



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Campus de São José do Rio Preto

# Espectro dos Operadores de Schrödinger e Transformações de Intercâmbio de Intervalos

Everton Artuso

Orientador:  
Prof. Dr. Ali Messaoudi

São José do Rio Preto  
Março - 2012

Everton Artuso

# Espectro dos Operadores de Schrödinger e Transformações de Intercâmbio de Intervalos

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador:

**Prof. Dr. Ali Messaoudi**

**São José do Rio Preto**  
**Março - 2012**

Artuso, Everton.

Espectro dos operadores de Schrödinger e transformações de intercâmbio de intervalos / Everton Artuso. - São José do Rio Preto: [s.n.], 2012.

60 f. : il. ; 30cm.

Orientador: Ali Messaoudi

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Sistemas dinâmicos. 3. Análise de intervalos (Matemática). 4. Schrödinger, operadores de. I. Messaoudi, Ali. II. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 517.93

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE  
Campus de São José do Rio Preto - UNESP

Everton Artuso

Espectro dos Operadores de  
Schrödinger e Transformações de Intercâmbio de Intervalos

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Sistemas Dinâmicos junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ali Messaoudi  
Professor Adjunto  
UNESP - São José do Rio Preto  
Orientador

Prof. Dr. Benito Frazão Pires  
Professor Doutor  
Universidade de São Paulo

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Patricia Romano Cirilo  
Pós-doutoranda  
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 22 de março de 2012.

*A Nice, dedico.*

## Agradecimentos

Agradeço a Deus pela vida e pelo caminho que tenho trilhado, pelas oportunidades e pelas dificuldades que todos os dias têm me lapidado.

Agradeço a minha esposa, Nice, que presenteou com seu amor, sua prudência e sua presença nos últimos anos, as quais me libertaram de minha prisão egótica. Agradeço aos meus pais, José e Florentina, pelo incentivo e orações, a minhas irmãs Érica e Eliane pelo carinho.

Agradeço ao professor Ali, por toda ajuda, paciência, amizade e perseverança nesses dois anos. Agradeço a banca examinadora, professores Benito e Patricia, pela disponibilidade e pelo empenho em fazer deste trabalho o menos incompleto possível.

Agradeço aos amigos que fiz aqui, Adimar, Amanda, Ana Claudia, Bruno, Daniela, Danilo, Eduardo, Everton Luiz, Fernando, Gilberto, Guilherme, Gustavo, Jaime, Juliana, Leandro, Leonardo, Oyran, Rafael, Rodiak, Rodrigo Andrade, Rodrigo Euzébio, Ronei, Ruikson, Valdiane, Wanderson e a todos os outros que de alguma maneira contribuíram com sua amizade e companhia.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

A todos aqueles que de alguma maneira contribuíram para este trabalho, mas por algum motivo não foram citados.

...imagino que uma das mais fortes motivações para uma obra artística ou científica consiste na vontade de evasão do cotidiano com seu cruel rigor e monotonia desesperadora, na necessidade de escapar das cadeias dos desejos pessoais eternamente instáveis. Causas que impelem os seres sensíveis a se libertarem da existência pessoal, para procurar o universo da contemplação e da compreensão objetivas. Esta motivação assemelha-se à nostalgia que atrai o morador das cidades para longe de seu ambiente ruidoso e complicado, para as pacíficas paisagens das altas montanhas, onde o olhar vagueia por uma atmosfera calma e pura e se perde em perspectivas repousantes, que parecem ter sido criadas para a eternidade.

---

**Como vejo o mundo**  
Albert Einstein

---

# Resumo

---

Neste trabalho estudaremos propriedades espectrais de uma classe de operadores de Schrödinger com potencial associado a dinâmica de transformações de intercâmbio de intervalos, e mostraremos o resultado de Cobo-Gutierrez-de Oliveira que garante que, para quase todo intercâmbio de intervalo, o espectro pontual do operador de Schrödinger associado é vazio.

**Palavras-chave:** Operador de Schrödinger, intercâmbio de intervalos, espectro pontual vazio, espectro singular contínuo puro.



---

---

# Abstract

---

In this work we study the spectral properties of a class of Schrödinger operators with potentials associated with the dynamics of interval exchange transformations, and we show the proof of Cobo-Gutierrez-de Oliveira of absence pure point spectrum of Schrödinger operators associated, for Lebesgue almost all interval exchanges.

**Key-words:** Schrödinger operator, interval exchange, absence pure point spectrum, pure singular continuous spectrum.

---

---

# Conteúdo

---

<b>Introdução</b>	<b>viii</b>
<b>0 Preliminares</b>	<b>1</b>
0.1 Sistemas Dinâmicos Simbólicos . . . . .	1
0.2 Medidas Espectrais . . . . .	4
0.3 Operadores de Schrödinger Discretos . . . . .	7
<b>1 Transformações de Intercâmbio de Intervalos</b>	<b>9</b>
1.1 Definição . . . . .	9
1.2 Indução de Rauzy . . . . .	14
1.2.1 Condição de Keane . . . . .	17
1.2.2 Minimalidade . . . . .	19
1.2.3 Classes de Rauzy . . . . .	22
1.3 Renormalização de Rauzy . . . . .	26
<b>2 Espectro Associado a Intercâmbios de Intervalos</b>	<b>29</b>
2.1 Espectro de Cantor com Medida de Lebesgue Zero . . . . .	29
2.2 Espectro Singular Contínuo . . . . .	32
<b>A Propriedades do Espectro</b>	<b>47</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>49</b>

---

# Introdução

---

Uma partícula que se move em um espaço unidimensional, sujeita a um potencial independente do tempo tem seu estado quântico descrito pela equação de Schrödinger unidimensional.

Algumas classes de potenciais tem interesse particular, como potenciais periódicos, quase-periódicos e aleatórios. O caso aqui abordado se encaixa na classe de potenciais peneperiódicos (uma das subcategorias de potenciais quase-periódicos), isto é, potenciais aleatórios que apresentam algum tipo de padrão de repetição. Os operadores de Schrödinger discretos com potenciais peneperiódicos assumindo um número finito de valores são modelos quânticos adequados para o estudo dos quase-cristais, estruturas que figuram entre as periódicas (cristais perfeitos) e as aleatórias (materiais amorfos). Por sua vez, os quase-cristais tem sido amplamente estudados na física, já que sua estrutura tem sido usada nas ciências aplicadas para a confecção de super-ligas metálicas que se mostram muito mais resistentes que as ligas atuais.

No estudo dos operadores de Schrödinger, uma atenção especial é dada para o espectro destes operadores, uma vez que, fisicamente, este representa o eixo de energia do operador. Em geral, operadores de Schrödinger com potencial periódico apresentam espectro absolutamente contínuo puro, e no caso de potencial aleatório, o espectro tem somente a componente puramente pontual. Na área de sistemas dinâmicos, existe um interesse particular pelos operadores de Schrödinger cujo espectro apresenta, de alguma forma, um comportamento exótico. No nosso caso, o operador de Schrödinger tem o potencial associado a dinâmica de transformações de intercâmbio de intervalos, e o espectro deste operador é um conjunto de Cantor de medida de Lebesgue zero e singular contínuo puro, para quase todo ponto no intervalo.

Para este tipo de potencial, a combinação de resultados de [4] e [11] resulta que

a parte absolutamente contínua do espectro é vazia. Em 2008, Cobo-Gutierrez-de Oliveira provaram, usando o argumento da Renormalização de Rauzy, o Teorema da densidade da  $\mathcal{R}$ -órbita de Rauzy (Teorema 1.2) e o argumento de Delyon-Petritis (Teorema 2.4) do Lema de Gordon, que a parte puramente pontual do espectro também é vazia, resultando assim o espectro singular contínuo puro, para quase todo ponto no intervalo. É esta prova que iremos apresentar.

O trabalho está organizado da seguinte forma:

Nas preliminares, apresentamos definições e conceitos básicos de sistemas dinâmicos, medidas espectrais e operadores de Schrödinger unidimensionais discretos, nos restringindo as particularidades necessárias para o desenvolvimento deste trabalho.

No capítulo 1 nos concentramos na parte elementar da teoria das transformações de intercâmbio de intervalos dando atenção principal para a função de renormalização de Rauzy, muito útil no último capítulo.

No capítulo 2 estudamos a prova de Cobo-Gutierrez-de Oliveira que garante a ausência do espectro puramente pontual em operadores de Schrödinger com potencial associado a dinâmica de transformações de intercâmbio de intervalos.

O apêndice traz alguns resultados básicos sobre o espectro de um operador em relação a um subshift minimal, além das referências que formalizam a teoria aqui estudada.

# Preliminares

## 0.1 Sistemas Dinâmicos Simbólicos

**Definição 0.1.1.** Um *sistema dinâmico* é um par  $(X, T)$  onde  $X$  é um conjunto não vazio e  $T$  é uma função. Se  $X$  é um espaço topológico e  $T : X \rightarrow X$  é uma função contínua, dizemos que  $(X, T)$  é um *sistema dinâmico topológico*. Se  $X$  for munido de uma  $\sigma$ -álgebra e  $T$  for uma função mensurável, dizemos que  $(X, T)$  é um *sistema dinâmico mensurável*.

Seja  $(X, T)$  um sistema dinâmico. Para todo  $x \in X$ , definimos a *órbita* de  $x$  como

$$\mathcal{O}(x) = \{T^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Se  $T$  for uma bijeção, definimos a *órbita positiva* de  $x$  como  $\mathcal{O}^+(x) = \{T^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$  e a *órbita negativa* de  $x$  como  $\mathcal{O}^-(x) = \{T^{-n}(x) : n \in \mathbb{N}\}$ . Definimos  $\Omega$  como

$$\Omega = \Omega(x) = \overline{\{T^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}}.$$

Dado  $K \subset \Omega$ , dizemos que  $K$  é *invariante* por  $T$  se  $T(K) \subset K$ .

**Definição 0.1.2.** Um sistema dinâmico topológico  $(\Omega, T)$  é dito *minimal* se os únicos subconjuntos de  $\Omega$  que são fechados e  $T$ -invariantes são  $\emptyset$  e  $\Omega$ .

**Proposição 0.1.1.** O sistema dinâmico  $(\Omega, T)$  é minimal se, e só se, para todo ponto  $x \in \Omega$ ,  $\overline{\mathcal{O}(x)} = \overline{\{T^n(x) : n \in \mathbb{N}\}} = \Omega$ , em outras palavras,  $\Omega(x') = \Omega(x)$ , para todo  $x, x' \in \Omega$ .

*Demonstração.* Seja  $x \in \Omega$ , temos  $\emptyset \neq \overline{\mathcal{O}(x)}$  é fechado. De fato,  $T(\overline{\mathcal{O}(x)}) \subset \overline{\mathcal{O}(x)}$ , pois se  $y \in T(\overline{\mathcal{O}(x)})$  então  $y \in \{T \circ T^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ , logo  $y \in \overline{\{T^{n+1}(x) : n \in \mathbb{N}\}}$ , assim  $y \in \overline{\mathcal{O}(x)}$ . Daí,  $\overline{\mathcal{O}(x)}$  é  $T$ -invariante. Como  $(\Omega, T)$  é minimal, os únicos subconjuntos

invariantes são  $\emptyset$  e  $\Omega$ . Portanto  $\Omega = \overline{\mathcal{O}(x)}$ . Reciprocamente, seja  $A \subset \Omega$  fechado tal que  $T(A) \subset A$ ,  $A \neq \emptyset$ . Vamos provar que  $A = \Omega$ . De fato, para todo  $x \in A$ ,  $\mathcal{O}(x) \subset A$ , logo  $\overline{\mathcal{O}(x)} \subset \overline{A}$ , mas  $\overline{A} = A$  e  $\Omega = \overline{\mathcal{O}(x)}$ , portanto  $\Omega = A$ .  $\square$

**Definição 0.1.3.** Seja  $(\Omega, T, \mu)$  um sistema dinâmico mensurável, isto é,  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  mensurável e  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^+$  uma medida, onde  $\mathcal{B}$  é a  $\sigma$ -álgebra em  $\Omega$ . Dizemos que  $\mu$  é invariante por  $T$  se  $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ , para todo  $A \in \mathcal{B}$ .

**Definição 0.1.4.** Seja  $(\Omega, T, \mathcal{B}, \mu)$  um sistema dinâmico mensurável. Se  $\mu(\Omega) = 1$  dizemos que  $\mu$  é uma *medida de probabilidade*. Se  $\mu(A) = 0$  ou  $\mu(A^c) = 0$ , para todo  $A \in \mathcal{B}$  tal que  $T^{-1}(A) = A$ , dizemos que  $\mu$  é *ergódica* para  $T$  ou que  $T$  é *ergódica* para uma medida de probabilidade invariante  $\mu$ . Caso exista exatamente uma única medida boreleana de probabilidade  $T$ -invariante  $\mu$ , dizemos que  $T$  é *unicamente ergódica*.

**Teorema 0.1** (Recorrência de Poincaré). *Seja  $(\Omega, T, \mathcal{B}, \mu)$  um sistema dinâmico mensurável onde  $\mu(\Omega) < \infty$  e  $\mu$  uma medida invariante por  $T$ . Seja  $E \subset \Omega$  mensurável tal que  $\mu(E) > 0$ , então quase todo ponto de  $E$  (em relação a  $\mu$ ) retorna à  $E$ , isto é, para  $\mu$ -quase todo ponto  $x \in E$ , existe  $n_x \in \mathbb{N}^*$  tal que  $T^{n_x}(x) \in E$ .*

*Demonstração.* Seja  $E_0 = \{x \in E : T^n(x) \in E, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}^*\}$ .

Seja  $\Xi = E \setminus E_0 = \{x \in E : T^n(x) \notin E, \forall n \in \mathbb{N}^*\}$ . Vamos provar  $\mu(\Xi) = 0$ .

De fato, se  $m, n \in \mathbb{N}^*$  com  $n < m$ , então  $T^{-n}(\Xi) \cap T^{-m}(\Xi) = \emptyset$ , pois caso contrário, isto é, se  $T^{-n}(\Xi) \cap T^{-m}(\Xi) \neq \emptyset$ , existe  $y \in E$  tal que  $T^n(y) \in \Xi$  e  $T^m(y) \in \Xi$ , e temos

$$T^m(y) = T^{m-n}(T^n(y)) \in \Xi \subset E$$

e  $T^m(y)$  retorna à  $E$ , logo  $y \in E_0$ , uma contradição. Logo  $T^{-n}(\Xi) \cap T^{-m}(\Xi) = \emptyset$ . Por outro lado,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} T^{-n}(\Xi)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(T^{-n}(\Xi)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(\Xi) < +\infty.$$

Assim,  $\mu(\Xi) = 0$  pois caso contrário,  $\mu(\Xi) = a > 0$  implica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(\Xi) = +\infty,$$

uma contradição, já que  $\mu(\Omega) < +\infty$  e  $\Xi \subset \Omega$ . Portanto  $E_0$  tem medida total, isto é,  $\mu(E) = \mu(E_0)$ .  $\square$

**Corolário 0.1.1.** Seja  $(\Omega, T, \mathcal{B}, \mu)$  um sistema dinâmico mensurável onde  $\mu(\Omega) < \infty$  e  $\mu$  uma medida invariante por  $T$ . Seja  $E \subset \Omega$  mensurável tal que  $\mu(E) > 0$ , então para  $\mu$ -quase todo ponto  $x \in E$ , existe uma infinidade de  $n \in \mathbb{N}^*$  tais que  $T^n(x) \in E$ .

*Demonstração.* Para cada  $k \in \mathbb{N}^*$ , sejam

$$E_k = \{x \in E : \text{existe exatamente } k \text{ valores de } n \in \mathbb{N}^* \text{ tais que } T^n(x) \in E\} \text{ e}$$

$$A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k.$$

Então  $A$  é o conjunto dos pontos  $x \in E$  que retornam um número finito de vezes à  $E$ . Vamos provar  $\mu(A) = 0$ . De fato, suponha que existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tal que  $\mu(E_k) > 0$ . Aplicando o teorema de recorrência de Poincaré, para  $\mu$ -quase todo ponto  $x \in E_k$ , existe  $n_1 \in \mathbb{N}^*$  tal que  $T^{n_1}(x) \in E_k$ . Seja  $y = T^{n_1}(x)$ . Logo, existem  $m_1 < m_2 < \dots < m_k$  tais que  $T^{n_1+m_1}(x), T^{n_1+m_2}(x), \dots, T^{n_1+m_k}(x) \in E$ . Logo  $x$  retorna  $(k+1)$  vezes à  $E$ , contradição. Logo  $\mu(E_k) = 0$ , para todo  $E_k$  e assim  $\mu(A) = 0$ . Portanto  $x$  retorna uma infinidade de vezes para  $E$ .  $\square$

Um *alfabeto*  $\mathcal{A}$  é um conjunto finito de símbolos (as vezes chamados de *letras*). O espaço das sequências infinitas de símbolos sobre  $\mathcal{A}$  é o conjunto

$$\mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n \geq 0} : x_n \in \mathcal{A}, \forall n \geq 0\}$$

e o espaço das sequências bi-infinitas de símbolos sobre  $\mathcal{A}$  é o conjunto

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} : x_n \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{Z}\}.$$

Uma *palavra* em  $\mathcal{A}$  é uma concatenação  $w = w_0 \dots w_{k-1}$  de  $k$  símbolos de  $\mathcal{A}$ .

Um espaço simbólico é um subconjunto fechado  $\Omega \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  com relação a topologia produto das topologias discretas sobre  $\mathcal{A}$ . Um *sistema dinâmico simbólico* é um sistema dinâmico topológico  $(\Omega, T)$  no qual  $\Omega$  é um espaço simbólico.

**Definição 0.1.5.** Uma função *shift*  $T : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  é definida por

$$T(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (x_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}, \forall (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}.$$

Um *subshift* é um subconjunto fechado  $\Omega \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  tal que  $T(\Omega) = \Omega$ .

**Observação 0.1.1.** Se  $\Omega \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  é um subshift, então  $(\Omega, T|_{\Omega})$  é um sistema dinâmico simbólico. Estes sistemas dinâmicos simbólicos também são chamados subshifts.

## 0.2 Medidas Espectrais

Considere  $X$  um conjunto não-vazio.

**Definição 0.2.1.** Uma família  $\mathbb{X}$  de subconjuntos de  $X$  é uma  $\sigma$ -álgebra se  $\emptyset, X \in \mathbb{X}$ , para cada  $E \in \mathbb{X}$  tem-se  $E^c \in \mathbb{X}$  e dada uma sequência  $(E_n)_{n=1}^{\infty}$  de subconjuntos de  $\mathbb{X}$  tem-se  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathbb{X}$ . Uma *medida* é uma função  $\mu : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$  que satisfaz  $\mu(\emptyset) = 0$  e dada  $(E_n)_{n=1}^{\infty}$  sequência disjunta de subconjuntos de  $\mathbb{X}$ , tem-se

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Uma medida  $\mu$  é *finita* se  $\mu(X) < \infty$ , e  $\sigma$ -*finita* se  $\mu(E_n) < \infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Uma medida com propriedades de regularidade é chamada uma *medida de Borel*.

Um *átomo* de uma medida  $\mu$  é um elemento  $A$  com  $\mu(A) > 0$  tal que  $F \subset A$ , então  $\mu(F) = 0$  ou  $\mu(A \setminus F) = 0$ . Podemos dizer que uma medida finita  $\mu$  sobre a  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}$  é puramente atômica, ou puramente pontual, se existe um conjunto enumerável  $C$  tal que  $\mu(X \setminus C) = 0$ .

**Definição 0.2.2.** Uma medida de Borel  $\mu$  na reta é chamada *contínua* se ela não contém átomos.  $\mu$  é chamada uma medida *puramente pontual* se  $\mu(X) = \sum_{x \in X} \mu(\{x\})$  para qualquer boreleano  $X$ .

**Teorema 0.2.** [12] Qualquer medida de Borel  $\mu$  pode ser decomposta de maneira única como a soma  $\mu = \mu_{pp} + \mu_c$  onde  $\mu_c$  é contínua e  $\mu_{pp}$  é puramente pontual.

*Demonstração.* Seja  $\mu$  uma medida de Borel na reta. Seja  $P = \{x : \mu(\{x\}) \neq 0\}$ , isto é,  $P$  é o conjunto dos átomos de  $\mu$ , ou o conjunto puramente pontual de  $\mu$ . Como  $\mu(C) < \infty$ , com  $C$  compacto oriundo da regularidade de  $\mu$ , pois  $\mu$  é medida de Borel, então  $P$  é enumerável. Defina

$$\mu_{pp}(X) = \sum_{x \in P \cap X} \mu(\{x\}) = \mu(P \cap X).$$

Então  $\mu_{pp}$  é uma medida e  $\mu_c = \mu - \mu_{pp}$  é positiva. Temos que  $\mu_c$  tem a propriedade  $\mu_c(\{p\}) = 0$ , para todo  $p$ , isto é,  $\mu_c$  não contém átomos e  $\mu_{pp}$  contém apenas átomos no sentido que

$$\mu_{pp}(X) = \sum_{x \in X} \mu_{pp}(\{x\}).$$

□



**Teorema 0.3** (Decomposição de Lebesgue). *Seja  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  espaço de medida. Então existem únicas medidas  $\mu_{ac}$  e  $\mu_s$  em  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  tais que:*

- (i)  $\mu_{ac}$  é absolutamente contínua com relação a medida de Lebesgue,
- (ii)  $\mu_s$  é singular com relação a medida de Lebesgue,
- (iii)  $\mu = \mu_{ac} + \mu_s$ .

