



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Rodrigo Donizete Euzébio

*O Método do Averaging via Teoria do Grau de Brouwer e
Aplicações*

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
Rua Cristóvão Colombo, 2265, 15054-000
São José do Rio Preto - SP - Brasil
Telefone: (17) 3221-2444 - Fax: (17) 3221-2445

Rodrigo Donizete Euzébio

*O Método do Averaging via Teoria do Grau de
Brouwer e Aplicações*

Orientador:
Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
INSTITUTO DE BIOCÊNCIAS, LETRAS E CIÊNCIAS EXATAS
CAMPUS DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO

São José do Rio Preto

18 de fevereiro de 2011

Rodrigo Donizete Euzébio

O Método do Averaging via Teoria do Grau de Brouwer e Aplicações

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Sistemas Dinâmicos, junto ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi
Professor Adjunto
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Claudio Gomes Pessoa
Professor Assistente Doutor
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello
Professor Associado
UNIFEI - Itajubá

São José do Rio Preto, 18 de fevereiro de 2011.

A Ourivaldo, Maria e Carolina.

Dedico.

Gostaria de agradecer a todas aquelas pessoas que puderam, de alguma forma, contribuir para que este trabalho pudesse ser realizado. Em especial, gostaria de agradecer:

- Claudio Buzzi, pelo excelente trabalho de orientação, pela enorme receptividade e confiança, pelos conselhos sensatos e pelo fortalecimento do meu pensamento matemático.
- minha família, pelo apoio incondicional desde o dia que que iniciei meus estudos, me incentivando em todas as minhas decisões, mesmo as mais difíceis. Em especial, agradeço meus pais, pelo carinho, apoio e paciência nos meus vários momentos de mal humor.
- todos os meus amigos que estiveram envolvidos comigo durante este trabalho, em especial, aos colegas da pós graduação.
- Carolina Penhavel, amiga, namorada e companheira em todos os momentos deste trabalho e da vida, sem a qual tudo seria bem mais difícil.
- Marcelo Boareto e Rafael Viegas, pela amizade e pelas conversas, discussões e reflexões que me fizeram, desde os tempos da graduação, crescer pessoalmente e intelectualmente.
- Pedro Tobita, pela amizade e pelo companheirismo de todas as horas, e Renata Fonseca, pelas ótimas conversas no Departamento de física, além da grande amizade.
- todos os amigos do Coral Ibilce e à maestrina Zuleica Moreira, pelos ótimos momentos que tive no coral, e pelo apoio que sempre me deram nos estudos.
- professores do Departamento de Matemática do IBILCE/UNESP, por todo o conhecimento matemático. Em especial, agradeço os professores Claudio Buzzi, Antônio Andrade, João Carlos Costa e Rita de Cassia Lamas, pelo incentivo que sempre me deram.
- Prof.^a Regilene Delezari Oliveira e Alex Rezende, pelas proveitosas discussões no ICMC/USP.
- Prof.^o Luiz Fernando Mello da UNIFEI, pelas valiosas dicas que contribuíram para o avanço deste trabalho e para a geração de novas ideias.
- CNPq, pelo suporte financeiro.

“O livro da natureza não pode ser lido até aprendermos sua linguagem e nos tornarmos familiares com os símbolos no qual está escrito. E ele está escrito em linguagem matemática, e suas letras são triângulos, círculos e outras figuras geométricas, sem os quais é humanamente impossível compreender uma única palavra e há apenas um vagar perdido em um labirinto escuro.”

Galileo Galilei - Il Saggiatore - 1623

Resumo

Nosso objetivo neste trabalho é estudar o método do averaging através do grau topológico de Brouwer e utilizá-lo para investigar o número de ciclos limites que bifurcam de uma singularidade do tipo centro quando perturbamos um sistema de equações diferenciais através de um pequeno parâmetro ε . Começaremos apresentando o método do averaging que aparece na literatura clássica e algumas aplicações deste. Depois faremos uma breve discussão sobre o grau topológico de Brouwer, seguido do teorema do averaging que faz menção a este conceito. Finalmente, exibiremos algumas aplicações inéditas do método.

Palavras-chave: Averaging method, ciclos limites, sistemas dinâmicos.

Abstract

The aim of this work is to study the averaging method using the Brouwer topological degree in order to investigate the number of limit cycles that can bifurcate from a center type singularity when a differential system is perturbed by a small parameter ε . To this respect, initially, we present the “classical” averaging method and some of its applications. So we introduce the Brouwer topological degree, followed by the averaging theorem. Finally, we show some original applications of the averaging method.

Keywords: Averaging method, limit cycles, dynamical systems.

Sumário

Introdução	p. 9
1 O Método do Averaging Clássico	p. 13
1.1 Introdução	p. 13
1.2 Teoria da aproximação assintótica	p. 14
1.3 O teorema do averaging clássico	p. 17
1.4 Aplicações do averaging clássico	p. 24
1.5 Equação de Van der Pol	p. 26
1.6 Equação de Mathieus	p. 28
2 Averaging via grau de Brouwer	p. 30
2.1 Introdução: Ciclos limites e o 16 ^o problema de Hilbert	p. 30
2.2 O grau de Brouwer	p. 32
2.3 O Grau de Brouwer para funções contínuas	p. 34
2.4 O teorema do averaging via grau de Brouwer	p. 36
2.5 Um exemplo aplicado à teoria do controle	p. 41
3 Aplicações do método averaging	p. 55
3.1 Um método para sistemas planares	p. 55
3.2 A equação de Van der Pol	p. 60
3.3 Bifurcação de Hopf	p. 62
3.4 Ciclos Limites em Sistemas Hamiltonianos	p. 63
Referências Bibliográficas	p. 70

Introdução

Quando Sir Isaac Newton apresentou a lei da gravitação universal em seu memorável *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, publicada em 1687, a ideia aristotélica de que os planetas realizavam órbitas perfeitamente circulares já havia sido completamente abandonada. A Terra, que havia deixado o centro do universo cedendo lugar à configuração heliocentrista construída principalmente por Copérnico, Galileu, Brahe e seu discípulo, Kepler, não apenas girava ao redor do sol como também tinha sua trajetória influenciada por outros corpos, exercendo nestes, da mesma forma, também uma influência, como manda a terceira lei de Newton; no caso de dois corpos, como o sistema Terra-Sol, a força de atração entre dois astros já era perfeitamente entendida devido a lei da gravitação universal, sendo esta força proporcional ao produto das massas dos dois corpos e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre ambos, como sabemos hoje:

$$F = G \frac{M_1 M_2}{R^2},$$

onde G uma constante característica da força gravitacional.

Naturalmente, resolvido o problema dos dois corpos, o próximo passo seria descrever o movimento de três corpos interagindo entre si através da força gravitacional, problema este que perdura até hoje, devido ao fato de ser impossível resolver analiticamente as equações que regem o movimento destes corpos (como sabemos hoje, este trata-se de um sistema dinâmico caótico). Devido a complexidade dinâmica do problema, surgiu a necessidade de procurar por aproximações da solução, e inicialmente foram usadas para este propósito as já conhecidas séries de potências. Ao mesmo tempo, esta complexidade do problema dos três corpos faz surgir a questão da estabilidade do sistema solar e a preocupação acerca da órbita da Terra e possíveis obstáculos na sua trajetória.

Neste cenário, surge em 1773 com o matemático francês Pierre Simon Laplace o que talvez seja o primeiro resultado acerca da estabilidade do sistema solar antes de Lyapunov, que iria apresentar em sua tese de doutorado, pouco mais de um século depois, uma teoria mais concreta sobre o assunto. Laplace mostra que procurando-se uma aproximação de séries de potências para a órbita dos planetas, usando como parâmetro a excentricidade das elipses descritas por eles e considerando-se apenas o termo de *primeira ordem*, os eixos maiores das órbitas não possui termos seculares; estes são termos cujo valor cresce proporcionalmente com o tempo, de tal forma

que seus efeitos aumentam e poderiam, desta forma, levar a conclusão que os planetas talvez escapassem das suas trajetórias. Mais tarde, Poisson mostraria que considerando perturbações de segunda ordem com relação as massas, também não haviam termos seculares, sendo que o mesmo não ocorria quando usava-se uma aproximação de terceira ordem, como mostrou Haret em 1878.

Com os trabalhos de Laplace sobre estabilidade, além de Lagrange e Clairaut, começa a ser construído o método do averaging. Já estavam presentes nos trabalhos de Clairaut, por exemplo, um método que envolvia integração e também a preocupação com os termos seculares, ou seja, aqueles termos da série que crescem ilimitadamente, como é feito hoje (no método do averaging, é exigido que as funções sejam limitadas no tempo). Laplace, quando estuda o sistema Sol-Júpiter-Saturno traz vários elementos do método do averaging que conhecemos hoje, inclusive considerando perturbações de ordem mais alta, em analogia com o método do averaging de ordens superiores. Lagrange, que juntamente com Laplace trabalhou arduamente no problema de encontrar soluções aproximadas, começa a construir o que hoje conhecemos como forma padrão. Em 1778, ano da publicação de *Mécanique Analytique*, Lagrange diz (na tradução literal para o português) que

“Nos problemas de mecânica que podemos resolver apenas por aproximação, usualmente encontramos uma primeira solução considerando-se apenas as principais forças que atuam sobre o corpo.”

A afirmação de Lagrange sugere, como fazemos hoje no averaging de primeira ordem, considerar apenas a primeira aproximação da expansão em série de potências do parâmetro de perturbação. Na verdade, comparando o averaging atual com a técnica utilizada por Lagrange, este começava transformando o problema na forma

$$\dot{x} = \epsilon f(t, x) + \epsilon^2 \dots, \quad x(0) = x_0.$$

Lagrange então encontra o que hoje chamamos de série de Fourier da função f , escrevendo o problema da forma

$$\dot{x} = \epsilon f^0(x) + \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(x) \cos(nt) + b_n(x) \text{sen}(nt)] + \epsilon^2, \quad x(0) = x_0,$$

considerando finalmente o novo sistema

$$\dot{y} = \epsilon f^0(y), \quad y(0) = x_0.$$

O procedimento utilizado por Lagrange se assemelha bastante ao que fazemos hoje, e durante todo o século XIX e boa parte do século XX, essa abordagem foi utilizada e pôde ser encontrada em livros de mecânica celeste e dinâmica.

Neste período, contudo, o francês Henri Poincaré considera o problema de determinar órbitas periódicas através de expansões em série com respeito a um pequeno parâmetro, e prova que podemos descrever soluções periódicas por meio de uma série convergente em potências inteiras de um certo parâmetro ϵ , onde os coeficientes são funções limitadas no tempo. Essa ideia seria incorporada ao escopo do averaging e formalizada precisamente na década de trinta do século passado, onde o primeiro teorema do averaging foi apresentado, com a configuração que conhecemos hoje. Este teorema, que exibiria condições necessárias para a aproximação de soluções de equações diferenciais, bem como para a existência de ciclos limites, se tornaria ferramenta útil para abordar um dos problemas apresentados pelo matemático alemão David Hilbert no Congresso Internacional de Matemática de Paris, em 1900, conhecido simplesmente como *16º problema de Hilbert*, e que é um dos poucos problemas de Hilbert ainda em aberto; ele pergunta sobre o número de ciclos limites que um sistema possui e qual a configuração destes, tendo sido este problema tema de pesquisa de muitos matemáticos atualmente.

Durante o século XX grandes nomes como Bogoliubov, Mitropolsky, Krylov, Portrjagin, Fatou, Sanders, Verhulst, dentre outros, publicaram diversos trabalhos sobre o método do averaging, principalmente em problemas de mecânica e oscilações. Finalmente, em 2004 o matemático espanhol Jaume Llibre, juntamente com a romena Adriana Buica elaboraram um versão do teorema do averaging ainda inédita, que leva em conta aspectos topológicos do campo de vetores que define o problema. Mais especificamente, o teorema devido a Llibre e Buica utiliza o conceito do grau topológico de Brouwer, e com isso as hipóteses do teorema clássico do averaging são enfraquecidas, não sendo exigidas a condição de diferenciabilidade do sistema dinâmico. O resultado deste trabalho permite aplicar o método do averaging a uma classe de problemas muito maior, e desde então o método tem sido muito utilizado como ferramenta indispensável no problema de se encontrar ciclos limites, principalmente naqueles sistemas onde a diferenciabilidade não pode ser garantida (para mais detalhes históricos, consultar [6] e [11]).

Para ilustrar este desenvolvimento do método antes de ser levada em consideração a hipótese topológica do grau, o capítulo I deste trabalho apresenta o averaging clássico, fruto do trabalho dos grandes matemáticos citados acima. Para este fim, apresentamos um breve resumo de alguns elementos da teoria da aproximação assintótica, que nos permitem fazer uma refinada comparação entre funções. Utilizaremos estas ferramentas para obter uma estimativa sobre uma função que é uma aproximação para a solução de uma equação diferencial ordinária, obtida através do

método do averaging, e a real solução do problema. Terminamos com algumas aplicações neste sentido, apresentando alguns problemas concernentes à teoria das oscilações não lineares.

No segundo capítulo estudamos o método do averaging apresentado por Llibre e Buica a fim de estudar o número de ciclos limites que um dado sistema de equações diferenciais possui. Este problema é basicamente aquele citado anteriormente como o 16º problema de Hilbert. Comparamos este método com aquele outro ao qual chamamos de averaging clássico, e observamos que este último pode ser englobado pelo averaging via grau de Brouwer. Começamos o capítulo discutindo brevemente algumas questões pertinentes aos ciclos limites. Em seguida, vários resultados sobre a teoria do grau são apresentados, desde que eles sustentam as conclusões que podem ser retiradas do teorema apresentado aqui. Em particular, exibimos um importante resultado que permite calcular o grau de Brouwer de uma função que é apenas contínua, desde que a definição de grau apresentada no decorrer do capítulo faz menção a funções de classe C^1 . Finalmente, discutimos um artigo, também de autoria de Llibre e Buica, que apresenta um problema concernente à teoria do controle (ver [2]), e cujo campo de vetores que define o sistema de equações diferenciais não é continuamente diferenciável. Este é o típico problema em que o teorema do averaging, em sua “versão topológica”, se mostra uma ferramenta imprescindível.

Este trabalho termina com algumas aplicações do método do averaging visto no segundo capítulo. São exibidas duas aplicações concretas, primeiro nas equações de Lienard, onde aplicamos o método na equação de Van der Pol, e depois na bifurcação de Hopf. Em ambos os casos, mostramos que o método do averaging é capaz de detectar o ciclo limite que aparece em cada um deles. No entanto, o primeiro tópico discutido é um teorema apresentado no mesmo artigo onde o averaging via grau de Brouwer é exposto. Este teorema fornece uma expressão para se estudar sistemas hamiltonianos planares através do averaging. Além disso, ele inspira o último tópico deste trabalho, onde apresentamos um resultado que fornece uma cota inferior para o número de ciclos limites que bifurcam de uma singularidade tipo centro quando perturbamos o sistema com um polinômio de grau n . Com efeito, utilizando uma abordagem diferente daquela exibida na literatura (ver [3]), mostramos que o sistema possui pelo menos $[(n - 1)/2]$ ciclos limites.

Através dos três capítulos teóricos deste trabalho, alguns resultados clássicos da teoria de sistemas dinâmicos serão enunciados e demonstrados, sendo que outros podem ser apenas enunciados para que o trabalho não fuja aos objetivos principais, enquanto que alguns deles podem ser utilizados sem menção explícita. Por este motivo, listamos na bibliografia uma lista com vários textos da teoria onde tais resultados podem ser obtidos, esperando que, com isso, este trabalho esteja bem suportado.

Capítulo 1

O método averaging clássico e o problema de aproximação de soluções

1.1 Introdução

O método do averaging permite relacionar quantitativamente soluções de sistemas autônomos e não autônomos e encontrar uma cota inferior para o número de ciclos limites que bifurcam de um sistema quando perturbamos o mesmo com um pequeno parâmetro, que chamaremos aqui ε . Com efeito, enquanto que resolver sistemas autônomos é tanto mais simples que o contrário, da mesma forma, para o caso de encontrar ciclos limites, o método permite reduzir tal problema à tarefa de encontrar o número de zeros simples de uma função definida em um espaço de dimensão finita, o que em geral é uma tarefa mais simples.

Neste capítulo, abordaremos o que chamaremos aqui de método clássico, em uma referência ao método averaging que não utiliza o conceito do grau topológico de Brouwer. Neste caso, embora tal método possa ser utilizado tanto para aproximar soluções de sistemas não autônomos quanto para detectar ciclos limites, lidaremos apenas com a primeira abordagem do método, reservando a segunda para o próximo capítulo, quando introduziremos o método do averaging devido a Llibre e Buica, que assume a hipótese do grau do Brouwer. Em ambos os casos, assumiremos que o sistema dinâmico abordado é não autônomo e que está perturbado por algum parâmetro ε . Matematicamente, trabalharemos com sistemas da forma

$$\dot{x} = f(t, x, \varepsilon) \tag{1.1}$$

onde,

- $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ é a variável espacial e D é um conjunto aberto e limitado.
- t representa a variável que chamaremos aqui de tempo (ou tempo rápido), com $t > 0$ ou

$t > t_0$, sendo t_0 uma constante.

- ε é um pequeno parâmetro representando a grandeza das perturbações, com $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ e ε_0 constante.
- f é uma função lipschitziana na variável espacial.

Para aplicar o método do averaging, será necessário que a função f esteja na *forma padrão*, ou seja, que possa ser escrita como

$$f(t, x, \varepsilon) = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon).$$

Estudaremos também uma forma de aplicar o método do averaging para aqueles sistemas cuja função f não esteja na forma padrão, mas seja dada por

$$f(t, x, \varepsilon) = F(t, x) + \varepsilon R(t, x, \varepsilon). \quad (1.2)$$

Neste caso, associaremos ao sistema perturbado $\dot{x} = F(t, x) + \varepsilon R(t, x, \varepsilon)$, o problema sem perturbação

$$\dot{y} = F(t, y),$$

desde que, resolvendo esse sistema (se for possível fazê-lo), podemos transformar o sistema (1.2) em um sistema que esteja na forma padrão para aplicar o averaging.

Naturalmente, durante o processo de aproximação de soluções, seja comparando sistemas perturbados e não perturbados, seja comparando sistemas autônomos e não autônomos, o intervalo de definição das soluções aproximadas pode ser relativamente pequeno, de tal forma que tais aproximações podem se tornar ineficazes. A fim de obter estimativas para as soluções aproximadas que obteremos durante este capítulo e seus respectivos intervalos de definição, introduziremos na próxima seção algumas ferramentas que serão úteis nesta tarefa, a saber, os símbolos de Landau e a noção de tempo-escala.

1.2 Teoria da aproximação assintótica: ferramentas básicas

Antes de definir os símbolos de Landau, vamos apresentar o conceito de função ordem

Definição 1.2.1. (Função Ordem) Uma função $\delta(\varepsilon)$ é chamada função ordem se $\delta(\varepsilon)$ é contínua e positiva (ou negativa) e $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon)$ existe.

Em geral, nossas funções ordem serão do tipo $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^n$, com $n \in \mathbb{N}$, e representarão as

perturbações.

