aqui vê-se a necessidade de adicionar fantasmas e anti-campos de fantasmas para poder remover as soluções indesejadas dos campos físicos.

6.3.2 Operador diferencial exterior longitudinal (d)

Uma vez que as soluções obedecem aos vínculos, deve ser possível considerar aquelas que estão diretamente relacionadas através das transformações de gauge. O conjunto de soluções que estão relacionadas por uma transformação de gauge infinitesimal é chamada *órbita de gauge*. Isto é, considere uma dada solução. Faça uma transformação de gauge infinitesimal e obterá outra solução. Faça novamente essa transformação e obterá outra solução. A linha dessas soluções são as órbitas de gauge. Fazendo esse processo com um conjunto de soluções independentes, será possível descrever um fibrado para essa superfície dos vínculos.

A essas órbitas de gauge é possível relacionar um operador diferencial d .

$$dF(X) = \mathcal{L}_X F. \quad (6.83)$$

onde \mathcal{L}_X pode ser entendido como a derivada ao longo da trajetória do vetor longitudinal X . Tem-se que dF é nulo se, e somente se, F é invariante ao longo da órbita.

Para compreender a que corresponde o vetor X é preciso fazer uma análise um pouco mais aprofundada da superfície formada pelos vínculos. Define-se uma métrica $\sigma^{\lambda\mu}$ para uma superfície dada pelo comutador de suas coordenadas x^μ .

$$\sigma^{\lambda\mu} = [x^\lambda, x^\mu]. \quad (6.84)$$

Para que dessa forma o comutador entre duas variáveis seja escrito como:

$$[F, G] = \frac{\partial F}{\partial x^\lambda} \sigma^{\lambda\mu} \frac{\partial G}{\partial x^\mu}. \quad (6.85)$$

Tal que, assumindo-se que o comutador corresponde ao parenteses de Poisson, tem-se que $x^{mu} = (q^i, p^i)$. Isto é, a superfície é o espaço de fase. Como o sistema obedece aos

vínculos γ_a , é possível definir vetores X_a^λ por:

$$X_a^\lambda = \sigma^{\lambda\mu} \partial_\mu \gamma_a. \quad (6.86)$$

Tal que, por construção:

$$\partial_{X_a} F \equiv X_a^\lambda \partial_\lambda F = [F, \gamma_a]. \quad (6.87)$$

É fácil então ver que:

$$\begin{aligned} [X_a, X_b]^\lambda &= X_b^\mu X_{a,\mu}^\lambda - X_a^\mu X_{b,\mu}^\lambda \\ &= \sigma^{\lambda\mu} \partial_\mu ([\gamma_a, \gamma_b]) \\ &= \sigma^{\lambda\mu} \partial_\mu (C_{ab}^c \gamma_c) \\ &= C_{ab}^c X_c^\lambda + \gamma_c \sigma^{\lambda\mu} \partial_\mu C_{ab}^c \\ &\approx C_{ab}^c X_c^\lambda. \end{aligned} \quad (6.88)$$

Assim, o operador diferencial d está diretamente relacionado com as transformações de gauge, uma vez que analisa como a função evolui ao longo das órbitas de gauge. É possível escrever a derivada como:

$$dF(X_\alpha) = \mathcal{L}_{X_\alpha} F = [F, \gamma_\alpha] \quad (6.89)$$

E, se F for uma função dos campos ϕ^i , uma vez que as transformações de gauge obedecem:

$$\delta_\varepsilon \phi^i = \varepsilon^\alpha [\phi^i, \gamma_\alpha] = \varepsilon^\alpha R_\alpha^i. \quad (6.90)$$

Tem-se que

$$dF(X_\alpha) = \frac{\delta F}{\delta \phi^i} R_\alpha^i. \quad (6.91)$$

E nota-se manifestamente como o operador d está relacionado com as transformações de gauge.

Como o operador diferencial d é nilpotente, $d^2 = 0$, é possível descrever uma co-homologia para esse operador derivativo. Obtém-se então todas as funções F , com $dF = 0$, na qual F não possa ser escrita como $F = dG$ para uma função G qualquer.

É possível criar uma representação desse operador para o caso de uma teoria de Gauge.

No caso irreduzível, define-se uma base ω^α de 1-formas tal que:

$$\omega^\alpha(X_\beta) = \delta_\beta^\alpha. \quad (6.92)$$

Assim, é possível ver todas as formas na superfície como polinômios de ω^α :

$$G = \frac{1}{p!} G_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \omega^{\alpha_1} \dots \omega^{\alpha_p}. \quad (6.93)$$

O operador d , como dito anteriormente, está relacionado ao número de fantasma puro. Esse número corresponde ao grau do polinômio de ω^α . Pode-se dizer que ω^α correspondem, então, aos fantasmas-puros.

Pela equação (6.91) e a definição (6.83), é possível notar que, nesta base:

$$dF = dF(X_\alpha)\omega^\alpha. \quad (6.94)$$

A estrutura das órbitas de gauge, permitem afirmar que o comutador entre dois vetores longitudinais é dado por:

$$[X_\alpha, X_\beta] = C_{\alpha\beta}^\rho X_\rho. \quad (6.95)$$

onde $C_{\alpha\beta}$ é a função de estrutura dos vínculos. E, portanto,

$$d\omega^\alpha = \frac{1}{2}C_{\beta\rho}^\alpha \omega^\beta \omega^\rho. \quad (6.96)$$

Para obedecer às regras de paridade e de número fantasma, tem-se então que os campos ω^α possuem as seguintes propriedades:

$$\epsilon(\omega_\alpha) = \epsilon(G_\alpha) + 1 \quad (\text{paridade}); \quad (6.97)$$

$$\text{fantasma-puro}(\omega_\alpha) = \text{fantasma-puro}(G_\alpha) + 1 \quad (\text{n. de fantasma-puro}). \quad (6.98)$$

O operador d aumenta em uma unidade o número de fantasma-puro.

É possível relacionar os campos ω^α , com os campos η^α conjugados pela operação de parênteses com o campo \mathcal{P}_α definidos em (6.71). É possível fazer uma construção tal que $\omega^\alpha = \eta^\alpha$. Isso é possível uma vez que os operadores d e δ comutam.

Sendo, assim, é possível discutir como poderia ser o cálculo de $d\mathcal{P}_\alpha$. Para isso, analise os números correspondentes a cada operador e campo:

$$\begin{aligned} \text{anticampo}(d) &= 0 & \text{fantasma-puro}(d) &= 1 & \text{fantasma}(d) &= 1; \\ \text{anticampo}(\delta) &= -1 & \text{fantasma-puro}(\delta) &= 0 & \text{fantasma}(\delta) &= 1; \\ \text{anticampo}(\eta^\alpha) &= 0 & \text{fantasma-puro}(\eta^\alpha) &= n & \text{fantasma}(\eta^\alpha) &= n; \\ \text{anticampo}(\mathcal{P}_\alpha) &= n & \text{fantasma-puro}(\mathcal{P}_\alpha) &= 0 & \text{fantasma}(\mathcal{P}_\alpha) &= -n. \end{aligned} \quad (6.99)$$

Para campos físicos, $n = 0$. Os campos fantasmas tem n igual ao nível do fantasma. Logo, é fácil ver que $d\mathcal{P} \sim \mathcal{P}\eta$ para que os números em ambos os membros sejam equivalentes. E a melhor forma de construir essa relação é definindo:

$$d\mathcal{P}_\alpha = C_{\alpha\beta}^\rho \eta^\beta \mathcal{P}_\rho. \quad (6.100)$$

onde $C_{\alpha\beta}^\rho$ é uma função de estrutura dos vínculos aplicado aos campos fantasmas, que pode corresponde à função de estrutura do gauge.

6.3.3 O operador BRST

Como foi visto, o operador BRST Q pode ser construído a partir de um operador diferencial nilpotente de ordem dois, $s^2 = 0$. Estudando a atuação do operador s nos campos como:

$$s\psi = (\psi, Q). \quad (6.101)$$

A propriedade de nilpotência corresponde a:

$$(Q, Q) = 0. \quad (6.102)$$

onde os parenteses podem ser interpretados tanto como o parenteses de Poisson, no caso BRST, como parenteses BV, no caso BV.

A transformação BRST é dada justamente por:

$$\delta_{BRST}\phi^i = s\phi^i = (\phi^i, \Omega). \quad (6.103)$$

Logo, para obter o operador Q , basta estudar como é possível representá-lo dada a definição da atuação de s nos campos e a definição dos parenteses.

Primeiramente define-se qual é a operação associada aos parenteses. Depois, sabendo que o operador s deve ter por co-homologia os campos físicos, encontra-se os campos fantasmas que permitam eliminar os campos não-físicos da co-homologia. Para isso, utiliza-se da definição dos operadores δ e d .

Será visto como obter o operador Q a partir de duas definições para a operação de parenteses.

6.3.4 BRST a partir dos parenteses de Poisson

Neste caso, a operação de conjugação dos campos é dada pelo parenteses de Poisson. Isto é:

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial \phi^i} \frac{\partial g}{\partial \pi^i} - \frac{\partial f}{\partial \pi^i} \frac{\partial g}{\partial \phi^i}. \quad (6.104)$$

Assim, os campos conjugados aos fantasmas correspondem aos momentos conjugados. Para descobrir a representação Q , é preciso saber como o operador atua nos campos. Considere o campo fantasma c^a , com os seguinte números características:

$$\text{anticampo}(c^a) = 0 \quad \text{fantasma-puro}(c^a) = 1 \quad \text{fantasma}(c^a) = 1. \quad (6.105)$$

Não havendo campos com número de anti-campo menor, tem-se que:

$$\delta c^a = 0. \quad (6.106)$$

Como era de se esperar pelas sessões anteriores.

A esse campo associa-se seu momento conjugado b_a que obedece:

$$[b_a, c^b] = -\delta_a^b. \quad (6.107)$$

Para que a identidade seja válida, b_a deve satisfazer:

$$\text{anticampo}(b_a) = 1 \quad \text{fantasma-puro}(b_a) = 0 \quad \text{fantasma}(b_a) = -1 \quad (6.108)$$

Como visto anteriormente, para que o operador BRST fixe os vínculos, é preciso que b_a satisfaça:

$$\delta b_a = -\gamma_a. \quad (6.109)$$

Logo, em ordem mais baixa de número de anti-campo, tem-se que:

$$\delta_{BRST} b_a = [b_a, Q] = \delta b_a + (\text{ordem mais alta}) = \gamma_a + (\text{ordem mais alta}). \quad (6.110)$$

Em ordem mais baixa, pode-se assumir que:

$$\Omega^{(0)} = c^a \gamma_a \quad (6.111)$$

É interessante notar que de fato, para um campo outro da ação, esse termo produzirá a seguinte transformação:

$$\delta_{BRST} \phi^i = [\phi^i, c^a \gamma_a] = c^a [\phi^i, \gamma_a]. \quad (6.112)$$

Que corresponde justamente à uma rotação rígida envolvendo o campo fantasma η^a e a transformação de gauge $\delta_{gauge} \phi^i = \epsilon^a [\gamma_a, \phi^i]$, como era esperado. Essa transformação é justamente o que havia sido descrito para a operação $d\phi^i$. Onde $\delta\phi^i = 0$ naturalmente por não possuir nenhum número de anti-campo ou fantasma-puro.

