



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Campus de São José do Rio Preto

# Bilhares Planares

Rodrigo Manoel Dias Andrade

Orientador: Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Campus de São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São José do Rio Preto

Março - 2012

RODRIGO MANOEL DIAS ANDRADE

Bilhares Planares

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita

São José do Rio Preto, 02 de março de 2012

Andrade, Rodrigo Manoel Dias.

Bilhares planares / Rodrigo Manoel Dias Andrade. - São José do Rio Preto: [s.n.], 2012.

59 f. : il. ; 30cm.

Orientador: Vanderlei Minori Horita

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Sistemas dinâmicos. 2. Teoria ergódica. 3. Geometria. I. Horita, Vanderlei Minori. II. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 512.93

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE  
Campus de São José do Rio Preto - UNESP

RODRIGO MANOEL DIAS ANDRADE

Bilhares Planares

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Sistemas Dinâmicos junto ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita  
Professor Adjunto  
UNESP - São José do Rio Preto  
Orientador

Prof. Dr. Roberto Markarian  
Professor Titular  
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA - Uruguai

Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva  
Professor Adjunto  
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 02 de março de 2012

*Aos meus pais,  
Manoel e Inês,  
dedico.*

# Agradecimentos

Ao concluir este trabalho, agradeço:

Primeiramente a Deus.

Aos meus pais, Manoel Pereira Andrade e Inês Dias Andrade, pelo amor, carinho e por estarem sempre me apoiando nos estudos.

Aos meus irmãos, Plínio Lucas Dias Andrade, Carolina Dias Andrade Machado e ao meu cunhado Cliver Gustavo Machado, pela amizade e pelos divertidos momentos na minha vida.

Ao professor Vanderlei Minori Horita, pela atenção e paciência prestadas, pelos conhecimentos transmitidos, e por depositar sua confiança em mim diante deste trabalho.

A todos professores do departamento de matemática do IBILCE. Em especial, aos professores Adalberto Spezamiglio, Ali Messaoudi, Claudio Buzzzi, Paulo Ricardo da Silva e Waldemar Bastos, que contribuíram para minha formação através das disciplinas que ministraram.

À banca examinadora, em particular, ao professor Roberto Markarian pelas várias sugestões de grande importância no texto.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Aos meus colegas de pós-graduação, Adimar Moretti, Everton Artuso, Gilberto Rodrigues, Leandro Tavares e Valdiane Araújo pelo convívio bastante agradável e pelas muitas risadas.

A todos que diretamente ou indiretamente contribuíram para realização deste trabalho.

*“ Do not worry about your difficulties in mathematics;  
I can assure you that mine are still greater. ” (Albert Einstein)*

# Resumo

O objetivo principal deste trabalho é estudar a dinâmica de uma partícula pontual no interior de subconjuntos do plano. Tais sistemas são conhecidos na literatura como bilhares. Apresentaremos os principais conceitos desses sistemas e veremos que tais sistemas deixam invariante uma medida de probabilidade, o que nos permite aplicar a Teoria Ergódica ao problema do bilhar.

**Palavras-chave:** Sistemas Dinâmicos, Teoria Ergódica, Bilhares, Mesas de Bilhares, Fluxo do Bilhar, Aplicação de Colisão, Derivada do Bilhar, Medida Invariante do Bilhar.



# Abstract

The main goal of this work is to study the dynamical behavior of a point-like (dimensionless) particle in the interior of planar regions. Such systems are known in the literature as billiards. We're going to present the principal concepts of those systems and we'll see that such system turns the probability measure invariant, which allows us to apply the Ergodic Theory to billiard problems.

**Keywords:** Dynamical Systems, Ergodic Theory, Billiards, Billiard Tables, Billiard Flow, Collision Map, Derivative of the Map, Invariant Measure of the Map.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>1 Bilhares no Círculo, Quadrado e Elipse</b>	<b>11</b>
1.1 Bilhar no Círculo . . . . .	11
1.2 Bilhar no Quadrado . . . . .	21
1.3 Um Modelo Mecânico . . . . .	26
1.4 Bilhar na Elipse . . . . .	29
<b>2 Construções</b>	<b>37</b>
2.1 Mesas de Bilhares . . . . .	37
2.2 Fluxo do Bilhar . . . . .	40
2.2.1 Acumulação de Tempos de Colisão . . . . .	42
2.2.2 Espaço de Fase e Aplicação Fluxo . . . . .	44
2.2.3 Extensão Contínua do Fluxo . . . . .	50
<b>3 Aplicação de Colisão</b>	<b>51</b>
3.1 Medida Invariante da Aplicação . . . . .	57
3.2 Involução . . . . .	58

# Introdução

Uma das principais motivações para o estudo dos bilhares se deve aos problemas de origem física, especialmente aqueles em que a interação entre partículas envolve choques elásticos. O forte comportamento caótico que algumas classes de bilhares apresentam, também é motivo de estudo dessa teoria. Neste trabalho estudaremos os bilhares planares, isto é, faremos um estudo geral da dinâmica de uma partícula pontual no interior de subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$ .

O Capítulo 1 é iniciado motivando alguns exemplos simples de bilhares. Faremos um estudo dos bilhares no círculo, quadrado e elipse. Veremos também, um interessante modelo mecânico do movimento de duas partículas no intervalo  $[0, 1]$ , o qual se reduzirá a um bilhar.

Já o Capítulo 2 é destinado às construções das mesas de bilhares no plano, bem como o movimento da partícula no interior dessas mesas. Ou seja, definiremos um fluxo para o bilhar e estudaremos suas propriedades.

O foco principal do Capítulo 3 é o estudo das colisões que a partícula faz com o bordo da mesa. Essas colisões definem uma dinâmica no bilhar que a chamamos de aplicação de colisão ou aplicação do bilhar. Provamos que tal aplicação deixa invariante uma medida de probabilidade, resultado fundamental para a aplicabilidade da Teoria Ergódica.

---

---

## CAPÍTULO 1

---

# Bilhares no Círculo, Quadrado e Elipse

Neste Capítulo, estudaremos alguns exemplos de bilhares que nos ajudará introduzir as ferramentas básicas da dinâmica dos mesmos . Tais exemplos exibem ricas propriedades dinâmicas como veremos. Faremos um estudo dos bilhares no círculo, no quadrado e na elipse. Veremos também um modelo mecânico que reduz o movimento de duas partículas no intervalo  $[0, 1]$  ao bilhar num triângulo retângulo, o qual será similar ao bilhar no quadrado.

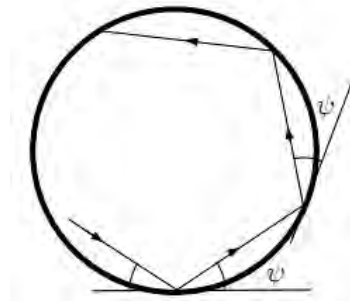
### 1.1 Bilhar no Círculo

Seja  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$  o disco unitário e considere uma partícula (sem dimensão) movendo no interior de  $\mathcal{D}$  com velocidade constante colidindo com o bordo  $\partial\mathcal{D}$  de acordo com a regra clássica *o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão*.

Denotemos por  $q_t = (x_t, y_t)$  as coordenadas do movimento da partícula no tempo  $t$  e por  $v_t = (u_t, w_t)$  seu vetor velocidade. Assim, sua posição e velocidade no tempo  $t + s$  podem ser expressas como

$$\begin{aligned}x_{t+s} &= x_t + u_t s & u_{t+s} &= u_t \\y_{t+s} &= y_t + w_t s & w_{t+s} &= w_t\end{aligned}\tag{1.1}$$

enquanto a partícula esteja dentro de  $\mathcal{D}$  (sem fazer contato com  $\partial\mathcal{D}$ ). Quando a partícula colide com o bordo  $\partial\mathcal{D} = \{x^2 + y^2 = 1\}$ , seu vetor velocidade se reflete pela reta tangente ao ponto de colisão.



**Figura 1.1.** Movimento do bilhar no círculo.

**Afirmção 1.1.** Os vetores velocidades antes  $v^-$  e após  $v^+$  a colisão se relacionam pela regra

$$v^+ = v^- - 2\langle v^-, n \rangle n \quad (1.2)$$

onde  $n = (x, y)$  é o vetor normal ao círculo  $x^2 + y^2 = 1$  e  $\langle v, n \rangle = vx + wy$  denota o produto escalar.

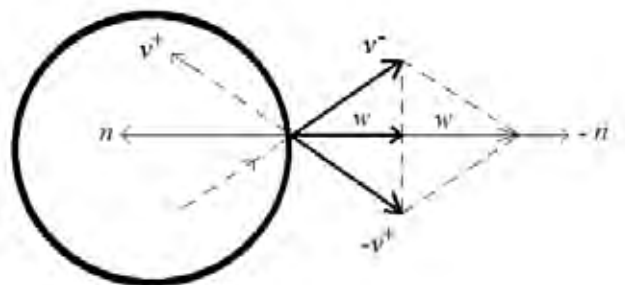
*Demonstração.* Note que

$$w = \text{proj}_{-n}(v^-) = \frac{\langle v^-, -n \rangle (-n)}{\| -n \|^2} = \langle v^-, n \rangle n$$

e também pela regra do paralelogramo (veja Figura 1.2), segue que

$$2w = v^- - v^+ \Rightarrow v^+ = v^- - 2\langle v^-, n \rangle n,$$

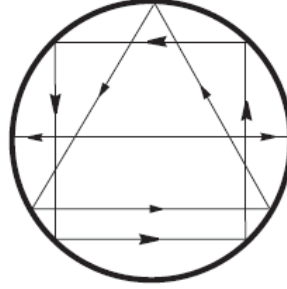
como queríamos. ■



**Figura 1.2.** Análise geométrica da Afirmção 1.1.

Após a reflexão, a partícula retoma seu movimento livre até colidir novamente com o bordo  $\partial\mathcal{D}$ . O movimento poderá continuar indefinidamente tanto no futuro como no

passado. Movimentos periódicos também podem ocorrer. Por exemplo, quando a partícula percorre o diâmetro de  $\mathcal{D}$ , seu vetor velocidade ficará invertido a cada colisão, daí termos um movimento periódico de período dois. Outro exemplo de movimento periódico é quando a partícula percorre os lados de um polígono regular (ver Figura 1.3).



**Figura 1.3.** Movimentos periódicos no círculo.

O principal objetivo é descrever a evolução do sistema durante longos períodos de tempo e seu comportamento assintótico quando  $t \rightarrow \infty$ .

Parametrizamos o círculo unitário  $x^2 + y^2 = 1$  pelo ângulo  $\theta \in [0, 2\pi]$  e denotemos por  $\psi \in [0, \pi]$  o ângulo de reflexão como mostrado na Figura 1.1.

**Afirmção 1.2.** Para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , seja  $\theta_n$  o  $n$ -ésimo ponto de colisão e  $\psi_n$  o correspondente ângulo de reflexão. Então:

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= \theta_n + 2\psi_n \pmod{2\pi} \\ \psi_{n+1} &= \psi_n\end{aligned}\tag{1.3}$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* Seja  $O$  o centro do disco  $\mathcal{D}$ . Fixemos uma trajetória em  $\mathcal{D}$  de modo que  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são pontos de colisão consecutivos dessa trajetória.

Sejam  $\alpha = \widehat{O\theta_1\theta_2}$  e  $\beta = \widehat{\theta_1 O\theta_2}$ . Temos que o triângulo  $\triangle\theta_1 O\theta_2$  é isósceles.

Observe que

$$\begin{aligned}\alpha + \psi_1 &= \frac{\pi}{2} \implies \alpha = \frac{\pi}{2} - \psi_1 \\ \alpha + \psi_2 &= \frac{\pi}{2} \implies \alpha = \frac{\pi}{2} - \psi_2\end{aligned}$$

pois  $\overline{O\theta_1} \perp l_1$  e  $\overline{O\theta_2} \perp l_2$  onde  $l_1$  e  $l_2$  são as retas tangentes por  $\theta_1$  e  $\theta_2$  respectivamente. Disso concluímos que  $\psi_1 = \psi_2$ .

Como

$$2\alpha + \beta = \pi \implies \beta = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \psi_1\right) = 2\psi_1 \implies \beta = 2\psi_1$$

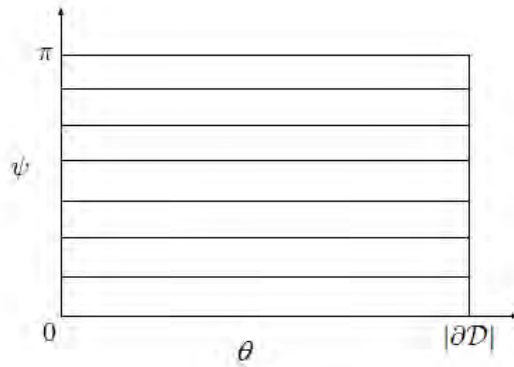
e

$$\theta_2 = \theta_1 + \beta$$

segue que  $\theta_2 = \theta_1 + 2\psi_1$ . Assim, a afirmação está verificada para  $n = 1$ . A demonstração completa segue por indução sobre  $n$ . ■

As colisões são caracterizadas por dois parâmetros:  $\theta$  (o ponto) e  $\psi$  (o ângulo). O espaço de todas as colisões denotaremos por  $\mathcal{M} = \{(\theta, \psi) : \theta \in |\partial\mathcal{D}| \text{ e } \psi \in [0, \pi]\} = |\partial\mathcal{D}| \times [0, \pi]$  o qual é um cilindro cuja base é o bordo  $\partial\mathcal{D}$  e altura  $\pi$ . A cada colisão que a partícula faz com o bordo  $\partial\mathcal{D}$  irá corresponder a uma aplicação  $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  que a chamaremos de aplicação de colisão ou aplicação do bilhar. Para o bilhar circular tal aplicação é dada pela Equação 1.3.

Note que cada nível  $\mathcal{C}_\psi = \{\psi = \text{const}\}$  do cilindro é invariante pela  $\mathcal{F}$ . Quando restringimos  $\mathcal{F}$  a  $\mathcal{C}_\psi$  teremos uma rotação do círculo  $\mathcal{C}_\psi$  por um ângulo de  $2\psi$ , isso segue imediatamente da Equação 1.3.



**Figura 1.4.** Espaço de colisão do bilhar circular.

No estudo de Sistemas Dinâmicos, as rotações do círculo são exemplos bem conhecidos. Vejamos agora algumas propriedades.

**Afirmação 1.3.** Se  $\psi < \pi$  é um múltiplo racional de  $\pi$ , isto é,  $\psi/\pi = m/n$  com  $m, n \in \mathbb{Z}$ , então a rotação do círculo  $\mathcal{C}_\psi$  é periódica de período  $n$ , ou seja, cada ponto no círculo é periódico de período  $n$ , ou ainda que  $\mathcal{F}^n(\theta, \psi) = (\theta, \psi)$  para cada  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

*Demonstração.* Temos que

$$\frac{\psi}{\pi} = \frac{m}{n} \implies 2\psi = 2\pi \frac{m}{n}$$

Fixe  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Pela Equação 1.3, segue que

$$\mathcal{F}(\theta, \psi) = (\theta + 2\psi \pmod{2\pi}, \psi) = (\theta + 2\pi \frac{m}{n} \pmod{2\pi}, \psi)$$

$$\mathcal{F}^2(\theta, \psi) = (\mathcal{F}(\theta, \psi) + 2\psi \pmod{2\pi}, \psi) = (\theta + 4\pi \frac{m}{n} \pmod{2\pi}, \psi)$$

$$\mathcal{F}^3(\theta, \psi) = (\mathcal{F}^2(\theta, \psi) + 2\psi \pmod{2\pi}, \psi) = (\theta + 6\pi \frac{m}{n} \pmod{2\pi}, \psi)$$

⋮

$$\mathcal{F}^n(\theta, \psi) = (\mathcal{F}^{n-1}(\theta, \psi) + 2\psi \pmod{2\pi}, \psi) = (\theta + 2n\pi \frac{m}{n} \pmod{2\pi}, \psi).$$

Logo,

$$\mathcal{F}^n(\theta, \psi) = (\theta + 2m\pi \pmod{2\pi}, \psi) \implies \mathcal{F}^n(\theta, \psi) = (\theta \pmod{2\pi}, \psi).$$

Ou seja,  $\mathcal{F}^n(\theta, \psi) = (\theta, \psi)$ .

■

**Definição 1.1.** Seja  $X$  um espaço topológico. Dizemos que o sistema dinâmico  $f : X \rightarrow X$  é minimal se a órbita de cada ponto  $x \in X$  é densa em  $X$ .

**Proposição 1.1.** Se  $\alpha$  é irracional então a rotação  $R_\alpha$  é minimal.

*Demonstração.* Seja  $A \subset S^1$  o fecho de uma órbita. Se a órbita não é densa, o complementar  $S^1 \setminus A$  é um conjunto aberto, invariante e não vazio que consiste de intervalos disjuntos. Seja  $I$  o maior desses intervalos (ou um dos maiores, se existirem vários do mesmo comprimento). Como a rotação preserva o comprimento de qualquer intervalo, os iterados  $R_\alpha^n I$  não se sobrepõem. Caso contrário  $S^1 \setminus A$  conteria um intervalo maior que  $I$ . Como  $\alpha$  é irracional, nenhum iterado de  $I$  pode coincidir; se não uma extremidade  $x$  de um iterado de  $I$  volta nele mesmo e teríamos  $x + k\alpha = x \pmod{1}$  com  $k\alpha = l$  um inteiro e  $\alpha = l/k$  um número racional. Assim, os intervalos  $R_\alpha^n I$  são todos de comprimentos iguais e disjuntos, o que é impossível pois o círculo possui comprimento finito e a soma dos comprimentos de intervalos disjuntos não pode exceder o comprimento do círculo.

■

**Definição 1.2.** Dizemos que a rotação de um ângulo  $\alpha$  é irracional se o número  $\alpha/2\pi$  é irracional, e dizemos que a rotação é racional caso contrário.