Definição 1.2.2. (Símbolos de Landau) Se $\delta_1(\varepsilon)$ e $\delta_2(\varepsilon)$ são funções ordem, então

- $\delta_1(\varepsilon) = \mathcal{O}(\delta_2(\varepsilon))$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ se $\exists k$ tal que $|\delta_1(\varepsilon)| \leq k |\delta_2(\varepsilon)|$.
- $\delta_1(\varepsilon) = o(\delta_2(\varepsilon))$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ se $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_1(\varepsilon)}{\delta_2(\varepsilon)} = 0$.
- $\delta_1(\varepsilon) = \mathcal{O}_S(\delta_2(\varepsilon))$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ se $\delta_1(\varepsilon) = \mathcal{O}(\delta_2(\varepsilon))$ e $\delta_1(\varepsilon) \neq o(\delta_2(\varepsilon))$.

Note que $|\delta_1(\varepsilon)| \leq k |\delta_2(\varepsilon)| \implies \left| \frac{\delta_1(\varepsilon)}{\delta_2(\varepsilon)} \right| \leq k$, ou seja, $\frac{\delta_1(\varepsilon)}{\delta_2(\varepsilon)}$ é limitada. Ainda, temos

$$\delta_1(\varepsilon) = o(\delta_2(\varepsilon)) \implies \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_1(\varepsilon)}{\delta_2(\varepsilon)} = 0 \implies \left| \frac{\delta_1(\varepsilon)}{\delta_2(\varepsilon)} \right| \leq k, \varepsilon \rightarrow 0 \implies \delta_1(\varepsilon) = \mathcal{O}(\delta_2(\varepsilon)).$$

Exemplo 1.2.3. Quando $\varepsilon \rightarrow 0$, tem-se $\varepsilon^n = o(\varepsilon^m)$, se $n > m$, pois

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^n}{\varepsilon^m} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{n-m} = 0,$$

pois $n - m > 0$.

Exemplo 1.2.4. Quando $\varepsilon \rightarrow 0$, tem-se $\varepsilon \operatorname{sen}(1/\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$, pois

$$|\varepsilon \operatorname{sen}(1/\varepsilon)| \leq |\varepsilon| |\operatorname{sen}(1/\varepsilon)| \leq |\varepsilon| \cdot 1 = |\varepsilon|.$$

Logo, $|\varepsilon \operatorname{sen}(1/\varepsilon)| \leq 1 \cdot |\varepsilon| \implies \varepsilon \operatorname{sen}(1/\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$.

Exemplo 1.2.5. Quando $\varepsilon \rightarrow 0$, tem-se $\varepsilon \operatorname{sen}(1/\varepsilon) = \mathcal{O}_S(\varepsilon)$, pois, como vimos, $\varepsilon \operatorname{sen}(1/\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$, mas

$$\frac{\varepsilon \operatorname{sen}(1/\varepsilon)}{\varepsilon} = \operatorname{sen}(1/\varepsilon)$$

não possui limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Portanto, $\varepsilon \operatorname{sen}(1/\varepsilon) = \mathcal{O}_S(\varepsilon)$.

Podemos também usar os símbolos de Landau para comparar funções que não são necessariamente funções ordem. Na verdade, o intuito é usar tais símbolos para obter estimativas entre soluções aproximadas de sistemas de equações diferenciais, que em geral não são funções ordem. Assim, dada uma função Φ_ε definida por

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon : I_\varepsilon &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \Phi_\varepsilon(t) = \Phi(\varepsilon, t) \end{aligned}$$

onde $\|\Phi_\varepsilon\| = \sup\{\|\Phi_\varepsilon(t)\|; t \in I_\varepsilon\}$, utilizamos os símbolos de Landau da seguinte forma:

1. $\Phi_\varepsilon = \mathcal{O}(\delta(\varepsilon))$ em I_ε se $\|\Phi_\varepsilon\| = \mathcal{O}(\delta(\varepsilon))$.
2. $\Phi_\varepsilon = o(\delta(\varepsilon))$ em I_ε se $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|\Phi_\varepsilon\|}{\delta(\varepsilon)} = 0$.
3. $\Phi_\varepsilon = \mathcal{O}_S(\delta(\varepsilon))$ em I_ε se $\Phi_\varepsilon = \mathcal{O}(\delta(\varepsilon))$ e $\Phi_\varepsilon \neq o(\delta(\varepsilon))$.

Observamos na definição de Φ_ε que o tempo t varia no intervalo I_ε . Contudo, tal intervalo pode depender do parâmetro ε , de tal forma que o intervalo de definição da função Φ_ε seja diferente para cada valor do parâmetro da perturbação que introduzimos no sistema, ou seja,

$$I_\varepsilon = \left[0, \frac{L}{\delta(\varepsilon)}\right],$$

onde L é uma constante independente de ε . Neste caso, precisamos fazer uma reescala no tempo, de tal forma que o intervalo de definição da função seja independente de ε . Com efeito,

$$0 \leq t \leq \frac{L}{\delta(\varepsilon)} \implies 0 \leq t \cdot \delta(\varepsilon) \leq L \implies 0 \leq \tau \leq L,$$

ou seja, $\tau = t \cdot \delta(\varepsilon)$. A variável τ é chamada de variável tempo-escala (ou tempo lento), e tem-se $\tau \in I = [0, L]$. Desta forma, estamos prontos para dar a definição de aproximação assintótica de uma função, como segue:

Definição 1.2.6. Dizemos que $\psi_\varepsilon(t)$ é uma aproximação assintótica de $\phi_\varepsilon(t)$

- (i) no intervalo I_ε , se $\psi_\varepsilon(t) - \phi_\varepsilon(t) = o(1)$ uniformemente para $t \in I_\varepsilon$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$.
- (ii) no tempo-escala $1/\delta(\varepsilon)$, se $\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon = o(1)$ no tempo-escala $1/\delta(\varepsilon)$.

Notemos que a afirmação $\psi_\varepsilon(t) - \phi_\varepsilon(t) = o(1)$ significa que, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, temos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon}{1} = 0 \implies \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_\varepsilon - \phi_\varepsilon = 0 \implies \psi_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \phi_\varepsilon,$$

ou seja, quando o parâmetro $\varepsilon \rightarrow 0$, a função ψ_ε é uma aproximação cada vez melhor da função ϕ_ε . Nos capítulos que seguem discutiremos melhor este conceito de aproximação assintótica, quando as funções ψ_ε e ϕ_ε representarão soluções de problemas com e sem perturbações. Por enquanto, desde que já possuímos ferramentas suficientes, vamos apresentar o teorema do averaging clássico e sua demonstração.

1.3 O teorema do averaging clássico

Apresentaremos nesta seção o teorema do averaging de primeira ordem, que não considera aspectos topológicos do campo vetorial. Como dito anteriormente, lidaremos com sistema (ou com problemas de valor inicial) que estão na forma padrão, ou seja, que podem ser escritos na forma

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Além disso, se supormos que F é T -periódica na variável t , podemos considerar o sistema médio dado por

$$\begin{cases} \dot{y} = \varepsilon F^1(y) \\ y(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.4)$$

onde

$$F^1(y) = \frac{1}{T} \int_0^T F(t, y) dt.$$

Note que o sistema (1.4) é autônomo, o que simplifica bastante a procura por soluções. Assim, agora vamos relacionar as soluções de (1.3) com as soluções de seu sistema médio (ou sistema promediado) (1.4), utilizando as notações introduzidas no capítulo anterior. Antes, contudo, vamos enunciar o Lema de Gronwall, que será útil na demonstração.

Lema 1.3.1. *(de Gronwall) Suponhamos que para $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ temos*

$$\phi(t) \leq \delta_2(t - t_0) + \delta_1 \int_{t_0}^t \phi(s) ds + \delta_3,$$

com $\phi(t)$ contínua e positiva para todo $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ e constantes $\delta_1 > 0$, $\delta_2 \geq 0$ e $\delta_3 \geq 0$. Então, para todo $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, temos

$$\phi(t) \leq \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3 \right) e^{\delta_1(t-t_0)} - \frac{\delta_2}{\delta_1}.$$

Dem.: Se escrevemos a desigualdade da hipótese do lema em termos da função

$$\Psi(t) = \phi(t) + (\delta_2/\delta_1),$$

então temos

$$\Psi(t) \leq \delta_2(t - t_0) + \delta_1 \int_{t_0}^t (\phi(s) + (\delta_2/\delta_1)) ds + \frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3 = \delta_1 \int_{t_0}^t \Psi(s) ds + \frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3.$$

Excluindo-se o caso onde temos $\delta_2 = \delta_3 = 0$, que corresponde à $\Psi(t) = 0$ (pois, neste caso o Lema diz que $\psi(t) \leq 0$, e por hipótese sabemos que $\Psi(t) \geq 0$), e observando que o lado direito

da última desigualdade é positivo, segue que

$$\frac{\delta_1 \Psi(t)}{\delta_1 \int_{t_0}^t \Psi(s) ds + \frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3} \leq \delta_1.$$

Escrevendo o lado esquerdo da última desigualdade como uma derivada e integrando ambos os lados com relação à s , de t_0 até t ,

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \ln \left(\delta_1 \int_{t_0}^t \Psi(s) ds + \frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3 \right) ds \leq \delta_1 (t - t_0).$$

Agora, pelo segundo teorema fundamental do cálculo, temos

$$\ln \left(\delta_1 \int_{t_0}^t \Psi(s) ds + \frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3 \right) - \ln \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3 \right) \leq \delta_1 (t - t_0),$$

donde

$$\delta_1 \int_{t_0}^t \Psi(s) ds + \frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3 \leq \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3 \right) e^{\delta_1 (t - t_0)}.$$

Finalmente,

$$\Psi(t) \leq \delta_1 \int_{t_0}^t \Psi(s) ds + \frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3 \implies \Psi(t) \leq \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3 \right) e^{\delta_1 (t - t_0)}.$$

Desta forma, escrevendo em termos da função Ψ , segue o resultado:

$$\phi(t) \leq \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3 \right) e^{\delta_1 (t - t_0)} - \frac{\delta_2}{\delta_1}.$$

■

Munidos do Lema de Gronwall, vamos lidar agora com o Teorema do Averaging.

Teorema 1.3.2. (*Averaging Clássico*) *Considere os problemas de valor inicial (1.3) e (1.4) com $x, y, x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Suponha que*

1. F, R e ∇f estão definidas, são contínuas e limitadas por uma constante M independente de ε em $[t_0, \infty] \times D$;
2. R é lipschitziana em $x \in D$;
3. F é T -periódica em T , com T constante independente de ε ;
4. $y(t)$ pertence (independentemente de ε) a um subconjunto interior de D no tempo-escala $1/\varepsilon$.

Então,

$$x(t) - y(t) = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$ no tempo escala $1/\varepsilon$.

Antes de demonstrar o teorema, observemos que as condições 1 e 2 garantem a existência e unicidade dos problemas de valor inicial (1.3) e (1.4), e desta forma faz sentido falar nas respectivas soluções destes, $x(t)$ e $y(t)$. A condição 3, por sua vez, nos diz que não é necessário considerar o tempo variando no intervalo $[t_0, \infty]$, desde que F é T -periódica, e desta forma trabalharemos apenas com valores de t em $[t_0, t_0 + T]$. Finalmente, a última condição do teorema do averaging diz que temos existência de soluções no tempo-escala $1/\varepsilon$ na variável tempo t , ou seja, no tempo-escala 1 na variável tempo-escala τ ($\tau = \varepsilon t$). Feitas estas importante observações, damos início à demonstração do teorema.

Dem.: Primeiramente, definamos a função μ^1 , que é dada por

$$\mu^1(t, y) = \int_{t_0}^{t_0+T} (F(t, y) - F^1(y)) dt.$$

Afirmamos agora que $\|\mu^1(t, y)\| \leq 2MT$, onde M e T são dados no teorema. De fato,

$$\begin{aligned} \|\mu^1(t, y)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t_0+T} (F(t, y) - F^1(y)) dt \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^{t_0+T} \|F(t, y)\| dt + \int_{t_0}^{t_0+T} \|F^1(y)\| dt \\ &\leq \int_{t_0}^{t_0+T} M dt + \int_{t_0}^{t_0+T} \|F^1(y)\| dt \end{aligned}$$

Contudo, temos

$$\|F^1(y)\| \leq \frac{1}{T} \int_0^T \|F(t, y)\| dt \leq \frac{1}{T} \int_0^T M dt = \frac{M}{T} \int_0^T dt = M.$$

Assim vem que

$$\|\mu^1(t, y)\| \leq 2 \int_{t_0}^{t_0+T} M dt = 2M \int_{t_0}^{t_0+T} dt = 2MT.$$

Agora vamos encontrar uma estimativa para a diferença entre as soluções de (1.3) e (1.4). Com efeito, definimos $z(t) = y(t) - \varepsilon \mu^1(t, y(t))$. Com isso, temos

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &\leq \|x(t) - z(t)\| + \|z(t) - y(t)\| \\ &\leq \|x(t) - z(t)\| + \varepsilon \|\mu^1(t, y)\| \\ &\leq \|x(t) - z(t)\| + 2\varepsilon MT. \end{aligned}$$

No entanto, desde que temos

$$\int_{t_0}^t \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} \right) dt = x(t) - x(t_0) - z(t) + z(t_0) = x(t) - z(t),$$

pois $z(t_0) = y(t_0) + \varepsilon \mu^1(t_0, y(t_0)) = y(t_0) = x_0 = x(t_0)$, concluimos que

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} &= \varepsilon F(t, x(t)) + \varepsilon^2 R(t, x(t), \varepsilon) - \frac{dy}{dt}(t) + \\ &\quad - \varepsilon \left(\frac{\partial \mu^1}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial \mu^1}{\partial y}(t, y(t)) \frac{dy}{dt} \right) \\ &= \varepsilon F(t, x(t)) - \varepsilon F(t, z(t)) + \varepsilon^2 R(t, x(t), \varepsilon) - \frac{dy}{dt}(t) + \\ &\quad - \varepsilon^2 F^1(y(t)) \frac{\partial \mu^1}{\partial y}(t, y(t)) + \varepsilon F(t, z(t)) - \varepsilon F(t, y(t)) + \\ &\quad - \varepsilon F^1(y(t)). \end{aligned}$$

Tomamos agora

$$R = \varepsilon^2 R(t, x(t), \varepsilon) - \varepsilon^2 F^1(y(t)) \frac{\partial \mu^1}{\partial y}(t, y(t)) + \varepsilon F(t, z(t)) - \varepsilon F(t, y(t))$$

e afirmamos que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\|R\| \leq k\varepsilon^2$.

De fato, dada a expressão de R , segue que

$$\begin{aligned} \|R\| &\leq \|\varepsilon^2 R(t, x(t), \varepsilon)\| + \|\varepsilon^2 F^1(y(t)) \frac{\partial \mu^1}{\partial y}(t, y(t))\| \\ &\quad + \|\varepsilon F(t, z(t)) - \varepsilon F(t, y(t))\| \\ &\leq \|\varepsilon^2 M\| + \|\varepsilon^2 M \cdot 2MT\| + L\|\varepsilon[z(t) - y(t)]\| \\ &= \|\varepsilon^2 M\| + \|\varepsilon^2 M \cdot 2MT\| + L\|\varepsilon^2 \cdot 2MT\| \\ &= \varepsilon^2(M + 2M^2T + 2LMT) \\ &= \varepsilon^2 k, \end{aligned}$$

onde $k = M + 2M^2T + 2LMT$. Portanto, está demonstrada a afirmação.

Finalmente, temos

$$\begin{aligned}
\|x(t) - z(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \left\| \frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} \right\| dt \\
&\leq \int_{t_0}^t \|\varepsilon F(t, x(t)) - \varepsilon F(t, z(t)) + R\| dt \\
&\leq \int_{t_0}^t \|\varepsilon F(t, x(t)) - \varepsilon F(t, z(t))\| dt + \int_{t_0}^t \|R\| dt \\
&\leq \varepsilon L \int_{t_0}^t \|x(t) - z(t)\| dt + \int_{t_0}^t \varepsilon^2 k dt \\
&\leq \varepsilon L \int_{t_0}^t \|x(t) - z(t)\| dt + k\varepsilon^2(t - t_0).
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema de Gronwall, vem que

$$\|x(t) - z(t)\| \leq \varepsilon \frac{k}{L} e^{\varepsilon L(t-t_0)} - \varepsilon \frac{k}{L}.$$

Portanto, como $\|x(t) - y(t)\| - 2\varepsilon MT \leq \|x(t) - z(t)\|$, temos

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \varepsilon \left(\frac{k}{L} e^{\varepsilon L(t-t_0)} - \frac{k}{L} + 2MT \right).$$

Desta forma, se $\varepsilon L(t - t_0)$ é limitada por uma constante C_0 independente de ε , ou seja, $\varepsilon L(t - t_0) \leq C_0$, temos

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \varepsilon C,$$

onde $C = \frac{k}{L} e^{C_0} - \frac{k}{L} + 2MT$.

Consequentemente temos $x(t) - y(t) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ no tempo escala $1/\varepsilon$. ■

Como podemos ver no Teorema do Averaging, é preciso que o problema de valor inicial (1.3) esteja na forma padrão. Contudo, como comentamos no início deste capítulo, alguns problema podem estar na forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \varepsilon) = F(t, x) + \varepsilon R(t, x, \varepsilon) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.5)$$

não sendo possíveis para estes aplicar o método.

Ora, neste caso podemos associar ao sistema acima o problema sem perturbação, ou seja,

tomando-se $\varepsilon = 0$, da forma

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y, 0) = F(t, y) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.6)$$

desde que suponhamos que o limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(t, x, \varepsilon) = f(t, x, 0)$$

existe continuamente em $D \times I$, com $I \subset [0, \infty]$. Se somos capazes, pois, de resolver o problema sem perturbação, mostraremos que é possível transformar o problema perturbado na forma padrão para aplicar o averaging. Antes de desenvolver esta ideia, vamos apresentar um resultado que fornece uma relação entre as soluções do problema perturbado e não perturbado.

Proposição 1.3.3. *Considere os problemas de valor inicial*

$$\dot{x} = F(t, x) + \delta(\varepsilon)R(t, x, \varepsilon); \quad x(t_0) = x_0$$

e

$$\dot{y} = F(t, y); \quad y(t_0) = x_0$$

onde F e R são funções contínuas e lipschitzianas com respeito à variável espacial $x \in D \in \mathbb{R}^n$, com $\delta(\varepsilon)$ uma função ordem. Se $R(t, x, \varepsilon) = \mathcal{O}(1)$ no tempo-escala 1, então

$$x(t) - y(t) = \mathcal{O}(\delta(\varepsilon))$$

no tempo-escala 1.

Dem.: Escrevendo os problemas de valores iniciais na forma integral, temos

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t (F(s, x(s)) + \delta(\varepsilon)R(s, x(s), \varepsilon)) ds. \\ y(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t F(s, y(s)) ds. \end{aligned}$$

Desta forma, a norma da diferença entre as soluções é dada por

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \int_{t_0}^t \|F(s, x(s)) - F(s, y(s))\| ds + \int_{t_0}^t \|\delta(\varepsilon)R(s, x(s), \varepsilon)\| ds.$$

Lembremos, no entanto, que $R(t, x, \varepsilon) = \mathcal{O}(1)$, donde $\exists M$ tal que $\|R(t, x, \varepsilon)\| \leq M$. Além disso, como F é lipschitziana com respeito à x (com constante de Lipschitz L), vem que

$$\|x(t) - y(t)\| \leq L \int_{t_0}^t \|x(s) - y(s)\| ds + \delta(\varepsilon)M(t - t_0).$$

Aplicando o Lema de Gronwall com $\delta_1(\varepsilon) = L$, $\delta_2(\varepsilon) = M\delta_3(\varepsilon)$ e $\delta_3(\varepsilon) = 0$, temos

$$0 \leq \|x(t) - y(t)\| \leq \delta(\varepsilon) \left(\frac{M}{L} (e^{L(t-t_0)} - 1) \right).$$

Se $L(t - t_0)$ é limitado por uma constante C que não depende de ε , então

$$\|x(t) - y(t)\| \leq k\delta(\varepsilon),$$

onde $k = (M/L)(e^C - 1)$.

Portanto, $x(t) - y(t) = \mathcal{O}(\delta(\varepsilon))$ no tempo-escala 1 (pois, a constante L não depende de ε). ■

Vamos agora transformar o problema (1.5) na forma padrão. Para isto, note que, se (1.6) puder ser resolvido explicitamente, então esta solução dependerá do valor inicial x_0 . Desta forma, para cada $z \in \mathbb{R}^n$, a solução de (1.6) depende do tempo e da condição inicial z , ou seja,

$$y = y(t, z), \quad y(t_0, z) = z.$$

Agora, considerando $x = y(t, z)$, a fim de que y satisfaça (1.5), devemos ter

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = f(t, y) + \varepsilon g(t, x, \varepsilon) \implies \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \varepsilon g(t, x, \varepsilon).$$

Portanto,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \varepsilon \left(\frac{\partial y}{\partial z}(t, z) \right)^{-1} \cdot R(t, y(t, z), \varepsilon). \quad (1.7)$$

É claro que o sistema acima depende da expressão de R para estar na forma padrão, mas em muitos casos isto acontece, como veremos na próxima seção, quando apresentaremos algumas aplicações do averaging ao problema das oscilações não lineares. Ainda, é possível obter uma expressão para a solução de (1.5) resolvendo (1.6) e, logo após, encontrando uma expressão para $x = y(t, z)$.

Consideramos agora dois casos particulares que aparecem com bastante frequência, que são aqueles casos onde a função F pode ser colocada nas formas

$$(i) F(t, x) = A(t)x.$$

$$(ii) F(t, x) = Ax.$$

No caso (i), o problema de valor inicial (1.6) é dito ser quasilinear e pode ser escrito como

$$\dot{x} = A(t)x + \varepsilon R(t, x, \varepsilon); \quad x(t_0) = x_0.$$

onde as entradas de $A(t)$ são contínuas. O problema sem perturbação neste caso é

$$\dot{x} = A(t)x.$$

Este último possui n soluções linearmente independentes, e assim podemos construir a matriz fundamental $\phi(t)$. Da teoria das equações diferenciais, sabemos que $\exists!$ $\Phi(t)$ matriz tal que $\Phi(t_0) = I$. Vamos considerar esta matriz e o método da variação dos parâmetros baseados nela. Com efeito, se $x = y(t, z) = \Phi(t)z$ e $Y(t_0, z) = \Phi(t_0)z = z$, então

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \varepsilon \cdot \Phi^{-1}(t) \cdot R(t, \Phi^{-1}(t)z, \varepsilon). \quad (1.8)$$

No caso (ii), onde $F(t, x) = Ax$, temos

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \varepsilon \cdot e^{-A(t-t_0)} \cdot R(t, \Phi^{-1}(t)z, \varepsilon). \quad (1.9)$$

Exemplificaremos estes cálculos nos exemplos que seguem na próxima seção, que trata das oscilações não lineares.

1.4 Aplicações do averaging clássico às oscilações não lineares

Frequentemente no estudo das equações diferenciais lidamos que equações do tipo

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon g(t, x, \dot{x}, \varepsilon), \quad x(t_0) = \alpha, \quad \dot{x}(t_0) = \beta,$$

que são modelos para aqueles fenômenos que apresentam oscilações não lineares. Se tomamos $y = \dot{x}$, então a equação diferencial anterior pode ser escrita como um sistema com duas equações diferenciais:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ g(t, x, \dot{x}, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad x(t_0) = \alpha, \quad y(t_0) = \beta.$$

Note que, considerando-se $\varepsilon = 0$, duas soluções para este sistema são

$$\begin{cases} \cos(\omega(t - t_0)) \\ \text{sen}(\omega(t - t_0)), \end{cases}$$

e portanto, neste caso, a solução $\tilde{X} = (\tilde{x}, \tilde{y})$ para o sistema não perturbado pode ser escrita como $\tilde{X} = \phi(t)z$, ou seja

$$\begin{aligned} x &= z_1 \cos(\omega(t - t_0)) + (z_2/\omega) \text{sen}(\omega(t - t_0)) \\ y &= -z_1 \omega \text{sen}(\omega(t - t_0)) + z_2 \cos(\omega(t - t_0)) \end{aligned}$$

onde $z = (z_1, z_2)^T$ e a matriz fundamental ϕ dada por

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega(t - t_0)) & (1/\omega) \text{sen}(\omega(t - t_0)) \\ -\omega \text{sen}(\omega(t - t_0)) & \cos(\omega(t - t_0)) \end{pmatrix}.$$

Notemos também que $\phi(t_0)$ é a matriz identidade de ordem 2. Além disso, como o sistema não perturbado tem a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, suas entradas não dependem de t , então a equação (1.9) se torna

$$\dot{z} = \varepsilon \cdot \Phi^{-1}(t) \cdot R(t, \Phi^{-1}(t)z, \varepsilon).$$

Desde que temos

$$\phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega(t - t_0)) & -(1/\omega) \text{sen}(\omega(t - t_0)) \\ \omega \text{sen}(\omega(t - t_0)) & \cos(\omega(t - t_0)) \end{pmatrix},$$

concluimos que

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \varepsilon \begin{pmatrix} \cos(\omega(t - t_0)) & -(1/\omega) \text{sen}(\omega(t - t_0)) \\ \omega \text{sen}(\omega(t - t_0)) & \cos(\omega(t - t_0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g(t, *, **, \varepsilon) \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} -(\varepsilon/\omega) \text{sen}(\omega(t - t_0))g(t, *, **, \varepsilon) \\ \varepsilon \cos(\omega(t - t_0))g(t, *, **, \varepsilon) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

onde * e ** devem ser substituídos, respectivamente, por

$$\begin{aligned} x &= z_1 \cos(\omega(t - t_0)) + (z_2/\omega) \text{sen}(\omega(t - t_0)). \\ y &= -z_1 \omega \text{sen}(\omega(t - t_0)) + z_2 \cos(\omega(t - t_0)). \end{aligned}$$

As condições iniciais para este novo sistema são dadas por $z_1(t_0) = \alpha$ e $z_2(t_0) = \beta$, desde que $\tilde{x} = \phi(t)z$ e $\phi(t_0) = I_d$, onde I_d é a matriz identidade de ordem 2.

Por vezes, contudo, em problemas de oscilações não lineares, é vantajoso que a equação final na forma padrão forneça as expressões da variação da amplitude r e da fase ψ da solução. Neste caso, identificamos as variáveis

$$\begin{cases} x = r \cos(\omega t + \psi). \\ y = -r\omega \sin(\omega t + \psi). \end{cases} \quad (1.11)$$

De forma análoga ao que foi feito anteriormente, podemos obter a equação do problema com perturbação na forma padrão para este caso, sendo esta equação dada por

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = -(\varepsilon/\omega) \sin(\omega t + \psi)g(t, *, **, \varepsilon) \\ \frac{d\psi}{dt} = -(\varepsilon/r\omega) \cos(\omega t + \psi)g(t, *, **, \varepsilon), \end{cases} \quad (1.12)$$

onde as condições iniciais podem ser calculadas através de (1.11).

É importante resaltar aqui que esta última fórmula não é prativável quando a amplitude r torna-se muito pequena, pois neste caso perde-se a limitação para a variação de ψ , fato que viola uma das hipóteses do teorema do averaging.

A seguir, apresentamos duas aplicações para problemas de oscilações lineares. Na primeira delas, usaremos a equação (1.12), e em seguida, utilizaremos a equação (1.10).

1.5 Equação de Van der Pol

Consideremos a equação

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad (1.13)$$

com condições iniciais $x(0)$ e $\dot{x}(0)$ dadas, com f de classe C^∞ . Esta equação diferencial pode ser escrita da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(1 - x^2)y. \end{cases}$$

Vamos deixar este sistema na forma padrão, utilizando a mudança

$$\begin{cases} x = r \cos(t + \psi). \\ y = -r\omega \sin(t + \psi). \end{cases}$$

Desta forma, a equação (1.12) torna-se

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = -\varepsilon \operatorname{sen}(t + \psi) f(r \cos(t + \psi), -r \operatorname{sen}(t + \psi)), & r(0) = r_0. \\ \frac{d\psi}{dt} = -(\varepsilon/r) \cos(t + \psi) f(r \cos(t + \psi), -r \operatorname{sen}(t + \psi)), & \psi(0) = \psi_0. \end{cases} \quad (1.14)$$

Este último sistema possui um campo de vetores 2π -periódico em t , e se f for de classe C^1 podemos aplicar o método do averaging, desde que tenhamos excluído uma vizinhança da origem (note que, se r é muito pequeno, então o campo de vetores de torna ilimitado e, portanto, este não satisfaz as hipóteses do averaging).

Definimos então as funções f_1 e f_2 como

$$f_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\tau) f(r \cos(\tau), -r \operatorname{sen}(\tau)) d\tau$$

e

$$f_2(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\tau) f(r \cos(\tau), -r \operatorname{sen}(\tau)) d\tau,$$

onde $\tau = t + \psi$, e assim, temos o novo sistema

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon f_1(r) \\ \dot{\psi} = -(\varepsilon/r) f_2(r), \end{cases} \quad (1.15)$$

com os valores iniciais apropriados.

Para o caso em que temos $f(x, \dot{x}) = (1 - x^2)\dot{x}$ em (1.13), temos a chamada equação de Van der Pol. Neste caso,

$$f(r \cos(t + \psi), -r \operatorname{sen}(t + \psi)) = (1 - r^2 \cos^2(t + \psi))(-r \operatorname{sen}(t + \psi)),$$

e assim,

$$f_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -r \operatorname{sen}^2(t + \psi) (1 - r^2 \cos^2(t + \psi)) dt = -\frac{r}{2} \left(1 - \frac{r^2}{4}\right)$$

e

$$f_2(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -r \operatorname{sen}(t + \psi) \cos(t + \psi) (1 - r^2 \cos^2(t + \psi)) dt = 0.$$

Consequentemente, obtemos o novo sistema (autônomo) dado por

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon \frac{r}{2} \left(1 - \frac{r^2}{4}\right). \\ \dot{\psi} = 0. \end{cases} \quad (1.16)$$

Vejamus que $\dot{r} = 0$ nos diz que $r = 0$ ou $r = 2$. Assim, se r_0 é igual a um destes dois valores, então r é constante. O valor $r_0 = 0$ corresponde à origem, enquanto que $r_0 = 2$ fornece uma solução periódica. Se $0 < r_0 < 2$, ou seja, então $dr/dt > 0$, e assim $r(t)$ é crescente, ao passo que se $r_0 > 2$, $dr/dt < 0$ e logo $r(t)$ é decrescente. Em ambos os casos, as soluções se aproximam para a solução periódica de raio 2 centrada no ponto singular.

Podemos fazer também uma análise nos moldes do teorema do averaging que vimos neste capítulo. Com efeito, a função

$$r(t) = \frac{r_0 e^{\frac{\varepsilon t}{2}}}{\left(1 + \frac{1}{4}r_0^2(e^{\varepsilon t} - 1)\right)^{\frac{1}{2}}} \cos(t + \psi_0)$$

é solução de (1.16), e portanto, pelo teorema do averaging, a solução do sistema original é

$$x(t) = \frac{r_0 e^{\frac{\varepsilon t}{2}}}{\left(1 + \frac{1}{4}r_0^2(e^{\varepsilon t} - 1)\right)^{\frac{1}{2}}} \cos(t + \psi_0) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

no tempo escala $1/\varepsilon$.

Note que $r = r(t)$ é uma aproximação assintótica de $x = x(t)$.

1.6 Equação de Mathieus

Vamos estudar agora um caso particular da equação conhecida como equação de Mathieus,

$$\ddot{x} + (1 + 2\varepsilon \cos(2t))x = 0. \quad (1.17)$$

Através do mesmo processo realizado no exemplo da equação de Van der Pol, identificando a função $f(t, x) = -2 \cos(2t)x$, obtemos o sistema

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2}\varepsilon r \sin 2\varphi. \\ \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}\varepsilon r \cos 2\varphi. \end{cases}$$

Embora possamos tentar resolver este sistema, é mais prático escolher uma transformação diferente para obter a forma padrão. Com efeito, se usamos a transformação (1.11) com $\omega = 1$ e $t_0 = 0$, então a transformação

$$\begin{cases} x = z_1 \cos(t) + z_2 \sin t \\ \dot{x} = -z_1 \sin(t) + z_2 \cos t, \end{cases}$$

nos fornece o sistema

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = 2\varepsilon \operatorname{sen} t \cos 2t(z_1 \cos(t) + z_2 \operatorname{sen} t) \\ \frac{dz_2}{dt} = -2\varepsilon \cos t \cos 2t(z_1 \cos(t) + z_2 \operatorname{sen} t) \end{cases}.$$

O lado direito deste sistema é 2π periódico, e pelo averaging temos

$$\begin{aligned} f_1(z_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \cos 2t(z_1 \cos(t) + z_2 \operatorname{sen} t) dt = \frac{1}{4} z_2. \\ f_2(z_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos t \cos 2t(z_1 \cos(t) + z_2 \operatorname{sen} t) dt = \frac{1}{4} z_1. \end{aligned}$$

Portanto, temos que o sistema promediado é o sistema linear

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = 2\varepsilon f_1(z_1) = \frac{1}{2}\varepsilon z_2, & z_1(0) = \alpha \\ \frac{dz_2}{dt} = -2\varepsilon f_2(z_2) = -\frac{1}{2}\varepsilon z_1, & z_2(0) = \beta, \end{cases}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \frac{1}{2}(\alpha + \beta)e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t} + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}. \\ z_2(t) &= \frac{1}{2}(\alpha + \beta)e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t} - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}. \end{aligned}$$

Neste caso, a aproximação assintótica para a solução $x(t)$ desta equação de Mathieus é dada por

$$y(t) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t}(\cos(t) + \operatorname{sen}(t)) + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t}(\cos(t) - \operatorname{sen}(t)).$$

Capítulo 2

O método averaging via grau de Brouwer

No capítulo anterior, introduzimos o método do averaging e apresentamos algumas aplicações deste método ao problema de encontrar soluções aproximadas para sistemas dinâmicos não autônomos. Embora o teorema apresentado também possa ser utilizado como ferramenta para encontrar ciclos limites do sistema tratado, faremos esta abordagem apenas neste capítulo, onde será discutido o conceito de grau topológico de Brouwer, conceito este que faz parte das hipóteses do teorema de averaging devido a Llibre e Buica. Começaremos apresentando um breve resumo da teoria clássica dos ciclos limites e em seguida apresentaremos o 16º problema de Hilbert, que é uma das maiores motivações do método do averaging. Em seguida, definiremos o conceito de grau topológico de Brouwer e enunciaremos algumas de suas propriedades, ao passo que apresentaremos o teorema de averaging que leva em conta esta característica topológica. Finalmente, apresentaremos uma discussão acerca do grau de Brouwer para funções contínuas e exibiremos um exemplo onde o teorema do averaging é utilizado em um problema da teoria do controle.

2.1 Introdução: Ciclos limites e o 16º problema de Hilbert

Nesta seção e nas próximas, consideraremos apenas os sistemas que estejam na forma padrão

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

desde que esta é uma condição necessária para se aplicar o método do averaging. Neste caso, chamamos uma órbita periódica do sistema (2.1) qualquer curva solução fechada que não seja um ponto de equilíbrio deste. Neste sentido, um ciclo limite Γ de (2.1) é uma órbita periódica isolada de todas as órbitas periódicas do sistema. Em outras palavras, é o conjunto ω -limite ou α -limite de alguma órbita de (2.1) diferente de Γ . No primeiro caso, Γ é chamada de ciclo limite estável, enquanto que no outro caso chamamos Γ de ciclo limite instável. Podemos ainda

ter uma órbita periódica isolada de todas as outras sendo o conjunto ω -limite de uma órbita e o conjunto α -limite de outra. Neste caso, o ciclo limite é dito ser semi-estável.

O 16º Problema de Hilbert é constituído de duas partes. A primeira parte é um problema que concerne propriamente à geometria algébrica, enquanto que a segunda é aquela que cabe à teoria dos sistemas dinâmicos; em suma, neste último caso, Hilbert questiona sobre o *número máximo de ciclos limites de um sistema diferencial polinomial plano de grau n* . Em particular, estudaremos neste trabalho uma versão particular da segunda parte do problema de Hilbert, conhecida como versão *fraca* do problema. Neste caso, investiga-se o número de ciclos limites que bifurcam de uma singularidade do tipo centro, quando se perturbam sistemas hamiltonianos com um pequeno parâmetro ε . Esta perturbação está explícita quando o sistema é escrito na forma padrão (2.1).

Embora existam muitos artigos publicados neste sentido, o problema ainda não tem resultados conclusivos, mas apenas parciais. Mesmo para o caso $n = 2$, onde sabe-se que existem finitos ciclos limites, a teoria está longe de estar completa. Para o caso particular em que temos um campo analítico, contudo, temos o Teorema de Dulac, que diz que é finito o número de ciclos limites de um sistema planar.

Teorema 2.1.1. (*Dulac*) *O número de ciclos limites de um sistema planar analítico definido em uma região limitada do plano é um número finito. Se o sistema é polinomial, então existe no máximo um número finito de ciclos limites em \mathbb{R}^2 .*

Outros métodos também tem sido empregados para estudar os ciclos limites que bifurcam de uma singularidade tipo centro. O mais conhecido deles talvez seja a aplicação de primeiro retorno de Poincaré, que em alguns casos aparece também no contexto do método do averaging. Basicamente, ela consiste em estudar a dinâmica do sistema sobre uma seção transversal ao fluxo e de dimensão inferior à dimensão do espaço de fases, associando a cada ponto da seção transversal à intersecção da órbita que contém o ponto original com a seção transversal. Assim, o trabalho de encontrar ciclos limites de um sistema n -dimensional se transforma em encontrar pontos fixos de uma aplicação definida num espaço $(n - 1)$ -dimensional.

Outros métodos comumente usados são a integral de Poincaré-Pontrjagin-Melnikov (que no plano é equivalente ao método das integrais abelianas) e o método do fator de integração inverso, porém não entraremos em detalhes sobre estes métodos. Para um detalhamento, consultar as referências indicadas em [5].

2.2 O grau de Brouwer

Basicamente, a diferença entre o que chamamos de método do averaging clássico e o método que apresentaremos na seção posterior, é o conceito do grau topológico. Este conceito foi primeiramente desenvolvido por Brouwer em 1912, um matemático holandês que ficou conhecido principalmente pelo seu Teorema do Ponto Fixo e por se dedicar à filosofia matemática, criando o que se conhece hoje como intuicionismo matemático.

A teoria do grau mostra-se uma ótima ferramenta para estudar a existência e o número de soluções para a equação

$$f(x) = p,$$

e neste sentido é uma preciosa ferramenta para muitos daqueles problemas que surgem na análise. Um deles, em particular, é o problema que surge no teorema do averaging, que sugere que encontremos a quantidade de zeros de uma função definida em um espaço de dimensão finita para estimar o número de ciclos limites que um determinado sistema possui. Com efeito, nesta seção definiremos o grau topológico de Brouwer ao passo que discutiremos aquelas propriedades que serão explicitamente necessárias para o desenvolver do teorema do averaging. Detalhes mais técnicos sobre o grau topológico de Brouwer podem ser encontrados em [13] e [14].

Consideremos, a fim de definir o conceito de grau topológico, um conjunto $\Omega \in \mathbb{R}^n$ aberto e limitado e seu fecho, que denotaremos aqui $\bar{\Omega}$. Consideremos agora $f \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $S = \{x \in \bar{\Omega} \mid J_f(x) = 0\}$, onde J_f representa a matriz jacobiana de f e $C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ o espaço das funções contínuas definidas em $\bar{\Omega}$ cuja imagem está em \mathbb{R}^n , e seja b tal que $b \notin f(\partial\Omega) \cup f(S)$. Então, o grau topológico de Brouwer da função f com relação à Ω no ponto b é dado pelo número inteiro

$$d_B(f, \Omega, b) = \sum_{\xi_i \in f^{-1}(\{b\})} \text{sgn}(J_f(\xi_i)),$$

onde a função sgn é dada por

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t > 0. \\ -1 & , \quad t < 0. \end{cases}$$

Note que a função $d_B : C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \times B \rightarrow \mathbb{Z}$, onde $B = \mathbb{R} \setminus (f(\partial\Omega) \cup f(S))$, está bem definida, desde que $f^{-1}(\{b\})$ é uma quantidade finita. De fato, basta notar que se $x \in f^{-1}(\{b\})$, então $J_f(x) \neq 0$, pois assim, pelo Teorema da Função Inversa, f é um difeomorfismo de uma vizinhança U de x sobre uma vizinhança V de b , ou seja, $f|_U : U \rightarrow V = f(U)$ é um difeomorfismo (logo contínua). Consequentemente, $f^{-1}(\{b\})$ é fechado, e como $f^{-1}(\{b\}) \subset \bar{\Omega}$, então $f^{-1}(\{b\})$ também é limitado, logo compacto.

Agora, para $x \in f^{-1}(\{b\})$, consideremos a bola B_{r_x} de x , pois assim temos

$$f^{-1}(\{b\}) \subset \bigcup_{x_j \in f^{-1}(\{b\})} B_{r_x}(x_j).$$

Logo, pelo Teorema de Borel-Lebesgue, como $\{B_{r_x}(x_j)\}$ é uma cobertura por abertos de $f^{-1}(\{b\})$, vem que

$$f^{-1}(\{b\}) \subset \bigcup_j^k B_{r_x}(x_j),$$

ou seja,

$$f^{-1}(\{b\}) \subset \bigcup_{x_j \in f^{-1}(\{b\})} B_{r_x}(x_j),$$

ou seja, $f^{-1}(\{b\})$ é finito. Assim $f^{-1}(\{b\}) = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k\}$, com $J_f(\xi_j) \neq 0$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Um outro fato acerca do grau de Brouwer é que podemos representá-lo através de uma integral, como diz o seguinte teorema:

Teorema 2.2.1. *Sejam Ω um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $p \notin f(\partial\Omega) \cup f(S)$ e $J_f(p) \neq 0$. Seja $f_\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que*

$$\text{supp } f_\varepsilon \subset B_\varepsilon(p) \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) dx = 1.$$

Então existe $\varepsilon_0 > 0$ dependendo de p e f tal que

$$d_B(f, \Omega, p) = \int_{\Omega} f_\varepsilon(f(x)) J_f(x) dx, \quad \forall, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Assumiremos este resultado sem demonstração (ver [13] e [14]), desde que nosso objetivo principal é apresentar o próximo resultado. Ele será uma ferramenta fundamental na demonstração do teorema do averaging, pois permitirá relacionar o grau topológico de Brouwer com o problema de encontrar zeros de uma função definida em um espaço de dimensão finita, que é basicamente a motivação que introduzimos no início desta seção.

Teorema 2.2.2. *Se $d_B(f, \Omega, b) \neq 0$, então existe $x_0 \in \Omega$ tal que $f(x_0) = b$.*

Dem.: Se $b \notin f(\partial\Omega)$, então por hipótese temos

$$d_B(f, \Omega, b) = \sum_{\xi_i \in f^{-1}(\{b\})} \text{sgn}(J_f(\xi_i)) = \int_{\{x \in \Omega; |f(x) - b| < \varepsilon\}} f_\varepsilon(f(x)) J_f(x) dx \neq 0,$$

donde $\{x \in \Omega; |f(x) - b| < \varepsilon\} \neq \emptyset$. Assim, garantimos a existência de $x_\varepsilon \in \Omega$ tal que $|f(x_\varepsilon) - b| < \varepsilon$. Logo, desde que Ω seja limitado, fazendo-se $\varepsilon \rightarrow 0$, temos que $f(x_0) - b = 0$, ou seja, $f(x_0) = b$. ■

Outra propriedade importante do grau de Brouwer é que ele é invariante por homotopia, como demonstraremos no próximo teorema. Este resultado é fundamental para o lema que finaliza esta seção, lema este que fará parte da demonstração do método do averaging.

Definição 2.2.3. Sejam $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ aplicações contínuas. Então dizemos que f_1 é homotópica à f_2 se existe uma aplicação contínua $f : X \times I \rightarrow Y$ tal que

$$f(x, 0) = f_1(x) \quad e \quad f(x, 1) = f_2(x)$$

para todo $x \in X$, onde $I = [0, 1]$. A aplicação f é dita ser uma homotopia entre f_1 e f_2 ($f_1 \simeq f_2$).

Segue assim o teorema sobre invariância do grau por homotopia.

Teorema 2.2.4. *Seja $f \in \mathcal{C}(\bar{V}, \mathbb{R}^n)$ uma homotopia e $p \notin f(\partial V \times [0, 1])$. Então*

$$d_B(f(\cdot, t), V, p)$$

é constante para todo $t \in [0, 1]$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [13] e [14], ao qual faremos uso para demonstrar um importante Lema sobre o grau de Brouwer, que será importante para o Teorema do averaging. Vejamos, no entanto, que o Teorema [2.2.4] não exige em suas hipóteses que a função seja diferenciável, mas apenas contínua. Com efeito, a próxima seção será dedicada a estudar este caso. Na verdade, esta também é a situação que encontramos no Teorema do Averaging devido a Llibre e Buica pelo fato que não temos hipóteses sobre a diferenciabilidade das funções envolvidas neste. Apresentada esta definição, terminaremos este capítulo com o Teorema do Averaging e uma aplicação deste na teoria do controle.

2.3 O Grau de Brouwer para funções contínuas

Nosso objetivo nesta seção é apresentar a definição de grau topológico de Brouwer quando a função em questão é apenas contínua. De fato, a grande contribuição de Llibre e Buica em sua versão do averaging é a não exigência da regularidade das funções que aparecem no sistema, de tal forma que é interessante que o grau esteja bem definido para aquelas funções que não

cumprem com esta hipótese.

O primeiro resultado na direção deste estudo é o *Teorema de Aproximação de Weierstrass*, que nos diz que toda função real definida num intervalo $[a, b]$ pode ser aproximada uniformemente por uma sequência de polinômios definidos neste intervalo. Este teorema, combinado com o fato de que, dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, tem-se $\mathbb{C}^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ denso em $\mathbb{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ (ver [12], [13] e [14]), juntamente com o lema seguinte, permite definir o grau de Brouwer para funções contínuas.

Lema 2.3.1. *Seja $H(x, t)$ uma homotopia em $\mathbb{C}^2(\overline{\Omega} \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$, com $p \notin H(\partial\overline{\Omega} \times [0, 1])$. Então $d_B(H(\cdot, t), \Omega, p)$ é constante, para todo $t \in [0, 1]$.*

A demonstração do Lema pode ser encontrada em [13] e [14].

Agora, dado $f \in \mathbb{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, com $b \notin f(\partial\Omega)$ e $r = \rho(b, f(\partial\Omega))$, como $\mathbb{C}^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathbb{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass, existe $g \in \mathbb{C}^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ com $\|f - g\|_\infty < \frac{r}{2}$, onde $r = \rho(b, f(\partial\Omega))$ denota a distância do ponto b ao conjunto $f(\partial\Omega)$. Temos assim o seguinte teorema:

Teorema 2.3.2. *Fixando o conjunto*

$$U = \{g \in \mathbb{C}^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n); \|f - g\|_\infty < \frac{r}{2}\}$$

temos

$$d_B(g_1, \Omega, p) = d_B(g_2, \Omega, p), \quad g_1, g_2 \in U.$$

Dem.: Primeiramente, definamos o homotopia $H : \overline{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $H(x, t) = tg_1(x) + (1 - t)g_2(x)$. Observe que, desde que $g \in \mathbb{C}^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, temos $H \in \mathbb{C}^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Nosso objetivo agora é usar o lema anterior, provando, para isto, que $p \notin H(\partial\overline{\Omega} \times [0, 1])$. De fato, dado $x \in \overline{\Omega}$, para cada $t \in [0, 1]$, temos

$$\begin{aligned} |H(x, t) - f(x)| &= |tg_1(x) + (1 - t)g_2(x) - tf(x) - (1 - t)f(x)| \\ &= |t(g_1(x) - f(x)) + (1 - t)(g_2(x) - f(x))| \\ &\leq |t(g_1(x) - f(x))| + |(1 - t)(g_2(x) - f(x))| \end{aligned}$$

Entretanto, desde que temos $|g_1(x) - f(x)| \leq \|g_1 - f\|_\infty$ e $|g_2(x) - f(x)| \leq \|g_2 - f\|_\infty$, vem que

$$|H(x, t) - f(x)| \leq t\|g_1 - f\|_\infty + (1 - t)\|g_2 - f\|_\infty,$$

e conseqüentemente

$$|H(x, t) - f(x)| \leq t\frac{r}{2} + (1 - t)\frac{r}{2},$$

já que $g_1, g_2 \in U$.

Portanto $|H(x, t) - f(x)| \leq \frac{r}{2}$, e assim

$$p \notin H(\partial\bar{\Omega} \times [0, 1]),$$

pois caso contrário existiriam $x_0 \in \partial\Omega$ e $t_0 \in [0, 1]$ tais que $H(x_0, t_0) = p$, donde

$$|H(x_0, t_0) - f(x_0)| \leq \frac{r}{2} \implies |p - f(x_0)| \leq \frac{r}{2}.$$

Esta última igualdade resulta em um absurdo, desde que temos $r = \rho(b, f(\partial\Omega))$, ou seja, $|p - f(x_0)| > \frac{r}{2}$. Desta forma, $p \notin H(\partial\bar{H} \times [0, 1])$, e pelo Lema 3.4.1, $d_B(H(\cdot, t), \Omega, p)$ é constante para todo $t \in [0, 1]$. Portanto, $d_B(H(\cdot, 0), \Omega, p) = d_B(H(\cdot, 1), \Omega, p)$, ou seja,

$$d_B(g_1, \Omega, p) = d_B(g_2, \Omega, p).$$

■

De posse do Teorema [2.3.2], podemos definir o grau topológico de Brouwer para funções contínuas.

Definição 2.3.3. Definimos o grau de Brouwer para $f \in \mathbb{C}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, com $p \notin f(\partial\Omega)$, como sendo

$$d_B(f, \Omega, p) = d_B(g, \Omega, p),$$

$\forall g \in U$.

A definição do grau de Brouwer para funções contínuas inspira muitas propriedades interessantes deste conceito, mas não abordaremos estas aqui desde que aqueles resultados necessários para a compreensão do teorema do averaging encontram-se todos nesta seção e na seção anterior. Para mais detalhes sobre a teoria do grau, consultar [12], [13] e [14].

2.4 O teorema do averaging via grau de Brouwer

Antes de enunciar o Teorema do Averaging, vamos apresentar um lema sobre o grau de Brouwer que será importante no escopo do teorema. Para isto, considere uma função $f : D \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, onde D é um aberto do \mathbb{R}^n e considere também $V \subset D$ tal que $0 \notin f(\partial V, \varepsilon)$. Temos:

Lema 2.4.1. *Considere as funções contínuas $f_i : \bar{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, com $i = 0, 1, \dots, k$ e $f, g, r :$*

$\bar{V} \times [-\varepsilon_f, \varepsilon_f] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dadas por

$$\begin{aligned} g(\cdot, \varepsilon) &= f_0(\cdot) + \varepsilon f_1(\cdot) + \varepsilon^2 f_2(\cdot) + \dots + \varepsilon^k f_k(\cdot), \\ f(\cdot, \varepsilon) &= g(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon^{k+1} r(\cdot, \varepsilon). \end{aligned}$$

Se assumimos que

$$g(z, \varepsilon) \neq 0, \quad \forall z \in \partial V, \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0],$$

então para $|\varepsilon| > 0$ suficientemente pequeno, $d_B(f(\cdot, \varepsilon), V, 0)$ está bem definido e

$$d_B(f(\cdot, \varepsilon), V, 0) = d_B(g(\cdot, \varepsilon), V, 0). \quad (2.2)$$

Dem.: Vamos usar o teorema [2.2.4], que garante a invariância do grau por homotopia. Com efeito, considere para cada $\varepsilon \in [-\varepsilon, \varepsilon] \setminus \{0\}$ a homotopia

$$H_t(\cdot, \varepsilon) = g(\cdot, \varepsilon) + t(f(\cdot, \varepsilon) - g(\cdot, \varepsilon)), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Vamos mostrar que, se ε é suficientemente pequeno, então temos $0 \notin H_t(\partial V, \varepsilon)$, para todo $0 \leq t \leq 1$. Suponhamos, contudo, que existe $t_0 \in (0, 1)$ e $x_0 \in \partial V$ tal que $H_{t_0}(x_0, \varepsilon) = 0$. Logo, como a função r definida no teorema é contínua e $\bar{V} \times [-\varepsilon_f, \varepsilon_f]$ é compacto, então $r : \bar{V} \times [-\varepsilon_f, \varepsilon_f] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é limitada. Em particular, $r|_{\bar{V} \times [0, \varepsilon_f]}$ é limitado, donde concluímos a existência de $M \in \mathbb{R}$ tal que $\|r(z, \varepsilon)\| \leq M$, para todo $z \in \partial V$ e para todo $\varepsilon \in [0, \varepsilon_f]$. Temos assim que a igualdade $H_{t_0}(x_0, \varepsilon) = 0$ implica em

$$g(x_0, \varepsilon) + t_0(f(x_0, \varepsilon) - g(x_0, \varepsilon)) = 0.$$

Desta forma, temos

$$\begin{aligned} H_{t_0}(x_0, \varepsilon) = 0 &\implies g(x_0, \varepsilon) + t_0(f(x_0, \varepsilon) - g(x_0, \varepsilon)) = 0 \\ &\implies g(x_0, \varepsilon) + t_0 \varepsilon^{k+1} r(x_0, \varepsilon) = 0 \\ &\implies g(x_0, \varepsilon) = -t_0 \varepsilon^{k+1} r(x_0, \varepsilon) \\ &\implies \|g(x_0, \varepsilon)\| \leq |t_0 \varepsilon^{k+1}| M \\ &\implies \|g(x_0, \varepsilon)\| \leq (t_0 \varepsilon^{k+1}) M. \end{aligned}$$

Logo, quando temos $\varepsilon \rightarrow 0$, a conclusão é que $\|g(x_0, \varepsilon)\| = 0$ e, conseqüentemente, $g(x_0, \varepsilon) = 0$, o que é absurdo, pois $x_0 \in \partial V$. Portanto, vale a tese afirmada no teorema. \blacksquare

O resultado que apresentamos agora é o principal objetivo de estudo deste trabalho. Como dito anteriormente, é devido ao espanhol Jaume Llibre e a romena Adriana Buica, publicado em 2004. O teorema, diferente do que chamamos no texto de *averaging clássico*, faz menção ao já discutido grau topológico de Brouwer, e permite enfraquecer as hipóteses do teorema clássico.

Teorema 2.4.2. *Considere o sistema de equações diferenciais*

$$\ddot{x}(t) = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \quad (2.3)$$

onde $F_1 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções contínuas, T -periódicas na primeira variável e D é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . Defina $f_1 : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ como

$$f_1(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds, \quad (2.4)$$

e assumamos que

- (i) F_1 e R são localmente Lipschitzianas com respeito à x ;
- (ii) para $a \in D$ com $f_1(a) = 0$, existe uma vizinhança V de a tal que $f_1(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{V} \setminus \{a\}$ e $d_B(f_1, V, 0) \neq 0$.

Então, para $|\varepsilon| > 0$ suficientemente pequeno, existe uma solução T -periódica $\phi(\cdot; \varepsilon)$ do sistema tal que $\phi(\cdot; \varepsilon) \rightarrow a$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Se comparamos os teoremas anterior com o teorema do averaging clássico apresentado em [6], este último exige, ao invés de (i), que F_1 , R , $D_x F_1$, $D_x^2 F_1$ e $D_x R$ sejam funções definidas, contínuas e limitadas por uma constante M (que não depende de ε) em $[0, \infty) \times D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f)$. Da mesma forma, exige que $J_{f_1}(a) \neq 0$ para cada $a \in D$ com $f_1(a) = 0$ ao invés de (ii).

É claro que a segunda condição apresentada em [6] é uma condição suficiente para que $d_B(f, \Omega, b) \neq 0$. Basta notar que se $f_1(a) = 0$ e $J_{f_1}(a) \neq 0$, então pelo Teorema da Função Inversa existe uma vizinhança V de a tal que $f_1(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{V} \setminus \{a\}$. Portanto existe um único elemento $a \in V$ tal que $f^{-1}(\{0\}) = a$. Logo, $d_B(f_1, V, 0) = \text{sgn}(J_{f_1}(a))$, e como $J_{f_1}(a) \neq 0$, temos $J_{f_1}(a) < 0$ ou $J_{f_1}(a) > 0$. No primeiro caso $\text{sgn}(J_{f_1}(a)) = -1$, e no segundo caso $\text{sgn}(J_{f_1}(a)) = 1$. Portanto, em ambos os casos temos $d_B(f_1, V, 0) \neq 0$.

Ainda sobre o grau de Brouwer, é importante ressaltar que a principal propriedade é aquela que enunciamos no Teorema (2.5), pois podemos afirmar que, se $d_B(f(\cdot, \varepsilon), V, 0) \neq 0$, então a equação

$$f(z, \varepsilon) = 0$$

tem uma solução em V , pois desta forma nosso problema concentra-se em encontrar tal solução. Na verdade, encontrar zeros de f é equivalente a encontrar soluções T -periódicas para o nosso sistema.

De fato, considere um sistema da forma

$$\dot{x} = F(t, x, \varepsilon)$$

onde $F : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$, F é contínua T -periódica na variável t , localmente lipschitziana e $D \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto e limitado. Considere também, que para cada $z \in D$, $x(\cdot, z, \varepsilon) : [0, t_z] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a solução do sistema anterior satisfazendo $x(0, z, \varepsilon) = z$, onde assumimos

$$t_z > T, \text{ para todo } z \in D \quad (2.5)$$

Tomando agora a função $f : D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f)$ dada por

$$f(z, \varepsilon) = \int_0^T F(t, x(t, z, \varepsilon), \varepsilon) dt, \quad (2.6)$$

podemos fazer duas conclusões. Primeiramente, desde que F é T -periódica e temos $t_z > T$, cada solução $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo $x(0) = x(T)$ pode ser estendida à \mathbb{R} devido a sua periodicidade. Ao mesmo tempo, temos a relação

$$\begin{aligned} f(z, \varepsilon) &= \int_0^T F(t, x(t, z, \varepsilon), \varepsilon) dt \\ &= \int_0^T \frac{dx}{dt}(t, z, \varepsilon) dt \\ &= x(T, z, \varepsilon) - x(0, z, \varepsilon) \end{aligned}$$

e, portanto, se $f(z, \varepsilon) = 0$, temos $x(T, z, \varepsilon) = x(0, z, \varepsilon)$, ou seja, cada ponto singular $(z_\varepsilon, \varepsilon)$ de f fornece uma solução periódica $x(\cdot, z_\varepsilon, \varepsilon)$ de $\dot{x} = F(t, z, \varepsilon)$. Trivialmente, vemos que a recíproca também vale.

A conclusão é que o problema de encontrar soluções T -periódicas de $\dot{x} = F(t, z, \varepsilon)$ pode ser substituída pelo problema de encontrar zeros de uma função $f(\cdot, \varepsilon)$ definida em um espaço de dimensão finita. Assim, focaremos nossa atenção agora no número de zeros de $f(\cdot, \varepsilon)$, e usaremos a teoria do grau para inferir sobre a questão. Começemos, pois, supondo que f é contínua e de classe C^k em ε e encontrando a série de MacLaurin de $f = f(z, \varepsilon)$ em torno deste parâmetro. Segue então que

$$f(z, \varepsilon) = f(z, 0) + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(z, 0) + \dots + \varepsilon^k \frac{1}{k!} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon^k}(z, 0) + \varepsilon^{k+1} r(z, \varepsilon).$$

Se denotamos

$$g(z, \varepsilon) = \sum_{i=0}^k \varepsilon^i \frac{1}{i!} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon^i}(z, 0)$$

então f se escreve da forma

$$f(z, \varepsilon) = g(z, \varepsilon) + \varepsilon^{k+1}r(z, \varepsilon),$$

e assim podemos usar o Lema (2.20).

A função $r = r(z, \varepsilon)$ é contínua $D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, exceto quando temos $\varepsilon = 0$. Em particular, r é contínua em $K \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, onde $K \subset D$ é um compacto. Logo, r é limitada em $K \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, e assim a expressão para f se torna

$$f(z, \varepsilon) = g(z, \varepsilon) + \varepsilon^{k+1}\mathcal{O}(1).$$

Demonstremos agora o teorema do averaging.

Dem.: Para todo $z \in \bar{V}$, existe ε_0 positivo tal que, se $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, então $x(\cdot, z, \varepsilon)$ está definida em $[0, T]$, ou seja, é válida a relação (2.5). Pelo teorema de existência e unicidade, $t_z > h_z$, onde $h_z = \inf(T, M(\varepsilon/b))$ e $M(\varepsilon) \geq |\varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon)|$, para todo $t \in [0, T]$, para cada x tal que $|x - z| \leq b$ e para cada $z \in \bar{V}$. Notemos que, se ε é suficientemente pequeno, então $M(\varepsilon)$ pode ser arbitrariamente grande tal que $h_z = T$, para todo $z \in \bar{V}$.

Agora, para todo $t \in [0, T]$, $z \in \bar{V}$ e $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, temos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} x(t, z, \varepsilon) &= x(0, z, \varepsilon) + \varepsilon \int_0^t F_1(s, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon) ds + \varepsilon^2 \int_0^t R(s, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon) ds \\ &= z + \varepsilon \int_0^t F_1(s, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon) ds + \varepsilon^2 \int_0^t R(s, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon) ds. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Neste caso, a função f dada por (2.6) se torna

$$f(z, \varepsilon) = \varepsilon \int_0^t F_1(s, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon) ds + \varepsilon^2 \int_0^t R(s, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon) ds \quad (2.8)$$

Provaremos que

$$f(z, \varepsilon) = \varepsilon f_1(z) + \varepsilon^2 \mathcal{O}(1) \text{ em } \bar{V} \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0], \quad (2.9)$$

onde f_1 é dada por (2.4). Observamos que existe um subconjunto compacto K de D tal que $x(t, z, \varepsilon) \in K$ para todo $t \in [0, T]$, $z \in \bar{V}$ e $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. Logo, como R é contínua em $[0, T] \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, existe $N_K > 0$ tal que $R(t, x(t, z, \varepsilon), \varepsilon) \leq N_K$, ou seja,

$$\int_0^T R(s, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon) ds \leq \int_0^T N_K ds = TN_K = \mathcal{O}(1).$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_0^T F_1(s, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon) ds &= \varepsilon \int_0^T [F_1(s, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon) - F_1(s, z) + F_1(s, z)] ds \\ &= \varepsilon \int_0^T [F_1(s, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon) - F_1(s, z)] ds \\ &\quad + \varepsilon \int_0^T F_1(s, z) ds \end{aligned}$$

e portanto temos

$$f(z, \varepsilon) - \varepsilon f_1(z) = \varepsilon \int_0^T [F_1(s, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon) - F_1(s, z)] ds + \varepsilon^2 \mathcal{O}(1).$$

Logo, usando o fato de que F_1 é Lipschitziana com respeito à x em $[0, T] \times K$ e a equação (2.7), obtemos as seguintes relações:

$$|F_1(s, x(s, z, \varepsilon)) - F_1(s, z)| \leq L_K |x(s, z, \varepsilon) - z| = \varepsilon \mathcal{O}(1),$$

e desta forma vale (2.9).

Assim, pela hipótese (ii) do teorema, temos que existe z_ε tal que $f(z_\varepsilon, \varepsilon) = 0$ e $z_\varepsilon \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Portanto $\varphi(\cdot, \varepsilon) = x(\cdot, z_\varepsilon, \varepsilon)$ é uma solução periódica de (2.3) e $\varphi(\cdot, \varepsilon) \rightarrow a$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ (devido a continuidade das soluções de (2.3) com relação aos parâmetros e valor inicial). ■

Uma observação pertinente ao Teorema do Averaging é a estabilidade dos ciclos limites que são detectados pelo método. Na verdade, para analisar esta propriedade, basta estudar os autovalores da matriz jacobiana de f_1 avaliada em cada singularidade hiperbólica do sistema promediado, ou seja, em cada ponto que verifica $f_1(a) = 0$, desde que a pertença à alguma vizinhança tal que f_1 é diferenciável nesta vizinhança (para mais detalhes, ver [4]). A mesma análise deve ser utilizada para estudar a estabilidade dos ciclos limites detectados pelo método do averaging clássico que faz menção aos ciclos limites.

2.5 Um exemplo aplicado à teoria do controle

Nesta seção abordaremos um sistema definido em \mathbb{R}^4 e que caracteriza um sistemas linear por partes, que são sistema que aparecem naturalmente na teoria do controle. Isto significa que a definição do campo de vetores é diferente para cada região do espaço 4-dimensional definidas

por uma função que aqui será dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x \in (-\infty, -1) \\ x & , \quad x \in [-1, 1] \\ 1 & , \quad x \in (1, \infty) \end{cases} . \quad (2.10)$$

O sistema que estudaremos possui uma singularidade tipo centro 4-dimensional na origem e é dado por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2. \\ \dot{x}_2 = x_1. \\ \dot{x}_3 = -x_4. \\ \dot{x}_4 = x_3. \end{cases} \quad (2.11)$$

A ideia é perturbar este sistema por um parâmetro ε e estudar o número de centros que bifurcam desta singularidade, ou seja, considerar o sistema

$$\dot{x} = A_0x + \varepsilon F(x), \quad (2.12)$$

onde

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ é dada por $F(x) = Ax + \varphi(k^T x)b$. Note que se $\varepsilon = 0$ temos o sistema (2.11). Na definição da função F , temos os seguintes elementos:

- O vetor $x \in \mathbb{R}^4$ tem coordenadas $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$.
- $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, 4$, com $a_{ij} \in \mathbb{R}$.
- $k, b \in \mathbb{R}^4$ são vetores coluna.
- A função φ é dada por (2.10).

Notemos que não temos a hipótese de diferenciabilidade do campo de vetores que define o sistema (2.12) devido à função φ , que apesar de ser contínua, é diferenciável apenas por partes. Desta forma, o método do averaging visto na seção 3.3 surge como uma poderosa ferramenta, visto que o teorema do averaging clássico não se aplica a este tipo de situação. É preciso, contudo, transformar o sistema (2.12) na forma padrão, e faremos isto através de uma mudança de variáveis, depois de reduzir o número de parâmetros deste sistema. Por ora, vejamos o teorema que fornece o número de ciclos limites detectados pelo averaging, que é o principal resultado desta seção.

Teorema 2.5.1. *Três é a cota superior para o número de ciclos limites do sistema (2.12) que bifurcam das órbitas periódicas (2.11) quando tomamos a expansão de primeira ordem da função espaçamento com respeito a um pequeno parâmetro ε . Além disso, existem sistemas como (2.12) que tem exatamente três ciclos limites.*

Provaremos o teorema em partes, apresentando alguns lemas antes, que serão úteis, bem como fazendo algumas mudanças no sistema como anunciado previamente. A primeira delas é a redução do número de parâmetros de (2.12).

Lema 2.5.2. *Seja $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a base canônica do \mathbb{R}^4 . Então, por uma mudança linear de coordenadas, e eventualmente uma permutação das variáveis, o sistema (2.12) pode ser transformado no sistema*

$$x' = A_0x + \varepsilon \bar{A}x + \varepsilon \varphi(x_1)\bar{b}, \quad (2.13)$$

onde $\bar{A} \in M_4(\mathbb{R})$ é uma matriz e $\bar{b} = e_1$ ou $\bar{b} = e_3$.

Dem.: A mudança linear de variáveis $x = Jy$ transforma (2.12) em

$$y' = J^{-1}A_0Jy + \varepsilon J^{-1}A_0Jy + \varepsilon \varphi(k^T Jy)J^{-1}b.$$

Então temos que encontrar J tal que

$$\begin{cases} J^{-1}A_0J = A_0. \\ J^{-1}b = \bar{b}. \\ k^T J = e_1^T. \end{cases}$$

Como a matriz A é qualquer, tomamos $\bar{A} = J^{-1}A_0J$. Agora, se $J = (z_{ij})$, com $i, j = 1, \dots, 4$, então a condição $J^{-1}A_0J = A_0$ é satisfeita se temos

$$J = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ -z_{12} & z_{11} & -z_{14} & z_{13} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} \\ -z_{32} & z_{31} & -z_{34} & z_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

No entanto, como devemos ter $J^{-1}b = \bar{b}$, segue que

$$\bar{b} = e_1 \implies \begin{cases} z_{11} = b_1 \\ z_{12} = -b_2 \\ z_{31} = b_3 \\ z_{32} = -b_4 \end{cases} \quad (2.15)$$

ou, da mesma forma,

$$\bar{b} = e_3 \implies \begin{cases} z_{13} = b_1 \\ z_{14} = -b_2 \\ z_{33} = b_3 \\ z_{34} = -b_4 \end{cases} \quad (2.16)$$

Assim, pela condição $k^T J = e_1^T$, e usando a igualdade (2.14), temos o sistema

$$\begin{cases} k_1 z_{11} + k_2 z_{12} + k_3 z_{13} + k_4 z_{14} = 1 \\ -k_1 z_{12} + k_2 z_{11} - k_3 z_{14} + k_4 z_{13} = 0 \\ k_1 z_{31} + k_2 z_{32} + k_3 z_{33} + k_4 z_{34} = 0 \\ -k_1 z_{32} + k_2 z_{31} - k_3 z_{34} + k_4 z_{33} = 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Substituindo os valores de (2.15) em (2.17), temos o sistema com duas equações e quatro incógnitas

$$\begin{cases} k_1 b_1 - k_2 b_2 + k_3 z_{13} + k_4 z_{14} = 1 \\ -k_1 b_2 + k_2 b_1 - k_3 z_{14} + k_4 z_{13} = 0 \\ k_1 b_3 + k_2 b_4 + k_3 z_{33} + k_4 z_{34} = 0 \\ -k_1 b_4 + k_2 b_3 - k_3 z_{34} + k_4 z_{33} = 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Para resolver o sistema (2.18), primeiramente multiplicamos a primeira linha por k_3 e a segunda por k_4 , somando depois as respectivas linhas multiplicadas. Em seguida, multiplicamos as mesmas linhas por k_4 e $-k_3$, respectivamente, obtendo as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} (k_3^2 + k_4^2)z_{13} &= k_3 - (k_3 k_1 - k_4 k_2)b_1 + (k_3 k_2 - k_4 k_1)b_2 \\ (k_3^2 + k_4^2)z_{14} &= k_4 + (k_2 k_3 - k_1 k_4)b_1 + (k_2 k_4 - k_1 k_3)b_2 \end{aligned}$$

Fazendo o mesmo procedimento com a terceira e quarta linhas, vem que

$$\begin{aligned} (k_3^2 + k_4^2)z_{33} &= -(k_3 k_1 + k_4 k_2)b_3 + (k_3 k_2 - k_4 k_1)b_4 \\ (k_3^2 + k_4^2)z_{34} &= -(k_1 k_4 + k_2 k_3)b_3 + (k_2 k_4 - k_1 k_3)b_4 \end{aligned}$$

Concluimos assim que se $k_3^2 + k_4^2 \neq 0$, então o sistema (2.18) tem uma única solução, que fornece uma matriz J cujo determinante é $(b_3^2 + b_4^2)/(k_3^2 + k_4^2)$. Por outro lado, se construímos um sistema utilizando as igualdade (2.16) em (2.17), então temos solução única para este sistema se $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$, e neste caso o determinante da matriz J é dado por $(b_3^2 + b_4^2)/(k_1^2 + k_2^2)$.

Vejam, contudo, que a igualdade $k_3^2 + k_4^2 = 0$ implica em $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$, desde que k e b são vetores não nulos de \mathbb{R}^4 . Consequentemente, a matriz J é inversível se, e somente se, $b_3^2 + b_4^2 \neq 0$. Caso contrário, devemos ter $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$.

Notemos que, permutando x_1 com x_3 e, respectivamente, x_2 com x_4 , temos o caso já estudado. ■

Neste ponto, é preciso observar que, mesmo depois da mudança de variáveis, nosso sistema não está na forma padrão. Na verdade, para que isto aconteça, é necessário que mudemos as variáveis do sistema, a fim de obter um novo sistema que seja possível aplicar o averaging.

O próximo lema apresenta um resultado neste sentido.

Lema 2.5.3. *Através da mudança de variáveis*

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta \\ x_2 = r \sin \theta \\ x_3 = \rho \cos(\theta + s) \\ x_4 = \rho \sin(\theta + s), \end{cases}$$

transformamos o sistema (2.13) em

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon H_1(\theta, r, \rho, s) + \varepsilon^2 \mathcal{O}(1) \\ \frac{d\rho}{d\theta} = \varepsilon H_2(\theta, r, \rho, s) + \varepsilon^2 \mathcal{O}(1) \\ \frac{ds}{d\theta} = \varepsilon H_3(\theta, r, \rho, s) + \varepsilon^3 \mathcal{O}(1), \end{cases} \quad (2.19)$$

onde

$$H_1 = \cos \theta F_1 + \sin \theta F_2$$

$$H_2 = \cos \theta + s F_3 + \sin \theta + s F_4$$

$$H_3 = \frac{1}{r} \cos \theta F_2 - \frac{1}{r} \sin \theta F_1 - \frac{1}{\rho} \cos(\theta + s) F_4 + \frac{1}{\rho} \sin(\theta + s) F_3$$

e $F_i = a_{i1}r \cos \theta + a_{i2}r \sin \theta + a_{i3}\rho \cos(\theta + s) + a_{i4}\rho \sin(\theta + s)$, para todo $i = 1, \dots, 4$.

Tomando ε_f suficientemente pequeno, n suficientemente pequeno e $D_n = (1/n, n) \times (1/n, n) \times \mathbb{R}$, então o campo vetorial (2.19) está bem definido e é contínuo em $\mathbb{R} \times D_n \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f)$. Além disso, é 2π -periódico com relação à θ e localmente Lipschitz com respeito à (r, ρ, s) .

Dem.: Inicialmente, vamos encontrar expressões para as derivadas das novas variáveis,

(θ, r, ρ, s) . Vejamos que, em particular, as igualdades

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta \\ x_2 = r \sin \theta \end{cases}$$

nos dizem que $\tan(\theta) = (x_2/x_1)$ e $r^2 = x_1^2 + x_2^2$. Assim, temos

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{-x_2\dot{x}_1 + x_1\dot{x}_2}{r^2} \\ \dot{r} = \frac{x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2}{r}. \end{cases}$$

Vejamos também que, pela igualdade (2.13), temos

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + \varepsilon(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \varphi(x_1)b_1) \\ \dot{x}_2 = x_1 + \varepsilon(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \varphi(x_1)b_2) \end{cases}.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{-r \sin \theta (-r \sin \theta)}{r^2} - \frac{\varepsilon}{r^2} r \sin \theta F_1 + \frac{r \cos \theta r \cos \theta}{r^2} + \frac{\varepsilon}{r^2} r \cos \theta F_2 \\ &= 1 + \varepsilon \frac{1}{r} (\cos \theta F_2 - \sin \theta F_1). \end{aligned}$$

onde

$$F_i = a_{i1}r \cos \theta + a_{i2}r \sin \theta + a_{i3}\rho \cos(\theta + s) + a_{i4}\rho \sin(\theta + s) + \varphi(r \cos \theta)b_i,$$

com $i = 1, 2$.

Além disso,

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{r \cos \theta (-r \sin \theta)}{r} + \frac{\varepsilon}{r} r \cos \theta F_1 + \frac{r \sin \theta r \cos \theta}{r} + \frac{\varepsilon}{r} r \sin \theta F_2 \\ &= \varepsilon (\cos \theta F_1 + \sin \theta F_2), \end{aligned}$$

onde F_i é dada acima, com $i = 1, 2$.

Procedimento análogo pode ser empregado para se obter as expressões de $\dot{\rho}$ e \dot{s} , de tal forma

que podemos escrever um novo sistema nas variáveis (θ, t, ρ, s) como

$$\begin{cases} \dot{\theta} &= 1 + \varepsilon \frac{1}{r} (\cos \theta F_2 - \operatorname{sen} \theta F_1) \\ \dot{r} &= \varepsilon H_1(\theta, t, \rho, s) \\ \dot{\rho} &= \varepsilon H_2(\theta, t, \rho, s) \\ \dot{s} &= \varepsilon H_3(\theta, t, \rho, s), \end{cases}$$

com H_i como no teorema, $i = 1, 2, 3$.

Contudo, para ε suficientemente pequeno, $\theta'(t) > 0$, qualquer que seja t , e assim podemos eliminar esta variável no sistema anterior. Por exemplo, considerando a expressão de \dot{r} , temos

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{\varepsilon H_1(\theta, t, \rho, s)}{1 + \varepsilon \frac{1}{r} (\cos \theta F_2 - \operatorname{sen} \theta F_1)} = \varepsilon H_1(\theta, t, \rho, s) + \varepsilon^2 \mathcal{O}(1),$$

onde obtemos a expressão para $dr/d\theta$ calculando a série de Taylor em torno do parâmetro $\varepsilon = 0$.

Como este processo pode ser realizado também para as derivadas de ρ e s , temos o sistema apresentado no teorema. Além disso, as funções que aparecem no novo sistema são todas funções elementares, de tal forma que estão bem definidas e contínuas em $\mathbb{R} \times D_n \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f)$. Também, como n é suficientemente grande e $r, \rho \in D_n$, então as funções $1/r$ e $1/\rho$ são contínuas e cada H_i é composta de funções 2π -periódicas. Naturalmente, o novo campo veorial também o localmente Lipschitz com respeito à (r, ρ, s) . ■

O sistema (2.19) está na forma padrão, e portanto precisamos agora encontrar a função h dada por

$$\begin{aligned} h : D_n &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \rho, s) &\longmapsto h(r, \rho, s) = (h_1(r, \rho, s), h_2(r, \rho, s), h_3(r, \rho, s)), \end{aligned}$$

onde

$$h_i(r, \rho, s) = \int_0^{2\pi} H_i(\theta, r, \rho, s) d\theta,$$

$i = 1, 2, 3$.

A integração das funções h_i , $i = 1, 2, 3$ fornecerá, para cada $r > 0$, as funções

$$I_1(r) = \int_0^{2\pi} \varphi(r \cos \theta) \cos \theta d\theta$$

$$I_2(r) = \int_0^{2\pi} \varphi(r \cos \theta) \operatorname{sen} \theta d\theta.$$

Afirmção: As integrais I_1 e I_2 são dadas, respectivamente, por

$$I_1(r) = \begin{cases} r\pi, & 0 < r < 1 \\ 2\frac{\sqrt{r^2-1}}{r} + r\pi - 2r \arctan \sqrt{r^2-1}, & r > 1. \end{cases} \quad (2.20)$$

$$I_2(r) = 0, \quad r > 0.$$

De fato, se $0 < r < 1$, então $|r \cos \theta| \leq 1$ e $|r \sen \theta| \leq 1$ para todo $0 \leq \theta < 1$, e assim $\varphi(r \cos \theta) = r \cos \theta$ para cada θ , donde

$$I_1(r) = r \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = r\pi.$$

$$I_2(r) = r \int_0^{2\pi} \cos \theta \sen \theta d\theta = 0.$$

Por outro lado, se $r > 1$, tomamos $\theta_c \in (0, \pi/2)$ tal que $\cos \theta_c = 1/r$. Desta forma, temos

$$I_1(r) = \int_0^{\theta_c} \cos \theta d\theta + r \int_{\theta_c}^{\pi-\theta_c} \cos^2 \theta d\theta - \int_{\pi-\theta_c}^{\pi+\theta_c} \cos \theta d\theta \\ + \int_{\pi+\theta_c}^{2\pi-\theta_c} \cos^2 \theta d\theta + \int_{2\pi-\theta_c}^{2\pi} \cos \theta d\theta$$

e

$$I_2(r) = \int_0^{\theta_c} \sen \theta d\theta + r \int_{\theta_c}^{\pi-\theta_c} \sen \theta \cos \theta d\theta - \int_{\pi-\theta_c}^{\pi+\theta_c} \sen \theta d\theta \\ + \int_{\pi+\theta_c}^{2\pi-\theta_c} \sen \theta \cos \theta d\theta + \int_{2\pi-\theta_c}^{2\pi} \sen \theta d\theta.$$

Através de uma tabela de integrais, encontramos

$$I_1(r) = 2 \sen \theta_c + r\pi - 2r\theta_c.$$

Agora, como $\cos \theta_c = 1/r$, temos

$$\sen \theta_c = \sqrt{1 - 1/r^2} = \frac{\sqrt{r^2-1}}{r}.$$

Logo,

$$\tan \theta_c = \frac{\sen \theta_c}{\cos \theta_c} = \frac{r\sqrt{r^2-1}}{r} \implies \theta_c = \arctan \sqrt{r^2-1},$$

e portanto

$$I_1(r) = 2\frac{r^2-1}{r} + r\pi - 2r \arctan \sqrt{r^2-1}.$$

Da mesma forma, temos $I_2(r) = 0$, para todo $r > 0$.

Vamos agora calcular as funções h_i , com $i = 1, 2, 3$.

Para o caso em que temos $i = 1$, a função $h_1 = h_1(r, \rho, s)$ é dada por

$$\begin{aligned}
h_1(r, \rho, s) &= \int_0^{2\pi} H_1(\theta, r, \rho, s) d\theta \\
&= a_{11}r \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta + a_{12}r \int_0^{2\pi} \text{sen } \theta \cos \theta d\theta + \\
&+ a_{13}\rho \int_0^{2\pi} \cos(\theta + s) \cos \theta d\theta + a_{14}\rho \int_0^{2\pi} \text{sen}(\theta + s) \cos \theta d\theta + \\
&+ \int_0^{2\pi} \varphi(r \cos \theta) b_1 \cos \theta d\theta + a_{21}r \int_0^{2\pi} \text{sen } \theta \cos \theta d\theta + \\
&+ a_{22}r \int_0^{2\pi} \text{sen}^2 \theta d\theta + a_{23}\rho \int_0^{2\pi} \cos(\theta + s) \text{sen } \theta d\theta + \\
&+ a_{24}\rho \int_0^{2\pi} \text{sen}(\theta + s) \text{sen } \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \varphi(r \cos \theta) b_1 \text{sen } \theta d\theta.
\end{aligned}$$

Agora, usando as relações $\cos(\theta + s) = \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta$ e $\text{sen}(\theta + s) = 2 \text{sen } \theta \cos \theta$, juntamente com uma tabela de integrais, obtemos

$$\begin{aligned}
h_1(r, \rho, s) &= a_{11}r\pi + a_{12}r \cdot 0 + a_{13}\rho\pi \cos s + a_{14}\rho\pi \text{sen } s + b_1 I_1(r) + \\
&+ a_{21}r \cdot 0 + a_{22}r\pi + a_{23}\rho\pi \text{sen } s + a_{24}\rho\pi \cos s + b_1 I_2(r) \\
&= r\pi(a_{11} + a_{22}) + \rho[\cos(s)\pi(a_{13} + a_{24}) + \text{sen}(s)\pi(a_{14} - a_{23})] + b_1 I_1(r).
\end{aligned}$$

Tomando $c_1 = \pi(a_{11} + a_{22})$, $c_2 = \pi(a_{13} + a_{24})$ e $c_3 = \pi(a_{14} - a_{23})$, vem que

$$h_1(r, \rho, s) = c_1 r + \rho(c_2 \cos s + c_3 \text{sen } s) + b_1 I_1(r).$$

Com cálculos análogos, podemos exibir as expressões de h_2 e h_3 :

$$\begin{aligned}
h_2 &= (c_5 \cos s + c_6 \text{sen } s)r + c_7 \rho + b_3 \cos s I_1(r) \\
h_3 &= c_4 + (c_s \text{sen } s - c_3 \cos s) \frac{\rho}{r} + (c_5 \text{sen } s - c_6 \cos s) \frac{r}{\rho} + b_3 \text{sen } s \frac{I_1(r)}{\rho},
\end{aligned} \tag{2.21}$$

onde temos as constantes $c_4 = \pi(a_{21} - a_{12} - a_{43} + a_{34})$, $c_5 = \pi(a_{31} + a_{42})$, $c_6 = \pi(a_{41} - a_{32})$ e $c_7 = \pi(a_{33} + a_{44})$.

Para aplicar o método do averaging, precisamos encontrar os zeros simples das funções h_1 ,

h_2 e h_3 . Primeiramente, resolveremos as equações $h_1(r, \rho, s) = 0$ e $h_2(r, \rho, s) = 0$ para r e ρ . Com efeito, multiplicando a equação $h_1(r, \rho, s) = 0$ por $-b_3 \cos(s)$, $h_2(r, \rho, s) = 0$ por b_1 e isolando ρ , encontramos

$$\rho = \frac{(b_1 c_5 - b_3 c_1) \cos(s) + b_1 c_6 \sin(s)}{(c_2 \cos(s) + c_3 \sin(s)) b_3 \cos(s) - b_1 c_7} r = \frac{k_1(s)}{d(s)} r.$$

Da mesma forma, multiplicando a equação $h_1(r, \rho, s) = 0$ por c_7 , $h_2(r, \rho, s) = 0$ por $c_2 \cos(s) + c_3 \sin(s)$ e isolando $I_1(r)$, temos

$$I_1(r) = \frac{c_1 c_7 - c_2 c_5 \cos^2(s) - (c_3 c_5 + c_2 c_6) \cos(s) \sin(s) - c_3 c_6 \sin^2(s)}{(c_2 \cos(s) + c_3 \sin(s)) b_3 \cos(s) - b_1 c_7} r = \frac{k_2(s)}{d(s)} r.$$

Se substituirmos as expressões para I_r e ρ obtidas anteriormente em $h_3(r, \rho, s) = 0$, então o problema de resolver $h_i(r, \rho, s) = 0$, para cada $i = 1, 2, 3$, se resume a encontrar os zeros da função $f = f(s)$ dada por

$$\begin{aligned} f(s) = & c_4 k_1(s) d(s) + (c_2 \sin(s) - c_3 \cos(s)) k_1^2(s) + (c_5 \sin(s) - c_6 \cos(s)) d^2(s) \\ & + b_3 \sin(s) k_2(s) d(s). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Para estudar o número de zeros desta função f , utilizaremos o seguinte resultado:

Teorema 2.5.4. *A função f dada em (2.22) tem no máximo seis zeros isolados e eles aparecem aos pares da forma s^* junto com $\psi^* = s^* + \pi(\text{mod } 2)$.*

Dem.: Para resolver o problema $f(s) = 0$, denotaremos $\cos(s) = x$ e $\sin(s) = \sqrt{1 - x^2}$. Através de cálculos computacionais, obtemos uma forma equivalente para $f(s) = 0$, dada por

$$C_1 x + C_3 x^3 + (D_0 + D_2 x^2) \sqrt{1 - x^2} = 0, \quad (2.23)$$

onde

$$C_1 = b_1^2 (2c_2 c_5 c_6 - c_3 c_6^2 - c_4 c_5 c_7 - c_6 c_7^2) + b_3^2 (c_1 c_3 c_7 - c_3^2 c_6).$$

$$C_3 = b_1^2 (c_3 c_6^2 - c_3 c_5^2 - 2c_2 c_5 c_6) + b_3^2 (c_3^2 c_6 - c_1^2 c_3 - c_1 c_2 c_4 - c_2^2 c_6 - c_1 c_3 c_7).$$

$$D_0 = b_1^2 (c_2 c_6^2 - c_4 c_6 c_7 + c_5 c_7^2).$$

$$D_2 = b_1^2 (c_2 c_5^2 - 2c_3 c_5 c_6 - c_2 c_6^2) + b_3^2 (c_1^2 c_2 + c_1 c_2 c_7 - c_1 c_3 c_4 - 2c_2 c_3 c_6).$$

Por outro lado, se consideramos o caso em que $\sin(s) = -\sqrt{1 - x^2}$, temos

$$C_1 x + C_3 x^3 + (D_0 - D_2 x^2) \sqrt{1 - x^2} = 0. \quad (2.24)$$

Queremos encontrar $x \in [-1, 1]$ que seja solução de (2.23) e (2.24) ou, de forma equivalente, para a equação

$$(C_1 x + C_3 x^3)^2 + (D_0 - D_2 x^2)^2 (1 - x^2) = 0. \quad (2.25)$$

Contudo, o desenvolvimento desta última equação nos fornece uma equação algébrica de grau 6 com apenas potências pares na variável x , de tal forma que se x satisfaz a equação, então $-x$ também a satisfaz. Desta forma, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, existem no máximo 6 valores de x que satisfazem (2.24). Consequentemente, como $\cos(s) = x$, garantimos a existência de 12 valores para s que satisfazem $f(s) = 0$, para cada x que satisfaz (2.24). Contudo, como $-x$ também satisfaz (2.24), para cada x , temos no máximo 6 zeros satisfazendo $f(s) = 0$. Isto prova a primeira parte do teorema.

Notemos agora, por outro lado, que temos as seguintes relações satisfeitas:

$$\begin{aligned} d(s + \pi) &= (c_2 \cos(s + \pi) + c_3 \operatorname{sen}(s + \pi))b_3 \cos(s + \pi) - b_1 c_7 \\ &= (-c_2 \cos(s) - c_3 \operatorname{sen}(s))(-b_3 \cos(s)) - b_1 c_7 \\ &= d(s). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1(s + \pi) &= (b_1 c_5 - b_3 c_1) \cos(s + \pi) + b_1 c_6 \operatorname{sen}(s + \pi) \\ &= -(b_1 c_5 - b_3 c_1) \cos(s) - b_1 c_6 \operatorname{sen}(s) \\ &= -k_1(s). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2(s + \pi) &= c_1 c_7 - c_2 c_5 \cos^2(s + \pi) - (c_3 c_5 + c_2 c_6) \cos(s + \pi) \operatorname{sen}(s + \pi) \\ &\quad - c_3 c_6 \operatorname{sen}^2(s + \pi) \\ &= c_1 c_7 - c_2 c_5 \cos^2(s) - (c_3 c_5 + c_2 c_6) \cos(s) \operatorname{sen}(s) - c_3 c_6 \operatorname{sen}^2(s) \\ &= k_2(s). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(s + \pi) &= c_4 k_1(s + \pi) d(s + \pi) + (c_2 \operatorname{sen}(s + \pi) - c_3 \cos(s + \pi)) k_1^2(s + \pi) \\ &\quad + (c_5 \operatorname{sen}(s + \pi) - c_6 \cos(s + \pi)) d^2(s + \pi) \\ &\quad + b_3 \operatorname{sen}(s + \pi) k_2(s + \pi) d(s + \pi) \\ &= -c_4 k_1(s) d(s) + (-c_2 \operatorname{sen}(s) + c_3 \cos(s)) k_1^2(s) + (-c_5 \operatorname{sen}(s) \\ &\quad + c_6 \cos(s)) d^2(s) - b_3 \operatorname{sen}(s) k_2(s) d(s) \\ &= -f(s). \end{aligned}$$

Portanto, se s^* é zero de f , então $\psi^* = s^* + \pi$ também é um zero de f , o que demonstra o teorema.

Vejam os que, neste ponto, o problema de encontrar zeros isolados das funções h_i , $i = 1, 2, 3$, resumido ao problema de encontrar o número de zeros da função $f = f(s)$, nos fornece 6 zeros, o que corresponde a 6 ciclos limites do problema inicial. Nosso objetivo é mostrar que metade destes zeros não correspondem a ciclos limites, ou seja, que o problema original possui apenas 3 ciclos limites. Começamos por enunciar o seguinte lema:

Lema 2.5.5. *Consideremos a equação*

$$I_1(r) = cr, \quad r > 0, \quad (2.26)$$

com I_1 dado por (2.20) e c um parâmetro real. Então, estudando a solubilidade desta equação, temos os seguintes casos:

- Se $0 < c < \pi$, então (2.26) tem uma única solução $r^* > 1$.
- Se $c = \pi$, então (2.26) tem o intervalo $(0, 1]$ como conjunto de soluções.
- Se $c \leq 0$ ou $c > \pi$, então (2.26) não tem solução.

Dem.: Se $r \in (0, 1]$ temos $I_1(r) = \pi r$, e então o resultado é válido. Vamos estudar então o caso em que $r > 1$. Neste caso, temos

$$2 \frac{\sqrt{r^2 - 1}}{r} + r\pi - 2r \arctan \sqrt{r^2 - 1} = cr.$$

Fazendo a mudança de variáveis $u = \sqrt{r^2 - 1}$, obtemos a equação

$$\arctan u = \frac{\pi - c}{2} + \frac{u}{u^2 + 1}, \quad u > 0.$$

Estudando a representação gráfica das funções $f_1(u) = \arctan u$ e $f_2(u) = \frac{\pi - c}{2} + \frac{u}{u^2 + 1}$, temos intersecção em um único ponto dos gráficos de f_1 e f_2 se, e somente se, $0 < (\pi - c)/2 < \pi/2$, ou seja, se $0 < c < \pi$. Se $c \leq 0$ ou $c > \pi$, então os gráficos de f_1 e f_2 não se interceptam, enquanto que se $c = \pi$ temos que $r \in (0, 1]$ satisfaz $I_1(r) = cr$. Isso completa a demonstração do Teorema.

Fixemos agora s^* um zero de f . Vamos estudar a solubilidade da equação

$$I_1(r) = \frac{k_2(s)}{d(s)} r$$

para $r > 0$. Pelo Lema (2.26), existe uma solução isolada $r > 0$ desta equação se, e somente se,

$$0 < \frac{k_2(s^*)}{d(s^*)} < \pi,$$

e neste caso ela é única, para $d(s^*) \neq 0$. Então, fixado r^* correspondente à algum s^* , se

$$\frac{k_1(s^*)}{d(s^*)} > 0,$$

então podemos encontrar $\rho^* > 0$ unicamente da equação

$$\rho = \frac{k_1(s)}{d(s)}r.$$

Contudo, desde que os zeros de f aparecem aos pares da forma s^* e $s^* + \pi$, a condição (2.5) é satisfeita para s^* ou para $s^* + \pi$, a menos que $k_1(s^*) = 0$, desde que $k_1(s + \pi) = -k_1(s)$ e $d(s + \pi) = d(s)$. Consequentemente, a função $h(r, \rho, s) = (h_1(r, \rho, s), h_2(r, \rho, s), h_3(r, \rho, s))$ pode ter no máximo três zeros isolados da forma (r^*, ρ^*, s^*) em $(0, \infty) \times (0, \infty) \times [0, 2\pi)$.

Ainda, se tomamos $c_1 = -2$, $c_2 = -2$, $c_3 = 0$, $c_4 = 21/10$, $c_5 = 0$, $c_6 = 1$, $c_7 = -1$, $b_1 = 1$, $b_2 = b_3 = b_4 = 0$, então h tem exatamente três zeros simples, e consequentemente o sistema original tem exatamente três ciclos limites.

De fato, tomando estes valores específicos, temos as seguintes expressões:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 = 2r - 2\rho \cos(s) + I_1(r) \\ h_2 = r \operatorname{sen}(s) - \rho \\ h_3 = 21/10 - 2 \operatorname{sen}(s)(\rho/r) - \cos(s)(r/\rho) \\ d(s) = 1 \\ k_1(s) = \operatorname{sen}(s) \\ k_2(s) = 2 + 2 \cos(s) \operatorname{sen}(s) \\ f(s) = -10 \cos(s) + 21 \operatorname{sen}(s) - 20 \operatorname{sen}^3(s). \end{array} \right.$$

Usando a notação $x = \cos(s)$, a equação $f(s) = 0$ se torna

$$-400x^6 + 360x^4 - 61x^2 + 1$$

cujas raízes são

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \\ x_{3,4,5,6} = \pm \sqrt{\frac{7 \pm \sqrt{11}}{20}}, \end{array} \right.$$

com x_i , $i = 1, \dots, 6 \in (-1, 1)$. Assim f tem seis zeros dados por

$$\begin{cases} s_1 = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ s_{2,3} = \arccos\sqrt{\frac{7 \pm \sqrt{11}}{20}} \\ \psi_{1,2,3} = s_{1,2,3} + \pi. \end{cases}$$

Então a condição $0 < k_2(s^*)/d(s^*) < \pi$ é satisfeita para todos os zeros de f , mas a condição $k_2(s^*)/d(s^*) > 0$ é satisfeita apenas para ψ_1 , ψ_2 e ψ_3 , ou seja, h tem exatamente três raízes. Além disso, $J_h(r^*, \rho^*, s^*) \neq 0$ para cada (r^*, ρ^*, s^*) que é zero de h . De fato, a matriz jacobiana de h ,

$$\begin{pmatrix} 2 + \frac{d}{dr}I_1(r) & -2\cos(s) & 2\rho\sin(s) \\ \sin(s) & -1 & r\cos(s) \\ 2\sin(s)\frac{\rho}{r^2} - \cos(s)\frac{1}{\rho} & -2\sin(s)\frac{1}{r} + \cos(s)\frac{1}{\rho^2} & -2\cos(s)\frac{\rho}{r} + \sin(s)\frac{r}{\rho} \end{pmatrix}$$

tem determinante DJ_h no ponto (r^*, ρ^*, s^*) dado por

$$DJ_h(r^*, \rho^*, s^*) = \frac{4}{5r^{*2}}(\sqrt{r^{*2} - 1} - r^{*2})\cos(s^*)(15\cos(s^*) - 16\sin(s^*)),$$

que é diferente de zero para ψ_1 , ψ_2 e ψ_3 , que é uma condição suficiente para o grau de Brouwer ser não nulo. Portanto, pelo Teorema do Averaging, para cada zero da forma (r^*, ρ^*, s^*) de h existe uma solução $\varphi(\cdot, \varepsilon)$ 2π -periódica do sistema (2.13) tal que $\varphi(\cdot, \varepsilon) \rightarrow (r^*, \rho^*, s^*)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Logo, cada zero da função h corresponde a um ciclo limite do sistema (2.13) que bifurca de (2.11).

Capítulo 3

Aplicações do método averaging

O objetivo deste capítulo é utilizar o método do averaging exposto no capítulo anterior para fazer algumas aplicações e explicitar o procedimento presente nas aplicações do método. Na primeira seção, apresentaremos algo como um corolário do teorema do averaging, exibindo um teorema que permite aplicar o método quando tratamos de sistemas planares. Este teorema é apresentado por Llibre e Buica no mesmo artigo em que é apresentado o próprio averaging. Em seguida, aplicaremos este teorema no sistema de Van der Pol, com o objetivo de detectar o ciclo limite cuja existência é garantida pelo Teorema de Lienard, devido ao fato do sistema de Van der Pol ser um caso particular daqueles sistemas que levam esse nome. Objetivo parecido temos na terceira seção, onde aplicaremos o teorema do averaging para detectar o ciclo limite que aparece na bifurcação de Hopf quando variamos o parâmetro de bifurcação. Para este caso, não utilizaremos o teorema apresentado na seção 3.1, mas faremos uma aplicação direta do método apenas fazendo uma mudança de variáveis, nos moldes da seção 2.5. Por fim, novamente usando o teorema da seção 3.1, exibiremos um resultado que fornece um cota inferior para o número de ciclos limites que bifurcam de um centro quando perturbamos o sistema com um polinômio de grau n . Explicitaremos a relação entre o número de ciclos limites que bifurcam e a ordem da perturbação. Este resultado, na forma que se assemelha àquele que apresentaremos, foi publicado em 2009 (ver [3]) e reproduzido neste trabalho de forma independentemente e utilizando uma metodologia diferente. Terminaremos o capítulo 4 com este resultado.

3.1 Um método para sistemas planares

Antes de dar início à construção do teorema propriamente dito, vamos definir dois conceitos que serão importantes nesta seção, que é a definição de integral primeira e de fator de integração, bem como a relação que existe entre estes dois conceitos. Para isso, desde que temos objetivo de fornecer um dispositivo prático para aplicar o método do averaging à sistemas planares,

consideremos o sistema polinomial plano de grau n como segue

$$\begin{cases} \dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y), \end{cases} \quad (3.1)$$

onde P e Q são polinômios, $n = \max\{\deg P, \deg Q\}$. Denotando por $X = (P, Q)$ o campo vetorial associado a (3.1) e por

$$X = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y}$$

o operador linear associado a (3.1), temos as seguintes definições:

Definição 3.1.1. Seja $U \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto. Uma função $H \in C^k(U, \mathbb{R})$, com $k = 0, 1, \dots, \infty, w$, é uma integral primeira do sistema (3.1) em U se H é constante sobre cada solução do sistema e H é não constante sobre algum subconjunto de U . Se $k \geq 1$, então a definição é equivalente à $XH = 0$ sobre U .

Pela definição de integral primeira, vemos que H é constante ao longo das soluções, e por este motivo elas são chamadas de "constantes de movimento". Por outro lado, tomando $H(x) = k$, onde k é uma constante, esta hipersuperfície contém as órbitas da equação considerada.

Um exemplo clássico de integral primeira é a função hamiltoniana, que define um sistema da forma

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \end{cases},$$

também chamado de **sistema Hamiltoniano**, onde $H = H(x, y)$ é a função hamiltoniana. Algumas das aplicações das seções posteriores se concentrarão nos sistemas hamiltonianos.

Com respeito ao fator de integração, temos a seguinte definição:

Definição 3.1.2. Uma função analítica $\mu : U \rightarrow \mathbb{R}$ não constante é um fator de integração de $\dot{x} = f(x)$ se uma das três condições equivalentes vale:

1. $\operatorname{div}(\mu P, \mu Q) = 0$,
2. $\partial(\mu P)/\partial x + \partial(\mu Q)/\partial y = 0$,
3. $X\mu + \mu \operatorname{div}(P, Q) = 0$.

Note que a definição nos diz que se $\mu : U \rightarrow \mathbb{R}$ é um fator de integração, então μ

também satisfaz a condição

$$P \frac{\partial \mu}{\partial x} + Q \frac{\partial \mu}{\partial y} = - \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) R,$$

que é uma relação muito útil para encontrar fatores de integração na prática. Por fim, é importante explicitar a relação que existe entre integral primeira e fator de integração. Esta relação diz que, se

$$H(x, y) = - \int \mu(x, y) P(x, y) dy + h(x)$$

é a integral primeira associada ao fator de integração μ , onde H é escolhida de tal forma que $\partial H / \partial x = \mu Q$, então temos

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu P = - \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \dot{y} = \mu Q = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y). \end{cases} \quad (3.2)$$

Reciprocamente, dada uma integral primeira de (3.1), sempre podemos encontrar um fator de integração μ para o qual o (3.2) é satisfeito.

Suponhamos agora, introduzidos os conceitos acima, que as funções $P, Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que aparecem no sistema (3.1) satisfaçam a hipótese que o ponto singular $(0, 0)$ seja circundado por um anel de órbitas periódicas

$$\Gamma_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = h, h_c < h < h_s\},$$

onde H é uma integral primeira, h_c é o nível crítico de H correspondendo ao centro $(0, 0)$ e h_s denota o valor do nível mais externo do anel de órbitas periódicas Γ_h .

Vamos assumir que $0 \leq h_c < h_s$ e que $\mu = \mu(x, y)$ é o fator de integração de (3.1) correspondente a integral primeira H . Feito isso, perturbamos (3.1) por um parâmetro ε da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) + \varepsilon p(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} = Q(x, y) + \varepsilon q(x, y, \varepsilon). \end{cases} \quad (3.3)$$

onde $p, q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas.

Nosso objetivo é obter uma maneira de aplicar o método do averaging à sistemas que tem a forma (3.3), e nossa primeira tarefa é escrever este sistema na forma padrão. O teorema que apresentaremos nesta seção que exhibe a equação diferencial na forma padrão relaciona a raiz da energia do sistema, $R = \sqrt{h}$, com o ângulo das coordenadas polares φ , como segue:

Teorema 3.1.3. *Assumimos que o sistema (3.3) possui um anel de órbitas periódicas Γ_h e que*

$xQ(x, y) - yP(x, y) \neq 0$, para todo $(x, y) \in \Gamma_h$. Seja $\rho : (-\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s}) \times [0, 2\pi) \rightarrow [0, \infty)$ uma função contínua tal que

$$H(\rho(R, \varphi) \cos \varphi, \rho(R, \varphi) \sin \varphi) = R^2, \quad (3.4)$$

para todo $R \in (-\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s})$ e para todo $\varphi \in [0, 2\pi)$. Então a equação diferencial que descreve a dependência entre a raiz da energia R e o ângulo φ de (3.3) é

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon \cdot \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp - Pq)}{2R(Qx - Py) + 2R\varepsilon(qx - py)}, \quad (3.5)$$

onde $x = \rho(R, \varphi) \cos \varphi$ e $y = \rho(R, \varphi) \sin \varphi$.

Tomaremos $\varepsilon_f > 0$ suficientemente pequeno e $D = \bigcup_{h_c^* < h < h_s^*} \Gamma_h$, onde $h_c < h_c^* < h_s^* < h_s$ são fixos, mas arbitrariamente próximos de h_c e h_s , respectivamente. O campo vetorial de (3.5) está bem definido, é contínuo em $D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f)$ e é 2π -periódico com relação à φ .

Dem.: Vejamos primeiramente que se μ é um fator de integração correspondente à integral primeira H , então temos as relações

$$\frac{\partial H}{\partial x} P + \frac{\partial H}{\partial y} Q = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -\mu P, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = \mu Q.$$

Definimos então a função

$$G(r, R, \varphi) = H(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - R^2$$

em cada ponto (r, φ) do anel de órbitas periódicas, onde $R \in (-\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s})$ e (r, φ) denotam as coordenadas polares.

Temos

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{\partial H}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial H}{\partial y} \sin \varphi = \mu(Q \cos \varphi - P \sin \varphi).$$

Para cada r_0, φ_0 na região de centros determinada por Γ_h existe um R_0 tal que $G(r_0, R_0, \varphi_0) = 0$. Por outro lado, a hipótese do teorema nos garante que

$$\frac{\partial G}{\partial r}(r_0, R_0, \varphi_0) \neq 0,$$

e assim, pelo Teorema da Função Implícita, em torno de cada (R_0, φ_0) existe uma função diferenciável $\rho = \rho(R, \varphi)$ tal que (3.4) vale. Dessa forma, ρ está bem definida em $(-\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s}) \times [0, 2\pi)$ e satisfaz (3.4). Além disso, a equação (3.4) nos fornece a relação $R(t) = \sqrt{H(x(t), y(t))}$, enquanto que as igualdades $x = \rho \cos \varphi$ e $y = \rho \sin \varphi$ nos dizem que $\varphi(t) = \arctan y(t)/x(t)$, para

cada $t \in \mathbb{R}$. Logo, temos

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= \frac{(\partial H/\partial x)\dot{x} + (\partial H/\partial y)\dot{y}}{2\sqrt{H}} \\ &= \frac{\mu Q(P + \varepsilon p) - \mu P(Q + \varepsilon q)}{2R} \\ &= \frac{\mu QP + \mu Q\varepsilon p - \mu PQ - \mu P\varepsilon q}{2R} \\ &= \varepsilon \frac{\mu(Qp - Pq)}{2R}. \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{1 + (y/x)^2} \frac{\dot{y}x - y\dot{x}}{x^2} \\ &= \frac{(Q + \varepsilon q)x - y(P + \varepsilon p)}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{(Qx - yP) + \varepsilon(qx - py)}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Eliminando o tempo nas duas equações acima, obtemos o resultado. ■

Note que encontrando a série de MacLaurin em torno de $\varepsilon = 0$, a função $F = F(R, \varphi)$ dada por

$$F(R, \varphi) = \varepsilon \cdot \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp - Pq)}{2R(Qx - Py) + 2R\varepsilon(qx - py)}$$

se torna

$$F(R, \varphi) = \varepsilon \cdot \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp - Pq)}{2R(Qx - Py)} + \varepsilon^2 \mathcal{O}(1),$$

de tal forma que obtemos o sistema promediado

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon f_1(R),$$

onde

$$f_1(R) = \int_0^{2\pi} \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp - Pq)}{2R(Qx - Py)} d\varphi.$$

A seguir apresentamos duas aplicações concretas do teorema do averaging, ou seja, aplicaremos o método a dois resultados clássicos de sistemas dinâmicos, que são, respectivamente, a equação de Van der Pol e a bifurcação de Hopf.

3.2 A equação de Van der Pol

Nesta seção vamos aplicar o método visto na seção anterior para estudar o número de ciclos limites que bifurcam do sistema de Van Der Pol

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - \varepsilon(1 - x^2)y.\end{aligned}$$

Como é sabido, o sistema de Van der Pol é um sistema de Liénard e possui apenas um ciclo limite, pois satisfaz as hipóteses do Teorema de Liénard (ver [8]). Utilizando o averaging, vamos detectar a existência deste ciclo limite. Como estamos interessados no retrato de fases do sistema, podemos multiplicar o sistema pela função constante $h(x, y) \equiv -1$. Dessa forma, notamos que se utilizarmos as mesmas notações da seção anterior, podemos identificar

$$\begin{cases} P(x, y) = -y \\ Q(x, y) = x \\ p(x, y) = 0 \\ q(x, y) = (1 - x^2)y \\ H(x, y) = \left(\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2}\right), \end{cases}$$

pois assim temos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) + \varepsilon \cdot 0 = P(x, y) + \varepsilon p(x, y). \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + \varepsilon \cdot (x^2 - 1)y = Q(x, y) + \varepsilon q(x, y).\end{aligned}$$

Utilizando o Teorema (3.5), o numerador $N = N(x, y)$ do teorema se escreve como

$$N(x, y) = \mu(x^2 + y^2)(Pq - Qp).$$

Como temos $\mu(x, y) \equiv 1$, fazendo uma mudança de variáveis da forma

$$\begin{cases} x = \rho(R, \varphi) \cos(\varphi) \\ y = \rho(R, \varphi) \sin(\varphi), \end{cases}$$

segue que

$$\begin{aligned}N(x, y) &= (x^2 + y^2)(Pq - Qp) \\ &= \rho^2[(1 - x^2)y^2] \\ &= \rho^2[\rho^2 \sin^2(\varphi) - \rho^4 \cos^2(\varphi) \sin^2(\varphi)] \\ &= \rho^4 \sin^2(\varphi) - \rho^6 \cos^2(\varphi) \sin^2(\varphi).\end{aligned}$$

No entanto, desde que a exigência $H(\rho \cos(\varphi), \rho \sin(\varphi)) = R^2$ nos fornece $\rho = \rho(R, \varphi) = R\sqrt{2}$, vem que

$$N(x, y) = 4 \operatorname{sen}^2(\varphi) \cdot R^4 - 8 \cos^2(\varphi) \operatorname{sen}^2(\varphi) \cdot R^6.$$

Por outro lado, o denominador $D = D(x, y)$ do Teorema (3.5) é dado por

$$D(x, y) = 2R(Qx - Py) + 2R\varepsilon(qx - py).$$

Contudo, desta expressão do denominador, apenas o termo $\overline{D}(x, y) = 2R(Qx - Py)$ exerce influência sobre o método, e portanto basta encontrar uma expressão para tal. Com efeito,

$$\begin{aligned} \overline{D}(x, y) &= 2R(Qx - Py) \\ &= 2R(x^2 + y^2) \\ &= 2R(\rho^2) \\ &= 4R^3 \end{aligned}$$

Portanto o teorema (3.5) se escreve como

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{4 \operatorname{sen}^2(\varphi) \cdot R^4 - 8 \cos^2(\varphi) \operatorname{sen}^2(\varphi) \cdot R^6}{4 \cdot R^3 + \varepsilon g(R, \varphi \varepsilon)}.$$

Agora, de acordo com o método da seção anterior, precisamos encontrar os zeros simples da função

$$\begin{aligned} f_1(R) &= \int_0^{2\pi} \frac{4 \operatorname{sen}^2(\varphi) \cdot R^4 - 8 \cos^2(\varphi) \operatorname{sen}^2(\varphi) \cdot R^6}{4 \cdot R^3} d\varphi \\ &= R \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(\varphi) d\varphi - 2R^3 \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) \operatorname{sen}^2(\varphi) d\varphi \\ &= \pi R - 2(\pi/4)R^3 \\ &= R(\pi - (\pi/2)R^2). \end{aligned}$$

Portanto, vem que

$$f_1(R) = 0 \implies \begin{cases} R = 0 \\ R = -\sqrt{2} \\ R = \sqrt{2} \end{cases}.$$

Como R é a raiz da energia h do sistema, então R não pode ser negativo. Ainda, a raiz $R = 0$ corresponde à singularidade na origem, e portanto temos para R apenas o valor $R = \sqrt{2}$.

Precisamos agora verificar se $R = 2$ é um zero simples, ou seja, se $(f_1)'(\sqrt{2}) \neq 0$. Mas

$$(f_1)'(R) = \pi - (3/2)\pi R^2 \implies (f_1)'(\sqrt{2}) = \pi - 3\pi = -2\pi \neq 0.$$

Portanto, pelo Teorema da Função Inversa, existe uma vizinhança V de $R = \sqrt{2}$ tal que $f^1(v) \neq 0, \forall v \in V$. Consequentemente,

$$d_B(f_1, V, 0) = \text{sgn} \left((f_1)' \left(\sqrt{2} \right) \right) = \text{sgn}(-2\pi) = -1 \neq 0,$$

e pelo teorema do averaging, o sistema inicial possui um ciclo limite, como esperado para a equação de Van der Pol.

3.3 Bifurcação de Hopf

Nosso objetivo nesta seção é exibir uma aplicação do averaging a um fenômeno bem conhecido da teoria de sistemas dinâmicos, a saber, a bifurcação de Hopf (ver [8] e [11]). O sistema que abordaremos, que apresenta a bifurcação de Hopf, é dado por

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\varepsilon x - y + \varepsilon(xy + xy^2 + x^3 + xy^3 + x^3y) \\ \dot{y} &= x - \varepsilon y + \varepsilon(y^2 + y^3 + yx^2 + x^3 + y^2x^2 + y^4), \end{cases}$$

onde ε representa o parâmetro de bifurcação. Se escrevemos $X = (x, y)^T$, podemos escrever o sistema na forma

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -\varepsilon & -1 \\ 1 & -\varepsilon \end{pmatrix} X + \varepsilon \begin{pmatrix} R_1(X) \\ R_2(X) \end{pmatrix}.$$

Notemos que a parte linear do sistema depende do parâmetro de perturbação ε e tem autovalores $-\varepsilon \pm i$. Assim, se $\varepsilon > 0$, o sistema é hiperbólico e topologicamente conjugado, pelo teorema de Grobman-Hartman, a um foco atrator linear. Da mesma forma, se $\varepsilon < 0$, o sistema é topologicamente conjugado a um foco repulsor. Se $\varepsilon = 0$, o sistema deixa de ser hiperbólico, e nesse caso temos um centro global isócrono. Assim, o Teorema de Hopf (ver [8]), garante que, quando variamos ε continuamente através do valor $\varepsilon = 0$, o sistema muda de estabilidade após o aparecimento de um ciclo limite, donde podemos verificar a ocorrência da bifurcação de Hopf.

Para aplicar o método e detectar esta órbita periódica, vamos mudar as coordenadas do sistema e trabalhar em coordenadas polares. Com efeito, o sistema nas novas coordenadas torna-se

$$\begin{cases} \dot{r} &= \varepsilon r(r^2 - 1)(1 + r \text{sen } \theta) \\ \dot{\theta} &= 1 + \varepsilon r^2 \cos^2 \theta. \end{cases}$$

Utilizando a regra da cadeia podemos eliminar o tempo no sistema anterior:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r(r^2 - 1)(1 + r \text{sen } \theta)}{1 + \varepsilon r^2 \cos^2 \theta}.$$

Se ε é suficientemente pequeno, podemos reescrever a equação diferencial acima como

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon(r(r^2 - 1) + r^2(r^2 - 1)\sin\theta) + \varepsilon^2(R(r, \theta, \varepsilon)).$$

Dessa forma temos satisfeito as hipóteses do teorema do averaging, e assim podemos aplicar o método (note que $F_1(r, \theta) = r(r^2 - 1) + r^2(r^2 - 1)\sin\theta$). Com efeito,

$$f_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (r(r^2 - 1) + r^2(r^2 - 1)\sin(\theta))d\theta = r(r^2 - 1)$$

Logo, $f_1(r) = 0 \implies r = 0$ ou $r = \pm 1$. Mas, como r é o raio das coordenadas polares (ou seja, é positivo), excluindo-se $r = 0$, obtemos que o único valor válido para r é 1. Agora, temos

$$f_1'(r) = 3r^2 - 1 \implies f_1'(1) = 3r^2 - 1 = 2 \neq 0.$$

Portanto, pelo Teorema da Função Inversa, existe uma vizinhança de $r = 1$ tal que $f_1(v) \neq 0$, $\forall v \in V$. Consequentemente, $d_B(f_1, V, 0) = \text{sign}(f_1'(1)) = \text{sign}(2) = 1 \neq 0$, e pelo teorema do averaging, o sistema inicial possui um ciclo limite, o que está de acordo com o que ocorre na bifurcação de Hopf.

Podemos concluir que o método do averaging detecta o ciclo limite da bifurcação de Hopf, confirmando resultados conhecidos anteriormente pelo Teorema da Bifurcação de Hopf. Assim, vimos que é possível aplicar o método a um conceito da teoria de bifurcações quando enxergamos o parâmetro de bifurcação como uma perturbação do sistema.

3.4 Ciclos Limites para uma Classe de Sistemas Hamiltonianos

O teorema que apresentamos a seguir foi elaborado e demonstrado durante nosso trabalho. Ele fornece uma cota inferior para o número de ciclos limites de um dado sistema hamiltoniano quando perturbamos as órbitas deste sistema com uma função polinomial. Ainda, neste teorema fornecemos o número de ciclos limites que surgem da perturbação em função da ordem desta perturbação. Por fim, mostramos que esta cota pode ser realizada, ou seja, que existem sistemas que possuem exatamente aquela quantidade de ciclos limites indicados no teorema.

Teorema 3.4.1. *Pelo menos $[(n-1)/2]$ ciclos limites bifurcam do sistema hamiltoniano*

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -y \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial x} = 2ax \end{cases} \quad (3.6)$$

onde $a > 0$ e $H(x, y) = \frac{y^2}{2} + V(x)$, com $V(x) = ax^2$, quando perturbamos (3.6) com polinômios de grau n da forma

$$p(x, y) = \sum_{i+j \leq n} a_{ij} x^i y^j, \quad q(x, y) = \sum_{i+j \leq n} b_{ij} x^i y^j.$$

Ainda, existem sistemas com exatamente $[(n-1)/2]$ ciclos limites.

Dem.: Fazendo uma mudança de variáveis da forma

$$\begin{cases} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi, \end{cases}$$

e exigindo a condição $H(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = R^2$, onde $R = \sqrt{h}$ e h é o nível da energia de (3.4), então podemos expressar ρ em função de R e φ , como segue:

$$\rho(R, \varphi) = \frac{R}{\sqrt{a \cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{2}}}.$$

Identificando $P(x, y) = -y$ e $Q(x, y) = 2ax$, podemos usar o teorema devido a Llibre e Buica (ver [1]) para sistemas planares, que expressa a variação de R com relação à φ , que diz que

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon \cdot \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp - Pq)}{2R(Qx - Py) + 2R\varepsilon(qx - py)}, \quad (3.7)$$

onde μ é o fator de integração (que nesse caso é $\mu(x, y) \equiv 1$, pois o sistema é hamiltoniano).

Com efeito, se $N(x, y) = \mu(x^2 + y^2)(Qp - Pq)$ é o numerador de (3.4), então

$$\begin{aligned} N(x, y) &= \rho^2 \left(2ax \sum_{i+j \leq n} a_{ij} x^i y^j + y \sum_{i+j \leq n} b_{ij} x^i y^j \right) \\ &= \rho^2 \left(\sum_{i+j \leq n} 2a \cdot a_{ij} x^{i+1} y^j + \sum_{i+j \leq n} b_{ij} x^i y^{j+1} \right) \\ &= \rho^2 \left(\sum_{i+j \leq n} (2a \cdot a_{ij} x + b_{ij} y) x^i y^j \right). \end{aligned}$$

Substituindo o valor de $\rho = \rho(R, \varphi)$, $x = \rho \cos \varphi$ e $y = \rho \sin \varphi$ em $D(x, y)$ e chamando

$$\begin{cases} A_{ij} &= 2a \cdot a_{ij} \\ B_{ij} &= b_{ij} \\ C &= a \cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{2} \end{cases}$$

vem que

$$\begin{aligned} N(x, y) &= \frac{R^2}{C} \left[\sum_{i+j \leq n} \left(A_{ij} \frac{R}{C^{1/2}} \cos \varphi + B_{ij} \frac{R}{C^{1/2}} \sin \varphi \right) \frac{R^{i+j}}{C^{(i+j)/2}} \cos^i \varphi \sin^j \varphi \right] \\ &= \frac{R^2}{C^{3/2}} \left[\sum_{i+j \leq n} (A_{ij} \cos \varphi + B_{ij} \sin \varphi) \frac{R^{i+j+1}}{C^{(i+j)/2}} \cos^i \varphi \sin^j \varphi \right] \\ &= \frac{R^2}{C^{3/2}} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{i+j=k} (A_{ij} \cos \varphi + B_{ij} \sin \varphi) \frac{R^{k+1}}{C^{k/2}} \cos^i \varphi \sin^j \varphi \right] \\ &= \frac{R^2}{C^{3/2}} \left(\frac{R^2}{C^{1/2}} \bar{f}_1(\varphi) + \frac{R^3}{C^{2/2}} \bar{f}_2(\varphi) + \dots + \frac{R^{n+1}}{C^{n/2}} \bar{f}_n(\varphi) \right), \end{aligned}$$

onde

$$\bar{f}_k(\varphi) = \sum_{i+j=k} (A_{ij} \cos \varphi + B_{ij} \sin \varphi) \cos^i \varphi \sin^j \varphi, \quad k = 1, \dots, n.$$

Finalmente, se tomamos

$$f_k(\varphi) = \frac{1}{C^{(k+3)/2}} \bar{f}_k(\varphi),$$

então temos o numerador dado por

$$N(x, y) = R^4 f_1(\varphi) + R^5 f_2(\varphi) + \dots + R^{n+3} f_n(\varphi).$$

Agora, vamos obter uma expressão para o denominador

$$D(x, y) = 2R(Qx - Py) + 2R\varepsilon(qx - py).$$

Temos

$$\begin{aligned}
D(x, y) &= 2R(Qx - Py) + 2R\varepsilon(qx - py) \\
&= 2R[(Qx - Py) + \varepsilon(qx - py)] \\
&= 2R \left[(2ax^2 + y^2) + \varepsilon \left(x \sum_{i+j \leq n} b_{ij} x^i y^j - y \sum_{i+j \leq n} a_{ij} x^i y^j \right) \right] \\
&= 2R \left[\left(2a \frac{R^2}{C} \cos^2 \varphi + \frac{R^2}{C} \sin^2 \varphi \right) + \varepsilon \left(\sum_{i+j \leq n} (b_{ij} x - a_{ij} y) x^i y^j \right) \right] \\
&= R^3 g(\varphi) + \varepsilon H(R, \varphi),
\end{aligned}$$

onde $g(\varphi) = \frac{2}{C}(2a \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)$.

Portanto, temos uma expressão para (3.4), que é dada por

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon \cdot \frac{R^4 f_1(\varphi) + R^5 f_2(\varphi) + \dots + R^{n+3} f_n(\varphi)}{R^3 g(\varphi) + \varepsilon H(R, \varphi)}.$$

O campo do sistema promediado é dado pelo produto de ε pela integral da função

$$\frac{R^4 f_1(\varphi) + R^5 f_2(\varphi) + \dots + R^{n+3} f_n(\varphi)}{R^3 g(\varphi)} = Rh_1(\varphi) + R^2 h_2(\varphi) + \dots + R^n h_n(\varphi),$$

onde $h_k(\varphi) = \frac{f_k(\varphi)}{g(\varphi)}$, $k = 1, \dots, n$.

Assim, excluindo-se o caso $R = 0$, o polinômio $Rh_1(\varphi) + R^2 h_2(\varphi) + \dots + R^n h_n(\varphi)$ pode ter no máximo $n - 1$ raízes. No entanto, sabemos que funções periódicas de período T que satisfazem a propriedade $f(t + (T/2)) = -f(t)$ tem sua integral dada por

$$\int_0^T f(t) dt = 0.$$

Inspirados por esta propriedade das funções periódicas, e observando que as funções $h_k(\varphi)$ são 2π -periódicas satisfazendo $h(\varphi + (T/2)) = -h(\varphi)$, $\forall k = 1, \dots, n$, temos a seguinte afirmação:

Afirmação: Se k é par, então $\int_0^{2\pi} h_k(\varphi) d\varphi = 0$.

De fato, temos

$$\begin{aligned} h_k(\varphi) &= \frac{f_k(\varphi)}{g(\varphi)} \\ &= \frac{1}{C^{(k+3)/2}} \frac{1}{g(\varphi)} \bar{f}_k(\varphi) \\ &= \frac{1}{C^{(k+3)/2}} \frac{1}{g(\varphi)} \sum_{i+j=k} (A_{ij} \cos \varphi + B_{ij} \operatorname{sen} \varphi) \cos^i \varphi \operatorname{sen}^j \varphi, \end{aligned}$$

onde

$$\frac{1}{C^{(k+3)/2}} = \frac{1}{C^{(k+3)/2}(\varphi)} = \frac{1}{\sqrt{(a \cos^2 \varphi + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{2})^{k+3}}}$$

e

$$\frac{1}{g(\varphi)} = \frac{a \cos^2 \varphi + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{2}}{2(2a \cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi)} = \frac{1}{4}$$

satisfazem a propriedade $C^{(k+3)/2}(\varphi + \pi) = -C^{(k+3)/2}(\varphi)$ e $g(\varphi + \pi) = -g(\varphi)$

Agora, quaisquer que sejam i e j , temos que a função $l_1^{ij}(\varphi) = A_{ij} \cos \varphi + B_{ij} \operatorname{sen} \varphi$, satisfaz $l_1^{ij}(\varphi + \pi) = -l_1^{ij}(\varphi)$ e, portanto, nos resta avaliar a função l_2^{ij} dada por

$$l_2^{ij}(\varphi) = \cos^i \varphi \operatorname{sen}^j \varphi.$$

A fim de que tenhamos $h_k(\varphi + \pi) = -h_k(\varphi)$, é necessário que $l_2^{ij}(\varphi + \pi) = l_1^{ij}(\varphi)$. Contudo, basta notar que $\cos(\varphi + \pi) = -\cos(\varphi)$ e $\operatorname{sen}(\varphi + \pi) = -\operatorname{sen}(\varphi)$, pois assim, se $i + j$ é par, temos $l_2^{ij}(\varphi + \pi) = l_1^{ij}(\varphi)$ e, conseqüentemente, $h_k(\varphi + \pi) = -h_k(\varphi)$. Mas $i + j = k$, e então temos que para k par, a afirmação é válida.

Portanto, concluímos que, se n é ímpar, o polinômio $Rh_1(\varphi) + R^2h_2(\varphi) + \dots + R^n h_n(\varphi)$ possui $(n-1)/2$ raízes, sendo que, se a ordem do polinômio é $n+1$, esta cota não aumenta, pois

$$\int_0^{2\pi} h_{n+1}(\varphi) d\varphi = 0,$$

desde que $n+1$ é par. Conseqüentemente, se estas $[(n-1)/2]$ raízes forem simples (provaremos este fato posteriormente), teremos $[(n-1)/2]$ ciclos limites bifurcando de (3.6), onde $[\cdot]$ representa a parte inteira.

Para obter sistemas que tem exatamente $[(n-1)/2]$ ciclos limites, basta notar que

$$h_k(\varphi) = \frac{1}{4\sqrt{(a \cos^2 \varphi + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{2})^{k+3}}} \sum_{i+j=k} (2a \cdot a_{ij} \cos \varphi + b_{ij} \operatorname{sen} \varphi) \cos^i \varphi \operatorname{sen}^j \varphi.$$

Sem perda de generalidade, consideremos n ímpar. Neste caso, tomando, para cada $k = 1, 2, \dots, n$, os valores

$$\begin{cases} a_{k0} = 0, & k = 2, 4, \dots, n-1 \\ b_{0k} = 0, & \forall k \\ b_{k-j,j} = -2a \cdot a_{k-j-1,j+1}, & j = 0, 1, \dots, k-1, \end{cases}$$

vem que

$$\sum_{i+j=k} (2a \cdot a_{ij} \cos \varphi + b_{ij} \operatorname{sen} \varphi) \cos^i \varphi \operatorname{sen}^j \varphi = 2a \cdot a_{k0} \cos^{k+1} \varphi,$$

donde

$$\int_0^{2\pi} h_k(\varphi) d\varphi = \frac{a \cdot a_{k0}}{2} \int_0^{2\pi} \cos^{k+1} \varphi \left(\sqrt{\left(a \cos^2 \varphi + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{2} \right)^{k+3}} \right)^{-1} d\varphi.$$

Desta forma, se

$$A_k = \int_0^{2\pi} h_k(\varphi) d\varphi \quad \text{e} \quad B_k = \int_0^{2\pi} \cos^{k+1} \varphi \left(\sqrt{\left(a \cos^2 \varphi + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{2} \right)^{k+3}} \right)^{-1} d\varphi$$

então

$$A_k = \frac{a \cdot a_{k0}}{2} B_k.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} F_1(R) &= \int_0^{2\pi} (h_1(\varphi)R + h_2(\varphi)R^2 + \dots + h_n(\varphi)R^n) d\varphi \\ &= A_1R + A_3R^3 + \dots + A_nR^n \\ &= R(A_1 + A_3R^2 + \dots + A_nR^{n-1}). \end{aligned}$$

Consideremos agora o polinômio

$$P(z) = (z^2 - 1)(z^2 - 2) \dots (z^2 - (n-1)) = C_1 + C_3z^2 + \dots + C_nz^{n-1}.$$

Este polinômio exatamente $(n-1)/2$ raízes reais distintas e positivas. Assim, o polinômio

$$A_1 + A_3R^2 + \dots + A_nR^{n-1}$$

terá esta quantidade de raízes se tivermos

$$A_i = C_i, \quad i = 1, 3, \dots, n,$$

ou seja,

$$a_{k0} = \frac{2C_k}{aB_k}, \quad i = 1, 3, \dots, n.$$

Finalmente, utilizando a afirmação provada anteriormente, podemos afirmar que, dados

$$\begin{cases} b_{0k} = 0 \\ b_{k-j,j} = -2a \cdot a_{k-j-1,j+1}, & j = 0, 1, \dots, k-1 \\ a_{k0} = 0, & k = 2, 4, \dots, n-1 \\ a_{k0} = \frac{2C_k}{aB_k}, \end{cases}$$

o sistema original possui exatamente $[(n-1)/2]$ ciclos limites.

Tomando-se então $a_{k0} = 2C_k/aB_k$, os zeros de $\bar{F}^1(R) = A_1 + A_2R + \dots + A_nR^{n-1}$ são todos reais distintos, de tal forma que a multiplicidade de cada um deles é 1. Logo, \bar{F}^1 e sua derivada não possuem fatores comuns, o que implica que zeros de \bar{F}^1 não são zeros de $D\bar{F}^1$. Portanto, se r^* é tal que $\bar{F}^1(r^*) = 0$, então $D\bar{F}^1(r^*) \neq 0$, o que garante que o grau de Brouwer de F^1 , com relação a uma vizinhança de r^* neste ponto é diferente de zero, donde garante-se de fato a existência de $[(n-1)/2]$ ciclos limites.

Referências Bibliográficas

- [1] Buica A. & Llibre, J. *Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree*, 2nd. ed. Addison-Wesley Bull Sci. Math. 128, 7-22. (2004).
- [2] Buica A. & Llibre, J. *Bifurcation of limit cycles from a four-dimensional center in control systems*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 15 nro 8 pp. 2653-2662. (2005).
- [3] Llibre, J. & Makhlouf, A. *Limit cycles of polinomial differential systems bifurcating from the periodic orbits of a linear differential system in \mathbb{R}^d* , Bull Sci. Math. 133, 578-587. (2009).
- [4] Buica, A. & Llibre, J. & Makarenkov, O. *Asymptotic stability of periodic solutions for nonsmooth differential equations with applications to the nonsmooth van der Pol oscillator*, SIAM J. Math. Anal. 40 (2009) 2478-2495.
- [5] Llibre, J. *Averaging Theory and limit cycles for quadratic systems*, Radovi Mat, 1-14. (2002).
- [6] Sanders, J.A. & Verhulst, F. *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, Appl. Math. Sci., vol.59, Springer (1985).
- [7] Verhulst, F. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Universitext, Springer (1991).
- [8] Perko, L. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Cambridge University Press (1994). Springer (1991).
- [9] Dumortier, F. & Llibre, J. & Artés, J.C. *Qualitative Theory of Planar Differential Equations*. Universitext, Springer (2006).
- [10] Devaney, R. L. & Hirsh, M. & Smale, S. *Differential Equations, Dynamical Systems and Introduction to Chaos*. Elsevier Academic Press, San Diego (2004).
- [11] Monteiro, L. H. A. *Sistemas Dinâmicos*, Livraria da Física, São Paulo (2006).
- [12] Malaquias, A. G. B. *O Método do averaging via Grau de Brouwer para determinar o número de ciclos limites de um centro 4-dimensional em sistemas de controle*. 2010. 57 f. Dissertação de Mestrado - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia. 2010.
- [13] Berestycki, *Methodes Topologiques at Problemes Aux limites non lineares*. 1975. These de Docteur - Soutenue, França. 1975.
- [14] Almeida, O. B. *Teoria do Grau e Aplicações*. 2006. 125 f. Dissertação de Mestrado - Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande. 2006.