Para estudar os termos de ordem mais alta é preciso expandir o operador Ω em termos do número de anti-campo:

$$Q = \sum_{p \geq 0} Q^{(p)}. \quad (6.113)$$

onde,

$$\text{anticampo}(Q^{(p)}) = p, \quad \text{e} \quad Q^{(0)} = \eta^a \gamma_a. \quad (6.114)$$

A partir disso, é possível calcular (6.102). Considerando a equação para cada número de anti-campo, tem-se (ver [17], capítulo 9):

$$\delta Q^{(p+1)} + D^{(p)} = 0. \quad (6.115)$$

onde,

$$D^{(p)} = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^p [Q^{(k)}, Q^{(p-k)}]_{\phi, \pi} + \sum_{k=0}^{p-1} [Q^{(k+1)}, Q^{(p-k)}]_{\eta, \mathcal{P}} \right]. \quad (6.116)$$

Considere então, que cada termo $Q^{(p)}$ possa ser escrito como:

$$Q^{(p)} = U^{(p)\alpha_1 \dots \alpha_p} \mathcal{P}_{\alpha_1} \dots \mathcal{P}_{\alpha_p}. \quad (6.117)$$

A solução de (6.116) com a condição (6.117) é:

$$\begin{aligned} D_C^{(n)\alpha_1 \dots \alpha_n} &= \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n [U^{(p)\alpha_1 \dots \alpha_p}, U^{(n-p)\alpha_{p+1} \dots \alpha_n}] (-1)^{n-p} \\ &\quad - \sum_{p=0}^{n-1} (p+1) U^{(p+1)\alpha_1 \dots \alpha_{p+1}} \frac{\partial U^{(n-p)\alpha_{p+1} \dots \alpha_n}}{\partial \eta^\beta} (-1)^{n-p}. \end{aligned} \quad (6.118)$$

Que é exatamente a mesma equação para as funções de estrutura dos vínculos (2.102). Logo, os termos do operador BRST nesta representação corresponde justamente às funções de estrutura dos vínculos.

Como é fácil ver, o termo $Q^{(1)}$ é dado por:

$$Q^{(1)} = -\frac{1}{2} c^b c^c C_{cb}^a b_a. \quad (6.119)$$

onde C_{cb}^a é a função de estrutura de primeira ordem. Como era esperado, uma vez que já havia sido calculado, (6.100), $db_\alpha = C_{\alpha\beta}^\rho c^\beta b_\rho$ que corresponde ao termo $[b_\alpha, Q^0]$.

Uma vez conhecido a representação do operador BRST é preciso encontrar a ação que possui a simetria gerada por esse operador.

A invariância pela simetria BRST implica em:

$$\delta_{BRST} S = sS = [S, Q] = 0. \quad (6.120)$$

E a Ação deve ter número fantasma nulo:

$$\text{fantasma}(S) = 0. \quad (6.121)$$

Como já foi dito anteriormente, a Ação escrita no formalismo Hamiltoniano é dada por:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt (\dot{\phi}^i \pi_i - H + \lambda^a \gamma_a). \quad (6.122)$$

onde se incluiu os vínculos γ_a . Como já foi visto, para impor a condição $\gamma_a = 0$ é preciso adicionar um campo fantasma c^a e, neste formalismo, seu momento conjugado b_a .

É preciso notar, entretanto, a presença de mais uma variável que pode ser dinâmica, λ^a , bosônica. A essa variável pode-se adicionar um momento conjugado π_{λ^a} que obviamente está relacionada a um vínculo, $\pi_{\lambda^a} \approx 0$. Por essa razão, será necessário adicionar mais um termo ao operador BRST para fixar esse vínculo. Essa parte do operador BRST é chamada de parte *não-mínima*.

Para entender como é esse termo não mínimo é preciso estudar o caso em que há duas

variáveis dinâmicas α e β . Considere que:

$$s\alpha = \beta; \quad s\beta = 0. \quad (6.123)$$

A essas duas variáveis dinâmicas é possível definir momentos conjugados π_α e π_β que satisfaçam:

$$s\pi_\beta = \pi_\alpha; \quad s\pi_\alpha = 0. \quad (6.124)$$

E a solução mais simples para resolver essa condição é considerar um termo de BRST dado por:

$$\pi_\alpha \beta \quad (6.125)$$

Logo, o operador BRST completo será dado pelos termos já conhecidos, parte mínima, mais os termos para fixação dos multiplicadores de Lagrange, parte não-mínima.

Como se vê por essa construção, o campo α deve ter uma unidade de número fantasma a menos que o campo beta β . E para os momentos conjugados a relação é inversa. O campo α nesse formalismo é chamado de anti-fantasma

Como se vê nessa construção, o momento conjugado π_β serve para produzir estados exatos de π_α e assim eliminar aqueles que são trivialmente nulos. Logo, associando o campo π_α ao momento $\pi_{\lambda^a} \approx 0$, a construção mostra que para fixar esse vínculo é preciso incluir mais um par de campos B^a e C_a , com $[B_a, C^b] = -\delta_a^b$ justamente para fixar a co-homologia de b_a .

Assim, o operador BRST precisa ter mais um termo, não mínimo, para conseguir fixar completamente a co-homologia do sistema e encontrar somente os estados físicos.

$$Q = Q^{min} + Q^{nmin}; \quad (6.126)$$

$$Q^{min} = \eta^a \gamma_a - \frac{1}{2} \eta^b \eta^c C_{cb}^a \mathcal{P}_a + \dots; \quad (6.127)$$

$$Q^{nmin} = i \sum \pi_{\lambda^a} C^a. \quad (6.128)$$

onde o "i" é devido ao fato de se assumir o multiplicador de Lagrange imaginário para que o vínculo fermiônico $\lambda^a \gamma_a$ seja real.

Uma vez encontrada a ação definida pelos vínculos e expandida para incluir fantasmas é preciso estudar como fixar o gauge. A fixação do gauge deve ser feita através da adição de um termo que também seja invariante de gauge e seja capaz de fixar o gauge através das equações de movimento.

O termo invariante por transformação BRST mais simples é dado por:

$$[F, Q]. \quad (6.129)$$

Ele é trivialmente invariante de gauge pela condição de nilpotência, $s^2 = 0 \Leftrightarrow [Q, Q] = 0$, do operador BRST. A variação desse termo é:

$$\begin{aligned} s[F, Q] &= \varepsilon[[F, Q], Q] \\ &= \varepsilon\frac{1}{2}[[Q, Q], F] = 0 \end{aligned} \quad (6.130)$$

onde se usou a identidade de Jacobi.

Tem-se que para satisfazer todas as condições, a ação ser bosônica, K deve ser um férmion. Esse termo é chamado *férmion de fixação de gauge*.

Não existe forma exata para o férmion de fixação de Gauge, todavia é possível defini-lo para que seja análogo ao método de Fadeev-Popov. Nesta construção define-se K como:

$$K = iB_a G^a - \mathcal{P}_a \lambda^a. \quad (6.131)$$

6.3.4.1 Redução do operador BRST mais geral ao caso mais simples

Para o caso mais simples, é possível fazer as seguintes considerações:

$$\Omega = \eta^a \gamma_a - \frac{1}{2} \eta^a \eta^b C_{ab}^c \mathcal{P}_c - iC^a \pi_{\lambda^a}; \quad (6.132)$$

$$K = iB_a G^a - \mathcal{P}_a \lambda^a; \quad (6.133)$$

$$S = \int dt (\pi_{mu} \dot{\phi}^\mu + \mathcal{P}_a \dot{\eta}^a + \pi_{\lambda^a} \dot{\lambda}^a + B_a \dot{C}^a - H_0 - \lambda^a \gamma_a - [K, \Omega]). \quad (6.134)$$

Primeiramente é válido calcular o termo $[K, \Omega]$:

$$[K, \Omega] = iB_b [G^b, \eta^a \gamma_a] - \pi_{\lambda^a} G^a + \lambda^a \gamma_a - \lambda^a \eta^b C_{ab}^c \mathcal{P}_c + iC^a \mathcal{P}_a. \quad (6.135)$$

Assim, as equações de movimento para \mathcal{P}_a e C^a são, respectivamente:

$$\dot{\eta}^a + \lambda^c \eta^b C_{cb}^a + iC^a = 0; \quad (6.136)$$

$$\dot{B}_a - i\mathcal{P}_a = 0. \quad (6.137)$$

Substituindo (6.136) em (6.134):

$$S = \int dt (\pi_\mu \dot{\phi}^\mu + \mathcal{P}_a \dot{\eta}^a - \lambda^a \gamma_a + \pi_{\lambda^a} (\dot{\lambda}^a - iG^a) - iB_a \delta_\eta (\dot{\lambda}^a + iG^a)). \quad (6.138)$$

onde $\delta_\eta F = [F, \eta^a \gamma_a]$.

É fácil ver que se for possível remover a dependência em λ^a a ação toma o formato:

$$S = S_0 + \int dt (-i\pi_{\lambda^a} G^a + B_a \eta^b \delta_b G^a). \quad (6.139)$$

onde S_0 é a ação com vínculos. Essa ação é equivalente à derivada pelo método de Fadeev-Popov.

É possível remover a dependência em λ^a , se esse campo puder ser reintroduzidos nos campos já existentes através de uma redefinição. Um exemplo é o da partícula relativística, assim como outras teorias covariantes, no qual um dos vínculos é obviamente o Hamiltoniano que já está presente na ação. Assim, o campo λ^a é facilmente removido ao se redefinir o campo auxiliar. Neste caso, uma vez eliminada a dependência em λ^a , é possível substituir o campo π_{λ^a} por $\pi_{\lambda^a} = [B_a, Q]$. Além disso, uma vez que os vínculos são incluídos na própria ação a partir da redefinição dos campos, a ação S_0 se torna aquela na qual não estão necessariamente presentes a soma de uma combinação linear dos vínculos.

É interessante observar que, para esse operador BRST as transformações dos campos serão dadas por:

$$\begin{aligned}\delta_{BRST}\phi^i &= \varepsilon[\phi^i, \Omega] \\ &= \varepsilon\eta^a[\phi^i, \gamma_a] \\ &= \varepsilon\eta\delta_{gauge}\phi^i.\end{aligned}\tag{6.140}$$

$$\begin{aligned}\delta_{BRST}\pi_{\lambda^a} &= \varepsilon[\pi_{\lambda^a}, \Omega] \\ &= 0.\end{aligned}\tag{6.141}$$

$$\begin{aligned}\delta_{BRST}B_a &= \varepsilon[B_a, \Omega] \\ &= \varepsilon i\pi_{\lambda^a}.\end{aligned}\tag{6.142}$$

$$\begin{aligned}\delta_{BRST}\eta^a &= \varepsilon[\eta^a, \Omega] \\ &= \varepsilon\frac{1}{2}\eta^b\eta^c C_{bc}^a.\end{aligned}\tag{6.143}$$

Dado as transformações de gauge do sistema, é possível fazer outras considerações ao se encontrar as equações de movimento para cada campo. Há casos, por exemplo, em que descobre-se que o momento conjugado $\mathcal{P}_a = B_a$, como será o caso das aplicações desta dissertação. Assim:

$$[B_b, \eta^a] = -\delta_b^a.\tag{6.144}$$

6.3.5 BRST-anti-campo ou método BV

Esse método é baseado em outra definição para os parenteses. Ao invés de considerar o parenteses de Poisson utiliza-se o parenteses BV. Esse parenteses associa campos a anti-

campos. Nesse método, a cada campo físico e fantasma associa-se um anti-campo que satisfaça a seguinte operação:

$$(F, G) = \frac{\delta^R F}{\delta \phi^A} \frac{\delta^L G}{\delta \phi_A^*} - \frac{\delta^R F}{\delta \phi_A^*} \frac{\delta^L G}{\delta \phi^A}. \quad (6.145)$$

onde L e R correspondem a derivadas esquerda e direita que satisfazem a seguinte propriedade:

$$\frac{\delta^R F}{\delta \phi^A} \equiv (-1)^{\epsilon_{\phi^A}(\epsilon_F+1)} \frac{\delta^L F}{\delta \phi^A}. \quad (6.146)$$

onde $\epsilon_{\phi^A} = 0$ se ϕ^A é bosônico e $\epsilon_{\phi^A} = 1$ se ϕ^A é fermiônico.