**Definição 1.3.** Uma sequência de pontos  $x_n \in \mathcal{C}$  em um círculo  $\mathcal{C}$  é dita uniformemente distribuída (ou equidistribuída) se para qualquer intervalo  $I \subset \mathcal{C}$ , o limite  $\lim_{N \rightarrow \infty} \#\{n : 0 < n < N, x_n \in I\}/N = m(I)/m(\mathcal{C})$ , onde  $m(\cdot)$  denota o comprimento.

O próximo Teorema é devido a H. Weyl (1914); ele implica a Proposição 1.1.



**Teorema 1.1.** Seja  $(x_n)$  uma sequência em  $S^1$ . Então as seguintes afirmações são equivalentes:

1.  $(x_n)$  é uniformemente distribuída (*mod*  $2\pi$ ).
2. Para toda função  $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, tem-se  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi(x_j) = \int_{S^1} \varphi(x) dx$ .
3.  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp(2\pi im \varphi(x_n)) = 0$ , para todo  $m$  inteiro não nulo.

**Corolário 1.1.** Se  $\psi/\pi$  é irracional então para cada ponto  $(\theta, \psi) \in \mathcal{C}_\psi$  suas imagens  $x_n = \frac{\theta + 2n\psi}{\pi} \pmod{2\pi}$  é uniformemente distribuída em  $\mathcal{C}_\psi$ .

*Demonstração.* Dado  $m$  inteiro não nulo, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(2\pi im \frac{(\theta + 2\psi n)}{\pi}\right) &= \frac{\exp(2im\theta)}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (\exp(4im\psi))^n \\ &= \frac{\exp(2im\theta)}{N} \left( \frac{1 - \exp(4imN\psi)}{1 - \exp(4im\psi)} \right). \end{aligned}$$

Como  $\psi/\pi$  é irracional, segue que na última igualdade acima, o quociente entre parênteses é limitado, uma vez que o denominador nunca se anula. Logo,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(2\pi im \frac{(\theta + 2\psi n)}{\pi}\right) \rightarrow 0,$$

quando  $N \rightarrow \infty$ . Assim pelo Teorema 1.1 o resultado segue. ■

Definiremos agora o conceito de ergodicidade.

Seja  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  um espaço de medida, onde  $X$  é um espaço topológico,  $\mathcal{B}$  denota a  $\sigma$ -álgebra de Borel, e considere  $T : X \rightarrow X$  uma transformação mensurável. Dizemos que  $T$  é *ergódica* com respeito a medida  $\mu$  se os únicos Borelianos invariantes por  $T$  forem triviais. Isto é, se  $B \in \mathcal{B}$  e  $T^{-1}(B) = B$  então  $\mu(B) = 0$  ou  $\mu(X \setminus B) = 0$ . Se  $\mu$  é uma medida de probabilidade, então  $\mu(B) = 0$  ou  $\mu(B) = 1$ .

A próxima proposição pode ser encontrada em [9] pág.47.

**Proposição 1.2.** Se  $R_\alpha$  é uma rotação irracional de um ângulo  $\alpha$  então  $R_\alpha$  é ergódica com respeito a medida de Lebesgue.

**Corolário 1.2.** Se  $\psi/\pi$  é irracional, então a rotação de  $\mathcal{C}_\psi$  é ergódica com respeito a medida de Lebesgue.

Além disso, a rotação de  $\mathcal{C}_\psi$  é *unicamente ergódica*, isto é, a medida de Lebesgue invariante é única.

Agora, o que podemos afirmar sobre a ergodicidade da aplicação  $\mathcal{F}$ ?

Para respondermos essa pergunta precisamos do seguinte lema:

**Lema 1.1.** Sejam  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  um espaço de probabilidade,  $T : X \rightarrow X$  uma transformação que preserva  $\mu$  e  $1 \leq p \leq \infty$ . São equivalentes:

1.  $T$  é ergódica em relação a  $\mu$ ;
2. Se  $f \in L^p(\mu)$  é  $T$ -invariante, então  $f$  é constante qtp.

Afirmamos que  $\mathcal{F}$  não é ergódica com respeito a medida de Lebesgue. De fato, seja a função  $\mathcal{T} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\mathcal{T}(\theta, \psi) = \psi$ . Note que  $\mathcal{T} \in L^1(\mu)$  e satisfaz  $\mathcal{T}(\mathcal{F}x) = \mathcal{T}x$  para todo  $x \in \mathcal{M}$ , porém  $\mathcal{T}$  não é constante. Logo, pelo lema acima,  $\mathcal{F}$  não é ergódica

**Afirmção 1.4.** Cada segmento da trajetória da partícula entre colisões consecutivas é tangente ao círculo  $S_\psi = \{x^2 + y^2 = \cos^2 \psi\}$  concêntrico ao disco  $\mathcal{D}$ . Além disso, se  $\psi/\pi$  é irracional, então as trajetórias preenchem densamente o anel entre  $\partial\mathcal{D}$  e o círculo menor  $S_\psi$ .

*Demonstração.* Seja  $O = (0, 0)$  o centro do disco  $\mathcal{D}$ . Consideremos em  $\mathcal{D}$  duas trajetórias consecutivas tais que  $\theta = (x, y)$  e  $\theta' = (x', y')$  são pontos de colisão consecutivos dessas trajetórias. Seja  $P \in \overline{\theta\theta'}$  tal que  $\overline{OP} \perp \overline{\theta\theta'}$ . Temos que os triângulos  $\triangle O\theta P$  e  $\triangle O\theta' P$  são semelhantes, daí  $\widehat{\theta OP} = \widehat{\theta' OP} = \psi$ , pois  $\widehat{\theta O\theta'} = 2\psi$ . Logo, concluímos que  $P$  é o ponto médio de  $\overline{\theta\theta'}$ , isto é,  $P = \left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$ . Afirmamos que  $P \in S_\psi$ .

De fato, observe que

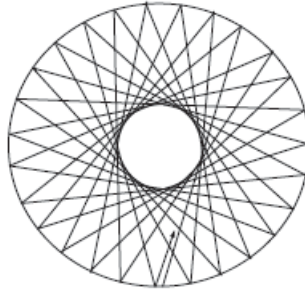
$$\text{dist}(O, P) = \sqrt{\left(\frac{x+x'}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+y'}{2}\right)^2} \implies \cos \psi = \sqrt{\left(\frac{x+x'}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+y'}{2}\right)^2}$$

$$\text{assim, } \cos^2 \psi = \left(\frac{x+x'}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+y'}{2}\right)^2.$$

Portanto,  $P \in S_\psi$ . Como  $P$  é o único ponto com a propriedade de que  $\overline{OP} \perp \overline{\theta\theta'}$ , segue que  $\overline{\theta\theta'}$  é tangente à  $S_\psi$  em  $P$ .

Para a segunda parte, tomemos um ponto  $P$  qualquer no anel entre  $\partial\mathcal{D}$  e o círculo menor  $S_\psi$ . Dado  $\epsilon > 0$ , seja  $B(P, \epsilon)$  a bola de centro  $P$  e raio  $\epsilon$ . Sejam  $r$  a reta por  $P$  tangente a  $S_\psi$ , assim  $r$  intersecta  $\partial\mathcal{D}$  em dois pontos, denotemos por  $Q$  um desses pontos, isto é,  $Q \in \partial\mathcal{D} \cap r$ . Temos que a rotação por ângulo  $2\psi$  é irracional, pois  $2\psi/2\pi$

é irracional por hipótese, conseqüentemente a órbita de todo  $(\theta, \psi)$  é densa no bordo  $\partial\mathcal{D}$  devido a minimalidade da rotação. Logo, existe um ponto  $R \in \partial\mathcal{D}$  tal que  $dist(Q, R) < \epsilon$ . Seja  $l$  a trajetória do bilhar que sai do ponto  $R$  (a qual é tangente a  $S_\psi$ ). Seja também  $s$  a reta passando por  $P$  e paralela ao segmento  $\overline{QR}$ . Denote por  $S = l \cap s$ . Note que  $dist(P, S) < dist(Q, R) < \epsilon$ . Ou seja, dado qualquer ponto  $P$  no anel entre  $\partial\mathcal{D}$  e o círculo menor  $S_\psi$ , temos uma trajetória do bilhar passando por  $P$ . Isso conclui a demonstração. ■



**Figura 1.5.** Trajetória não periódica.

**Afirmção 1.5.** O vetor velocidade  $v_t$  tem norma constante para todo  $t \in \mathbb{R}$

*Demonstração.* Seja  $v_t = (u_t, w_t)$  o vetor velocidade da partícula no tempo  $t$ . Se não houver colisão no intervalo de tempo  $[t, t+s]$ , as coordenadas do vetor velocidade permanece constante (veja Equação 1.1), logo  $v_{t+s}$  tem norma constante. Suponhamos agora que haja uma colisão no intervalo de tempo  $[t, t+s]$ , assim os vetores velocidades antes e após a colisão são dados pela lei (1.1). Ou seja, basta mostrar que  $\|v^+\| = \|v^-\|$ .

Decorre da definição de produto interno que dados  $\alpha$  e  $\beta$  pertencentes a um espaço vetorial tem-se

$$\|\alpha \pm \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 \pm 2\operatorname{Re}\langle \alpha, \beta \rangle + \|\beta\|^2.$$

Fazendo  $\alpha = v^-$  e  $\beta = 2\langle v^-, n \rangle n$  acima, temos:

$$\|v^- - 2\langle v^-, n \rangle n\|^2 = \|v^-\|^2 - 2\langle v^-, 2\langle v^-, n \rangle n \rangle + \|2\langle v^-, n \rangle n\|^2$$

Agora, mostrar que  $\|v^+\| = \|v^-\|$  é equivalente a mostrar que

$$\|2\langle v^-, n \rangle n\|^2 - 2\langle v^-, 2\langle v^-, n \rangle n \rangle = 0, \quad (1.4)$$

pois  $v^+ = v^- - 2\langle v^-, n \rangle n$ . De fato,

$$\|2\langle v^-, n \rangle n\|^2 = \langle 2\langle v^-, n \rangle n, 2\langle v^-, n \rangle n \rangle = 4\langle v^-, n \rangle^2 \langle n, n \rangle = 4\langle v^-, n \rangle^2 \|n\|^2 = 4\langle v^-, n \rangle^2.$$

Por outro lado, temos

$$2\langle v^-, 2\langle v^-, n \rangle n \rangle = 4\langle v^-, n \rangle^2.$$

Portanto, a Equação (1.4) se verifica. ■

Assim, a velocidade da partícula permanece constante para todo tempo  $t$ . Pela Afirmação 1.5, podemos supor  $\|v\| = 1$ , logo o vetor velocidade pode ser expresso em coordenadas angulares, isto é,  $v_t = (\cos \omega_t, \sin \omega_t)$ ,  $\omega_t \in [0, 2\pi]$ . A aplicação colisão  $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  representa somente colisões. Agora como descrever o movimento da partícula no interior de  $\mathcal{D}$ ? Para isso, consideremos todos os possíveis estados  $(q, v)$  com  $q \in \mathcal{D}$  e  $v \in S^1$ . O conjunto de todos os estados  $\Omega := \mathcal{D} \times S^1$  é uma variedade tridimensional (toro sólido), chamado de *espaço de fase* do bilhar. Observe que o movimento de cada estado  $(q, v) \in \Omega$ , para cada instante de tempo  $t \in \mathbb{R}$ , induz uma aplicação  $\Phi^t : \Omega \rightarrow \Omega$ . A pergunta natural que surge é: A aplicação  $\Phi^t$  representa um fluxo? A resposta é sim e a família de aplicações  $\{\Phi^t\}$  será chamada de *fluxo do bilhar* no espaço de fase. Vamos verificar esse fato.

- **$\Phi^t$  é contínua:** Seja  $(p_0, v_0) \in \Omega$ . Suponhamos que não há colisões no intervalo  $[0, t]$ , assim  $\Phi^t(p_0, v_0) = (p_0 + tv_0, v_0)$  e, portanto,  $\Phi^t$  é contínua. Agora, suponhamos que haja colisão em  $t_1 \in (0, t]$ , logo  $\Phi^{t_1}(p_0, v_0) = (p_0 + t_1v_0, v_1)$ , onde  $v_1$  é o vetor velocidade após a colisão dado na expressão 1.2. Há uma mudança instantânea na direção do movimento da partícula ao colidir com o bordo  $\partial\mathcal{D}$  dada pela lei 1.2 causando assim uma descontinuidade da aplicação  $\Phi^t$ . Para removermos essa descontinuidade, faremos a identificação dos vetores  $(p_0 + t_1v_0, v_0) \simeq (p_0 + t_1v_0, v_1)$  no intervalo  $(t_1, t)$ , ou seja, estamos identificando os vetores  $v_0$  e  $v_1$ . Como no intervalo  $(t_1, t)$  o movimento é retilíneo teremos então  $\Phi^t(p_0, v_0) = (p_0 + t_1v_0 + (t - t_1)v_1, v_1)$ . Com essa identificação a aplicação  $\Phi^t$  torna-se contínua.
- **$\Phi^0 = I_\Omega$ , onde  $I_\Omega$  é a identidade em  $\Omega$  e  $\Phi^t \circ \Phi^s = \Phi^s \circ \Phi^t = \Phi^{s+t}$ :** Dados  $(p_0, v_0) \in \Omega$  e  $v_1$  como antes, temos que  $\Phi^0(p_0, v_0) = (p_0, v_0) = I_\Omega(p_0, v_0)$ , ou seja,  $\Phi^0 = I_\Omega$ .

Agora, se no intervalo  $[0, t+s]$  não houver colisão é claro que  $\Phi^s \circ \Phi^t = \Phi^{s+t}$ . Suponhamos então que haja uma única colisão num instante  $t_1$  satisfazendo

$0 < s < t_1 < t$ . Assim,

$$\Phi^{s+t}(p_0, v_0) = (p_0 + t_1 v_0 + (t + s - t_1)v_1, v_1)$$

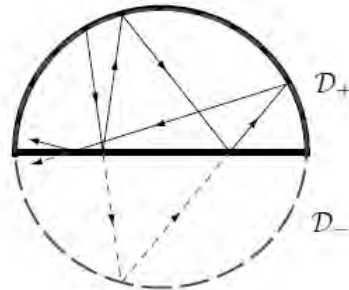
e também,

$$\Phi^s \circ \Phi^t(p_0, v_0) = \Phi^s(\Phi^t(p_0, v_0)) = \Phi^s(p_0 + t_1 v_0 + (t - t_1)v_1, v_1) = (p_0 + t_1 v_0 + (t + s - t_1)v_1, v_1)$$

Portanto,  $\Phi^s \circ \Phi^t = \Phi^{s+t}$ . Analogamente, tem-se  $\Phi^t \circ \Phi^s = \Phi^{s+t}$ .

Concluimos assim que a aplicação  $\Phi^t : \Omega \rightarrow \Omega$  é um fluxo contínuo no tempo e que modela o problema do bilhar.

Faremos agora uma modificação do bilhar no círculo unitário. Seja  $\mathcal{D}_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$  o semi-círculo superior e consideremos uma partícula movendo dentro de  $\mathcal{D}_+$  colidindo com o bordo  $\partial\mathcal{D}_+$ . Uma questão delicada que temos aqui é: o que ocorre se a partícula colide com  $\partial\mathcal{D}_+$  em  $(-1, 0)$  ou  $(1, 0)$  uma vez que não há reta tangente nesses pontos? A resposta para essa questão deixaremos para a próxima seção quando estudarmos o bilhar no quadrado.



**Figura 1.6.** Bilhar no semi-círculo superior.

Um simples truque nos permite reduzir esse modelo ao bilhar no disco unitário  $\mathcal{D}$ . Denotemos por  $\mathcal{D}_-$  o fecho de  $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_+$ , isto é, a imagem de  $\mathcal{D}_+$  através do eixo  $x$  ( $L = \{y = 0\}$ ). Quando a partícula atinge  $L$ , sua trajetória se reflete através de  $L$  a qual iremos desenhar sua continuação (imagem) abaixo de  $L$  (como mostra a Figura 1.6). Esta continuação chegará em  $\mathcal{D}_-$  simetricamente à real trajetória em  $\mathcal{D}_+$  até, por último, atingir  $L$  novamente. Então, essas duas trajetórias se fundem e se movem juntas em  $\mathcal{D}_+$  por um tempo até a próxima colisão com  $L$ , momento em que elas se separam de novo (uma vai pra  $\mathcal{D}_-$  e a outra para  $\mathcal{D}_+$ ), etc.

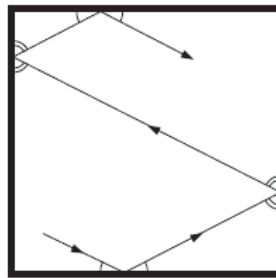
É importante que a segunda trajetória (imaginária) nunca se reflete fora da reta  $L$ , ela apenas cruza  $L$  cada vez. Assim, ela evolui como uma trajetória de bilhar no disco

cheio  $\mathcal{D}$  como descrito acima. As propriedades das trajetórias de bilhar em  $\mathcal{D}_+$  podem ser facilmente derivadas daquelas discutidas acima para o disco cheio  $\mathcal{D}$ . Esse tipo de redução é comum no estudo dos bilhares.

## 1.2 Bilhar no Quadrado

Nesta subseção estudaremos o bilhar no quadrado  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$ . As leis de movimento continuam as mesmas de antes, porém esse sistema irá apresentar algumas novidades.

Primeiramente, quando a partícula em movimento colide com um vértice de  $\mathcal{D}$ , a regra de reflexão (1.2) não se aplica, pois não há vetor normal em um vértice. A partícula então para e sua trajetória termina.