A decomposição  $\mu = \mu_{ac} + \mu_s$  se chama decomposição de Lebesgue de  $\mu$ , onde  $\mu_{ac}$  e  $\mu_s$  são as partes absolutamente contínua e singular de  $\mu$ , respectivamente.

Podemos decompor a parte singular  $\mu_s$  em partes *singular contínua*  $\mu_{sc}$  e *puramente pontual*  $\mu_{pp}$ , onde  $\mu_{pp}$  é uma medida puramente pontual no sentido de que  $\mu_{pp}$  está concentrada nos pontos (em número finito ou enumerável) que tem medida positiva, isto é, se  $E = \{x \in X : \mu(x) > 0\}$  então  $\mu_{pp}(E^c) = 0$  ou  $\mu_{pp}(\{x\}) = 0$  se  $x \in E^c$ , e  $\mu_{sc}$  é uma medida singular contínua no sentido de que os pontos singulares têm medida zero. Como  $\mu_c = \mu - \mu_{pp}$ , temos que  $\mu_c = \mu_{ac} + \mu_{sc}$ , ou alternativamente, tomando  $\mu = \mu_{ac} + \mu_s$  temos a decomposição completa:

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_{sc} + \mu_{pp}. \quad (1)$$

A Proposição abaixo é um caso particular do Teorema de Riesz.

**Proposição 0.2.1** (Riesz, Markov). *Seja  $K \subset \mathbb{R}$  um compacto e  $G$  uma forma linear positiva em  $C(K)$ , isto é,  $G(f) \geq 0$  se  $f \geq 0$ . Então existe uma única medida positiva  $m$  tal que  $G$  seja integrável em relação a  $m$ :*

$$\forall f \in C(K), G(f) = \int f dm.$$

**Definição 0.2.3.** Definimos o espectro de um operador  $T$  como o conjunto  $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I)^{-1} \text{ não existe}\} \subset \mathbb{C}$ .

Seja  $\mathbb{H}$  espaço de Hilbert complexo e  $T$  um operador auto-adjunto em  $\mathbb{H}$ . Então  $f \mapsto \langle f(T)\psi, \psi \rangle$  é uma forma linear positiva em  $C(\sigma(T))$ .

De acordo a Proposição 0.2.1, existe uma única medida  $\mu_\psi = d\mu_\psi$  tal que

$$\forall f \in C(\sigma(T)), \langle \psi, f(T)\psi \rangle = \int f(\lambda) d\mu_\psi(\lambda). \quad (2)$$

**Definição 0.2.4.** A medida  $\mu_\psi = d\mu_\psi$  é a *medida espectral* associada a  $\psi$ .

**Observação 0.2.1.** A massa total de  $\mu_\psi$  é  $\|\psi\|^2$  e  $\text{supp } \mu_\psi = \sigma(T)$ , pois tomando a função constante  $f \equiv 1$ , temos

$$\mu_\psi(\sigma(T)) = \int_{\sigma(T)} d\mu_\psi = \langle \psi, \psi \rangle = \|\psi\|^2,$$

e para todo  $\psi \neq 0$  temos  $\mu_\psi(\sigma(T)) > 0$ , logo  $\sigma(T) \subset \text{supp } \mu_\psi$ . Dado  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$  tal que  $\emptyset \neq B = A \cap \sigma(T)^c$ , temos  $B \not\subset \sigma(T)$  com  $B \cap \sigma(T) = \emptyset$ . Assim  $\mu_\psi(B) = \int_B d\mu_\psi = 0$ , pois  $\mu_\psi$  é definida sobre  $\sigma(T)$ , logo  $B \not\subset \text{supp } \mu_\psi$ . Portanto  $\text{supp } \mu_\psi \subset \sigma(T)$ .

O segundo membro da igualdade (2) tem sentido apenas se  $f$  for boreleana e limitada, pois assim  $f$  será  $\mu_\psi$ -integrável. Se  $f$  é boreleana e limitada no espectro de  $T$ , então para todo  $\psi \in \mathbb{H}$  o operador linear contínuo  $f(T)$  em (2) é único.

Como a decomposição  $\mu = \mu_{pp} + \mu_{ac} + \mu_{sc}$  é única e as três partes são mutuamente singulares, temos que

$$L^2(\mathbb{R}, d\mu) = L^2(\mathbb{R}, \mu_{pp}) \oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu_{ac}) \oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu_{sc}).$$

Logo  $\psi \in L^2(\mathbb{R}, d\mu)$  tem medida espectral absolutamente contínua se, e só se,  $\psi \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_{ac})$ . O mesmo vale para  $\psi \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_{sc})$  e  $\psi \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_{pp})$ .

**Definição 0.2.5.** Seja  $T$  um operador limitado auto-adjunto sobre  $\mathbb{H}$ . Sejam

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_{pp} &= \{\psi : \mu_\psi \text{ é puramente pontual}\}, \\ \mathbb{H}_{ac} &= \{\psi : \mu_\psi \text{ é absolutamente contínua}\}, \\ \mathbb{H}_{sc} &= \{\psi : \mu_\psi \text{ é singular contínua}\}. \end{aligned}$$

**Teorema 0.4.** [12] Temos  $\mathbb{H} = \mathbb{H}_{pp} \oplus \mathbb{H}_{ac} \oplus \mathbb{H}_{sc}$ .

Cada um desses subespaços é invariante por  $T$ .

- (i)  $T|_{\mathbb{H}_{pp}}$  tem um conjunto completo de autovetores,
- (ii)  $T|_{\mathbb{H}_{ac}}$  tem somente medidas espectrais absolutamente contínuas e
- (ii)  $T|_{\mathbb{H}_{sc}}$  tem somente medidas espectrais singulares contínuas.

*Demonstração.* A prova decorre do Lema 2 [[12], pág 226] e da Definição 0.2.5. □

**Definição 0.2.6.** [4] O conjuntos

$$\begin{aligned} \sigma_{pp}(T) &= \{x \in \sigma(T) : \mu_\psi(\{x\}) \neq 0\} \\ \sigma_c(T) &= \{x \in \sigma(T) : \mu_\psi(\{x\}) = 0\} \\ \sigma_{ac}(T) &= \sigma(T|_{\mathbb{H}_{ac}}) \\ \sigma_{sc}(T) &= \sigma(T|_{\mathbb{H}_{sc}}) \end{aligned}$$

são chamados, respectivamente, de *espectro puramente pontual*, *espectro contínuo*, *espectro absolutamente contínuo* e *espectro singular contínuo*.

### 0.3 Operadores de Schrödinger Discretos

Considere  $\mathcal{A}$  um alfabeto finito,  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  o espaço das sequências bi-infinitas sobre  $\mathcal{A}$  e  $H$  o operador de Schrödinger discreto definido sobre  $\psi = (\psi_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  por

$$(H_\omega \psi)_j = \psi_{j+1} + \psi_{j-1} + \omega_j \psi_j, \quad j \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

onde o potencial  $\omega = (\omega_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  é uma sequência real e limitada.

O operador  $H_\omega$  restrito à  $\ell^2(\mathbb{Z})$  é auto-adjunto, onde

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \left\{ \psi \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\psi_k|^2 < \infty \right\}.$$

O operador de Schrödinger discreto em  $\ell^2(\mathbb{Z})$  é representado pela matriz de Jacobi tridiagonal infinita

$$\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ \ddots & \omega_{-1} & 1 & 0 & & \\ \ddots & 1 & \omega_0 & 1 & \ddots & \\ & 0 & 1 & \omega_1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}.$$

Se  $\psi = (\psi_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$  temos  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\psi_k|^2 < \infty$  e a norma de  $\psi$  é dada por

$$\|\psi\| = \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\psi_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

O espectro de  $H_\omega$  em  $\ell^2(\mathbb{Z})$  é dado por  $\sigma(H_\omega) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (H_\omega - \lambda I)^{-1} \text{ não existe}\}$ , e como  $H_\omega$  é simétrico, temos  $\sigma(H_\omega) \subset \mathbb{R}$ . Seja  $E \in \sigma(H_\omega)$ , então existe  $\psi \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  tal que  $H_\omega \psi = E\psi$ , o que resulta na recorrência de três termos

$$\psi_{j+1} + \psi_{j-1} + \omega_j \psi_j = E\psi_j, \quad (4)$$

para cada  $j \in \mathbb{Z}$ , onde  $\psi$  pode ou não pertencer a  $\ell^2(\mathbb{Z})$ .

Mais precisamente, esta equação significa, para cada  $\psi$ ,

$$u_n = g_n u_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \text{onde} \quad u_n = \begin{pmatrix} \psi_{n+1} \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

com

$$g_n = \begin{pmatrix} E - \omega_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}),$$

onde  $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  é o potencial. Iterando, para  $n \geq 1$ , temos

$$\begin{aligned} u_1 &= g_1 u_0 \\ u_2 &= g_2 u_1 = g_2 g_1 u_0 \\ &\vdots \\ u_n &= g_n u_{n-1} = g_n \cdots g_1 u_0 = \prod_{k=1}^n g_k u_0 \end{aligned}$$

e para  $n \leq -1$  temos

$$\begin{aligned} u_{-1} &= g_0^{-1} u_0 \\ u_{-2} &= g_{-1}^{-1} u_{-1} = g_{-1}^{-1} g_0^{-1} u_0 \\ &\vdots \\ u_n &= g_{n+1}^{-1} u_{n+1} = g_{n+1}^{-1} \cdots g_0^{-1} u_0 = \prod_{k=n+1}^0 g_k^{-1} u_0. \end{aligned}$$

Defina

$$S_n(E, \omega) := S_n = \begin{cases} \mathbb{I} & \text{se } n = 0, \\ \prod_{k=1}^n g_k & \text{se } n \geq 1, \\ \prod_{k=n+1}^0 g_k^{-1} & \text{se } n \leq -1. \end{cases}$$

Portanto, dada uma condição inicial  $u_0$ , podemos determinar uma solução de (4) através de  $u_n = S_n u_0, \forall n \in \mathbb{Z}$ .

**Definição 0.3.1.** As matrizes  $S_n$  e  $g_n$  definidas acima são chamadas *matrizes de transferência*.

# Transformações de Intercâmbio de Intervalos

## 1.1 Definição

A maior parte deste capítulo é baseada em [14].

Sejam  $[a, b) \subset \mathbb{R}$  um intervalo e  $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, n\}$  um alfabeto finito. Seja  $\mathbf{a} = \{a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b\}$  a partição do intervalo  $[a, b)$ , e denote por  $I_i := [a_{i-1}, a_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , cada subintervalo gerado pela partição  $\mathbf{a}$  em  $[a, b)$ . Também denotamos  $[a, b)$  com esta partição por  $I_{[\mathbf{a}]} = [[a|, |b|)$ .

**Definição 1.1.1.** Uma *transformação de intercâmbio de intervalos* é uma função bijetiva  $\mathbb{E} : [a, b) \rightarrow [a, b)$  que translada cada subintervalo  $I_i$  de  $[a, b)$ .

Seja  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  uma permutação das letras do alfabeto  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Uma transformação de intercâmbio de intervalos  $\mathbb{E} : [a, b) \rightarrow [a, b)$  é associada a um par  $(\pi, \mathbf{a})$  pela partição do intervalo  $[a, b)$  dada por  $\mathbf{a}$ , e  $\pi$  translada cada subintervalo da  $i$ -ésima posição,  $I_i$ , para a  $\pi(i)$ -ésima posição. Podemos representar  $\pi$  como um par de bijeções  $\pi = (\pi_0, \pi_1)$  com  $\pi_\epsilon : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  que descreve a ordem dos subintervalos  $I_\alpha$  antes e depois de um iterado da função  $\mathbb{E}$ , e que será representado por

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 & \alpha_2^0 & \dots & \alpha_n^0 \\ \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \end{pmatrix}$$

onde  $\alpha_j^\epsilon = \pi_\epsilon^{-1}(j)$ , para  $\epsilon \in \{0, 1\}$  e  $j \in \mathcal{A}$ . De fato,  $\pi$  está relacionado com  $(\pi_0, \pi_1)$  pela igualdade  $\pi = \pi_1 \circ \pi_0^{-1}$ . Por comodidade, algumas vezes tomaremos  $\pi_0 = Id : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ .

**Exemplo 1.1.1.** Para  $n = 4$ , seja  $\pi$  dada por  $\pi = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & B & C & A \end{pmatrix}$ . Uma das possíveis

representações gráficas é dada pela figura 1.1.

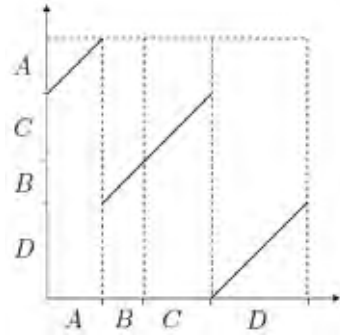


Figura 1.1:

Serão considerados principalmente intervalos do tipo  $[0, b)$ ,  $b > 0$ , e um intervalo  $[0, b)$  é dito *normalizado* quando  $b = 1$ . Tomando  $\mathbb{E} : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ , defina

$$\Delta^{n-1} := \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n : \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1\},$$

então  $\lambda = (\lambda_j)_{j \in \mathcal{A}} \in \Delta^{n-1}$  é um vetor e  $\lambda_j$  representa o comprimento do subintervalo  $I_j$ ,  $j \in \mathcal{A}$ , e seja  $\Lambda_n$  o conjunto de todas as partições de  $[0, 1)$ . Considere em  $\Delta^{n-1}$  a medida de Lebesgue  $(n - 1)$ -dimensional. A relação  $\lambda_j = a_j - a_{j-1}$ ,  $1 \leq j \leq n$ , determina a 1 : 1 correspondência entre as partições  $\mathbf{a} \in \Lambda_n$  e os vetores  $\lambda \in \Delta^{n-1}$ .

Sendo assim, usaremos o par  $(\pi, \lambda)$  para representar uma transformação de intercâmbio de intervalos.

**Definição 1.1.2.** Chamaremos de *monodromia invariante* do par  $\pi = (\pi_0, \pi_1)$  o ponto  $p = (\pi_1 \circ \pi_0^{-1}(1), \pi_1 \circ \pi_0^{-1}(2), \dots, \pi_1 \circ \pi_0^{-1}(n))$ .

Podemos tomar uma bijeção  $\varphi : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$  e definirmos  $\pi'_\epsilon = \pi_\epsilon \circ \varphi$ ,  $\epsilon \in \{0, 1\}$ , e teremos que o par  $\pi' = (\pi'_0, \pi'_1)$  tem a mesma monodromia invariante de  $\pi$ .

**Exemplo 1.1.2.** Outra representação gráfica de  $\pi = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & B & C & A \end{pmatrix}$  é dada pela figura 1.2. Nesse caso, a monodromia invariante de  $\pi$  é igual a  $p = (4, 2, 3, 1)$ .

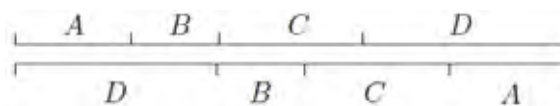


Figura 1.2:

**Definição 1.1.3.** Seja  $\pi$  uma permutação qualquer. Dizemos que  $\pi$  é *reduzível* se existe  $k \in \{1, \dots, n - 1\}$  tal que  $\pi(\{1, \dots, k\}) = \{1, \dots, k\}$ . Caso contrário, dizemos que  $\pi$  é *irreduzível*.

**Exemplo 1.1.3.** Para  $n = 3$ , a permutação  $\pi$  dada por  $\pi = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}$  é redutível, pois para  $k = 2$ , temos que  $\pi(\{1, 2\}) = \{1, 2\}$ .

Já  $\pi$  dada por  $\pi = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$  é irreduzível.

**Exemplo 1.1.4.** Para  $n = 2$  existe apenas um par irreduzível:  $\pi = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ . A transformação de intercâmbio de intervalos associada é dada por:

$$\mathbb{E}(x) = \begin{cases} x + \lambda_B & \text{se } x \in I_A \\ x - \lambda_A & \text{se } x \in I_B \end{cases}$$

Identificando  $I$  com o círculo  $\mathbb{R}/(\lambda_A + \lambda_B)\mathbb{Z}$ , temos que  $\mathbb{E}(x) = x + \lambda_B \pmod{(\lambda_A + \lambda_B)\mathbb{Z}}$ . Ou seja, para  $n = 2$  a transformação é equivalente a fazermos uma rotação no círculo, de ângulo  $\frac{\lambda_B}{(\lambda_A + \lambda_B)} \text{ rad}$ .

**Definição 1.1.4.** Dada  $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ , definimos  $\mathcal{D}_\pi : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^A$  por  $\mathcal{D}_\pi(\lambda) = \mathfrak{d}$  com

$$\mathfrak{d}_\alpha = \sum_{\pi_1(\beta) < \pi_1(\alpha)} \lambda_\beta - \sum_{\pi_0(\beta) < \pi_0(\alpha)} \lambda_\beta.$$

Assim a transformação  $\mathbb{E}$  correspondente é da forma  $\mathbb{E}(x) = x + \mathfrak{d}_\alpha$ ,  $x \in I_\alpha$  com  $\alpha \in \mathcal{A}$ . Chamaremos o vetor  $\mathfrak{d}$  de *vetor translação* de  $\mathbb{E}$ .

**Exemplo 1.1.5.** Para  $\pi = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix}$  temos:

$$(\mathfrak{d}_A, \mathfrak{d}_B, \mathfrak{d}_C, \mathfrak{d}_D) = (\lambda_D + \lambda_C + \lambda_B, \lambda_D + \lambda_C - \lambda_A, \lambda_D - \lambda_B - \lambda_A, -\lambda_C - \lambda_B - \lambda_A),$$

e nesse caso,  $\mathcal{D}_\pi$  é uma bijeção de  $\mathbb{R}^A$  em  $\mathbb{R}^A$ .

**Lema 1.1.1.** [14] Temos  $\lambda \cdot \mathfrak{d} = 0$ .

*Demonstração.* Por definição temos  $\lambda \cdot \mathfrak{d} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha \mathfrak{d}_\alpha$ , mas

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha \mathfrak{d}_\alpha &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha \left( \sum_{\pi_1(\beta) < \pi_1(\alpha)} \lambda_\beta - \sum_{\pi_0(\beta) < \pi_0(\alpha)} \lambda_\beta \right) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \sum_{\pi_1(\beta) < \pi_1(\alpha)} \lambda_\alpha \lambda_\beta - \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \sum_{\pi_0(\beta) < \pi_0(\alpha)} \lambda_\alpha \lambda_\beta. \end{aligned}$$

Sejam  $\epsilon \in \{0, 1\}$  e  $\pi_\epsilon : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  bijeções. Considere os seguintes conjuntos:  
 $A_1^\epsilon = \{(\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} : \pi_\epsilon(\alpha) > \pi_\epsilon(\beta)\}$  e  $A_2^\epsilon = \{(\gamma, \theta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} : \pi_\epsilon(\gamma) < \pi_\epsilon(\theta)\}$ .  
 Assim,  $A_1^\epsilon \cap A_2^\epsilon = \emptyset$ ,  $A_1^\epsilon \cup A_2^\epsilon = \mathcal{A} \times \mathcal{A} \setminus \{(\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$  e

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \sum_{\pi_\epsilon(\beta) < \pi_\epsilon(\alpha)} \lambda_\alpha \lambda_\beta = \sum_{(\alpha, \beta) \in A_1^\epsilon} \lambda_\alpha \lambda_\beta.$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \neq \beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta &= \sum_{(\alpha, \beta) \in A_1^\epsilon \cup A_2^\epsilon} \lambda_\alpha \lambda_\beta \\ &= \sum_{(\alpha, \beta) \in A_1^\epsilon} \lambda_\alpha \lambda_\beta + \sum_{(\gamma, \theta) \in A_2^\epsilon} \lambda_\gamma \lambda_\theta \\ &= \sum_{(\alpha, \beta) \in A_1^\epsilon} \lambda_\alpha \lambda_\beta + \sum_{(\theta, \gamma) \in A_1^\epsilon} \lambda_\theta \lambda_\gamma \\ &= 2 \sum_{(\alpha, \beta) \in A_1^\epsilon} \lambda_\alpha \lambda_\beta. \end{aligned}$$

Portanto, segue

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \mathfrak{d} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta - \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Denote por  $P_n$  o conjunto de todas as permutações das letras de  $\mathcal{A}$  e por  $G_n$  o conjunto das permutações irredutíveis de  $P_n$ . Identifique o produto  $P_n \times \Delta^{n-1}$  como o conjunto de todos os intercâmbios de intervalos de  $n$  subintervalos, onde cada elemento de  $P_n \times \Delta^{n-1}$  é dado pelo par  $(\pi, \lambda)$ , com  $\pi \in P_n$  e  $\lambda \in \Delta^{n-1}$ . Para uma permutação irredutível fixada  $\pi \in G_n$ , denote  $\mathbb{E}(\pi)$  o conjunto de todas as transformações de intercâmbio de intervalos  $\mathbb{E} : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$  com permutação  $\pi$ . Munimos  $\Delta^{n-1}$  com a métrica induzida pela norma de  $\mathbb{R}^{n-1}$

$$|\lambda - \gamma| = \max\{|\lambda_i - \gamma_i| : i = 0, \dots, n-1\},$$

e temos que a aplicação  $\lambda \mapsto \mathbb{E}_\lambda$  está bem definida, pois dados  $\lambda_1 = \lambda_2 \in \Delta^{n-1}$  temos que  $(\pi, \lambda_1) = (\pi, \lambda_2)$ . A aplicação  $\lambda \mapsto \mathbb{E}_\lambda$  é uma bijeção, logo a bijeção  $\Delta^{n-1} \rightarrow \mathbb{E}(\pi)$  transfere para  $\mathbb{E}(\pi)$  a métrica de  $\Delta^{n-1}$ . Portanto  $\Delta^{n-1}$  e  $\mathbb{E}(\pi)$  são espaços métricos, e podem ser identificados pelo homeomorfismo

$$\Delta^{n-1} \ni \lambda \mapsto \mathbb{E}_\lambda := (\pi, \lambda) \in \mathbb{E}(\pi).$$



Seja  $J := [a, b)$  um subintervalo próprio de  $[0, 1)$ . Vamos denotar por  $\mathbb{E}_J$  a aplicação de primeiro retorno de Poincaré de  $\mathbb{E}$  para o intervalo  $J$ , isto é,  $x \in J$ ,  $\mathbb{E}_J(x)$  é dado pelo primeiro ponto na órbita positiva de  $x$  (por  $\mathbb{E}$ ) que retorna para o intervalo  $J$ .

**Proposição 1.1.1.** [14] *Seja  $\mathbb{E} : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$  uma transformação de intercâmbio de intervalos com uma partição de intervalo  $\mathbf{a} = \{0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = 1\}$ . Seja  $J = [a, b) \subsetneq [0, 1)$ , então:*

- (i) *a transformação  $\mathbb{E}_J$  está bem definida sobre  $J$ ,*
- (ii)  *$\mathbb{E}_J$  também é uma transformação de intercâmbio de intervalos.*

*Demonstração.* Para cada  $y \in \mathbf{a} \cup \{a, b\}$  denotemos, caso exista, por  $j_y$  o menor inteiro não negativo tal que  $\mathbb{E}^{-j_y}(y) \in J$ . Consideremos todos os pontos  $\mathbb{E}^{-j_y}(y) \in J$ , ordenados de modo crescente, então temos  $a < y_1 < \dots < y_{p-1} < b$ . Assim o intervalo  $J \subset [0, 1)$  fica particionado em  $p$ -subintervalos semi-abertos

$$I_1 = [a, y_1), I_2 = [y_1, y_2), \dots, I_l = [y_{p-1}, b),$$

com  $p \leq n + 2$ , pois  $\sharp(\mathbf{a} \cup \{a, b\}) \leq n + 3$ . Caso  $j_y$  não exista, para algum  $y \in \mathbf{a} \cup \{a, b\}$ , teremos uma descontinuidade a menos na partição de  $J$ .

**Fato 1.** Para cada  $k \in \{1, \dots, p\}$  existe um inteiro  $N_k \geq 0$  tal que  $\mathbb{E}^{N_k+1}(I_k) \cap J \neq \emptyset$ .

De fato, como  $\mathbb{E}$  preserva a medida de Lebesgue  $\ell$ , se  $\mathbb{E}^r(I_k) \cap \mathbb{E}^s(I_k) = \emptyset$ ,  $\forall r \neq s$ , teríamos:

$$1 = \ell([0, 1)) \geq \ell\left(\bigcup_{r=0}^{\infty} \mathbb{E}^r(I_k)\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \ell(I_k) = \infty,$$

onde a última igualdade ocorre pois  $\ell(I_k) > 0$ . Então temos uma contradição. Logo existem  $r > s$  tais que  $\mathbb{E}^r(I_k) \cap \mathbb{E}^s(I_k) \neq \emptyset$ . Daí temos que  $\mathbb{E}^{r-s}(I_k) \cap I_k \neq \emptyset$ . Em particular,  $\mathbb{E}^{r-s}(I_k) \cap J \neq \emptyset$ , o que prova a Fato 1.

Seja  $r_k$  o menor inteiro tal que  $\mathbb{E}^{r_k+1}(I_k) \cap J \neq \emptyset$ , ou seja,

$$\mathbb{E}^j(I_k) \cap J = \emptyset, \quad j = 1, 2, \dots, r_k \quad \text{e} \quad \mathbb{E}^{r_k+1}(I_k) \cap J \neq \emptyset. \quad (1.1)$$

**Fato 2.**  $\mathbb{E}(I_k), \dots, \mathbb{E}^{r_k+1}(I_k)$  são intervalos, dois a dois disjuntos e  $\mathbb{E}^{r_k+1}(I_k) \subset J$ .

Com efeito, caso algum deles, digamos  $\mathbb{E}^{t+1}(I_k)$ , não fosse um intervalo, considerando  $t \in \{0, 1, \dots, r_k\}$  mínimo tal que  $\mathbb{E}^{t+1}(I_k)$  não seja um intervalo, existiria  $y \in \mathbf{a}$  no interior de  $\mathbb{E}^t(I_k)$ , isto é,  $y \in \text{int}(\mathbb{E}^t(I_k))$ , logo  $\mathbb{E}^{-t}(y) \in \text{int}(I_k)$ . Mas  $\mathbb{E}(I_k), \dots, \mathbb{E}^{r_k}(I_k)$  são disjuntos de  $J$ , já que  $\mathbb{E}^{r_k+1}(I_k)$  é o primeiro retorno de  $I_k$  a  $J$ , temos uma contradição com a escolha dos  $y_i$ 's.

De modo análogo,  $a, b \notin \text{int}(\mathbb{E}^{r_k+1}(I_k))$ . Assim,  $\mathbb{E}^{r_k+1}(I_k)$  intersecta  $J$  e não contém  $a$  ou  $b$  em seu interior, ou seja, está contido em  $J$ . Para provar que

os intervalos  $\mathbb{E}(I_k), \dots, \mathbb{E}^{r_k+1}(I_k)$  são dois a dois disjuntos basta supor que não sejam, e então existem  $0 < j < s < r_k$  tais que  $\mathbb{E}^s(I_k) \cap \mathbb{E}^j(I_k) \neq \emptyset$ . Daí,  $I_k \cap \mathbb{E}^{s-j}(I_k) \neq \emptyset$ , o que contraria a minimalidade de  $r_k$ , pois  $s - j < r_k$ .

**Fato 3.** Os intervalos  $\{\mathbb{E}^{r_k+1}(I_k)\}_{k=1, \dots, p}$  formam uma partição de  $J$ .

Caso contrário, como  $\mathbb{E}$  é uma isometria, teríamos para algum  $i \geq j$  que  $\mathbb{E}^j(I_t) \cap \mathbb{E}^i(I_q) \neq \emptyset$ . Supondo  $t \neq q$ ,  $i \leq r_q$  e  $j \leq r_t$ , então  $I_t \cap \mathbb{E}^{i-j}(I_q) \neq \emptyset$ , e daí  $\mathbb{E}^{i-j}(I_q) \cap J \neq \emptyset$ , contradizendo a minimalidade de  $r_q$ .

Portanto, a transformação  $\mathbb{E}_J : [a, b) \rightarrow [a, b)$  é dada por

$$\mathbb{E}_J(x) = \mathbb{E}^{r_k+1}(x), \quad x \in I_k, \quad k = 1, \dots, p,$$

o que prova (i). Pelos Fatos 1,2 e 3, temos que  $\mathbb{E}_J$  é uma transformação de intercâmbio de intervalos, pois é uma aplicação injetiva que preserva a medida de Lebesgue e a orientação dos intervalos e tem apenas um número finito de descontinuidades, o que prova (ii).  $\square$

Portanto,  $\mathbb{E}_J$  é novamente uma transformação de intercâmbio de intervalos, isto é, existe uma partição  $\mathbf{a}' = (a_0, a_1, \dots, a_p)$  de  $[a, b)$  e uma permutação  $\pi' \in G_p$  tal que  $\mathbb{E}_J = (\pi', \mathbf{a}')$ . Em geral, o número de intervalos contínuos cresce: se  $\mathbb{E}$  permuta  $n$  intervalos, então  $p \geq n$ . Dessa forma, sejam  $I_1, \dots, I_p$  intervalos contínuos de  $\mathbb{E}_J$ . Para cada  $1 \leq k \leq p$  existe um inteiro  $r_k > 0$  tal que

$$\mathbb{E}(I_k), \mathbb{E}^2(I_k), \dots, \mathbb{E}^{r_k}(I_k)$$

são todos disjuntos de  $J$ , uma vez que  $\mathbb{E}^{r_k+1}(I_k)$  é o primeiro subintervalo a intersectar o intervalo  $J$ , e temos que  $\mathbb{E}^{r_k+1}(I_k)$  está totalmente contido em  $J$ . Por definição,  $\mathbb{E}_J(I_k) = \mathbb{E}^{r_k+1}(I_k)$ . O número  $r_k$  é chamado *tempo de retorno* de  $I_k$  para  $J$ .

**Definição 1.1.5.**  $\mathbb{E}_J$  será chamada *aplicação induzida de  $\mathbb{E}$  sobre o intervalo  $J$* .

## 1.2 Indução de Rauzy

Consideremos o par  $\pi = (\pi_0, \pi_1)$  e o par  $(\pi, \lambda)$ . Para cada  $\epsilon \in \{0, 1\}$ , denotemos por  $\alpha(\epsilon)$  o último símbolo na expressão de  $\pi_\epsilon$ , ou seja,

$$\alpha(\epsilon) = \pi_\epsilon^{-1}(n) = \alpha_n^\epsilon.$$

Assumindo que os intervalos  $I_{\alpha(0)}$  e  $I_{\alpha(1)}$  possuam comprimentos diferentes, dizemos que  $(\pi, \lambda)$  tem “*tipo 0*” se  $\lambda_{\alpha(0)} > \lambda_{\alpha(1)}$  e “*tipo 1*” se  $\lambda_{\alpha(0)} < \lambda_{\alpha(1)}$ .

Sendo assim, seja  $J$  o subintervalo de  $I$  obtido pela remoção do mais curto desses dois intervalos:

$$J = \begin{cases} I \setminus \mathbb{E}(I_{\alpha(1)}), & \text{se } (\pi, \lambda) \text{ tem tipo 0} \\ I \setminus I_{\alpha(0)}, & \text{se } (\pi, \lambda) \text{ tem tipo 1} \end{cases}$$

A *indução de Rauzy* de  $\mathbb{E}$  é a aplicação de primeiro retorno  $\hat{R}(\mathbb{E})$  para o subintervalo  $J$ , e esta é novamente uma transformação de intercâmbio de intervalos.

Se  $(\pi, \lambda)$  tem tipo 0, definimos  $J_\alpha = I_\alpha$  para  $\alpha \neq \alpha(0)$  e  $J_{\alpha(0)} = I_{\alpha(0)} \setminus \mathbb{E}(I_{\alpha(1)})$ . Tais intervalos formam uma partição de  $J$  e  $\mathbb{E}(J_\alpha) \subset J$ , para todo  $\alpha \neq \alpha(1)$ . Isto significa que  $\hat{R}(\mathbb{E}) = \mathbb{E}$  restrito a esses  $J_\alpha$ 's. Por outro lado,

$$\mathbb{E}(J_{\alpha(1)}) = \mathbb{E}(I_{\alpha(1)}) \subset I_{\alpha(0)} \Rightarrow \mathbb{E}^2(J_{\alpha(1)}) \subset \mathbb{E}(I_{\alpha(0)}) \subset J.$$

Consequentemente,  $\hat{R}(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^2$  restrito a  $J_{\alpha(1)}$ .

Se  $(\pi, \lambda)$  tem tipo 1, definimos  $J_{\alpha(0)} = \mathbb{E}^{-1}(I_{\alpha(0)})$ ,  $J_{\alpha(1)} = I_{\alpha(1)} \setminus J_{\alpha(0)}$  e  $J_\alpha = I_\alpha$ , para os outros valores de  $\alpha$ . Desta forma,  $\mathbb{E}(J_\alpha) \subset J$  para todo  $\alpha \neq \alpha(0)$  e, então,  $\hat{R}(\mathbb{E}) = \mathbb{E}$  restrito a esses  $J_\alpha$ 's. Por outro lado,  $\mathbb{E}^2(J_{\alpha(0)}) = \mathbb{E}(I_{\alpha(0)}) \subset J$ , logo  $\hat{R}(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^2$  restrito a  $J_{\alpha(0)}$ .

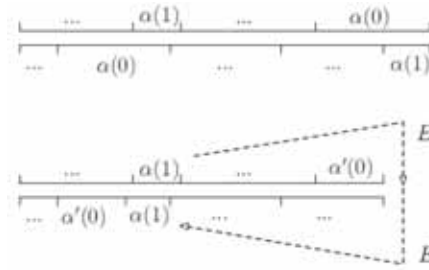


Figura 1.3: Indução de Rauzy do tipo 0.

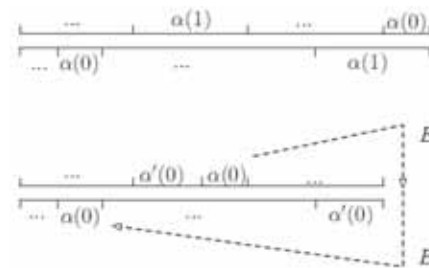


Figura 1.4: Indução de Rauzy do tipo 1.

**Observação 1.2.1.** A função indução  $\hat{R}(\mathbb{E})$  não está definida quando os intervalos  $I_{\alpha(0)}$  e  $I_{\alpha(1)}$  tem o mesmo comprimento.

**Exemplo 1.2.1.** Seja  $n = 3$  e  $\pi$  dada por  $\pi = \begin{pmatrix} B & A & C \\ C & B & A \end{pmatrix}$ .

Suponha que  $\lambda_C > \lambda_A$ , e aplicando a indução de Rauzy do tipo 0 temos a figura 1.5.

Ainda com  $n = 3$ , seja  $\pi$  dada por  $\pi = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$ .

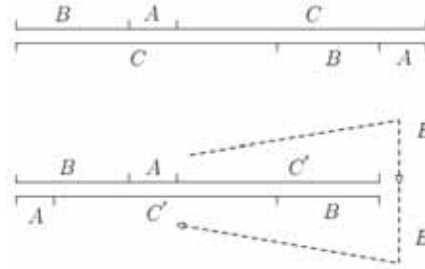


Figura 1.5:

Supondo que  $\lambda_C < \lambda_A$ , e aplicando a indução de Rauzy do tipo 1 temos a figura 1.6.

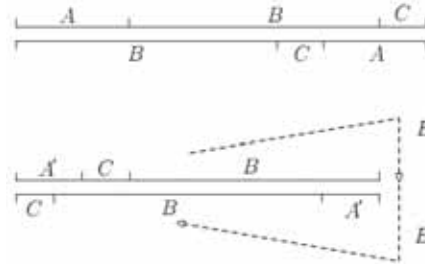


Figura 1.6:

Podemos expressar a função  $\mathbb{E} \mapsto \hat{R}(\mathbb{E})$  em termos de coordenadas  $(\pi, \lambda)$  no espaço das transformações de intercâmbio de intervalos.

Se  $(\pi, \lambda)$  tem tipo 0, então a transformação  $\hat{R}(\mathbb{E})$  é descrita por  $(\pi', \lambda')$ , tal que:

- $\pi' = \begin{pmatrix} \pi'_0 \\ \pi'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 & \dots & \alpha_{k-1}^0 & \alpha_k^0 & \alpha_{k+1}^0 & \dots & \dots & \alpha(0) \\ \alpha_1^1 & \dots & \alpha_{k-1}^1 & \alpha(0) & \alpha(1) & \alpha_{k+1}^1 & \dots & \alpha_{n-1}^1 \end{pmatrix}$ , isto é,

$$\alpha_j^{0'} = \alpha_j^0 \quad \text{e} \quad \alpha_j^{1'} = \begin{cases} \alpha_j^1 & \text{se } j \leq k \\ \alpha(1) & \text{se } j = k+1 \\ \alpha_{j-1}^1 & \text{se } j > k+1 \end{cases} \quad (1.2)$$

onde  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  está definido por  $\alpha_k^1 = \alpha(0)$ .

- $\lambda' = (\lambda'_j)_{j \in \mathcal{A}}$ , onde  $\lambda'_j = \lambda_j$  para  $j \neq \alpha(0)$ , e  $\lambda'_{\alpha(0)} = \lambda_{\alpha(0)} - \lambda_{\alpha(1)}$ .

Analogamente, se  $(\pi, \lambda)$  tem tipo 1 então  $\hat{R}(\mathbb{E})$  é descrito por  $(\pi', \lambda')$ , tal que:

$$\bullet \pi' = \begin{pmatrix} \pi'_0 \\ \pi'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 & \dots & \alpha_{k-1}^0 & \alpha(1) & \alpha(0) & \alpha_{k+1}^0 & \dots & \alpha_{n-1}^0 \\ \alpha_1^1 & \dots & \alpha_{k-1}^1 & \alpha_k^1 & \alpha_{k+1}^1 & \dots & \dots & \alpha(1) \end{pmatrix}, \text{ isto é,}$$

$$\alpha_j^{1'} = \alpha_j^1 \quad \text{e} \quad \alpha_j^{0'} = \begin{cases} \alpha_j^0 & \text{se } j \leq k \\ \alpha(0) & \text{se } j = k+1 \\ \alpha_{j-1}^0 & \text{se } j > k+1 \end{cases} \quad (1.3)$$

onde  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  está definido por  $\alpha_k^0 = \alpha(1)$ .

$$\bullet \lambda' = (\lambda'_j)_{j \in \mathcal{A}}, \text{ onde } \lambda'_j = \lambda_j \text{ para } j \neq \alpha(1), \text{ e } \lambda'_{\alpha(1)} = \lambda_{\alpha(1)} - \lambda_{\alpha(0)}.$$

**Observação 1.2.2.** Supondo que o  $n$ -ésimo iterado  $\hat{R}^n(\mathbb{E})$  esteja definido para algum  $n \geq 1$ , e seja  $I^n$  o seu respectivo domínio. Segue do algoritmo de indução que  $\hat{R}^n(\mathbb{E})$  é a função primeiro retorno de  $\mathbb{E}$  a  $I^n$ .

### 1.2.1 Condição de Keane

Com o objetivo de garantir a existência dos iterados de  $\hat{R}(\mathbb{E})$ , introduzimos alguns resultados.

**Definição 1.2.1.** Dizemos que o vetor  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Delta^{n-1}$  é *irracional*, ou que  $\lambda_j$ ,  $j \in \mathcal{A}$ , são *racionalmente independentes*, se  $\sum_{j=1}^n d_j \lambda_j \neq 0$  para todo vetor inteiro não nulo  $(d_j)_{j \in \mathcal{A}} \in \mathbb{Z}^{\mathcal{A}}$ .

Seja  $\partial I_\gamma$  a extremidade esquerda de cada subintervalo  $I_\gamma$ , considerando a extremidade esquerda de  $I$  coincidindo com a origem. Então  $\partial I_\gamma = \sum_{\pi_0(\eta) < \pi_0(\gamma)} \lambda_\eta$  representa a extremidade esquerda de cada subintervalo  $I_\gamma$ . Note que se  $\pi_0(\beta) = 1$  então  $\mathbb{E}(\partial I_\alpha) = \partial I_\beta$  para  $\alpha = \pi_1^{-1}(1)$ .

**Definição 1.2.2.** Um par  $(\pi, \lambda)$  satisfaz a *condição de Keane* se as órbitas destas extremidades são tão disjuntas quanto é possível elas serem, isto é,

$$\mathbb{E}^m(\partial I_\alpha) \neq \partial I_\beta, \text{ para } m \geq 1 \text{ e } \alpha, \beta \in \mathcal{A} \text{ com } \pi_0(\beta) \neq 1. \quad (1.4)$$

Esta condição assegura que  $\pi$  é irredutível e  $\hat{R}(\mathbb{E}) = (\pi', \lambda')$  está bem definida, pois se  $(\pi, \lambda)$  é redutível, existe  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  tal que  $\pi_1 \circ \pi_0^{-1}(\{1, \dots, k\}) = \{1, \dots, k\}$ , existe  $\alpha \in \{k+1, \dots, n\}$  tal que  $\mathbb{E}(\partial I_\alpha) = \partial I_{k+1}$ , o que contradiz a condição de Keane, e  $\hat{R}(\mathbb{E})$  está bem definida pois se  $\lambda_{\alpha(0)} = \lambda_{\alpha(1)}$ , então  $\mathbb{E}(\partial I_{\alpha(1)}) = \partial I_{\alpha(0)}$ , que novamente contradiz a condição de Keane.

A condição de Keane é invariante para iterados de  $\hat{R}(\mathbb{E})$ , pois as órbitas de  $\hat{R}(\mathbb{E})$  estão contidas nas órbitas de  $\mathbb{E}$ . Logo, para  $n \geq 0$ , a condição de Keane é suficiente para garantir a existência de todos os iterados  $\hat{R}^n(\mathbb{E})$ .

**Observação 1.2.3.** Assumindo a irredutibilidade, a condição de Keane é mais geral do que independência racional. Em particular, a condição de Keane goza da mesma propriedade que independência racional de possuir medida de Lebesgue total em  $\mathbb{R}^A$ .

**Proposição 1.2.1.** [14] *Se  $\lambda$  é irracional e  $\pi$  é irredutível, então  $(\pi, \lambda)$  satisfaz a condição de Keane.*

*Demonstração.* Suponhamos por absurdo que o par  $(\pi, \lambda)$  não satisfaz a condição de Keane. Dessa forma, devem existir  $m \geq 1$  e  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ , com  $\pi_0(\beta) > 1$ , tal que  $\mathbb{E}^m(\partial I_\alpha) = \partial I_\beta$ . Definimos  $\beta_j$ ,  $0 \leq j \leq m$ , tal que  $\mathbb{E}^j(\partial I_\alpha) \in I_{\beta_j}$ . Temos assim  $\beta_0 = \alpha$  e  $\beta_m = \beta$ . Note que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\partial I_\alpha) &= \partial I_\alpha + \mathfrak{d}_\alpha \\ \mathbb{E}^2(\partial I_\alpha) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\partial I_\alpha)) = \mathbb{E}(\partial I_\alpha) + \mathfrak{d}_{\beta_1} = \partial I_\alpha + \mathfrak{d}_\alpha + \mathfrak{d}_{\beta_1} \\ &\vdots \\ \partial I_\beta &= \mathbb{E}^m(\partial I_\alpha) = \partial I_\alpha + \mathfrak{d}_\alpha + \mathfrak{d}_{\beta_1} + \dots + \mathfrak{d}_{\beta_{m-1}},\end{aligned}$$

onde  $\mathfrak{d} = (\mathfrak{d}_\gamma)_{\gamma \in \mathcal{A}}$  é o vetor translação, logo  $\partial I_\beta - \partial I_\alpha = \sum_{0 \leq j < m} \mathfrak{d}_{\beta_j}$ , de onde,

$$\begin{aligned}\sum_{\pi_0(\gamma) < \pi_0(\beta_m)} \lambda_\gamma - \sum_{\pi_0(\gamma) < \pi_0(\beta_0)} \lambda_\gamma &= \sum_{j=0}^{m-1} \left( \sum_{\pi_1(\gamma) < \pi_1(\beta_j)} \lambda_\gamma - \sum_{\pi_0(\gamma) < \pi_0(\beta_j)} \lambda_\gamma \right) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{\pi_1(\gamma) < \pi_1(\beta_j)} \lambda_\gamma - \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{\pi_0(\gamma) < \pi_0(\beta_j)} \lambda_\gamma.\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}\sum_{\pi_0(\gamma) < \pi_0(\beta_m)} \lambda_\gamma - \sum_{\pi_0(\gamma) < \pi_0(\beta_0)} \lambda_\gamma &= \\ \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{\pi_1(\gamma) < \pi_1(\beta_j)} \lambda_\gamma - \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{\pi_0(\gamma) < \pi_0(\beta_j)} \lambda_\gamma - \sum_{\pi_0(\gamma) < \pi_0(\beta_0)} \lambda_\gamma,\end{aligned}$$

que pode ser reescrito como

$$\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{\pi_1(\gamma) < \pi_1(\beta_j)} \lambda_\gamma - \sum_{j=1}^m \sum_{\pi_0(\gamma) < \pi_0(\beta_j)} \lambda_\gamma = 0,$$

ou seja,

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{A}} \zeta_\gamma \lambda_\gamma = 0,$$

com  $\zeta_\gamma = \#\{0 \leq j < m : \pi_1(\beta_j) > \pi_1(\gamma)\} - \#\{0 < j \leq m : \pi_0(\beta_j) > \pi_0(\gamma)\}$ . Por

hipótese, temos que  $\lambda$  é racionalmente independente, assim,  $\zeta_\gamma = 0, \forall \gamma \in \mathcal{A}$ . Sejam

$$B = \max_{0 < j \leq m} \{\pi_0(\beta_j)\}, \quad C = \max_{0 \leq j < m} \{\pi_1(\beta_j)\} \quad \text{e} \quad D = \max\{B, C\}.$$

Dessa forma, temos  $D \geq B \geq \pi_0(\beta_m) = \pi_0(\beta) > 1$ . Como  $\pi$  é irredutível, deve existir  $\gamma$  tal que  $\pi_0(\gamma) < D \leq \pi_1(\gamma)$ . Da relação anterior e da construção de  $D$ , temos que  $\pi_1(\beta_j) \leq \pi_1(\gamma), \forall 0 \leq j < m$ , e assim

$$\{0 \leq j < m : \pi_1(\beta_j) > \pi_1(\gamma)\} = \emptyset.$$

Como  $\zeta_\gamma = 0$ , temos  $\{0 < j \leq m : \pi_0(\beta_j) > \pi_0(\gamma)\} = \emptyset$  e, portanto,

$$\pi_0(\beta_j) \leq \pi_0(\gamma) < D, \quad \forall 0 < j \leq m.$$

De modo análogo, prova-se que  $\pi_1(\beta_j) < D, \forall 0 \leq j < m$ . De fato, como  $D > 1$  e  $\pi$  é irredutível, deve existir  $\gamma$  tal que  $\pi_1(\gamma) < D \leq \pi_0(\gamma)$ . Da relação anterior e da construção de  $D$ , temos que  $\pi_0(\beta_j) \leq \pi_0(\gamma), \forall 0 < j \leq m$ , e assim

$$\{0 < j \leq m : \pi_0(\beta_j) > \pi_0(\gamma)\} = \emptyset.$$

Como  $\zeta_\gamma = 0$ , temos  $\{0 \leq j < m : \pi_1(\beta_j) > \pi_1(\gamma)\} = \emptyset$  e, portanto,

$$\pi_1(\beta_j) \leq \pi_1(\gamma) < D, \quad \forall 0 \leq j < m.$$

Assim provamos que  $\pi_0(\beta_j) < D$  para todo  $0 < j \leq m$  e que  $\pi_1(\beta_j) < D$  para todo  $0 \leq j < m$ , o que é um absurdo, pois contraria a definição de  $D$ .

Portanto,  $(\pi, \lambda)$  satisfaz a condição de Keane.  $\square$

## 1.2.2 Minimalidade

A condição de Keane implica na minimalidade de  $\mathbb{E}$ , fato que provaremos agora.

**Lema 1.2.1.** [14] *Dado qualquer subintervalo  $J = [a, b)$  de algum  $I_k$  subintervalo de  $[0, 1)$ ,  $1 \leq k \leq n$ , deve existir uma partição finita  $\{J_j : 1 \leq j \leq p\}$  e inteiros  $r_1, \dots, r_p \geq 1$  tais que*

- (i)  $\mathbb{E}(J_j) \cap J = \emptyset$  para todo  $0 \leq i \leq r_j$  e  $1 \leq j \leq p$ ,
- (ii) cada  $\mathbb{E}_{|J_j}^{r_j}$  é uma translação de  $J_j$  para algum subintervalo contínuo de  $J$ ,
- (iii) os subintervalos  $\mathbb{E}^{r_j}(J_j), 1 \leq j \leq p$  são disjuntos dois a dois.

*Demonstração.* A prova segue dos fatos da Proposição 1.1.1.  $\square$

**Corolário 1.2.1.** [14] *Nas condições do Lema 1.2.1, a união  $\hat{J}$  de todos iterados futuros de  $J$  é uma união finita de intervalos e um conjunto completamente invariante, ou seja,  $\mathbb{E}(\hat{J}) = \hat{J}$ .*

*Demonstração.* O fato de ser uma união finita de intervalos segue de (iii) do Lema 1.2.1, ou seja,

$$\hat{J} = \bigcup_{r=0}^{\infty} \mathbb{E}^r(J) = \bigcup_{j=1}^p \bigcup_{i=0}^{r_j-1} \mathbb{E}^i(J_j).$$

Note que

$$\sum_{j=1}^p |\mathbb{E}^{r_j}(J_j)| = \sum_{j=1}^p |J_j| = |J|.$$

Juntando este fato com (ii) e (iii) do Lema 1.2.1 temos

$$J = \bigcup_{j=1}^p \mathbb{E}^{r_j+1}(J_j). \quad (1.5)$$

Portanto,

$$\mathbb{E}(\hat{J}) = \bigcup_{j=1}^p \bigcup_{i=1}^{r_j} \mathbb{E}^i(J_j) = \bigcup_{j=1}^p \bigcup_{i=0}^{r_j-1} \mathbb{E}^i(J_j) = \hat{J},$$

isto é,  $\hat{J}$  é completamente invariante.  $\square$

Podemos escrever o intervalo todo  $[0, 1)$  pela união

$$[0, 1) = \bigcup_{j=1}^p \bigcup_{i=1}^{r_j} \mathbb{E}^i(J_j). \quad (1.6)$$

**Lema 1.2.2.** [14] *Se  $(\pi, \lambda)$  satisfaz a condição de Keane então  $\mathbb{E}$  não possui pontos periódicos.*

*Demonstração.* Supondo que existe  $m \geq 1$  e  $x \in [0, 1)$  tal que  $\mathbb{E}^m(x) = x$ , defina  $\beta_j$ ,  $0 \leq j \leq m$ , tal que  $\mathbb{E}^j(x) \in I_{\beta_j}$ . Seja  $J$  o conjunto de todos os pontos  $y \in [0, 1)$  tais que  $\mathbb{E}^j(y) \in I_{\beta_j}$  para todo  $0 \leq j < m$ , isto é,

$$\begin{aligned} J &= \{y \in [0, 1) : \mathbb{E}^j(y) \in I_{\beta_j}, 0 \leq j < m\} \\ &= \bigcap_{j=0}^{m-1} \{y \in [0, 1) : \mathbb{E}^j(y) \in I_{\beta_j}\} \\ &= \bigcap_{j=0}^{m-1} \mathbb{E}^{-j}(I_{\beta_j}). \end{aligned}$$

Desta forma,  $J$  é união finita de subintervalos de  $I_{\beta_0}$  e  $J \neq \emptyset$  pois  $x \in J$ . Seja  $J_x$  o tal subintervalo que contém  $x$ , assim, existe  $0 \leq i < m$  tal que  $\mathbb{E}^{m-1}(\partial I_{\beta_i}) = \partial J_x$ . Como  $\mathbb{E}^m(x) = x$ , temos

$$\mathbb{E}^m(\mathbb{E}^{m-1}(\partial I_{\beta_i})) = \mathbb{E}^m(\partial J_x) = \partial J_x = \mathbb{E}^{m-1}(\partial I_{\beta_i}),$$



isto é,  $\mathbb{E}^m(\partial I_{\beta_i}) = \partial I_{\beta_i}$ . Se  $\pi_0(\beta_i) > 1$ , isto contradiz a condição de Keane. Suponhamos que  $\pi_0(I_{\beta_i}) = 1$ . Neste caso, existe  $\alpha_0 \in \mathcal{A}$  tal que  $\mathbb{E}(\partial I_{\alpha_0}) = 0 = \partial I_{\beta_i}$ . Como  $\pi$  é irredutível, temos  $\partial I_{\alpha_0} > 0$ , ou seja,  $\pi_0(\alpha_0) > 1$ , logo, pela injetividade de  $\mathbb{E}$ , temos  $\mathbb{E}(\partial I_{\alpha_0}) = \partial I_{\beta_i}$  e

$$\mathbb{E}^m(\mathbb{E}(\partial I_{\alpha_0})) = \mathbb{E}^m(\partial I_{\beta_i}) = \partial I_{\beta_i} = \mathbb{E}(\partial I_{\alpha_0}),$$

logo

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}^m(\partial I_{\alpha_0})) = \mathbb{E}(\partial I_{\alpha_0}) \Rightarrow \mathbb{E}^m(\partial I_{\alpha_0}) = \partial I_{\alpha_0} > 0$$

o que contradiz a condição de Keane. Portanto  $\mathbb{E}$  não possui ponto periódico.  $\square$

**Teorema 1.1.** [14] *Se  $(\pi, \lambda)$  satisfaz a condição de Keane, então  $\mathbb{E}$  é minimal.*

*Demonstração.* Suponha que exista  $x \in [0, 1)$  tal que o conjunto  $\{\mathbb{E}^n(x) : n \geq 0\}$  não seja denso em  $[0, 1)$ , isto é,  $\overline{\{\mathbb{E}^n(x) : n \geq 0\}} \neq [0, 1)$ . Sejam  $J = [a, b) \subset I_\alpha$ , para algum  $\alpha \in \mathcal{A}$ , tal que  $J \cap \{\mathbb{E}^n(x) : n \geq 0\} = \emptyset$  e  $\hat{J}$  seja a união de todos os iterados futuros de  $J$ . Pelo Corolário 1.2.1, está é uma união finita de intervalos completamente invariante por  $\mathbb{E}$ .

Ora,  $\hat{J}$  não pode ser da forma  $[0, \hat{b})$ , pois se for, considere  $\mathcal{B} = \{\alpha \in \mathcal{A} : I_\alpha \subset \hat{J}\}$ . Se  $\mathcal{B} \neq \emptyset$ , temos  $\pi_0(\mathcal{B}) \neq \{1, 2, \dots, p\}$ , para algum  $k \in \mathcal{A}$ , com  $k < n$ , já que  $\hat{J}$  não intersecta a órbita de  $x$ . Como  $\hat{J}$  é invariante, temos  $\pi_1(\mathcal{B}) = \{1, 2, \dots, k\}$ , e assim

$$\pi_0^{-1}(\{1, 2, \dots, k\}) = \mathcal{B} = \pi_1^{-1}(\{1, 2, \dots, k\}).$$

Mas isso contradiz a irredutibilidade de  $\pi$ , já que irredutibilidade é uma consequência da condição de Keane. Assim,  $\mathcal{B} = \emptyset$ , isto é,  $\hat{J} \subset I_\alpha$ , onde  $\pi_0(\alpha) = 1$ . Pela invariância temos  $\hat{J} \subset \mathbb{E}(I_\alpha)$ , e portanto,  $\pi_1(\alpha) = 1$ , o que também contradiz a irredutibilidade de  $\pi$ .

Usando o Corolário 1.2.1,  $\hat{J}$  é uma união finita e disjunta de subintervalos de  $[0, 1)$ , onde existe pelo menos um subintervalo do tipo  $[\hat{a}, \hat{b})$ , com  $\hat{a} > 0$ .

Se  $\mathbb{E}^n(\hat{a}) \neq \partial I_\beta$  para todo  $n \geq 0$  e  $\beta \in \mathcal{A}$ , então, pela continuidade de  $\mathbb{E}$  e a invariância de  $\hat{J}$ ,  $\mathbb{E}^n(\hat{a})$  será extremidade de algum dos subintervalos disjuntos de  $\hat{J}$ , para todo  $n \geq 0$ . Como  $\hat{J}$  possui um número finito de componentes conexas, temos que  $\mathbb{E}$  deve ter ponto periódico, o que contradiz o Lema 1.2.2. Da mesma forma, não pode acontecer  $\mathbb{E}^n(\hat{a}) \neq \mathbb{E}(\partial I_\alpha)$  para todo  $n \leq 0$  e  $\alpha \in \mathcal{A}$ .

Logo, existem  $n_1 \leq 0 \leq n_2$  e  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$  tais que

$$\mathbb{E}^{n_1}(\hat{a}) = \mathbb{E}(\partial I_\alpha) \quad \text{e} \quad \mathbb{E}^{n_2}(\hat{a}) = \partial I_\beta. \quad (1.7)$$

Se  $\partial I_\beta > 0$ , estamos contradizendo a condição de Keane, pois

$$\mathbb{E}^{n_2-n_1+1}(\partial I_\alpha) = \mathbb{E}^{n_2}(\mathbb{E}^{1-n_1}(\partial I_\alpha)) = \mathbb{E}^{n_2}(\hat{a}) = \partial I_\beta.$$

Se  $\partial I_\beta = 0$  então  $n_2 > 0$ , pois tomamos  $\hat{a} > 0$ . Além disso,  $\partial I_\beta = \mathbb{E}(\partial I_\gamma)$ , para algum  $\gamma \in \mathcal{A}$  ( $\pi_1(\gamma) = 1$ ). Assim, se substituirmos  $\beta$  por  $\gamma$  e  $n_2$  por  $n_2 - 1$ , a igualdade 1.7 ainda vale. Pela irreduzibilidade, temos  $\gamma \neq \beta$ , logo  $\partial I_\gamma > 0$ , o que contradiz a condição de Keane, pois

$$\mathbb{E}^{n_2-n_1}(\partial I_\alpha) = \mathbb{E}^{n_2-1}(\mathbb{E}^{1-n_1}(\partial I_\alpha)) = \mathbb{E}^{n_2-1}(\hat{a}) = \partial I_\gamma, \quad \pi_0(\gamma) \neq 1.$$

Portanto, não existe  $x \in [0, 1)$  tal que  $\overline{\{\mathbb{E}^n(x) : n \geq 0\}} \neq [0, 1)$ . Logo,  $\mathbb{E}$  é minimal.  $\square$

**Observação 1.2.4.** A condição de Keane não é necessária para minimalidade. Considere a transformação de intercâmbio de intervalos  $\mathbb{E}$  ilustrada na figura 1.7, onde  $\lambda_A = \lambda_C$ ,  $\lambda_B = \lambda_D$  e  $\frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \frac{\lambda_C}{\lambda_D}$  é irracional. Então  $\mathbb{E}$  não satisfaz a condição de Keane, ainda que seja minimal. De fato,  $\mathbb{E}$  é minimal pois o único fechado não

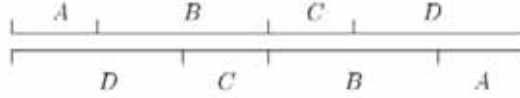


Figura 1.7:

vazio invariante por  $\mathbb{E}$  é o próprio intervalo.  $\mathbb{E}$  não satisfaz a condição de Keane pois  $\mathbb{E}(\partial I_B) = \partial I_C$ .

### 1.2.3 Classes de Rauzy

Sejam  $\pi$  e  $\pi'$  pares irreduzíveis tais que  $\pi'$  é o tipo  $\epsilon$  sucessor de  $\pi$ , para  $\epsilon \in \{0, 1\}$ , isto é, existe  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}_+^A$  tais que  $\hat{R}(\mathbb{E}) = (\pi', \lambda')$ . Qualquer par  $\pi = (\pi_0, \pi_1)$  tem exatamente dois sucessores, correspondendo ao tipo 0 e 1. Similarmente, cada  $\pi'$  é o sucessor de exatamente dois pares  $\pi$ , obtidos pelo inverso das relações (1.2) e (1.3). Notemos que  $\pi$  é irreduzível se, e só se,  $\pi'$  é irreduzível. Então, esta relação define uma ordem parcial no conjunto  $G_n$  dos pares irreduzíveis, que podemos representar por um grafo  $\mathcal{G}$ . Chamaremos *classes de Rauzy* as componentes conexas deste grafo e denotaremos uma classe por  $\mathfrak{C}$ .

**Lema 1.2.3.** [14] *Se  $\pi$  e  $\pi'$  pertencem a uma mesma classe de Rauzy, então deve existir um caminho orientado em  $\mathcal{G}$  começando em  $\pi$  e terminando em  $\pi'$ .*

*Demonstração.* Seja  $A(\pi)$  o conjunto de todos os pares  $\pi'$  que podem ser atingidos por um caminho orientado começando em  $\pi$ . Sabemos que cada vértice do grafo  $\mathcal{G}$  tem

exatamente duas flechas saindo e duas chegando. Por definição de  $A(\pi)$ , toda flecha começando num vértice de  $A(\pi)$  deve terminar em algum vértice de  $A(\pi)$ . Toda borda terminando em um vértice de  $A(\pi)$  deve começar em um vértice de  $A(\pi)$ . De fato, seja  $\pi' \in A(\pi)$ . Existem  $\pi^0$  e  $\pi^1$  tais que  $\pi'$  é sucessor de  $\pi^0$  (tipo 0) e  $\pi^1$  (tipo 1). Considerando  $\pi^1$  temos a seguinte construção:

$$\pi^1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 \dots & \alpha(1) & \alpha_{k+1}^0 \dots & \alpha(0) \\ \alpha_1^1 & \dots & \dots & \alpha(1) \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \pi' = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 \dots & \alpha(1) & \alpha(0) \dots & \alpha_{d-1}^0 \\ \alpha_1^1 & \dots & \dots & \alpha(1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow 1 \\ \dots \xleftarrow{1} \dots \xleftarrow{1} \dots \xleftarrow{1} \end{matrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^0 & \dots & \alpha(1) & \alpha_{d-1}^0 & \alpha(0) \dots & \alpha_{d-2}^0 \\ \alpha_1^1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha(1) \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow 1 \end{matrix}$$

Assim existe um caminho começando em  $\pi'$  e terminando em  $\pi^1$ . Como  $\pi' \in A(\pi)$ , temos que  $\pi^1 \in A(\pi)$ . De modo análogo, mostramos que  $\pi^0 \in A(\pi)$ . Isto significa que  $A(\pi)$  é uma componente conexa de  $\mathcal{G}$ , então coincide com a classe de Rauzy  $\mathfrak{C}(\pi)$ .  $\square$

Considere as classes de Rauzy para os primeiros valores de  $n$ .

Se  $n = 2$  existem duas possibilidades para a monodromia invariante, mas apenas uma é irreduzível:  $(2, 1)$ . Portanto, o grafo de Rauzy reduzido é:

$$0 \circ \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \circ 1.$$

Para  $n = 3$  existem seis possibilidades para a monodromia invariante, mas somente três são irreduzíveis:  $(2, 3, 1)$ ,  $(3, 1, 2)$  e  $(3, 2, 1)$ . Todas pertencem a uma mesma classe de Rauzy:

$$0 \circ \begin{pmatrix} A & C & B \\ C & B & A \end{pmatrix} \xleftarrow{1} \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix} \xleftarrow{0} \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix} \circ 1$$

Então existe uma única classe de Rauzy para  $n = 3$ .

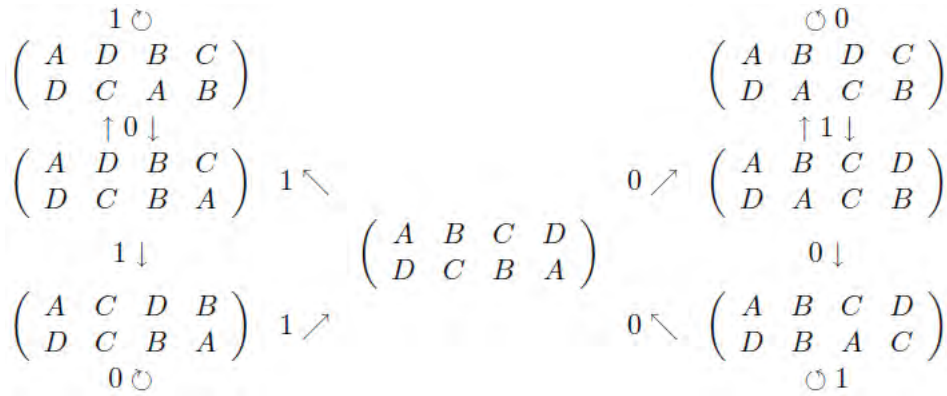
Para  $n = 4$  existem 24 possibilidades para a monodromia invariante, 13 das quais são irreduzíveis:

$$(4, 3, 2, 1), (4, 1, 3, 2), (3, 1, 4, 2), (4, 2, 1, 3), (2, 4, 3, 1),$$

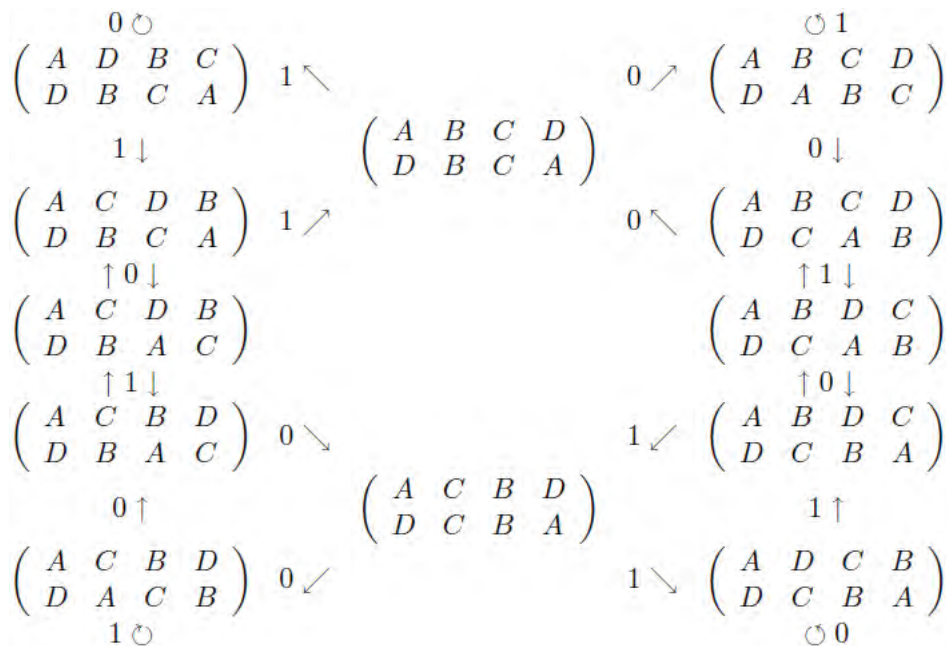
$$(3, 2, 4, 1), (2, 4, 1, 3), (4, 2, 3, 1), (4, 1, 2, 3), (4, 3, 1, 2),$$

$$(3, 4, 1, 2), (2, 3, 4, 1), (3, 4, 2, 1).$$

A seguinte classe de Rauzy contém os sete primeiros valores:



Os outros seis valores de monodromia invariante aparecem na classe de Rauzy:



Então, existem exatamente duas classes de Rauzy para  $n = 4$ .

As classes de Rauzy para  $n \leq 5$  estão listadas abaixo:

d	representante	# vértices (classe inteira)	# vértices (reduzida)
2	(2,1)	1	1
3	(3,2,1)	3	3
4	(4,3,2,1)	7	7
4	(4,2,3,1)	12	6
5	(5,4,3,2,1)	15	15
5	(5,3,2,4,1)		11
5	(5,4,2,3,1)		35
5	(5,2,3,4,1)		10

**Definição 1.2.3.** Uma par  $\pi = (\pi_0, \pi_1)$  é chamado *standard* se o último símbolo em cada linha coincide com o primeiro símbolo na outra linha. Em outras palavras, a monodromia invariante satisfaz  $\pi_1 \circ \pi_0^{-1}(1) = n$  e  $\pi_1 \circ \pi_0^{-1}(n) = 1$ .

**Proposição 1.2.2.** [14] *Toda classe de Rauzy contém algum par standard.*

**Observação 1.2.5.** Note que o operador de Rauzy mantém os primeiros símbolos  $\alpha_1^\epsilon = \pi_\epsilon^{-1}(1)$ ,  $\epsilon \in \{0, 1\}$ , inalterados em toda classe de Rauzy  $\mathfrak{C}(\pi)$ .

**Lema 1.2.4.** [14] *Dado qualquer  $\epsilon \in \{0, 1\}$  e qualquer  $\beta \in \mathcal{A}$  tal que  $\pi_\epsilon(\beta) \neq 1$ , existe algum par  $\pi'$  na classe de Rauzy  $\mathfrak{C}(\pi)$  tal que  $\pi'_\epsilon(\beta) = n$ , isto é,  $\beta$  é o último símbolo da linha  $\epsilon$  de  $\pi'$ .*

*Demonstração.* Para cada  $\epsilon \in \{0, 1\}$  seja  $\mathcal{A}_\epsilon$  o subconjunto de todos  $\beta \in \mathcal{A}$  tais que  $\pi'_\epsilon(\beta) < n$ , para todo  $\pi'$  na classe de Rauzy. Pela observação 1.2.5,  $\alpha_1^\epsilon \in \mathcal{A}_\epsilon$ . Consideremos  $\kappa(\epsilon)$  a posição mais a direita atingida por estes símbolos, isto é,

$$\kappa(\epsilon) = \max\{\pi'_\epsilon(\beta) : \pi' \in \mathfrak{C}(\pi) \text{ e } \beta \in \mathcal{A}_\epsilon\}.$$

Então, por definição, temos  $\kappa(\epsilon) < n$ . Mostraremos que  $\kappa(\epsilon) = 1$ , e então  $\mathcal{A}_\epsilon = \{\alpha_1^\epsilon\}$ , para  $\epsilon \in \{0, 1\}$ .

Fixemos algum  $\beta_\epsilon \in \mathcal{A}_\epsilon$  tal que o máximo seja atingido. Sendo assim, existe  $\tilde{\pi} \in \mathfrak{C}(\pi)$  tal que  $\tilde{\pi}_\epsilon(\beta_\epsilon) = \kappa(\epsilon)$ . Por definição de  $\kappa(\epsilon)$ ,  $\pi'_\epsilon(\beta_\epsilon) = \kappa(\epsilon)$  para todo  $\pi'$  sucessor de  $\tilde{\pi}$ . Agora, pelo Lema 1.2.3, conseguimos um caminho em  $\mathfrak{C}(\pi)$ , começando em  $\pi$  e terminando em  $\pi'$ , para todo  $\pi' \in \mathfrak{C}(\pi)$ . Então  $\pi'_\epsilon(\beta_\epsilon) = \kappa(\epsilon)$ ,  $\forall \pi' \in \mathfrak{C}(\pi)$ . Como consequência, todos os elementos a esquerda de  $\beta_\epsilon$  permanecem constantes na classe de Rauzy:  $(\pi'_\epsilon)^{-1}(i) = \pi_\epsilon^{-1}(i)$ ,  $\forall 1 \leq i \leq \kappa(\epsilon)$ . Em particular, nenhum símbolo à esquerda de  $\beta_\epsilon$  pode chegar na última posição da linha  $1 - \epsilon$ :

$$\pi_\epsilon(\alpha) < \kappa(\epsilon) \Rightarrow \pi'_{1-\epsilon}(\alpha) < n \Rightarrow \pi'_{1-\epsilon}(\alpha) \leq \kappa(1 - \epsilon), \quad \forall \pi' \in \mathfrak{C}(\pi). \quad (1.8)$$

Escrevemos,  $\pi' = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 & \cdots & \alpha_{\kappa(0)}^0 & \cdots & \cdots & \alpha_n^0 \\ \alpha_1^1 & \cdots & \cdots & \alpha_{\kappa(1)}^1 & \cdots & \alpha_n^1 \end{pmatrix}$ , com  $\alpha_i^\epsilon = (\pi'(\epsilon))^{-1}(i)$ .

A relação (1.8) implica que

$$\{\alpha_1^\epsilon, \dots, \alpha_{\kappa(\epsilon)-1}^\epsilon\} \subset \{\alpha_1^{1-\epsilon}, \dots, \alpha_{\kappa(1-\epsilon)}^{1-\epsilon}\} \quad \text{para } \epsilon \in \{0, 1\}. \quad (1.9)$$

Em particular,  $\kappa(\epsilon) - 1 \leq \kappa(1 - \epsilon)$ . Agora, considerando  $1 - \epsilon$  ao invés de  $\epsilon$ , mantemos o raciocínio e concluímos que  $\kappa(1 - \epsilon) - 1 \leq \kappa(\epsilon)$ . Portanto,  $\kappa(\epsilon) - 1 \leq \kappa(1 - \epsilon) \leq \kappa(\epsilon) + 1$ .

Existem quatro possibilidades:

1)  $\kappa(0) = \kappa(1) + 1$ : então o caso  $\epsilon = 0$  em (1.9) implica

$$\{\alpha_1^0, \dots, \alpha_{\kappa(1)}^0\} = \{\alpha_1^1, \dots, \alpha_{\kappa(1)}^1\},$$

e isto contradiz o fato da irreduzibilidade de  $\pi'$ .

2)  $\kappa(0) = \kappa(1) - 1$ : então o caso  $\epsilon = 1$  em (1.9) implica

$$\{\alpha_1^0, \dots, \alpha_{\kappa(0)}^0\} = \{\alpha_1^1, \dots, \alpha_{\kappa(0)}^1\},$$

o que contradiz a irreduzibilidade de  $\pi'$ .

3)  $\kappa(0) = \kappa(1)$  e  $\{\alpha_1^0, \dots, \alpha_{\kappa(0)-1}^0\} = \{\alpha_1^1, \dots, \alpha_{\kappa(1)-1}^1\}$ : contradiz a irreduzibilidade, a menos que  $\kappa(0) = \kappa(1) = 1$ .

4)  $\kappa(0) = \kappa(1)$  e existe  $1 \leq i < \kappa(0)$  tal que  $\alpha_i^0 = \alpha_{\kappa(1)}^1$ : o caso  $\epsilon = 1$  em (1.9) resulta  $\{\alpha_1^0, \dots, \alpha_{\kappa(0)}^0\} = \{\alpha_1^1, \dots, \alpha_{\kappa(1)-1}^1, \alpha_{\kappa(1)}^1\}$ , e isto implica que deve existir  $1 \leq j < \kappa(1)$  tal que  $\alpha_j^1 = \alpha_{\kappa(0)}^0$ , o que também contradiz a irreduzibilidade.

Isto completa a prova do Lema.  $\square$

*Demonstração.* (**Proposição 1.2.2**) Pela observação 1.2.5, os primeiros símbolos  $\alpha_1^\epsilon$  em ambas as linhas permanecem inalterados para todo iterado da indução de Rauzy. Por irreduzibilidade, eles são necessariamente distintos. Então, usando o Lema 1.2.4, podemos encontrar um par  $\pi'$  em  $\mathfrak{C}(\pi)$  tal que  $\pi'_0(\alpha_1^1) = n$ , isto é, o último símbolo da primeira linha coincide com o primeiro da última linha.

Agora, iterando a indução de Rauzy em  $\pi'$ , considerando que esta tenha tipo 0, mantemos a primeira linha inalterada, enquanto deslocamos os elementos da linha  $\pi'_1$  uma casa à direita, exceto  $\alpha_1^1$  e  $\pi_1^{-1}(n)$ . Assim encontraremos um par  $\pi''$  que satisfaça  $\pi''_1(\alpha_1^0) = n$ , e mantenha a posição de  $\alpha_1^1$  na primeira linha, ou seja,  $\pi''_0(\alpha_1^1) = n$ . Logo,  $\pi''$  é standard.  $\square$

## 1.3 Renormalização de Rauzy

Estamos especialmente interessados na variação dos algoritmos de indução no conjunto dos domínios de todas as transformações de intercâmbio de intervalos de comprimento um.

Sejam  $\pi$  e  $\pi'$  pares irreduzíveis tais que  $\pi'$  é o tipo  $\epsilon$  sucessor de  $\pi$ , para  $\epsilon \in \{0, 1\}$ . Para cada  $\lambda \in \mathbb{R}_+^A$  satisfazendo  $\lambda_{\alpha(\epsilon)} > \lambda_{\alpha(1-\epsilon)}$ , temos

$$\hat{R}(\mathbb{E}) = (\pi', \lambda') \quad \text{com} \quad \lambda'_\alpha = \begin{cases} \lambda_\alpha & \text{se } \alpha \neq \alpha(\epsilon) \\ \lambda_{\alpha(\epsilon)} - \lambda_{\alpha(1-\epsilon)} & \text{se } \alpha = \alpha(\epsilon) \end{cases}.$$

A aplicação  $\lambda \mapsto \lambda'$  definida é uma bijeção que vai do subconjunto de comprimento de vetores satisfazendo  $\lambda_{\alpha(\epsilon)} > \lambda_{\alpha(1-\epsilon)}$ , sobre todo  $\mathbb{R}_+^A$ . De fato, o

inverso é dado por

$$\lambda_\alpha = \begin{cases} \lambda'_\alpha & \text{se } \alpha \neq \alpha(\epsilon) \\ \lambda'_{\alpha(\epsilon)} + \lambda'_{\alpha(1-\epsilon)} & \text{se } \alpha = \alpha(\epsilon) \end{cases}.$$

Tomemos o intervalo de comprimento unitário, isto é,  $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha = 1$ . A indução  $\hat{R}(\mathbb{E})$  está definida num intervalo menor, de comprimento  $1 - \lambda_{\alpha(1-\epsilon)}$ , mas se fizermos uma reestruturação podemos ver esta como uma função  $\mathcal{R}$  no intervalo unitário.

**Definição 1.3.1.** Chamamos de *função renormalização de Rauzy* a função

$$\mathcal{R} : (\pi, \lambda) \mapsto (\pi', \lambda''), \quad \text{onde } \lambda'' = \frac{\lambda'}{1 - \lambda_{\alpha(1-\epsilon)}}, \quad \epsilon \in \{0, 1\}.$$

Considere  $\Lambda_{\pi, \epsilon} = \{\lambda \in \Delta^{n-1} : \lambda_{\alpha(\epsilon)} > \lambda_{\alpha(1-\epsilon)}\}$ , para  $\epsilon \in \{0, 1\}$ . De acordo com as observações anteriores, temos que  $(\pi, \lambda) \mapsto (\pi', \lambda'')$  leva  $\{\pi\} \times \Lambda_{\pi, \epsilon}$  bijetivamente sobre  $\{\pi'\} \times \Delta^{n-1}$ . A Figura 1.8 ilustra o caso  $n = 3$ .

Para cada classe de Rauzy  $\mathfrak{C}$  temos que em  $\mathfrak{C} \times \Delta^{n-1}$  existe uma medida natural  $m$  que é produto da medida de contagem em  $\mathfrak{C}$  e da medida  $(n - 1)$ -dimensional de Lebesgue em  $\Delta^{n-1}$ . Como esta função está definida num subconjunto de comprimento de vetores  $\lambda$ , que satisfazem a condição de Keane, o qual tem medida de Lebesgue total, a função

$$\mathcal{R} : \mathfrak{C} \times \Delta^{n-1} \longrightarrow \mathfrak{C} \times \Delta^{n-1}$$

está definida  $m$ -quase sempre em  $\mathfrak{C} \times \Delta^{n-1}$ . Nesse caso,  $\mathcal{R}$  também possui a seguinte propriedade:  $\mathcal{R}$  leva  $\{\pi\} \times \Lambda_{\pi, \epsilon}$  bijetivamente sobre  $\{\pi'\} \times \Delta^{n-1}$ , onde  $\pi'$  é o tipo  $\epsilon$  sucessor de  $\pi$ .

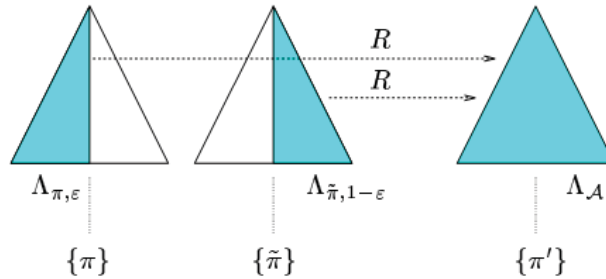


Figura 1.8:

**Exemplo 1.3.1.** Para  $n = 2$  existe apenas um par irredutível,  $\pi = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ . Temos  $\Delta^{n-1} = \{(\lambda_A, \lambda_B) : \lambda_A > 0, \lambda_B > 0, \text{ e } \lambda_A + \lambda_B = 1\} \sim (0, 1)$ , onde  $\sim$  refere-se a correspondência bijetiva  $(\lambda_A, \lambda_B) \mapsto x = \lambda_A$ . A partir dessa correspondência,  $\Lambda_{\pi, 0} \sim (0, \frac{1}{2})$  e  $\Lambda_{\pi, 1} \sim (\frac{1}{2}, 1)$ . Assim, a renormalização de Rauzy

$(\pi, \lambda) \xrightarrow{\mathcal{R}} (\pi', \lambda'')$  é dada por (vejamos a Figura 1.9):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{se } x \in (0, \frac{1}{2}) \\ 2 - \frac{1}{x} & \text{se } x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases} .$$

De fato, para  $\pi$  do tipo 0 temos:

$$\lambda''_A = \frac{\lambda'_A}{1 - \lambda_A} = \frac{\lambda_A}{1 - \lambda_A} \Rightarrow f(x) = \frac{x}{1-x} .$$

Já para  $\pi$  do tipo 1 temos:

$$\lambda''_A = \frac{\lambda'_A}{1 - \lambda_B} = \frac{\lambda_A - \lambda_B}{1 - \lambda_B} = \frac{\lambda_A - (1 - \lambda_A)}{1 - (1 - \lambda_A)} = 2 - \frac{1}{\lambda_A} \Rightarrow f(x) = 2 - \frac{1}{x} .$$

Note que  $f(x)$  tem tangência de ordem 1 com a identidade para  $x = 0$  e  $x = 1$ .

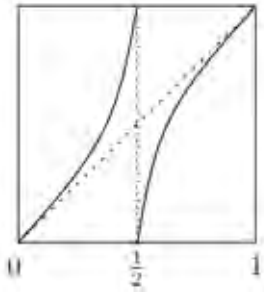


Figura 1.9:

O operador de Rauzy lança uma regra central na teoria ergódica dos intercâmbios de intervalos devido ao Teorema 1.1 de [13] que diz que o operador de Rauzy é ergódico com respeito a medida absolutamente contínua com respeito a medida  $m$ .

Um resultado de fundamental importância para o nosso propósito é:

**Teorema 1.2.** [13] Para uma permutação fixada  $\pi \in \mathfrak{C}$  e para quase todo vetor  $\lambda \in \Delta^{n-1}$ , a  $\mathcal{R}$ -órbita de  $\mathbb{E}_\lambda$  é densa em  $\mathfrak{C} \times \Delta^{n-1}$ .

*Demonstração.* Ver Teorema 1.1 de [13]. □



# Espectro Associado a Intercâmbios de Intervalos

## 2.1 Espectro de Cantor com Medida de Lebesgue Zero

Dado  $\omega \in \mathcal{A}$  e uma aplicação injetiva  $V : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $j \mapsto V(\omega_j)$ , considere o operador  $H_{V(\omega)} : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$  dado por

$$(H_{V(\omega)}\psi)_j = \psi_{j+1} + \psi_{j-1} + V(\omega_j)\psi_j, \quad j \in \mathbb{Z} \quad (2.1)$$

com o potencial  $V(\omega) := (V(\omega_j))_{j \in \mathbb{Z}}$  associado a dinâmica de transformações de intercâmbio de intervalos.

Fixe  $\pi \in G_n$ . Considere a codificação simbólica, isto é, a aplicação  $\mathcal{N}_{\mathbb{E}} : [0, 1) \rightarrow \mathcal{A}$  dada por  $\mathcal{N}_{\mathbb{E}}(x) = i$  se, e só se,  $x \in I_i, i \in \mathcal{A}$ , e escrevemos simplesmente  $\mathcal{N}$  quando  $\mathbb{E}$  estiver claro no contexto. Denote a  $\mathbb{E}_\lambda$ -órbita de  $x \in [0, 1)$  por

$$\mathcal{O}_\lambda(x) = \{\mathbb{E}_\lambda^k(x) : k \in \mathbb{Z}\}. \quad (2.2)$$

Associada a cada órbita está  $\omega_\lambda(x) \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  dada por

$$\omega_\lambda(x) := \mathcal{N}(\mathcal{O}_\lambda(x)), \quad (2.3)$$

isto é,  $\omega_\lambda(x)$  é um representante natural da  $\mathbb{E}_\lambda$ -órbita nomeando cada elemento desta órbita pelo número do intervalo que a contém. O mesmo conceito é definido para intervalos: tome  $j, k \in \mathbb{Z}$  com  $j \leq k$  e suponha que  $I \subset [0, 1)$  é um intervalo não vazio (que pode se reduzir a um ponto) tal que, para todo inteiro  $i \in [j, k]$ ,  $\mathbb{E}_I^i$  é contínuo, então a sequência

$$\mathcal{N}(\mathbb{E}^j(I))\mathcal{N}(\mathbb{E}^{j+1}(I)) \dots \mathcal{N}(\mathbb{E}^k(I))$$

será dito o  $\mathbb{E}$ -itinerário de  $I$  associado a  $[j, k]$ .

O conjunto

$$\Omega_\lambda := \overline{\{\omega_\lambda([0, 1])\}} = \overline{\{\omega_\lambda(x) : x \in [0, 1]\}} \quad (2.4)$$

está em  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ , pois  $\overline{\{\omega_\lambda([0, 1])\}} = \overline{\{\mathcal{N}(\mathcal{O}_\lambda[0, 1])\}} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ . Como  $\Omega_\lambda$  é fechado, tomando a função shift  $T : \Omega_\lambda \rightarrow \Omega_\lambda$ , dada por

$$T(\omega_n) = \omega_{n+1}, \quad \omega \in \Omega_\lambda,$$

temos que o par  $(\Omega_\lambda, T)$  é um subshift sobre o alfabeto  $\mathcal{A}$ . Por continuidade,  $\omega_\lambda$  pode ser estendida a um isomorfismo de  $([0, 1], \mathbb{E}_\lambda)$  e  $(\Omega_\lambda, T)$ , logo

$$([0, 1], \mathbb{E}_\lambda) \cong (\Omega_\lambda, T). \quad (2.5)$$

**Definição 2.1.1.** Dizemos que  $\mathbb{E}_\lambda$  é *aperiódica* se nenhuma sequência  $\omega \in \Omega_\lambda$  é periódica.

**Definição 2.1.2.** Um subshift  $(\Omega, T)$  é chamado *estritamente ergódico* se é minimal e unicamente ergódico.

Considere o alfabeto  $\mathcal{A}$  e seja  $\mathcal{W}$  o conjunto das palavras finitas no alfabeto  $\mathcal{A}$  dado por

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}(\Omega) = \{\omega(j) \dots \omega(j+n-1) : j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega\}.$$

Se  $w \in \mathcal{W}$ , denotamos por  $|w|$  seu comprimento. Sejam os cilindros

$$[w] = \{\omega \in \Omega : \omega(1) \dots \omega(|w|) = w\}$$

e, para cada medida de probabilidade invariante  $\mu$  sobre  $\Omega$ , seja

$$\eta_\mu(n) = \min\{\mu([w]) : w \in \mathcal{W}, |w| = n\}.$$

**Definição 2.1.3.** O subshift  $\Omega$  satisfaz a *condição  $\mathfrak{B}$  de Boshernitzan* se existe uma medida de probabilidade ergódica  $\mu$  sobre  $\Omega$  com

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n\eta_\mu(n) > 0,$$

ou seja,  $\Omega$  satisfaz a condição  $\mathfrak{B}$  de Boshernitzan se, e só se, existe uma medida de probabilidade ergódica  $\mu$  sobre  $\Omega$ , uma constante  $C > 0$  e uma sequência  $(l_k) \in \mathbb{N}$  com  $l_k \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$  tal que para todo  $w \in \mathcal{W}$  com  $|w| = l_k$ , para algum

$n \in \mathbb{N}$ ,

$$|w|\mu([w]) \geq C.$$

**Observação 2.1.1.** Esta condição foi mostrada por Boshernitzan [1] e implica a ergodicidade única para subshifts minimais, isto é, se  $(\Omega, T)$  é minimal e não é unicamente ergódico, então dada uma medida  $\mu$ , tem-se que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n\eta_\mu(n) = 0.$$

Com respeito a transformações em intercâmbio de intervalos, o seguinte resultado foi provado por Boshernitzan [1]:

**Teorema 2.1.** [1] *Seja  $\pi \in G_n$ . Então para quase todo  $\lambda \in \Delta^{n-1}$ , com relação a medida de Lebesgue, o subshift  $\Omega_\lambda = (\Omega_\lambda, T)$  satisfaz a condição  $\mathfrak{B}$ .*

Como a condição de Boshernitzan implica ergodicidade única,  $\mathbb{E}_\lambda$  é unicamente ergódica para quase todo  $\lambda \in \Delta^{n-1}$ . Como quase toda  $\mathbb{E}_\lambda$  satisfaz a condição de Keane (1.4), temos que para  $\pi \in G_n$ ,  $\mathbb{E}_\lambda$  é minimal para quase todo  $\lambda \in \Delta^{n-1}$ .

Com respeito ao espectro de operadores de Schrödinger discretos, segue o seguinte resultado:

**Teorema 2.2.** [6] *Seja  $\Omega$  um subshift minimal que satisfaz a condição  $\mathfrak{B}$ . Se  $\Omega$  é aperiódico, então existe um conjunto de Cantor  $\Sigma \subset \mathbb{R}$  de medida de Lebesgue zero tal que  $\sigma(H_\omega) = \Sigma$ , para todo  $\omega \in \Omega$ .*

*Demonstração.* Como  $\Omega$  é minimal, pela Proposição A.3 e pelo Teorema 9.2 de [4], temos  $\sigma(H_\omega) = \Sigma$ , para todo  $\omega \in \Omega$ , onde  $\Sigma$  é um conjunto perfeito. Como  $\Omega$  satisfaz a condição  $\mathfrak{B}$ , pelo Teorema 1 de [9], segue  $\Sigma = \{E \in \mathbb{R} : \gamma(E) = 0\}$ . Como  $\Omega$  é aperiódico, pelo Corolário A.3 do Teorema A.9 de [11], temos  $\ell(\Sigma) = 0$ , logo  $\Sigma$  não contém intervalos. Além do mais,  $\Sigma$  é um conjunto fechado, como todo espectro de um operador, e por propriedades gerais dos operadores de Schrödinger [2],  $\Sigma$  não tem pontos isolados. Portanto  $\Sigma$  é um conjunto de Cantor de medida de Lebesgue zero.  $\square$

Com estes resultados em mãos, podemos provar o seguinte Teorema:

**Teorema 2.3.** [3] *Seja  $\pi \in G_n$  e  $V$  como em (2.1). Então existe um subconjunto  $\mathcal{L} \subset \mathbb{E}(\pi)$  de medida de Lebesgue total tal que:*

- (i) *cada  $\mathbb{E}_\lambda \in \mathcal{L}$  é minimal, aperiódica e unicamente ergódica,*
- (ii) *para cada  $\mathbb{E}_\lambda \in \mathcal{L}$  o espectro de  $H_{V_\omega}$  em (2.1) é o mesmo para todo  $\omega \in \Omega_\lambda$ , e este é um conjunto de Cantor de medida de Lebesgue zero,*

(iii) para cada  $\mathbb{E}_\lambda \in \mathcal{L}$  o operador de Schrödinger correspondente (2.1) com potencial  $V_{\omega_\lambda(x)}$  tem espectro absolutamente contínuo vazio, para Lebesgue-quase todo  $x \in [0, 1)$ .

*Demonstração.* (i) De fato, pela Observação 1.2.3 combinada com a Proposição 1.1, temos que o conjunto das transformações em intercâmbio de intervalos minimais tem medida de Lebesgue total, e cada  $\mathbb{E}_\lambda$  é necessariamente aperiódica, pois se alguma  $\mathbb{E}_\lambda$  fosse periódica, então a órbita de  $x$ ,  $\mathcal{O}_\lambda(x)$ , seria finita, para todo  $x \in [0, 1)$ , e nesse caso  $\mathbb{E}_\lambda$  não seria minimal. Pelo Teorema 2.1, o conjunto das transformações em intercâmbio de intervalos que satisfaz a condição  $\mathfrak{B}$  tem medida de Lebesgue total. Defina  $\mathcal{L}$  como a interseção de tais conjuntos, então  $\mathcal{L}$  tem medida de Lebesgue total e cada  $\mathbb{E}_\lambda \in \mathcal{L}$  é unicamente ergódica, já que, pela Observação 2.1.1, a condição  $\mathfrak{B}$  implica ergodicidade única.

(ii) Como cada  $\mathbb{E}_\lambda \in \mathcal{L}$  é minimal, é fácil verificar que  $\Omega_\lambda$  é minimal, logo pela Proposição A.3 o espectro não depende de  $\omega$ . Como consequência do Teorema 2.1,  $\Omega_\lambda$  satisfaz a condição  $\mathfrak{B}$ , já que o conjunto das transformações em intercâmbio de intervalos minimais  $\mathbb{E}_\lambda$  tem medida de Lebesgue total. Como  $\Omega_\lambda$  é aperiódico, podemos aplicar o Teorema 2.2, de onde  $\sigma(H_{V_\omega}) = \Sigma \subset \mathbb{R}$  é o mesmo para todo  $\omega \in \Omega_\lambda$  e  $\Sigma$  é um conjunto de Cantor de medida de Lebesgue zero.

(iii) Pelo Teorema 1 de [9], segue que  $\Sigma = \{E \in \mathbb{R} : \gamma(E) = 0\}$ , onde  $\gamma(E)$  é o expoente de Lyapunov de  $E$ , e o Teorema 9.13 de [4], Teorema 6 de [5], Teorema A.9 e Corolário A.3 de [11] garantem  $\sigma_{ac}(H_{V_{\omega_\lambda(x)}}) = \emptyset$ .  $\square$

## 2.2 Espectro Singular Contínuo

Dada uma permutação irredutível  $\pi \in G_n$ , podemos encontrar um conjunto  $\mathcal{P} \subset \mathbb{E}(\pi)$  de medida de Lebesgue total tal que, para cada  $\mathbb{E}_\lambda \in \mathcal{P}$ , o operador de Schrödinger  $H_{V(\omega_\lambda(x))}$  correspondente não tem autovalores, para quase todo  $x \in [0, 1)$ , com relação a medida de Lebesgue. Denotaremos por  $\mathcal{F}$  a interseção dos conjuntos  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{P}$ , isto é,

$$\mathcal{F} = \mathcal{L} \cap \mathcal{P}. \quad (2.6)$$

Uma importante ferramenta para mostrar a ausência autovalores de um dado operador de Schrödinger  $H_\omega$ ,  $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ , é a versão de Delyon-Petritis [7] do argumento de Gordon, por meio de adequadas repetições locais de palavras.

**Teorema 2.4** (Delyon, Petritis). [7] *Se para um dado  $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  existe uma sequência  $n_k \rightarrow \infty$  tal que  $\omega_{n-n_k} = \omega_n = \omega_{n+n_k}$ , para todo  $1 \leq n \leq n_k$ , então o operador de Schrödinger  $H_\omega$  em (2.1) não tem autovalores.*

*Demonstração.* Fixe  $E \in \mathbb{C}$ . Seja  $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  tal que existe uma sequência  $n_k \rightarrow \infty$  satisfazendo  $\omega_{n-n_k} = \omega_n = \omega_{n+n_k}$ . Denote a matriz de transferência  $S_n(E, \omega)$  por  $S_n$ , ocultando o parâmetro  $E$  e o potencial  $\omega$ . De fato, nestas condições, temos

$$(S_{n_k})^2 = \left( \prod_{j=n_k}^1 g_j \right)^2 = g_{n_k} \cdots g_1 g_{n_k} \cdots g_1 = \prod_{j=2n_k}^1 g_j = S_{2n_k},$$

$$S_{n_k} \cdot S_{-n_k} = \prod_{j=n_k}^1 g_j \prod_{j=-n_k+1}^0 g_j^{-1} = g_{n_k} \cdots g_1 g_{1-n_k}^{-1} \cdots g_0^{-1} = \mathbb{I}.$$

Pelo Teorema de Cayley-Hamilton, para todo  $n_k$ ,

$$(S_{n_k})^2 - \text{tr}(S_{n_k}) \cdot S_{n_k} + \mathbb{I} = 0, \quad (2.7)$$

onde  $\text{tr}(\cdot)$  representa o traço da matriz e  $\mathbb{I}$  é a matriz identidade. Consideremos os dois casos:

(i)  $|\text{tr}(S_{n_k})| \leq 1$ . Aplicando (2.7) à condição inicial  $u_0$ , tem-se

$$u_{2n_k} - \text{tr}(S_{n_k}) \cdot u_{n_k} + u_0 = 0.$$

Pela desigualdade triangular, temos

$$\|u_0\| \leq \|u_{2n_k}\| + \|\text{tr}(S_{n_k})\| \cdot \|u_{n_k}\| \leq \|u_{2n_k}\| + \|u_{n_k}\|,$$

e portanto

$$\max\{\|u_{n_k}\|, \|u_{2n_k}\|\} \geq \frac{1}{2}\|u_0\|. \quad (2.8)$$

(ii)  $|\text{tr}(S_{n_k})| \geq 1$ . Aplicando (2.7) à  $u_{-n_k}$ , temos  $u_{n_k} - \text{tr}(S_{n_k}) \cdot u_0 + u_{-n_k} = 0$ , e dividindo por  $\text{tr}(S_{n_k})$ , obtemos

$$\frac{u_{n_k}}{\text{tr}(S_{n_k})} + \frac{u_{-n_k}}{\text{tr}(S_{n_k})} - u_0 = 0.$$

Pela desigualdade triangular,

$$\|u_0\| \leq \frac{1}{|\text{tr}(S_{n_k})|} (\|u_{-n_k}\| + \|u_{n_k}\|) \leq \|u_{-n_k}\| + \|u_{n_k}\|,$$

e portanto

$$\max\{\|u_{-n_k}\|, \|u_{n_k}\|\} \geq \frac{1}{2}\|u_0\|. \quad (2.9)$$

De (2.8) e (2.9) segue que, independentemente do valor de  $|tr(S_{n_k})|$ ,

$$\max\{\|u_{-n_k}\|, \|u_{n_k}\|, \|u_{2n_k}\|\} \geq \frac{1}{2}\|u_0\|,$$

e como  $E \in \mathbb{C}$  é arbitrário, obtemos que  $u_{n_k}$  ou  $u_{-n_k}$  não converge a zero, já que  $u_0 \neq 0$ , logo a solução  $\psi$  correspondente da equação  $H_\omega\psi = E\psi$  dada em (4) não é quadrado somável, ou seja, não pertence a  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . Portanto o operador  $H_\omega$  não possui autovalores.  $\square$

Dada uma permutação irredutível  $\pi \in G_n$ , a idéia é mostrar que, para quase todo ponto  $\lambda \in \Delta^{n-1}$  e  $\mathbb{E}_\lambda$ , o Teorema 2.4 se aplica a  $H_\omega$ ,  $\omega = \omega_\lambda(x)$ , com  $x$  num conjunto de medida de Lebesgue total sobre  $[0, 1)$ . Em outras palavras, vamos provar que para quase todo  $x \in [0, 1)$ , existe uma sequência  $(r_k)$  de números naturais, tal que o itinerário de  $x$  associado a  $[-r_k, 2r_k]$  seja da forma

$$w_0w_1 \dots w_{r_k} \quad w_0w_1 \dots w_{r_k} \quad w_0w_1 \dots w_{r_k}, \quad w_i \in \mathcal{A}.$$

Então vamos provar o seguinte resultado, pois assim obteremos as condições necessárias para aplicar o Teorema 2.4 e mostrarmos que  $H_{\omega_\lambda(x)}$  não possui autovalores em  $\ell^2(\mathbb{Z})$ , para quase todo  $x \in [0, 1)$ .

**Proposição 2.2.1.** [3] *Fixe uma permutação irredutível  $\pi \in G_n$ . Então para quase todo  $\lambda \in \Delta^{n-1}$ , a transformação de intercâmbio de intervalos correspondente  $\mathbb{E}_\lambda$  é minimal e, para quase todo  $x \in [0, 1)$ ,  $\omega_\lambda(x)$  satisfaz as hipóteses do Teorema 2.4 e então, o operador  $H_{\omega_\lambda(x)}$  tem espectro pontual vazio.*

Para provar esta Proposição, iremos usar o operador de renormalização de Rauzy, introduzido no capítulo anterior.

Existe uma relação entre o processo de renormalização e o fato de  $\mathbb{E}_\lambda$  ser minimal implicar  $\Omega_\lambda$  ser minimal. Seja  $\mathbb{E} : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$  uma transformação de intercâmbio de intervalos e seja  $\mathbb{E}_J$  a aplicação induzida de  $\mathbb{E}$  sobre  $J = [a, b) \subset [0, 1)$ . Suponha que  $I \subset J$  é um intervalo contínuo de  $\mathbb{E}_J$  e que, para algum  $x \in I$ , tem-se que  $\mathbb{E}_J(x) \in I$  e  $\mathbb{E}_J^{-1}(x) \in I$ , isto é,  $x \in \mathbb{E}_J(I)$ . Se  $r$  é o tempo de retorno de  $I$  para  $J$ , o itinerário de todo ponto em  $I$  associado a  $[0, r]$  é dado pela palavra

$$w_0w_1 \dots w_r := \mathcal{N}(I)\mathcal{N}(\mathbb{E}(I))\mathcal{N}(\mathbb{E}^2(I)) \dots \mathcal{N}(\mathbb{E}^r(I)).$$

Como  $\mathbb{E}_J(x) \in I$  e  $\mathbb{E}_J^{-1}(x) \in I$ , o itinerário de  $x$  associado a  $[-r, 2r]$  será dado pela palavra

$$w_0w_1 \dots w_r \quad w_0w_1 \dots w_r \quad w_0w_1 \dots w_r. \tag{2.10}$$

Um ponto  $x \in [a, b)$  com esta propriedade será chamado um *ponto candidato no intervalo*  $[a, b)$  para o comprimento  $r$ .  $\mathcal{C}_N([a, b))$  será o conjunto dos pontos candidatos em  $[a, b)$  para o comprimento  $r \leq N$ .

**Observação 2.2.1.** Se existe uma sequência encaixada de contração para o ponto  $x$ ,

$$J_1 \supset J_2 \supset \cdots \supset J_k \supset J_{k+1} \supset \cdots$$

e tal que  $x$  é um ponto candidato em cada  $J_k$  para o comprimento  $r_k$ , onde  $J_k = [a_k, b_k)$  e  $r_k$  é o tempo de retorno de  $I_k \subset J_k$  para  $J_k$ , com  $I_k$  intervalo contínuo de  $\mathbb{E}_{J_k}$ , então  $\mathbb{E}_{J_k}(I_k) = \mathbb{E}^{r_k+1}(I_k)$ , e tomando  $I_{k+1} \subset I_k$  intervalo contínuo de  $\mathbb{E}_{J_{k+1}}$ , temos que  $\mathbb{E}_{J_{k+1}}(I_{k+1}) = \mathbb{E}^{r_{k+1}+1}(I_{k+1})$ . De fato,  $r_{k+1} \geq r_k$ , para todo  $k$ , já que, para todo  $k$ ,  $I_{k+1} \subset J_k$  pode cair primeiro em  $J_k$  e depois em  $J_{k+1}$ , e o contrário não pode acontecer, pois  $J_{k+1} \subset J_k$ , logo  $(r_k)$  é uma sequência crescente, e então necessariamente  $r_k \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$ . O itinerário de  $x$  associado a esta órbita completa,  $\omega_{\mathbb{E}}(x) = \mathcal{N}(\mathcal{O}_{\mathbb{E}}(x))$ , é dado por uma sequência que satisfaz o fato de  $\mathbb{E}_\lambda$  ser minimal implicar  $\Omega_\lambda$  ser minimal, isto é, é uma sequência densa em  $\Omega_{\mathbb{E}}$  se  $\mathbb{E}$  for minimal.

A partir de agora,  $\pi_n$  denotará uma permutação em  $G_n$  dada por

$$\pi_n(j) = n - j + 1, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Denotaremos por  $|A|$  a medida de Lebesgue de um conjunto mensurável  $A \subset \mathbb{R}$ .

**Lema 2.2.1.** [3] *Seja  $\mathbb{E} : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$  uma transformação de intercâmbio de intervalos e seja  $\mathbb{E}_J$  a aplicação induzida de  $\mathbb{E}$  sobre o intervalo  $J = [a, b) \subset [0, 1)$ . Suponha que  $\mathbb{E}_J$  está associada com a permutação  $\pi_n$  e que o primeiro intervalo contínuo de  $\mathbb{E}_J$  é da forma  $I_1 = [a, b - \delta)$ , onde  $0 < \delta < \frac{b-a}{4}$ . Seja  $r_1$  o tempo de retorno de  $I_1$  para  $J$ . Então a medida de Lebesgue de  $\mathcal{C}_{r_1}([a, b))$  satisfaz*

$$\frac{|\mathcal{C}_{r_1}([a, b))|}{b-a} \geq 1 - \frac{3\delta}{b-a}. \quad (2.11)$$

*Demonstração.*  $\mathbb{E}_J$  restrito a  $I_1$  será da forma  $\mathbb{E}_J(x) = x + \delta$ , pois  $\pi_n(1) = n$ . Note que o intervalo  $L := [a + \delta, b - 2\delta)$  é formado de pontos candidatos de comprimento  $r_1$ . Realmente,  $K := [a + \delta, b)$  é o último intervalo contínuo de  $\mathbb{E}_J^{-1}$  e  $\mathbb{E}_J^{-1}(x) = x - \delta$ ,  $x \in K$ . Observe que  $L \subset I_1$  e  $L \subset K$ . Então

$$\mathbb{E}_J(L) = [a + 2\delta, b - \delta) \subset I_1 \quad \text{e} \quad \mathbb{E}_J^{-1}(L) = [a, b - 3\delta) \subset I_1.$$

Portanto  $|\mathcal{C}_{r_1}([a, b))| \geq |L| = (b-a) - 3\delta$ . □

**Exemplo 2.2.1.** Seja  $q > 1$  um número natural e considere as partições  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  e  $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_n)$  de  $[0, 1)$ :

$$a_k = \begin{cases} 1 - q^{-k}, & 0 \leq k < n, \\ 1, & k = n \end{cases}, \quad b_k = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ q^{-(n-k)}, & 0 < k < n, \\ 1, & k = n. \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{a} := (0, 1 - q^{-1}, 1 - q^{-2}, \dots, 1 - q^{-(n-1)}, 1), \quad \mathbf{b} := (0, q^{-(n-1)}, q^{-(n-2)}, \dots, q^{-1}, 1).$$

Seja  $F_q$  a transformação de intercâmbio de intervalos associada a  $(\pi_n, \mathbf{a})$ . Então  $F_q^{-1}$  é a transformação de intercâmbio de intervalos associada a  $(\pi_n, \mathbf{b})$ . Sejam  $I_k := [a_{k-1}, a_k)$  e  $J_k := [b_{k-1}, b_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , os intervalos contínuos de  $F_q$  e  $F_q^{-1}$  respectivamente. Veremos que  $F_q$  tem a propriedade de que cada aplicação induzida sobre  $I_k$  satisfaz as condições do Lema 2.2.1. Note que  $F_q$  e  $F_q^{-1}$  são dados explicitamente pelas fórmulas

$$\begin{aligned} F_q(x) &= \begin{cases} x - a_{k-1} + b_{n-k} & x \in I_k, 1 < k < n, \\ x - a_{n-1} & x \in I_n, \end{cases} \\ F_q^{-1}(x) &= \begin{cases} x + a_{n-k} - b_{k-1} & x \in J_k, 1 < k < n, \\ x - a_1 & x \in J_n. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.13)$$

**Lema 2.2.2.** [3] *Seja  $F_{q,k}$  a aplicação induzida de  $F_q$  sobre  $I_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Então se  $\mathcal{C}_k$  é o conjunto dos pontos candidatos em  $I_k$ ,*

$$\frac{|\mathcal{C}_k|}{|I_k|} \geq 1 - \frac{3}{q-1}.$$

*Demonstração.* São válidos os seguintes fatos:

**Fato 1.** A aplicação induzida de  $F_q$  sobre o intervalo  $[a_k, 1)$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ , é dada pela permutação  $\pi_{n-k+1}$ , que leva o primeiro subintervalo de  $[a_k, 1)$  no último e o último no primeiro, isto é,  $\pi_{n-k+1}(1) = n - k + 1$  e  $\pi_{n-k+1}(n - k + 1) = 1$ , logo para  $1 \leq j \leq n - k + 1$ ,

$$\pi_{n-k+1}(j) = n - k + 1 - j + 1 = n - k - j + 2,$$

e pela partição de  $[a_k, 1)$ ,

$$(a_k, a_{k+1}, \dots, a_{n-1}, a_n),$$

que é induzida por  $F_q^2$ , pois o tempo máximo de retorno de  $F_q$  ao intervalo  $[a_k, 1)$  é 1, e para  $j = 1, \dots, n$ ,  $F_q(I_j) = I_{n-j+1}$  e  $F_q(I_{n-j+1}) = I_j$ . Em particular, para cada  $k+1 \leq j \leq n$ ,  $F_q^2$  aplicado a  $I_j$  é o próprio  $I_j$ .



**Fato 2.** A aplicação induzida de  $F_q$  sobre  $I_k = [a_{k-1}, a_k)$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ , está associada ao par  $(\pi_{n-k+1}, \mathbf{c}_k)$ , onde  $\mathbf{c}_k$  é a partição de  $I_k$ :

$$\mathbf{c}_k = (a_{k-1}, a_k - q^{-k}, a_k - q^{-(k+1)}, \dots, a_k - q^{-(n-1)}, a_k).$$

Note que  $a_k - q^{-k} \in [a_{k-1}, a_k)$ , para  $k = 1, \dots, n-1$ , pois  $q \geq 2$  implica

$$q^{-k} \leq \frac{q^{-k}q}{2} \Leftrightarrow a_k - q^{-k} \geq a_{k-1}.$$

Em particular, como  $\pi_{n-k+1}$  leva o primeiro subintervalo de  $[a_{k-1}, a_k)$  no último subintervalo deste, temos que  $F_q([a_{k-1}, a_k - q^{-k})) = [a_{k-1} + q^{-k}, a_k)$ . Logo,  $F_{q,k}(x) = x + q^{-k}$  para cada  $x$  no primeiro subintervalo contínuo  $I_{k,1}$ .

**Fato 3.** A aplicação induzida de  $F_q$  sobre o primeiro intervalo  $I_1 = [0, 1 - q^{-1}) = [a_0, a_1)$  é dada pelo par  $(\pi_n, \mathbf{c}_1)$  onde

$$\mathbf{c}_1 = (0, a_1 - q^{-1}, a_1 - q^{-2}, \dots, a_1 - q^{-(n-1)}, a_1).$$

**Fato 4.** A aplicação induzida de  $F_q$  sobre o último intervalo  $I_n = [a_{n-1}, a_n)$  é a aplicação identidade, pois  $I_n = [a_{n-1}, a_n) = [a_n - q^{-(n-1)}, a_n)$ , isto é, o intervalo contém apenas um subintervalo, logo a permutação é a identidade e assim,  $F_{q,n}$  é a aplicação identidade sobre  $I_n$ . Em particular,  $F_{q,n}(I_n) = I_n$ , logo  $F_{q,n}^{-1}(I_n) = I_n$ , e portanto o último intervalo é todo formado por pontos candidatos.

**Fato 5.**  $F_{q,k}$  restrito ao primeiro intervalo contínuo  $I_{k,1} := [a_{k-1}, a_k - q^{-k})$  é dado por  $F_{q,k}(x) = x + q^{-k}$ . Então o Lema 2.2.1 aplicado a cada aplicação  $F_{q,k}$ ,  $1 \leq k < n$  (com  $\delta \leq q^{-k}$ ) e portanto se  $\mathcal{C}_k$  é o conjunto dos pontos candidatos em  $I_k$ , então

$$\frac{|\mathcal{C}_k|}{|I_k|} \geq 1 - \frac{3\delta}{|I_k|} \geq 1 - \frac{3q^{-k}}{(q-1)q^{-k}} = 1 - \frac{3}{q-1},$$

já que  $|I_k| = a_k - a_{k-1} = 1 - q^{-k} - (1 - q^{-(k-1)}) = q^{-(k-1)} - q^{-k} = (q-1)q^{-k}$ .

Realmente, deste modo o intervalo

$$L_k := \left[ a_{k-1} + \frac{1}{q^k}, a_k - \frac{2}{q^k} \right) = \left[ 1 - \frac{1}{q^{k-1}} + \frac{1}{q^k}, 1 - \frac{1}{q^k} - \frac{2}{q^k} \right) \subset I_{k,1}$$

é formado de pontos candidatos, pois

$$\mathbb{E}(L_k) = \left[ a_{k-1} + \frac{2}{q^k}, a_k - \frac{1}{q^k} \right) \subset I_{k,1} \quad \text{e} \quad \mathbb{E}^{-1}(L_k) = \left[ a_{k-1}, a_k - \frac{3}{q^k} \right) \subset I_{k,1}.$$

O comprimento de  $L_k$  é dado por

$$|L_k| = 1 - \frac{1}{q^k} - \frac{2}{q^k} - \left(1 - \frac{1}{q^{k-1}} + \frac{1}{q^k}\right) = q^{-(k-1)} - q^{-k} - 3q^{-k} = |I_k| - 3q^{-k}.$$

Assim,  $|C_k| \geq |L| = |I_k| - \frac{3|I_k|}{q-1}$ , de onde  $\frac{|C_k|}{|I_k|} \geq 1 - \frac{3}{q-1}$ . □

**Definição 2.2.1.** Duas transformações de intercâmbio de intervalos  $\mathbb{E}_1 : [a, b) \rightarrow [a, b)$  e  $\mathbb{E}_2 : [c, d) \rightarrow [c, d)$  são *equivalentes* se elas são conjugadas por uma translação na reta real, mais precisamente,

$$\mathbb{E}_2(x + c - a) = \mathbb{E}_1(x) + c - a, \quad \forall x \in [a, b).$$

Em particular, devemos ter  $b - a = d - c$ . Em muitos casos identificamos uma transformação de intercâmbio de intervalos com o modelo equivalente definido sobre  $[0, b - a)$ .

**Lema 2.2.3.** [3] *Seja  $\mathbb{E} : [a, b) \rightarrow [a, b)$  uma transformação de intercâmbio de intervalos e  $J := [c, d) \subset [a, b)$ . Se  $\mathbb{E}(J)$  é também um intervalo, digamos  $K$ , então a aplicação induzida de  $\mathbb{E}$  sobre  $J$ ,  $\mathbb{E}_J$ , e  $K$ ,  $\mathbb{E}_K$ , são equivalentes.*

*Demonstração.* Como  $\mathbb{E}(J)$  é um intervalo, existe um número  $\vartheta$  tal que, para todo  $x \in J$ ,  $\mathbb{E}(x) = x + \vartheta$ . Coloque  $K = [\mathbb{E}(c), \mathbb{E}(d))$  e seja  $J_k \subset J$  um intervalo contínuo de  $\mathbb{E}_J$  com  $r_k$  sendo o tempo de retorno de  $J_k$  para  $J$ , o que significa que

$$\mathbb{E}(J_k), \mathbb{E}^2(J_k), \dots, \mathbb{E}^{r_k}(J_k)$$

são todos disjuntos de  $J$  e  $\mathbb{E}^{r_k+1}(J_k)$  está completamente contido em  $J$ . Por definição,  $\mathbb{E}_J(J_k) = \mathbb{E}^{r_k+1}(J_k)$ . Observe que

$$\mathbb{E}^{r_k+2}(J_k) = \mathbb{E}(\mathbb{E}^{r_k+1}(J_k)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}_J(J_k)) = \mathbb{E}_J(J_k) + \vartheta$$

está contido em  $K$ . Seja  $K_k := \mathbb{E}(J_k) = J_k + \vartheta \subset K$ . Os sucessivos iterados de  $K_k$  por  $\mathbb{E}$  são

$$\mathbb{E}^2(J_k), \mathbb{E}^3(J_k), \dots, \mathbb{E}^{r_k}(J_k), \mathbb{E}^{r_k+1}(J_k)$$

e estes intervalos são disjuntos de  $K$ , considerando que

$$\mathbb{E}^{r_k+2}(J_k) = \mathbb{E}_J(J_k) + \vartheta \subset K,$$

isto é,  $K_k$  é um intervalo contínuo de  $\mathbb{E}_K$  com o mesmo tempo de retorno e, além

disso,

$$\mathbb{E}_K(K_k) = \mathbb{E}^{r_k+2}(J_k) = \mathbb{E}(\mathbb{E}^{r_k+1}(J_k)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}_J(J_k)) = \mathbb{E}_J(K_k - \mathfrak{d}) + \mathfrak{d}.$$

Como isso acontece para todo intervalo contínuo de  $\mathbb{E}_J$  e  $\mathbb{E}_K$ , estas aplicações são equivalentes.  $\square$

*Demonstração.* (**Proposição 2.2.1**) Seja uma permutação irreduzível  $\pi$  e seja  $0 < \varepsilon < 1$ . Seja  $(q_m)_{m \geq 1}$  uma sequência crescente de números naturais tal que

$$\frac{3}{q_m - 1} < \frac{\varepsilon}{2^m}, \quad m \geq 1.$$

Considere transformações de intercâmbio de intervalos  $F_{q_m}$  como as definidas acima, e seja

$$\mathbf{a}_m = (a_0^m, a_1^m, \dots, a_n^m)$$

a partição correspondente de  $[0, 1)$  associada a  $F_{q_m}$  como em (2.12). Note que qualquer transformação de intercâmbio de intervalos que é suficientemente próxima a  $F_{q_m}$  goza da propriedade dada no Lema 2.2.2, isto é, existe um número  $\delta_m > 0$  tal que se  $\mathbb{E}_c$ , a transformação de intercâmbio de intervalos associada a  $(\pi, \mathbf{c})$  e a partição  $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_n)$  em  $\Lambda_n$  é tal que

$$\max\{|c_i - a_i^m| : 1 \leq i \leq n\} < \delta_m, \quad (2.14)$$

então o conjunto dos pontos candidatos  $\mathcal{C}_{c,k}$  em cada  $I_k := [c_{k-1}, c_k)$ ,  $1 \leq k \leq n$  para  $\mathbb{E}_c$  satisfaz

$$\frac{|\mathcal{C}_{c,k}|}{|I_k|} \geq 1 - \frac{3}{q_m - 1} > 1 - \frac{\varepsilon}{2^m}. \quad (2.15)$$

De fato, tomando

$$0 < \delta_m \leq \left| \frac{4|I_k|q_m^{-k} - |I_k|^2}{2|I_k|} \right|,$$

temos dois casos,

$$\frac{4|I_k|q_m^{-k} - |I_k|^2}{2|I_k|} \geq \delta_m \quad \text{ou} \quad \frac{4|I_k|q_m^{-k} - |I_k|^2}{2|I_k|} \leq -\delta_m.$$

No primeiro caso, temos

$$\begin{aligned} \frac{4|I_k|q_m^{-k} - |I_k|^2}{2|I_k|} \geq \delta_m &\Leftrightarrow |I_k|^2 + 2|I_k|\delta_m \leq 4|I_k|q_m^{-k} \\ &\Leftrightarrow \frac{|I_k|}{4} \leq \frac{|I_k|q_m^{-k}}{|I_k| + 2\delta_m}, \end{aligned}$$

e no segundo caso,

$$\begin{aligned}
\frac{4|I_k|q_m^{-k} - |I_k|^2}{2|I_k|} \leq -\delta_m &\Leftrightarrow |I_k|^2 - 2|I_k|\delta_m \geq 4|I_k|q_m^{-k} \\
&\Leftrightarrow |I_k|^2 + 2|I_k|\delta_m \geq |I_k|^2 - 2|I_k|\delta_m \geq 4|I_k|q_m^{-k} \\
&\Leftrightarrow -(|I_k|^2 + 2|I_k|\delta_m) \leq -4|I_k|q_m^{-k} \\
&\Leftrightarrow -\frac{|I_k|}{4} \leq -\frac{|I_k|q_m^{-k}}{|I_k| + 2\delta_m} \leq \frac{|I_k|q_m^{-k}}{|I_k| + 2\delta_m} \\
&\Leftrightarrow \frac{|I_k|}{4} \geq -\frac{|I_k|q_m^{-k}}{|I_k| + 2\delta_m}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left| \frac{|I_k|}{4} \right| \leq \frac{|I_k|q_m^{-k}}{|I_k| + 2\delta_m}. \quad (2.16)$$

Como  $|I_k| \geq |I_k^a| - 2\delta_m$ , com  $I_k^a = [a_{k-1}^m, a_k^m]$ , pelo Lema 2.2.1 e por (2.16), temos

$$0 < \delta < \frac{|I_k|}{4} \leq \left| \frac{|I_k|}{4} \right| \leq \frac{|I_k|q_m^{-k}}{|I_k| + 2\delta_m},$$

daí

$$\frac{\delta}{|I_k|} < \frac{q_m^{-k}}{|I_k| + 2\delta_m}.$$

Assim

$$\begin{aligned}
\frac{|C_{c,k}|}{|I_k|} &\geq 1 - \frac{3\delta}{|I_k|} \\
&\geq 1 - \frac{3q_m^{-k}}{|I_k| + 2\delta_m} \\
&\geq 1 - \frac{3q_m^{-k}}{|I_k^a|} \\
&= 1 - \frac{3q_m^{-k}}{(q_m - 1)q_m^{-k}} \\
&= 1 - \frac{3}{q_m - 1} \\
&\geq 1 - \frac{\varepsilon}{2^m}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{|C_{c,k}|}{|I_k|} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2^m}. \quad (2.17)$$

Seja  $\pi \in G_n$  uma permutação irreduzível. Pelo Teorema 1.2, para quase todo  $\lambda \in \Delta^{n-1}$ , a órbita de Rauzy de  $\mathbb{E}_\lambda = (\pi, \lambda)$  é densa em  $\mathfrak{C} \times \Delta^{n-1}$ . Desta forma existe

uma sequência encaixada de intervalos

$$J_1 \supset J_2 \supset \cdots \supset J_m \supset \cdots \quad (2.18)$$

dada pelo processo de indução de Rauzy, e uma sequência crescente  $(n_m)_{m \geq 1}$  de números naturais tal que a aplicação induzida  $\mathbb{E}_m := \mathcal{R}^{n_m}(\mathbb{E})$  de  $(\pi, \lambda)$  sobre  $J_m$  satisfaz (2.14).

Então, se  $I_1^m, I_2^m, \dots, I_n^m$  são intervalos contínuos de  $\mathbb{E}_m$  em  $J_m$  e  $r_k^m$  é o tempo de retorno de  $I_k^m$  para  $J_m$ ,  $1 \leq k \leq n$ , então, por (2.17), o conjunto dos pontos candidatos em  $I_k^m$  para o comprimento  $r_k^m$  tem medida de Lebesgue dada por

$$|\mathcal{C}_{r_k^m}(I_k^m)| \geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2^m}\right) \cdot |I_k^m|. \quad (2.19)$$

Seja  $\mathbb{E}_{m,k}$  a aplicação induzida de  $\mathbb{E}_m$  sobre  $I_k^m$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Portanto o conjunto dos pontos candidatos em  $J_m$  para o comprimento  $N_m$  com

$$N_m = \max\{r_1^m, \dots, r_n^m\}, \quad (2.20)$$

denotado aqui por  $\mathcal{C}_{N_m}(J_m)$ , satisfaz

$$\mathcal{C}_{N_m}(J_m) \supset \bigcup_{k=1}^n \mathcal{C}_{r_k^m}(I_k^m), \quad (2.21)$$

onde a união é disjunta, pois se  $x \in \bigcup_{k=1}^n \mathcal{C}_{r_k^m}(I_k^m)$  então  $x \in \mathcal{C}_{r_k^m}(I_k^m)$  para algum  $1 \leq k \leq n$ , logo para  $I \subset I_k^m$  intervalo contínuo de  $\mathbb{E}_{m,k}$ ,  $x \in I$ ,  $\mathbb{E}_{m,k}^{r_k^m+1}(x) \in I$  e  $\mathbb{E}_m^{-(r_k^m+1)}(x) \in I$  para algum  $1 \leq k \leq n$ . Seja  $J \in J_m$  intervalo contínuo de  $\mathbb{E}_m$  com  $I \subset J$ , então  $J \subset I_k^m$ , para algum  $1 \leq k \leq n$ . Como  $x \in J$ , temos que

$$\mathbb{E}_{m,k}(x) = \mathbb{E}_m^{(r_k^m+1)}(x) = \left(\mathbb{E}^{(r_m+1)}\right)^{(r_k^m+1)}(x) \in I,$$

logo

$$\mathbb{E}^{(r_m+1)}(x) \in \mathbb{E}^{-(r_k^m+1)}(I) \subset I \subset J,$$

e

$$\mathbb{E}_{m,k}^{-1}(x) = \mathbb{E}_m^{-(r_k^m+1)}(x) = \left(\mathbb{E}^{-(r_m+1)}\right)^{(r_k^m+1)}(x) \in I,$$

assim

$$\mathbb{E}^{-(r_m+1)}(x) \in \mathbb{E}^{-(r_k^m+1)}(I) \subset I \subset J.$$

Portanto temos que  $x \in J$ ,  $\mathbb{E}_m(x) \in J$  e  $\mathbb{E}_m^{-1}(x) \in J$ . Daí,  $x \in \mathcal{C}_{N_m}(J_m)$ .

De (2.21), concluímos

$$|\mathcal{C}_{N_m}(J_m)| \geq \left| \bigcup_{k=1}^n \mathcal{C}_{r_k^m}(I_k^m) \right| = \sum_{k=1}^n |\mathcal{C}_{r_k^m}(I_k^m)|. \quad (2.22)$$

Por outro lado, como  $J_m = \bigcup_{k=1}^n I_k^m$ , logo

$$|J_m| = \left| \bigcup_{k=1}^n I_k^m \right| = \sum_{k=1}^n |I_k^m|. \quad (2.23)$$

Assim, por (2.22), (2.19) e (2.23) temos

$$|\mathcal{C}_{N_m}(J_m)| \geq \sum_{k=1}^n |\mathcal{C}_{r_k^m}(I_k^m)| \geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2^m}\right) \sum_{k=1}^n |I_k^m| = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2^m}\right) \cdot |J_m|.$$

Portanto,

$$|\mathcal{C}_{N_m}(J_m)| \geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2^m}\right) \cdot |J_m|. \quad (2.24)$$

**Observação 2.2.2.** Pela observação 2.2.1, temos que se  $x$  é ponto candidato de  $J_m$  com tempo de retorno  $r_k^m$  em (2.18), para todo  $m \geq 1$ , então  $r_k^m \rightarrow \infty$  quando  $m \rightarrow \infty$ , e por (2.20),  $N_m \rightarrow \infty$  quando  $m \rightarrow \infty$ . Assim se  $x$  é ponto candidato de todo  $J_m$  para o respectivo comprimento  $N_m$ , temos  $x \in \mathcal{C}_{N_m}(J_m)$ , para todo  $m \geq 1$ , isto é,

$$x \in \bigcap_{m \geq 1} \mathcal{C}_{N_m}(J_m). \quad (2.25)$$

Pelo Lema 2.2.3, a aplicação induzida de  $\mathbb{E}_\lambda = (\pi, \lambda)$  sobre cada intervalo  $\mathbb{E}^j(I_k^m)$ ,  $\mathbb{E}_{\mathbb{E}^j}$ ,  $1 \leq j \leq r_k^m$  é equivalente a  $\mathbb{E}_{m,k}$ , já que  $\mathbb{E}^j(I_k^m)$  é um intervalo,  $1 \leq j \leq r_k^m$ , isto é, se  $I_k^m = [c_{k-1}^m, c_k^m]$  e  $\mathbb{E}^j(I_k^m) = [\mathbb{E}^j(c_{k-1}^m), \mathbb{E}^j(c_k^m)]$  então para  $1 \leq j \leq r_k^m$ ,

$$\mathbb{E}_{m,k}(x - \mathbb{E}^j(c_{k-1}^m) + c_{k-1}^m) = \mathbb{E}_{\mathbb{E}^j}(x) - \mathbb{E}^j(c_{k-1}^m) + c_{k-1}^m, \quad x \in \mathbb{E}^j(I_k^m), \quad (2.26)$$

o que implica que, para cada  $0 \leq j \leq r_k^m$ ,  $x \in \mathbb{E}^j(I_k^m)$  é um ponto candidato de  $\mathbb{E}^j(I_k^m)$  para o comprimento  $r_k^m$  se o seu transladado  $(x - \mathbb{E}^j(c_{k-1}^m) + c_{k-1}^m) \in I_k^m$  é um ponto candidato de  $I_k^m$  para o mesmo comprimento  $r_k^m$ , logo para todo  $0 \leq j \leq r_k^m$ ,

$$|\mathcal{C}_{r_k^m}(\mathbb{E}^j(I_k^m))| = |\mathcal{C}_{r_k^m}(I_k^m)|. \quad (2.27)$$

Pela Proposição 1.1.1, temos que  $\mathbb{E}^i(I_k^m) \cap \mathbb{E}^l(I_k^m) = \emptyset$  para  $i \neq l$ . Por (2.21), vale

$$\mathcal{C}_{r_k^m} \left( \bigcup_{j=1}^{r_k^m} \mathbb{E}^j(I_k^m) \right) \supset \bigcup_{j=1}^{r_k^m} \mathcal{C}_{r_k^m}(\mathbb{E}^j(I_k^m)), \quad (2.28)$$

onde a união é disjunta, pois se

$$\mathcal{C}_{r_k^m}(\mathbb{E}^i(I_k^m)) \cap \mathcal{C}_{r_k^m}(\mathbb{E}^l(I_k^m)) \neq \emptyset,$$

para  $i \neq l$ , então existe  $x$  tal que  $x \in \mathcal{C}_{r_k^m}(\mathbb{E}^i(I_k^m))$  e  $x \in \mathcal{C}_{r_k^m}(\mathbb{E}^l(I_k^m))$ , daí existe  $J_i \subset \mathbb{E}^i(I_k^m)$  intervalo contínuo de  $\mathbb{E}_{\mathbb{E}^i}$  com  $x \in J_i$  tal que  $\mathbb{E}_{\mathbb{E}^i}(x) \in J_i$  e  $\mathbb{E}_{\mathbb{E}^i}^{-1}(x) \in J_i$ , e existe  $J_l \subset \mathbb{E}^l(I_k^m)$  intervalo contínuo de  $\mathbb{E}_{\mathbb{E}^l}$  com  $x \in J_l$ , tal que  $\mathbb{E}_{\mathbb{E}^l}(x) \in J_l$  e  $\mathbb{E}_{\mathbb{E}^l}^{-1}(x) \in J_l$ . Logo  $x \in J_i \cap J_l$ , e daí  $x \in \mathbb{E}^i(I_k^m) \cap \mathbb{E}^l(I_k^m)$ , então  $\mathbb{E}^i(I_k^m) \cap \mathbb{E}^l(I_k^m) \neq \emptyset$ . Contradição. Por (2.28) temos

$$\left| \mathcal{C}_{r_k^m} \left( \bigcup_{j=1}^{r_k^m} \mathbb{E}^j(I_k^m) \right) \right| \geq \left| \bigcup_{j=1}^{r_k^m} \mathcal{C}_{r_k^m}(\mathbb{E}^j(I_k^m)) \right| = \sum_{j=1}^{r_k^m} |\mathcal{C}_{r_k^m}(\mathbb{E}^j(I_k^m))|. \quad (2.29)$$

Por (2.27), segue

$$\sum_{j=1}^{r_k^m} |\mathcal{C}_{r_k^m}(\mathbb{E}^j(I_k^m))| = \sum_{j=1}^{r_k^m} |\mathcal{C}_{r_k^m}(I_k^m)| = r_k^m \cdot |\mathcal{C}_{r_k^m}(I_k^m)|. \quad (2.30)$$

Para cada  $0 \leq j \leq r_k^m$ , temos  $|I_k^m| = |\mathbb{E}^j(I_k^m)|$ , já que  $\mathbb{E}^j(I_k^m)$  é  $I_k^m$  transladado, logo

$$\sum_{j=1}^{r_k^m} |\mathbb{E}^j(I_k^m)| = \sum_{j=1}^{r_k^m} |I_k^m| = r_k^m \cdot |I_k^m|. \quad (2.31)$$

Assim, por (2.29), (2.30), (2.19) e (2.31) temos

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{C}_{r_k^m} \left( \bigcup_{j=1}^{r_k^m} \mathbb{E}^j(I_k^m) \right) \right| &\geq r_k^m \cdot |\mathcal{C}_{r_k^m}(I_k^m)| \\ &\geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2^m}\right) \cdot r_k^m \cdot |I_k^m| \\ &= \left(1 - \frac{\varepsilon}{2^m}\right) \cdot \sum_{j=1}^{r_k^m} |\mathbb{E}^j(I_k^m)| \\ &= \left(1 - \frac{\varepsilon}{2^m}\right) \cdot \left| \bigcup_{j=1}^{r_k^m} \mathbb{E}^j(I_k^m) \right|, \end{aligned}$$

ou seja, a medida de Lebesgue do conjunto dos pontos candidatos para o comprimento  $r_k^m$  na união

$$\bigcup_{j=1}^{r_k^m} \mathbb{E}^j(I_k^m)$$

satisfaz

$$\left| \mathcal{C}_{r_k^m} \left( \bigcup_{j=1}^{r_k^m} \mathbb{E}^j(I_k^m) \right) \right| \geq \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2^m} \right) \cdot \left| \bigcup_{j=1}^{r_k^m} \mathbb{E}^j(I_k^m) \right|. \quad (2.32)$$

Usando (1.6), temos

$$[0, 1) = \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{j=1}^{r_k^m} \mathbb{E}^j(I_k^m), \quad (2.33)$$

e por motivos análogos aos de (2.21), o conjunto de pontos candidatos em  $[0, 1)$  para o comprimento  $r \leq N_m$  com  $N_m = \max\{r_1^m, \dots, r_n^m\}$ , denotado por  $\mathcal{C}_{N_m}([0, 1))$ , satisfaz

$$\mathcal{C}_{N_m}([0, 1)) = \mathcal{C}_{N_m} \left( \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{j=1}^{r_k^m} \mathbb{E}^j(I_k^m) \right) \supset \bigcup_{k=1}^n \mathcal{C}_{r_k^m} \left( \bigcup_{j=1}^{r_k^m} \mathbb{E}^j(I_k^m) \right). \quad (2.34)$$

De fato, para  $l \neq i$ , com  $1 \leq l, i \leq n$ , temos

$$\mathcal{C}_{r_l^m} \left( \bigcup_{j=1}^{r_l^m} \mathbb{E}^j(I_l^m) \right) \cap \mathcal{C}_{r_i^m} \left( \bigcup_{j=1}^{r_i^m} \mathbb{E}^j(I_i^m) \right) = \emptyset, \quad (2.35)$$

pois do contrário, existe

$$x \in \mathcal{C}_{r_l^m} \left( \bigcup_{j=1}^{r_l^m} \mathbb{E}^j(I_l^m) \right) \cap \mathcal{C}_{r_i^m} \left( \bigcup_{j=1}^{r_i^m} \mathbb{E}^j(I_i^m) \right),$$

em particular, pela definição de ponto candidato,

$$x \in \left( \bigcup_{j=1}^{r_l^m} \mathbb{E}^j(I_l^m) \right) \cap \left( \bigcup_{j=1}^{r_i^m} \mathbb{E}^j(I_i^m) \right),$$

logo existem  $d > t$  com  $1 \leq d \leq r_l^m$  e  $1 \leq t \leq r_i^m$  tais que  $x \in \mathbb{E}^d(I_l^m) \cap \mathbb{E}^t(I_i^m)$ , daí  $\mathbb{E}^d(I_l^m) \cap \mathbb{E}^t(I_i^m) \neq \emptyset$ , logo  $\mathbb{E}^{d-t}(I_l^m) \cap I_i^m \neq \emptyset$ , em particular  $\mathbb{E}^{d-t}(I_l^m) \cap J_m \neq \emptyset$ , então  $d - t > r_l^m$ , já que o primeiro retorno de  $I_l^m$  à  $J_m$  pela órbita de  $\mathbb{E}$  tem tempo  $r_l^m + 1$ . Mas  $d - t \leq r_l^m$ , e temos então uma contradição. Por (2.34), temos

$$|\mathcal{C}_{N_m}([0, 1))| \geq \left| \bigcup_{k=1}^n \mathcal{C}_{r_k^m} \left( \bigcup_{j=1}^{r_k^m} \mathbb{E}^j(I_k^m) \right) \right|. \quad (2.36)$$



De (2.36), (2.35), (2.32) e (2.33), segue

$$\begin{aligned}
|\mathcal{C}_{N_m}([0, 1])| &\geq \left| \bigcup_{k=1}^n \mathcal{C}_{r_k^m} \left( \bigcup_{j=1}^{r_k^m} \mathbb{E}^j(I_k^m) \right) \right| \\
&= \sum_{k=1}^n \left| \mathcal{C}_{r_k^m} \left( \bigcup_{j=1}^{r_k^m} \mathbb{E}^j(I_k^m) \right) \right| \\
&\geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2^m}\right) \cdot \sum_{k=1}^n \left| \bigcup_{j=1}^{r_k^m} \mathbb{E}^j(I_k^m) \right| \\
&= \left(1 - \frac{\varepsilon}{2^m}\right) \cdot \left| \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{j=1}^{r_k^m} \mathbb{E}^j(I_k^m) \right| \\
&= \left(1 - \frac{\varepsilon}{2^m}\right) \cdot |[0, 1]| \\
&= 1 - \frac{\varepsilon}{2^m}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$|\mathcal{C}_{N_m}([0, 1])| \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2^m}. \quad (2.37)$$

Pela observação (2.2.2), temos que  $x \in \mathcal{C}_{N_m}([0, 1])$ , para todo  $m \geq 1$ , ou seja,

$$x \in \bigcap_{m \geq 1} \mathcal{C}_{N_m}([0, 1]). \quad (2.38)$$

Assim, segue que a medida de Lebesgue da interseção

$$\mathcal{C}_\varepsilon := \bigcap_{m \geq 1} \mathcal{C}_{N_m}([0, 1])$$

é dada por

$$\begin{aligned}
|\mathcal{C}_\varepsilon| &= \left| \bigcap_{m \geq 1} \mathcal{C}_{N_m}([0, 1]) \right| \\
&= \left| [0, 1] \setminus \bigcup_{m \geq 1} (\mathcal{C}_{N_m}([0, 1]))^c \right| \\
&= |[0, 1]| - \left| \bigcup_{m \geq 1} (\mathcal{C}_{N_m}([0, 1]))^c \right| \\
&\geq 1 - \sum_{m \geq 1} |(\mathcal{C}_{N_m}([0, 1]))^c| \\
&> 1 - \sum_{m \geq 1} \frac{\varepsilon}{2^m} \\
&= 1 - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Note que a sequência de inteiros  $(n_m)$  pode ser escolhida de forma que  $(N_m)$  é uma sequência estritamente crescente e então todos os pontos em  $\mathcal{C}_\varepsilon$  satisfazem as condições da Proposição 2.2.1. Como o número  $\varepsilon > 0$  é arbitrário, provamos a Proposição 2.2.1.  $\square$

Com a prova da Proposição 2.2.1, temos as condições do Teorema 2.4 satisfeitas, logo o operador  $H_{\omega_\lambda(x)}$  não tem autovalores em  $\ell^2(\mathbb{Z})$ , para quase todo  $x \in [0, 1)$ .

Com efeito, provamos o seguinte resultado:

**Teorema 2.5.** [3] *Fixe  $\pi \in G_n$ . Dado  $V$  como em (2.1), existe um subconjunto  $\mathcal{F} \subset \mathbb{E}(\pi)$ , dado em (2.6), de medida de Lebesgue total tal que:*

- (i) *cada  $\mathbb{E}_\lambda \in \mathcal{F}$  é minimal, aperiódica e unicamente ergódica,*
- (ii) *para cada  $\mathbb{E}_\lambda \in \mathcal{F}$ , o espectro de  $H_{V(\omega)}$  em (2.1) é o mesmo para todo  $\omega \in \Omega_\lambda$  e este é um conjunto de Cantor de medida de Lebesgue zero,*
- (iii) *para cada  $\mathbb{E}_\lambda \in \mathcal{F}$  o operador de Schrödinger correspondente (2.1) com potencial  $V(\omega_\lambda(x))$  tem espectro singular contínuo puro para quase todo  $x \in [0, 1)$ .*

## Propriedades do Espectro

**Teorema A.1.** [11] Se  $(\Omega, T, \mu)$  é um subshift então  $H_{T\omega} = UH_\omega U^*$  onde  $U := U_\tau$  é o operador unitário associado a  $\tau$ , o shift sobre  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . Portanto,  $\sigma(H_\omega) = \sigma(H_{T\omega})$ .

*Demonstração.* Basta fazer o produto entre as matrizes representantes dos operadores.  $\square$

**Teorema A.2.** [11] Sejam  $H_n, H$  operadores auto-adjuntos num espaço de Hilbert  $\mathbb{H}$ , tal que  $H_n \rightarrow H$  fortemente. Então

$$\sigma(H) \subset \limsup \sigma(H_n) := \bigcap_n \overline{\bigcup_{m \geq n} \sigma(H_m)}.$$

*Demonstração.* Seja  $E \notin \overline{\bigcup_{m \geq n} \sigma(H_m)}$  para algum  $n$  fixo. Então a distância

$$d_n := d\left(E, \bigcup_{m \geq n} \sigma(H_m)\right)$$

deve ser positiva. Como  $(H_m - EI)^{-1}$ , por ora, é auto-adjunto,

$$\|(H_m - EI)^{-1}\| = \sup_{\lambda \in \sigma(H_m)} \left| \frac{1}{\lambda - E} \right| \leq \frac{1}{d_n}, \quad \text{com } m \geq n.$$

Portanto,  $\|H_m \psi - E\psi\| \geq d_n \|\psi\|, \forall \psi \in \mathbb{H}$ . Tomando o limite sobre  $m$ , temos  $\|H\psi - E\psi\| \geq d_n \|\psi\|$ . Sendo  $(H - EI)$  auto-adjunto, concluímos que  $E \notin \sigma(H)$ .  $\square$

No caso de  $(\Omega, T)$  ser minimal, temos:

**Teorema A.3.** [11] Se  $(\Omega, T)$  é um subshift minimal, então  $\sigma(H_\omega) = \sigma(H_{\omega'})$  para todo  $\omega, \omega' \in \Omega$ , isto é, o espectro de  $H_\omega$  não depende de  $\omega$ .

*Demonstração.* Munindo  $\Omega$  da métrica

$$d(\omega, \omega') = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} |\omega_n - \omega'_n|,$$

temos que se  $d(\omega, \omega') \leq \varepsilon$ , então  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} |\omega_n - \omega'_n| \leq \varepsilon$ , daí existe  $N$  tal que  $\omega_{[-N, N]} = \omega'_{[-N, N]}$ , e para todo  $\psi \in \mathbb{H}$ ,

$$\begin{aligned} \|H_\omega \psi - H_{\omega'} \psi\|^2 &= \|(H_\omega - H_{\omega'}) \psi\|^2 \\ &= \|(\omega - \omega') \psi\|^2 \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} |(\omega_n - \omega'_n) \psi_n|^2 \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} |\omega_n - \omega'_n|^2 |\psi_n|^2 \\ &\leq C \cdot \sum_{|n| > N} |\psi_n|^2, \end{aligned}$$

já que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|\omega_n - \omega'_n|}{2^{|n|}} \leq \frac{\varepsilon}{3} \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} = \varepsilon$$

e

$$\frac{|\omega_n - \omega'_n|}{2^{|n|}} \leq \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^{|n|}}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Portanto,

$$|\omega_n - \omega'_n| \leq \frac{\varepsilon}{3} = \sqrt{C}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Isto prova que, para qualquer  $\psi \in \mathbb{H}$  fixo, a aplicação  $\omega \mapsto \|H_\omega \psi\|$  é contínua em  $\Omega$ . Mas, por definição de  $\Omega$ ,  $\omega \in \Omega$  se  $\lim_{k \rightarrow \infty} T^{n_k} \omega' = \omega$  para alguma sequência  $(n_k)$ , isto é,  $H_{T^{n_k} \omega'} \rightarrow H_\omega$ . O Teorema A.2 implica que

$$\sigma(H_\omega) \subset \limsup_{k \rightarrow \infty} (\sigma(H_{T^{n_k} \omega'})).$$

Pelo Teorema A.1, temos que  $H_{T^{n_k} \omega'} = U^{n_k} H_{\omega'} U^{-n_k}$ , assim  $\sigma(H_{T^{n_k} \omega'}) = \sigma(H_{\omega'})$ , logo

$$\sigma(H_\omega) \subset \sigma(H_{\omega'}).$$

Como o sistema é minimal,  $\Omega$  é a órbita fechada de qualquer desses pontos, e para todo  $\omega \in \Omega$ ,  $\omega' = \lim_{j \rightarrow \infty} T^{m_j} \omega$  para uma sequência  $(m_j)$ . Repetindo o mesmo processo, obtemos  $\sigma(H_{\omega'}) \subset \sigma(H_\omega)$ . Finalmente,  $\sigma(H_{\omega'}) = \sigma(H_\omega)$ , para todo  $\omega, \omega' \in \Omega$ .  $\square$

Os demais resultados que formam as bases da teoria aqui estudada podem ser encontrados em [4], [5], [8], [9], [10], [11].

---

# Bibliografía

---

- [1] BOSHERNITZAN, M. A condition for unique ergodicity of minimal symbolic flows. *Ergodic Theory & Dynamical Systems* 12 (1992), 425–428. 31
- [2] CARMONA, R., AND LACROIX, J. *Spectral theory of random Schrödinger operators*. Birkhäuser, Boston, 1990. 31
- [3] COBO, M., DEOLIVEIRA, C. R., AND GUTIERREZ, C. Cantor singular continuous spectrum for operators along interval exchange transformations. *Proceedings of the American Math. Soc.* 136 (2008), 923–930. 31, 34, 35, 36, 38, 46
- [4] CYCON, H. L., FROESE, R. G., KIRSCH, W., AND SIMON, B. *Schrödinger Operators with Application to Quantum Mechanics and Global Geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 1987. viii, 6, 31, 32, 48
- [5] DAMANIK, D. Lyapunov exponents and spectral analysis of ergodic schrödinger operator: A survey of kotani theory and its applications. *Proc. Sympos. Pure Math.* 76 (2007), 539–563. Spectral theory and mathematical physics: a Festschrift in honor of Barry Simon’s 60th birthday. 32, 48
- [6] DAMANIK, D., AND LENZ, D. A criterion of boshernitzan and uniform convergence in the multiplicative ergodic theorem. *Duke Math. J.* 133 (2006), 95–123. 31
- [7] DELYON, F., AND PETRITIS, D. Absence of localization in a class of schrödinger operators with quasiperiodic potential. *Commun. Math. Phys.* 103 (1986), 441–444. 32, 33
- [8] JOHNSON, R. A. Exponential dichotomy, rotation number, and linear differential operators with bounded coefficients. *J. Differential Equations* 61 (1986), 54–78. 48
- [9] LENZ, D. Singular spectrum of lebesgue measure zero for one-dimensional quasicrystals. *Commun. Math. Phys.* 227 (2002), 119–130. 31, 32, 48
- [10] LENZ, D. Uniform ergodic theorems on subshifts over a finite alphabet. *Ergod. Th. & Dynam. Syst.* 22 (2002), 245–255. 48
- [11] QUEFFÉLEC, M. *Substitution Dynamical Systems - Spectral Analysis*, second ed. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2010. viii, 31, 32, 47, 48
- [12] REED, M., AND SIMON, B. *Methods of Modern Mathematical Physics I - Functional Analysis*. Academic Press, New York-London, 1972. 4, 6
- [13] VEECH, W. A. Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps. *Ann. Math.* 115 (1982), 201–242. 28
- [14] VIANA, M. Ergodic theory and interval exchange maps. *Mat. Complut.* 1 (2006), 7–100. 9, 11, 13, 18, 19, 20, 21, 22, 25

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 22 / 03 / 2012

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Evanton Pereira", written over a horizontal line.

Assinatura