Essa operação é chamada de parenteses BV. É possível demonstrar que satisfaz as seguintes propriedades:

$$(F, G) = -(-1)^{(\epsilon_F+1)(\epsilon_G+1)}(G, F) \quad (\text{antisimetria}); \quad (6.147)$$

$$(FG, H) = F(G, H) + (F, H)G \quad (\text{lei do produto}); \quad (6.148)$$

$$(-1)^{(\epsilon_F+1)(\epsilon_H+1)}(F, (G, H)) + \text{p. c.} = 0 \quad (\text{Identidade de Jacobi}). \quad (6.149)$$

$$\text{fantasma}((F, G)) = \text{fantasma}(F) + \text{fantasma}(G) + 1. \quad (6.150)$$

A última propriedade demonstra que esse parenteses pode estar relacionado à transformação BRST.

Neste formalismo será criado o mesmo número de fantasmas, entretanto não serão conjugados a os respectivos momentos mas a anti-campos. Considere o campo ϕ^A , que envolve campos físicos e campos fantasmas:

$$\text{fantasma-puro}(\phi^A) = n; \quad \text{anticampo}(\phi^A) = 0; \quad \text{fantasma}(\phi^A) = n. \quad (6.151)$$

É conjugado ao anti-campo ϕ_A^* :

$$\text{fantasma-puro}(\phi_A^*) = 0; \quad \text{anticampo}(\phi_A^*) = n + 1; \quad \text{fantasma}(\phi_A^*) = -n - 1. \quad (6.152)$$

Para campos físicos, $n = 0$, para campos fantasmas $n = 1, 2, 3, \dots$.

O operador BRST é dado pela Ação Mestra S que deve satisfazer a seguinte propriedade:

$$(S, S) = 0. \quad (6.153)$$

Que é equivalente à propriedade de nilpotência do operador BRST.

A transformação BV é dada então por:

$$sF = (S, F) \quad (6.154)$$

E conseqüentemente:

$$s\phi^A = (S, \phi^A) = -\frac{\delta^R S}{\delta\phi_A^*}; \quad (6.155)$$

$$s\phi_A^* = (S, \phi_A^*) = -\frac{\delta^R S}{\delta\phi^A}. \quad (6.156)$$

Assim, a Ação Mestra pode ser decomposta em número de anti-campo:

$$S = \sum_{k \geq 0} S_k. \quad (6.157)$$

E está relacionado a:

$$s = \delta + d + \sum_{i > 0} s_i. \quad (6.158)$$

E a construção da representação segue de forma exatamente análoga ao caso de BRST canônico.

Para os campos físicos ϕ^i , não-fantasma, $\delta\phi^i = 0$ uma vez que não há campos com número de anti-campo -1 . E, dessa forma, $\delta\phi_i^* = \delta S_0 / \delta\phi^i$. Já $d\phi^i$ deve ser igual a algo vezes um campo fantasma, com número fantasma-puro 1, c^α . Para isso, assume-se que:

$$d\phi^i = R_\alpha^i c^\alpha. \quad (6.159)$$

onde R_α^i é a representação da transformação de gauge, $\delta_{gauge}\phi^i = R_\alpha^i \epsilon^\alpha$.

Para isso ser válido, $s\phi^i = R_\alpha^i c^\alpha$, e conforme (6.155):

$$s\phi^i = (S_0 + S_1 + \dots, \phi^i) = -\frac{\delta^R S_1}{\delta\phi_i^*} + \dots = R_\alpha^i c^\alpha. \quad (6.160)$$

Logo,

$$S_1 = \phi_i^* R_\alpha^i c^\alpha. \quad (6.161)$$

De forma geral, a mesma equação deverá ser satisfeita:

$$\delta S^p + 2D^{p+1} = 0. \quad (6.162)$$

Os termos de ordem mais alta serão então dados pelas funções de estrutura do gauge multiplicados pelos campos fantasmas e anti-campos. Tal que o caso mais geral seja da forma:

$$S(\phi, \phi^*) = S_0(\phi) + \phi_i^* R_\alpha^i c^\alpha + c_\alpha^* \frac{1}{2} C_{\beta\gamma}^\alpha (-1)^{\epsilon_\beta} c^\gamma c^\beta + \dots \quad (6.163)$$

Como era intuitivamente esperado após toda a discussão anterior.

A ação obtida não fornece nenhuma informação física uma vez que não é possível definir uma dinâmica para os campos fantasmas e os anti-campos correspondentes. Isso pode ser explicado pelo fato de que de fato, o gauge ainda não foi fixado e é impossível fazer

os cálculos. Apenas impôs-se os vínculos. Para resolver o problema é preciso então poder escrever os anti-campos em termos dos campos fantasmas. Nesse processo é esperado que os campos fantasmas ganhem uma dinâmica e possa se fazer cálculos com eles.

A escrita dos anti-campos em termos dos campos é geralmente feita pela definição de um férmion fixador de gauge. Isto é, defini-se um campo fermiônico ψ que é um funcional dos campos físicos e fantasmas tal que os anti-campos sejam escritos como:

$$\phi_A^* = \frac{\delta\psi}{\delta\phi^A}. \quad (6.164)$$

Através desse processo, é possível fixar o gauge.

Alguns trabalhos mais recentes, [29], propõe também considerar a seguinte condição:

$$\phi_A^* = \frac{\delta L}{\delta(Q\phi^A)}. \quad (6.165)$$

onde Q é o operador BRST e pode ser visto como uma derivada no tempo, tal que o anti-campo esteja relacionado a um momento conjugado. Essa condição pode gerar, entretanto, um vínculo de segunda classe. Tal que seja necessário redefinir a operação de conjugação.

A integral de caminho deve ser invariante pela escolha de gauge em (6.164), isso produz correções quânticas para a definição da ação mestra:

$$(S, S) = 0. \quad (6.166)$$

Que é chamada de Ação Mestra Clássica. Para encontrar as correções quânticas, é preciso analisar como a integral de caminho se altera com uma mudança de gauge.

Considere:

$$I = \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar}W[\phi, \phi^*]}. \quad (6.167)$$

Neste caso, W é a ação quântica.

Utilizando a condição (6.164):

$$I = \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar}W[\phi, \frac{\delta\psi}{\delta\phi^A}]}. \quad (6.168)$$

Essa integral de caminho deve ser invariante por uma transformação $\delta\psi$, logo:

$$\begin{aligned} \delta I &= \int \mathcal{D}\phi \left(e^{\frac{i}{\hbar}W[\phi, \frac{\delta\psi}{\delta\phi^A} + \frac{\delta\delta\psi}{\delta\phi^A}]} - e^{\frac{i}{\hbar}W[\phi, \frac{\delta\psi}{\delta\phi^A}]} \right). \\ &= \int \mathcal{D}\phi \left(\frac{\partial_R e^{\frac{i}{\hbar}W[\phi, \phi^*]}}{\partial\phi_A^*} \frac{\partial_L \delta\psi}{\partial\phi^A} + O((\delta\psi)^2) \right) \\ &= \int \mathcal{D}\phi \left((-1)^{\epsilon_A+1} \frac{\partial_R}{\partial\phi^A} \frac{\partial_R}{\partial\phi_A^*} (e^{\frac{i}{\hbar}W}) + \dots \right). \end{aligned} \quad (6.169)$$

onde foi feita uma integral por partes.

Logo,

$$\Delta e^{\frac{i}{\hbar}W} = 0. \quad (6.170)$$

onde,

$$\Delta \equiv (-1)^{\epsilon_A+1} \frac{\partial_R}{\partial \phi^A} \frac{\partial_R}{\partial \phi_A^*}. \quad (6.171)$$

Esse operador satisfaz as seguintes propriedades:

$$\Delta \Delta = 0; \quad (6.172)$$

$$\Delta(XY) = X\Delta Y + (-1)^{\epsilon_Y}(\Delta X)Y + (-1)^{\epsilon_Y}(X, Y); \quad (6.173)$$

$$\Delta((X, Y)) = (X, \Delta Y) - (-1)^{\epsilon_Y}(\Delta X, Y). \quad (6.174)$$

A equação (6.170) fornece uma identidade que deve ser satisfeita por W . Desenvolvendo a relação:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta e^{\frac{i}{\hbar}W} \\ &\equiv (-1)^{\epsilon_A+1} \frac{\partial_R}{\partial \phi^A} \frac{\partial_R}{\partial \phi_A^*} (e^{\frac{i}{\hbar}W}) \\ &\equiv (-1)^{\epsilon_A+1} \frac{\partial_R}{\partial \phi^A} \left(e^{\frac{i}{\hbar}W} \frac{i}{\hbar} \frac{\partial_R W}{\partial \phi_A^*} \right) \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}W} \left(\frac{i}{\hbar} \Delta W - \frac{1}{\hbar^2} (-1)^{\epsilon_A+1} \frac{\partial_R W}{\partial \phi^A} \frac{\partial_R W}{\partial \phi_A^*} \right) \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}W} \left(\frac{i}{\hbar} \Delta W - \frac{1}{2\hbar^2} (W, W) \right). \end{aligned} \quad (6.175)$$

E portanto,

$$\frac{1}{2}(W, W) = i\hbar \Delta W. \quad (6.176)$$

Assim, obtêm-se a Ação Mestra Quântica. É possível obtê-la como uma expansão:

$$W = S + \sum_{p=1}^{\infty} \hbar^p W_p. \quad (6.177)$$

O férmion fixador de gauge é um funcional e tem o número fantasma -1 para satisfazer a equação (6.164). Toda vida, todos os campos considerados até então possuem apenas números fantasmas positivos. Vale lembrar que a definição de número fantasma é o número de fantasma puro menos o número de anti-campo. Por isso, para se definir o férmion fixador de gauge é preciso introduzir novos campos, assim como é feito pelo formalismo BRST com o parenteses de Poisson, chamados anti-fantasmas uma vez que possuem número fantasma negativo.

Para o caso de uma teoria irreduzível, adiciona-se dois campos:

$$C_{0\alpha_0}, \quad B_{0\alpha_0}. \quad (6.178)$$

Que possui as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \epsilon(C_{0\alpha_0}) &= \epsilon_{\alpha_0} + 1, & \text{fantasma}(C_{0\alpha_0}) &= -1; \\ \epsilon(B_{0\alpha_0}) &= \epsilon_{\alpha_0}, & \text{fantasma}(B_{0\alpha_0}) &= 0. \end{aligned} \quad (6.179)$$

onde o índice α_0 está relacionado ao índice do campo fantasma correspondente. O campo $C_{0\alpha_0}$ corresponde ao campo anti-fantasma de Fadeev-Popov do fantasma $c_0^{\alpha_0}$.

No caso de campos com um grau maior de redutibilidade é preciso criar mais campos para fixar todos os graus de liberdade do gauge. A quantidade de campos necessários para se fixar os vínculos e os graus de liberdade são geralmente associados a uma *planilha triangular de campos*, [19] sessão 6.2.

Para se determinar a dinâmica desses anti-fantasmas é preciso adicionar à ação o setor não-mínimo:

$$S_{nm} = \overline{B}_{0\alpha_0} C_0^{*\alpha_0} + \dots \quad (6.180)$$

Para compreender melhor esta sessão ver as seguintes referências [17,19]. Em [17], é feito um pequeno resumo do que é apresentado, e em [19] faz-se uma análise mais detalhada de todos os aspectos.

6.4 Considerações sobre os formalismos BRST e BV

Uma vez visto ambos os métodos, é possível notar que enquanto o método BRST procura remover a ambiguidade existente no fato de poder redefinir os observáveis pela soma da combinação linear dos vínculos:

$$A' = A + \lambda^a G_a. \quad (6.181)$$

O método BV, propõe remover as soluções das equações de movimento que não são físicas. Isto é, considerando:

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0. \quad (6.182)$$

Remove-se então os campos ϕ que não são físicos através de considerações das transformações de gauge.

Nota-se que o formalismo BRST se encontra no espaço de fases, sendo construído a partir do formalismo Hamiltoniano. Já o formalismo BV é construído a partir do formalismo Lagrangeano.

Há casos em que apenas a estrutura de vínculos não fornece todas as informações sobre o sistema. Um desses casos é a existência de álgebras abertas. Neste caso o formalismo BRST não é suficiente. É necessário utilizar o formalismo BV, por lidar diretamente com as propriedades da álgebra das transformações de gauge. Isso foi observado necessário para fazer o estudo da quantização dos campos de gravidade, super-gravidade e de cordas.

Outro fato importante é a questão de observar anomalias quânticas no formalismo BV. Essas anomalias revelam a dependência das teorias com as fixações do gauge. Essa de-

pendência pode dar origem a correções quânticas e a inclusão de novas interações na Ação Mestra. Isso foi importante no desenvolvimento da Teoria de Campos de Cordas.

7 Aplicações do Formalismo BV

No capítulo 4, utilizou-se o formalismo BRST para quantizar a partícula e a corda relativística. São sistemas simples e não requisitam um formalismo BRST mais geral. Todavia, por questão de completeza e a fim de observar como funciona o formalismo BV, será feita a quantização da partícula e da corda relativísticas e do campo de cordas abertas por esse método.

7.1 A Partícula Relativística

No capítulo 3, já foi estudada toda a estrutura de gauge da partícula relativística.

A Ação é dada por:

$$S(x^\mu, e) = \int d\tau \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}{e} - m^2 e \right). \quad (7.1)$$

A simetria dessa ação corresponde àquela que deixa $e(\tau)d\tau$ invariante.

Existem duas formas de parametrizar essa transformação de gauge. A primeira, (4.18), pode ser escrita como:

$$\delta x^\mu = \epsilon^2 \frac{\dot{x}^\mu}{e}; \quad (7.2)$$

$$\delta e = \dot{\epsilon}^2. \quad (7.3)$$

Neste caso a álgebra das transformações de gauge corresponde a:

$$R_\sigma^{\mu\tau} = \frac{\dot{x}^\mu(\tau)}{e} \delta(\tau - \sigma), \quad (7.4)$$

$$R_\sigma^{e\tau} = \frac{d}{d\tau} \delta(\tau - \sigma) \quad (7.5)$$

E,

$$[\delta_1, \delta_2] = 0. \quad (7.6)$$

Há a necessidade de apenas um campo fantasma, c , para impor a condição de simetria.

Os campos são:

$$x^\mu, \quad e, \quad c. \quad (7.7)$$

E devem ser criados os seguintes anti-campos:

$$x_{\mu}^*, \quad e^*, \quad c^*. \quad (7.8)$$

Caracterizados pelas seguintes paridades e números fantasmas:

$$\begin{aligned} \epsilon(x^{\mu}) &= \epsilon(e) = \epsilon(c^*) = 0, \\ \epsilon(x_{\mu}^*) &= \epsilon(e^*) = \epsilon(c) = 1, \\ f(x^{\mu}) &= f(e) = 0, \quad f(c) = 1, \\ f(x_{\mu}^*) &= f(e^*) = -1, \quad f(c^*) = -2. \end{aligned} \quad (7.9)$$

A fórmula dada no capítulo 6 para a Ação Mestra Clássica BV, (6.163), fornece a seguinte ação para o caso da partícula relativística:

$$S = S_0 + \int d\tau \left(x_{\mu}^* \frac{\dot{x}^{\mu}}{e} c + e^* \dot{c} \right). \quad (7.10)$$

Lembrando que as transformações BV, (6.154), são geradas por:

$$\delta\phi = (\phi, S). \quad (7.11)$$

onde o parentese é o parentese BV. As transformações para a partícula relativística são:

$$\begin{aligned} \delta_{BV} x^{\mu} &= \frac{\dot{x}^{\mu} c}{e}, \quad \delta_{BV} e = \dot{c}, \quad \delta_{BV} c = 0; \\ \delta_{BV} x_{\mu}^* &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\dot{x}_{\mu} + x_{\mu}^* c}{e} \right), \\ \delta_{BV} e &= \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}^2}{e^2} + m^2 \right) - \frac{x_{\mu}^* \dot{x}^{\mu} c}{e^2}, \\ \delta_{BV} c^* &= \frac{x_{\mu}^* \dot{x}^{\mu}}{e} - \dot{e}^*. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Neste caso pode-se considerar que o férmion fixador de gauge seja:

$$\psi = \int d\tau C(e - 1). \quad (7.13)$$

onde C é o anti-fantasma.

É necessário adicionar os dois campos C e B e a ação não mínima:

$$S_{nm} = \int d\tau BC^*. \quad (7.14)$$

Utilizando a relação:

$$\phi_A^* = \frac{\delta\psi}{\delta\phi^A}. \quad (7.15)$$

Encontra-se que:

$$C^* = e - 1, \quad e^* = C, \quad x_{\mu}^* = 0, \quad B^* = 0. \quad (7.16)$$

A Ação com o gauge fixado é portanto:

$$S_\psi = \int d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}^2}{e} - em^2 \right) + C\dot{c} + B(e-1) \right]. \quad (7.17)$$

A equação de movimento para B corresponde a $e = 1$. Logo, a ação se torna:

$$S_\psi = \int d\tau \left[\frac{1}{2} (\dot{x}^2 - m^2) + C\dot{c} \right]. \quad (7.18)$$

Tal que as transformações BV se reduzam a:

$$\delta_{BV} x^\mu = \dot{x}^\mu c, \quad \delta_{BV} c = 0, \quad \delta_{BV} C = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + m^2). \quad (7.19)$$

Neste caso, calculando as equações de movimento, é possível observar que:

$$\begin{aligned} b &= \frac{\delta L}{\delta \dot{c}} \\ &= C. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Logo,

$$S_\psi = \int d\tau \left[\frac{1}{2} (\dot{x}^2 - m^2) + b\dot{c} \right]. \quad (7.21)$$

E corresponde exatamente à ação de Fadeev-Popov e a quantização é análoga ao caso BRST. A transformação BV e BRST são equivalentes. O procedimento de quantização segue análogo ao caso BRST. Uma vez dadas as transformações, calcula-se a carga conservada e encontra-se a co-homologia dessa carga aplicada aos estados.

7.2 A Corda Relativística

O procedimento é análogo ao da partícula relativística.

A Ação é dada por:

$$S(X^\mu, \gamma_{ab}) = -\frac{T}{2} \int_M d\tau d\sigma (-\gamma)^{1/2} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu. \quad (7.22)$$

Essa Ação é simétrica pelas seguintes transformações de gauge:

$$\delta X^\mu = \epsilon^m \partial_m X^\mu, \quad (7.23)$$

$$\delta \gamma_{ab} = \epsilon^m \partial_m \gamma_{ab} + \partial_a \epsilon^m \gamma_{mb} + \partial_b \epsilon^m \gamma_{am}. \quad (7.24)$$

Que tem por geradores:

$$R_{m\sigma^a}^{\mu\sigma^a} = \partial_m X^\mu \delta^2(\sigma^a - \sigma'^a), \quad (7.25)$$

$$R_{abm\sigma^a}^{\sigma^a} = \partial_m \gamma_{ab} \delta^2(\sigma^a - \sigma'^a) + \gamma_{mb} \partial_a \delta^2(\sigma^a - \sigma'^a) + \gamma_{am} \partial_b \delta^2(\sigma^a - \sigma'^a). \quad (7.26)$$

Que corresponde a difeomorfismos. A função de estrutura é:

$$C_{mn\sigma^a\sigma'^a}^o = \partial_n \delta^2(\sigma^a - \sigma'^a) \delta^2(\sigma^a - \sigma'^a) \delta_m^o - \partial_m \delta^2(\sigma^a - \sigma'^a) \delta^2(\sigma^a - \sigma'^a) \delta_n^o. \quad (7.27)$$

É também invariante por transformações de Weyl:

$$\delta X^\mu = 0, \quad (7.28)$$

$$\delta \gamma_{ab} = \epsilon \gamma_{ab}. \quad (7.29)$$

Cujo gerador é:

$$R_{ab\sigma'^a}^\sigma = \gamma_{ab} \delta^2(\sigma^a - \sigma'^a). \quad (7.30)$$

Que não possui função de estrutura. Há apenas a função de estrutura que envolve um diffeomorfismo e uma transformação de Weyl.

$$C_{m\sigma'\sigma''}^\sigma = \partial_m \delta^2(\sigma^a - \sigma'^a) \delta^2(\sigma^a - \sigma'^a). \quad (7.31)$$

Que correspondem respectivamente à composição de duas rotações, duas translações, uma rotação e uma translação.

Os campos que devem ser considerados são:

$$X^\mu, \quad \gamma_{ab}, \quad c^m, \quad c. \quad (7.32)$$

A cada um deles se associa os respectivos anti-campos:

$$X_\mu^*, \quad \gamma^{*ab}, \quad c_m^*, \quad c^*. \quad (7.33)$$

Tal que a Ação Mestra Clássica,(6.163) seja:

$$S = S_0 \int d^2\sigma \left(X_\mu^* c^m \partial_m X^\mu + \gamma^{*ab} (c^m \partial_m \gamma_{ab} + \gamma_{mb} \partial_a c^m + \gamma_{am} \partial_b c^m + c \gamma_{ab}) + c_m^* c^m \partial_n c^n + c^* c^m \partial_m c \right). \quad (7.34)$$

As transformações BV, (6.154), geradas por essa Ação é:

$$\begin{aligned} \delta_{BV} X^\mu &= c^m \partial_m X^\mu, \\ \delta_{BV} \gamma_{ab} &= (c^m \partial_m \gamma_{ab} + \gamma_{mb} \partial_a c^m + \gamma_{am} \partial_b c^m + c \gamma_{ab}), \\ \delta_{BV} c^m &= c^m \partial_n c^n, \\ \delta_{BV} c &= c^m \partial_m c, \\ \delta_{BV} X_\mu^* &= \frac{\delta S_0}{\delta X^\mu} + \partial_m (X_\mu^* c^m), \\ \delta_{BV} \gamma^{*ab} &= \frac{\delta S_0}{\delta \gamma_{ab}} + \gamma^{*ab} c^m \partial_m + \gamma^{*cb} \partial_c c^a + \gamma^{*ac} \partial_c c^b + \gamma^{*ab} c, \\ \delta_{BV} c_m^* &= X_\mu^* \partial_m X^\mu + \gamma^{*ab} \partial_m \gamma_{ab} + \partial_a (\gamma^{*ab} \gamma_{mb}) + \partial_b (\gamma^{*ab} \gamma_{am}) - c_m^* \partial_n c^n - \partial_m (c_n^* c^n) + c^* \partial_m c, \\ \delta_{BV} c^* &= \gamma^{*ab} \gamma_{ab} + \partial_m (c^* c^m). \end{aligned} \quad (7.35)$$

Neste caso pode-se considerar que o férmion fixador de gauge seja:

$$\psi = \int d^2\sigma (C^{ab}(\gamma_{ab} - g_{ab}) + C(\gamma^{1/2} - 1)). \quad (7.36)$$

onde C^{ab} e C são anti-fantasma. A métrica g_{ab} é a métrica conforme.

É necessário adicionar os dois campos C^{ab} e B^{ab} e a Ação não mínima (6.180):

$$S_{nm} = \int d^2\sigma (B^{ab}C_{ab}^* + BC^*). \quad (7.37)$$

Tal que os anti-campos sejam, utilizando (6.164):

$$\begin{aligned} X_\mu^* &= 0, & \gamma^{*ab} &= C^{ab}, & c_m^* &= 0, & c^* &= 0, & C_{ab}^* &= \gamma_{ab} - g_{ab}, \\ B_{ab}^* &= 0, & C^* &= \gamma^{1/2} - 1, & B^* &= 0. \end{aligned} \quad (7.38)$$

A Ação BV é portanto:

$$S = S_0 + \int d^2\sigma \left(C^{ab} (c^m \partial_m \gamma_{ab} + \gamma_{mb} \partial_a c^m + \gamma_{am} \partial_b c^m + c \gamma_{ab}) + B^{ab} (\gamma_{ab} - g_{ab}) + B (\gamma^{1/2} - 1) \right). \quad (7.39)$$

Vale mostrar como essa ação é exatamente igual à ação obtida pelo método de Faddeev-Popov no capítulo 4.

Ao se resolver a equação para B^{ab} , fixa-se o gauge à métrica conforme. A equação para B apenas implica que a métrica tem determinante igual a 1. A equação de movimento para c , mostra que C^{ab} tem traço nulo.

Fazendo as transformações para coordenadas complexas, obtêm-se justamente:

$$S = \int d^2z \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu - C_{zz} \bar{\partial} c^z + C_{\bar{z}\bar{z}} \partial c^{\bar{z}}. \quad (7.40)$$

As transformações BV são, da mesma forma, equivalentes à BRST uma vez fazendo a integração de todos os anti-campos. Para quantizar, calcula-se a carga conservada pelas transformações e encontra-se a co-homologia da carga conservada.

É possível concluir então, que para a partícula relativística e para a corda relativística, que possuem uma álgebra fechada e irredutível, o formalismo BV é equivalente ao formalismo BRST.

7.3 O Campo de Cordas Abertas

Para analisar um caso mais geral onde o formalismo BV é necessário, será estudado o caso do campo de cordas abertas.

Considere o vácuo da teoria de cordas como: $|\Omega\rangle = c_1|0\rangle$, onde $|0\rangle$ está definido no Apêndice A e corresponde ao cálculo de caminhos fechados no plano complexo entorno

do ponto $z = 0$ sem a inserção de nenhum polo, tal que $c_1|0\rangle = c_1(0)$. O vácuo satisfaz:

$$\begin{aligned}\alpha_n^\mu|\Omega\rangle &= 0, & n > 0; \\ b_n|\Omega\rangle &= 0, & n \geq 0; \\ c_n|\Omega\rangle &= 0, & n > 0; \\ p^\mu|\Omega\rangle &\propto \alpha_0^\mu|\Omega\rangle = 0.\end{aligned}\tag{7.41}$$

Assim, um estado da corda pode ser escrito como:

$$\alpha_{-n_1}^\mu \cdots \alpha_{-n_i}^\mu b_{-m_1} \cdots b_{-m_j} c_{-l_1} \cdots c_{-l_k}|\Omega\rangle.\tag{7.42}$$

onde $n > 0, m > 0, l \geq 0$ e i, j, k são inteiros positivos. É possível, então, descrever um campo de cordas como um conjunto de estados:

$$|\Phi\rangle = (\phi + A_\mu \alpha_{-1}^\mu + B_{\mu\nu} \alpha_{-1}^\mu \alpha_{-1}^\nu + \cdots) c_1|0\rangle\tag{7.43}$$

Sabe-se que os estados físicos são dados por aqueles que estão presentes na co-homologia do operador BRST. Logo, é possível definir uma ação para o campo de cordas como:

$$S_0 = \langle \Phi|Q|\Phi\rangle.\tag{7.44}$$

onde Q é a carga BRST da teoria de cordas bosônicas, dada por:

$$Q = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (c_m L_{-m}) + \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \frac{m-n}{2} (c_m c_n b_{-m-n}) - c_0.\tag{7.45}$$

A equação de movimento corresponde a:

$$Q|\Phi\rangle = 0.\tag{7.46}$$

Como era esperado. E as transformações de gauge são:

$$\delta|\Phi\rangle = Q|\chi\rangle.\tag{7.47}$$

onde $|\chi\rangle$ é um campo qualquer. Essa transformação de gauge é trivial, uma vez que o operador Q é nilpotente.

A partir dessas considerações já é possível compreender algumas propriedades dos campos de corda. Eles possuem número fantasma igual a 1 e são uma composição de modos de vibração da corda.

Para obter uma ação para o campo de cordas é preciso definir um conjunto de operações: $\int, *, Q$. Para efeitos de cálculo basta que essas operações satisfaçam os seguintes axiomas:

1. O operador Q é nilpotente: $QQ = 0$

2. Associa-se a integração ao processo inverso do operador Q e a partir disso, diz-se que não há termos de superfície, isto é: $\int QA = 0$.
3. $Q(A * B) = QA * B + (-1)^{g(A)} A * QB$. Onde $f(A)$ é o número fantasma do campo A . Para a teoria de campos de cordas, campos com número fantasma par correspondem são férmions, e campos com número fantasma ímpar são bósons. E $f(QA) = f(A) + 1$.
4. A associatividade do produto $*$: $(A * B) * C = A * (B * C)$.
5. $\int A * B = (-1)^{f(A)f(B)} \int B * A$.

É possível construir uma analogia entre a álgebra do campo de cordas abertas e o espaço de formas diferenciais. O campo de cordas corresponde a uma k -forma. O produto entre cordas corresponde ao produto exterior. O operador Q corresponde à derivada exterior. E a integral corresponde a um processo de integração de formas em uma variedade k -dimensional.

Pelo axioma (3) define-se números fantasmas para os campos:

$$f(\Phi) = 1, \quad f(Q) = 1, \quad f(*) = 0. \quad (7.48)$$

A partir desse axiomas é possível identificar a Ação (7.44) com:

$$S_0 = \langle \Phi | Q | \Phi \rangle = \int \Phi * Q\Phi. \quad (7.49)$$

E, define-se uma Ação para a Teoria de Campos de Cordas Abertas como:

$$S = \frac{1}{2} \int \Phi * Q\Phi + \frac{1}{3} \int \Phi * \Phi * \Phi. \quad (7.50)$$

A Ação para o Campo de Cordas é bosônica e possui número fantasma igual a 3.

A equação de movimento para Φ é:

$$\frac{\delta S}{\delta \Phi} = F \equiv Q\Phi + \Phi * \Phi = 0. \quad (7.51)$$

A Ação (7.50) é invariante pela seguinte transformação:

$$\delta\Phi = Q\Lambda_0 + \Phi * \Lambda_0 - \Lambda_0 * \Phi. \quad (7.52)$$

onde Λ_0 é um campo qualquer com número fantasma 0.

É possível observar que essa transformação de gauge é infinitamente redutível na camada de massa. Isto é, é possível encontrar transformações para campos Λ_n , com $n \leq 0$, que

deixam a ação invariante. As transformações são da forma:

$$\begin{aligned}
\delta\Lambda_0 &= Q\Lambda_{-1} + \Phi * \Lambda_{-1} - \Lambda_{-1} * \Phi, \\
\delta\Lambda_{-1} &= Q\Lambda_{-2} + \Phi * \Lambda_{-2} - \Lambda_{-2} * \Phi, \\
&\dots \\
\delta\Lambda_{-n} &= Q\Lambda_{-n-1} + \Phi * \Lambda_{-n-1} - \Lambda_{-n-1} * \Phi, \\
&\dots
\end{aligned} \tag{7.53}$$

Para observar essa redutibilidade basta considerar:

$$\Lambda_{-n+1} = Q\Lambda_{-n} + \Phi * \Lambda_{-n} - \Lambda_{-n} * \Phi. \tag{7.54}$$

E efetuar uma transformação $\delta\Lambda_{-n} = Q\Lambda_{-n-1} + \Phi * \Lambda_{-n-1} - \Lambda_{-n-1} * \Phi$:

$$\begin{aligned}
\delta\Lambda_{-n} &= Q\Lambda_{-n-1} + \Phi * \Lambda_{-n-1} - \Lambda_{-n-1} * \Phi \\
&= Q(\Phi * \Lambda_{-n} - \Lambda_{-n} * \Phi) + \Phi * (Q\Lambda_{-n} + \Phi * \Lambda_{-n} + \\
&\quad - \Lambda_{-n} * \Phi) - (Q\Lambda_{-n} + \Phi * \Lambda_{-n} - \Lambda_{-n} * \Phi) * \Phi \\
&= (Q\Phi + \Phi * \Phi) * \Lambda_{-n-1} - \Lambda_{-n-1} * (Q\Phi + \Phi * \Phi) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{7.55}$$

onde utilizou-se a equação de movimento (7.51) e os axiomas.

A álgebra de transformações é fechada. É possível observar que a transformação por $\Lambda_0^{(1)}$ e $\Lambda_0^{(2)}$ corresponde a uma transformação por $\Lambda_0^{(3)} = \Lambda_0^{(1)} * \Lambda_0^{(2)} - \Lambda_0^{(2)} * \Lambda_0^{(1)}$. A função de estrutura $C_{\alpha\beta}^\gamma$ é dada pelo elemento da matriz do operador $*$ entre três estados de cordas, chamado de vértice de três pontos.

Outra forma de estudar a redutibilidade é analisando os geradores de transformação de gauge.

$$R_s = \mathcal{D}_{(-s)}. \tag{7.56}$$

onde, define-se $\mathcal{D}_{(q)}$ como:

$$\mathcal{D}_{(q)}\Omega_q = Q\Omega_q + \Phi * \Omega_q - (-1)^q \Omega_q * \Phi. \tag{7.57}$$

Assim, a redutibilidade é entendida por:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta \Phi} V_s &= R_{s-1} R_s \\
&= \mathcal{D}_{(-s+1)} \mathcal{D}_{(-s)} \eta^{(s)} \\
&= F * \eta^{(s)} - \eta^{(s)} * F.
\end{aligned} \tag{7.58}$$

Como era esperado no caso de gauges redutíveis na camada de massa.

Para fixar as transformações de gauge é necessário então adicionar fantasmas, fantasmas

de fantasmas e assim em diante: $C_s, s = 0, \dots, \infty$.

Os campos são, portanto:

$$\Phi, C_0, C_1, \dots \quad (7.59)$$

Há dois números fantasmas a serem considerados para classificar os campos. Há o número fantasma de cordas, que representa as oscilações dos campos fantasmas, ele será representado pela letra f . E o número fantasma pelo formalismo BV, que será representado por \mathcal{F} . Os campos Φ tem número fantasma f igual a 1 como já foi visto, e por serem os campos físicos, tem o número fantasma \mathcal{F} igual a 0.

Os campos fantasmas C_s tem número fantasma \mathcal{F} igual a $s + 1$. Todavia, para eles satisfazerem a transformação de gauge (7.52) e (7.54), dada a definição do operador Q e o axioma (3), devem ter número fantasma f igual a $-s$. Pelo formalismo BV é preciso adicionar um anti-campo associado a cada campo existente. Logo, é preciso adicionar os campos:

$$\Phi^*, C_0^*, C_1^*, \dots \quad (7.60)$$

Como já foi visto, por definição

$$\mathcal{F}(\Phi^*) = -1, \quad \mathcal{F}(C_i^*) = -(s + 2). \quad (7.61)$$

Para adicionar esses campos à ação é preciso analisar um pouco mais as propriedades do produto $*$.