**Figura 1.7.** Bilhar no quadrado.

Vamos agora descrever o vetor velocidade da partícula após colisões sucessivas com o bordo  $\partial\mathcal{D}$ . Denotemos por  $v(t) = (u(t), w(t))$  (em coordenadas  $x, y$ ) o vetor velocidade da partícula no tempo  $t$ . Quando a partícula colidir com um lado horizontal de  $\mathcal{D}$  num instante  $t_1$ , a coordenada  $w(t)$  mudará de sinal e  $u(t)$  permanece inalterado, isto é, seu novo vetor velocidade será dado por  $v(t_1) = (u(t_1), -w(t_1))$ . Se num instante  $t_2$  (após colisão com a horizontal) a partícula colidir com um lado vertical de  $\mathcal{D}$ , a coordenada  $u(t)$  mudará de sinal e  $w(t)$  não muda, logo o novo vetor velocidade será expresso por  $v(t_2) = (-u(t_2), -w(t_2))$  e, assim, o raciocínio segue para cada lado de  $\mathcal{D}$ . Tal análise é feita pela decomposição do vetor velocidade quando a partícula se choca com um dos lados do quadrado. Concluimos assim que

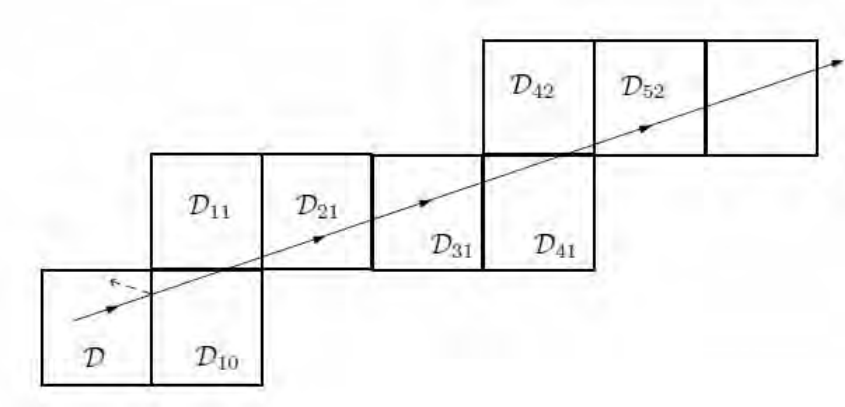
$$v(t) = ((-1)^m u(t), (-1)^n w(t)) \quad (1.5)$$

onde  $m$  e  $n$  denotam o número de colisões na vertical e horizontal respectivamente.

Podemos observar que se  $u_0 \neq 0$  e  $w_0 \neq 0$  (e assumindo que a partícula nunca atinge um vértice), então todas as quatro combinações  $(\pm u_0, \pm w_0)$  aparecem ao longo da trajetória

da partícula infinitas vezes.

Em vez de refletirmos a trajetória da partícula do bilhar em um lado de  $\partial\mathcal{D}$ , refletimos o quadrado  $\mathcal{D}$  através desse lado e deixamos a partícula se mover em linha reta na cópia de  $\mathcal{D}$ . Se fizermos isso a cada colisão, a nossa partícula irá se mover ao longo de uma linha reta que passa por várias cópias de  $\mathcal{D}$  obtidas por reflexões sucessivas (a partícula “penetra” numa cadeia de quadrados; veja Figura 1.8). Esta construção é chamada de *desdobramento da trajetória do bilhar*.



**Figura 1.8.** Desdobramento da trajetória do bilhar.

Denotemos as cópias de  $\mathcal{D}$  por:

$$\mathcal{D}_{m,n} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : m \leq x \leq m + 1, n \leq y \leq n + 1\} \quad (1.6)$$

Observamos aqui que se  $(x, y)$  é a posição da partícula no tempo  $t = 0$  e  $v_0 = (u_0, w_0) \neq (0, 0)$  é o seu vetor velocidade, então a partícula do bilhar atinge um vértice  $(p, q)$  de  $\mathcal{D}_{m,n}$ , para algum  $m$  e  $n$ , se a inclinação do vetor velocidade  $w_0/u_0$  é igual a  $\frac{q-y}{p-x}$ .

Com a regra de desdobramento dada pelos blocos  $\mathcal{D}_{m,n}$ , o quadrado  $2 \times 2$ ,

$$\mathbb{K}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 2\}$$

desempenha um papel de domínio fundamental, de modo que o plano inteiro é coberto por translações paralelas de  $\mathbb{K}_2$ . Assim a projeção padrão de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{K}_2$  transforma trajetórias desdobradas em retas orientadas no toro  $2 \times 2$  (obtido pela identificação dos lados opostos de  $\mathbb{K}_2$ ). Com essa análise, concluímos que o bilhar no quadrado se reduz ao fluxo linear no toro  $2 \times 2$ , em que os pontos se movem com vetor velocidade (unitário) constante.

O fluxo linear no toro possui as seguintes propriedades:

- Se a trajetória possui inclinação racional  $dy/dx \in \mathbb{Q}$ , então ela é periódica (ela percorre ao longo de uma geodésica fechada).
- Se a trajetória possui inclinação irracional  $dy/dx \notin \mathbb{Q}$ , então ela é densa (seu fecho é todo o toro).

Essas propriedades para trajetórias de bilhares no quadrado unitário  $\mathcal{D}$  podem ser reformuladas da seguinte forma:

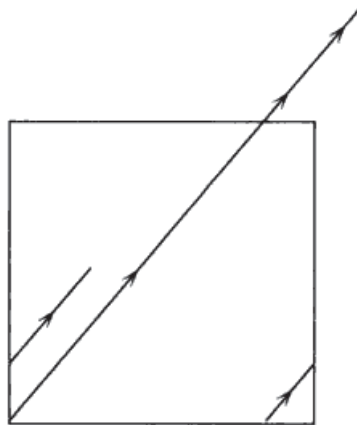
**Corolário 1.3.** Seja  $v = (u_0, w_0)$  o vetor velocidade da partícula em um instante  $t$ . Se  $w_0/u_0 \in \mathbb{Q}$ , então a correspondente trajetória regular (que não atinge um vértice) do bilhar no quadrado  $\mathcal{D}$  é periódica. Se  $w_0/u_0 \notin \mathbb{Q}$ , então a correspondente trajetória regular do bilhar é densa.

*Demonstração.* Seja  $x = (x_1, x_2)$  a posição da partícula no tempo  $t$  e com velocidade  $v$ . Assim,

$$\frac{dx_1}{dt} = u_0, \quad \frac{dx_2}{dt} = w_0. \quad (1.7)$$

Podemos integrar esse sistema de equações diferenciais explicitamente. O fluxo resultante  $\{\Phi_v^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ , possui a forma

$$\Phi_v^t(x_1, x_2) = (x_1 + u_0 t, x_2 + w_0 t) \pmod{1}. \quad (1.8)$$



**Figura 1.9.** Fluxo linear no toro.

O toro  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ , pode ser representado pelo quadrado unitário  $\mathcal{D}$  com os pares de lados opostos identificados. Nessa representação, as curvas integrais do sistema (1.7) são segmentos de reta com inclinação  $\gamma = w_0/u_0$  (veja Figura 1.9). A trajetória ao longo da órbita é uniforme com “saltos” instantâneos aos correspondentes pontos quando a



órbita atinge a fronteira do quadrado. Se considerarmos os sucessivos momentos quando uma órbita intersecta o círculo  $C_1 = \{x_1 = 0\}$ , a coordenada  $x_2$  muda por exatamente  $\gamma \pmod{1}$  entre tais dois retornos. Assim, pela Proposição 1.1 se  $\gamma = w_0/u_0$  é irracional, o fecho de cada órbita contém o círculo  $C_1$  e como a imagem desse círculo sob o fluxo  $\{\Phi_v^t\}$  cobre todo o toro, o fluxo é minimal, isto é, cada órbita é densa em  $\mathbb{T}^2$ . Se  $\gamma$  é racional, então cada órbita é fechada e como  $\mathcal{D}$  é compacto, segue que a correspondente trajetória do bilhar é periódica. ■

**Observação 1.1.** O resultado acima pode ser estendido para os seguintes polígonos: retângulo, triângulo equilátero, triângulo retângulo isósceles, triângulo retângulo com ângulo agudo  $\pi/6$  e hexágono regular.

Para o bilhar no retângulo, sejam  $a$  e  $b$  seus lados. Fazendo a mudança de coordenadas  $(x, y) \mapsto (x/a, y/b)$ , transformamos o retângulo no quadrado unitário. Assim, se  $(\bar{x}/a, \bar{y}/b)$  é a posição da partícula no tempo  $t$ , temos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\bar{x}}{a} \right) = \frac{1}{a} \frac{d\bar{x}}{dt}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\bar{y}}{b} \right) = \frac{1}{b} \frac{d\bar{y}}{dt}. \quad (1.9)$$

Logo, a inclinação das trajetórias do bilhar com essa mudança será

$$\gamma = \frac{a \, d\bar{y}}{b \, d\bar{x}} = \frac{a \, w_0}{b \, u_0}.$$

Pelo Corolário 1.3 concluímos que a trajetória regular do bilhar no retângulo é periódica se  $(aw_0)/(bu_0) \in \mathbb{Q}$  e densa caso contrário.

Como na seção anterior, o espaço de fase do bilhar no quadrado  $\mathcal{D}$  será  $\Omega = \mathcal{D} \times S^1$ . O fluxo do bilhar  $\Phi^t$  está definido para todo  $t \in \mathbb{R}$  somente em *trajetórias regulares*, isto é, somente em trajetórias que não tocam um vértice. Trajetórias que tocam um vértice de  $\mathcal{D}$  em algum tempo serão chamadas de *trajetórias excepcionais*. A excepcionalidade de tais trajetórias se deve ao fato de que não há reta tangente nos vértices de  $\mathcal{D}$ , como é o caso descrito no semi-círculo. Dessa forma, em trajetórias excepcionais definimos o fluxo somente até a trajetória terminar em um vértice.

A próxima afirmação é um caso particular do Teorema 2.2 que iremos demonstrar no próximo capítulo.

**Afirmção 1.6.** O conjunto das trajetórias excepcionais é uma união enumerável de superfícies de dimensão 2 em  $\Omega$ .

Embora o conjunto das trajetórias excepcionais seja “desprezível” do ponto de vista da teoria da medida e topológico, isto é, tenha medida de Lebesgue nula e seja um conjunto

$F_\sigma$  (veja Corolário 2.2), sua presença incomoda. O objetivo é definir o fluxo  $\Phi^t$  em todo  $\Omega$  e que seja contínuo. Para isso, o próximo resultado irá nos livrar dessas trajetórias.

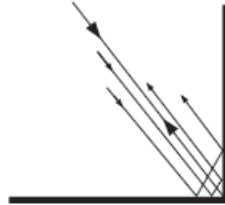
**Proposição 1.3.** O fluxo  $\Phi^t$  pode ser unicamente estendido por continuidade de todas as trajetórias excepcionais. Nesse caso, toda trajetória que toca um vértice de  $\mathcal{D}$  reverte seu curso de volta em linha reta (veja Figura 1.10).

*Demonstração.* Fixemos uma trajetória excepcional e um ponto fase  $(p, v)$  pertencente a mesma. Se  $t_1$  é o tempo que a partícula leva para colidir com o vértice, então  $\Phi^{2t_1}(p, v) = (p, -v)$  é a extensão do fluxo no vértice. Considere o ponto fase  $(q, v)$  fora da trajetória excepcional de modo que a reta que contém  $p$  e  $q$  é perpendicular às trajetórias consideradas por  $p$  e  $q$ . O fato do vértice do quadrado fazer um ângulo reto, implica que o tempo de colisão da partícula, na vizinhança do vértice, que sai da posição  $q$  mais sua extensão também é  $2t_1$ . Assim, dado  $\epsilon > 0$ , tomamos  $\delta = \epsilon$  na definição de limite e obtemos

$$\lim_{(q,v) \rightarrow (p,v)} \Phi^{2t_1}(q, v) = \Phi^{2t_1}(p, v),$$

como desejado. Note que se tomarmos o ponto fase  $(q, v')$ , com  $v \neq v'$ , ao invés de  $(q, v)$ , as distâncias entre tais trajetórias tendem a zero.

■



**Figura 1.10.** Extensão do fluxo perto de um vértice.

Note que a convergência dos vetores se referem a convergência de suas direções e sentidos. Na Proposição 1.3 usamos fortemente o fato do vértice fazer um ângulo reto. Em bilhares mais gerais, tal extensão nem sempre é possível. Algumas hipóteses devem ser satisfeitas no caso em que o vértice não forma um ângulo reto. Comentaremos sobre isso no Capítulo 2.

Com o resultado acima, o fluxo  $\Phi^t$  fica definido e contínuo em todo  $\Omega$ .

### 1.3 Um Modelo Mecânico

Descrevemos agora, um modelo simples do movimento de duas partículas no interior do intervalo  $[0, 1]$ . Tal modelo serve como motivação para o estudo dos bilhares. Veremos que o movimento das partículas em  $[0, 1]$  se reduzirá ao bilhar num triângulo retângulo.

Consideremos duas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$  em um intervalo unitário  $0 \leq x \leq 1$ . As partículas movem livremente e colidem uma com a outra e também com as extremidades do intervalo  $x = 0$  e  $x = 1$  de forma elástica.

**Definição 1.4.** Uma *colisão elástica* em um sistema isolado é aquela na qual existe conservação da energia cinética (e do momento linear).

Uma colisão elástica ocorre quando as forças que atuam entre os corpos são forças conservativas.

Sejam  $x_1$  e  $x_2$  as posições das partículas e  $u_1$  e  $u_2$  suas velocidades. Vamos assumir que  $x_1 \leq x_2$  em todo tempo.



**Figura 1.11.** Duas partículas no intervalo unitário

Quando uma partícula colide com uma extremidade, sua velocidade mudará de sinal, isto é, simplesmente reverte sua velocidade. Denotemos por  $u_i^-$  e  $u_i^+$ ,  $i = 1, 2$ , as velocidades antes e após a colisão das partículas (quando houver). Como a colisão é elástica, há conservação do momento total e da energia cinética, isto é,

$$\begin{cases} m_1 u_1^+ + m_2 u_2^+ = m_1 u_1^- + m_2 u_2^- \\ m_1 [u_1^+]^2 + m_2 [u_2^+]^2 = m_1 [u_1^-]^2 + m_2 [u_2^-]^2 \end{cases} \quad (1.10)$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos

$$u_1^+ = u_1^- + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}(u_2^- - u_1^-)$$

e

$$u_2^+ = u_2^- + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}(u_1^- - u_2^-).$$

Note que se  $m_1 = m_2$  então  $u_1^+ = u_2^-$  e  $u_2^+ = u_1^-$ .

Ao invés de trabalharmos com as variáveis  $x_i$  e  $u_i$ , por conveniência, iremos trabalhar com as novas variáveis

$$q_i = x_i \sqrt{m_i} \quad e \quad v_i = \frac{dq_i}{dt} = u_i \sqrt{m_i} \quad , \quad i = 1, 2.$$

Com isso, as posições das partículas são descritas pelo ponto  $q = (q_1, q_2)$ , chamado ponto de configuração. O conjunto de todos os pontos de configuração

$$\mathcal{D} = \{q = (q_1, q_2) : 0 \leq q_1/\sqrt{m_1} \leq q_2/\sqrt{m_2} \leq 1\}$$

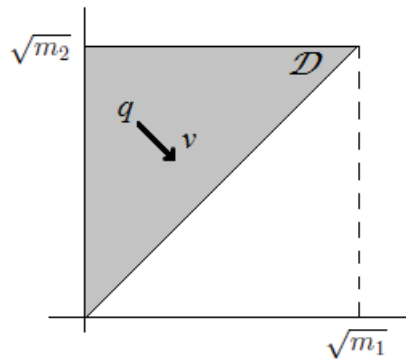
chamado de espaço de configuração é um triângulo retângulo.

Agora, as partículas movem com vetor velocidade  $v = (v_1, v_2)$ .

Observe que

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2} = \text{const},$$

pela Lei de Conservação de Energia (1.10). Assim, podemos supor que  $\|v\| = 1$ . O estado do sistema é descrito pelo par  $(q, v)$ , isto é, o ponto de configuração  $q$  move em  $\mathcal{D}$  com vetor velocidade  $v$ .



**Figura 1.12.** Movimento do ponto de configuração  $q$  em  $\mathcal{D}$ .

Quando a primeira partícula atinge com a extremidade  $x_1 = 0$ , temos  $q_1 = x_1 \sqrt{m_1} = 0$ , assim o ponto de configuração tem como coordenada  $q = (0, q_2)$ , ou seja, o ponto de configuração  $q$  atinge o lado esquerdo do triângulo  $\mathcal{D}$ . Quando a segunda partícula colide com a extremidade  $x_2 = 1$ , tem-se  $q_2 = x_2 \sqrt{m_2} = \sqrt{m_2}$ , isto é,  $q = (q_1, \sqrt{m_2})$  isto significa que  $q$  atinge o lado superior de  $\mathcal{D}$ . Agora quando as partículas colidem uma com a outra, temos

$$q_1 = x \sqrt{m_1} \quad e \quad q_2 = x \sqrt{m_2} \quad ,$$

para alguma posição  $x \in (0, 1)$ . Assim, segue que

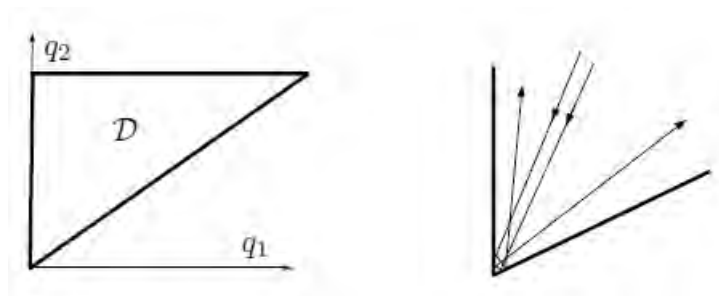
$$\frac{q_1}{\sqrt{m_1}} = \frac{q_2}{\sqrt{m_2}} \implies q_2 = \frac{\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1}} q_1,$$

ou seja, o ponto de configuração  $q = (q_1, q_2)$  está na hipotenusa de  $\mathcal{D}$ .

O vetor velocidade  $v$  muda nas colisões de modo que ele se reflete na fronteira  $\partial\mathcal{D}$  de acordo com a lei “o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão”. Assim, o ponto de configuração  $q$  é governado pela regra do bilhar. Dessa forma, concluímos que a evolução do modelo mecânico de duas partículas em um intervalo unitário se reduz a dinâmica do bilhar em um triângulo retângulo.

Note que quando  $m_1 = m_2$  temos que  $\mathcal{D}$  é um triângulo retângulo isósceles o qual se reduz ao bilhar no quadrado pela Observação 1.2. Para massas distintas, temos um triângulo retângulo genérico que, por sua vez, a dinâmica se torna bem mais complicada. Esse caso não discutiremos nesse trabalho.

Um pergunta natural é: quando o ponto de configuração  $q$  atinge um vértice de  $\mathcal{D}$ ? Suponhamos que  $q$  esteja no vértice do ângulo reto de  $\mathcal{D}$ , isto é,  $q = (0, \sqrt{m_2})$  o que acarreta  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 1$ . Assim, concluímos que  $q$  atinge um vértice do ângulo reto de  $\mathcal{D}$  se ambas as partículas colidem simultaneamente com extremidades opostas do intervalo  $[0, 1]$ . Em seguida, seu movimento ainda está bem definido, uma vez que podemos estender o fluxo por continuidade visto no Lema 1.3. Suponhamos agora que o ponto de configuração esteja em um vértice de um ângulo agudo. Logo,  $q = (0, 0)$  ou  $q = (\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2})$ , isto é,  $x_1 = x_2 = 0$  ou  $x_1 = x_2 = 1$ . Isso significa que  $q$  estará em um vértice de um ângulo agudo de  $\mathcal{D}$  quando ambas as partículas simultaneamente colidem com alguma extremidade ( $x = 0$  ou  $x = 1$ ). Nesse caso, para massas  $m_1$  e  $m_2$  distintas o fluxo do bilhar não pode ser estendido por continuidade. Tomando duas trajetórias próximas atingindo os dois lados adjacentes em diferentes ordens, tais trajetórias voltarão a  $\mathcal{D}$  ao longo de diferentes retas (veja Figura 1.13).



**Figura 1.13.** O triângulo retângulo  $\mathcal{D}$ ; duas trajetórias próximas de um ângulo agudo.

Atingir um vértice de um ângulo agudo, corresponde a uma colisão múltipla em termos mecânicos. Tais colisões não podem ser resolvidas pelas leis da mecânica clássica.

## 1.4 Bilhar na Elipse

Em 1927 Birkhoff descreveu esse exemplo em [2].

Denotemos o bordo de  $\mathcal{D}$  como sendo a elipse  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0\}$  de focos  $F_1$  e  $F_2$ . Por definição, uma elipse é o conjunto dos pontos  $A \in \mathbb{R}^2$  tais que a soma das distâncias de  $A$  aos dois focos  $F_1$  e  $F_2$  é constante.

**Proposição 1.4.** Sejam  $A \in \partial\mathcal{D}$  e  $L$  a reta tangente à elipse por  $A$ . Então os segmentos  $AF_1$  e  $AF_2$  fazem ângulos iguais com  $L$ . (Esse fato é conhecido em geometria projetiva como Teorema de Poncelet.)

Para demonstrarmos a Proposição 1.4, precisamos dos seguintes resultados que podem ser encontrados em qualquer livro de Cálculo 2.

**Lema 1.2.** Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ . Então  $\nabla f(x, y)$  é perpendicular às curvas de nível de  $f$ , ou seja, é perpendicular à reta tangente à curva no ponto de tangência.

O  $\nabla f(x, y)$  é também designado por normal à curva.

**Lema 1.3.** Seja  $G$  um ponto do plano e  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(X) = |X - G|$ . Então  $g$  é derivável em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{G\}$  e  $\nabla g(X) = \frac{X - G}{|X - G|}$ .

*Demonstração.* (da Proposição 1.4) Defina  $f : \partial\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\begin{aligned} f(X) &= \text{dist}(X, F_1) + \text{dist}(X, F_2) \\ &= |X - F_1| + |X - F_2| \\ &= c \end{aligned}$$

para valores de  $c > |F_2 - F_1|$ . Assim, podemos escrever  $f(X) = f_1(X) + f_2(X)$ , onde  $f_1(X) = |X - F_1|$  e  $f_2(X) = |X - F_2|$ , logo pelo Lema 1.3, temos  $\nabla f_1(X) = \frac{X - F_1}{|X - F_1|}$  e  $\nabla f_2(X) = \frac{X - F_2}{|X - F_2|}$ .

Então,

$$\nabla f(X) = \frac{X - F_1}{|X - F_1|} + \frac{X - F_2}{|X - F_2|},$$

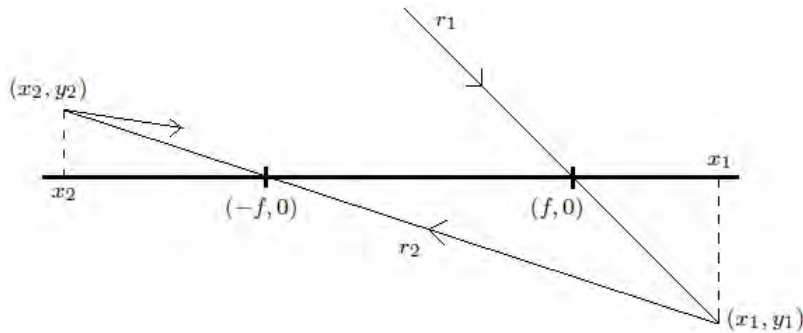
daí o gradiente de  $f$  é a soma de dois vetores unitários. Pela regra do paralelogramo os vetores unitários formam com a normal (gradiente de  $f$ ) à curva ângulos iguais. Como  $A$  é um ponto qualquer de  $\partial\mathcal{D}$ , segue o resultado. ■

**Observação 1.2.** Segue dos resultados acima que o  $\nabla f(X)$  bissecta o ângulo  $F_1XF_2$  e é perpendicular à tangente.

Assim se a partícula segue na direção e sentido do vetor  $A - F_1$ , então após colidir em  $A$ , a partícula segue na direção do vetor  $A - F_2$  mas com sentido contrário, ou seja, em direção ao segundo foco. Portanto, se a trajetória do bilhar passa por um dos focos, após colidir com  $\partial\mathcal{D}$  tal trajetória irá para o outro foco e assim por diante (veja Figura 1.14).

**Afirmção 1.7.** Toda trajetória passando pelos focos  $F_1$  e  $F_2$  converge para o eixo maior da elipse (o eixo  $x$ ).

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, suponhamos que  $F_1 = (-f, 0)$  e  $F_2 = (f, 0)$  como mostra a Figura 1.14. Fixemos uma trajetória do bilhar que passa por  $(f, 0)$  e denotemos por  $r_1$  a reta que a contém. Se o coeficiente angular  $m_1$  da reta  $r_1$  é igual a zero, não temos nada a provar. Suponhamos então que a mesma tenha coeficiente angular  $m_1 < 0$ . Seja  $(x_1, y_1)$  o ponto de colisão que  $r_1$  faz com a elipse. Note que  $x_1 > f$ ,  $y_1 < 0$ , e ainda,  $m_1 = y_1/(x_1 - f)$ . Considere  $r_2$  a outra reta que contém a trajetória consecutiva após a colisão. Denotemos o ponto da próxima colisão por  $(x_2, y_2)$ . Observe também que  $x_2 < -f$ ,  $y_2 > 0 > y_1$  e  $m_2 = y_2/(x_2 + f)$ , logo  $m_1 < m_2$ . Uma outra reta  $r_3$  cujo ponto de colisão consecutivo é  $(x_3, y_3)$  tem como coeficiente angular  $m_3 = y_3/(x_3 - f)$  e satisfaz  $x_3 > x_2$  e  $y_3 < y_2$  assim  $m_1 < m_2 < m_3$ . Continuando esse processo, obtemos uma sequência crescente e limitada superiormente  $m_1 < m_2 < m_3 \cdots < 0$ , logo tal sequência  $(m_j)_{j \in \mathbb{N}}$  possui limite. Se o limite dessa sequência é diferente de zero, as trajetórias que passam pelo foco tendem para uma trajetória periódica que não é o eixo maior nem o eixo menor da elipse. Porém, pela monotonicidade da sequência  $(m_j)_{j \in \mathbb{N}}$ , os ângulos de reflexão que as trajetórias fazem com a elipse após consecutivas colisões, são diferentes. O que contradiz o fato da trajetória ser periódica. ■



**Figura 1.14.** Esboço da demonstração da Afirmação 1.7.

Na Seção 1.1 usamos as coordenadas  $\psi$  e  $\theta$  para descrever colisões no bilhar circular. A coordenada  $\theta$  era o parâmetro comprimento de arco no círculo. Aqui, usaremos as

coordenadas  $\psi$  e  $r$ , onde  $\psi$  é o mesmo ângulo de reflexão como na Seção 1.1 e  $r$  é um parâmetro comprimento de arco na elipse. Convencionamos que o ponto referência  $r = 0$  como sendo a extremidade  $(a, 0)$  na elipse e  $r$  orientado no sentido anti-horário. Observe que  $0 \leq r \leq |\partial\mathcal{D}|$  e  $0 \leq \psi \leq \pi$ .

Novamente, o espaço de colisão  $\mathcal{M} = [0, |\partial\mathcal{D}|] \times [0, \pi]$  é um cilindro, cuja base é a elipse e altura  $\pi$  (imagine o retângulo  $\mathcal{M}$  com os lados esquerdo e direito identificados).

O movimento da partícula do bilhar de colisão à colisão, induz a aplicação colisão  $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ .

**Proposição 1.5.** Se a trajetória do bilhar cruza o segmento  $F_1F_2$  que une os dois focos, então ela se reflete em  $\partial\mathcal{D}$  e cruza o segmento novamente. Da mesma forma, se a trajetória cruza o eixo maior fora do segmento  $F_1F_2$ , digamos a esquerda de  $F_1$ , então após colidir com  $\partial\mathcal{D}$  cruzará o eixo maior a direita de  $F_2$ .

Antes de demonstrarmos a proposição acima, precisamos do seguinte lema:

**Lema 1.4.** Sejam  $A_0A_1$  e  $A_1A_2$  segmentos consecutivos da mesma trajetória do bilhar elíptico com focos  $F_1$  e  $F_2$ . Então, os ângulos  $A_0A_1A_2$  e  $F_1A_1F_2$  tem a mesma bissetriz.

*Demonstração.* Pela lei da reflexão, os ângulos que  $A_0A_1$  e  $A_1A_2$  fazem com a reta tangente à elipse no ponto  $A_1$  são iguais. Dado que  $A_0$ ,  $A_1$  e  $A_2$  não são colineares, o ângulo que  $A_0A_1$  faz com a bissetriz de  $A_0\widehat{A_1}A_2$  é igual ao ângulo que  $A_1A_2$  faz com a mesma bissetriz.

Sejam  $\theta = A_0\widehat{A_1}F_1$  e  $\gamma = F_2\widehat{A_1}A_2$ . Se  $\theta = \gamma$  então as bissetrizes dos ângulos  $A_0A_1A_2$  e  $F_1A_1F_2$  coincidem. Agora, pela Observação 1.2, os ângulos que  $F_1A_1$  e  $F_2A_1$  fazem com a tangente à curva no ponto  $A_1$  são iguais, o que prova que  $\theta = \gamma$ .

Logo, as igualdades entre ângulos verificadas provam que as bissetrizes coincidem. ■

*Demonstração. (da Proposição 1.5)* Sejam  $A_0A_1$  e  $A_1A_2$  segmentos consecutivos da mesma trajetória. Segue do Lema 1.4 que  $A_0\widehat{A_1}A_2$  e  $F_1\widehat{A_1}F_2$  tem a mesma bissetriz. Logo, se  $A_0A_1$  intersecta  $F_1F_2$ , então  $A_1A_2$  também intersecta  $F_1F_2$ . Se  $A_0A_1$  não intersecta  $F_1F_2$ , então  $A_1A_2$  também não vai intersectar  $F_1F_2$ . Por indução sobre  $n$ , sendo  $A_0, \dots, A_n$  os pontos em que a trajetória colide com o bordo  $\partial\mathcal{D}$ , prova-se que se um dos segmentos da trajetória intersecta  $F_1F_2$  então os restantes também o intersectam. Analogamente, se prova que se um dos seus segmentos não intersecta  $F_1F_2$  então nenhum dos restantes intersecta  $F_1F_2$ . ■

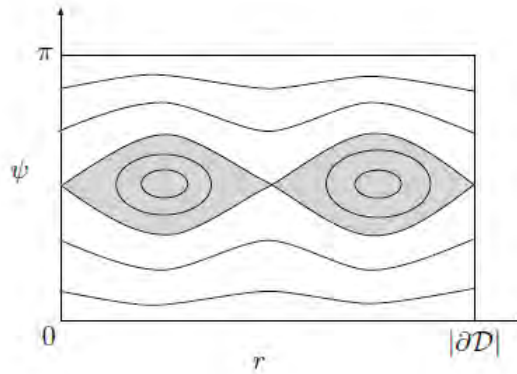
O Lema 1.5 mostra que existem trajetórias de dois tipos:



**Trajatórias interiores:** São aquelas que cruzam o segmento  $F_1F_2$ .

**Trajatórias exteriores:** São aquelas que cruzam o eixo maior da elipse, porém fora do segmento  $F_1F_2$ .

Observamos que todas as trajetórias passando pelo foco são representadas por uma curva fechada (com forma- $\infty$ ) na superfície  $\mathcal{M}$ . Assim, as trajetórias pelo foco fazem uma especial família (unidimensional) em  $\mathcal{M}$ . Já as trajetórias interiores preenchem a área cinza (veja figura 1.15) dos dois domínios em  $\mathcal{M}$  limitados pela curva que tem a forma- $\infty$  e trajetórias exteriores preenchem a área em branco, abaixo e acima da curva com forma- $\infty$ .



**Figura 1.15.** Espaço de colisão do bilhar elíptico.

O próximo resultado é considerado uma das propriedades mais importante nesse bilhar, ele nos garante que para cada tipo de trajetória (interior ou exterior) existe uma curva onde cada trajetória é tangente a essa curva. Curvas com essa propriedade são chamadas de *cáusticas*.

**Definição 1.5.** Uma hipérbole é o conjunto dos pontos  $A \in \mathbb{R}^2$  tais que a diferença das distâncias de  $A$  aos dois focos  $F_1$  e  $F_2$  em valor absoluto é constante.

**Observação 1.3.** Dado um ponto  $A$  na hipérbole de focos  $F_1$  e  $F_2$ , segue da propriedade refletora da hipérbole que a reta tangente a  $A$  bissecta o ângulo  $F_1\hat{A}F_2$ .

**Teorema 1.2.** Seja  $\varepsilon$  a elipse de focos  $F_1$  e  $F_2$ . Para cada trajetória exterior existe uma elipse com focos  $F_1$  e  $F_2$  que é tangente a cada lado dessa trajetória. Para cada trajetória interior existe uma hipérbole com focos  $F_1$  e  $F_2$  que é tangente a cada lado dessa trajetória.

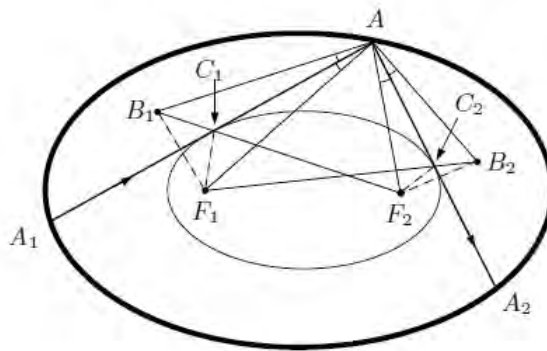
Antes de demonstrarmos o resultado acima, vejamos o seguinte lema:

**Lema 1.5.** Seja  $B$  um ponto pertencente à elipse de focos  $F_1$  e  $F_2$  e pertencente também à um segmento  $A_0A_1$ , tal que o ângulo  $A_0BF_1$  é igual ao ângulo  $F_2BA_1$ . Então  $A_0A_1$  é tangente à elipse no ponto  $B$ .

*Demonstração.* Se o ângulo  $A_0BF_1$  é igual ao ângulo  $F_2BA_1$  então necessariamente pela Proposição 1.4 a reta que contém  $A_0$  e  $A_1$  deve coincidir com a reta tangente por  $B$ . ■

*Demonstração. (do Teorema 1.2)* Dada  $\varepsilon$  a elipse de focos  $F_1$  e  $F_2$ . Sejam  $A_1, A$  e  $A_2$  pontos dessa elipse tais que  $A_1A$  e  $AA_2$  são dois segmentos consecutivos da mesma trajetória. Assuma que  $A_1A$  não intersecta  $F_1F_2$ . Segue do Lema 1.4 que  $A_1\widehat{A}F_1 = A_2\widehat{A}F_2$ . Refletindo  $F_1$  relativamente à  $A_1A$  obtém-se  $B_1$  e refletindo  $F_2$  relativamente à  $AA_2$  obtém-se  $B_2$ . Sejam  $C_1 = B_1F_2 \cap A_1A$  e  $C_2 = B_2F_1 \cap AA_2$ . Considere a elipse  $\varepsilon_1$  com focos  $F_1$  e  $F_2$  passando por  $C_1$ . Temos  $F_2\widehat{C}_1A = F_1\widehat{C}_1A_1$ , pois  $A\widehat{C}_1F_2 = A_1\widehat{C}_1B_1$  (ângulo oposto pelo vértice) e  $A_1\widehat{C}_1B_1 = A_1\widehat{C}_1F_1$  (pela simetria). Pelo lema anterior,  $\varepsilon_1$  é tangente à  $A_1A$  em  $C_1$ . Da mesma forma, uma outra elipse  $\varepsilon_2$  com focos  $F_1$  e  $F_2$  é tangente à  $AA_2$  em  $C_2$ . Se mostrarmos que a elipse  $\varepsilon_1$  é igual a elipse  $\varepsilon_2$ , o teorema fica provado para o caso de trajetórias exteriores. De fato, queremos mostrar que  $|F_1C_1| + |C_1F_2| = |F_1C_2| + |C_2F_2|$  o que se reduz à  $|B_1F_2| = |F_1B_2|$ . Note que  $B_1\widehat{A}A_1 = A_1\widehat{A}F_1 = F_2\widehat{A}A_2 = A_2\widehat{A}B_2$ , assim os triângulos  $B_1AF_2$  e  $F_1AB_2$  são congruentes. Portanto  $|B_1F_2| = |F_1B_2|$  como queríamos.

Suponhamos agora que  $A_1A$  intersecta o segmento  $F_1F_2$ . Com a mesma notação, refletimos  $F_1$  e  $F_2$  relativamente à  $A_1A$  e  $AA_2$  respectivamente e obtemos  $B_1$  e  $B_2$  (resp.). Denotemos por  $C_1$  a interseção da reta determinada por  $F_2$  e  $B_1$  com o segmento  $A_1A$ , e por  $C_2$  a interseção da reta determinada por  $F_1$  e  $B_2$  com o segmento  $AA_2$ . Consideremos uma hipérbole  $h_1$  de focos  $F_1$  e  $F_2$  passando por  $C_1$ . Como  $F_1\widehat{C}_1A = B_1\widehat{C}_1A$ , então pela Observação 1.3,  $h_1$  é tangente à  $A_1A$ . Analogamente, uma outra hipérbole  $h_2$  é tangente à  $AA_2$  em  $C_2$ . Vamos mostrar que as duas hipérbolas são as mesmas. De fato, queremos mostrar que  $|d(F_1, C_1) - d(F_2, C_1)| = |d(F_2, C_2) - d(F_1, C_2)|$ . Note que  $|d(F_1, C_1) - d(F_2, C_1)| = |d(F_1, C_1) - (d(F_2, B_1) + d(B_1, C_1))| = d(F_2, B_1)$ , pois  $d(B_1, C_1) = d(F_1, C_1)$  (pela simetria) e  $|d(F_1, C_2) - d(F_2, C_2)| = |d(F_1, B_2) + (d(B_2, C_2) - d(F_2, C_2))| = d(F_1, B_2)$ . Assim, basta mostrar que  $d(F_2, B_1) = d(F_1, B_2)$ . Temos que os triângulos  $F_1AB_2$  e  $B_1AF_2$  são congruentes, pois  $|AF_1| = |AB_1|$ ,  $|AB_2| = |AF_2|$  e  $F_1\widehat{A}B_2 = B_1\widehat{A}F_2$ . Portanto,  $d(F_2, B_1) = d(F_1, B_2)$ . ■



**Figura 1.16.** Demonstração do Teorema 1.2 para uma cáustica elíptica.

A Figura 1.17 mostra uma cáustica elíptica para uma trajetória exterior e uma cáustica hiperbólica para uma trajetória interior. Na seção 1.1, vimos também que o bilhar circular possui cáusticas (veja Figura 1.5).

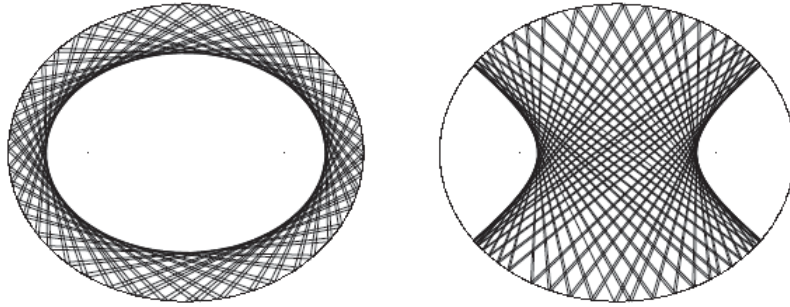
Todas as trajetórias tangentes a uma cáustica elíptica estão em uma curva fechada no espaço de colisão  $\mathcal{M}$ . Tais curvas são mostradas como “ondas horizontais” na área em branco da Figura 1.15 (lembre que os lados esquerdo e direito do retângulo precisam ser identificados). Cada curva é invariante pela aplicação  $\mathcal{F}$ .

**Observação 1.4.** Em cada curva invariante, a aplicação  $\mathcal{F}$  é conjugada à uma rotação por algum ângulo (esse ângulo é chamado número de rotação). O número de rotação muda continuamente e monotonicamente com a curva invariante. A ação da aplicação  $\mathcal{F}$  em cada curva invariante pode ser analisada explicitamente e o número de rotação pode ser calculado analiticamente (veja [1] seções 2.5 e 3.2).

Agora, todas as trajetórias tangentes à uma cáustica hiperbólica estão em duas curvas fechadas em  $\mathcal{M}$ , uma dentro de cada metade do domínio cinza formado pela curva com a forma- $\infty$ . Tais curvas aparecem como ovais na Figura 1.15. A aplicação  $\mathcal{F}$  transforma cada oval em um oval idêntico com a outra metade do domínio cinza. Assim, a união de dois ovais idênticos (simétricos) são invariantes pela  $\mathcal{F}$ , e cada oval separadamente é invariante por  $\mathcal{F}^2$ .

**Definição 1.6.** Se  $\mathcal{M}$  pode ser folheado por subvariedades  $\mathcal{F}$ -invariantes onde  $\dim(\mathcal{M}) = 1$ , então dizemos que  $\mathcal{F}$  é completamente integrável.

De acordo com a definição acima, concluímos que o bilhar na elipse e no círculo unitário são completamente integráveis. A pergunta natural a fazer é: Existe outro bilhar que não seja no círculo e na elipse completamente integrável? Essa questão é conhecida como



**Figura 1.17.** Cáusticas elíptica e hiperbólica no bilhar elíptico.

*Conjectura de Birkhoff.* Os únicos bilhares completamente integráveis são em círculos e elipses.

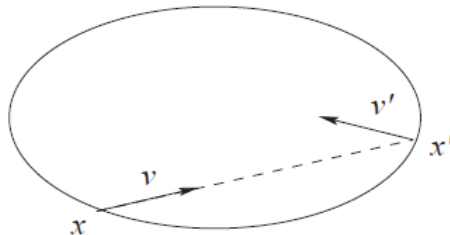
A conjectura ainda está em aberto e muitos matemáticos acreditam ser verdadeira.

**Definição 1.7.** Se um sistema dinâmico suave  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  admite uma função não constante, suave e invariante por  $F$  (isto é, existe uma função  $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo  $T(Fx) = T(x)$  para todo  $x \in \mathcal{M}$ ), então  $T$  é chamada uma integral primeira e  $F$  é dito integrável.

Note que, se  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  é integrável, então cada superfície de nível  $S_c = \{T(x) = c\}$  é  $\mathcal{F}$ -invariante. De fato, dado  $y \in F(S_c)$  existirá  $x \in S_c$  tal que  $y = F(x)$ , daí  $Ty = T(Fx) = Tx = c$ , logo  $y \in S_c$ , ou seja,  $F(S_c) \subset S_c$ . Assim  $\mathcal{M}$  pode ser folheado por hipersuperfícies invariantes. Se  $\dim(\mathcal{M}) = d$  e  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  admite  $d-1$  integrais primeiras independentes  $T_1, T_2, \dots, T_{d-1}$ , então  $\mathcal{M}$  pode ser folheado por subvariedades unidimensionais  $F$ -invariantes  $\{T_1(x) = c_1, \dots, T_{d-1}(x) = c_{d-1}\}$  onde  $c_1, \dots, c_{d-1} \in \mathbb{R}$ . É imediato que se  $d = 2$ , todo sistema integrável é completamente integrável.

Vejamos agora que o bilhar na elipse é um sistema integrável.

Considere a elipse de equação  $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ . Recorde que o espaço de fase do bilhar consiste de todos os vetores unitários  $(x, v)$  com  $x \in |\partial D|$  e  $v$  com direção para dentro da elipse.



**Figura 1.18.** Aplicação do bilhar na elipse.

**Proposição 1.6.**  $T(x, v) = \frac{x_1 v_1}{a_1^2} + \frac{x_2 v_2}{a_2^2}$  é uma integral primeira.

*Demonstração.* Sejam  $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2^2} \end{bmatrix}$  e  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ . A elipse considerada pode ser escrita na forma:  $Bx \cdot x = 1$ .

Seja  $(x, v)$  um ponto fase tal que  $F(x, v) = (x', v')$ . Basta provarmos que  $Bx \cdot v = Bx' \cdot v'$ , ou seja,  $T(x, v) = T(F(x, v))$ . De fato, pode-se verificar a seguinte identidade  $B(x + x') \cdot (x - x') = 0$ , uma vez que  $x$  e  $x'$  pertencem à elipse e  $B$  é simétrica.

Agora, como  $v$  é colinear com  $x' - x$ , temos  $Bx \cdot v = -Bx' \cdot v$ .

Seja  $\psi(x') = \frac{Bx' \cdot x'}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{x_1'^2}{a_1^2} + \frac{x_2'^2}{a_2^2} \right)$ . Temos que  $\nabla\psi(x') = Bx'$  e sabemos que o vetor gradiente é ortogonal às curvas de nível de  $\psi$ , em particular,  $\nabla\psi(x') = Bx'$  é ortogonal à elipse. Temos também que  $v + v'$  é tangente à elipse (veja Proposição 1.4).

Portanto,  $Bx' \cdot (v' + v) = 0 \Rightarrow Bx' \cdot v' = -Bx' \cdot v = Bx \cdot v$ . Ou seja,  $Bx'v' = Bx \cdot v$ , como queríamos. ■

---

---

## CAPÍTULO 2

---

# Construções

### 2.1 Mesas de Bilhares

Neste capítulo iremos construir as mesas de bilhares planares e estudaremos a dinâmica de uma partícula pontual no interior dessas mesas. É comum definir a dinâmica do bilhar em uma região plana como segue:

**Definição 2.1.** Seja  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  um domínio com fronteira suave (ou suave por partes). Um sistema de bilhar corresponde a um movimento livre de uma partícula no interior de  $\mathcal{D}$  com reflexões elásticas na fronteira  $\partial\mathcal{D}$ .

Essa definição está clara quando temos um domínio particular em mãos como foi feito no Capítulo 1. Porém, em estudos mais gerais temos que especificar a classe de domínios a serem considerados. Primeiramente, devemos ter cuidado sobre a fronteira  $\partial\mathcal{D}$ , isto é, permitir ou não que  $\partial\mathcal{D}$  tenha comprimento infinito, ou curvatura ilimitada, ou infinitos pontos de inflexão, etc.

Em muitos artigos sobre bilhares, eles assumem (explicitamente ou implicitamente) que essas ou outras patologias não ocorrem. Em [10], que trata de bilhares mais gerais, demonstra que irregularidades na fronteira pode acarretar sérias complicações na análise da dinâmica do bilhar e tornar suas propriedades mal tratável.

Aqui, assumiremos que essas patologias não ocorrem. Faremos algumas hipóteses no domínio  $\mathcal{D}$  (veja Hipóteses H1 - H3 na seção 2.1 e Hipótese H4 na seção 2.2). Isso nos permite avançar de forma harmoniosa e evitar muitos problemas tão característicos de estudos mais gerais. Nossas Hipóteses H1 - H4 são gerais o suficiente para cobrir praticamente todos os bilhares caóticos conhecidos atualmente.

Seja  $\mathcal{D}_0$  um conjunto aberto, conexo e limitado. Denotemos por  $\mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}_0}$  seu fecho.

HIPÓTESE H1. A fronteira  $\partial\mathcal{D}$  é uma união finita de curvas suaves ( $C^l$ ,  $l \geq 3$ ) compactas:

$$\partial\mathcal{D} = \Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_r,$$

onde cada curva  $\Gamma_i$  é definida por uma  $C^l$  aplicação  $f_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , que é injetora em  $[a_i, b_i]$  e possui derivadas primeira até ordem  $l$  nos pontos  $a_i$  e  $b_i$ . O valor de  $l$  é a classe de suavidade da mesa de bilhar.

Chamaremos de  $\mathcal{D}$  a *mesa do bilhar* e  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$  as *paredes ou componentes* de  $\mathcal{D}$ .

**Observação 2.1.** Se  $f_i(a_i) \neq f_i(b_i)$  então chamaremos de  $\Gamma_i$  de um arco e denotemos  $\partial\Gamma_i = \{f_i(a_i), f_i(b_i)\}$ . Se  $f_i(a_i) = f_i(b_i)$  então  $\Gamma_i$  é uma curva fechada que pode ou não ser inteiramente  $C^l$  suave. Caso ela seja,  $f_i$  pode ser definida em  $S^1$  em vez de  $[a_i, b_i]$  e denotamos  $\partial\Gamma_i = \emptyset$ . Quando ocorrer que a curva fechada  $\Gamma_i$  faltar suavidade no ponto  $f_i(a_i) = f_i(b_i)$ , denotamos por  $\Gamma_i$  esse ponto.

HIPÓTESE H2. Cada componente  $\Gamma_i$  poderá intersectar com outra somente nos extremos, isto é,

$$\Gamma_i \cap \Gamma_j \subset \partial\Gamma_i \cup \partial\Gamma_j \quad \text{para } i \neq j.$$

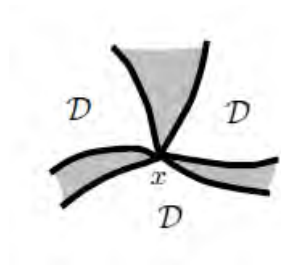
Denotemos por  $\Gamma_* = \partial\Gamma_1 \cup \dots \cup \partial\Gamma_r$  e  $\tilde{\Gamma} = \Gamma \setminus \Gamma_* = \partial\mathcal{D} \setminus \Gamma_*$ .

Os pontos  $x \in \Gamma_*$  serão chamados de *vértices* de  $\mathcal{D}$  e os pontos  $x \in \tilde{\Gamma}$  de *pontos regulares* de fronteira.

**Afirmção 2.1.** Para cada  $x \in \tilde{\Gamma}$ , existe uma vizinhança aberta  $U(x)$  que intersecta uma única componente  $\Gamma_i$  e é dividida por  $\Gamma_i$  em dois abertos conexos; um está no interior de  $\mathcal{D}$  e o outro em  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}$ .

*Demonstração.* Seja  $x \in \tilde{\Gamma}$  um ponto regular de fronteira. Suponhamos que para toda vizinhança aberta  $U(x)$  intersecta mais do que uma componente. Logo existe sequência  $(x_n)$  de pontos de  $\Gamma = \cup_{j=1}^r \Gamma_j$  convergindo para  $x$  e, portanto, existe subsequência  $(x_{n_i}) \in \Gamma_k$  para algum  $k = 1, \dots, r$ . Como  $\Gamma_k$  é fechado, segue que  $x \in \Gamma_k$  daí  $x \in \Gamma_k \cap \tilde{\Gamma}$ , o que implica pela Hipótese H2 que  $x$  é um ponto de vértice, uma contradição. ■

Como Corolário da Afirmção 2.1 segue que para cada vértice  $x \in \Gamma_*$ , existe uma vizinhança aberta  $U(x)$  tal que  $U(x) \cap \Gamma$  é uma união disjunta de  $2m$  curvas para as quais  $x$  é um ponto de extremidade comum (aqui  $m = m_x \geq 1$ ). Elas dividem  $U(x)$  em  $2m$  abertos conexos de modo que  $m$  deles estão no interior de  $\mathcal{D}$  e os outros  $m$  em  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}$ , e esses dois tipos de domínios alternam em torno de  $x$  com  $U(x)$ .



**Figura 2.1.** Um vértice  $x$  com  $m_x = 3$ .

As componentes conexas de  $U(x)$  que estão dentro de  $\mathcal{D}$  são chamadas de vértices do domínio  $\mathcal{D}$ . Cada vértice é limitado por duas curvas  $\Gamma_i, \Gamma_j \subset \Gamma$  convergindo para o ponto  $x$  (chamamos essas curvas de *lados* do vértice) e são caracterizadas pelo ângulo interior  $\gamma$  feito pelas correspondentes retas tangentes em  $x$  (o ângulo visto dentro de  $\mathcal{D}$ ). Se  $\gamma = 0$  chamamos o vértice de cúspide.

Fixemos uma orientação de cada  $\Gamma_i$  de modo que  $\mathcal{D}$  esteja para o lado esquerdo de  $\Gamma_i$ . E ainda, parametrizamos cada  $\Gamma_i$  pelo seu comprimento de arco, assim os vetores tangentes se tornam unitários, isto é,  $\|f'_i\| = 1$ . Isso implicará que o comprimento de cada  $\Gamma_i$  é finito, uma vez que o *comprimento*( $\Gamma_i$ ) :=  $\int_{a_i}^{b_i} \|f'_i(t)\| dt = b_i - a_i$ .

**HIPÓTESE H3.** Em cada  $\Gamma_i$ , a segunda derivada  $f''_i$  ou não se anula em nenhum ponto de  $[a_i, b_i]$  ou é identicamente nula (assim cada componente  $\Gamma_i$  ou é uma curva sem pontos de inflexão ou é um segmento de reta).

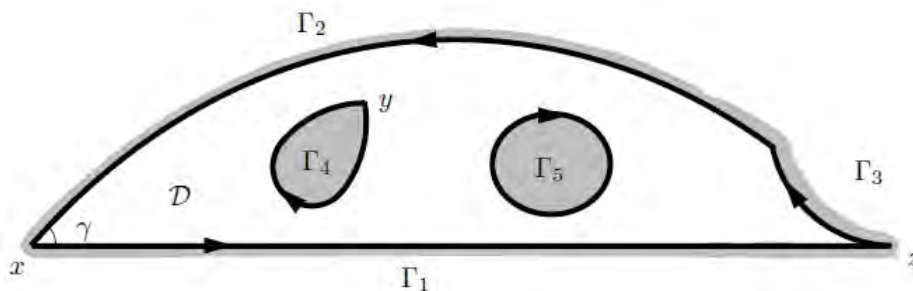
Observe que como  $\|f'_i\| = 1$  então  $\langle f'_i, f'_i \rangle = 1$  e derivando ambos os lados, segue que  $2\langle f''_i, f'_i \rangle = 0$  assim,  $f''_i = 0$  ou  $f''_i \perp f'_i$ . Logo, se supomos que  $f''_i \neq 0$  então existe  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $f''_i = kn_i$ , onde  $n_i$  é o vetor normal à curva  $\Gamma_i$  obtido fazendo uma rotação do vetor  $f'_i$  no sentido anti-horário de um ângulo de  $\pi/2$ . Segue da geometria diferencial que  $f'_i$  é um vetor que tem a direção do percurso da curva, assim como  $f''_i$  é um vetor que sempre aponta para a direção da concavidade da curva. Com isso, podemos distinguir três tipos de componentes:

**Componente flat:** É tal que  $f'' \equiv 0$ ;

**Componente focalizadora:** É tal que  $f'' \neq 0$  está apontando para dentro de  $\mathcal{D}$ ;

**Componente dispersora:** É tal que  $f'' \neq 0$  está apontando para fora de  $\mathcal{D}$ .





**Figura 2.2.** Uma mesa de bilhar. Aqui  $\Gamma_1$  é flat;  $\Gamma_2$  é focalizadora;  $\Gamma_3$  é dispersora;  $\Gamma_4$  é uma curva fechada com um vértice em  $y$ ;  $\Gamma_5$  é uma curva suave fechada; o vértice em  $x$  possui um ângulo interior  $\gamma > 0$ ; e o vértice em  $z$  é uma cúspide. A orientação adotada é mostrada pelas flechas.

**Definição 2.2.** A curvatura (sinal) em cada  $\Gamma_i$  é definida como:

$$\mathcal{K} = \begin{cases} 0, & \text{se } \Gamma_i \text{ é flat;} \\ -\|f''\|, & \text{se } \Gamma_i \text{ é focalizadora;} \\ \|f''\|, & \text{se } \Gamma_i \text{ é dispersora.} \end{cases}$$

Essa escolha de sinais é ditada por uma tradição na literatura dos bilhares, primeiro adotado por Ya. Sinai e sua escola. Contudo, a escolha oposta é às vezes feita também.

Conseqüentemente, definimos:

$$\Gamma_0 = \bigcup_{\mathcal{K}=0} \Gamma_i, \quad \Gamma_- = \bigcup_{\mathcal{K}<0} \Gamma_i, \quad \Gamma_+ = \bigcup_{\mathcal{K}>0} \Gamma_i.$$

Como já observado, cada componente  $\Gamma_i$  possui comprimento finito. Assim, o denotamos por  $|\Gamma_i|$  e  $|\Gamma| := \sum_i |\Gamma_i|$  o perímetro total de  $\mathcal{D}$ .

## 2.2 Fluxo do Bilhar

Nessa seção iremos construir a dinâmica do bilhar. Isso não será uma tarefa simples, uma vez que haverá casos em que a construção falha e conseqüentemente a trajetória do bilhar deixa de ser definida. Denotemos por  $q = q(t) \in \mathcal{D}$  e  $v = v(t) \in \mathbb{R}^2$  a posição e o vetor velocidade respectivamente no tempo  $t \in \mathbb{R}$ . Quando a partícula move dentro da mesa, tal que  $q \in \text{int}(\mathcal{D})$ , seu vetor velocidade se mantém constante:

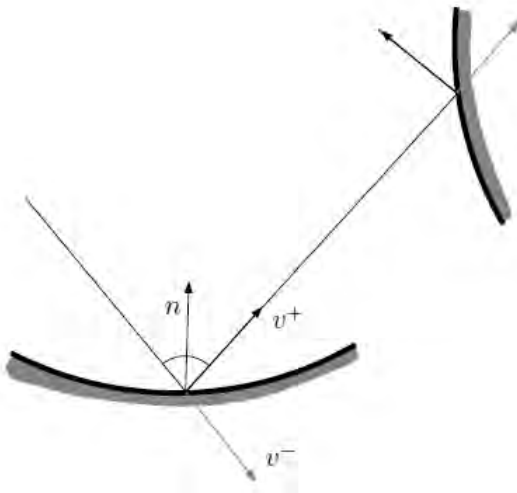
$$\dot{q} = v \quad e \quad \dot{v} = 0, \quad (2.1)$$

onde o ponto denota a derivada com respeito ao tempo.

Se a partícula colide com a fronteira regular, isto é,  $q \in \tilde{\Gamma}$ , seu vetor velocidade se reflete através da reta tangente à  $\Gamma$  no ponto  $q$ . Isso se deve a regra clássica *o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão*. Além disso

$$v^+ = v^- - 2\langle v^-, n \rangle n, \quad (2.2)$$

onde  $v^-$  e  $v^+$  representam os vetores velocidade antes e após a colisão, respectivamente, e  $n$  é o vetor normal unitário à  $\tilde{\Gamma}$  no ponto  $q$  (veja Figura 2.3).



**Figura 2.3.** Mudança do vetor velocidade na colisão.

Quando a partícula colidir com um vértice, isto é  $q \in \Gamma_*$ , a partícula para e seu movimento deixará de ser definido além desse ponto. Essa é uma das complicações que fazem a análise da dinâmica do bilhar difícil.

As equações de movimento (2.1) e (2.2) preservam a norma  $\|v\|$  (veja Afirmação 1.5), assim iremos sempre supor que  $v$  é um vetor unitário.

**Definição 2.3.** Dizemos que uma colisão é regular se  $q \in \tilde{\Gamma}$  e o vetor  $v^-$  não é tangente à  $\Gamma$ . Nesse caso  $v^+ \neq v^-$  (claramente  $v^-$  deve estar apontando para fora de  $\mathcal{D}$ , e  $v^+$  para dentro de  $\mathcal{D}$ ). Se  $v^-$  é tangente à  $\Gamma$  no ponto de colisão, então  $v^+ = v^-$ , nesse caso dizemos que a colisão é tangencial.

Note que colisões tangenciais são possíveis somente em componentes dispersoras, isto é, onde  $\mathcal{K} > 0$ .

**Afirmação 2.2.** Se a partícula colidir com o bordo de  $\mathcal{D}$  em algum tempo  $t$  exceto nos vértices, isto é  $q(t) \in \tilde{\Gamma}$ , então ela irá mover dentro de  $\mathcal{D}$  durante algum intervalo de tempo  $(t, t + \epsilon)$ .

*Demonstração.* Sabemos pela Afirmação 2.1 que para cada  $x \in \tilde{\Gamma}$  existe uma vizinhança aberta  $U(x)$  que intersecta somente uma componente  $\Gamma_i$  e é dividida por  $\Gamma_i$  em dois

abertos conexos; um está no interior de  $\mathcal{D}$  e o outro em  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}$ . Assim, se a partícula colidir com qualquer uma das três componentes no tempo  $t$ , basta tomar  $\epsilon$  como sendo o raio da bola (vizinhança aberta  $U(x)$ ), já que  $\|v\| = 1$ .

■

O resultado acima é importante pois não permite que a partícula “deslize” sobre o bordo  $\partial\mathcal{D}$  após uma colisão.

**Proposição 2.1.** A trajetória da partícula  $(q(t), v(t))$  começando em  $q(0) \in \text{int}(\mathcal{D})$  está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$  a menos que uma das excessões ocorra:

- (a) A partícula toca um vértice de  $\mathcal{D}$ , ou seja,  $q(t) \in \Gamma_*$ .
- (b) Os tempos de colisão  $\{t_n\}$  possui um ponto de acumulação em  $\mathbb{R}$ .

De fato, se (a) ocorre, a trajetória da partícula após a colisão não está mais definida como observado. A condição (b) nos diz que podemos ter infinitas colisões em um tempo finito. Isso realmente é possível? Veremos agora sob que condições (b) é possível.

### 2.2.1 Acumulação de Tempos de Colisão

A condição (b) da proposição anterior só ocorre sob circunstâncias muito especiais. Vamos estudar agora tal condição.

Suponhamos que (b) ocorre, isto é, existe  $t_\infty \in \mathbb{R}$  tal que  $t_n \rightarrow t_\infty$ , consequentemente  $q(t_n) \rightarrow q_\infty \in \Gamma$  e distinguiamos dois casos:

- (b1)  $q_\infty \in \Gamma_*$  (um vértice).
- (b2)  $q_\infty \in \tilde{\Gamma}$  (um ponto regular).

A próxima proposição nos dá uma estimativa para o número de colisões de uma partícula após ela entrar em um vértice de  $\mathcal{D}$  com ângulo positivo.

**Proposição 2.2.** Suponha que a partícula do bilhar entre na vizinhança de um vértice da mesa de bilhar com ângulo interior positivo,  $\gamma > 0$ , e colida com ambos os lados do vértice. Então a partícula deve deixar essa vizinhança após no máximo  $[\pi/\gamma] + 1$  colisões tal que (b1) não ocorre.

*Demonstração.* Suponhamos primeiramente que os lados do vértice sejam flat.

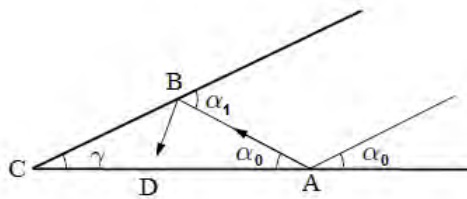
Seja  $\alpha_0$  o ângulo de incidência em que a primeira trajetória da partícula faz com um dos lados do vértice e denotemos por A o ponto dessa colisão. Agora seja  $\alpha_1$  o próximo ângulo de incidência em que a segunda trajetória faz com o outro lado do vértice e chamemos por B tal colisão. Seja C o vértice da mesa do bilhar. Note que  $\alpha_1 = \alpha_0 + \gamma$  pois  $\alpha_1$  é ângulo externo ao triângulo ABC (veja Figura 2.4). Agora se  $\alpha_2$  é o próximo ângulo de incidência e D o ponto de tal colisão, então  $\alpha_2 = \alpha_1 + \gamma = \alpha_0 + 2\gamma$  pois  $\alpha_2$  é externo

ao triângulo BCD. Prosseguindo com esse raciocínio, temos que  $\alpha_{n+1} = \alpha_0 + (n+1)\gamma$ . Assim, para  $n = \lceil \pi/\gamma \rceil$ , tem-se  $\alpha_{n+1} = \alpha_0 + \lceil \pi/\gamma \rceil \gamma + \gamma > \pi$ , isso significa que a partícula deve deixar tal vizinhança.

Agora suponhamos que o vértice é formado por um lado flat e um dispersor. Sejam  $f$  a parametrização do lado dispersor e  $(x_0, f(x_0))$  o vértice da mesa de bilhar. Como  $f$  é diferenciável em  $x_0$ , a equação da reta tangente a  $f$  que passa por  $(x_0, f(x_0))$  em coordenadas cartesianas é  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ , onde  $f'(x_0) = \tan \gamma$  e  $y = 0$  é a equação da reta que contém o lado flat do vértice. Para cada  $x \in D_f$ , seja  $E(x)$  o erro que se comete na aproximação de  $f(x)$  pela reta tangente, assim  $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + E(x)$ . Observe que, para  $x \neq x_0$ , temos

$$\frac{E(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$$

daí  $\lim_{x \rightarrow x_0} E(x)/(x - x_0) = 0$ , ou seja, quando  $x \rightarrow x_0$ , o erro  $E(x)$  tende a zero mais rapidamente que  $(x - x_0)$ . Portanto, com essa aproximação, o comportamento da partícula na vizinhança desse vértice é o mesmo visto para dois lados flat's. Essa demonstração também é válida nos outros casos.



**Figura 2.4.** Prova do Lema 2.2.

■

A Proposição 2.2 implica que (b1) pode ocorrer somente em uma cúspide. O próximo resultado que enunciaremos aqui é um análogo da Proposição 2.2 para cúspides, sua demonstração pode ser encontrada como Lema 2.11 em [3]. Note que em qualquer cúspide tem no mínimo um lado dispersor.

**Proposição 2.3.** Se a partícula do bilhar entra em uma cúspide com dois lados dispersores ou um lado dispersor e o outro flat, então ela deve sair da cúspide após um número finito de colisões, de modo que (b1) não ocorre.

**Corolário 2.1.** O número de colisões em uma cúspide não é uniformemente limitado isto é, para qualquer  $N \geq 1$ , existe uma trajetória do bilhar que “rebate” mais do que  $N$  colisões em uma vizinhança da cúspide antes deixá-la.

Assim pela Proposição 2.3, podemos concluir que (b1) pode ser possível somente em uma cúspide com um lado dispersor e um focalizador. Mas isso realmente é possível? Mesas de bilhares com tais cúspides são muito especiais e não iremos considerá-las aqui. Até o momento não há nada descrito sobre essas mesas na literatura. A última hipótese que faremos aqui consiste em excluir tais mesas.

**HIPÓTESE H4.** Qualquer mesa de bilhar  $\mathcal{D}$  não contém cúspides feitas por uma componente focalizadora e uma dispersora.

Voltemos para o caso (b2), isto é,  $q_\infty \in \tilde{\Gamma}$ .

**Afirmção 2.3.** O caso (b2) é impossível se  $q_\infty$  está em uma componente flat ou dispersora.

*Demonstração.* Se  $t_1, \dots, t_n$  são os tempos da  $i$ -ésima colisão,  $i = 1, \dots, n$ , os termos da sequência  $(q(t_n))_n$  não podem se acumular em componentes flat ou dispersora, visto que pela Afirmção 2.2, se  $q(t_n)$  está em uma dessas componentes, sua imagem pela trajetória não irá pertencer mais a essas componentes. ■

Não podemos usar o argumento acima para componentes focalizadoras, pois os termos da sequência  $(q(t_n))_n$  podem ser acumulados nessas componentes. O próximo Teorema afirma que, sob algumas condições, o caso (b2) é impossível para componentes focalizadoras. Sua demonstração pode ser encontrada em [5]. Nesse mesmo paper encontra-se um exemplo de uma componente focalizadora  $C^2$  (não  $C^3$ ) onde (b2) ocorre.

**Teorema 2.1.** O tipo (b2) é impossível em qualquer componente focalizadora com derivada terceira limitada e curvatura não nula.

Com a Afirmção 2.3 e o Teorema 2.1 temos que (b2) nunca ocorre nas mesas de bilhares da forma que definimos. Concluimos assim que, com a Hipótese H4, a condição (b) da Proposição 2.1 está completamente descartada. Tal condição, de fato, não é interessante do ponto de vista da Teoria da Medida, uma vez que o conjunto dos pontos cuja trajetória possui infinitas colisões em um intervalo de tempo finito tem medida de Lebesgue nula (ver [7] pág.219).

## 2.2.2 Espaço de Fase e Aplicação Fluxo

O principal objetivo aqui, é descrever a posição da partícula em cada instante de tempo  $t$ , quando a mesma sofre ou não colisão com o bordo  $\partial\mathcal{D}$ . Note que o *estado* do movimento da partícula em qualquer tempo é dado pela sua posição  $q \in \mathcal{D}$  e o vetor

velocidade unitário  $v \in S^1$ . Assim, o conjunto de todos os *estados*, denominado *espaço de fase* do sistema, é

$$\Omega = \{(q, v)\} = \mathcal{D} \times S^1,$$

que é uma variedade tridimensional com bordo  $\partial\Omega = \Gamma \times S^1$ . Logo, queremos construir uma aplicação  $\Phi^t$  definida em um subconjunto  $\tilde{\Omega} \subset \mathcal{D} \times S^1$  que seja contínua em  $t$  e seja fluxo, isto é,

$$\Phi^0 = I_{\tilde{\Omega}} \quad e \quad \Phi^{r+t} = \Phi^r \circ \Phi^t = \Phi^t \circ \Phi^r,$$

onde  $I_{\tilde{\Omega}}$  é a identidade em  $\tilde{\Omega}$  e  $t, r$  números reais quaisquer.

No estudo de  $\Phi^t$  que se segue, suporemos sempre  $t > 0$ , pois o caso  $t < 0$  é análogo.

Seja  $(q_0, v^-) \in \tilde{\Omega}$ . Como em  $\mathcal{D}$  o movimento é retilíneo temos, supondo que não haja colisões no intervalo  $[0, t]$ :

$$\Phi^t(q_0, v^-) = (q_0 + tv^-, v^-)$$

Suponhamos agora que haja uma única colisão em  $t_1 \in (0, t]$ . Então  $\Phi^{t_1}(q_0, v^-) = (q_0 + t_1v^-, v^-)$ . No instante de colisão, a direção do movimento muda de  $v^-$  para  $v^+$  seguindo a relação  $v^+ = v^- - 2\langle v^-, n \rangle n$ , onde  $n$  é o vetor normal à  $\Gamma$  em  $q_0 + t_1v^-$  apontando para dentro de  $\mathcal{D}$ .

Esta mudança instantânea na direção do movimento torna a aplicação descontínua. Para remover a descontinuidade, faremos a seguinte identificação, no instante de colisão

$$(q_0 + t_1v^-, v^-) \simeq (q_0 + t_1v^-, v^+)$$

ou equivalentemente identificamos  $v^-$  com  $v^+$ . Como no intervalo  $(t_1, t)$  o movimento é retilíneo teremos então

$$\Phi^t(q_0, v^-) = (q_0 + t_1v^- + (t - t_1)v^+, v^+)$$

e com a identificação, a aplicação  $\Phi^t$  torna-se contínua.

Denotemos por  $\pi_q$  e  $\pi_v$  as projeções de  $\Omega$  em  $\mathcal{D}$  e  $S^1$  respectivamente tal que  $\pi_q(q, v) = q$  e  $\pi_v(q, v) = v$ . Note que se  $q \in \text{int}(\mathcal{D})$  então  $\pi_q^{-1} = \{q\} \times S^1$  e, por abuso de notação, diremos que  $\pi_q^{-1}$  é  $S^1$ , mas se  $q \in \Gamma$  então, com a identificação,  $\pi_q^{-1}$  é meio círculo.

Seja  $\tilde{\Omega} \subset \Omega$  o conjunto dos *estados* em que a dinâmica do movimento da partícula está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Proposição 2.4.** A aplicação  $\Phi^t : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}$  é fluxo.

*Demonstração.* Segue com demonstração análoga ao caso do círculo (ver pág.19). ■

Pela nossa construção, em qualquer intervalo de tempo finito teremos no máximo um número finito de colisões para pontos em  $\tilde{\Omega}$ . Observe que para o caso do círculo, supomos

uma única colisão no intervalo  $(0, t)$ . A Proposição 2.4 ainda é válida para o caso de  $n$  colisões em  $(0, t)$  com instantes  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$ . Nesse caso o fluxo é dado por:

$$\Phi^t(q_i) = \Phi^{t-t_n} \circ \Phi^{t_n-t_{n-1}} \circ \dots \circ \Phi^{t_2-t_1} \circ \Phi^{t_1}(q_i) \quad (2.3)$$

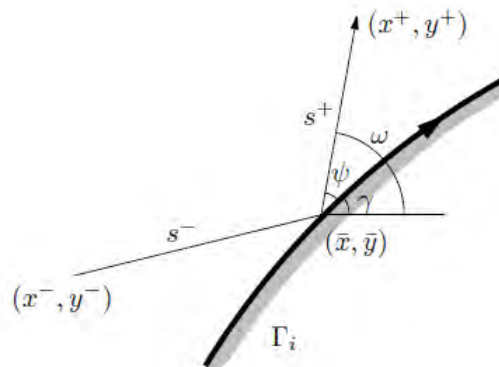
Note que temos um fluxo definido somente onde a dinâmica da partícula está definida. Na próxima seção, veremos que será possível estender o fluxo  $\Phi^t$  por continuidade em todo espaço  $\Omega$ .

Vamos agora dar uma representação do fluxo em coordenadas. Restringiremos a definição a  $\tilde{\Omega}$ , embora pudéssemos definir nos pontos de  $\Omega$  que não estão em vértices ou tangências. Assim, definimos em  $\tilde{\Omega}$  as seguintes coordenadas:  $q = (x, y, \omega)$ , onde  $(x, y) \in \mathcal{D}$  e  $\omega \in [0, 2\pi)$  é o ângulo no sentido anti-horário orientado entre o vetor velocidade  $v$  e o eixo  $x$  positivo. Sejam  $q^- = (x^-, y^-, \omega^-)$  e  $q^+ = (x^+, y^+, \omega^+)$  tais que  $\Phi^t(q^-) = q^+$ . Assim, se não houver colisão no intervalo  $(0, t)$ , temos:

$$\begin{aligned} x^+ &= x^- + t \cos \omega \\ y^+ &= y^- + t \sin \omega \\ \omega^+ &= \omega^- \end{aligned} \quad (2.4)$$

Caso haja uma única colisão (regular) em algum  $\Gamma_i$  durante um intervalo de tempo  $(0, t)$ , a expressão do fluxo é obtida utilizando algumas variáveis intermediárias que caracterizam a colisão.

Sejam  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Gamma_i$  o ponto de colisão,  $\mathbf{T}$  o vetor tangente à  $\Gamma_i$  no ponto, e  $\gamma$  o ângulo entre  $\mathbf{T}$  e o eixo positivo  $x$ . Sejam  $s^-$  o tempo de colisão,  $s^+ = t - s^-$ , e  $\psi$  o ângulo entre  $v^+$  e  $\mathbf{T}$  (veja figura abaixo).



**Figura 2.5.** Ação do fluxo em coordenadas.

Assim,

$$\begin{aligned}x^- &= \bar{x} - s^- \cos \omega^- \\y^- &= \bar{y} - s^- \sen \omega^- \\ \omega^- &= \gamma - \psi\end{aligned}\tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}x^+ &= \bar{x} + s^+ \cos \omega^+ \\y^+ &= \bar{y} + s^+ \sen \omega^+ \\ \omega^+ &= \gamma + \psi\end{aligned}\tag{2.6}$$

Note que se  $s^+ = 0$ , isto é,  $t = s^-$  a equação para o movimento se reduz à (2.4). De fato, nesse caso,  $\omega^+ = \omega^-$  e  $\Phi^{s^-}(x^-, y^-, \omega^-) = (x^+, y^+, \omega^-)$ .

Denotemos por  $\Omega_0$  o conjunto que obtemos retirando de  $\tilde{\Omega}$  o conjunto formado por colisões tangenciais, isto é,  $\Omega_0$  representa todos os estados  $\{(q, v)\}$  cujas colisões são regulares.

**Proposição 2.5.** A aplicação  $\Phi^t : \Omega_0 \longrightarrow \Omega_0$  é um difeomorfismo de classe  $C^{l-1}$ ,  $l \geq 3$ .

*Demonstração.* Sejam  $q^- = (x^-, y^-, \omega^-)$  e  $q^+ = (x^+, y^+, \omega^+)$  em  $\Omega_0$  tais que  $\Phi^t(q^-) = q^+$  para  $t > 0$ . Se não houver colisão no intervalo  $(0, t)$  então pelas Equações (2.4), segue que  $\Phi^t$  é diferenciável de classe  $C^\infty$ . Suponhamos agora que haja uma única colisão em  $s^- \in (0, t)$  tal que  $s^- = t - s^+$  e seja  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Gamma_i$  o ponto de colisão. Sendo  $r$  o parâmetro comprimento de arco em  $\Gamma_i$  e  $\mathcal{K}$  a curvatura de  $\Gamma_i$  em  $r$ , observe que se  $\Gamma_i$  é focalizadora, então o ângulo  $\gamma$  cresce com  $r$ , isto é,  $d\gamma/dr > 0$ , se  $\Gamma_i$  é dispersora,  $\gamma$  decresce com  $r$ , ou seja  $d\gamma/dr < 0$  e assim o sinal de  $d\gamma$  é completamente determinado pela nossa orientação de  $\Gamma_i$ , como definido na Seção 2.1. Logo, obtemos

$$\begin{aligned}d\bar{x} &= \cos \gamma dr \\d\bar{y} &= \sen \gamma dr \\d\gamma &= -\mathcal{K}dr\end{aligned}\tag{2.7}$$

Agora, substituindo (2.7) nas equações obtidas da diferenciação de (2.5) e (2.6), tem-se:

$$\begin{aligned}dx^- &= \cos \gamma dr - \cos \omega^- ds^- + s^- \sen \omega^- d\omega^- \\dy^- &= \sen \gamma dr - \sen \omega^- ds^- - s^- \cos \omega^- d\omega^- \\d\omega^- &= -\mathcal{K}dr - d\psi\end{aligned}\tag{2.8}$$

e

$$\begin{aligned}dx^+ &= \cos \gamma dr + \cos \omega^+ ds^+ - s^+ \sen \omega^+ d\omega^+ \\dy^+ &= \sen \gamma dr + \sen \omega^+ ds^+ + s^+ \cos \omega^+ d\omega^+ \\d\omega^+ &= -\mathcal{K}dr + d\psi\end{aligned}\tag{2.9}$$



Temos que as Equações (2.8) e (2.9) são expressas em termos da curvatura  $\mathcal{K}$  da componente  $\Gamma_i$  que, por sua vez, corresponde à segunda derivada da função  $f_i(r)$  que é de classe  $C^l$  daí  $\Phi^t$  é de classe  $C^{l-1}$ . Note que para  $t < 0$  o raciocínio é análogo, observando que  $\Phi^{-t}$  também é de classe  $C^{l-1}$  e que  $\Phi^t = (\Phi^{-t})^{-1}$ .

Para finalizar, se tivermos  $n$  colisões no intervalo  $(0, t)$  com instantes  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$ , o fluxo é dado pela expressão (2.3) que também é de classe  $C^{l-1}$ , pois é composta de aplicações de classe  $C^{l-1}$ . Desde que provamos o mesmo para  $\Phi^t$  com  $t < 0$  temos que  $\Phi^t$  é difeomorfismo  $C^{l-1}$ ,  $l \geq 3$  em  $\Omega_0$ . ■

**Proposição 2.6.** O fluxo preserva a probabilidade  $d_{\mu_\Omega} = \frac{1}{2\pi|\mathcal{D}|} dx dy d\omega$  que é a medida normalizada de Lebesgue em  $\Omega$ .

*Demonstração.* Fixado um instante de tempo  $t$ , vamos dar a expressão para a derivada de  $\Phi^t$  em  $\Omega_0$ .

Se não houver colisão no intervalo  $(0, t)$ , podemos escrever a Equação (2.4) na seguinte forma matricial:

$$\begin{pmatrix} dx^+ \\ dy^+ \\ d\omega^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t \operatorname{sen} \omega \\ 0 & 1 & t \operatorname{cos} \omega \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^- \\ dy^- \\ d\omega^- \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

logo

$$D_{q^-} \Phi^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t \operatorname{sen} \omega \\ 0 & 1 & t \operatorname{cos} \omega \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

No caso em que há uma única colisão em  $s^- \in (0, t)$  e utilizando o fato que  $ds^+ = -ds^-$ , pois  $t = s^- + s^+$ , então as Equações (2.8) e (2.9) tem representação matricial como segue:

$$\begin{pmatrix} dx^- \\ dy^- \\ d\omega^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma - \mathcal{K} s^- \operatorname{sen} \omega^- & -\cos \omega^- & -s^- \operatorname{sen} \omega^- \\ \operatorname{sen} \gamma + \mathcal{K} s^- \operatorname{cos} \omega^- & -\operatorname{sen} \omega^- & s^- \operatorname{cos} \omega^- \\ -\mathcal{K} & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ ds^- \\ d\psi \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

e

$$\begin{pmatrix} dx^+ \\ dy^+ \\ d\omega^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma + \mathcal{K} s^+ \operatorname{sen} \omega^+ & \cos \omega^+ & -s^+ \operatorname{sen} \omega^+ \\ \operatorname{sen} \gamma - \mathcal{K} s^+ \operatorname{cos} \omega^+ & \operatorname{sen} \omega^+ & s^+ \operatorname{cos} \omega^+ \\ -\mathcal{K} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ ds^- \\ d\psi \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Denotemos, respectivamente, por  $A$  e  $C$  as matrizes em (2.12) e (2.13). Calculando seus determinantes, obtemos  $\det A = \sin(-\psi) = -\sin \psi$  e  $\det C = \sin \psi$ . Como  $0 < \psi < \pi$  então  $\sin \psi \neq 0$  e  $A$  é inversível. Logo

$$D_{q^-} \Phi^t = CA^{-1} \quad (2.14)$$

é a derivada do fluxo em coordenadas  $(x, y, \omega)$ . Agora, tanto em (2.11) quanto em (2.14), temos  $|\det D_{q^-} \Phi^t| = 1$  e pelo Teorema de Mudança de Variáveis segue o resultado. ■

Observe que se existir uma colisão tangencial entre os pontos  $(x^-, y^-, \omega^-)$  e  $(x^+, y^+, \omega^+)$  em uma componente dispersora, o fluxo  $\Phi^t$  não é diferenciável em  $(x^-, y^-, \omega^-)$ . Isso se deve ao fato de que em colisões tangenciais temos  $\psi = 0$  e, portanto, a matriz  $A$  dada na expressão (2.14) não é inversível. Note que nesse caso o fluxo é contínuo (veja figura abaixo).



**Figura 2.6.** Em colisões tangenciais o fluxo é contínuo (porém não é diferenciável).

**Teorema 2.2.** O conjunto  $\Omega \setminus \tilde{\Omega}$  é uma união enumerável de subvariedades de dimensão 2.

*Demonstração.* Lembre que  $\tilde{\Omega} \subset \Omega$  denota o conjunto dos estados  $(q, v)$  em que a dinâmica do movimento da partícula está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Assim,  $\Omega \setminus \tilde{\Omega}$  corresponde aos estados  $(q, v)$  em que a dinâmica está definida somente durante um intervalo de tempo limitado até a trajetória tocar um vértice  $q = (x, y) \in \Gamma_*$  (no passado ou no futuro). Ou seja,

$$\Omega \setminus \tilde{\Omega} = \bigcup_{(x,y) \in \Gamma_*} \pi_q^{-1}(x, y) \bigcup \Phi^t(\pi_q^{-1}(x, y))$$

Sabemos que para cada  $(x, y) \in \Gamma_*$  temos que  $\pi_q^{-1}(x, y)$  é uma curva em  $\tilde{\Omega}$  e que  $\{\Phi^t(q, v)\}$ ,  $(q, v) \in \tilde{\Omega}$ , é uma curva contínua em  $\Omega$ , assim fixando  $(x, y, v_0)$  em  $\pi_q^{-1}(x, y)$  segue que  $\Phi^t(\pi_q^{-1}(x, y))$  é uma variedade de dimensão 2, onde  $t$  é o tempo em que a trajetória leva para atingir outro vértice, isto é, podemos olhar  $\sigma(t, v) := \Phi^t(\pi_q^{-1}(q, v))$ , onde  $q \in \Gamma_*$ ,

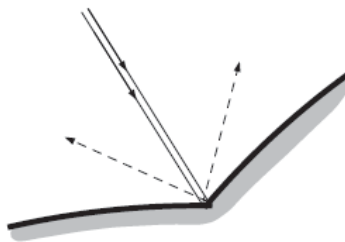
como uma parametrização de uma superfície de dimensão 2. Como temos um número finito de vértices, segue o resultado. ■

**Corolário 2.2.**  $\tilde{\Omega}$  é um conjunto  $G_\delta$  denso de medida de Lebesgue total em  $\Omega$ .

*Demonstração.* De fato, pelo Teorema 2.2 temos que o conjunto  $\Omega \setminus \tilde{\Omega}$  possui medida de Lebesgue nula e é um conjunto fechado, pois é união finita de fechados. Logo, o seu complementar  $\tilde{\Omega}$  é interseção finita de abertos densos e possui medida de Lebesgue total. ■

### 2.2.3 Extensão Contínua do Fluxo

Nessa subseção, daremos a idéia de como estender o fluxo  $\Phi^t$  no espaço  $\Omega$  por continuidade. Lembre que o fluxo  $\Phi^t : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}$  é contínuo, portanto, como  $\tilde{\Omega}$  é um subconjunto denso de medida total em  $\Omega$ , podemos estender o fluxo  $\Phi^t$  por continuidade em todo  $\Omega$ . Porém essa extensão pode não ser única no mesmo ponto  $x \in \Omega$  (veja exemplo na Figura 2.7). Diferentes extensões no mesmo ponto  $x \in \Omega$  são chamadas de *ramos* do fluxo. Para cada  $t \in \mathbb{R}$  existe um número finito de ramos da extensão do fluxo  $\Phi^t$  em qualquer ponto  $x \in \Omega$ . O número de ramos pode crescer indefinidamente quando  $t \rightarrow \pm\infty$ .



**Figura 2.7.** Extensão contínua do fluxo com dois ramos.

Uma trajetória tocando um vértice pode ser estendida, por continuidade, em no máximo dois ramos diferentes e, tais ramos coincidem (isto é, o fluxo é contínuo) se e somente se o ângulo interior  $\gamma$  no vértice ou é igual a zero ou divide  $\pi$  (isto é, ou  $\gamma = 0$  ou  $\gamma = \pi/n$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ ), e ainda, o fluxo  $\Phi^t$  tem extensão global contínua em todo  $\Omega$  se e somente se cada ângulo interior ou é igual a zero ou divide  $\pi$ . Tais fatos podem ser encontrados em [3].

---

---

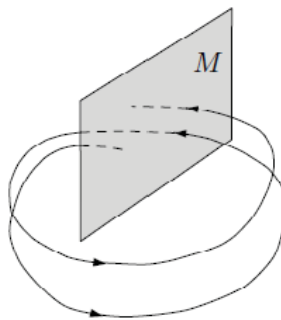
## CAPÍTULO 3

---

# Aplicação de Colisão

O objetivo nesse capítulo é construir a aplicação do bilhar bem como dar uma expressão para sua derivada em termos de coordenadas.

É comum no estudo de sistemas dinâmicos, reduzir um fluxo a uma transformação construindo uma seção transversal. Por exemplo, dado um fluxo  $\Phi^t : \Omega \rightarrow \Omega$  em uma variedade  $\Omega$ , encontramos uma hipersuperfície  $M \subset \Omega$  transversal ao fluxo tal que cada trajetória cruza  $M$  infinitas vezes. Então o fluxo induz uma aplicação de retorno  $F : M \rightarrow M$  e um tempo de retorno  $L(x) = \min\{s > 0 : \Phi^s(x) \in M\}$  em  $M$ , tal que  $F(x) = \Phi^{L(x)}(x)$ .



**Figura 3.1.** Seção transversal de um fluxo.

Para um bilhar, uma seção transversal em  $\Omega$  é geralmente construída na fronteira da mesa de bilhar, isto é, no conjunto  $\Gamma \times S^1$ . Podemos descrever a seção transversal como o conjunto de todos os vetores de velocidade pós-colisão:

$$\mathcal{M} = \bigcup_i \mathcal{M}_i, \quad \mathcal{M}_i = \{x = (q, v) \in \Omega : q \in \Gamma_i, \langle v, n \rangle \geq 0\},$$

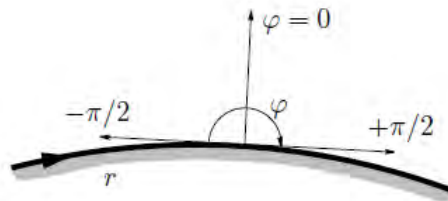
onde  $n$  denota o vetor unitário normal à  $\Gamma_i$  apontando para dentro de  $\mathcal{D}$ . O conjunto  $\mathcal{M}$  é uma subvariedade de dimensão 2 em  $\Omega$  chamado o *espaço de colisão*.

Denotamos por  $\tau(x)$  o primeiro tempo positivo no qual a órbita  $\Phi^t(x)$  intersecta  $\Gamma \times S^1$ , e chamamos esse valor o *tempo de retorno*. Seja  $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \cap \tilde{\Omega}$ . Este define uma aplicação de retorno

$$\mathcal{F} : \tilde{\mathcal{M}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{M}} \text{ dada por } \mathcal{F}(x) = \Phi^{\tau(x)+0}x \quad (3.1)$$

onde o símbolo  $\tau(x) + 0$  indica que estamos tomando tempos que se aproximam de  $\tau(x)$  pela direita. Iremos estender  $\mathcal{F}$  à  $\mathcal{M} \setminus \tilde{\mathcal{M}}$  depois. A aplicação  $\mathcal{F}$  é chamada de *aplicação do bilhar* ou *aplicação colisão* (de acordo com isso,  $\mathcal{M}$  é chamado de *espaço de fase da aplicação do bilhar*  $\mathcal{F}$ ).

Fixemos agora, um parâmetro  $r$  em cada componente  $\Gamma_i$ , de modo que  $r$  toma valores em  $[a_i, b_i]$ . Assumimos aqui que os intervalos são disjuntos em  $\mathbb{R}$ . Em componente fechada  $\Gamma_i$ , identificamos  $a_i$  e  $b_i$ , assim  $r$  é um parâmetro cíclico. Para cada  $x \in \mathcal{M}$ , seja  $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$  o ângulo entre  $v$  e  $n$  orientado como na figura abaixo.



**Figura 3.2.** As orientações de  $r$  e de  $\varphi$ .

Assim  $r$  e  $\varphi$  são as coordenadas em  $\mathcal{M}$ . Note que cada componente fechada  $\Gamma_i$ , a variedade  $\mathcal{M}_i = \Gamma_i \times [-\pi/2, \pi/2]$  é um cilindro (já que  $r$  é uma coordenada cíclica), enquanto que para outras componentes  $\Gamma_i$ , a variedade  $\mathcal{M}_i = [a_i, b_i] \times [-\pi/2, \pi/2]$  é um retângulo (veja Figura 3.3).



**Figura 3.3.** Uma componente do espaço de colisão  $\mathcal{M}$ .

Denotamos

$$S_0 = \partial\mathcal{M} = \{|\varphi| = \pi/2\} \cup \left( \bigcup_i (\{r = a_i\} \cup \{r = b_i\}) \right),$$

onde o conjunto  $\{r = a_i\} \cup \{r = b_i\}$  está incluso apenas para as curvas  $\Gamma_i$  que não são fechadas (constituindo fronteiras para o intervalo  $[a_i, b_i]$ ). Além disso consideramos o seguinte conjunto

$$S_1 = S_0 \cup \{x \in \text{int}\mathcal{M} : \mathcal{F}(x) \notin \text{int}\mathcal{M}\}.$$

Esses são pontos que fazem uma colisão tangencial com uma componente dispersora (isto é,  $\mathcal{F}(x) \in S_0$ ) ou cuja trajetória atinge um vértice e para. Utilizando o mesmo estudo para a inversa  $\mathcal{F}^{-1}$ , escrevemos

$$S_{-1} = S_0 \cup \{x \in \text{int}\mathcal{M} : \mathcal{F}^{-1}(x) \notin \text{int}\mathcal{M}\}.$$

**Proposição 3.1.** A aplicação  $\mathcal{F} : \mathcal{M} \setminus S_1 \longrightarrow \mathcal{M} \setminus S_{-1}$  é um homeomorfismo.

*Demonstração.* Mostremos que a aplicação  $\mathcal{F}$  que associa o par  $(r, \varphi) \in \mathcal{M} \setminus S_1$  ao par  $(r_1(r, \varphi), \varphi_1(r, \varphi)) \in \mathcal{M} \setminus S_{-1}$  é contínua.

De fato, vamos estudar as funções  $r_1(r, \varphi)$  e  $\varphi_1(r, \varphi)$ . Dados  $\tilde{r}$  e  $\tilde{r}_1$  pontos distintos de  $\Gamma$ , consideremos a trajetória do bilhar de  $(\tilde{r}, \tilde{\varphi})$  a  $(\tilde{r}_1, \tilde{\varphi}_1)$ , isto é,  $\mathcal{F}(\tilde{r}, \tilde{\varphi}) = (\tilde{r}_1, \tilde{\varphi}_1)$ . Tomemos

$$\tilde{P}_0 = (x(\tilde{r}), y(\tilde{r})) \quad e \quad \tilde{P}_1 = (x(\tilde{r}_1), y(\tilde{r}_1)).$$

Fazendo se necessário uma rotação da curva  $\Gamma$ , sempre podemos supor  $x'(\tilde{r}) \neq 0$ ,  $x'(\tilde{r}_1) \neq 0$  e  $x(\tilde{r}) \neq x(\tilde{r}_1)$ , onde ' é a derivada com relação a  $r$ . Denotemos por  $P_0 = (x(r_0), y(r_0))$  um ponto arbitrário numa vizinhança  $U_0$  de  $\tilde{P}_0$  e  $P_1 = (x(r_1), y(r_1))$  ponto de uma vizinhança  $U_1$  de  $\tilde{P}_1$ . Podemos supor tais vizinhanças disjuntas pois  $r_0 \neq r_1$ . Por continuidade e reduzindo, se necessário, as vizinhanças  $U_0$  e  $U_1$  podemos sempre tomar  $x'(r_0) \neq 0$ ,  $x'(r_1) \neq 0$  e  $x(r_0) \neq x(r_1)$ .

Consideremos a trajetória do bilhar de  $P_0$  até  $P_1$  com ângulo de saída  $\varphi_0$  e de batida  $\varphi_1$ , ou seja,  $\mathcal{F}(r_0, \varphi_0) = (r_1, \varphi_1)$ .

Seja  $\gamma_0 = \gamma(r_0)$  e  $\gamma_1 = \gamma(r_1)$  os ângulos entre o vetor tangente e o eixo  $x$  positivo nos pontos  $P_0$  e  $P_1$  respectivamente.

Temos que

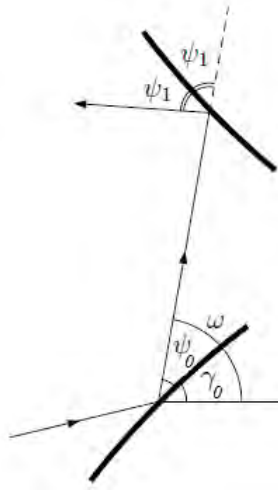
$$\tan(\gamma_0) = \frac{y'(r_0)}{x'(r_0)} \quad e \quad \tan(\gamma_1) = \frac{y'(r_1)}{x'(r_1)}$$

Se  $\omega \in [0, 2\pi)$  é o ângulo entre o eixo  $x$  e a trajetória do bilhar, é fácil ver (veja Figura 3.4) que

$$\psi_0 = \omega - \gamma_0 \quad , \quad \psi_1 = \gamma_1 - \omega,$$

onde  $\psi_0 = \pi/2 - \varphi_0$  e  $\psi_1 = \pi/2 - \varphi_1$ . Assim,

$$\tan(\omega) = \frac{y(r_1) - y(r_0)}{x(r_1) - x(r_0)}$$



**Figura 3.4**

Resolvendo as equações acima para  $\psi_0$  e  $\psi_1$  obtemos:

$$\psi_0 = \arctan\left(\frac{y(r_1) - y(r_0)}{x(r_1) - x(r_0)}\right) - \arctan\left(\frac{y'(r_0)}{x'(r_0)}\right) := G(r_0, r_1) \quad (3.2)$$

$$\psi_1 = \arctan\left(\frac{y'(r_1)}{x'(r_1)}\right) - \arctan\left(\frac{y(r_1) - y(r_0)}{x(r_1) - x(r_0)}\right) := H(r_0, r_1) \quad (3.3)$$

Agora, como  $x(r)$  e  $y(r)$  são contínuas, então as funções  $G : U_0 \times U_1 \rightarrow (0, \pi)$  e  $H : U_0 \times U_1 \rightarrow (0, \pi)$  são contínuas. Por hora vamos verificar, utilizando a Equação (3.2), que a função  $r_1 = r_1(r_0, \varphi_0)$  é contínua em todo  $\mathcal{M} \setminus S_1$ . Isso vai implicar, pela Equação (3.3), que o mesmo vale para  $\varphi_1 = \varphi_1(r_0, \varphi_0)$ . E com isso  $\mathcal{F}$  será contínua em todo  $\mathcal{M} \setminus S_1$ .

Consideremos  $\tilde{U}_1 \subset U_1$  uma vizinhança compacta de  $P_1$  em  $\Gamma$ . Definamos a função contínua  $F_0 : U_0 \times (-\pi/2, \pi/2) \times \tilde{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$F_0(r_0, \varphi_0, r_1) = G(r_0, r_1) + \varphi_0 - \pi/2$$

A continuidade de  $r_1(r_0, \varphi_0)$  segue do seguinte lema cuja demonstração se encontra em ([8], cap.III, pág.162):

**Lema 3.1.** Se  $F_0$  é contínua e  $\xi$  é implicitamente definida por  $F_0(r, \varphi, \xi(r, \varphi)) = 0$ , então  $\xi$  é contínua.

Pelo lema,  $r_1$  é função contínua de  $(r_0, \varphi_0)$  pois se  $(r_0, \varphi_0, r_1)$  satisfaz (3.2) então  $F_0(r_0, \varphi_0, r_1) = 0$  e  $F_0^{-1}(0)$  é o gráfico de  $r_1(r_0, \varphi_0)$ .

A continuidade de  $\mathcal{F}^{-1}$  segue de modo análogo. ■

Vamos agora dar uma expressão para a derivada da aplicação  $\mathcal{F}$  em um ponto  $x = (r, \varphi) \in \text{int}\mathcal{M}$  tal que  $\mathcal{F}(x) = (r_1, \varphi_1) \in \text{int}\mathcal{M}$ .

Sejam  $(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \in \Gamma$ , as coordenadas do ponto de colisão correspondendo a  $r$  e  $r_1$ , respectivamente, e por  $\omega$  o ângulo feito pela trajetória do bilhar e o eixo  $x$  positivo. Seja também  $\tau = \tau(x)$  a distância entre tais pontos como na Figura 3.4.

$$\bar{x}_1 - \bar{x} = \tau \cos \omega \quad e \quad \bar{y}_1 - \bar{y} = \tau \sin \omega \quad (3.4)$$

De acordo com a notação usada anteriormente e pela figura acima, temos que  $\psi = \pi/2 - \varphi$  e pela Equação (2.7), segue que:

$$\begin{aligned} d\bar{x} &= \cos \gamma dr \\ d\bar{y} &= \sin \gamma dr \\ d\gamma &= -\mathcal{K}dr \end{aligned} \quad (3.5)$$

No ponto  $r_1$  usaremos  $\gamma_1$  e  $\psi_1$  como notação similar. Assim notemos que:

$$\omega = \gamma + \psi = \gamma_1 - \psi_1 \quad (3.6)$$

Diferenciando (3.6) tem-se

$$d\omega = -\mathcal{K}dr + d\psi = -\mathcal{K}_1 dr_1 - d\psi_1 \quad (3.7)$$

Agora, diferenciando (3.4) e substituindo (3.5) na mesma, obtemos

$$\cos \gamma_1 dr_1 - \cos \gamma dr = \cos \omega d\tau - \tau \sin \omega d\omega \quad (3.8)$$

e

$$\sin \gamma_1 dr_1 - \sin \gamma dr = \sin \omega d\tau + \tau \cos \omega d\omega \quad (3.9)$$

multiplicando (3.8) por  $\sin \omega$ , (3.9) por  $-\cos \omega$  e somando ambas equações, temos

$$\sin(\omega - \gamma_1) dr_1 + \sin(\gamma - \omega) dr = -\tau d\omega$$

logo

$$\sin \psi_1 dr_1 + \sin \psi dr = \tau d\omega \quad (3.10)$$



Na Equação (3.10) substituindo  $\psi_1$  e  $\psi$  por  $(\pi/2 - \varphi_1)$  e  $(\pi/2 - \varphi)$  respectivamente e  $d\omega$  por  $-\mathcal{K}_1 dr_1 - d\psi_1$ , vem que

$$-\cos \varphi_1 dr_1 = (\tau\mathcal{K} + \cos \varphi)dr + \tau d\varphi \quad (3.11)$$

e observando que

$$dr_1 = (1/\mathcal{K}_1)(d\varphi_1 + \mathcal{K}dr + d\varphi)$$

então de (3.11) temos

$$-\cos \varphi_1 d\varphi_1 = (\tau\mathcal{K}\mathcal{K}_1 + \mathcal{K} \cos \varphi_1 + \mathcal{K}_1 \cos \varphi)dr + (\tau\mathcal{K}_1 + \cos \varphi_1)d\varphi \quad (3.12)$$

Em notação matricial, (3.11) e (3.12) escreve como:

$$\begin{pmatrix} dr_1 \\ d\varphi_1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{\cos \varphi_1} \begin{pmatrix} \tau\mathcal{K} + \cos \varphi & \tau \\ \tau\mathcal{K}\mathcal{K}_1 + \mathcal{K} \cos \varphi_1 + \mathcal{K}_1 \cos \varphi & \tau\mathcal{K}_1 + \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\varphi \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Assim, obtemos a derivada  $D\mathcal{F}$  no ponto  $x = (r, \varphi)$  como uma matriz  $2 \times 2$

$$D_x \mathcal{F} = \frac{-1}{\cos \varphi_1} \begin{pmatrix} \tau\mathcal{K} + \cos \varphi & \tau \\ \tau\mathcal{K}\mathcal{K}_1 + \mathcal{K} \cos \varphi_1 + \mathcal{K}_1 \cos \varphi & \tau\mathcal{K}_1 + \cos \varphi_1 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Lembre-se que pela Proposição 3.1, a aplicação  $\mathcal{F} : \mathcal{M} \setminus S_1 \rightarrow \mathcal{M} \setminus S_{-1}$  é um homeomorfismo. No entanto, podemos dizer mais:

**Teorema 3.1.** A aplicação  $\mathcal{F} : \mathcal{M} \setminus S_1 \rightarrow \mathcal{M} \setminus S_{-1}$  é um difeomorfismo de classe  $C^{l-1}$ .

*Demonstração.* Basta observar que a derivada  $D\mathcal{F}$  é expressa em termos das curvaturas  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{K}_1$  do bordo  $\partial\mathcal{D}$  que, por sua vez, correspondem a segunda derivada das funções  $f_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^2$  as quais são de classe  $C^l$ . ■

Note que as derivadas de  $\mathcal{F}$  são ilimitadas. Elas “explodem” quando  $\cos \varphi_1 \rightarrow 0$ , isto é, quando  $x_1$  está próximo de  $S_0$  e  $x$  próximo de  $S_1$ .

Definimos indutivamente os conjuntos,

$$S_{n+1} = S_n \cup \mathcal{F}^{-1}(S_n) \quad e \quad S_{-(n+1)} = S_{-n} \cup \mathcal{F}(S_{-n}).$$

$S_{n+1}$  e  $S_{-(n+1)}$  são os conjuntos de *singularidades* para  $\mathcal{F}^{n+1}$  e  $\mathcal{F}^{-(n+1)}$  respectivamente.

Esses conjuntos são uniões finitas de curvas fechadas, todas de classe  $C^{l-1}$  e de comprimento finito (veja [7] pág.231-233), logo possuem medida de Lebesgue nula.

Assim, seu complementar

$$\hat{\mathcal{M}} := \mathcal{M} \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} S_n$$

todas as iterações de  $\mathcal{F}$  estão definidas e são  $C^{l-1}$  difeomorfismos. E ainda,  $\mathcal{F}$  está bem definida, por (3.1), em um subconjunto  $G_\delta$  denso  $\hat{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$  de medida de Lebesgue total. Assim a aplicação pode ser estendida por continuidade a todo  $\mathcal{M}$ , como anteriormente.

### 3.1 Medida Invariante da Aplicação

Pela expressão da derivada da aplicação  $\mathcal{F}$  dada em (3.14), obtemos facilmente

$$\det D_x \mathcal{F} = \cos \varphi / \cos \varphi_1. \quad (3.15)$$

Com isso, temos o seguinte resultado:

**Proposição 3.2.** A aplicação  $\mathcal{F}$  preserva a medida  $d\mu = \cos \varphi dr d\varphi$  em  $\mathcal{M}$ . Ou seja, para qualquer boreliano  $A \subset \mathcal{M}$ , tem-se

$$\mu(A) = \mu(\mathcal{F}(A)) \text{ i.e. } \iint_{\mathcal{F}(A)} \cos \varphi_1 dr_1 d\varphi_1 = \iint_A \cos \varphi dr d\varphi$$

*Demonstração.* De fato, sendo  $\mathcal{F}$  difeomorfismo  $C^{l-1}$  temos pelo teorema de mudança de variáveis que

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{F}(A)} \cos \varphi_1 dr_1 d\varphi_1 &= \iint_A \cos \varphi_1 |\det D_x \mathcal{F}| dr d\varphi \\ &= \iint_A \cos \varphi dr d\varphi \end{aligned}$$

Na última igualdade usamos (3.15). ■

Note que

$$\iint_{\mathcal{M}} \cos \varphi dr d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_{\Gamma} dr = 2|\Gamma|$$

e a probabilidade

$$d\mu = \frac{1}{2|\Gamma|} \cos \varphi dr d\varphi$$

é invariante pelo bilhar.

## 3.2 Involução

O sistema dinâmico  $(\Omega, \mu_\Omega, \Phi^t)$  possui uma interessante propriedade chamada *involução*: para qualquer  $x = (q, v) \in \Omega$ , o ponto  $\mathcal{I}_\Omega(x) = (q, -v)$  satisfaz

$$\Phi^{-t}(\mathcal{I}_\Omega(x)) = \mathcal{I}_\Omega(\Phi^t x)$$

quando o fluxo é definido. Consequentemente, a involução  $\mathcal{I}_\Omega : \Omega \rightarrow \Omega$  anticomuta com o fluxo  $\Phi^t$ , e esse fato pode ser escrito como

$$\Phi^{-t} \circ \mathcal{I}_\Omega = \mathcal{I}_\Omega \circ \Phi^t$$

Isso significa que se invertermos a velocidade da partícula, ela irá refazer sua trajetória passada. Esse fato é conhecido como reversibilidade do tempo da dinâmica do bilhar. Note que a aplicação  $\mathcal{I}_\Omega$  também preserva a medida de Lebesgue normalizada  $d\mu_\Omega$ , já que  $\det D_x \mathcal{I} = 1$ .

A aplicação de colisão  $\mathcal{F}$  também admite uma involução,  $\mathcal{I}$ , definida por  $\mathcal{I}(r, \varphi) = (r, -\varphi)$ . Ela anticomuta com  $\mathcal{F}$ , isto é,

$$\mathcal{F}^{-k} \circ \mathcal{I} = \mathcal{I} \circ \mathcal{F}^k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

quando  $\mathcal{F}^k$  está definida. Aqui a aplicação  $\mathcal{I} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  também preserva a medida de probabilidade  $d\mu$ .



**Figura 3.5.** Involução da aplicação de colisão  $\mathcal{F}$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] Berger, A. *Chaos and Chance*, Walter de Gruyter, Berlin, 2001.
- [2] