



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Érica Boizan Batista

*O papel da equivalência de contato na
 C^r -classificação de germes de aplicações C^r -estáveis*

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
Rua Cristóvão Colombo, 2265, 15054-000
São José do Rio Preto - SP - Brasil
Telefone: (17) 3221-2444 - Fax: (17) 3221-2445

Érica Boizan Batista

*O papel da equivalência de contato na
 C^r -classificação de germes de aplicações
 C^r -estáveis*

Orientador:
Prof. Dr. João Carlos Ferreira Costa

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
INSTITUTO DE BIOCIÊNCIAS, LETRAS E CIÊNCIAS EXATAS
CAMPUS DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO

São José do Rio Preto

22 de fevereiro de 2011

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos:

Primeiramente à Deus pela oportunidade de realizar mais este sonho.

Aos meus pais Valdemar e Sara, que em meio a tantas dificuldades sempre me apoiaram.

À minha irmã Estela, por sua paciência e compreensão em meus momentos de insegurança e nervosismo.

Ao Glauber, por seu amor e por estar sempre ao meu lado, mesmo nos momentos difíceis.

Ao Prof. Dr. João Carlos Ferreira Costa, pela valiosa orientação e por depositar sua confiança em mim diante desse trabalho.

Aos professores do Departamento de Matemática do IBILCE/UNESP - São José do Rio Preto, pelo conhecimento transmitido e pela amizade.

Aos meus colegas de Pós-graduação, pela amizade e agradável convívio. Em especial a minha grande amiga Andrea e aos meus queridos amigos Glauce e Júnior.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudaremos a equivalência de contato a fim de compreender seu papel na \mathcal{C}^r -classificação dos germes \mathcal{C}^r -estáveis, $0 \leq r \leq \infty$. No caso $r = \infty$, este é um resultado clássico em Teoria de Singularidades provado por J. Mather [9]. Baseados nos artigos [12] e [11] de T. Nishimura, o principal objetivo deste trabalho é mostrar que existe uma versão do resultado de Mather que diz respeito à \mathcal{C}^r - \mathcal{A} -classificação de germes \mathcal{C}^r -estáveis, $0 \leq r < \infty$.

Palavras-chave: equivalência de contato, \mathcal{C}^r - \mathcal{A} -equivalência, classificação de singularidades, \mathcal{C}^r -estabilidade.

Abstract

In this work we study the contact equivalence in order to understand its role in the C^r -classification of C^r -stable map germs, $0 \leq r \leq \infty$. In the case $r = \infty$, this is a classical result in Singularity Theory proved by J. Mather [9]. Based on the T. Nishimura's papers [12] and [11], the main goal of this report is to show that there exists a version of the Mather's result that is about the \mathcal{C}^r - \mathcal{A} -classification of C^r -stable map germs, $0 \leq r < \infty$.

Key-words: contact equivalence, \mathcal{C}^r - \mathcal{A} -equivalence, classification of singularities, C^r -stability.

Sumário

Introdução	p. 6
1 Preliminares	p. 8
2 Equivalência de Contato	p. 12
2.1 Espaço Tangente	p. 18
2.2 Invariantes da \mathcal{K} -equivalência	p. 21
2.2.1 \mathcal{K} -codimensão	p. 21
2.2.2 Símbolos de Boardman	p. 28
2.2.3 \mathcal{K} -determinação finita	p. 31
2.2.4 \mathbb{R} -álgebra local	p. 33
2.3 Deformações sob \mathcal{K} -equivalência	p. 33
2.3.1 \mathcal{K} -deformações Versais e Germes Estáveis	p. 39
2.4 Classificação de Germes sob \mathcal{K} -equivalência	p. 47
3 Critério para \mathcal{C}^r-\mathcal{A}-equivalência	p. 51
4 Critério para \mathcal{C}^0-\mathcal{A}-equivalência	p. 76
4.1 Estratificações e Aplicações Estratificadas	p. 76
4.2 \mathcal{C}^0 - \mathcal{A} -equivalência de germes de aplicações \mathcal{K} -equivalentes	p. 79
Referências Bibliográficas	p. 83

Introdução

Cada área da Matemática tem uma maneira própria de “classificar” seus objetos. Em Teoria de Singularidades os objetos mais importantes a serem classificados são os germes de aplicações diferenciáveis (i.e., $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ de classe C^∞). Toda classificação é feita através de alguma relação de equivalência. A relação de equivalência mais importante neste caso é a \mathcal{A} -equivalência (isto é, mudanças de coordenadas dadas por C^∞ -difeomorfismos no domínio e no contradomínio). No entanto, esta relação de equivalência é difícil de ser manuseada, no sentido de que é difícil mostrar se existe uma \mathcal{A} -equivalência entre dois germes. Devido a este fato, outras relações de equivalência podem desempenhar papéis importantes no problema da classificação de singularidades. Neste contexto, quem desempenha papel fundamental é a equivalência de contato, também conhecida como \mathcal{K} -equivalência.

A equivalência de contato foi introduzida por John Mather com o objetivo de reduzir o problema da \mathcal{A} -classificação para um problema mais tratável, que permita por exemplo, usar algum critério algébrico. Isso decorre dos seguintes teoremas de classificação de Mather:

Teorema 0.1. *(Mather [9]) Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ germes \mathcal{K} -finitamente determinados. Então, f é \mathcal{K} -equivalente a g se, e somente se, as \mathbb{R} -álgebras locais de f e de g são isomorfas.*

Teorema 0.2. *(Mather [9]) Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ germes C^∞ -estáveis. Então, f é \mathcal{A} -equivalente a g se, e somente se, f e g são \mathcal{K} -equivalentes.*

O objetivo principal deste trabalho é encontrar uma generalização do Teorema 0.2 para a C^r - \mathcal{A} -equivalência, $r \geq 0$. A C^r - \mathcal{A} -equivalência é a versão C^r da \mathcal{A} -equivalência, ou seja, as mudanças de coordenadas em questão são dadas por C^r -difeomorfismos (se $r \geq 1$) ou homeomorfismos (se $r = 0$).

Mudanças de coordenadas dadas por C^∞ -difeomorfismos apresentam muita rigidez no seu trato, por isso parece natural investigar relações de equivalências mais fracas, dadas por mudanças de coordenadas com menor classe de diferenciabilidade. Esta é uma das

motivações deste trabalho. Outro ponto fundamental é entender o papel da equivalência de contato neste contexto da \mathcal{C}^r - \mathcal{A} -classificação de germes de aplicações.

O trabalho apresenta duas partes: uma dedicada à equivalência de contato e a outra dedicada a estabelecer um critério para a \mathcal{C}^r - \mathcal{A} -equivalência de dois germes pertencentes a uma mesma \mathcal{K} -órbita.

No Capítulo 1, introduzimos os conceitos básicos da Teoria de Singularidades, tais como a noção de germes, os grupos de Mather e os Lemas de Nakayama e de Hadamard.

No Capítulo 2, apresentamos um estudo detalhado da equivalência de contato, abordando suas propriedades e alguns de seus invariantes. Também introduzimos a teoria de deformações e desdobramentos a qual utilizaremos para apresentar uma demonstração do Teorema 0.2.

O Capítulo 3 contém a parte principal deste trabalho. Baseados no artigo [12] de T. Nishimura obtemos um critério para a \mathcal{C}^r - \mathcal{A} -equivalência ($1 \leq r \leq \infty$) de germes de aplicações diferenciáveis. O método utilizado consiste na construção de mudanças de coordenadas (i.e., germes de \mathcal{C}^r -difeomorfismos) a partir de uma \mathcal{C}^r - \mathcal{K} -órbita dada ($1 \leq r \leq \infty$). Isso reforça a importância e o papel da equivalência de contato no problema da \mathcal{C}^r - \mathcal{A} -classificação de germes. Como consequência dos resultados principais do capítulo, obtemos uma \mathcal{C}^r -generalização do Teorema 0.2, $1 \leq r \leq \infty$.

O Capítulo 4 é uma versão topológica do Capítulo 3. Baseados no artigo [11], obtemos versões análogas dos principais resultados do Capítulo 3 para o caso $r = 0$. No entanto existem diferenças substanciais na maneira de conduzir o trabalho. De fato, para trabalhar com o caso topológico necessitamos introduzir novos conceitos, entre eles as noções de estratificação, aplicação de Thom, \mathcal{C} -regularidade e Segundo Lema de Isotopia. Como consequência dos resultados principais, obtemos também uma versão topológica do Teorema 0.2.

Capítulo 1

Preliminares

Estamos interessados em estudar as aplicações diferenciáveis do ponto de vista local, por este motivo usaremos a noção de germes.

Considere um aberto U do \mathbb{R}^n contendo a origem, e o conjunto

$$\mathcal{F} = \{f : U \rightarrow \mathbb{R}^p \mid f \text{ é de classe } C^\infty\}.$$

Podemos definir uma relação de equivalência \sim em \mathcal{F} da seguinte forma: $f_1 \sim f_2$ se existir um aberto $W \subset U$ contendo a origem tal que $f_1|_W = f_2|_W$. Definimos

$$\varepsilon_{n,p} = \frac{\mathcal{F}}{\sim} = \{[f] \mid f \in \mathcal{F}\}.$$

Chamamos a classe de equivalência $[f]$ de *germe de f* e para simplificar denotamos

$$\varepsilon_{n,p} = \{f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p \mid f \in C^\infty\}.$$

Quando $p = 1$ denotamos apenas por

$$\varepsilon_n = \{f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in C^\infty\}.$$

O conjunto ε_n é uma *álgebra real*, pois é um espaço vetorial com estrutura de anel, com relação às operações de adição, multiplicação por escalar e produto definidas a seguir:

1. **Adição:** $[f] + [g] = [f + g]$.
2. **Multiplicação por escalar:** $\lambda[f] = [\lambda f]$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. **Produto:** $[f][g] = [fg]$.

Além disso, ε_n é um anel local.

Definição 1.1. $\mathcal{M}_n = \{f \in \varepsilon_n \mid f(0) = 0\}$ é um ideal de ε_n .

Na verdade \mathcal{M}_n é o único ideal maximal do anel local ε_n .

Podemos caracterizar \mathcal{M}_n por:

Proposição 1.2. $\mathcal{M}_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, onde cada germe $x_i : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por $x_i(x) = x_i$, $i = 1, \dots, n$, ou seja, são os germes representados pelas projeções de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} .

Definição 1.3. $\mathcal{M}_n^k = \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{M}_n \dots \mathcal{M}_n$, k vezes, isto é, \mathcal{M}_n^k é gerado pelos monômios de grau k nas variáveis x_1, \dots, x_n .

Um resultado muito útil na manipulação de ideais é o lema que apresentamos a seguir.

Lema 1.4. (Lema de Nakayama)

Sejam ε um anel com unidade, \mathcal{M} um ideal de ε , onde $1 + x$ é inversível em ε para todo $x \in \mathcal{M}$. Seja M um ε -módulo e A, B ε -submódulos de M , com A finitamente gerado. Então se $A \subset B + \mathcal{M}A$ então $A \subset B$.

Demonstração. Ver [5] p. 102. □

Definição 1.5. Seja $(G, *)$ um grupo e M um conjunto. Uma ação de G sobre M é uma aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : G \times M &\rightarrow M \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

satisfazendo:

(i) $1 \cdot x = x$;

(ii) $(g * h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$, onde $x \in M$, $g, h \in G$ e 1 denota a identidade do grupo G .

Dado uma tal ação podemos definir uma relação de equivalência \sim sobre M da seguinte forma. Dizemos que x está relacionado com y , $x \sim y$, quando existe $g \in G$ tal que $y = \Phi(g, x)$. As classes de equivalência são chamadas *órbitas* sob a ação e são denotadas por

$$G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}.$$

Considere os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{R} = \{h : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0); h|_V \text{ difeomorfismo}\}$$

$$\mathcal{L} = \{h : (\mathbb{R}^p, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0); h|_W \text{ difeomorfismo}\}$$

onde V e W são vizinhanças de 0 .

Definimos também o conjunto \mathcal{A} como o produto direto $\mathcal{R} \times \mathcal{L}$.

Com relação à composição, \mathcal{R} , \mathcal{L} e \mathcal{A} têm estrutura de grupo.

Definimos as ações desses grupos sobre

$$\varepsilon_{n,p}^0 = \{f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0) | f \in \mathcal{C}^\infty\}$$

da seguinte forma:

$$\begin{aligned} h \cdot f &= f \circ h^{-1}, & h \in \mathcal{R} \\ k \cdot f &= k \circ f, & k \in \mathcal{L} \\ (h, k) \cdot f &= k \circ f \circ h^{-1}, & (h, k) \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

onde $f \in \varepsilon_{n,p}^0$.

Seja \mathcal{C} o conjunto formado pelos germes de difeomorfismos de $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$ em $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$ que são escritos da forma $H(x, y) = (x, \phi(x, y))$, com $\phi(x, 0) = 0$, para $x \in \mathbb{R}^n$ próximo da origem.

Este conjunto tem estrutura de grupo com a operação composição. A ação de \mathcal{C} sobre $\varepsilon_{n,p}^0$ é definida por:

$$H \cdot f = H \circ (id, f), \quad H \in \mathcal{C}, \quad f \in \varepsilon_{n,p}^0.$$

Definimos também o conjunto \mathcal{K} formado pelos os germes de difeomorfismos

$$H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$$

tais que $H(x, y) = (h(x), \theta(x, y))$, com $h \in \mathcal{R}$ e $\theta(x, 0) = 0$, para $x \in \mathbb{R}^n$ próximo da origem.

Definimos a ação de \mathcal{K} sobre $\varepsilon_{n,p}^0$ por:

$$H \cdot f = H \circ (h^{-1}, f \circ h^{-1}), \quad H \in \mathcal{K}, \quad f \in \varepsilon_{n,p}^0.$$

O grupo \mathcal{K} é chamado *grupo de contato*. O grupo \mathcal{C} é um subgrupo normal de \mathcal{K} e os grupos \mathcal{A} , \mathcal{R} e \mathcal{L} , podem ser identificados com subgrupos de \mathcal{K} .

Observação 1.6. As ações definidas acima nos fornecem relações de equivalências em

$\varepsilon_{n,p}^0$ que denotaremos por $\underset{\mathcal{G}}{\sim}$, para $\mathcal{G} = \mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{A}, \mathcal{K}$ e \mathcal{C} .

Por exemplo, dizemos que os germes $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ são \mathcal{R} -equivalentes se existe um difeomorfismo $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ tal que $g = f \circ h^{-1}$.

Caso existam difeomorfismos $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ e $k : (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ tais que $g = k \circ f \circ h^{-1}$ dizemos que f e g são \mathcal{A} -equivalentes.

Um dos objetivos da Teoria de Singularidades é a classificação de singularidades e a obtenção de formas normais, com respeito a estas relações de equivalência definidas anteriormente. Neste trabalho, concentraremos nosso foco na \mathcal{K} -equivalência visando, sobretudo, entender seu papel na \mathcal{A} -classificação dos germes de aplicações.

O lema a seguir é um resultado clássico e muito útil em problemas de classificação.

Lema de Hadamard 1.7. *Seja U uma vizinhança convexa de 0 em \mathbb{R}^n , e seja f uma função de classe C^r definida sobre $U \times \mathbb{R}^q$ que se anula em $0 \times \mathbb{R}^q$. Então existem funções de classe C^{r-1} f_1, \dots, f_n definidas em $U \times \mathbb{R}^q$ tais que $f = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$, onde x_1, \dots, x_n são as funções coordenadas em \mathbb{R}^n .*

Demonstração. Podemos escrever f da seguinte forma:

$$f(x, y) = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_q) = \int_0^1 \frac{df}{dt}(tx_1, \dots, tx_n, y_1, \dots, y_q) dt.$$

Agora,

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt}(tx_1, \dots, tx_n, y_1, \dots, y_q) &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t} = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Logo,

$$f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_q) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx, y) dt = \sum_{i=1}^n x_i f_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_q),$$

onde todas as funções

$$f_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_q) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n, y_1, \dots, y_q) dt$$

estão bem definidas e são de classe C^{r-1} .

□

Capítulo 2

Equivalência de Contato

A equivalência de contato, ou \mathcal{K} -equivalência, desempenha papel fundamental na classificação de germes C^∞ -estáveis sob \mathcal{A} -equivalência. J. Mather reduziu o estudo da \mathcal{A} -classificação de germes C^∞ -estáveis para a classificação de \mathbb{R} -álgebras isomorfas, obtendo assim um importante resultado que liga \mathcal{K} -equivalência à \mathcal{A} -equivalência (ver [9]).

Desenvolveremos este capítulo com o objetivo de compreender melhor a \mathcal{K} -equivalência e seu papel na classificação de germes C^∞ -estáveis, para isso estudaremos diversos resultados apresentados por Gibson em [5].

A partir do grupo \mathcal{K} , baseados na observação 1.6, definiremos a \mathcal{K} -equivalência entre dois germes da seguinte forma.

Definição 2.1. *Dizemos que os germes $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ são \mathcal{K} -equivalentes se existem germes de C^∞ -difeomorfismos*

$$h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$$

e

$$H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, (0, 0))$$

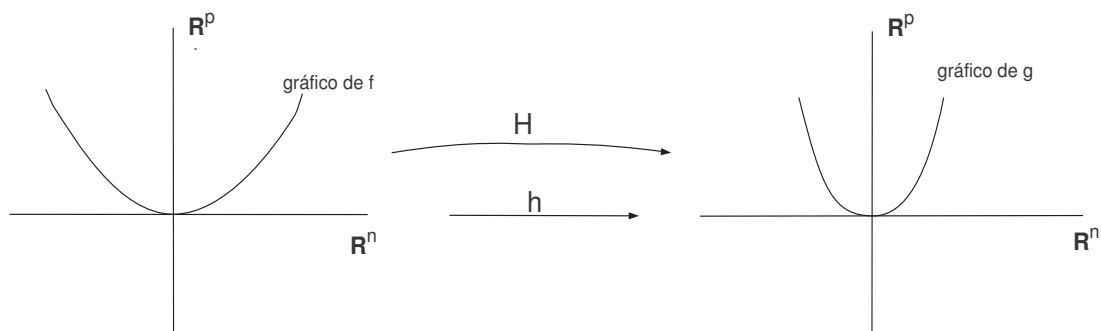
tais que os seguintes diagramas comutam

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{(id, f)} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, (0, 0)) & \xrightarrow{\pi_n} & (\mathbb{R}^n, 0) \\ h \downarrow & & H \downarrow & & h \downarrow \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{(id, g)} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, (0, 0)) & \xrightarrow{\pi_n} & (\mathbb{R}^n, 0) \end{array}$$

onde $id : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ é o germe da identidade e $\pi_n : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ a projeção canônica.

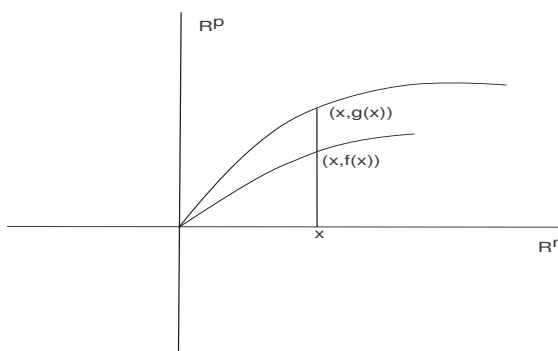
Ou seja, $H(x, y) = (h(x), \theta(x, y))$ com $\theta(x, 0) = 0$ e $H(x, f(x)) = (h(x), g(h(x)))$.

Assim H leva o gráfico de f no gráfico de g enquanto h atua no \mathbb{R}^n .



No caso em que $h = id$ na Definição 2.1 dizemos que os germes f e g são \mathcal{C} -equivalentes.

Neste caso H leva gráfico de f no gráfico de g , como mostra a figura abaixo:



Exemplo 2.2. Os germes $f, g : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ definidos por

$$f(x, y) = (x^2, y^2) \quad e \quad g(x, y) = (x^2 + y^2, xy)$$

são \mathcal{K} -equivalentes via o par de difeomorfismos (h, H) , com

$$h(x, y) = (x + y, x - y) \quad e \quad H(x, y, z, w) = (x + y, x - y, 2z + 2w, z - w).$$

De fato, observe que $H(x, y, z, w) = (h(x, y), \theta(x, y, z, w))$, com $\theta(x, y, 0, 0) = 0$. Além disso h e H são germes de \mathcal{C}^∞ -difeomorfismos.

Resta verificar se $H \circ (id, f) = (id, g) \circ h$.

Note que

$$H \circ (id, f)(x, y) = H(x, y, x^2, y^2) = (x + y, x - y, 2x^2 + 2y^2, x^2 - y^2)$$

e

$$(id, g) \circ h(x, y) = (id, g)(x + y, x - y) = (x + y, x - y, 2x^2 + 2y^2, x^2 - y^2).$$

Assim concluímos que f e g são \mathcal{K} -equivalentes.

Note que os germes f e g são \mathcal{K} -equivalentes se, somente se, existe um germe de \mathcal{C}^∞ -difeomorfismo $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ para o qual $f \circ h$ e g são \mathcal{C} -equivalentes.

De fato, suponhamos que f e g são \mathcal{K} -equivalentes, então existe um par de \mathcal{C}^∞ -difeomorfismos (k, H) tal que $H \circ (id, f) = (id, g) \circ k$, onde $H = (k, \theta)$ e $\theta(x, 0) = 0$.

Daí segue que, $(k, \theta) \circ (id, f) \circ k^{-1} = (id, g)$, ou seja, $(k \circ k^{-1}, \theta \circ f \circ k^{-1}) = (id, g)$.

Logo

$$(id, \theta \circ f \circ k^{-1}) = (id, g),$$

assim $(id, \theta) \circ (id, f \circ k^{-1}) = (id, g)$.

Portanto existe um germe \mathcal{C}^∞ -difeomorfismo $h = k^{-1} : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ e um par de difeomorfismos (id, H^*) , onde $H^* = (id, \theta)$ com $\theta(x, 0) = 0$ tal que

$$H^* \circ (id, f \circ h) = (id, g).$$

Ou seja, $f \circ h$ e g são \mathcal{C} -equivalentes.

Reciprocamente suponha que $f \circ h$ e g são \mathcal{C} -equivalentes, então existe um par de \mathcal{C}^∞ -difeomorfismos (id, H) tal que

$$H \circ (id, f \circ h) = (id, g)$$

onde $H(x, y) = (id(x), \theta(x, y))$ e $\theta(x, 0) = 0$.

Considere o germe de aplicação em $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, (0, 0))$ dado por $H^* = (h^{-1}, \theta)$.

Note que o fato de $H = (id, \theta)$ ser um difeomorfismo implica que H^* também é um difeomorfismo.

Além disso, temos que

$$H^* \circ (id, f) \circ h = (h^{-1}, \theta) \circ (id, f) \circ h = (id, \theta \circ f \circ h) = (id, g)$$

ou seja, $H^* \circ (id, f) = (h^{-1}, g \circ h^{-1})$.

Portanto f e g são \mathcal{K} -equivalentes.

Para simplificar a notação escreveremos $I_f = f^*(\mathcal{M}_p)$, para o ideal em ε_n gerado pelas componentes f_1, f_2, \dots, f_p de $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$.

Proposição 2.3. ([5]) *Sejam f e g germes em $\varepsilon_{n,p}^0$, então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) f e g são \mathcal{C} -equivalentes.

(ii) Os ideais I_f e I_g são iguais.

(iii) Existe uma matriz inversível $(u_{ij})_{p \times p}$ com entradas em ε_n para a qual

$$f_i = \sum_{j=1}^p u_{ij} g_j$$

com $1 \leq i \leq p$.

Demonstração. $i) \Rightarrow ii)$ Suponhamos que f e g são \mathcal{C} -equivalentes. Primeiro mostremos que $I_f \subset I_g$. Para isso vamos mostrar que cada componente f_i pode ser escrita da forma

$$f_i = \sum_{j=1}^p a_{ij} g_j$$

com $a_{ij} \in \varepsilon_n$, $i = 1, \dots, p$.

Por hipótese, existe um par de difeomorfismos (id, H) para o qual

$$H(x, g(x)) = (x, f(x))$$

com $H(x, y) = (x, \theta(x, y))$, onde $\theta(x, 0) = 0$. Ou seja, $\theta(x, g(x)) = f(x)$.

Como $\theta(x, 0) = 0$, segue que cada componente $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ de θ satisfaz a condição $\theta_i(x, 0) = 0$. Daí pelo Lema de Hadamard podemos escrever cada θ_i da seguinte forma

$$\theta_i(x, y) = \sum_{j=1}^p y_j \theta_{ij}(x, y)$$

com y_1, y_2, \dots, y_p coordenadas em \mathbb{R}^p , e $\theta_{ij} \in \varepsilon_{n+p}$.

Assim,

$$f_i(x) = \theta_i(x, g(x)) = \sum_{j=1}^p \theta_{ij}(x, g(x)) g_j(x).$$

Fazendo $a_{ij}(x) = \theta_{ij}(x, g(x))$ temos o resultado desejado. Portanto $I_f \subset I_g$.

Para mostrar que $I_g \subset I_f$ o procedimento é análogo. Assim $I_f = I_g$ como queríamos.

ii) \Rightarrow iii) Suponhamos $I_f = I_g$, então podemos escrever

$$g_i = \sum_{j=1}^p a_{ij} f_j$$

e

$$f_i = \sum_{j=1}^p b_{ij} g_j$$

com $a_{ij}, b_{ij} \in \varepsilon_n$ e $i = 1, 2, \dots, p$.

Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, sejam A_x e B_x , matrizes reais $p \times p$ com entradas $a_{ij}(x)$ e $b_{ij}(x)$, respectivamente.

Segue da Álgebra Linear que podemos encontrar uma matriz real C_0 , $p \times p$, tal que a matriz $U_0 = C_0(I - A_0 B_0) + B_0$ é inversível.

Note que para x próximo de 0, a matriz $U_x = C_0(I - A_x B_x) + B_x$ também é inversível.

Sejam $u_{ij}(x)$ as entradas de U_x . Daí

$$f_i = \sum_{j=1}^p u_{ij} g_j, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

iii) \Rightarrow i) Suponhamos que exista uma matriz $p \times p$ inversível (u_{ij}) , com a propriedade citada em *(iii)*.

Vamos definir

$$\theta_i(x, y) = \sum_{j=1}^p y_j u_{ij}(x)$$

para $1 \leq i \leq p$. Observe que $\theta(x, 0) = 0$, com $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$.

Agora defina o germe

$$\begin{aligned} H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \\ (x, y) &\mapsto (x, \theta(x, y)). \end{aligned}$$

Note que a matriz jacobiana de H em 0 é inversível, assim H é um germe de difeomorfismo e portanto, o par (id, H) estabelece uma \mathcal{C} -equivalência entre f e g , pois por construção $\theta_i(x, g(x)) = f_i(x)$. Logo $\theta(x, g(x)) = f(x)$ e $H(x, g(x)) = (x, f(x))$.

□

Exemplo 2.4. Consideremos um germe $f : (\mathbb{R}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ para o qual as seguintes condições são satisfeitas:

$$f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(k)}(0) = 0; f^{(k+1)}(0) \neq 0,$$

onde $f^{(i)}$ denota a derivada de ordem i de f .

Então $f(x) = x^{k+1} \cdot g(x)$ para alguma $g : (\mathbb{R}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ com $g(0) \neq 0$. Como g é um elemento inversível na álgebra ε_1 temos $\langle f \rangle = \langle x^{k+1} \rangle$ e portanto f é \mathcal{C} -equivalente a x^{k+1} .

Definição 2.5. Dois ideais I e J em ε_n são isomorficamente induzidos quando existe um isomorfismo

$$\begin{aligned} h^* : \varepsilon_n &\longrightarrow \varepsilon_n \\ \lambda &\longmapsto \lambda \circ h \end{aligned}$$

tal que $h^*(I) = J$.

Proposição 2.6. ([5]) Dois germes $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ são \mathcal{K} -equivalentes se, e somente se, I_f e I_g são isomorficamente induzidos.

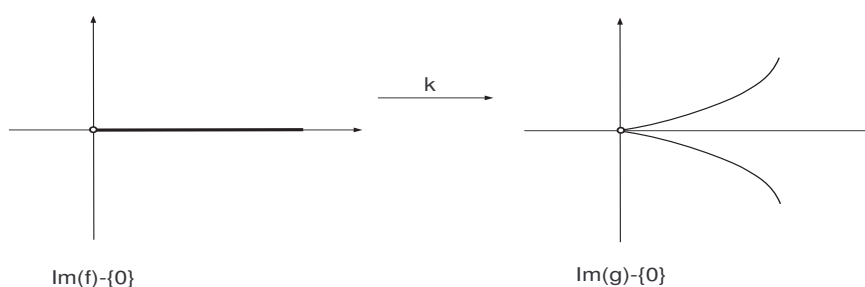
Demonstração. Suponha f, g germes \mathcal{K} -equivalentes, então existe um germe de difeomorfismo $h : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ para o qual $f \circ h$ e g são \mathcal{C} -equivalentes. Então, pela Proposição 2.3 temos que $I_{f \circ h} = I_g$.

Como h é difeomorfismo, segue que h^* é isomorfismo e pela condição $I_{f \circ h} = I_g$ temos que h^* irá aplicar I_f em I_g .

Reciprocamente, se I_f e I_g são isomorficamente induzidos existe $h^* : \varepsilon_n \rightarrow \varepsilon_n$, para o qual $h : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ é um germe de difeomorfismo e $h^*(I_f) = I_g$, ou seja, $I_{f \circ h} = I_g$, e portanto f e g são \mathcal{K} -equivalentes.

□

Exemplo 2.7. Os germes $f(x) = (x^2, 0)$ e $g(x) = (x^2, x^3)$ são \mathcal{C} -equivalentes, pois $I_f = I_g$. Portanto são \mathcal{K} -equivalentes. Entretanto, f e g não podem ser \mathcal{A} -equivalentes. De fato, suponha que existam germes de difeomorfismos $h : (\mathbb{R}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ e $k : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tais que $f = k \circ g \circ h$. Neste caso o difeomorfismo k aplica $Im(f) - \{0\}$ em $Im(g) - \{0\}$. Mas isto é um absurdo pois $Im(f) - \{0\}$ é um conjunto conexo enquanto $Im(g) - \{0\}$ é desconexo, como vemos na figura a seguir.



2.1 Espaço Tangente

Considere a ação do grupo \mathcal{K} sobre $\varepsilon_{n,p}^0$. Nosso objetivo agora será encontrar o espaço tangente à órbita de um germe f segundo essa ação, isto é, $T_f\mathcal{K} \cdot f$, o qual será denotado apenas por T_f .

Embora o grupo \mathcal{K} não seja grupo de Lie e $\varepsilon_{n,p}^0$ não seja variedade, é possível seguir o modelo finito de grupos de Lie agindo sobre variedades e imitar a construção do espaço tangente. Assim é natural que o candidato a espaço tangente à órbita $\mathcal{K} \cdot f$ seja a imagem da diferencial na identidade da seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \mathcal{K} &\longrightarrow \varepsilon_{n,p}^0 \\ (h, H) &\longmapsto H \circ (id, f) \circ h^{-1}. \end{aligned}$$

Como já vimos, \mathcal{R} e \mathcal{C} são subgrupos de \mathcal{K} . Além disso o grupo \mathcal{K} pode ser escrito como produto semi-direto de \mathcal{R} e \mathcal{C} .

Logo, a imagem da diferencial de Φ na identidade será a soma vetorial das imagens das diferenciais das componentes $\mathcal{R} \rightarrow \varepsilon_{n,p}^0$ e $\mathcal{C} \rightarrow \varepsilon_{n,p}^0$, calculadas na identidade.

Vamos analisar essas duas componentes separadamente. Primeiro considere a aplicação $\phi_f : \mathcal{R} \rightarrow \varepsilon_{n,p}^0$ definida por $\phi_f(h) = f \circ h^{-1}$. Note que $\phi_f(id) = f$.

Podemos pensar no espaço tangente à órbita $\mathcal{R} \cdot f$ como sendo a imagem da diferencial de ϕ_f na identidade, onde

$$D_{id}(\phi_f) : T_{id}\mathcal{R} \rightarrow T_f\mathcal{R} \cdot f.$$

Vamos identificar $T_{id}\mathcal{R} = \varepsilon_{n,n}^0$, $T_f\mathcal{R} \cdot f = \varepsilon_{n,p}^0$ e tentaremos descrever a lei da diferencial acima. Para isso, considere $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \varepsilon_{n,n}^0$ um vetor arbitrário em $T_{id}\mathcal{R}$. Podemos pensar em h como o vetor tangente à curva $\gamma(t) = id + th$ com t próximo de zero. Logo temos $\gamma'(0) = h$.

Agora consideremos a curva através de f que leva t em $\phi_f(\gamma(t))$. Então

$$\phi_f(\gamma(t))(x) = (f \circ (id + th)^{-1})(x) = f(x_1 + th_1(x), \dots, x_n + th_n(x)).$$

Assim temos

$$(\phi_f(\gamma(t)))' = \nabla \phi_f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

e portanto

$$(\phi_f \circ \gamma)'(0) = \nabla \phi_f(id) \cdot h = \nabla f \cdot h = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Consequentemente, a diferencial procurada é dada por

$$D_{id} \phi_f(h) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

com $h = (h_1, \dots, h_n)$.

A imagem dessa aplicação linear será o submódulo $\varepsilon_n \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}$ de $\varepsilon_{n,p}^0$. Este submódulo é chamado de módulo Jacobiano de f , que denotaremos por $J_f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle$.

Considere agora a aplicação

$$\begin{aligned} \psi_f : \mathcal{C} &\rightarrow \varepsilon_{n,p}^0 \\ H &\mapsto H \circ (id, f) \end{aligned}$$

onde $f \in \varepsilon_{n,p}^0$.

Para simplificar a notação identificaremos cada par (id, H) pertencente ao grupo \mathcal{C} , onde $H(x, y) = (x, \theta(x, y))$, com o germe de aplicação θ .

Note que a aplicação ψ_f é linear, e portanto temos $D_{id}(\psi_f) = \psi_f$, onde $D_{id} \psi_f : T_f \mathcal{C} \rightarrow T_f \varepsilon_{n,p}^0$.

Queremos portanto descobrir qual é a imagem de ψ_f quando aplicada a germes $\theta(x, y)$ tais que $\theta(x, 0) = 0$ para todo x em \mathbb{R}^n .

Sejam $\theta_1, \dots, \theta_p$ as componentes de θ , que claramente satisfazem $\theta_i(x, 0) = 0$, $1 \leq i \leq p$, para todo x em \mathbb{R}^n .

Assim, pelo Lema de Hadamard θ_i pertence ao ideal gerado pelos germes em zero das coordenadas $y_1, \dots, y_p \in \mathbb{R}^p$, ou seja,

$$\theta_i(x, y) = \sum_{j=1}^p y_j \alpha_j(x),$$

onde cada α_j é uma função de classe \mathcal{C}^∞ definida em \mathbb{R}^n , e portanto,

$$\theta \circ (id, f) = \sum_{j=1}^p f_j \alpha_j \in I_f.$$

Provaremos agora que $D_{id}\psi_f(T_{id}\mathcal{C}) = \psi_f(\mathcal{C}) = I_f \cdot \varepsilon_{n,p}$, onde $I_f \cdot \varepsilon_{n,p}$ é o ideal gerado por vetores do tipo $(0, \dots, 0, f_j, 0, \dots, 0)$, com f_j ocupando a i -ésima posição, para $j = 1, \dots, p$.

Primeiramente tome $\theta \in T_{id}\mathcal{C}$, então

$$D_{id}(\psi_f)(\theta) = \psi_f(\theta) = \theta \circ (id, f) = (\theta_1 \circ (id, f), \dots, \theta_p \circ (id, f)) \in I_f \cdot \varepsilon_{n,p}$$

portanto $D_{id}\psi_f(T_{id}\mathcal{C}) \subset I_f \cdot \varepsilon_{n,p}$.

Reciprocamente considere $v = (0, 0, \dots, f_{j_0}, \dots, 0, 0) \in I_f$, onde f_{j_0} ocupa a i_0 -ésima posição na p -upla.

Tome $H_t : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$ definida pela matriz $(n+p) \times (n+p)$ dada por $I+M$, onde $M = (a_{ij})_{(n+p) \times (n+p)}$, com $a_{n+i_0, n+j_0} = t$ e o restante das entradas nulas, e I é a matriz identidade em \mathbb{R}^{n+p} .

Claramente temos que $H_t(x, 0) = (x, 0)$.

Agora considere a curva dada por $\gamma(t) = H_t$. Note que $\gamma'(0)$ é dada pela matriz $(b_{ij})_{(n+p) \times (n+p)}$, onde $b_{n+i_0, n+j_0} = 1$ e o restante das entradas são nulas.

Disto segue que $\gamma'(0) \circ (id, f) = (0, \dots, 0, f_{j_0}, 0, \dots, 0)$.

Identificando θ com $\gamma'(0)$ temos que $\psi_f(\theta) = \theta \circ (id, f) = (0, \dots, 0, f_{j_0}, 0, \dots, 0) = v$.

Portanto, cada um dos geradores de $I_f \cdot \varepsilon_{n,p}$ pertence à $D_{id}\psi_f(T_{id}\mathcal{C})$, que é um espaço vetorial, logo $I_f \cdot \varepsilon_{n,p} \subset D_{id}\psi_f(T_{id}\mathcal{C})$, como queríamos.

Dessa forma chegamos à seguinte definição formal:

Definição 2.8. Dado um germe $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ definimos o espaço tangente à \mathcal{K} -órbita de f como sendo o ε_n -submódulo $T_f = J_f + I_f \cdot \varepsilon_{n,p}$.

Definição 2.9. Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$. Definimos a \mathcal{K} -codimensão de f como sendo a codimensão de T_f , ou seja, a dimensão de $\varepsilon_{n,p}/T_f$.

Denotamos a \mathcal{K} -codimensão de f por $\text{cod } f$.

2.2 Invariantes da \mathcal{K} -equivalência

Nesta seção veremos alguns invariantes sob \mathcal{K} -equivalência, ou seja, propriedades que são preservadas por germes \mathcal{K} -equivalentes.

2.2.1 \mathcal{K} -codimensão

O primeiro invariante que investigaremos é a \mathcal{K} -codimensão. Para isso são necessários alguns resultados preliminares

Proposição 2.10. ([5]) *Seja M um ε_n -módulo com uma base finita, e seja $I \subset M$ um ε_n -submódulo. Uma condição necessária e suficiente para I ter codimensão finita em M é que exista um inteiro $k \geq 1$ com $\mathcal{M}^k \cdot M \subseteq I$, com \mathcal{M} o ideal maximal em M .*

Demonstração. Suponha $\text{cod} I = j - 1$ e considere a sequência de inclusões

$$I \subset I + \mathcal{M}^j \subset I + \mathcal{M}^{j-1} \subset \dots \subset I + \mathcal{M}^2 \subset I + \mathcal{M} \subset M.$$

Então,

$$0 = \text{cod} M \leq \text{cod}(I + \mathcal{M}) \leq \text{cod}(I + \mathcal{M}^2) \leq \dots \leq \text{cod}(I + \mathcal{M}^j) \leq \text{cod} I = j - 1.$$

Como na expressão acima existem $j+1$ desigualdades e j números inteiros deve ocorrer pelo menos uma igualdade. Assim, existe $k \geq 1$ tal que

$$\text{cod}(I + \mathcal{M}^k) = \text{cod}(I + \mathcal{M}^{k+1}).$$

Mas

$$I + \mathcal{M}^{k+1} \subset I + \mathcal{M}^k \Rightarrow I + \mathcal{M}^{k+1} = I + \mathcal{M}^k.$$

Assim,

$$\mathcal{M}^k \subset I + \mathcal{M}^k = I + \mathcal{M}^{k+1} = I + \mathcal{M} \cdot \mathcal{M}^k.$$

Portanto, pelo Lema de Nakayama temos $\mathcal{M}^k \subset I$.

Reciprocamente suponha $\mathcal{M}^k \subset I$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então

$$\text{cod} I \leq \text{cod}(\mathcal{M}^k) < \infty.$$

□

Observação 2.11. Da proposição acima segue que uma condição necessária e suficiente para que f tenha \mathcal{K} -codimensão finita é que exista um inteiro $k \geq 1$ tal que $\mathcal{M}_n^k \cdot \varepsilon_{n,p} \subset T_f$.

Exemplo 2.12. Mostremos que o germe $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ dado por $f(x, y) = (x^2, y^2)$, “lenço dobrado em quatro”, tem \mathcal{K} -codimensão finita.

De fato, note que

$$J_f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right\rangle = \langle (2x, 0), (0, 2y) \rangle,$$

enquanto

$$I_f \cdot \varepsilon_{2,2} = \langle (x^2, 0), (0, x^2), (y^2, 0), (0, y^2) \rangle,$$

portanto $T_f = \langle (x, 0), (0, y), (0, x^2), (y^2, 0) \rangle$.

Para $k = 1$ temos que \mathcal{M}_2^1 é gerado pelos monômios x , y e portanto o ε_2 -submódulo $\mathcal{M}_2^1 \cdot \varepsilon_{2,2}$ é gerado por $(x, 0)$, $(y, 0)$, $(0, x)$ e $(0, y)$.

Resta verificar se cada um desses geradores pertence a T_f . Note porém que $(0, x)$ não pode ser escrito como combinação linear dos geradores de T_f .

Logo $\mathcal{M}_2^1 \cdot \varepsilon_{2,2}$ não está contido em T_f .

Consideremos agora $k = 2$, então \mathcal{M}_2^2 é gerado pelos monômios x^2 , xy e y^2 , daí temos que

$$\mathcal{M}_2^2 \cdot \varepsilon_{2,2} = \langle (x^2, 0), (xy, 0), (y^2, 0), (0, x^2), (0, xy), (0, y^2) \rangle.$$

Novamente a questão é se cada um dos vetores que geram $\mathcal{M}_2^2 \cdot \varepsilon_{2,2}$ podem ser escritos como combinação linear dos geradores de T_f , mas isto é facilmente verificado. Logo $\mathcal{M}_2^2 \cdot \varepsilon_{2,2} \subset T_f$ e portanto f tem \mathcal{K} -codimensão finita.

Depois de saber se um germe tem \mathcal{K} -codimensão finita é natural querermos calculá-la. Para isso utilizaremos a seguinte proposição:

Proposição 2.13. ([5]) Sejam M um ε_n -módulo com uma base finita e $I \subseteq M$ um ε_n -submódulo. Então uma condição necessária e suficiente para que I tenha codimensão finita é que $\text{cod}_k I = 0$, exceto para um número finito de índices $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, onde

$$\text{cod}_k I = \dim \frac{I + \mathcal{M}^k \cdot M}{I + \mathcal{M}^{k+1} \cdot M}.$$

Neste caso

$$\text{cod } I = \text{cod}_0 I + \text{cod}_1 I + \dots$$

Demonstração. Suponha $\text{cod } I$ finita, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{M}^k \cdot M \subset I$.

Assim, se $j \geq k$ temos

$$\mathcal{M}^j \cdot M \subset \mathcal{M}^k \cdot M \subset I.$$

Logo,

$$\text{cod}_j I = \dim \frac{I}{I + \mathcal{M}^j \cdot M} = 0, \forall j \geq k.$$

Reciprocamente suponha $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\text{cod}_{k_0} I = 0$, então

$$\dim \frac{I + \mathcal{M}^{k_0} \cdot M}{I + \mathcal{M}^{k_0+1} \cdot M} = 0.$$

Como $I + \mathcal{M}^{k_0+1} \cdot M \subset I + \mathcal{M}^{k_0} \cdot M$ temos

$$I + \mathcal{M}^{k_0} \cdot M = I + \mathcal{M}^{k_0+1} \cdot M$$

e portanto

$$\mathcal{M}^{k_0} \cdot M \subset I + \mathcal{M}^{k_0+1} \cdot M.$$

Pelo Lema de Nakayama segue que $\mathcal{M}^{k_0} \cdot M \subset I$, logo $\text{cod } I$ é finita.

Agora resta mostrar a segunda parte da proposição.

Suponha que I tenha codimensão finita, então $\text{cod}_k I = 0$ exceto para $l < \infty$ termos.

Note que:

$$\text{cod}_0 I + \text{cod}_1 I + \dots = \dim \frac{M}{I + \mathcal{M} \cdot M} + \dim \frac{I + \mathcal{M} \cdot M}{I + \mathcal{M}^2 \cdot M} + \dots + \dim \frac{I + \mathcal{M}^{l-1} \cdot M}{I + \mathcal{M}^l \cdot M} + \dots$$

Como I tem codimensão finita segue que

$$\dim \frac{I + \mathcal{M}^k \cdot M}{I + \mathcal{M}^{k+1} \cdot M} = \text{cod}(I + \mathcal{M}^{k+1} \cdot M) - \text{cod}(I + \mathcal{M}^k \cdot M),$$

logo,

$$\text{cod}_0 I + \text{cod}_1 I + \dots =$$

$$\begin{aligned} &= (\text{cod}(I + \mathcal{M} \cdot M) - \text{cod } M) + \dots + (\text{cod}(I + \mathcal{M}^l \cdot M) - \text{cod}(I + \mathcal{M}^{l-1} \cdot M)) \\ &= \text{cod}(I + \mathcal{M}^l \cdot M) - \text{cod } M \\ &= \text{cod}(I + \mathcal{M}^l \cdot M) \\ &= \text{cod } I. \end{aligned}$$

A última igualdade segue do fato de que $\mathcal{M}^l \cdot \mathcal{M} \subset I$.

□

Observação 2.14. *Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$. Fazendo $M = \varepsilon_{n,p}$ e $I = T_f$ na Proposição 2.13 temos que, se f tem \mathcal{K} -codimensão finita, então*

$$\text{cod } f = \text{cod}_0 f + \text{cod}_1 f + \dots$$

onde

$$\text{cod}_k f = \dim \frac{T_f + \mathcal{M}_n^k \cdot \varepsilon_{n,p}}{T_f + \mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \varepsilon_{n,p}}.$$

Note que se nenhuma das componentes de f envolve termos lineares então $T_f \subset \mathcal{M}_n \cdot \varepsilon_{n,p}$ e portanto $\text{cod}_0 f = p$.

Exemplo 2.15. *Vamos calcular a \mathcal{K} -codimensão do germe $f : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ da aplicação “lenço dobrado em quatro” dada por $f(x, y) = (x^2, y^2)$.*

Como já vimos no Exemplo 2.12 T_f é gerado por $(x, 0)$, $(y^2, 0)$, $(0, y)$ e $(0, x^2)$. Note que, neste caso, $\text{cod}_0 f = 2$ pois nenhuma das componentes de f possui termos lineares.

Para calcularmos $\text{cod}_1 f$ temos que determinar quais geradores de $\mathcal{M}_2 \cdot \varepsilon_{2,2}$ estão em $T_f + \mathcal{M}_2^2 \cdot \varepsilon_{2,2}$. Lembrando que $\mathcal{M}_2 \cdot \varepsilon_{2,2}$ é gerado por $(x, 0)$, $(y, 0)$, $(0, x)$ e $(0, y)$; destes $(x, 0)$ e $(y, 0)$ claramente pertencem a $T_f + \mathcal{M}_2^2 \cdot \varepsilon_{2,2}$. Por outro lado, $(y, 0)$ e $(0, x)$ não pertencem a $T_f + \mathcal{M}_2^2 \cdot \varepsilon_{2,2}$.

De fato, estes dois últimos vetores formam uma base para o suplemento de $T_f + \mathcal{M}_2^2 \cdot \varepsilon_{2,2}$ em $T_f + \mathcal{M}_2 \cdot \varepsilon_{2,2}$, então $\text{cod}_1 f = 2$.

Novamente pelo Exemplo 2.12 temos que $\mathcal{M}_2 \cdot \varepsilon_{2,2} \subset T_f$ e portanto, pela Proposição 2.13 temos que $\text{cod } f = \text{cod}_0 f + \text{cod}_1 f = 2 + 2 = 4$.

Exemplo 2.16. *Considere o germe $f : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ definido por $f(x) = (0, \dots, 0, x^{t+1})$ com $t \geq 1$, $t \in \mathbb{Z}$.*

Aqui o módulo Jacobiano J_f é gerado por $(0, \dots, 0, x^t)$ e o ideal I_f é gerado pelos vetores $(x^{t+1}, 0, \dots, 0)$, $(0, x^{t+1}, 0, \dots, 0)$, \dots , $(0, \dots, 0, x^{t+1})$.

Daí temos que o \mathcal{K} -espaço tangente T_f é gerado pelos vetores $(x^{t+1}, 0, \dots, 0)$, $(0, x^{t+1}, 0, \dots, 0)$, \dots , $(0, \dots, 0, x^{t+1})$ e $(0, \dots, 0, x^t)$.

Vamos calcular $\text{cod}_k f$.

O ideal \mathcal{M}_1^k é gerado por funções do tipo x^k , logo o ideal $\mathcal{M}_1^k \cdot \varepsilon_{1,p}$ é gerado por vetores do tipo $(0, \dots, 0, x^k, 0, \dots, 0)$, com x^k percorrendo todas as entradas da p -upla.

Precisamos verificar quais desses geradores pertencem a $T_f + \mathcal{M}_1^{k+1} \cdot \varepsilon_{1,p}$. Consideremos os três casos a seguir:

$k < t$: Nenhum dos geradores pertencem a $T_f + \mathcal{M}_1^{k+1} \cdot \varepsilon_{1,p}$, e como há p geradores temos que $\text{cod}_k f = p$.

$k = t$: Neste caso o único gerador de $\mathcal{M}_1^k \cdot \varepsilon_{1,p}$ que pertence a $T_f + \mathcal{M}_1^{k+1} \cdot \varepsilon_{1,p}$ é $(0, \dots, 0, x^t)$, portanto $\text{cod}_k f = p - 1$.

$k > t$: Todos os geradores pertencem a $T_f + \mathcal{M}_1^{k+1} \cdot \varepsilon_{1,p}$ e portanto $\text{cod}_k f = 0$.

Assim temos que $\text{cod}_k f = pt + p - 1$.

Exemplo 2.17. Considere o germe $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ dado por $f(x, y) = (xy, x^a + y^b)$, onde $a, b \in \mathbb{Z}$ com $a \geq 3$ e $b \geq 3$. Note que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (y, ax^{a-1}) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = (x, by^{b-1}),$$

logo $J_f = \langle (y, x^{a-1}), (x, y^{b-1}) \rangle$.

Por outro lado $I_f \cdot \varepsilon_{2,2} = \langle (xy, 0), (x^a + y^b, 0), (0, xy), (0, x^a + y^b) \rangle$. Como as componentes de f não têm termos lineares temos que $\text{cod}_0 f = 2$.

Agora vamos calcular $\text{cod}_k f$ para $k \geq 1$.

O ideal \mathcal{M}_2^k é gerado pelos monômios $x^i y^j$ com $i + j = k$. Assim $\mathcal{M}_2^k \cdot \varepsilon_{2,2}$ é gerado pelos vetores $(x^i y^j, 0)$ e $(0, x^i y^j)$, com $i + j = k$.

Como dois dos geradores de T_f são $(xy, 0)$ e $(0, xy)$, então para $i \geq 1$ e $j \geq 1$ os vetores $(x^i y^j, 0)$ e $(0, x^i y^j)$ pertencem a T_f e, conseqüentemente, também pertencem a $T_f + \mathcal{M}_2^{k+1} \cdot \varepsilon_{2,2}$.

Resta considerar os vetores $(x^k, 0)$, $(y^k, 0)$, $(0, x^k)$ e $(0, y^k)$.

Analisemos para isso os seguintes casos:

$k=1$: temos que $(x, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - (0, by^{b-1})$, e $(y, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - (0, ax^{a-1})$ e portanto pertencem a $T_f + \mathcal{M}_2^{k+1} \cdot \varepsilon_{2,2}$.

$k \geq 2$: Como $(x^2, 0)$ e $(y^2, 0)$ são geradores de T_f então $(x^k, 0)$ e $(y^k, 0) \in T_f + \mathcal{M}_2^{k+1} \cdot \varepsilon_{2,2}$.

$k \geq a \geq 3$: Como $(0, x^a)$ é um dos geradores de T_f temos que $(0, x^k) \in T_f + \mathcal{M}_2^{k+1} \cdot \varepsilon_{2,2}$.

$k \geq b \geq 3$: Como $(0, y^b)$ é um dos geradores de T_f temos que $(0, y^k) \in T_f + \mathcal{M}_2^{k+1} \cdot \varepsilon_{2,2}$.

$1 \leq k \leq a - 1$: Então os vetores da forma $(0, x^k)$ não pertencem a $T_f + \mathcal{M}_2^{k+1} \cdot \varepsilon_{2,2}$.

$1 \leq y \leq b - 1$: Então os vetores da forma $(0, y^k)$ não pertencem a $T_f + \mathcal{M}_2^{k+1} \cdot \varepsilon_{2,2}$.

Dessa forma temos que a \mathcal{K} -codimensão de f é $2 + (a - 1) + (b - 1) = a + b$.

Proposição 2.18. ([5]) A \mathcal{K} -codimensão é um invariante para a \mathcal{K} -equivalência.

Demonstração. Para a demonstração desta proposição vamos precisar de dois resultados:

Resultado 1: Sejam $u = (u_{ij})$ uma matriz inversível $p \times p$ com entradas em ε_n e $U : \varepsilon_{n,p}^0 \rightarrow \varepsilon_{n,p}^0$ um isomorfismo definido por $f \mapsto u \cdot f$, onde pensamos em f como um vetor coluna. Então U aplica T_f isomorficamente em T_g , onde $g = u \cdot f$.

Obviamente $I_g \cdot \varepsilon_{n,p} \subset I_f \cdot \varepsilon_{n,p}$. Além disso, temos que $I_f \cdot \varepsilon_{n,p} = U(I_f \cdot \varepsilon_{n,p})$. (*)

Para provarmos (*) basta mostrar que $I_f \cdot \varepsilon_{n,p} \subset U(I_f \cdot \varepsilon_{n,p})$ pois a outra inclusão é análoga.

De fato, seja $(0, \dots, 0, f_i, 0, \dots, 0)$ um gerador qualquer de $I_f \cdot \varepsilon_{n,p}$. Vamos mostrar que existe $h \in I_f \cdot \varepsilon_{n,p}$ talque $U(h) = (0, \dots, 0, f_i, 0, \dots, 0)$.

Note que

$$U(h) = (0, \dots, 0, f_i, 0, \dots, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} u_{11}h_1 + \dots + u_{1p}h_p = 0 \\ \vdots \\ u_{j1}h_1 + \dots + u_{jp}h_p = f_i \\ \vdots \\ u_{p1}h_1 + \dots + u_{pp}h_p = 0 \end{cases}$$

Como a matriz u é inversível podemos utilizar a regra de Cramer e, portanto, $h_j = \frac{\det D}{\det u}$, onde

$$D = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1(j-1)} & 0 & u_{1(j+1)} & \dots & u_{1p} \\ & & & \vdots & & & \\ \vdots & & & f_i & & & \vdots \\ & & & \vdots & & & \\ u_{p1} & \dots & u_{p(j-1)} & 0 & u_{p(j+1)} & \dots & u_{pp} \end{pmatrix}$$

Assim h é combinação linear de vetores do tipo $(0, \dots, 0, f_i, 0, \dots, 0)$, com f_i percorrendo as p posições, e portanto $h \in I_f \cdot \varepsilon_{n,p}$.

Logo temos

$$I_g \cdot \varepsilon_{n,p} \subset I_f \cdot \varepsilon_{n,p} = U(I_f \cdot \varepsilon_{n,p}) \subset U(T_f). \quad (2.1)$$

Agora note que

$$U(J_f) = \{u \cdot f_0; f_0 \in J_f\} = \left\{ u \cdot \left(a_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + a_p \frac{\partial f_p}{\partial x_p} \right) \right\} = \left\{ a_1 \cdot u \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + a_p \cdot u \cdot \frac{\partial f_p}{\partial x_p} \right\},$$

com $a_i \in \varepsilon_n$. Como U é um isomorfismo dado pela matriz u , segue da equação acima que:

$$U(J_f) = \left\{ a_1 \cdot Du \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + a_p \cdot Du \cdot \frac{\partial f_p}{\partial x_p} \right\}$$

onde Du é a diferencial de u . Então pela regra da cadeia

$$U(J_f) = \left\{ a_1 \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \dots + a_p \cdot \frac{\partial g_p}{\partial x_p} \right\} = J_g.$$

Portanto

$$J_g \subset U(J_f) + I_f \cdot \varepsilon_{n,p} = U(J_f) + U(I_f \cdot \varepsilon_{n,p}) = U(T_f). \quad (2.2)$$

De (2.1) e (2.2) $T_g \subset U(T_f)$.

Analogamente mostra-se que $T_f \subset U^{-1}(T_g)$, e portanto $U(T_f) \subset T_g$.

Resultado 2: Sejam $\phi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ um germe invertível, e $\Phi : \varepsilon_{n,p}^0 \rightarrow \varepsilon_{n,p}^0$ um isomorfismo entre espaços vetoriais reais dados por $f \mapsto f \circ \phi$. Então Φ aplica T_f isomorficamente em T_g , onde $g = f \circ \phi$.

Note que $I_g \cdot \varepsilon_{n,p} \subset \Phi(I_f \cdot \varepsilon_{n,p}) \subset \Phi(T_f)$.

Além disso, pela regra da cadeia temos:

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \circ \phi \right) \in \Phi(J_f).$$

Portanto $T_g \subset \Phi(T_f)$, e pelo mesmo argumento utilizado no resultado anterior temos $T_g = \Phi(T_f)$.

Agora vamos provar a propriedade da \mathcal{K} -codimensão ser invariante. Suponha $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ germes \mathcal{K} -equivalentes. Então existe um germe de difeomorfismo $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ para o qual $f \circ h$ e g são \mathcal{C} -equivalentes. Daí, pela Proposição 2.3 existe uma matriz $p \times p$ inversível $u = (u_{ij})$ com entradas em ε_n para a qual $g = u \cdot f \circ h$.

Pelos Resultados 1 e 2 temos que $U \circ \Phi : \varepsilon_{n,p}^0 \rightarrow \varepsilon_{n,p}^0$ é um automorfismo

$U \circ \Phi(f) = u \cdot f \circ h = g$ e portanto $U \circ \Phi$ aplica T_f isomorficamente em T_g , então os espaços quocientes $\varepsilon_{n,p}/T_f$ e $\varepsilon_{n,p}/T_g$ são isomorfos e têm a mesma dimensão, i.e., f e g têm a mesma \mathcal{K} -codimensão.

□

Observação 2.19. A \mathcal{K} -codimensão não é um invariante completo, ou seja, a recíproca da proposição acima não é válida.

De fato, considere os germes $f, g : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ definidos por $f(x, y) = (x^2, y^2)$ e $g(x, y) = (x, y^5)$.

Note que $\text{cod } f = 4 = \text{cod } g$, porém f e g não são \mathcal{K} -equivalentes, pois suas álgebras locais ε_2/I_f e ε_2/I_g não são isomorfas.

As álgebras locais constituem um invariante que estudaremos mais adiante.

2.2.2 Símbolos de Boardman

Definição 2.20. Seja I um ideal em ε_n , então definimos $\Delta_s I = I + I'$ onde I' é o ideal gerado pelos determinantes das submatrizes $s \times s$ da matriz

$$JI = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

com f_1, \dots, f_p os geradores de I .

Definição 2.21. Definimos $\Delta^s I = \Delta_{n-s+1} I$, com I ideal de ε_n .

Observação 2.22. Note que $I = \Delta^0 I \subseteq \Delta^1 I \subseteq \dots \subseteq \Delta^n I$ e que $\Delta_s I = I$ para todo $s > n$.

Definição 2.23. A extensão jacobiana crítica de um ideal I , é o último ideal $\Delta^{i_1} I$ de $I = \Delta^0 I \subseteq \Delta^1 I \subseteq \dots \subseteq \Delta^n I$, que é próprio. Este ideal tem uma extensão jacobiana crítica $\Delta^{i_2} \Delta^{i_1} I$, e assim por diante.

Logo obtemos a sequência $\Delta^{i_1} I, \Delta^{i_2} \Delta^{i_1} I, \dots$ e dizemos que I tem Símbolo de Boardman (i_1, i_2, \dots) .

Definição 2.24. O Símbolo de Boardman de um germe f é dado pelo Símbolo de Boardman de seu ideal I_f .

Exemplo 2.25. Considere o germe $f(x, y) = (xy, x^2 + y^2)$. Vamos calcular o Símbolo de Boardman de f .

Neste caso temos que calcular o Símbolo de Boardman do ideal gerado pelas componentes de f , ou seja, $I_f = \langle xy, x^2 + y^2 \rangle$.

Note que

$$JI_f = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

Então,

$$\Delta^0 I_f = \Delta_{2-0+1} I_f = \Delta_3 I_f = I_f;$$

$$\Delta^1 I_f = \Delta_{2-1+1} I_f = \Delta_2 I_f = \langle xy, x^2, y^2 \rangle;$$

$$\Delta^2 I_f = \Delta_{2-2+1} I_f = \Delta_1 I_f = \langle x, y \rangle.$$

Sabemos que $\Delta^0 I_f \subset \Delta^1 I_f \subset \Delta^2 I_f$, ou seja, $I_f \subset \langle xy, x^2, y^2 \rangle \subset \langle x, y \rangle \neq \varepsilon_2$. portanto a extensão jacobiana crítica de I_f é o ideal $\Delta^2 I_f = \langle x, y \rangle$, e assim a primeira coordenada do Símbolo de Boardman de f é 2.

Agora considere $M = \Delta^2 I_f = \langle x, y \rangle$, então

$$JM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo,

$$\Delta^0 M = \Delta_{2-0+1} M = \Delta_3 M = M;$$

$$\Delta^1 M = \Delta_{2-1+1} M = \Delta_2 M = \varepsilon_2;$$

$$\Delta^2 M = \Delta_{2-2+1} M = \Delta_1 M = \varepsilon_2.$$

Portanto $M = \Delta^0 M \subset \Delta^1 M = \Delta^2 M = \varepsilon_2$, e assim a extensão jacobiana crítica de M é o ideal $M = \Delta^0 M$. Com isso a segunda coordenada do Símbolo de Boardman de f é 0.

Observe que a partir daqui, como $\Delta^0 M = M$, as próximas extensões jacobianas críticas serão sempre $\langle x, y \rangle$ e portanto o Símbolo de Boardman de f será $(2, 0, 0, \dots)$.

Proposição 2.26. ([5]) *O ideal $\Delta_s I$ obtido não depende de nenhuma mudança de geradores, nem de mudança de coordenadas, isto é, se consideramos outros geradores g_1, \dots, g_q para I e z_1, \dots, z_n outro sistema de coordenadas, então $\Delta_s I$ coincide com o ideal gerado por I e os subdeterminantes $s \times s$ da matriz dada por*

$$JI = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_q}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial g_q}{\partial z_n} \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Vamos mostrar que todo subdeterminante $s \times s$ de JI pertence a $\Delta_s I$.

Note que cada g_i pode ser escrito como uma combinação linear dos f_k , com coeficientes em ε_n . Então cada derivada parcial $\frac{\partial g_i}{\partial z_j}$ pode ser escrita como a mesma combinação linear de $\frac{\partial f_i}{\partial z_j}$ mais um elemento de I .

Pela multilinearidade do determinante temos que qualquer subdeterminante $s \times s$ de JI pertence ao ideal gerado por I e pelos $s \times s$ subdeterminantes da matriz

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial z_n} \end{pmatrix}.$$

Então será suficiente mostrar que qualquer $s \times s$ subdeterminante de M está em $\Delta_s I$. Para isso observe que pela regra da cadeia escrevemos $\frac{\partial}{\partial z_j}$ como uma combinação linear de $\frac{\partial}{\partial x_k}$, com coeficientes em ε_n .

O resultado segue da multilinearidade do determinante.

□

Proposição 2.27. ([5]) *Se dois germes $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ são \mathcal{K} -equivalentes então eles possuem o mesmo Símbolo de Boardman.*

Demonstração. Suponha inicialmente que os dois germes $f = (f_1, \dots, f_p)$ e $g = (g_1, \dots, g_p)$ são \mathcal{C} -equivalentes. Então $I_f = I_g$, e como consequência da Proposição [2.26] temos que os Símbolos de Boardman de f e g coincidem.

Agora, suponha que $f \underset{\mathcal{R}}{\sim} g$. Então existe um germe inversível $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ tal que $g = f \circ h$.

Note que as componente de h produzem um sistema de coordenadas e a matriz

jacobiana de f_1, f_2, \dots, f_p relativa a esse sistema de coordenadas coincide com a matriz jacobiana de g_1, g_2, \dots, g_p relativa ao sistema canônico de coordenadas. Portanto f e g possuem o mesmo Símbolo de Boardman.

Como o grupo \mathcal{K} é um produto semi-direto dos grupos \mathcal{R} e \mathcal{C} temos que o Símbolo de Boardman é um invariante sob \mathcal{K} -equivalência. \square

Definição 2.28. *Seja $k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$. O k -jato de f em 0 é o polinômio*

$$j^k f(0) = x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{1}{k!} x^k f^{(k)}(0),$$

que é obtido através do truncamento a série de Taylor de grau k de f omitindo-se o termo constante.

Dizemos que dois k -jatos são iguais quando eles são identicamente o mesmo polinômio.

O conjunto de todos os jatos será denotado por $J^k(n, p)$.

Proposição 2.29. *([5]) Os primeiros k inteiros do Símbolo de Boardman de um germe de aplicação $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ dependem somente do k -jato de f .*

Definição 2.30. *Dados k inteiros i_1, \dots, i_k , dizemos que $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ é do tipo Σ^{i_1, \dots, i_k} se seu Símbolo de Boardman é (i_1, \dots, i_k, \dots) .*

Definimos o conjunto Σ^{i_1, \dots, i_k} como sendo o subconjunto do espaço de jatos $J^k(n, p)$ que é constituído dos k -jatos que têm representantes do tipo Σ^{i_1, \dots, i_k} .

Proposição 2.31. *([5]) Uma condição necessária e suficiente para que $\Sigma^{i_1, \dots, i_k} \subset J^k(n, p)$ seja não-vazio é que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

- (i) $n \geq i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_k \geq 0$;
- (ii) $i_1 \geq n - p$;
- (iii) se $i_1 = n - p$ então $i_1 = i_2 = \dots = i_k$.

2.2.3 \mathcal{K} -determinação finita

Os estudos sobre a determinação finita de germes de aplicações iniciaram-se com John Mather em 1960, numa série de artigos principais da Teoria de Singularidades dentre eles as referências [8] e [9]. A condição de determinação finita permite restringir nosso estudo à categoria dos germes que podem ser representados pelo seu polinômio de Taylor de alguma ordem.

Nesta seção apresentaremos apenas alguns resultados iniciais que nos interessam para a classificação de germes estáveis.

Definição 2.32. Dizemos que f é k - \mathcal{K} -finitamente determinado se para todo $g \in \varepsilon_{n,p}^0$ com $j^k g(0) = j^k f(0)$, então $g \underset{\mathcal{K}}{\sim} f$.

Observação 2.33. Se f é k - \mathcal{K} -finitamente determinado então $f \underset{\mathcal{K}}{\sim} j^k f(0)$.

De fato, tomando $g = j^k f(0)$ temos que $j^k g(0) = j^k f(0)$ e como f é k - \mathcal{K} -finitamente determinado temos $g \underset{\mathcal{K}}{\sim} f$. Portanto $f \underset{\mathcal{K}}{\sim} j^k f(0)$.

Definição 2.34. Dizemos que f é \mathcal{K} -finitamente determinado se existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que f é k - \mathcal{K} -finitamente determinado.

Proposição 2.35. Se f é k_0 - \mathcal{K} -finitamente determinado, então f é k - \mathcal{K} -finitamente determinado para todo $k \geq k_0$.

Demonstração. Seja $g \in \varepsilon_{n,p}^0$ tal que $j^k g(0) = j^k f(0)$, $k \geq k_0$. Logo $j^{k_0} g(0) = j^{k_0} f(0)$.

Como f é k_0 - \mathcal{K} -finitamente determinado segue que $f \underset{\mathcal{K}}{\sim} g$, o que conclui a demonstração. \square

Teorema 2.36. (Wall [15]) Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) f é \mathcal{K} -finitamente determinado.
- (b) Existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $\mathcal{M}_n^k \cdot \varepsilon_{n,p} \subset T_f$.
- (c) f tem \mathcal{K} -codimensão finita.

Além disso, temos:

- (i) Se f é r - \mathcal{K} -finitamente determinado, então $\mathcal{M}_n^{r+1} \cdot \varepsilon_{n,p} \subset T_f$.
- (ii) Se $\mathcal{M}_n^{r+1} \cdot \varepsilon_{n,p} \subset T_f$, então f é $(r+1)$ - \mathcal{K} -finitamente determinado.
- (iii) Se a \mathcal{K} -codimensão de f é $d < \infty$, então $\mathcal{M}_n^{d+1} \cdot \varepsilon_{n,p} \subset T_f$.

As afirmações (a), (b) e (c) do teorema seguem de (i), (ii) e (iii).

Corolário 2.37. Se dois germes f e g são \mathcal{K} -equivalentes e f é \mathcal{K} -finitamente determinado, então g também é \mathcal{K} -finitamente determinado.

Demonstração. Do teorema anterior temos que se f é finitamente determinado então f tem \mathcal{K} -codimensão finita. Mas como já vimos, a \mathcal{K} -codimensão é um invariante. Portanto g também tem \mathcal{K} -codimensão finita e, novamente pelo teorema anterior, g é \mathcal{K} -finitamente determinado. □

2.2.4 \mathbb{R} -álgebra local

Definição 2.38. *Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$. Definimos a \mathbb{R} -álgebra local de f por*

$$\mathcal{Q}(f) = \frac{\varepsilon_n}{I_f}.$$

Teorema 2.39. *(Mather [9]) Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ germes \mathcal{K} -finitamente determinados. Então f é \mathcal{K} -equivalente a g se, e somente se, $\mathcal{Q}(f)$ é isomorfo a $\mathcal{Q}(g)$.*

Com isso vemos que a \mathbb{R} -álgebra local é um invariante completo para germes \mathcal{K} -finitamente determinados.

Exemplo 2.40. *Sejam $f(x, y) = (x, y^2)$ e $g(x, y) = (x^2, y)$. Note que $I_f = \langle x, y^2 \rangle$ e $I_g = \langle x^2, y \rangle$, então temos*

$$\mathcal{Q}_f = \frac{\varepsilon_2}{\langle x, y^2 \rangle} \quad e \quad \mathcal{Q}_g = \frac{\varepsilon_2}{\langle x^2, y \rangle}.$$

Logo $\dim \mathcal{Q}_f = 2$ e $\dim \mathcal{Q}_g = 2$.

Como ε_2 é espaço vetorial segue que existe um isomorfismo entre \mathcal{Q}_f e \mathcal{Q}_g .

Portanto $f \underset{\mathcal{K}}{\sim} g$.

J. Mather utilizou \mathbb{R} -álgebras locais para reduzir o problema da \mathcal{A} -classificação de germes \mathcal{C}^∞ -estáveis. Esse é o conteúdo do Teorema 2.61, apresentado na Seção 2.3.1. Para provar o Teorema 2.61 utilizaremos a teoria de \mathcal{K} -deformações versais dada a seguir.

2.3 Deformações sob \mathcal{K} -equivalência

Nosso objetivo nesta seção é mostrar, através da teoria de \mathcal{K} -deformações versais, que dois germes estáveis são \mathcal{A} -equivalentes se, e somente se, eles forem \mathcal{K} -equivalentes. No entanto, vale registrar que a teoria de deformações e desdobramentos pode ser explorada

para muitos outros propósitos que não são de interesse neste texto. É o caso, por exemplo, das inúmeras aplicações “cotidianas” da Teoria de Singularidades, relacionadas aos vários ramos das ciências.

Definição 2.41. *Uma deformação a r -parâmetros de $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ é um germe de aplicação $F : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ com $F(0, x) = f(x)$ e o desdobramento a r -parâmetros correspondente é o germe $\tilde{F} : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p, (0, 0))$ dado por $\tilde{F}(u, x) = (u, F(u, x))$.*

Definição 2.42. *Dois deformações F e G a r -parâmetros de $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ são ditas \mathcal{K} -isomorfas se existir um difeomorfismo local $\Phi : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, (0, 0))$ tal que:*

- (i) $\Phi(u, x) = (u, \phi(u, x))$, com $\phi(0, x) = x$, ou seja Φ é um desdobramento a r -parâmetros da identidade de \mathbb{R}^n ;
- (ii) $\Phi^*(I_G) = I_F$.

onde Φ^* é o isomorfismo como na Definição 2.5.

Neste caso chamamos Φ de \mathcal{K} -isomorfismo de deformações.

Note que o \mathcal{K} -isomorfismo de duas deformações F e G implica na \mathcal{K} -equivalência de F e G como germes.

Definição 2.43. *Sejam $F : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ uma deformação a r -parâmetros de um germe $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ e considere o germe $H : (\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$. Podemos obter uma deformação a s -parâmetros $G : (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ de f dada por $G(v, x) = F(H(v), x)$. A aplicação G é chamada deformação de f induzida por H .*

Escrevemos $G = H^*F$ e nesta situação H é chamada de mudança de parâmetros.

Definição 2.44. *Dois deformações F e G a r -parâmetros de f são \mathcal{K} -equivalentes, no sentido de deformações, quando uma delas for \mathcal{K} -isomorfa à deformação induzida da outra por um difeomorfismo local na origem, ou seja, existe um desdobramento a r -parâmetros Φ do germe em 0 da aplicação identidade em \mathbb{R}^n e um difeomorfismo local na origem H para os quais*

$$\Phi^*(I_F) = I_{H^*G}.$$

Definição 2.45. *Uma deformação F de f é dita trivial se F é \mathcal{K} -isomorfa à deformação constante $G(u, x) = f(x)$.*

Definição 2.46. *Uma deformação G de um germe f é \mathcal{K} -versal quando toda deformação F de f é \mathcal{K} -isomorfa a h^*G , onde h é uma aplicação conveniente entre os espaços de parâmetros de G e F .*

Quando f tem \mathcal{K} -codimensão finita c , dizemos que uma deformação \mathcal{K} -versal a c -parâmetros de f é \mathcal{K} -universal.

Definição 2.47. *Um germe f é estável se todos os seus desdobramentos são triviais, ou seja, f é seu próprio desdobramento versal.*

Vale ressaltar que existem inúmeras condições aparentemente diferentes de estabilidade. No entanto temos várias equivalências e relações entre elas. Veja [6].

Nosso objetivo a partir daqui é encontrar uma maneira explícita de construir deformações universais e posteriormente construir todos os ingredientes para demonstrar o Teorema 2.61.

De fato, podemos pensar na deformação de um germe f de \mathcal{K} -codimensão $r < \infty$, como sendo um germe de aplicação de $(\mathbb{R}^r, 0)$ em $(\varepsilon_{n,p}^0, f)$ dado por $u \mapsto f_u$ onde $f_u(x) = F(u, x)$.

Veremos que pelo Teorema da \mathcal{K} -versalidade, para que essa aplicação seja universal, basta a condição de que seja transversal à \mathcal{K} -órbita de f , ou seja, que a imagem da diferencial em 0 desta aplicação mais o espaço tangente à \mathcal{K} -órbita seja igual ao \mathcal{K} -espaço tangente de f .

Ainda não temos uma interpretação concreta da diferencial em zero da aplicação $u \mapsto f_u$, mas essa deveria ser uma aplicação linear que leva a base canônica do \mathbb{R}^r em $\frac{\partial F}{\partial u_1}|_{u=0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial u_r}|_{u=0}$, onde escrevemos u_1, \dots, u_r para as coordenadas canônicas de \mathbb{R}^r .

Por uma questão de conveniência escrevemos $\dot{F}_i = \frac{\partial F}{\partial u_i}|_{u=0}$.

Com esta notação, a imagem da referida diferencial será o subespaço vetorial real $\mathbb{R} \cdot \{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_r\}$ de $\varepsilon_{n,p}^0$.

Assim chegamos à seguinte definição formal:

Definição 2.48. *F é uma deformação \mathcal{K} -transversal de f quando*

$$\mathbb{R} \cdot \{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_r\} + T_f = \varepsilon_{n,p}.$$

Observação 2.49. *Uma condição necessária e suficiente para que o germe f admita uma deformação \mathcal{K} -transversal é que a \mathcal{K} -codimensão de f seja finita.*

Vejamos uma forma prática de construir uma deformação \mathcal{K} -transversal.

Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ um germe tal que $\text{cod } f = r$.

Considere $\{f_1, \dots, f_r\}$ uma base para o suplemento de T_f em relação a $\varepsilon_{n,p}^0$.

Definimos o germe de aplicação $F : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ por

$$F(u, x) = f(x) + \sum_{i=1}^r u_i f_i(x).$$

Note que $F(0, x) = f(x)$, portanto F é uma deformação de f . Além disso, temos que

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} \Big|_{u=0} = f_1, \dots, \frac{\partial F}{\partial u_r} \Big|_{u=0} = f_r.$$

Portanto, pela Definição 2.48 temos que F é uma deformação \mathcal{K} -transversal de f .

Exemplo 2.50. Já vimos que o germe $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ dado por $f(x, y) = (x^2, y^2)$ tem \mathcal{K} -codimensão 4.

Além disso, sabemos que $T_f = \langle (x, 0), (y^2, 0), (0, y), (0, x^2) \rangle$, logo o suplemento de T_f em $\varepsilon_{2,2}$ é o espaço vetorial real gerado por $\{(1, 0), (0, 1), (y, 0), (0, x)\}$.

Assim $F : (\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ com componentes dadas por

$$F_1 = x^2 + u_1 + u_3 y$$

$$F_2 = y^2 + u_2 + u_4 x$$

é uma deformação \mathcal{K} -transversal de f .

Teorema 2.51. (Teorema da \mathcal{K} -versalidade [7]) Seja $F : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ uma deformação a r -parâmetros do germe $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$. Então F é \mathcal{K} -versal se, e somente se, F é \mathcal{K} -transversal.

Demonstração. Suponha que F é \mathcal{K} -versal, então temos que provar que

$$\mathbb{R} \cdot \{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_r\} + T_f = \varepsilon_{n,p}.$$

Considere uma deformação $G : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ de f , a um parâmetro, definida por

$$G(v, x) = f(x) + v g(x)$$

onde $g \in \varepsilon_{n,p}^0$ é um germe arbitrário.

Como F é versal existe $h : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r, 0)$ tal que h^*F é \mathcal{K} -isomorfo a G .

Seja $H(v, x) = h^*F(v, x) = F(h(v), x) = F(h_1(v), \dots, h_r(v), x)$. Assim temos

$$\dot{H} = \frac{\partial h_1}{\partial t}(0)\dot{F}_1 + \dots + \frac{\partial h_r}{\partial v}(0)\dot{F}_r$$

e portanto $\dot{H} \in \mathbb{R} \cdot \{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_r\}$.

Como G e H são deformações \mathcal{K} -isomorfas temos que $\dot{G} - \dot{H} \in T_f$, e portanto

$$\dot{G} \in \mathbb{R} \cdot \{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_r\} + T_f.$$

Porém, como $\dot{G} = g$, com $g \in \varepsilon_{n,p}^0$ arbitrário, temos que $\varepsilon_{n,p}^0 \subset \mathbb{R} \cdot \{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_r\} + T_f$.

Como $\mathbb{R} \cdot \{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_r\} + T_f \subset \varepsilon_{n,p}^0$ sempre, está provada a igualdade.

A recíproca não será feita aqui.

□

Teorema 2.52. ([5]) *Sejam F e G deformações \mathcal{K} -universais de $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ de \mathcal{K} -codimensão finita c . Então F e G são deformações \mathcal{K} -equivalentes.*

Demonstração. Como F é \mathcal{K} -versal existe um germe $h : (\mathbb{R}^c, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^c, 0)$ para o qual G é \mathcal{K} -isomorfo à deformação induzida h^*F .

Assim, existe

$$\begin{aligned} \Phi : (\mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^n, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^n, 0) \\ (v, x) &\mapsto (v, \phi(v, x)) \end{aligned}$$

um desdobramento a c -parâmetros da identidade em \mathbb{R}^n , tal que

$$\Phi^*(I_{h^*F}) = I_G \Rightarrow I_{(h^*F) \circ \Phi} = I_G \Rightarrow (h^*F) \circ \Phi \underset{\mathcal{C}}{\simeq} G.$$

Agora, note que

$$((h^*F) \circ \Phi)(v, x) = (h^*F)(v, \phi(v, x)) = F(h(v), \phi(v, x)).$$

Então existe $M(v, x)$ matriz $p \times p$ inversível com entradas em ε_{n+c} para a qual

$$F(h(v), \phi(v, x)) = M(v, x) \cdot G(v, x).$$

Derivando a expressão acima em relação a v_i e calculando em $v = 0$, obtemos:

$$\sum_{j=1}^c \frac{\partial h_j}{\partial v_i}(0) \cdot \dot{F}_j(x) + Df(x) \cdot \dot{\Phi}_i(x) = \dot{M}_i(x) \cdot f(x) + M_0(x) \cdot \dot{G}_i(x) \quad (*)$$

onde $\dot{M}_i(x) = \frac{\partial M}{\partial v_i}(0, x)$, $M_0(x) = M(0, x)$, $\dot{\Phi}_i(x) = \frac{\partial \phi}{\partial v_i}(0, x)$ e $f(x) = g(0, x)$.

Observe que

$$Df \cdot \dot{\Phi}_i \in \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\rangle \Rightarrow Df \cdot \dot{\Phi}_i \in T_f.$$

Como F é \mathcal{K} -versal, pelo teorema da \mathcal{K} -versalidade, F é \mathcal{K} -transversal e assim

$$\sum_{j=1}^c \frac{\partial h_j}{\partial v_i} \cdot \dot{F}_j$$

pertence ao suplemento de T_f .

Além disso $\dot{M}_i \cdot f \in T_f$ e portanto $M_0 \cdot \dot{G}_i$ também pertence ao suplemento de T_f .

O automorfismo

$$\begin{aligned} H : \varepsilon_{n,p}^0 &\rightarrow \varepsilon_{n,p}^0 \\ u &\mapsto M_0 \cdot u \end{aligned}$$

deixa T_f invariante e induz o seguinte automorfismo:

$$\begin{aligned} H : \frac{\varepsilon_{n,p}^0}{T_f} &\longrightarrow \frac{\varepsilon_{n,p}^0}{T_f} \\ u + T_f &\mapsto H(u) + T_f \end{aligned}$$

e a expressão (*) se reduz a

$$\sum_{j=1}^c \frac{\partial h_j}{\partial v_i} \cdot \dot{F}_j = M_0(x) \cdot \dot{G}_i(x).$$

Como G é \mathcal{K} -versal, os \dot{G}_i (e portanto $M_0 \cdot \dot{G}_i$) formam uma base de $\frac{\varepsilon_{n,p}^0}{T_f}$. Assim a transformação linear dada pela matriz

$$Dh(0) = \sum_{j=1}^c \frac{\partial h_j}{\partial v_i}(0)$$

leva base em base e conseqüentemente é inversível.

Portanto, pelo Teorema da Aplicação Inversa temos que h é um difeomorfismo local em 0.

Logo F e G são \mathcal{K} -equivalentes, pois

$$\Phi^*(I_{h^*F}) = I_G,$$

com Φ um desdobramento a c -parâmetros da identidade e h um difeomorfismo local. \square

Teorema 2.53. ([5]) *Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ um germe de \mathcal{K} -codimensão finita c , e seja F uma deformação \mathcal{K} -universal de f . Para $d \geq c$ qualquer deformação a d -parâmetros \mathcal{K} -versal G de f é \mathcal{K} -equivalente à deformação constante a $(d-c)$ -parâmetros de F .*

Demonstração. Seja G uma deformação \mathcal{K} -versal de f a d -parâmetros, $d \geq c$.

Como F é \mathcal{K} -universal temos que F é \mathcal{K} -versal, e portanto existe $h : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^c, 0)$ germe de aplicação tal que G é \mathcal{K} -isomorfa a h^*F .

Procedendo da mesma forma como na demonstração do teorema anterior concluímos que

$$Dh(0) \cdot \dot{F}_j = M_0 \cdot \dot{G}_i$$

para $1 \leq i \leq d$ e $1 \leq j \leq c$.

Ou seja, $Dh(0)$ tem posto c , e portanto h é um germe de submersão.

Pela Forma Local das Submersões existe um germe inversível $\phi : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$ para o qual $h \circ \phi = \pi$, onde π é a projeção dada por

$$\begin{aligned} \pi : \quad (\mathbb{R}^d, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^c, 0) \\ (u_1, \dots, u_c, \dots, u_d) &\mapsto (u_1, \dots, u_c). \end{aligned}$$

Portanto G é \mathcal{K} -equivalente a

$$\begin{aligned} \pi^*F : (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^p, 0) \\ (u, x) &\mapsto F(\pi(u), x) \end{aligned}$$

que é uma deformação constante a $(d-c)$ -parâmetros de F . \square

Observação 2.54. *Do teorema acima resulta que quaisquer duas deformações a d -parâmetros \mathcal{K} -versais de f são \mathcal{K} -equivalentes.*

2.3.1 \mathcal{K} -deformações Versais e Germes Estáveis

Considere F uma deformação \mathcal{K} -versal a r -parâmetros de um germe de aplicação $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$. Então $0 = F(0, 0)$ é valor regular de F .

De fato, note que pelo Teorema da \mathcal{K} -versalidade, F é uma deformação \mathcal{K} -transversal.

Logo

$$F(u, x) = f(x) + \sum_{i=1}^r u_i g_i(x)$$

onde

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle + I_f \cdot \varepsilon_{n,p} + \mathbb{R}\{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_r\} = \varepsilon_{n,p}^0. \quad (*)$$

Tome $(y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ arbitrário. Vamos mostrar que $DF(0)$ é sobrejetora, ou seja, vamos encontrar $(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_r, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = (\bar{u}, \bar{x})$ tal que $DF(0) \cdot (\bar{u}, \bar{x}) = (y_1, \dots, y_p)$.

Sejam $F = (F_1, \dots, F_p)$, $f = (f_1, \dots, f_p)$ e $\dot{F}_i = (\dot{F}_{i_1}, \dots, \dot{F}_{i_p})$, para $1 \leq i \leq r$. Então,

$$\begin{aligned} DF(0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1}(0,0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u_p}(0,0) & \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(0,0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(0,0) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_p}{\partial u_1}(0,0) & \dots & \frac{\partial F_p}{\partial u_p}(0,0) & \frac{\partial F_p}{\partial x_1}(0,0) & \dots & \frac{\partial F_p}{\partial x_n}(0,0) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \dot{F}_{1_1}(0,0) & \dots & \dot{F}_{r_1}(0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0,0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(0,0) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dot{F}_{1_p}(0,0) & \dots & \dot{F}_{r_p}(0,0) & \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(0,0) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(0,0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tome $h \in \varepsilon_{n,p}^0$, tal que $h = (y_1, \dots, y_p)$ aplicação constante. Então, como F é \mathcal{K} -transversal podemos escrever h como combinação linear de termos do primeiro membro da equação (*), lembrando que os termos em $I_f \cdot \varepsilon_{n,p}$ se anulam na origem.

Portanto existem escalares $\alpha_i \in \varepsilon_n$, com $1 \leq i \leq n$ e $\beta_1, \dots, \beta_r \in \mathbb{R}$ tais que:

$$(y_1, \dots, y_p) = h(0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) + \sum_{j=1}^r \beta_j \cdot \dot{F}_j(0).$$

Assim basta fazermos $\alpha_i(0) = \bar{x}_i$ e $\beta_j = \bar{u}_j$.

Logo $0 = F(0,0)$ é um valor regular para F , e portanto $V_F = F^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n$ é uma subvariedade regular de codimensão p .

Denotamos por $\pi_f : (V_F, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r, 0)$ o germe em 0 da restrição a V_F da projeção canônica $\pi : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r, 0)$.

Proposição 2.55. ([5]) *Sejam $F, G : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ deformações \mathcal{K} -versais a r -parâmetros dos germes $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, respectivamente. Então, se f e g são \mathcal{K} -equivalentes temos que π_F e π_G são \mathcal{A} -equivalentes.*

Demonstração. Dividiremos esta demonstração em dois passos:

1º Passo: Suponha $f = g$. Então, como F e G são deformações \mathcal{K} -versais temos que F é \mathcal{K} -equivalente a G .

Por definição existem germes Φ e h tais que $\Phi(v, x) = (h(v), \phi(v, x))$, com $I_{F \circ \Phi} = I_G$. Logo existe $M(v, x)$, matriz $p \times p$ inversível com entradas em ε_n , tal que

$$(F \circ \Phi)(v, x) = M(v, x) \cdot G(x, v).$$

Assim,

$$(\pi \circ \Phi)(v, x) = \pi(h(v), \phi(v, x)) = h(v) = h(\pi(v, x)) = (h \circ \pi)(v, x).$$

Portanto o seguinte diagrama de germes comuta:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{\Phi} & (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p, 0) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ (\mathbb{R}^p, 0) & \xrightarrow{h} & (\mathbb{R}^p, 0) \end{array}$$

Agora, seja $(v, x) \in V_G$, então $G(v, x) = 0$. Logo para todo $(v, x) \in V_G$ temos:

$$(F \circ \Phi)(v, x) = M(v, x) \cdot G(v, x) = 0 \Rightarrow \Phi(v, x) \in V_F.$$

Então o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} (V_G, 0) & \xrightarrow{\pi_G} & (\mathbb{R}^r, 0) \\ \Phi \downarrow & & \downarrow h \\ (V_F, 0) & \xrightarrow{\pi_F} & (\mathbb{R}^r, 0) \end{array}$$

Portanto π_F e π_G são \mathcal{A} -equivalentes.

2º Passo: Agora vamos considerar o caso geral, em que sabemos apenas que $f \underset{\mathcal{K}}{\sim} g$.

Da hipótese temos que existe uma matriz $p \times p$ inversível $M(x)$, com entradas em ε_n

e um germe inversível $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ tais que $g(x) = M(x) \cdot f(h(x))$.

Seja $G_0 : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ um germe definido por $G_0(v, x) = M(x) \cdot F(v, h(x))$, onde F é uma deformação \mathcal{K} -versal de f . Então G_0 é uma deformação de g pois:

$$G_0(0, x) = M(x) \cdot F(0, h(x)) = M(x) \cdot f(h(x)) = g(x).$$

Vamos mostrar que G_0 é \mathcal{K} -versal.

De fato, como $f \underset{\mathcal{K}}{\sim} g$ temos que $\text{cod}g = \text{cod}f$. Logo $\text{cod}T_f = \text{cod}T_g$ em $\varepsilon_{n,p}^0$.

Como F é \mathcal{K} -transversal temos que

$$T_f + \mathbb{R} \cdot \{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_r\} = \varepsilon_{n,p}.$$

Note que

$$\frac{\partial G_0}{\partial v_i}(0, x) = M(x) \cdot \frac{\partial F}{\partial v_i}(0, h(x)) \Rightarrow \dot{G}_{0i}(x) = M(x) \cdot \dot{F}_i(h(x))$$

logo, G_0 é \mathcal{K} -versal.

Por outro lado o difeomorfismo local na origem definido por

$$\begin{aligned} id \times h : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \\ (v, x) &\mapsto (v, h(x)) \end{aligned}$$

leva V_{G_0} em V_F . De fato,

$$(v, x) \in V_{G_0} \Rightarrow M(x) \cdot F(v, h(x)) = G_0(v, x) = 0 \Rightarrow F(v, h(x)) = 0 \Rightarrow (v, h(x)) \in V_F.$$

Podemos então substituir Φ por $id \times h$ no diagrama da página anterior, de modo que os germes π_F e π_{G_0} sejam \mathcal{A} -equivalentes.

Utilizando o Passo 1 e a transitividade da \mathcal{A} -equivalência concluimos a demonstração. \square

Definição 2.56. *Seja $F : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ uma deformação a r -parâmetros de um germe f tal que o posto de F em 0 é p . Então dizemos que F é regular, e nesse caso $r + n \geq p$.*

Considere agora $\bar{F} : (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ uma extensão de F pois $\bar{F}(0, v, x) = F(v, x)$.

Note que \bar{F} é regular, se F é regular.

Além disso, $\pi_{\bar{F}} : (V_{\bar{F}}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r, 0)$ é um desdobramento a s -parâmetros de π_F .

Observação 2.57. *Seja $g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ um germe de posto r . Tomando $n = r + s$ e $p = r + t$, a menos de uma mudança de coordenadas podemos escrever g como:*

$$\begin{aligned} g : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^t, 0) \\ (v, x) &\mapsto (v, G(v, x)). \end{aligned}$$

Fazendo

$$\begin{aligned} \bar{G} : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^t \times \mathbb{R}^s, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^t, 0) \\ (v, y, x) &\mapsto (-y) + G(v, x) \end{aligned}$$

onde \bar{G} é uma deformação a $r+t$ -parâmetros do germe g_0 dado por $g_0(x) = G(0, x)$. Então segue que $\pi_{\bar{G}}(v, y, x) = (v, y) = (v, G(v, x)) = g(v, x)$, isto é, $\pi_{\bar{G}} = g$.

Proposição 2.58. *(Martinet [7]) Considere $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, com F e G deformações regulares a r -parâmetros de f e g , respectivamente. Os germes π_F e π_G são \mathcal{A} -equivalentes se, e somente se, F e G são \mathcal{K} -equivalentes.*

Demonstração. Suponha π_F e π_G \mathcal{A} -equivalentes. Então, existem difeomorfismos locais $h : (\mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r, 0)$ e $\phi : (V_F, 0) \rightarrow (V_G, 0)$ tais que $\pi_G \circ \phi = h \circ \pi_F$.

Podemos estender ϕ , para um difeomorfismo $\bar{\phi} : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0)$ tal que $\pi \circ \bar{\phi} = h \circ \pi$, onde $\pi : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r, 0)$ é a projeção canônica.

De fato, por hipótese, $\pi_G \circ \phi = h \circ \pi_F$, onde $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, logo

$$(\pi_G \circ \phi)(v, x) = \pi_G(\phi(v, x)) = \pi_G(\phi_1(v, x), \phi_2(v, x))$$

e

$$(h \circ \pi_F)(v, x) = h(\pi_F(v, x)) = h(v).$$

Portanto $\phi_1(v, x) = h(v)$.

Tomando agora cartas locais α e β temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} V_F & \xrightarrow{\phi} & V_G \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p & \xrightarrow{\bar{\phi}} & \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p \end{array}$$

Considerando $\bar{\phi} = \beta|_{\mathbb{R}^k \times 0} \circ \phi \circ \alpha|_{\mathbb{R}^k \times 0}^{-1}$ e

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p, 0) \\ \phi &\mapsto \bar{\phi} \times id_p \end{aligned}$$

temos que $\tilde{\phi}|_{\mathbb{R}^k \times 0} = \bar{\phi}$.

Definindo $\psi : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0)$ por $\psi = \beta^{-1} \circ \tilde{\phi} \circ \alpha$, com $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, temos que

$$\begin{aligned} \Phi : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \\ (v, x) &\mapsto (h(v), \psi_2(v, x)) \end{aligned}$$

é o difeomorfismo local desejado.

Note que $\Phi(V_F) = V_G$, com f e g regulares, logo temos que $\Phi^*(I_G) = I_F$.

Queremos mostrar que F e G são deformações \mathcal{K} -equivalentes, para isso basta mostrar que existe um difeomorfismo local em zero $\tilde{\Phi}$, desdobramento da identidade de $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n$ da forma $\tilde{\Phi}(v, x) = (v, \tilde{\phi}(v, x))$, tal que $\tilde{\Phi}^*(I_{h^*G}) = I_F$. Para isso tome $\tilde{\phi} = \psi_2$.

Reciprocamente suponha F e G deformações \mathcal{K} -equivalentes, então por definição F é \mathcal{K} -isomorfo a h^*G , onde $h : (\mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r, 0)$ é um difeomorfismo local.

Então existe um germe de difeomorfismo local Φ na origem de $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n$ do tipo

$$\Phi(v, x) = (v, \phi(v, x)); \Phi(0, x) = x,$$

tal que

$$I_F = \Phi^*(I_{h^*G}) = I_{(h^*G) \circ \Phi}.$$

Portanto F é \mathcal{C} -equivalente a $(h^*G) \circ \Phi$ e portanto existe uma matriz inversível $M(v, x)$ $p \times p$ com entradas em ε_{r+n} tal que

$$F(v, x) = M(v, x) \cdot [(h^*G) \circ \Phi](v, x) = M(v, x) \cdot G(h(v), \phi(v, x)).$$

Da igualdade acima segue que

$$(v, x) \in V_F \Rightarrow (h(v), \phi(v, x)) \in V_G.$$

Agora considere o difeomorfismo local $\bar{\Phi}$ na origem de $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n$ dado por $\bar{\Phi}(v, x) = (h(v), \phi(v, x))$.

Fazendo $\psi = \bar{\Phi}|_{V_F}$ segue que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} V_F & \xrightarrow{\pi_F} & (\mathbb{R}^r, 0) \\ \psi \downarrow & & \downarrow h \\ V_G & \xrightarrow{\pi_G} & (\mathbb{R}^r, 0) \end{array}$$

Portanto os germes π_F e π_G são \mathcal{A} -equivalentes. \square

Proposição 2.59. (Martinet [7]) *O germe $\pi_{\bar{F}}$ é um desdobramento trivial de π_F se, e somente se, \bar{F} é \mathcal{K} -isomorfo a h^*F , onde $h : (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r, 0)$ é um germe de submersão.*

Demonstração. Por definição $\pi_{\bar{F}}$ é um desdobramento trivial de π_F se, e só se, $\pi_{\bar{F}}$ é \mathcal{A} -equivalente ao desdobramento constante de π_F , dado por

$$\begin{aligned} (id, \pi_F) : (\mathbb{R}^s \times V_F, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r, 0) \\ (v, u, x) &\mapsto (v, \pi_F(u, x)) \end{aligned}$$

ou seja, existem ϕ e ψ desdobramentos da identidade de $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p$, respectivamente, tais que $\pi_{\bar{F}} = \psi \circ (id, \pi_F) \circ \phi$, mas pela Proposição 2.58 isso equivale a \bar{F} ser \mathcal{K} -equivalente a c_F , onde

$$\begin{aligned} c_F : (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^p, 0) \\ (v, u, x) &\mapsto f(u, x) \end{aligned}$$

pois $(id, \pi_F) = \pi_{c_F}$.

Agora, \bar{F} é \mathcal{K} -equivalente a c_F se, e somente se, \bar{F} é \mathcal{K} -isomorfo a k^*c_F , onde k é um germe de difeomorfismo local na origem de $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$.

Considere $\pi : (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r, 0)$ definida por $\pi(v, u) = u$, então $\pi^*F = c_F$.

Portanto \bar{F} é \mathcal{K} -isomorfo a k^*c_F se e só se \bar{F} é \mathcal{K} -isomorfo a $k^*(\pi^*F) = (\pi \circ k)^*F = h^*F$, onde h é um germe de submersão, como queríamos. \square

Proposição 2.60. (Martinet [7]) *Seja $F : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ uma deformação regular a r -parâmetros de f . Então o germe π_F é estável se, e somente se, F é \mathcal{K} -versal.*

Demonstração. Seja \bar{G} uma outra deformação de f dada por $\bar{G}(u, x) = f(x) + G(u, x)$, com $G(0, x) = 0$.

Note que a soma $\bar{F}(u, v, x) = F(v, x) + G(u, x)$ é uma extensão de F e $\pi_{\bar{F}}$ é um desdobramento de π_F .

Suponha π_F estável, então $\pi_{\bar{F}}$ é \mathcal{K} -trivial. Pela Proposição 2.59 temos que \bar{F} é \mathcal{K} -isomorfo a h^*F , onde $h : (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r, 0)$ é um germe de submersão.

Assim, existe Φ um desdobramento da identidade, tal que $\Phi^*(I_{h^*F}) = I_{\bar{F}}$ e portanto $\bar{F} \underset{\mathcal{C}}{\sim} (h^*F \circ \Phi)$.

Logo, existe $M(u, v, x)$

$$\bar{F}(u, v, x) = M(u, v, x) \cdot (h^*F \circ \Phi)(u, v, x) = M(u, v, x) \cdot F(h(u, v), \phi(u, v, x)).$$

Fazendo $v = 0$ temos:

$$\bar{F}(u, 0, x) = M(u, 0, x) \cdot F(h(u, 0), \phi(u, 0, x)) \Rightarrow F(0, x) + G(u, x) = F(h(u, 0), \phi(u, 0, x)).$$

Portanto $\bar{G}(u, x) = M_0(u, x) \cdot F(h_0(u), \phi_0(u, x))$, onde $h_0 = h|_{v=0}$, $\phi_0 = \phi|_{v=0}$ e $M_0 = M|_{v=0}$.

Segue que \bar{G} é \mathcal{K} -isomorfo a h_0^*F , isto é, F é \mathcal{K} -versal.

Reciprocamente, suponha F uma deformação \mathcal{K} -versal de f .

Dado um desdobramento de π_F , podemos construir uma extensão \bar{F} de F tal que esse desdobramento se identifica com $\pi_{\bar{F}}$.

Como F é \mathcal{K} -versal existe um germe de submersão h tal que \bar{F} é \mathcal{K} -isomorfo a h^*F , ou seja, \bar{F} é uma extensão \mathcal{K} -trivial de F .

Logo pela Proposição 2.59 $\pi_{\bar{F}}$ é trivial e, portanto, π_F é estável.

□

Teorema 2.61. (Martinet [7]) *Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ germes estáveis. Então f e g são germes \mathcal{A} -equivalentes se, e somente se, estes germes são \mathcal{K} -equivalentes.*

Demonstração. Já vimos na Seção 1 deste Capítulo que se f e g são \mathcal{A} -equivalentes então f e g são \mathcal{K} -equivalentes. Resta apenas mostrar a recíproca.

Suponha f e g germes \mathcal{K} -equivalentes, e considere $F, G : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ deformações regulares a p -parâmetros de f e g , respectivamente, dadas por

$$F(y, x) = (-y) + f(x)$$

e

$$G(y, x) = (-y) + g(x).$$

Como $V_F = F^{-1}(0)$ e $V_G = G^{-1}(0)$ podemos fazer a identificação natural $\pi_F = f$ e $\pi_G = g$. Pela Proposição 2.60 temos que F e G são \mathcal{K} -versais.

Assim F e G são deformações \mathcal{K} -versais a p -parâmetros de dois germes \mathcal{K} -equivalentes. Portanto, pela Proposição 2.55 temos que $\pi_F = f$ e $\pi_G = g$ são \mathcal{A} -equivalentes.

□

2.4 Classificação de Germes sob \mathcal{K} -equivalência

Esta seção é dedicada à classificação de germes com respeito à \mathcal{K} -equivalência.

Definição 2.62. *Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ um germe de aplicação diferenciável, então definimos coposto $f = n - \text{posto } f$.*

Proposição 2.63. *(Splitting Lema [5]) Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, $f \in \mathcal{M}_n^2$, um germe do coposto c e \mathcal{K} -codimensão finita. Então f é \mathcal{K} -equivalente ao germe*

$$g(x_1, \dots, x_c) \pm x_{c+1}^2 \pm \dots \pm x_n^2$$

com $g \in \mathcal{M}_c^3$.

Proposição 2.64. *([5]) Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ um germe de \mathcal{K} -codimensão finita, então seu Símbolo de Boardman deve ter a forma $(i_1, \dots, i_k, 0, 0 \dots)$ para algum $k \geq 1$.*

Analisaremos apenas alguns casos especiais para a \mathcal{K} -classificação de germes:

Caso 1: $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$.

Neste caso existem duas possibilidades para o primeiro algarismo do Símbolo de Boardman de f : a saber, $n - 1$ e n .

- Se f é do tipo Σ^{n-1} , então f é não singular e pelo Teorema da Forma Local das Submersões f é \mathcal{K} -equivalente ao germe da projeção.

- Se f é do tipo Σ^n , então f tem coposto 1 e conseguimos uma forma normal através da seguinte proposição:

Proposição 2.65. *Seja $f \in \mathcal{M}_n^2$ um germe de coposto 1 e \mathcal{K} -codimensão finita $k \geq 1$.*

Então, f é \mathcal{K} -equivalente a um germe da forma

$$x_1^{k+1} \pm x_2^2 \pm \dots \pm x_n^2.$$

Demonstração. Ver [5] p. 192. □

Caso 2: $f : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, com $p \geq 2$.

- Se f é do tipo Σ^0 então f é não singular, e pelo Teorema da Forma Local das Imersões temos que uma forma normal para f é dado pela inclusão.

- Se f é do tipo Σ^1 , temos a seguinte proposição:

Proposição 2.66. ([5]) *Seja $f : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ um germe do tipo Σ^1 e \mathcal{K} -codimensão finita. Então f é do tipo $\Sigma^{1,1,\dots,1,0}$, com o número 1 repetido k vezes para algum $k \geq 1$. E nesse caso f é \mathcal{K} -equivalente ao germe $g(x) = (0, \dots, 0, x^{k+1})$.*

Demonstração. O fato de f ser do tipo $\Sigma^{1,1,\dots,1,0}$ segue da Proposição 2.64 e da seguinte condição:

$$\Sigma^{1,1,\dots,1,0} \neq \emptyset \Rightarrow i_1 \geq i_2 \geq i_3 \geq \dots \geq i_k$$

que já foi vista na Proposição 2.31.

Afirmamos agora que f é do tipo $\Sigma^{1,1,\dots,1,0}$ (com k repetições), se e somente se, as seguintes condições são satisfeitas (onde f_1, \dots, f_p são as componentes de f):

(i) $\frac{\partial^j f_1}{\partial x^j}(0) = 0, \dots, \frac{\partial^j f_p}{\partial x^j}(0) = 0$, com $j \leq k$;

(ii) algum $\frac{\partial^j f_i}{\partial x^j}(0) \neq 0$ para $j = k + 1$.

De fato, por indução sobre k é possível verificar que $\Delta^1 \dots \Delta^1 I_f$ é gerado por I_f e as derivadas parciais $\frac{\partial^j f_i}{\partial x^j}$, com $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq k$. Com isso a afirmação segue imediatamente.

Como \mathcal{M}_n^k é gerado por monômios de grau igual a k temos que as condições (i) e (ii) são equivalentes a dizer que $I_f = \langle x^{k+1} \rangle$, logo f é \mathcal{C} -equivalente a $g(x) = (0, \dots, 0, x^{k+1})$, pois $I_f = I_g$. Portanto, f e g são \mathcal{K} -equivalentes. □

Caso 3: $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$.

- Se f é do tipo Σ^0 , então f é não singular e pelo Teorema da Aplicação Inversa f é equivalente ao germe da identidade.

- Se f é do tipo Σ^1 , temos a seguinte proposição:

Proposição 2.67. ([5]) *Seja $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ um germe do tipo Σ^1 e \mathcal{K} -codimensão finita. Então f é necessariamente do tipo $\Sigma^{1,1,\dots,1,0}$, com o número 1 repetido k vezes para algum $k \geq 1$. E nesse caso f é \mathcal{K} -equivalente a (x, y^{k+1}) .*

Demonstração. O fato de f ser do tipo $\Sigma^{1,1,\dots,1,0}$ segue novamente da Proposição 2.64 e da condição:

$$\Sigma^{1,1,\dots,1,0} \neq \emptyset \Rightarrow i_1 \geq i_2 \geq i_3 \geq \dots \geq i_k.$$

Afirmção: Dado $G : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ um germe de posto r , então existe um germe inversível $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ para o qual $F = G \circ h$ é um desdobramento a r -parâmetros de um germe de posto zero.

De fato, através de mudanças de coordenadas lineares na fonte e na meta podemos supor que a matriz jacobiana de G , avaliada em 0 , é

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde I_r é a matriz identidade $r \times r$.

Considere o germe $g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r, 0)$, cujas coordenadas são G_1, \dots, G_r de G .

Claramente g tem posto r , logo pela Forma Local das Submersões existe um germe inversível $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ para o qual $g \circ h$ é a projeção π_r , dada por $\pi_r(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r)$.

Note que

$$\begin{aligned} \phi : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^{p-r}, 0) \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (G_{r+1} \circ h, \dots, G_p \circ h) \end{aligned}$$

é uma deformação a r -parâmetros de $\psi(x) = \phi(0, x)$ e

$$\begin{aligned} F = G \circ h : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{p-r}, 0) \\ x &\mapsto ((g \circ h)(x), (\phi \circ h)(x)) \end{aligned}$$

onde

$$((g \circ h)(x), (\phi \circ h)(x)) = (x_1, \dots, x_r, (G_{r+1} \circ h)(x), \dots, G_p \circ h)(x).$$

com $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Logo F é um desdobramento a r -parâmetros de ψ , que tem posto 0 por construção, e a afirmação está provada.

Voltando á demonstração da proposição, como f tem posto 1 existe um germe inversível $h : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ para o qual $F = f \circ h$ é um desdobramento a 1-parâmetro de um germe $f_0 : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ de posto zero que também é do tipo $\Sigma^{1,1,1,\dots,1,0}$ (com k repetições).

Portanto $f \circ h(x, y) = (x, f_0(y))$, ou seja, f é \mathcal{K} -equivalente a $(x, f_0(y))$. Mas pela Proposição 2.67 f_0 é \mathcal{K} -equivalente a y^{k+1} e, portanto, f é \mathcal{K} -equivalente a (x, y^{k+1}) . \square

• Se f é do tipo Σ^2 : Existem três possibilidades para o Símbolo de Boardman de segunda ordem de f : $\Sigma^{2,0}$, $\Sigma^{2,1}$ e $\Sigma^{2,2}$.

A seguinte proposição nos fornece uma classificação para germes do tipo $\Sigma^{2,0}$:

Proposição 2.68. ([5]) *Seja $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ um germe do tipo $\Sigma^{2,0}$ e \mathcal{K} -codimensão finita. Então f é \mathcal{K} -equivalente a um dos seguintes germes listados abaixo:*

$$I_{a,b} : (xy, x^a + y^b); b \geq a \geq 2$$

$$II_{a,b} : (xy, x^a - y^b); b \geq a \geq 2 \text{ e } a, b \text{ números pares}$$

$$IV_{a,b} : (x^2 + y^2, x^a); a \geq 3$$

Capítulo 3

Critério para C^r - \mathcal{A} -equivalência

Este capítulo é baseado na referência [12].

Vimos no Teorema 2.61 que germes C^∞ -estáveis equivalentes por contato também são \mathcal{A} -equivalentes. Agora, nosso objetivo é provar um resultado análogo para germes C^r -estáveis.

Considere dois germes de aplicações C^∞ $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$. Dizemos que f e g são C^r - \mathcal{A} -equivalentes se existem germes de C^r -difeomorfismos $s : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ e $t : (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ tais que $f(x) = t \circ g \circ s(x)$, onde $1 \leq r \leq \infty$. De acordo com esta definição, a C^∞ - \mathcal{A} -equivalência corresponde exatamente ao que chamamos nos capítulos anteriores de \mathcal{A} -equivalência.

Em geral, mostrar que dois germes de aplicações C^∞ são ou não C^r - \mathcal{A} -equivalentes não é uma tarefa fácil.

Quando $r = \infty$ há alguns casos clássicos para \mathcal{A} -equivalência:

- Se f e $g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ são germes de posto máximo segue da Forma Local das Submersões, (se $n \geq p$) ou da Forma Local das Imersões, (se $n \leq p$) ou ainda do Teorema da Aplicação Inversa, (se $n = p$), que $f \underset{\mathcal{A}}{\sim} g$ e conseguimos ainda encontrar uma forma normal que os representa.
- Se f e g possuem posto constante e igual em uma vizinhança comum de zero o Teorema do Posto afirma também que $f \underset{\mathcal{A}}{\sim} g$.

Um terceiro caso importante é dado por Mather, que caracteriza a \mathcal{A} -equivalência de germes C^∞ -estáveis pela classificação de \mathbb{R} -álgebras isomorfas, que constitui um invariante para a \mathcal{K} -equivalência, conforme visto no Teorema 2.61.

Neste Capítulo nosso objetivo é obter uma versão C^r do resultado de Mather, seguindo a estratégia de T. Nishimura [12]. Para isso precisamos inicialmente da definição de C^r - \mathcal{K} -equivalência. Observe que poderíamos definir a noção de C^r - \mathcal{K} -equivalência de uma das seguintes formas:

- i) Dois germes de aplicações $C^\infty f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ são C^r - \mathcal{K} -equivalentes se existirem $s : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ um germe de C^r -difeomorfismo e $M : (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (GL(p), M(0))$ germe de matriz inversível, tais que $f(x) = M(x)g(s(x))$, onde $1 \leq r \leq \infty$.
- ii) Dois germes de aplicações $C^\infty f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ são C^r - \mathcal{K} -equivalentes se existirem germes de C^r -difeomorfismos $H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$ e $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ tais que $H(x, y) = (h(x), \theta(x, y))$, com $\theta(x, 0) = 0$ e para o qual tenhamos $H(x, f(x)) = (h(x), g(h(x)))$.

No caso $r = \infty$, estas duas definições são equivalentes, como consequência da Proposição 2.3. Note que a C^∞ - \mathcal{K} -equivalência corresponde ao que chamamos nos capítulos anteriores de \mathcal{K} -equivalência.

Seguindo os passos da demonstração da Proposição 2.3 para o caso C^r , $r \neq \infty$, obtemos apenas que:

- (a) Se $f \underset{C^r-\mathcal{K}}{\sim} g$ pela Definição i) então $f \underset{C^{r-1}-\mathcal{K}}{\sim} g$ pela Definição ii).
- (b) Se $f \underset{C^r-\mathcal{K}}{\sim} g$ pela Definição ii) então $f \underset{C^r-\mathcal{K}}{\sim} g$ pela Definição i).

Por este motivo utilizaremos neste trabalho, por conveniência, a primeira definição para C^r - \mathcal{K} -equivalência quando $1 \leq r < \infty$.

Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ um germe de aplicação de classe C^∞ . Dizemos que um germe de aplicação $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ de classe C^r é uma C^r -deformação de f a k -parâmetros se $F(x, 0) = f(x)$. Dizemos também que uma C^r -deformação $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ de $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ é C^r -trivial se existem germes de C^r -difeomorfismos $h : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, (0, 0))$ e $H : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k, (0, 0))$ tais que os diagramas abaixo comutam

$$\begin{array}{ccccc}
 (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) & \xrightarrow{(F, \pi)} & (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) & \xrightarrow{\pi'} & (\mathbb{R}^k, 0) \\
 h \downarrow & & H \downarrow & & id \downarrow & (*) \\
 (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) & \xrightarrow{(f, \pi)} & (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) & \xrightarrow{\pi'} & (\mathbb{R}^k, 0)
 \end{array}$$

onde $\pi' : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ é a projeção canônica.

O resultado a seguir será muito útil, pois caracteriza deformações triviais através de campos de vetores.

Teorema 3.1. (Teorema de Thom-Levine [6]) *Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ um germe de aplicação diferenciável e $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k, (0, 0))$ uma deformação a k parâmetros de f , $0 < r \leq \infty$. Então F é uma deformação trivial se, e somente se, existem germes de campos de vetores $\xi_i : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, (0, 0))$ e $\eta_i : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k, (0, 0))$ com $1 \leq i \leq k$ satisfazendo*

$$-\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = \xi_i(F) - \eta_i \circ (F, \pi).$$

Considere $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ germes de classe C^∞ , $s : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ um germe de C^r -difeomorfismo e $M : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (GL(p, \mathbb{R}), M(0))$ um germe de aplicação de classe C^r .

Definimos as condições (a) - (d) como seguem:

- (a) $f(x) = M(x)g(s(x))$, isto é, f é C^r - \mathcal{K} -equivalente a g .
- (b) O germe de aplicação de classe C^r $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ dado por $F(x, \lambda) = f(x) - M(x)\lambda$ é uma deformação C^r -trivial de f .
- (c) O germe de aplicação de classe C^r $G : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ dado por $G(x, \lambda) = g(x) - M(s^{-1}(x))^{-1}\lambda$ é uma deformação C^r -trivial de g .
- (d) O germe de conjunto $(H(\{0\} \times \mathbb{R}^p), 0)$ é transversal ao germe de conjunto $(\{0\} \times \mathbb{R}^p, 0)$, onde H é o germe de C^r -difeomorfismo de $(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p, (0, 0))$ dado no diagrama comutativo (*) da página anterior com $k = p$.

Vamos considerar as seguintes condições sobre f e g :

- (i_r) Os germe f e g são C^r - \mathcal{A} -equivalentes. (Via definição utilizada neste capítulo)
- (ii_r) Existe um germe de C^r -difeomorfismo $s : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ e um germe de aplicação de classe C^r $M : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (GL(p, \mathbb{R}), M(0))$ tais que as condições (a) e (b) são satisfeitas.
- (iii_r) Existe um germe de C^r -difeomorfismo $s : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ e um germe de aplicação de classe C^r $M : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (GL(p, \mathbb{R}), M(0))$ tais que as condições (a) - (c) são satisfeitas.

(iv_r) Existe um germe de C^r -difeomorfismo $s : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ e um germe de aplicação de classe C^r $M : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (GL(p, \mathbb{R}), M(0))$ tais que as condições (a), (b) e (d) são satisfeitas.

Utilizando as condições (i_r), (ii_r), (iii_r) e (iv_r) vamos enunciar quatro resultados que caracterizam a C^r - \mathcal{A} -equivalência através da C^r - \mathcal{K} -equivalência.

Primeiro vamos examinar o caso em que f e g têm posto zero.

Teorema 3.2. *Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ germes de aplicações de classe C^∞ com posto zero. Então a condição (ii_r) implica a condição (i_r), para $1 \leq r \leq \infty$.*

Note que a condição de posto 0 é essencial no Teorema 3.2, conforme podemos ver no exemplo a seguir.

Exemplo 3.3. *Sejam $f, g : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ dados por*

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_2^3 + x_1x_2)$$

$$g(x_1, x_2) = (x_1, x_2^3)$$

e $M : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (GL(2, \mathbb{R}), E_2)$ dada por

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix}$$

onde $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Note que

$$M(x_1, x_2)g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1x_2 + x_2^3 \end{pmatrix} = f(x_1, x_2)$$

Portanto a condição (a) é satisfeita.

Como f é C^∞ -estável, temos que $F(x, \lambda) = f(x) - M(x)\lambda$ é C^∞ -trivial. Logo a condição (b) é satisfeita.

Assim temos que (ii_r) é verificada. Note porém que para $1 \leq r \leq \infty$ a condição (i_r) não é satisfeita, pois f e g não são topologicamente \mathcal{A} -equivalentes, já que seus conjuntos singulares são diferentes, portanto não existem homeomorfismos $s : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ e $t : (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ tais que $g = t \circ f \circ s$.

O caso em que f e g têm posto positivo é tratado no seguinte teorema.

Teorema 3.4. *Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ germes de aplicações de classe C^∞ . A condição (iii_r) implica a condição (i_r) para $1 \leq r \leq \infty$.*

Definição 3.5. *Um germe de aplicação de classe C^∞ $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ é dito C^r -estável se toda C^∞ -deformação de f é C^r -trivial.*

O Corolário 3.6 nos fornece uma C^r generalização para o Teorema de Mather.

Corolário 3.6. (*C^r generalização do Teorema de classificação de Mather*) *Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ germes C^r -estáveis ($1 \leq r \leq \infty$). Se existe um germe de C^∞ -difeomorfismo $s : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ e um germe de aplicação de classe C^∞ $M : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (GL(p, \mathbb{R}), (0, 0))$ tais que $f(x) = M(x)g(s(x))$, então f e g são C^r - \mathcal{A} -equivalentes.*

Com respeito à condição (d), note que é mais fácil verificar a condição de transversalidade do que a condição de trivialidade local. Logo (iv_r) é mais vantajosa em relação a (iii_r) , pois é interessante que o critério para a C^r - \mathcal{A} -equivalência seja o mais fácil de calcular quanto possível.

Teorema 3.7. *Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ germes de aplicação C^∞ . Então a condição (iv_r) implica a condição (i_r) , para $1 \leq r \leq \infty$.*

No caso em que $r = \infty$ temos o seguinte resultado:

Teorema 3.8. *Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ germes de classe C^∞ . Então:*

1. $(i_\infty) \Leftrightarrow (iii_\infty) \Leftrightarrow (iv_\infty)$;
2. $(i_\infty) \Leftrightarrow (ii_\infty) \Leftrightarrow (iii_\infty) \Leftrightarrow (iv_\infty)$ se o posto de f é zero.

Primeiramente descrevemos a estratégia utilizada por Nishimura e contida no artigo “Criteria for right-left equivalence of smooth map-germs” (ver [12]) para provar que dois germes C^r -estáveis dentro de uma mesma \mathcal{K} -órbita são C^r - \mathcal{A} -equivalentes. Vamos utilizar esta estratégia nas provas dos Teoremas 3.2, 3.4, 3.7 e 3.8.

Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ um germe de aplicação C^∞ e $M : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (GL(p, \mathbb{R}), M(0))$ um germe de aplicação de classe C^r .

Denotaremos por \mathbb{R}_y^p o espaço euclidiano da meta e por \mathbb{R}_λ^p o espaço de parâmetros.

Seja $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p, (0, 0)) \longrightarrow (\mathbb{R}_y^p, 0)$ uma deformação C^r -trivial de f dada por $F(x, \lambda) = f(x) - M(x)\lambda$. Ou seja, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p, (0, 0)) & \xrightarrow{(F, \pi_\lambda)} & (\mathbb{R}_y^p \times \mathbb{R}_\lambda^p, (0, 0)) & \xrightarrow{\pi'_\lambda} & (\mathbb{R}_\lambda^p, (0, 0)) \\ h \downarrow & & H \downarrow & & \downarrow id \\ (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p, (0, 0)) & \xrightarrow{(f, \pi_\lambda)} & (\mathbb{R}_y^p \times \mathbb{R}_\lambda^p, (0, 0)) & \xrightarrow{\pi'_\lambda} & (\mathbb{R}_\lambda^p, (0, 0)) \end{array} \quad (*)$$

onde $\pi_\lambda : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}_\lambda^p, 0)$ e $\pi'_\lambda : (\mathbb{R}_y^p \times \mathbb{R}_\lambda^p, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}_\lambda^p, 0)$ são as projeções canônicas.

Da comutatividade do diagrama (*) temos que

$$H(y, \lambda) = (H_1(y, \lambda), \lambda)$$

e

$$H \circ (F, \pi_\lambda)(x, \lambda) = (f, \pi_\lambda)(x, \lambda) \Rightarrow h(x, \lambda) = (h_1(x, \lambda), \lambda).$$

A estratégia para provar todos os resultados citados nesta seção passa pelos seguintes lemas:

Lema 3.9. $f(h_1(x, g(s(x)))) = H_1(0, g(s(x)))$.

Demonstração. Seja $(x, \lambda) \in (F, \pi_\lambda)^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}_\lambda^p)$ arbitrário. Para este ponto (x, λ) temos $F(x, \lambda) = 0$, e como

$$F(x, \lambda) = f(x) - M(x)\lambda \Rightarrow F(x, \lambda) = M(x)g(s(x)) - M(x)\lambda,$$

com $M(x)$ inversível, podemos concluir que

$$g(s(x)) = \lambda.$$

Pela comutatividade de (*) segue que

$$H \circ (F, \pi_\lambda)(x, \lambda) = ((f, \pi_\lambda) \circ h)(x, \lambda) \Rightarrow H(F(x, \lambda), \lambda) = (f(h_1(x, \lambda)), \lambda).$$

logo

$$H(0, g(s(x))) = (f(h_1(x, g(s(x))))), g(s(x)))$$

e portanto

$$H_1(0, g(s(x))) = f(h_1(x, g(s(x)))).$$

□

Lema 3.10. *Se o germe de aplicação de $(\mathbb{R}_\lambda^p, 0)$ a $(\mathbb{R}_y^p, 0)$ dado por*

$$\lambda \mapsto H_1(0, \lambda)$$

é um germe de C^r -difeomorfismo, então o germe de aplicação dado por

$$\phi(x, \lambda) = (h_1(x, \lambda), H_1(0, \lambda))$$

é tal que $\phi(F^{-1}(0), (0, 0)) = (\text{graf}(f), (0, 0))$.

Demonstração. Suponha que a aplicação dada por $\lambda \mapsto H_1(0, \lambda)$ é germe de C^r -difeomorfismo e considere o germe de aplicação

$$\phi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_y^p, (0, 0))$$

$$(x, \lambda) \mapsto (h_1(x, \lambda), H_1(0, \lambda))$$

Nessas condições, note que ϕ é germe de C^r -difeomorfismo.

O Lema 3.9 garante que

$$\phi(F^{-1}(0)) \subset \text{graf}(f).$$

Por outro lado, se $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p - F^{-1}(0)$, então pela comutatividade do diagrama (*) temos que

$$H_1(F(x, \lambda), \lambda) = f(h_1(x, \lambda))$$

com $H_1(F(x, \lambda), \lambda) \neq H_1(0, \lambda)$.

Isto mostra que

$$\phi(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p - F^{-1}(0)) \subset (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_y^p - \text{graf}(f)).$$

Portanto $\phi(F^{-1}(0), (0, 0)) = (\text{graf}(f), (0, 0))$.

□

Lema 3.11. *Se o germe de aplicação de $(\mathbb{R}_\lambda^p, 0)$ em $(\mathbb{R}_y^p, 0)$ dado por*

$$\lambda \mapsto H_1(0, \lambda)$$

é um germe de um C^r -difeomorfismo, então o germe de endomorfismo de $(\mathbb{R}^n, 0)$ dado por

$$x \mapsto h_1(x, g(s(x)))$$

também é um germe de \mathcal{C}^r -difeomorfismo.

Demonstração. O germe de aplicação

$$\begin{aligned}\sigma : (\mathbb{R}^n, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^n, 0) \\ x &\mapsto h_1(x, g(s(x)))\end{aligned}$$

pode ser decomposto da seguinte forma:

$$x \mapsto (x, g(s(x))) \mapsto (h_1(x, g(s(x))), H_1(0, g(s(x)))) \mapsto h_1(x, g(s(x))).$$

Se o germe de aplicação dado por $\lambda \mapsto H_1(0, \lambda)$ é um germe de um \mathcal{C}^r -difeomorfismo, então o germe de aplicação dado por

$$(x, \lambda) \mapsto (h_1(x, \lambda), H_1(0, \lambda))$$

que é denotado por ϕ no Lema 3.10, também é um germe de \mathcal{C}^r -difeomorfismo.

Como o primeiro germe da decomposição acima é o germe do gráfico de $(g \circ s)$ na origem, a composição do primeiro e do segundo germe produz um germe de difeomorfismo de classe \mathcal{C}^r para

$$(\{(h_1(x, g(s(x))), H_1(0, g(s(x)))) \mid x \in \mathbb{R}^n\}, (0, 0)). \quad (**)$$

Note que o último germe da composição é a restrição da projeção canônica

$$(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$$

ao germe de conjuntos (**).

Pelo Lema 3.10 (**) é igual a $(\text{graf}(f), (0, 0))$. Portanto o germe de aplicação σ é um germe de \mathcal{C}^r -difeomorfismo.

□

Lema 3.12. *Sob as mesmas condições, se o germe de aplicação*

$$\begin{aligned}\varphi_H : (\mathbb{R}_\lambda^p, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}_y^p, 0) \\ \lambda &\mapsto H_1(0, \lambda)\end{aligned}$$

é um germe de \mathcal{C}^r -difeomorfismo, então f e g são \mathcal{C}^r - \mathcal{A} -equivalentes.

Demonstração. Seja $\sigma(x) = h_1(x, g(s(x)))$, que pelo Lema 3.11 é um germe de

\mathcal{C}^r -difeomorfismo.

Agora, pelo Lema 3.9

$$f(h_1(x, g(s(x)))) = H_1(0, g(s(x)))$$

logo, temos que

$$(f \circ \sigma)(x) = (\varphi_H \circ g \circ s)(x) \Rightarrow f(x) = (\varphi_H \circ g \circ (s \circ \sigma^{-1}))(x).$$

Como s é um germe de \mathcal{C}^r -difeomorfismo por hipótese, concluímos que $f \underset{\mathcal{C}^r-\mathcal{A}}{\sim} g$.

□

Assim provar que os germes f e g são \mathcal{C}^r - \mathcal{A} -equivalentes nos Teoremas 3.2, 3.4, 3.7 e 3.8 recai em provar que a aplicação φ_H é um germe de \mathcal{C}^r -difeomorfismo em cada uma dessas situações.

Demonstração do Teorema 3.2:

Considere o diagrama a seguir, decorrente da hipótese da trivialidade de F :

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p, (0, 0)) & \xrightarrow{(F, \pi_\lambda)} & (\mathbb{R}_y^p \times \mathbb{R}_\lambda^p, (0, 0)) & \xrightarrow{\pi'_\lambda} & (\mathbb{R}_\lambda^p, (0, 0)) \\ h \downarrow & & H \downarrow & & \downarrow id \\ (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p, (0, 0)) & \xrightarrow{(f, \pi_\lambda)} & (\mathbb{R}_y^p \times \mathbb{R}_\lambda^p, (0, 0)) & \xrightarrow{\pi'_\lambda} & (\mathbb{R}_\lambda^p, (0, 0)) \end{array} \quad (*)$$

Derivando o diagrama acima com respeito a i -ésima componente λ_i do parâmetro $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, onde $1 \leq i \leq p$, obtemos germes de \mathcal{C}^{r-1} campos de vetores

$$\xi_i : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p, (0, 0)) \rightarrow (T\mathbb{R}^n, \xi_i(0, 0))$$

e

$$\eta_i : (\mathbb{R}_y^p \times \mathbb{R}_\lambda^p, (0, 0)) \rightarrow (T\mathbb{R}_y^p, \eta_i(0, 0))$$

tais que, pelo Teorema de Thom-Levine, satisfazem

$$-\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = \xi_i(F) - \eta_i \circ (F, \pi_\lambda)$$

para todo i , com $1 \leq i \leq p$.

Como f tem posto zero, segue que

$$\frac{\partial F}{\lambda_i}(0, 0) = \eta_i(0, 0)$$

para todo i , com $1 \leq i \leq p$.

Seja $\theta_i : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_y^p, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}_y^p, 0)$ o germe do fluxo local de η_i . Então, podemos obter a imagem $\varphi_H(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ de $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ por φ_H como a única solução da equação

$$\theta_1(\lambda_1; \theta_2(\lambda_2; \dots; \theta_p(\lambda_p, \varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_p)) \dots)) = 0. \quad (3.1)$$

Derivando a equação 3.1 com respeito a λ_i obtemos:

$$\eta_i(\theta_{i+1}(\lambda_{i+1}; \dots; \theta_p(\lambda_p; \varphi_H(\lambda_1, \dots, \lambda_p)))) + d(\theta_i)_y \dots d(\theta_p)_y \frac{\partial \varphi_H}{\partial \lambda_i}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = 0$$

para $1 \leq i \leq p$.

De fato, sejam $w_{p+1} = \varphi_H(\lambda)$ e $w_i = \theta_i(\lambda_i, w_{i+1})$, para $2 \leq i \leq p$.

Então se $i \neq j$ temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_j}{\lambda_i}(\lambda_j, w_{j+1}) &= \left(\frac{\partial \theta_{j1}}{\partial \lambda_j} \frac{\partial \lambda_j}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial \theta_{j1}}{\partial w_{j+1}} \frac{\partial w_{j+1}}{\partial \lambda_i}, \dots, \frac{\partial \theta_{jp}}{\partial \lambda_j} \frac{\partial \lambda_j}{\partial \lambda_i} + \frac{\theta_{jp}}{\partial w_{j+1}} \frac{\partial w_{j+1}}{\partial \lambda_i} \right) \\ &= \frac{\partial \theta_j}{\partial w_{j+1}} \left(\frac{\partial w_{j+1}}{\partial \lambda_i} \right) \end{aligned}$$

por outro lado, se $i = j$ temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_i}{\lambda_i}(\lambda_i, w_{i+1}) &= \left(\frac{\partial \theta_{i1}}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial \theta_{i1}}{\partial w_{i+1}} \frac{\partial w_{i+1}}{\partial \lambda_i}, \dots, \frac{\partial \theta_{ip}}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial \lambda_i} + \frac{\theta_{ip}}{\partial w_{i+1}} \frac{\partial w_{i+1}}{\partial \lambda_i} \right) \\ &= \frac{\partial \theta_i}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial \theta_i}{\partial w_{i+1}} \left(\frac{\partial w_{i+1}}{\partial \lambda_i} \right) \end{aligned}$$

Assim, derivando a Equação 3.1 com relação a λ_i temos

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial w_2} \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial w_3} \dots \frac{\partial \theta_{i-1}}{\partial w_i} \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial \theta_i}{\partial w_{i+1}} \left(\frac{\partial \theta_{i+1}}{\partial w_{i+2}} \dots \frac{\partial \theta_p}{\partial w_{p+1}} \left(\frac{\partial \varphi_H}{\partial \lambda_i} \right) \dots \right) \dots \right) \right) = 0. \quad (3.2)$$

Note que, por propriedade de fluxo, $\theta_i|_{\{0\} \times \mathbb{R}_y^p}$ é um difeomorfismo, portanto $\frac{\partial \theta_i}{\partial w_{i+1}}(0, 0)$ nos fornece uma transformação linear bijetora. Logo, da Equação (3.2) segue que

$$\eta_i(\theta_{i+1}(\lambda_{i+1}; \dots; \theta_p(\lambda_p; \varphi_H(\lambda)) \dots)) + \frac{\partial \theta_i}{\partial w_{i+1}} \left(\frac{\partial \theta_{i+1}}{\partial w_{i+2}} \dots \frac{\partial \theta_p}{\partial w_{p+1}} \left(\frac{\partial \varphi_H}{\partial \lambda_i} \right) \dots \right) = 0.$$

Tomando $\lambda = 0$ nesta igualdade temos que, como $\theta_i(0, v) = v$ para todo $v \in \mathbb{R}_y^p$, então $\frac{\partial \theta_i}{\partial w_{i+1}}$ é a matriz identidade para todo $1 \leq i \leq p$, portanto

$$\frac{\partial \varphi_H}{\partial \lambda_i}(0) = -\eta_i(0, 0) = -\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}(0, 0) = m_i(0)$$

para $1 \leq i \leq p$, onde $M(x) = (m_1(x), \dots, m_p(x))$.

Como $M(0)$ pertence a $GL(p, \mathbb{R})$ vemos que $(d\varphi_H)_0$ é inversível e portanto φ_H é um germe de difeomorfismo de classe C^r , como queríamos. □

Já vimos no Exemplo 3.3 que a hipótese de posto zero no Teorema 3.2 é essencial.

Para caracterizar o caso em que os germes de aplicação tem posto positivo temos o Teorema 3.4, que é o próximo teorema que demonstraremos.

Para isso precisamos do seguinte Lema:

Lema 3.13. *Suponha que a C^r -deformação $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}_y^p, 0)$ dada por $F(x, \lambda) = f(x) - M(x)\lambda$ seja C^r -trivial. Então, a C^r -deformação*

$$\tilde{F} : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, 0, E_p)) \rightarrow (\mathbb{R}_y^p, 0)$$

dada por

$$\tilde{F}(x, \lambda, B) = f(x) - M(x)B\lambda$$

é também C^r -trivial, onde $M_p(\mathbb{R})$ é o conjunto de todas as matrizes $(p \times p)$ de elementos reais e E_p é a matriz identidade $(p \times p)$.

Demonstração. Como F é C^r -trivial existem germes de C^r -difeomorfismo h e H tais que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p, (0, 0)) & \xrightarrow{(F, \pi_\lambda)} & (\mathbb{R}_y^p \times \mathbb{R}_\lambda^p, (0, 0)) & \xrightarrow{\pi'_\lambda} & (\mathbb{R}_\lambda^p, 0) \\ h \downarrow & & H \downarrow & & \downarrow id \\ (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p, (0, 0)) & \xrightarrow{(f, \pi_\lambda)} & (\mathbb{R}_y^p \times \mathbb{R}_\lambda^p, (0, 0)) & \xrightarrow{\pi'_\lambda} & (\mathbb{R}_\lambda^p, 0) \end{array} \quad (*)$$

onde $\pi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}_\lambda^p, 0)$ e $\pi' : (\mathbb{R}_y^p \times \mathbb{R}_\lambda^p, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}_\lambda^p, 0)$ são projeções canônicas.

Sejam

$$\tilde{h} : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, 0, E_p)) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, 0, E_p))$$

$$\tilde{H} : (\mathbb{R}_y^p \times \mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, 0, E_p)) \rightarrow (\mathbb{R}_y^p \times \mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, 0, E_p))$$

germes dados por

$$\tilde{h}(x, \lambda, B) = (h_1(x, B\lambda), \lambda, B)$$

$$\tilde{H}(y, \lambda, B) = (H_1(y, B\lambda), \lambda, B)$$

respectivamente, onde $h(x, \lambda) = (h_1(x, \lambda), \lambda)$ e $H(y, \lambda) = (H_1(y, \lambda), \lambda)$. Então \tilde{h} e \tilde{H} são germes de \mathcal{C}^r -difeomorfismos.

De fato, considere a matriz jacobiana de \tilde{h} em (x, λ, B) dada por

$$\begin{aligned} J\tilde{h}(x, \lambda, B) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{h}_1}{\partial x}(x, \lambda, B) & \frac{\partial \tilde{h}_1}{\partial \lambda}(x, \lambda, B) & \frac{\partial \tilde{h}_1}{\partial B}(x, \lambda, B) \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x}(x, \lambda, B) & \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda}(x, \lambda, B) & \frac{\partial \lambda}{\partial B}(x, \lambda, B) \\ \frac{\partial B}{\partial x}(x, \lambda, B) & \frac{\partial B}{\partial \lambda}(x, \lambda, B) & \frac{\partial B}{\partial B}(x, \lambda, B) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x}(x, B\lambda) & \frac{\partial h_1}{\partial \lambda}(x, B\lambda) & \frac{\partial h_1}{\partial B}(x, B\lambda) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\det J\tilde{h}(x, \lambda, B) = \det Jh(x, B\lambda)$$

pois $h(x, B\lambda) = (h_1(x, B\lambda), B\lambda)$. Logo, como por hipótese h é \mathcal{C}^r -difeomorfismo, temos que para B suficientemente próximo a E_p a matriz $J\tilde{h}(x, \lambda, B)$ é inversível e, portanto, \tilde{h} é germe de \mathcal{C}^r -difeomorfismo.

Para mostrar que \tilde{H} é um germe de \mathcal{C}^r -difeomorfismo o raciocínio é análogo.

Da comutatividade do diagrama (*) temos

$$\begin{aligned} f \circ \tilde{h}_1(x, \lambda, B) &= f \circ h_1(x, B\lambda) \\ &= H_1(F(x, B\lambda), B\lambda) \\ &= \tilde{H}_1(\tilde{F}(x, \lambda, B), B, \lambda). \end{aligned}$$

Logo os diagramas

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, 0, E_p)) & \xrightarrow{(\tilde{F}, \pi_{\lambda, B})} & (\mathbb{R}_y^p \times \mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, 0, E_p)) \\ h \downarrow & & H \downarrow \\ (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, 0, E_p)) & \xrightarrow{(f, \pi_{\lambda, B})} & (\mathbb{R}_y^p \times \mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, 0, E_p)) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_y^p \times \mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, 0, E_p)) & \xrightarrow{\pi'_{\lambda, B}} & (\mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, E_p)) \\ H \downarrow & & \downarrow id \\ (\mathbb{R}_y^p \times \mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, 0, E_p)) & \xrightarrow{\pi'_{\lambda, B}} & (\mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, E_p)) \end{array}$$

comutam, onde $\pi_{\lambda, B} : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, 0, E_p)) \longrightarrow (\mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, E_p))$ e $\pi'_{\lambda, B} : (\mathbb{R}_y^p \times \mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, 0, E_p)) \longrightarrow (\mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, E_p))$ são os germes de projeções canônicas.

Portanto \tilde{F} é C^r -trivial, como queríamos.

□

Demonstração do Teorema 3.4:

Como $F(x, \lambda) = f(x) - M(x)\lambda$ é C^r -trivial, pelo Lema 3.13 segue que $\tilde{F}(x, \lambda, B) = f(x) - M(x)B\lambda$ também é C^r -trivial. Então, obtemos germes de C^{r-1} campos de vetores

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_i &: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, 0, E_p)) \rightarrow (T\mathbb{R}^n, \tilde{\xi}_i(0, 0, E_p)) \\ \tilde{\xi}_{jk} &: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, 0, E_p)) \rightarrow (T\mathbb{R}^n, \tilde{\xi}_{jk}(0, 0, E_p)) \\ \tilde{\eta}_i &: (\mathbb{R}_y^p \times \mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, 0, E_p)) \rightarrow (T\mathbb{R}_y^p, \tilde{\eta}_i(0, 0, E_p)) \\ \tilde{\eta}_{jk} &: (\mathbb{R}_y^p \times \mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, 0, E_p)) \rightarrow (T\mathbb{R}_y^p, \tilde{\eta}_{jk}(0, 0, E_p)) \end{aligned}$$

tais que

$$-\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \lambda_i} = \tilde{\xi}_i(\tilde{F}) - \tilde{\eta}_i \circ (\tilde{F}, \pi_{\lambda, B}) \quad (3.3)$$

e

$$-\frac{\partial \tilde{F}}{\partial b_{jk}} = \tilde{\xi}_{jk}(\tilde{F}) - \tilde{\eta}_{jk} \circ (\tilde{F}, \pi_{\lambda, B}) \quad (3.4)$$

para todo i, j, k , com $1 \leq i, j, k \leq p$, onde b_{jk} é a (j, k) entrada da matriz B .

Seja $A = (a_1, \dots, a_p) \in M_p(\mathbb{R})$ uma matriz arbitrária e considere o germe de C^r -deformação

$$F_A : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, 0, E_p)) \rightarrow (\mathbb{R}_y^p, 0)$$

dado por

$$F_A(x, \lambda, B) = f(x) - (A + M(x)B)\lambda.$$

Definimos

$$\eta_{i,A}(y, \lambda, B) = -a_i + \tilde{\eta}_i(y + A\lambda, \lambda, B)$$

$$\eta_{jk,A}(y, \lambda, B) = \tilde{\eta}_{jk}(y + A\lambda, \lambda, B)$$

para todo i, j, k , com $1 \leq i, j, k \leq p$ e toda matriz $A = (a_1, \dots, a_p) \in M_p(\mathbb{R})$.

Note que

$$\frac{\partial F_A}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \lambda_i} - a_i,$$

$$\frac{\partial F_A}{\partial b_{jk}} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial b_{jk}},$$

$$\eta_{i,A} \circ (F_A, \pi_{\lambda,B})(x, \lambda, B) = -a_i + \tilde{\eta}_i(F_A(x, \lambda, B) + A\lambda, \lambda, B) = -a_i + \tilde{\eta}_i(\tilde{F}(x, \lambda, B), \lambda, B),$$

$$\eta_{jk,A} \circ (F_A, \pi_{\lambda,B})(x, \lambda, B) = \tilde{\eta}_{jk}(F_A(x, \lambda, B) + A\lambda, \lambda, B) = \tilde{\eta}_{jk}(\tilde{F}(x, \lambda, B), \lambda, B),$$

$$\tilde{\xi}_i(F_A) = \tilde{\xi}_i(\tilde{F}),$$

$$\tilde{\xi}_{jk}(F_A) = \tilde{\xi}_{jk}(\tilde{F}).$$

Logo, por (3.3) e (3.4) temos

$$-\frac{\partial F_A}{\partial \lambda_i} = -\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \lambda_i} + a_i = \tilde{\xi}_i(\tilde{F}) - \tilde{\eta}_i \circ (\tilde{F}, \pi_{\lambda,B}) + a_i = \tilde{\xi}_i(F_A) - \eta_{i,A} \circ (F_A, \pi_{\lambda,B})$$

e

$$-\frac{\partial F_A}{\partial b_{jk}} = -\frac{\partial \tilde{F}}{\partial b_{jk}} = \tilde{\xi}_{jk}(\tilde{F}) - \tilde{\eta}_{jk} \circ (\tilde{F}, \pi_{\lambda,B}) = \tilde{\xi}_{jk}(F_A) - \eta_{jk,A} \circ (F_A, \pi_{\lambda,B})$$

para todo i, j, k , com $1 \leq i, j, k \leq p$.

Integrando os germes de C^{r-1} campos de vetores

$$\begin{aligned} & \tilde{\xi}_1 + \frac{\partial}{\partial \lambda_1}, \dots, \tilde{\xi}_p + \frac{\partial}{\partial \lambda_p} \\ & \tilde{\xi}_{11} + \frac{\partial}{\partial b_{11}}, \dots, \tilde{\xi}_{pp} + \frac{\partial}{\partial b_{pp}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \tilde{\eta}_{1,A} + \frac{\partial}{\partial \lambda_1}, \dots, \tilde{\eta}_{p,A} + \frac{\partial}{\partial \lambda_p} \\ & \tilde{\eta}_{11,A} + \frac{\partial}{\partial b_{11}}, \dots, \tilde{\eta}_{pp,A} + \frac{\partial}{\partial b_{pp}} \end{aligned}$$

obtemos germes de C^r -difeomorfismos

$$h_A^{-1} : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, 0, E_p)) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, 0, E_p))$$

e

$$H_A^{-1} : (\mathbb{R}_y^p \times \mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, 0, E_p)) \rightarrow (\mathbb{R}_y^p \times \mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, 0, E_p))$$

para os quais os diagramas

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, 0, E_p)) & \xrightarrow{(F_A, \pi_{\lambda, B})} & (\mathbb{R}_y^p \times \mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, 0, E_p)) \\ h_A \downarrow & & H_A \downarrow \\ (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, 0, E_p)) & \xrightarrow{(f, \pi_{\lambda, B})} & (\mathbb{R}_y^p \times \mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, 0, E_p)) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_y^p \times \mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, 0, E_p)) & \xrightarrow{\pi'_{\lambda, B}} & (\mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, E_p)) \\ H_A \downarrow & & \downarrow id \\ (\mathbb{R}_y^p \times \mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, 0, E_p)) & \xrightarrow{\pi'_{\lambda, B}} & (\mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, E_p)) \end{array}$$

comutam, onde $\pi_{\lambda, B} : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, 0, E_p)) \rightarrow (\mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, E_p))$ e $\pi'_{\lambda, B} : (\mathbb{R}_y^p \times \mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, 0, E_p)) \rightarrow (\mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, E_p))$ são os germes das projeções canônicas.

Definimos o germe de aplicação de classe C^r

$$\begin{aligned} \varphi_{H_A} : (\mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}), (0, E_p)) & \rightarrow (\mathbb{R}_y^p, 0) \\ (\lambda, B) & \mapsto H_{A_1}(0, \lambda, B), \end{aligned}$$

onde H_{A_1} é a primeira componente do germe H_A . Considere o germe da restrição

$$\varphi_{H_A}|_{\mathbb{R}_\lambda^p \times \{B\}} : (\mathbb{R}_\lambda^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}_y^p, 0)$$

para B suficientemente próximo de E_p . Para todo i, j, k , com $1 \leq i, j, k \leq p$, sejam $\Theta_{i,A}$ e $\Theta_{jk,A} : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_y^p, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}_y^p, 0)$ os germes do fluxo local de $\eta_{i,A}$ e $\eta_{jk,A}$ respectivamente. Então, podemos obter a imagem $\varphi_{H_A}(\lambda_1, \dots, \lambda_p, b_{11}, \dots, b_{pp})$ de $(\lambda, B) = (\lambda_1, \dots, \lambda_p, b_{11}, \dots, b_{pp})$ por φ_{H_A} como a única solução da equação integral

$$\Theta_{1,A}(\lambda_1; \dots; \Theta_{p,A}(\lambda_p; \Theta_{11,A}(b_{11}; \dots; \Theta_{pp,A}(b_{pp}; \varphi_{H_A}(\lambda_1, \dots, \lambda_p, b_{11}, \dots, b_{pp}))) \dots) = 0.$$

Derivando esta equação com relação a λ_i obtemos

$$\eta_{i,A}(\Theta_{i+1,A}(\lambda_{i+1}; \dots; \Theta_{pp,A}(b_{pp}; \varphi_{H_A}(\lambda, B)) \dots) + D(\Theta_{i,A})_y \dots D(\Theta_{pp,A})_y \frac{\partial \varphi_{H_A}}{\partial \lambda_i}(\lambda_1, \dots, b_{pp})) = 0$$

para todo i , com $1 \leq i \leq p$. Fazendo $\lambda = 0$ e $B = E_p$ nesta igualdade obtemos

$$-\frac{\partial \varphi_{H_A}}{\partial \lambda_i}(0, E_p) = -\eta_{i,A}(0, 0, E_p) = -\frac{\partial F_A}{\partial \lambda_i}(0, 0, E_p) - D(F_A)_0 \cdot (\tilde{\xi}_i(0, 0, E_p)).$$

Como $D(F_A)_0 = D(f)_0$ temos

$$\begin{aligned} -\frac{\partial F_A}{\partial \lambda_i}(0, 0, E_p) - D(F_A)_0 \cdot (\tilde{\xi}_i(0, 0, E_p)) &= -\frac{\partial F_A}{\partial \lambda_i}(0, 0, E_p) - D(f)_0 \cdot (\tilde{\xi}_i(0, 0, E_p)) \\ &= a_i + m_i(0) - D(f)_0 \cdot (\tilde{\xi}_i(0, 0, E_p)) \end{aligned}$$

para todo i , com $1 \leq i \leq p$, onde $m_i(x)$ é o i -ésimo vetor coluna de M . Como $\tilde{\xi}_i$ é independente de A e contínuo com respeito a $B = (b_{ij})$, esta igualdade permite provar os seguintes lemas:

Lema 3.14. *Existe um subconjunto aberto e denso U de $M_p(\mathbb{R})$ tal que, para toda matriz $A \in U$, existe uma vizinhança V_A de E_p em $M_p(\mathbb{R})$ tal que o germe da restrição*

$$\varphi_{H_A}|_{\mathbb{R}_x^p \times \{B\}} : (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}_y^p, 0)$$

é um germe de um C^r -difeomorfismo para todo B em V_A .

Demonstração. Temos por hipótese que

$$\frac{\partial \varphi_{H_A}}{\partial \lambda_i}(0, E_p) = a_i + m_i(0) - D(f)_0 \cdot (\tilde{\xi}_i(0, 0, E_p))$$

ou seja,

$$D\varphi_{H_A}(0, E_p) = A + M(0) - D(f)_0 \cdot (\tilde{\xi}_1 \dots \tilde{\xi}_p(0, 0, E_p))$$

Note que a aplicação definida por

$$\begin{aligned} \sigma : M_p(\mathbb{R}) &\rightarrow M_p(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto D\varphi'_{H_A}(0, E_p) \end{aligned}$$

é uma translação, pois $\tilde{\xi}_i$ não depende de A . Portanto σ é um homeomorfismo.

Agora, note que o subconjunto das matrizes inversíveis $GL(p, \mathbb{R}) \subset M_p(\mathbb{R})$ é aberto e denso. Portanto $\sigma^{-1}(GL(p, \mathbb{R}))$ é aberto e denso.

Seja $U = \sigma^{-1}(GL(p, \mathbb{R}))$ e $A \in U$ arbitrário, então pela construção de U temos que $D\varphi|_{H_A}(0, E_p)$ é inversível.

Considere agora a aplicação dada por

$$\det \circ D\varphi_{H_A} : \mathbb{R}_\lambda^p \times M_p(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Como $D\varphi_{H_A}$ é contínua, pois $\tilde{\xi}_i$ é contínua com relação a $B \in M_p(\mathbb{R})$, temos que $\det \circ D\varphi_{H_A}$ também é contínua. Assim, como $\det(D\varphi_{H_A}(0, E_p)) \neq 0$ existe uma vizinhança W de $(0, E_p)$ tal que $\det(D\varphi_{H_A}(x, B)) \neq 0$ para todo $(x, B) \in W$. Portanto existe uma vizinhança V_A de E_p tal que $\det(D\varphi_{H_A}) \neq 0$ para todo $B \in V_A$.

Logo, pelo Teorema da Aplicação Inversa

$$\varphi_{H_A}|_{\mathbb{R}_\lambda^p \times \{B\}} : (\mathbb{R}_\lambda^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}_y^p, 0)$$

é C^r -difeomorfismo local em 0 para todo $B \in V_A$. \square

Lema 3.15. *Para toda matriz $A \in M_p(\mathbb{R})$ existe um conjunto aberto denso W_A de $M_p(\mathbb{R})$ tal que $A + M(0)B$ é inversível para todo $B \in W_A$.*

Demonstração. Seja $A \in M_p(\mathbb{R})$ uma matriz fixa e considere a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi_A : M_p(\mathbb{R}) &\rightarrow M_p(\mathbb{R}) \\ B &\mapsto A + M(0)B \end{aligned}$$

Como A e $M(0)$ são matrizes fixas e $M(0)$ é, por hipótese, inversível temos que Φ_A é um homeomorfismo.

Agora, como $GL(p, \mathbb{R})$ é aberto e denso em $M_p(\mathbb{R})$ temos que $\Phi_A^{-1}(GL(p, \mathbb{R}))$ também é aberto e denso em $M_p(\mathbb{R})$.

Seja $W_A = \Phi_A^{-1}(GL(p, \mathbb{R}))$. Então, pela construção de Φ_A temos que para todo $B \in W_A$, $A + M(0)B$ é inversível. \square

Lema 3.16. *Para toda matriz A ($p \times p$) pertencente a $U = \sigma^{-1}(GL(p, \mathbb{R}))$, o germe de classe C^∞ f e o germe de aplicação de classe C^r dado por*

$$g_{A,B}(x) = (A + M(s^{-1}(x))B)^{-1}f(s^{-1}(x))$$

são C^r - \mathcal{A} -equivalentes para todo $B \in V_A \cap W_A$.

Demonstração. Pelos Lemas 3.14 e 3.15 temos que $\varphi_{H_A}|_{\mathbb{R}_\lambda^p \times \{B\}} : (\mathbb{R}_\lambda^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}_y^p, 0)$ é um C^r -difeomorfismo para todo $B \in V_A \cap W_A$.

Logo, pelo Lema 3.12 temos que os germes f e $g_{A,B}$ são \mathcal{C}^r - \mathcal{A} -equivalentes, como desejado. \square

Agora tome uma matriz $A_0 \in U \cap GL(p, \mathbb{R})$ fixa.

Seja $N_{A_0}(x) = (n_1(x), \dots, n_p(x)) = M(s^{-1}(x))^{-1}A_0$.

Para toda matriz $B = (b_1, \dots, b_p) \in V_{A_0} \cap W_{A_0}$, definimos o germe de aplicação de classe \mathcal{C}^r

$$G_{A_0,B} : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}_y^p, 0)$$

por

$$G_{A_0,B}(x, \lambda) = (N_{A_0}(x) + B)(g_{A_0,B}(x) - \lambda) = (N_{A_0}(x) + B)g_{A_0,B}(x) - (N_{A_0}(x) + B)\lambda.$$

Como

$$\begin{aligned} g(x) &= M(s^{-1}(x))^{-1}(A_0 + M(s^{-1}(x))B)(A_0 + M(s^{-1}(x))B)^{-1}f(s^{-1}(x)) \\ &= M(s^{-1}(x))^{-1}(A_0 + M(s^{-1}(x))B)g_{A_0,B}(x) \\ &= (N_{A_0}(x) + B)g_{A_0,B}(x) \end{aligned}$$

vemos que $G_{A_0,B}$ é uma \mathcal{C}^r -deformação de g .

Definimos

$$G_{A_0}(x, \lambda) = g(x) - N_{A_0}(x)\lambda.$$

Como por hipótese do teorema $G(x, \lambda) = g(x) - M(s^{-1}(x))^{-1}\lambda$ é uma deformação \mathcal{C}^r -trivial, pelo Lema 3.13 temos que G_{A_0} também é \mathcal{C}^r -trivial. Diferenciando o diagrama comutativo dado pela trivialidade de G_{A_0} com respeito a λ_i , obtemos germes de \mathcal{C}^{r-1} campos de vetores $\omega_{i,A_0} : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p, (0, 0)) \rightarrow (T\mathbb{R}^n, \omega_{i,A_0}(0, 0))$ e $\theta_{i,A_0} : (\mathbb{R}_y^p \times \mathbb{R}_\lambda^p, (0, 0)) \rightarrow (T\mathbb{R}_y^p, \theta_{i,A_0}(0, 0))$ tais que

$$-\frac{\partial G_{A_0}}{\partial \lambda_i} = \omega_{i,A_0}(G_{A_0}) - \theta_{i,A_0} \circ (G_{A_0}, \pi_\lambda)$$

para todo i , com $1 \leq i \leq p$.

Fazendo $\theta_{i,(A_0,B)}(y, \lambda) = -b_i + \theta_{i,A_0}(y + B\lambda, \lambda)$ para todo i , com $1 \leq i \leq p$ temos

$$-\frac{\partial G_{A_0,B}}{\partial \lambda_i} = \omega_{i,A_0}(G_{A_0,B}) - \theta_{i,(A_0,B)} \circ (G_{A_0,B}, \pi_\lambda) \quad (3.5)$$

para todo i , com $1 \leq i \leq p$.

Por (3.5) temos que integrando os germes de \mathcal{C}^{r-1} campos de vetores

$$\omega_{1,A_0} + \frac{\partial}{\partial \lambda_1}, \dots, \omega_{p,A_0} + \frac{\partial}{\partial \lambda_p}$$

e

$$\theta_{1,(A_0,B)} + \frac{\partial}{\partial \lambda_1}, \dots, \theta_{p,(A_0,B)} + \frac{\partial}{\partial \lambda_p}$$

conseguimos os germes de \mathcal{C}^r -difeomorfismos

$$h_{A_0,B}^{-1} : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p, (0,0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p, (0,0))$$

e

$$H_{A_0,B}^{-1} : (\mathbb{R}_y^p \times \mathbb{R}_\lambda^p, (0,0)) \rightarrow (\mathbb{R}_y^p \times \mathbb{R}_\lambda^p, (0,0))$$

que realizam a \mathcal{C}^r -trivialidade para $G_{A_0,B}$.

Desde que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{H_{A_0,B}}}{\partial \lambda_i}(0) &= -\theta_{i,(A_0,B)}(0,0) \\ &= -\frac{\partial G_{A_0,B}}{\partial \lambda_i}(0,0) - D(G_{A_0,B})_0(\omega_{i,A_0}(0,0)) \\ &= -\frac{\partial G_{A_0,B}}{\partial \lambda_i}(0,0) - D(g)_0(\omega_{i,A_0}(0,0)) \\ &= n_i(0) + b_i - D(g)_0(\omega_{i,A_0}(0,0)) \end{aligned}$$

para todo i , com $1 \leq i \leq p$, temos que existe um subconjunto aberto denso X_{A_0} de $V_{A_0} \cap W_{A_0}$ tal que $\varphi_{H_{A_0,B}}$ é um germe de \mathcal{C}^r -difeomorfismo para todo $B \in X_{A_0}$. Então pelo Lema 3.13, temos:

Lema 3.17. *Para toda matriz $A_0 \in U$ existe uma matriz $B \in V_{A_0} \cap W_{A_0}$ tal que g e $g_{A_0,B}$ são \mathcal{C}^r - \mathcal{A} -equivalentes.*

Assim, pelos Lemas 3.15 e 3.17, f e g são \mathcal{C}^r - \mathcal{A} -equivalentes. □

Demonstração do Teorema 3.7:

Novamente é suficiente mostrar que o germe de aplicação

$$\begin{aligned} \varphi_H : (\mathbb{R}_\lambda^p, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}_y^p, 0) \\ \lambda &\mapsto H_1(0, \lambda) \end{aligned}$$

é um germe de \mathcal{C}^r -difeomorfismo.

Utilizando a mesma notação que na demonstração do Teorema 3.2 vemos que podemos obter a imagem de $\varphi_H(\lambda)$ de $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ por φ_H como a única solução da equação

$$\theta_1(\lambda_1; \theta_2(\lambda_2; \dots; \theta_p(\lambda_p, \varphi_H(\lambda_1, \dots, \lambda_p)) \dots)) = 0.$$

Derivando a equação acima com respeito a λ_i obtemos:

$$\eta_i(\theta_{i+1}(\lambda_{i+1}; \dots; \theta_p(\lambda_p; \varphi_H(\lambda_1, \dots, \lambda_p)) \dots)) + D(\theta_i)_y \dots D(\theta_p)_y \frac{\partial \varphi_H}{\partial \lambda_i}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = 0$$

para $1 \leq i \leq p$.

Tomando $\lambda = 0$ nesta igualdade vemos que

$$\frac{\partial \varphi_H}{\partial \lambda_i}(0) = -\eta_i(0, 0)$$

para $1 \leq i \leq p$.

Da hipótese (c) vemos que os $2p$ vetores

$$\eta_1(0, 0) + \frac{\partial}{\partial \lambda_1}, \dots, \eta_p(0, 0) + \frac{\partial}{\partial \lambda_p}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \lambda_p}$$

são linearmente independentes no espaço vetorial $\mathbb{R}_y^p \times \mathbb{R}_\lambda^p$.

Portanto os vetores

$$\eta_1(0, 0), \dots, \eta_p(0, 0)$$

são linearmente independentes em \mathbb{R}_y^p . Logo $(D\varphi_H)_{(0,0)}$ é inversível e, conseqüentemente, φ_H é um germe de um C^r -difeomorfismo. □

Exemplo 3.18. Considere os germes de aplicações C^∞ de $(\mathbb{R}^3, 0)$ em $(\mathbb{R}^4, 0)$ dados por

$$f(x, y, z) = (x, y^2z, xy^3, z)$$

e

$$f_\alpha(x, y, z) = (x, y^2z, \alpha xy^3 + y^3z + xy^5z^2 + y^7z^2, z)$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$.

Vamos mostrar que f_α é \mathcal{A} -equivalente a f se $\alpha \neq 0$.

Primeiramente, observe que o fecho da imagem inversa do conjunto dos pontos du-

plos de f é uma subvariedade diferenciável, enquanto para f_0 este conjunto não é uma subvariedade de \mathbb{R}^3 . Logo f e f_0 não são \mathcal{A} -equivalentes.

Como $f_\alpha^{-1}(0) = \text{eixo } y$, f_α não é \mathcal{K} -finitamente determinado pela caracterização geométrica da determinação finita [15].

De fato, como f_α é um germe de aplicação real analítica, sabemos que f_α é \mathcal{K} -finitamente determinado se, e só se, a complexificação de f_α é \mathcal{K} -finitamente determinada como um germe de aplicação holomorfa (isto segue da Proposição 1.7 de [15]).

Como $f_\alpha^{-1}(0) = \text{eixo } y \subset \sum f_\alpha$ temos que $\sum f_\alpha \cap f_\alpha^{-1}(0) = \text{eixo } y \neq \{0\}$.

Portanto, pela caracterização geométrica da determinação finita [15] temos que f_α não é \mathcal{K} -finitamente determinado.

Então, neste caso, não podemos esperar utilizar resultados sobre germes \mathcal{K} -finitamente determinados.

Agora note que

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ (1 - \alpha)y^3 - y^5z^2 & -y^5z & 1 & -y^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} f_\alpha(x, y, z).$$

Portanto a condição (a) de (iv_∞) é satisfeita.

Considere o germe de deformação dado por

$$F_\alpha(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = f(x, y, z) - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ (1 - \alpha)y^3 - y^5z^2 & -y^5z & 1 & -y^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}.$$

Note que podemos escrever as derivadas parciais de F_α com relação a λ_i da seguinte forma:

$$-\frac{\partial F_\alpha}{\partial \lambda_3} = \frac{\partial}{\partial Z}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial F_\alpha}{\partial \lambda_4} &= -\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial U} \\
&= -\frac{\partial F_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial U} \\
-\frac{\partial F_\alpha}{\partial \lambda_2} &= -y^2 z \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial Y} + y^2 z \frac{\partial}{\partial X} \\
&= -y^2 z \frac{\partial F_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial Y} + (Y + \lambda_2) \frac{\partial}{\partial X} \\
-\frac{\partial F_\alpha}{\partial \lambda_1} &= (1 - \alpha) \frac{\partial f}{\partial x} - (1 - \alpha) \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} - y^2 z^2 \frac{\partial f}{\partial x} \\
&= (1 - \alpha - y^2 z^2) \frac{\partial F_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X} + (\alpha + (Y + \lambda_2)(U + \lambda_4)) \frac{\partial}{\partial X}.
\end{aligned}$$

Sejam

$$\xi_{1,\alpha} = (1 - \alpha - y^2 z^2) \frac{\partial}{\partial x}, \quad \xi_{2,\alpha} = -y^2 z \frac{\partial}{\partial x}, \quad \xi_{3,\alpha} = 0, \quad \xi_{4,\alpha} = -\frac{\partial}{\partial x}$$

e

$$\begin{aligned}
\eta_{1,\alpha} &= -(\alpha + (Y + \lambda_2)(U + \lambda_4)) \frac{\partial}{\partial X}, \quad \eta_{2,\alpha} = -(Y + \lambda_2) \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial Y}, \\
\eta_{3,\alpha} &= -\frac{\partial}{\partial Z}, \quad \eta_{4,\alpha} = -\frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial U}.
\end{aligned}$$

Então, temos que

$$-\frac{\partial F_\alpha}{\partial \lambda_i} = \xi_{i,\alpha}(F_\alpha) - \eta_{i,\alpha} \circ (F_\alpha, \pi)$$

para $i = 1, 2, 3, 4$, com $\pi(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$.

Além disso,

$$\begin{aligned}
\eta_{1,\alpha}(0,0) &= -\alpha \frac{\partial}{\partial X}, & \eta_{2,\alpha}(0,0) &= -\frac{\partial}{\partial Y}, \\
\eta_{3,\alpha}(0,0) &= -\frac{\partial}{\partial Z}, & \eta_{4,\alpha}(0,0) &= -\frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial U}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Pelo Teorema de Thom-Levine temos que integrando os campos de vetores de classe C^∞ dados por

$$\xi_{i,\alpha} + \frac{\partial}{\partial \lambda_i}, \quad \eta_{i,\alpha} + \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

obtemos germes de C^∞ -difeomorfismos

$$h_\alpha^{-1} : (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4, (0,0)) \rightarrow (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4, (0,0))$$

e

$$H_\alpha^{-1} : (\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4, (0, 0))$$

tais que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_\lambda^4, (0, 0)) & \xrightarrow{(F_\alpha, \pi)} & (\mathbb{R}_y^4 \times \mathbb{R}_\lambda^4, (0, 0)) \\ h^{-1} \uparrow & & H^{-1} \uparrow \\ (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_\lambda^4, (0, 0)) & \xrightarrow{(f, \pi)} & (\mathbb{R}_y^4 \times \mathbb{R}_\lambda^4, (0, 0)) \end{array}$$

Então a condição (b) de (iv_∞) é satisfeita.

Como

$$\frac{\partial H_\alpha^{-1}}{\partial \lambda_i} = \eta_{i,\alpha} + \frac{\partial}{\partial \lambda_i}$$

para $i=1,2,3,4$, temos que os vetores $\eta_{i,\alpha}(0,0) + \frac{\partial}{\partial \lambda_i}$ formam uma base para o espaço tangente a $H_\alpha^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^4)$ em $(0,0)$.

Logo, por (3.6) temos que $(H_\alpha^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^4), (0,0))$ é transversal a $(\{0\} \times \mathbb{R}^4, (0,0))$ se $\alpha \neq 0$.

Dessa forma a condição (d) de (iv_∞) é satisfeita para $\alpha \neq 0$.

Demonstração do Teorema 3.8:

Queremos mostrar que

1. $(i_\infty) \Leftrightarrow (iii_\infty) \Leftrightarrow (iv_\infty)$;
2. $(i_\infty) \Leftrightarrow (ii_\infty) \Leftrightarrow (iii_\infty) \Leftrightarrow (iv_\infty)$ se o posto de f é zero.

Note que a implicação $(iii_\infty) \Rightarrow (ii_\infty)$ é clara, e que as implicações $(ii_\infty) \Rightarrow (i_\infty)$, $(iii_\infty) \Rightarrow (i_\infty)$ e $(iv_\infty) \Rightarrow (i_\infty)$ são obtidas pelos Teoremas 3.2, 3.4 e 3.7, respectivamente. Portanto basta mostrar $(i_\infty) \Rightarrow (iii_\infty)$ e $(i_\infty) \Rightarrow (iv_\infty)$.

Suponhamos que existam germes de C^∞ -difeomorfismos s e t tais que $f(x) = t \circ g \circ s(x)$.

Usando a expansão de Taylor de $t : (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ podemos construir um germe de aplicação de classe C^∞

$$L : (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (GL(p, \mathbb{R}), L(0))$$

tal que

$$f(x) = L(g(s(x)))g(s(x)) = L(t^{-1}(f(x)))g(s(x)).$$

Considere as C^∞ -deformações

$$F(x, \lambda) = f(x) - L(t^{-1}(f(x)))\lambda$$

e

$$G(x, \lambda) = g(x) - L(g(x))^{-1}\lambda.$$

Para mostrar a C^∞ -trivialidade da deformação F defimos os germes $h_f(x, \lambda) = (x, \lambda)$ e $H_f^{-1}(y, \lambda) = (y - L(t^{-1}(y))\lambda, \lambda)$. De fato, note que

$$\begin{aligned} H_f^{-1} \circ (f, \pi_\lambda) \circ h_f(x, \lambda) &= H_f^{-1} \circ (f, \pi_\lambda)(x, \lambda) \\ &= (f(x) - L(t^{-1}(f(x)))\lambda, \lambda) \\ &= (F(x, \lambda), \lambda). \end{aligned}$$

Analogamente definimos $h_g(x, \lambda) = (x, \lambda)$ e $H_g^{-1}(y, \lambda) = (y - L(y)^{-1}\lambda, \lambda)$ para os quais o diagrama de trivialidade de G é satisfeito. De fato,

$$\begin{aligned} H_g^{-1} \circ (g, \pi_\lambda) \circ h_g(x, \lambda) &= H_g^{-1} \circ (g, \pi_\lambda)(x, \lambda) \\ &= (g(x) - L(g(x))^{-1}\lambda, \lambda) \\ &= (G(x, \lambda), \lambda). \end{aligned}$$

Portanto (iii_∞) é satisfeita.

Agora, note que os vetores $\frac{\partial H_f^{-1}}{\partial \lambda_i}(0, 0)$ formam uma base para o espaço tangente de $H_f^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^p)$.

Como $H_f(y, \lambda) = (y - L(t^{-1}(y))\lambda, \lambda)$ temos que

$$\frac{\partial H_f^{-1}}{\partial \lambda_i}(0, 0) = -L(0) \frac{\partial}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial}{\partial \lambda_i}$$

e

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_f^{-1}}{\partial \lambda_1}(0, 0) \\ \vdots \\ \frac{\partial H_f^{-1}}{\partial \lambda_p}(0, 0) \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L(0) & E_p \\ 0_p & E_p \end{pmatrix}$$

onde 0_p representa a matriz nula ($p \times p$).

Como a matriz $L(0)$ é inversível temos J também é inversível e, portanto, os vetores

$$\frac{\partial H_f^{-1}}{\partial \lambda_1}(0, 0), \dots, \frac{\partial H_f^{-1}}{\partial \lambda_p}(0, 0), \frac{\partial}{\partial \lambda_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \lambda_p}$$

são linearmente independentes. Consequentemente $(H_f^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^p), 0)$ é transversal a $(\{0\} \times \mathbb{R}_\lambda^p, 0)$.

□

Capítulo 4

Critério para \mathcal{C}^0 - \mathcal{A} -equivalência

Dois germes de classe \mathcal{C}^∞ , $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ são \mathcal{C}^0 - \mathcal{A} -equivalentes, ou *topologicamente \mathcal{A} -equivalentes*, se existem germes de homeomorfismos $s : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ e $t : (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ para os quais $f(x) = t \circ g \circ s(x)$.

No capítulo anterior utilizamos algumas ferramentas que não se aplicam a este novo contexto. Para trabalhar com a \mathcal{C}^0 - \mathcal{A} -equivalência, precisaremos definir a noção de trivialidade de uma maneira apropriada. A linguagem que formalizará este conceito está baseada na teoria de estratificações.

4.1 Estratificações e Aplicações Estratificadas

A idéia básica da teoria de estratificações é decompor um conjunto em variedades regulares, que chamamos de estratos. Parece bastante razoável, e também natural, que ao estratificar um subconjunto de \mathbb{R}^n , o tipo topológico dos pontos ao longo de um mesmo estrato não se altere. Porém, isso nem sempre acontece. Para evitar este problema, H. Whitney introduziu as chamadas *condições de regularidade de Whitney* entre os estratos (ver [4] para maiores detalhes). Podemos pensar numa condição de regularidade como sendo um controle de como os estratos de uma estratificação se reencontram. Nesta seção utilizaremos uma noção mais fraca de regularidade do que as condições de regularidade de Whitney. Trabalharemos com a noção de C -regularidade definida por K. Bekka [1]. Os resultados utilizados nesta seção também podem ser encontrados em [1].

Definição 4.1. *Uma \mathcal{C}^k -estratificação de um conjunto $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ é uma partição $\mathcal{S} = \cup_{i=1}^k S_i$ satisfazendo as condições:*

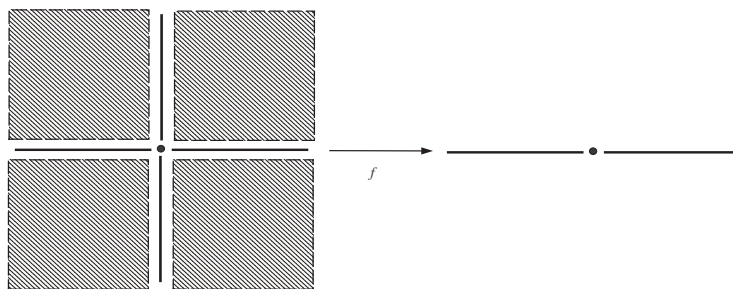
(i) *Cada S_i é subvariedade diferenciável de classe \mathcal{C}^k , a qual chamamos de estrato.*

- (ii) Os estratos são disjuntos, isto é, $S_i \cap S_j = \emptyset$, para todo i, j com $i \neq j$.
- (iii) (Condição de Fronteira) Para todo par de estratos S_i, S_j , se $S_i \cap \overline{S_j} \neq \emptyset$ então $S_i \subset \overline{S_j}$.

Definição 4.2. Sejam $\mathcal{S} = \{S_\alpha\}$ e $\mathcal{T} = \{T_\beta\}$ estratificações das subvariedades $M \subset \mathbb{R}^n$ e $N \subset \mathbb{R}^p$, respectivamente. Dizemos que uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é estratificada com respeito a \mathcal{S} e \mathcal{T} quando:

- (i) A aplicação f leva estrato em estrato, não necessariamente biunivocamente.
- (ii) Se S_α é um estrato de \mathcal{S} aplicado por f no estrato T_β de \mathcal{T} então $f|_{S_\alpha} : S_\alpha \rightarrow T_\beta$ é uma submersão.

Exemplo 4.3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = xy$ e considere as estratificações de \mathbb{R}^2 e de \mathbb{R} como sugere a figura a seguir:



Neste caso, a aplicação f é estratificada.

De fato, f satisfaz a condição (i) da Definição 4.2 pois

- Se $(x, y) = (0, 0)$ então $f(0, 0) = 0$;
- Se (x, y) pertence a algum dos eixos em \mathbb{R}^2 então $f(x, y) = 0$;
- Se $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que x e y possuem o mesmo sinal, então $f(x, y) = xy > 0$;
- Se $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que x e y possuem sinais opostos, então $f(x, y) = xy < 0$.

Além disso, f claramente satisfaz a condição (ii) da Definição 4.2 pois é uma aplicação sobrejetora.

Sejam X e Y subvariedades de \mathbb{R}^n e seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação de classe C^∞ . Suponha que as restrições $f|_X : X \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $f|_Y : Y \rightarrow \mathbb{R}^p$ tenham posto constante. Então,

dizemos que X é *Thom-regular sobre Y com relação a f em $x \in X$* , ou satisfaz a condição a_f de Thom para a tripla (X, Y, x) , se dada uma sequência de pontos $y_i \in Y$ convergindo para x tal que a sequência dos planos $\text{Ker}(df|_{T_{y_i}Y})$ converge para algum plano τ , temos $\text{Ker}(df|_{T_xX}) \subset \tau$.

Dizemos que o par (X, Y) satisfaz a condição a_f de Thom se para todo $x \in X$ a tripla (X, Y, x) satisfaz a condição a_f de Thom.

Definição 4.4. Dizemos que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ satisfaz a condição a_f de Thom, ou é Thom-regular, quando f é estratificada e todo par de estratos (X, Y) satisfaz a condição a_f de Thom.

Definição 4.5. Uma estratificação $\mathcal{S} = \{S_\alpha\}$ de uma variedade M é uma estratificação C -regular ou uma estratificação de Bekka se, para cada estrato S_α existe uma vizinhança aberta $U_\alpha \subset M$ de S_α e uma função $\rho_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$, com $\rho_\alpha(x) \geq 0$ para todo $x \in U_\alpha$, tais que

- (i) $\rho_\alpha^{-1}(0) = S_\alpha$;
- (ii) ρ_α é uma aplicação de Thom, considerando a estratificação de U_α dada pela restrição de \mathcal{S} a U_α e a estratificação de \mathbb{R}_+ dada pelos estratos $\{0\}$ e \mathbb{R}_+^* .

Observação 4.6. Considere $\mathcal{S} = \{S_\alpha\}$ e $\mathcal{T} = \{T_\beta\}$ estratificações C -regulares das variedades M e N , respectivamente. A C -regularidade apresenta as seguintes propriedades:

1. A condição de C -regularidade é invariante por difeomorfismo;
2. A C -regularidade de uma estratificação implica na trivialidade topológica ao longo dos estratos (por integração de campos de vetores);
3. $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \{S_\alpha \cap T_\beta\}$ é uma estratificação C -regular para $M \cap N$;
4. $\mathcal{S} \cup \mathcal{T} = \{S_\alpha \cup T_\beta\}$ é uma estratificação C -regular para $M \cup N$;
5. $\mathcal{S} \times \mathcal{T} = \{S_\alpha \times T_\beta\}$ é uma estratificação C -regular para $M \times N$.

Um fato bastante importante é que todo conjunto semialgébrico admite uma estratificação C -regular, onde as funções controle são as funções distância aos estratos (na verdade isso vale para uma categoria mais geral, a categoria dos conjuntos subanalíticos [1]). Além disso, seguindo ainda [1], uma estratificação C -regular admite a estrutura de Thom-Mather, o que nos permite enunciar o Segundo Lema de Isotopia de Thom como a seguir.

Teorema 4.7. (Segundo Lema de Isotopia de Thom [1]) *Sejam M e N variedades, com $\mathcal{S} = \{S_\alpha\}$ e $\mathcal{T} = \{T_\beta\}$ estratificações C -regulares de M , N respectivamente, e seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação própria de Thom. Seja $g : N \rightarrow P$ uma submersão estratificada própria. Então f é localmente topologicamente trivial sobre P . Isto é, para todo ponto $p \in P$ existe uma vizinhança V de p , tal que para todo $q \in V$, $f : (g \circ f)^{-1}(q) \rightarrow f^{-1}(q)$ e $f : (g \circ f)^{-1}(p) \rightarrow f^{-1}(p)$ são C^0 - \mathcal{A} -equivalentes, por homeomorfismos que preservam estratificações.*

4.2 C^0 - \mathcal{A} -equivalência de germes de aplicações \mathcal{K} -equivalentes

Esta seção é baseada no artigo [11] de Nishimura e, como no capítulo anterior, nosso interesse é caracterizar a C^0 - \mathcal{A} -equivalência de germes estáveis dentro de uma mesma \mathcal{K} -órbita. Nosso objetivo neste capítulo é menos pretensioso do que no capítulo anterior pois queremos meramente ilustrar o que ocorre no caso topológico. Acreditamos que detalhar todas as definições, comentários e resultados descritos neste capítulo forneceria material suficiente para outra dissertação. No entanto, nos permitiremos expor tais resultados aqui por dois motivos: eles são análogos aos resultados do Capítulo 3 e, embora os argumentos usados para o caso topológico sejam por vezes distintos do caso C^r ($1 \leq r \leq \infty$), as idéias usadas nas provas são em essência as mesmas que as do Capítulo 3. Assim, as provas dos resultados contidos nesta seção serão omitidas.

Uma diferença crucial no caso topológico pode ser detectada desde o início: uma maneira conveniente de definir a trivialidade topológica, a qual chamaremos neste texto de *Thom-trivialidade*.

Definição 4.8. *Dizemos que uma deformação $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ de um germe de aplicação de classe C^∞ $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ é Thom-trivial se existem estratificações C -regulares \mathcal{S} de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, \mathcal{T} de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k$ e $\{\mathbb{R}^k\}$ de \mathbb{R}^k , tais que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

- (i) *O germe $(F, \pi) : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k, (0, 0))$ é o germe de uma aplicação de Thom com respeito a \mathcal{S} e \mathcal{T} .*
- (ii) *O germe $\pi' : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ é um germe de aplicação estratificada com respeito a \mathcal{T} e $\{\mathbb{R}^k\}$.*

onde $\pi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ e $\pi' : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ são as projeções canônicas.

Se $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ é uma deformação Thom-trivial do germe $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ então podemos aplicar o Segundo Lema de Isotopia de Thom e então existem germes de homeomorfismos que preservam estratificações $h : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, (0, 0))$ e $H : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k, (0, 0))$ tais que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) & \xrightarrow{(F, \pi)} & (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) & \xrightarrow{\pi'} & (\mathbb{R}^k, 0) \\ h \downarrow & & H \downarrow & & id \downarrow \\ (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) & \xrightarrow{(f, \pi)} & (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) & \xrightarrow{\pi'} & (\mathbb{R}^k, 0) \end{array} \quad (*)$$

onde $\pi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ e $\pi' : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ são as projeções canônicas.

A seguir, enunciaremos algumas condições que serão usadas na construção dos principais resultados deste capítulo.

Considere $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ dois germes de aplicações de classe \mathcal{C}^∞ , $s : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ um germe de \mathcal{C}^∞ -difeomorfismo e $M : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (GL(p, \mathbb{R}), M(0))$ um germe de aplicação de classe \mathcal{C}^∞ . Definimos as condições a seguir:

- (a) $f(x) = M(x)g(s(x))$;
- (b) O germe de classe \mathcal{C}^∞ $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ dado por $F(x, \lambda) = f(x) - M(x)\lambda$ é uma deformação Thom-trivial de f ;
- (c) O germe de classe \mathcal{C}^∞ $G : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ dado por $G(x, \lambda) = g(x) - M(s^{-1}(x))^{-1}\lambda$ é uma deformação Thom-trivial de g .

Consideremos também as seguintes condições sobre f e g :

- (i) O germes f e g são \mathcal{C}^0 - \mathcal{A} -equivalentes;
- (ii) Existe um germe de \mathcal{C}^∞ -difeomorfismo $s : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ e um germe de aplicação de classe \mathcal{C}^∞ $M : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (GL(p, \mathbb{R}), M(0))$ de modo que (a) e (b) são satisfeitas.
- (iii) Existe um germe de \mathcal{C}^∞ -difeomorfismo $s : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ e um germe de aplicação de classe \mathcal{C}^∞ $M : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (GL(p, \mathbb{R}), M(0))$ de modo que as condições (a), (b) e (c) são satisfeitas.

Vejamos primeiramente o caso em que f e g têm posto zero.

Teorema 4.9. *Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ germes C^∞ com posto 0. Então a condição (ii) implica na condição (i).*

Aqui novamente podemos notar que a condição de posto 0 é essencial. Basta considerar o mesmo exemplo do capítulo anterior, o Exemplo 3.3. Para o caso em que f e g possuem posto positivo temos o seguinte resultado.

Teorema 4.10. *A condição (iii) implica na condição (i).*

A seguir, veremos como obter, a partir do Teorema 4.10, uma versão topológica do resultado de Mather (o Teorema 2.61).

Uma definição usual de estabilidade topológica é a noção de MT-estabilidade, onde as letras MT designam Mather e Thom, respectivamente. Um germe de classe C^∞ $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ é *MT-estável* se sua extensão multi-jato é transversal à estratificação canônica de Thom-Mather do espaço de jatos. Como consequência, todo germe de deformação C^∞ de f é Thom-trivial (ver [4], [10]).

Do comentário acima temos que o resultado a seguir segue como consequência do Teorema 4.10.

Teorema 4.11. *(Fukuda [3]) Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ germes de aplicações C^∞ MT-estáveis. Se f e g são \mathcal{K} -equivalentes então f e g são C^0 - \mathcal{A} -equivalentes.*

Note que o Teorema 4.11 corresponde a uma versão topológica do Teorema 2.61 de Mather.

As demonstrações dos Teoremas 4.9 e 4.10 são baseadas na estratégia que apresentamos a seguir.

Estratégia.

Em suma, a estratégia é a mesma utilizada no Capítulo 3.

Suponha que o germe de deformação $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ de $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ dado por $F(x, \lambda) = f(x) - M(x)\lambda$ seja Thom-trivial. Então, pelo Segundo Lema de Isotopia de Thom existem germes de homeomorfismos $h : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, (0, 0))$ e $H : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k, (0, 0))$ tais que o diagrama (*) comuta, conforme vimos anteriormente.

Podemos considerar $h(x, \lambda) = (h_1(x, \lambda), \lambda)$ e $H(y, \lambda) = (H_1(y, \lambda), \lambda)$.

Lema 4.12. $f(h_1(x, g(s(x)))) = H_1(0, g(s(x)))$.

Lema 4.13. Se o germe de aplicação $\varphi_H : (\mathbb{R}_\lambda^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}_y^p, 0)$ dado por $\varphi_H(\lambda) = H_1(0, \lambda)$ é um homeomorfismo, então o germe de aplicação

$$\begin{aligned} \sigma : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\lambda^p, (0, 0)) &\rightarrow (\mathbb{R}_y^p \times \mathbb{R}_\lambda^p, (0, 0)) \\ (x, \lambda) &\mapsto (h_1(x, \lambda), H_1(0, \lambda)) \end{aligned}$$

aplica o conjunto $(F^{-1}(0), (0, 0))$ em $(\text{Graf } f(0, 0), (0, 0))$.

Lema 4.14. Se o germe de aplicação $\varphi_H : (\mathbb{R}_\lambda^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}_y^p, 0)$ dado por $\varphi_H(\lambda) = H_1(0, \lambda)$ é um homeomorfismo, então o germe de endomorfismo

$$\begin{aligned} \phi : (\mathbb{R}^n, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^n, 0) \\ x &\mapsto h_1(x, g(s(x))) \end{aligned}$$

também é um homeomorfismo.

As demonstrações dos Lemas 4.12, 4.13 e 4.14 são análogas às demonstrações dos Lemas 3.9, 3.10, 3.11, respectivamente.

O passo seguinte é, a grosso modo, mostrar que o germe de aplicação $\varphi_H : (\mathbb{R}_\lambda^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}_y^p, 0)$ dado por $\varphi_H(\lambda) = H_1(0, \lambda)$ é um homeomorfismo. Isso acarretará na prova dos Teoremas 4.9 e 4.10. Neste ponto os argumentos baseiam-se na construção de apropriadas estratificações C -regulares; na definição de campos de vetores controlados e de outras aplicações convenientes. Também são utilizadas algumas ferramentas topológicas como, por exemplo, o Teorema da Invariância do Domínio. Isto é feito com detalhes por Nishimura em [11].

Referências Bibliográficas

- [1] K. Bekka, *C-régularité et trivialité topologique.*, Singulaty theory and its applications, Notes in Math. 1462, Springer, Berlin,(1988/1989).
- [2] L. J. Bettini, *Deformações Versais e Classificação de Aplicações Diferenciáveis*, Dissertação de mestrado, ICMC - USP, São Carlos, (1977).
- [3] M. Fukuda e T. Fukuda, *Algebras $\mathcal{Q}(f)$ determine the topological types of generic map germs*, Invent. Math. 52 (1979) 231-237.
- [4] C. G. Gibson, K. Wirthmuller, A. du Plessis, E. Looijenga, *Topological stability of smooth mappings*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 552. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.
- [5] C. G. Gibson, *Singular Points of Smooth Mappings*, Research Notes im Math. 25, Pitman, London, 1979.
- [6] M. Golubitsky; V. Guillemin, *Stable Mappings and Their Singularities*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 14, Springer-Verlag, New York, 1973.
- [7] J. Martinet, *Deploiments versels des applications différentiables et classification des applications stables*, Lectures Notes in Mathematics 35, Springer, Berlin (1976).
- [8] J. N. Mather, *Stability of C^∞ mappings, III. Finitely determined mapgerms*, Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 35 (1968) 279-308.
- [9] J. N. Mather, *Stability of C^∞ mappings, IV. Classification of stable maps by \mathbb{R} -algebras*, Pub. Math. de l'I.H.É.S., 37 (1969), 223-248.
- [10] J. N. Mather, *How to stratify mappings and jet spaces*, Lecture Notes in Mathematics 535, Springer, Berlim (1976), 128-176.
- [11] T. Nishimura, *Topological equivalence of \mathcal{K} -equivalent map germs*, J. London Math. Soc. (2) 60 (1999), no. 1, 308-320.
- [12] T. Nishimura, *Criteria for right-left equivalence of smooth map-germs*, Topology 40 (2001), no. 3, 433-462.
- [13] H. A. Pedroso, *Bi-equivalência de Contato*, Dissertação de Mestrado, USP - São Carlos, 1980.
- [14] F. Tari, *Singularidades de Aplicações Diferenciáveis*, Notas didáticas do ICMC - USP, São Carlos, 34 (1999).
- [15] C. T. C. Wall, *Finite Determinacy of smooth map-germs*, Bull. London Math. Soc., 13 (1981), 481-539.