Considere que o campo $|\Phi\rangle$, (7.43) possa ser escrito como:

$$|\Phi\rangle = \sum_s |s\rangle \phi_s. \quad (7.62)$$

onde $|s\rangle$ é uma base de estados independentes dos modos de oscilação da corda. Assim, é possível associar os produtos:

$$\langle s|s'\rangle \leftrightarrow \int |s\rangle * |s'\rangle. \quad (7.63)$$

Tal que,

$$\int |s\rangle * |s'\rangle = 0 \quad (7.64)$$

A menos que $f(s) + f(s') = 0$. Com isso, é possível definir um vetor dual $|\bar{s}\rangle$ que satisfaça:

$$\int |\bar{s}\rangle * |s'\rangle = \delta_{ss'} \quad (7.65)$$

Para que a Ação Mestra do campos de cordas satisfaça a equação BV, é preciso que os anti-campos sejam escritos em termos desses campos duais. Suponha por exemplo o termo $\phi_i^* R_\alpha^i c^\alpha$, no caso de campos de cordas ele é escrito por:

$$\int \bar{\Phi}^* * (QC_0 + \Phi * C_0 - C_0 * \Phi). \quad (7.66)$$

onde

$$\bar{\Phi}^* \leftrightarrow \phi^* |\bar{s}\rangle \quad (7.67)$$

Os anticampos tem número fantasma f igual a:

$$f(\Phi^*) = 2, \quad f(C_i^*) = i + 3. \quad (7.68)$$

Dessa forma, a Ação Mestra continua tendo número fantasma igual a 3.

A partir dessas considerações é possível definir o seguinte campo:

$$\Psi = \dots + \bar{C}_1^* + \bar{C}_0^* + \bar{\Phi}^* + \Phi + C_0 + C_1 + \dots \quad (7.69)$$

onde o número f dos campos variam de $+\infty$ a $-\infty$.

É equivalente dizer que:

$$\begin{aligned} \Psi &= \sum_{f=2}^{\infty} \psi_f^* (-1)^{\psi_f^*} |\bar{s}\rangle + \sum_{f=-\infty}^1 \psi_f |s\rangle \\ &= \sum_f \Psi_f \end{aligned} \quad (7.70)$$

Tendo se considerado a equivalência:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \Phi; \\ \Psi_2 &= \Phi^*; \\ \Psi_i &= \bar{C}_{i-3}^*, \quad i \geq 3; \\ \Psi_i &= C_i, \quad i \leq 0. \end{aligned} \quad (7.71)$$

A Ação Mestra, (6.163), é escrita em termos do campo Ψ :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int \Psi * Q\Psi + \frac{1}{3} \int \Psi * \Psi * \Psi \\ &= \frac{1}{2} \int \Psi_{2-p} * Q\Psi_p + \frac{1}{3} \int \Psi_p * \Psi_q * \Psi_{3-p-q}. \end{aligned} \quad (7.72)$$

Essa Ação Mestra foi obtida independentemente e utilizando métodos diferentes por C. Thorn e M Bochicchio, [26, 27]. É uma conta extremamente trabalhosa por lidar com infinitos termos. Por simplicidade, nesta dissertação assume-se que esta é a Ação Mestra e procura-se demonstrar que ela satisfaz a condição de nilpotência:

$$(S, S) = 2 \frac{\delta S}{\delta \Theta^A} \frac{\delta S}{\delta \Theta_A^*} = 0. \quad (7.73)$$

É preciso então obter $\frac{\delta S}{\delta \Theta^A}$ e $\frac{\delta S}{\delta \Theta_A^*}$. Para isso utiliza-se as definições (7.70) e (7.72).

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \Theta^A} &= \frac{\delta S}{\delta \psi_f'} \quad f \leq 1 \\ &= (-1)^{\psi_f} \int |s\rangle * (Q\Psi + \Psi * \Psi). \end{aligned} \quad (7.74)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \Theta_A^*} &= \frac{\delta S}{\delta \psi_f'} \quad f \geq 2 \\ &= (-1)^{\psi_f^*} \int |\bar{s}\rangle * (Q\Psi + \Psi * \Psi). \end{aligned} \quad (7.75)$$

Assim,

$$\begin{aligned} (S, S) &= \int (Q\Psi + \Psi * \Psi) * (Q\Psi + \Psi * \Psi) \\ &= \int (Q\Psi * Q\Psi + 2Q\Psi * \Psi * \Psi + \Psi * \Psi * \Psi * \Psi) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (7.76)$$

onde foram utilizados os axiomas. O primeiro termo utiliza a integração por partes e o axioma (1). O segundo termo pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \int Q(\Psi * \Psi * \Psi) &= \int (Q\Psi * \Psi * \Psi - \Psi * Q\Psi * \Psi + \Psi * \Psi * Q\Psi) \\ &= 3 \int (Q\Psi * \Psi * \Psi) = 0. \end{aligned} \quad (7.77)$$

onde utilizou-se os axiomas (3), (5) e (2).

O terceiro termo é nulo pelo axioma (5). Logo, a ação (7.54) satisfaz a equação BV e corresponde à Ação Mestra do campo de cordas abertas.

Para fixar o gauge, uma vez que o gauge é infinitamente redutível, é preciso utilizar os infinitos campos mostrados na planilha triangular de campos, [19] sessão 7.5. É preciso introduzir os campos extras: C_s^k com $k = 1, 3, 5, \dots$ e $s \geq k$ e campos \mathcal{C}_s^k com $k = 0, 2, 4, \dots$ e $s \geq k$. Além dos campos B_s^k com $k = 1, 3, 5, \dots$ e $s \geq k$ e campos \mathcal{B}_s^k com $k = 0, 2, 4, \dots$ e $s \geq k$. Assumiu-se que $C_i = C_i^0$.

Os números fantasmas para esses campos são:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(C_s^k) &= \mathcal{F}(\mathcal{C}_s^{k*}) = s - k, \\ \mathcal{F}(\mathcal{C}_s^k) &= \mathcal{F}(\mathcal{C}_s^{k*}) = s - k, \\ \mathcal{F}(B_s^k) &= k - s, \\ \mathcal{F}(\mathcal{B}_s^k) &= s - k + 1, \end{aligned} \quad (7.78)$$

Para que obedecem as propriedades do parenteses BV. Ao mesmo tempo, o número fantasma f desses campos é $1 + k - s$, para satisfazer as propriedades das transformações de gauge e manterem a ação com número fantasma igual a 3.

A parte não-mínima da Ação Mestre, (6.180), é:

$$S_{nm} = \sum_{k=0,k}^{\infty} \sum_{\text{par } s=k}^{\infty} \int \bar{B}_s^k * C_s^k + \sum_{k=0,k}^{\infty} \sum_{\text{impar } s=k}^{\infty} \int \bar{C}_s^{k*} * B_s^k \quad (7.79)$$

O gauge mais conveniente para o campo de cordas abertas é o gauge de Siegel-Feynman, já explicado no capítulo 4 ao se falar da primeira quantização da corda aberta. Esse gauge corresponde a:

$$b_0\Phi = 0. \quad (7.80)$$

O férmion fixador de gauge para implementar esse gauge é:

$$\Psi_{gf} = \sum_{k=0,k}^{\infty} \sum_{\text{par } s=k}^{\infty} \int \bar{C}_s^k * c_0 b_0 C_{s-1}^{k-1} + \sum_{k=1,k}^{\infty} \sum_{\text{impar } s=k}^{\infty} \int \bar{C}_s^k * c_0 b_0 C_{s-1}^{k-1}. \quad (7.81)$$

Neste caso, chamou-se $C_{-1}^{-1} = \Phi$.

Usando a equação:

$$\phi_A^* = \frac{\delta \Psi_{gf}}{\delta \phi^A}. \quad (7.82)$$

Obtêm-se a seguinte equação para os anti-campos:

$$\begin{aligned} C_s^{k*} &= c_0 b_0 C_{s-1}^{k-1} + b_0 c_0 C_{s+1}^{k+1}, & k = 0, 2, 4, \dots \\ C_s^{k*} &= b_0 c_0 C_{s-1}^{k-1} + c_0 b_0 C_{s+1}^{k+1}, & k = 1, 3, 5, \dots \end{aligned} \quad (7.83)$$

Ao substituir (7.83) em (7.79) e encontrando as equações de movimento para B_s^k e C_s^k , obtêm-se que:

$$\begin{aligned} C_s^{k*} = 0 &\Rightarrow b_0 C_{s-1}^{k-1} = 0, & e & \quad c_0 C_{s+1}^{k+1} = 0, & k = 0, 2, 4, \dots, \\ C_s^{k*} = 0 &\Rightarrow c_0 C_{s-1}^{k-1} = 0, & e & \quad b_0 C_{s+1}^{k+1} = 0, & k = 1, 3, 5, \dots \end{aligned} \quad (7.84)$$

Para $k \geq 1$, C_s^k e C_s^k são iguais a zero. Isso se deve ao fato de que qualquer campo Φ , com $b_0\Phi = 0$ e $c_0\Phi = 0$ devem ser identicamente nulos. Isso é fácil ver uma vez que:

$$\begin{aligned} 0 &= c_0(b_0\Phi) \\ &= (1 - b_0c_0)\Phi \\ &= \Phi - b_0(c_0\Phi) = 0. \end{aligned} \quad (7.85)$$

Logo $\Phi = 0$.

Por outro lado, para C_{s-1} e C_s , apenas metade dessas condições são impostas:

$$\begin{aligned} b_0 C_{s-1} &= 0, s \geq 0, \\ c_0 C_{s-1} &= 0, s \geq 0. \end{aligned} \quad (7.86)$$

Logo, aplicando essas condições nas equações:

$$C_s^* \equiv C_s^{-1} = c_0 b_0 C_{s+1}^0 \equiv c_0 b_0 C_{s+1}. \quad (7.87)$$

quando $s \geq -1$. Encontra-se que $C_s^* = C_{s+1}$. E portanto, a Ação Mestra (7.72) com o gauge de Siegel-Feynman fixado, é a mesma que ao se fazer:

$$\Psi_{gf} = \cdots + \bar{C}_{s+1} + \cdots + \bar{C}_1 + \bar{C}_0 + \Phi + C_0 + \cdots + C_s + \cdots. \quad (7.88)$$

As condições (7.86) podem ser escritas então sucintamente como:

$$b_0 \Psi_{gf} = 0. \quad (7.89)$$

Como era esperado. Isso implica que Ψ_{gf} não possuem termos proporcionais a c_0 , e a cópia de fantasmas foi removida. Como a integral do campo de cordas é nula a menos que tenha c_0 presente, pela definição da normalização do produto, a ação do campo de cordas abertas com o gauge fixada pode ser escrita como:

$$S = \frac{1}{2} \int \Psi_{gf} * c_0 L_0 \Psi_{gf} + \frac{1}{3} \int \Psi_{gf} * \Psi_{gf} * \Psi_{gf}. \quad (7.90)$$

Para o caso das cordas abertas, entretanto, há uma anomalia quântica. Há uma dependência da Ação com a fixação do gauge. E como foi deduzido no capítulo 6, (6.176), isso implica que deve haver correções quânticas da forma:

$$\frac{1}{2}(W, W) = i\hbar \Delta W. \quad (7.91)$$

Neste caso, descobre-se então, que uma teoria quântica para o campo de cordas abertas necessita da inclusão de cordas fechadas. Essa propriedade é derivada do formalismo BV, e não poderia ser encontrada no formalismo BRST. Por esta razão, o formalismo BV é o método mais adequado para se quantizar a teoria de campos de cordas.

8 *Conclusão*

Nesta dissertação estudou-se sistemas vinculados, transformações de gauge e o formalismo BRST e BV. Observou-se que em sistemas vinculados existem transformações que deixam o sistema invariante. Essas transformações estão associadas às simetrias de gauge. Sistemas com simetrias de gauge exigem um formalismo mais complexo para quantizá-los uma vez que há graus de liberdade internos que não são fixados pelas equações de movimento. Esses graus de liberdade devem ser fixados a fim de encontrar a evolução do sistema. Para isso estudou-se mecanismos para impor os vínculos e fixar as transformações de gauge. Com este procedimento, notou-se a existência de campos fantasmas e uma simetria que envolve campos fantasmas e campos físicos. Essa é a simetria BRST. O gerador associado à simetria BRST fixa todos os graus de liberdade do sistema. A partir dele é possível encontrar todos os estados físicos do sistema e assim, quantizá-lo. Com esse estudo foi feita a quantização da partícula relativística e da corda bosônica. Para casos mais gerais, o operador BRST necessita de termos que não haviam sido considerados anteriormente. Por exemplo, no caso de campos com gauge redutível é preciso introduzir os chamados campos fantasmas de fantasmas. Uma forma de encontrar todos os termos do operador BRST é analisando sua propriedade de nilpotência e o espaço estendido com fantasmas. Com este mesmo método, redefinindo as operações e incluindo anti-campos foi possível obter o formalismo BV. Esse formalismo lida não com os vínculos do sistema, mas com as transformações de gauge. Assim, é capaz de lidar com os casos mais gerais possíveis, casos em que hajam estruturas que não podem ser encontradas apenas pelas relações dos vínculos. Um exemplo é o campo com álgebras abertas. O formalismo BV permite também o estudo da dependência do sistema com a fixação de gauge, podendo gerar anomalias quânticas.

A fim de estudar como o formalismo BV, ele foi aplicado a três exemplos: a partícula relativística, a corda bosônica e o campo de cordas bosônicas abertas. Nos dois primeiros casos, que são mais simples por possuírem uma álgebra de gauge fechada e irredutível, observou-se que de fato o formalismo BV se é análogo ao formalismo BRST. Todavia, no caso do campos de cordas bosônicas, que corresponde a um sistema com gauge infinitamente redutível e dependente da fixação do gauge, notou-se que o formalismo BV é mais adequado. A anomalia quântica mostra a necessidade da inclusão de cordas fechadas ao

campo.

O formalismo BV é complexo e possui uma série de propriedades muito particulares. Ele é amplamente usado na quantização de sistemas de gauge. Sua aplicação em Teoria de Campos de Supercordas pode ser visto no seguinte artigo, [30]. Atualmente, ele vem sendo utilizado também para o tratamento de Teorias de Campos Topológicos [31].

APÊNDICE A – Teoria de Campos Conformes

A Teoria de Cordas corresponde a uma teoria com uma ação dada pela área de uma superfície bidimensional. A Ação é invariante sob difeomorfismo nessa superfície e por transformações conformes. Fixando a métrica do campo auxiliar é possível fixar a invariância por difeomorfismo, entretanto, resta ainda a invariância por transformações conformes.

A melhor forma de entender as transformações conformes é compreendendo a geometria do plano complexo. Neste plano é possível trabalhar com as transformações de Möbius, que correspondem ao grupo $PSL(2, Z)$. Para uma teoria descrita no plano complexo os campos podem ser expandidos em série de Laurent. Essa expansão determina a propriedades dos campos. Ao se estudar cálculo com variáveis complexas, nota-se que são os pólos que determinam toda a dinâmica dos campos. Isso será aplicado na expansão de produtos de operadores (OPE).

Esse estudo seguirá pela análise da teoria de cordas bosônicas. Ver [24], capítulo 2.

A.1 A corda bosônica na métrica conforme

A Ação da corda bosônica com o background fixado na métrica conforme é:

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu. \quad (\text{A.1})$$

Cuja equação de movimento é:

$$\partial \bar{\partial} X^\mu = 0. \quad (\text{A.2})$$

Em uma Teoria Quântica de Campos essa equação é dada em termos de valor esperado:

$$\langle \partial \bar{\partial} X^\mu \rangle = 0. \quad (\text{A.3})$$

Essa equação é obtida a partir da integral de caminho:

$$\langle \mathcal{F}[X] \rangle = \int \mathcal{D}X e^{-S} \mathcal{F}[X]. \quad (\text{A.4})$$

A integral de caminho de uma derivada total deve ser igual a zero, e, portanto:

$$\begin{aligned}
0 &= \int \mathcal{D}X \frac{\delta}{\delta X^\mu} e^{-S} \\
&= - \int \mathcal{D}X e^{-S} \frac{\delta S}{\delta X^\mu} \\
&= - \left\langle \frac{\delta S}{\delta X^\mu} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\pi\alpha'} \langle \partial \bar{\partial} X^\mu \rangle.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

É interessante notar qual seria a equação obtida para o produto de dois campos. Para isso, considere o seguinte cálculo:

$$\begin{aligned}
0 &= \int \mathcal{D}X \frac{\delta}{\delta X^\mu} (e^{-S} X^\nu) \\
&= \int \mathcal{D}X e^{-S} \left(\eta^{\mu\nu} \delta^2(z - z'; \bar{z} - \bar{z}') + \frac{1}{\pi\alpha'} \partial \bar{\partial} X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(z\bar{z}') \right) \\
&= \eta^{\mu\nu} \langle \delta^2(z - z'; \bar{z} - \bar{z}') \rangle + 2T \partial_z \partial_{\bar{z}} \langle X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(z\bar{z}') \rangle.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Tal que,

$$-\eta^{\mu\nu} \langle \delta^2(z - z'; \bar{z} - \bar{z}') \rangle = 2T \partial_z \partial_{\bar{z}} \langle X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(z\bar{z}') \rangle. \tag{A.7}$$

Como essa equação é válida para valores esperados, é possível escrevê-la em termos dos operadores:

$$-\eta^{\mu\nu} \delta^2(z - z'; \bar{z} - \bar{z}') = 2T \partial_z \partial_{\bar{z}} X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(z\bar{z}'). \tag{A.8}$$

Isso está associado à expansão de produtos de operadores.

A.2 Expansão de produtos de operadores: OPE

Para o caso das cordas bosônicas tem-se que $\partial \bar{\partial} \ln|z^2| = 2\pi \delta^2(z, \bar{z})$. Assim, é possível definir um ordenamento normal que seja definido como:

$$: X^\mu(z, \bar{z}) : = X^\mu(z, \bar{z}) \tag{A.9}$$

$$: X^\mu(z_1, \bar{z}_1) X^\nu(z_2, \bar{z}_2) : = X^\mu(z_1, \bar{z}_1) X^\nu(z_2, \bar{z}_2) + \frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln|z_{12}^2|. \tag{A.10}$$

onde $z_{12} = z_1 - z_2$.

A razão de definir esse ordenamento normal é a propriedade:

$$\partial_1 \bar{\partial}_1 : X^\mu(z_1, \bar{z}_1) X^\nu(z_2, \bar{z}_2) := 0. \tag{A.11}$$

A partir dessa definição é interessante considerar o ordenamento normal do caso mais geral de um funcional do campo $\mathcal{F}(X^\mu)$:

$$: \mathcal{F} := \exp\left(-\frac{\alpha'}{4} \int d^2z_1 d^2z_2 \ln|z_{12}|^2 \frac{\delta}{\delta X^\mu(z_1, \bar{z}_1)} \frac{\delta}{\delta X^\mu(z_1, \bar{z}_1)}\right) \mathcal{F} \quad (\text{A.12})$$

É sempre possível escrever o produto entre operadores como soma de contrações pelo ordenamento normal. Esse procedimento é chamado de expansão de produto de operadores (ou OPE).

A identidade de Ward para campos conformes é dada por:

$$\text{Res}_{z \rightarrow z_0} j(z) \mathcal{A}(z_0, \bar{z}_0) + \overline{\text{Res}}_{\bar{z} \rightarrow \bar{z}_0} \bar{j}(\bar{z}) \mathcal{A}(z_0, \bar{z}_0) = \frac{1}{i\epsilon} \delta \mathcal{A}(z_0, \bar{z}_0). \quad (\text{A.13})$$

onde $j(z)$ e $\bar{j}(\bar{z})$ são as correntes conservadas.

Isto é, a variação do observável $\mathcal{A}(z_0, \bar{z}_0)$ é dada pelo resíduo da OPE com as correntes conservadas.

Para o caso da corda bosônica, as correntes conservadas são dadas por:

$$j(z) = i v(z) T(z), \quad (\text{A.14})$$

$$\bar{j}(\bar{z}) = i v^*(z) \bar{T}(\bar{z}). \quad (\text{A.15})$$

onde

$$T(z) \equiv T_{zz}(z), \quad \bar{T}(\bar{z}) \equiv T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z}). \quad (\text{A.16})$$

E,

$$T = -\frac{1}{\alpha} : \partial X^\mu \partial X_\mu :, \quad (\text{A.17})$$

$$\bar{T} = \frac{1}{\alpha} : \bar{\partial} X^\mu \bar{\partial} X_\mu :. \quad (\text{A.18})$$

Por exemplo, é possível encontrar a variação de X^μ com o tensor T .

Primeiramente calcula-se a OPE TX^μ :

$$\begin{aligned} T(z)X^\mu(0) &= -\frac{1}{\alpha'} : \partial X^\nu(z) \partial X_\nu(z) : X^\mu(0) \\ &= \frac{2}{\alpha'} \partial \left(\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln|z|^2 \right) \partial X_\nu(z) \\ &= \frac{1}{z} \partial X^\mu(z) \\ &= \frac{1}{z} \partial \left(X^\mu(0) + z \partial X^\mu(0) + \frac{1}{2} z^2 \partial^2 X^\mu(0) + \dots \right) \\ &= \frac{1}{z} \partial X^\mu(0) + \dots. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Logo:

$$\text{Res}_{z \rightarrow 0} T(z) X^\mu(0) = \partial X^\mu(0), \quad (\text{A.20})$$

$$(\text{A.21})$$

E a identidade de Ward fornece que os tensores energia-momento produzam a seguinte variação:

$$\delta X^\mu = -\epsilon v(z) \partial X^\mu - \epsilon v^*(z) \bar{\partial} X^\mu. \quad (\text{A.22})$$

Outra OPE interessante a ser estudada é aquela que corresponde à composição de dois tensores T . Essa composição está relacionada à álgebra das transformações geradas por T . Calcula-se então:

$$\begin{aligned} T(z)T(0) &= \frac{1}{\alpha'^2} : \partial X^\nu(z) \partial X_\nu(z) :: \partial' X^\mu(0) \partial' X_\mu(0) : \\ &= \frac{1}{\alpha'^2} \left(: \partial X^\nu(z) \partial X_\nu(z) \partial' X^\mu(0) \partial' X_\mu(0) : + \right. \\ &\quad \left. + 4 \frac{\alpha'}{2} \frac{1}{z^2} : \partial X^\mu(z) \partial X_\mu(0) : + 2 \eta^\mu{}_\mu \left(-\frac{\alpha'}{2} \frac{1}{z^2} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{\alpha'^2} \left(\frac{\eta^\mu{}_\nu \alpha'^2}{2z^4} - \frac{2\alpha'}{z^2} : \partial X^\mu(z) \partial' X_\mu(0) : \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\alpha'^2} : \partial X^\nu(z) \partial X_\nu(z) \partial' X^\mu(0) \partial' X_\mu(0) : \right) \\ &= \frac{1}{\alpha'^2} \left(\frac{\eta^\mu{}_\nu \alpha'^2}{2z^4} - \frac{2\alpha'}{z^2} : \partial X^\mu(0) \partial X_\mu(0) : - \frac{2\alpha'}{z} : \partial^2 X^\mu(0) \partial X_\mu(0) : \dots \right). \\ &= \frac{\eta^\mu{}_\nu}{2z^4} - \frac{2}{\alpha' z^2} T(0) + \frac{1}{z} \partial T(0) + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

A constante que multiplica o pólo de segunda ordem é chamada peso conforme. No caso, o peso conforme de t é 2. O peso conforme está relacionado à quantidade se transformar segundo:

$$A'(z', \bar{z}') = \zeta^{-h} \bar{\zeta}^{-\bar{h}} A(z, \bar{z}). \quad (\text{A.24})$$

onde h e \bar{h} são os pesos conformes observados na OPE com T e \bar{T} .

A.3 O campo bc

Considere a ação para dois campos fermiônicos b e c :

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2z b \bar{\partial} c. \quad (\text{A.25})$$

Sendo que:

$$[b, c] = 1. \quad (\text{A.26})$$

Essa é a ação para os fantasmas que fixam os vínculos da teoria de cordas.

A equação de movimento para os campos nessa ação são:

$$\bar{\partial}b(z) = \bar{\partial}c(z) = 0; \quad (\text{A.27})$$

$$\bar{\partial}b(z)c(0) = 2\pi\delta^2(z). \quad (\text{A.28})$$

A primeira equação fornece que ambos os campos são holomórficos. A segunda fornece a informação necessária para descrever o ordenamento normal:

$$:b(z_1)c(z_2): = b(z_1)c(z_2) - \frac{1}{z_{12}}. \quad (\text{A.29})$$

O tensor energia-momento é:

$$T(z) = :(\partial b)c: - 2\partial(:bc:). \quad (\text{A.30})$$

É interessante notar que outra quantidade também é conservada. Essa quantidade é chamada número fantasma e é dada por:

$$j = - :bc: . \quad (\text{A.31})$$

A.4 Expansão em modos

Uma vez se tratando de uma teoria conforme dada em um plano complexo, é possível considerar expansões em série de Laurent para os campos. Essas expansões são muito úteis para analisar os operadores e auxiliará na compreensão de operadores de vértice. Como se sabe, no cálculo com variáveis complexas é muito importante conhecer os pólos das funções. Assim, é muito útil poder expandir os campos livres em modos, como se fossem osciladores harmônicos. Esses modos são dados justamente pelas expansões em série de Laurent.

Na expansão em série de Laurent, é possível escrever os operadores como:

$$A(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{A_m}{z^{m+h}}. \quad (\text{A.32})$$

Ou em termos do conjugado \bar{z} , caso a função seja holomórfica ou anti-holomórfica. O peso h , está aparece justamente pela relação (A.24) das transformações conformes.

As cordas satisfazem a seguinte equação de movimento:

$$\partial\bar{\partial}X^\mu = 0. \quad (\text{A.33})$$

Isso fornece duas possíveis expansões:

$$\partial X^\mu(z) = -i \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_m^\mu}{z^{m+1}}, \quad (\text{A.34})$$

$$\bar{\partial} X^\mu(\bar{z}) = -i \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}_m^\mu}{\bar{z}^{m+1}}. \quad (\text{A.35})$$

Ou, utilizando integrais com variáveis complexas:

$$\alpha_m^\mu = \left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2} \oint \frac{dz}{2\pi} z^m \partial X^\mu(z), \quad (\text{A.36})$$

$$\bar{\alpha}_m^\mu = \left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2} \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi} z^m \bar{\partial} X^\mu(\bar{z}). \quad (\text{A.37})$$

A corrente conservada para translações espaciais, que está relacionada com o momento linear, é dada por: $i\partial_a X^\mu / \alpha'$.

Logo, o momento linear é:

$$p^\mu = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (dz j^\mu - d\bar{z} \bar{j}^\mu) = \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{1/2} \alpha_0^\mu = \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{1/2} \bar{\alpha}_0^\mu \quad (\text{A.38})$$

E portanto $\bar{\alpha}_0^\mu = \alpha_0^\mu$.

Fazendo uma integração, encontra-se:

$$X^\mu(z) = x^\mu - i \frac{\alpha'}{2} p^\mu \ln|z|^2 + i \left(\frac{2}{\alpha'}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\alpha_m^\mu}{z^m} + \frac{\bar{\alpha}_m^\mu}{\bar{z}^m}\right). \quad (\text{A.39})$$

A partir do comutador canônico $[\pi_\mu, X^\nu] = -i\delta_\mu^\nu$ ou da OPE de XX , é possível encontrar a seguinte relação para os modos da expansão:

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = [\bar{\alpha}_m^\mu, \bar{\alpha}_n^\nu] = m\delta_{m,-n}\eta^{\mu\nu}; \quad (\text{A.40})$$

$$[x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu}. \quad (\text{A.41})$$

E todos os outros comutadores são nulos.

É possível expandir o tensor energia-momento como:

$$T = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{L_m}{z^{m+2}}; \quad \bar{T} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\bar{L}_m}{\bar{z}^{m+2}}. \quad (\text{A.42})$$

Tal que:

$$L_m = \oint \frac{dz}{2\pi i z} z^{m+2} T; \quad \bar{L}_m = \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i \bar{z}} \bar{z}^{m+2} \bar{T}. \quad (\text{A.43})$$

Dessa forma, expandindo em modos T , e substituindo a expansão em modos de ∂X^μ , encontra-se que:

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n}^\mu \alpha_{\mu n}. \quad (\text{A.44})$$

para $m \neq 0$. E para, $m = 0$ tem-se:

$$L_0 = \frac{\alpha' p^2}{4} + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m}^{\mu} \alpha_{\mu m}. \quad (\text{A.45})$$

Essa mesma expansão pode ser feita para o campo bc .

Neste caso, dado o peso conforme de cada campo, tem-se que:

$$b(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{b_m}{z^{m+2}}, \quad (\text{A.46})$$

$$c(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{b_m}{z^{m-1}}. \quad (\text{A.47})$$

A OPE bc fornece naturalmente:

$$b_m, c_n = \delta_{m,-n}. \quad (\text{A.48})$$

Assim, é possível analisar as propriedades do operador número fantasma. A corrente conservada é $j = - : bc :$. Logo, a carga conservada é:

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz j \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (c_{-n} b_n - b_{-n} c_n) + c_0 b_0 - \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

E satisfaz:

$$[N, b_m] = -b_m; \quad [N, c_m] = c_m. \quad (\text{A.50})$$

Logo o campo b reduz em 1 o número fantasma e o campo c aumenta em 1.

A.5 Operadores de Vértice

Na Teoria Quântica de Campos, em um processo de segunda quantização, o conjunto de estados possíveis passa a estar relacionado com o conjunto de operadores locais. A Teoria de Campos Conformes associa o conjunto de operadores locais à aplicação destes à origem do plano complexo, $z = 0$. Neste caso, chama-os de *operadores de vértice*.

Considere o estado $|1\rangle$ como o operador identidade. Não havendo nenhum operador aplicado nele, qualquer contorno no qual se realize as integrais (A.36) com $m > 0$ será nulo, uma vez que não há pólos. Assim, esse operador identidade está identificado com o vácuo da teoria:

$$|1\rangle = |0;0\rangle. \quad (\text{A.51})$$

Por outro lado, atuando os operadores (A.36) com $m < 0$, as integrais de contorno passarão a envolver pólos e assim, será possível criar estados:

$$\alpha_m^\mu = \left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2} \oint \frac{dz}{2\pi} z^m \partial X^\mu(z) \rightarrow \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{1/2} \frac{i}{(m-1)!} \partial^m X^\mu. \quad (\text{A.52})$$

Isto é, para essa definição:

$$\alpha_m^\mu |1\rangle \cong \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{1/2} \frac{i}{(m-1)!} \partial^m X^\mu. \quad (\text{A.53})$$

Para $m < 0$.

Feita a expansão de Laurent para os operadores e tomando por base conhecimento de cálculo com variável complexa, é fácil expandir essa definição para ser aplicada a todos os outros operadores.

Referências

- [1] P. A. M. Dirac; *Lectures on Quantum Mechanics*, Dover Publications, 2001
- [2] L. D. Faddeev, V. N. Popov; *Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field*, Physics Letters 25B (1967) 29
- [3] C. Becchi, A. Rouet, R. Stora; *Renormalization of the Abelian Higgs-Kibble Model*, Communications in Mathematical Physics 42 (1975) 127;
- [4] L. V. Tyutin; *Gauge Invariance in Field Theory and Statistical Physics in Operator Formalism*, P.N.Lebedev Institute preprint 39 (1975), arXiv:hep-th/08120580;
- [5] E. S. Fradkin, G. A. Vilkovisky; *Quantization of Relativistic Systems with Constraints*, Physics Letters 55B (1975) 224;
- [6] E. S. Fradkin, G. A. Vilkovisky; *Unitarity of S-Matrix in Gravidynamics and General Covariance in Quantum Domain*, Lett Nuovo Cimento 13 (1975) 187;
- [7] I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky; *Relativistic S-Matrix of Dynamical Systems with Boson and Fermion Constraints*, Physics Letters 69B (1977) 309;
- [8] E. S. Fradkin, M. A. Vasiliev; *Hamiltonian Formalism, Quantization and S-Matrix for Supergravity*, Physics Letters 72B (1977) 70;
- [9] E. S. Fradkin, T. E. Fradkina; *Quantization of Relativistic Systems with Boson and Fermion First- and Second-Class Constraints*, Physics Letters 72B (1977) 343;
- [10] I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky; *Gauge Algebra and Quantization*, Physics Letters 102B (1981) 27;
- [11] I. A. Batalin, G. A. Vilkovsky; *Quantization of Gauge Theories with Linearly Dependent Generators*, Physical Review D 28 (1983) 2567;
- [12] I. A. Batalin, K. Bering; *Remarks on Existence of Proper Action for Reducible Gauge Theories* arxiv:hep-th/09110341v4 (2009);
- [13] M. Henneaux; *Lectures on the Antifield-BRST Formalism for Gauge Theories*, Nuclear Physics B 18A (1990) 47;
- [14] M. Henneaux; *Hamiltonian Form of The Path Integral for Theories with a Gauge Freedom*, Physics Reports 126 (1985), 1.;
- [15] G. Barnich, F. Brandt, M. Henneaux; *Local BRST Cohomology in Gauge Theories*, Physics Reports 338 (200) 439;
- [16] J. M. L. Fisch, M. Henneaux; *Homological Perturbation Theory and the Algebraic Structure of the Algebraic Structure of the Antifield-Antibracket Formalism for Gauge Theories*, Commun. Math. Physics 128 (1990) 627;
- [17] A. Fuster, M. Henneaux, A. Maas; *BRST-Antifield Quantization: a Short Review* arxiv:hep-th/0506098v2 (2005);

- [18] M. Henneaux, C. Teitelboim ; *Quantization of Gauge Systems*, Princeton, Univ. Press (1992);
- [19] J. Gomis, J. París, S. S. Samuel; *Antibracket, Antifields and Gauge-Theory Quantization* arxiv:hep-th/9412228v1 (1994);
- [20] M. E. Peskin, D. V. Schroeder; *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press (1995);
- [21] P. Ramond; *Field Theory: A Modern Primer*, second edition, Frontiers of Physics, Vol 74 (2001);
- [22] W. Siegel; *Fields*, arxiv:hep-th/9912205v3 (2005);
- [23] S. Weinberg; *The Quantum Theory of Fields, Vol.2: Modern Applications*, Cambridge University Press; 1 edition (1996)
- [24] J. G. Polchinski; *String Theory, Vol 1*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 2005;
- [25] W. Siegel; *Introduction to String Field Theory*, arxiv:hep-th/0107094v1 (2001);
- [26] C. B. Thorn; *Perturbation Theory for Quantized String Fields*, Nuclear Physics B287 (1987) 61;
- [27] M. Bochicchio; *Gauge Fixing for the Field Theory of the Bosonic String*, Physics Letters B 193 (1987) 31;
- [28] K. Ohmori; *A Review on Tachyon Condensation in Open String Field Theories*, arxiv:hep-th/0102085v47 (2001);
- [29] N. Berkovits; *Constrained BV Description of String Field Theory*, arxiv:hep-th/12011769v1 (2012);
- [30] M. Kroyter, Y. Okawa; M. Schnabl; S. Torii; B. Zwiebach; *Open superstring field theory I: gauge fixing, ghost structure, and propagator*, Journal of High Energy Physics 2012 (2012) article 30;
- [31] N. Ikeda; *Lectures on AKSZ Topological Field Theories for Physicists*, arXiv:hep-th/12043714v1 (2012).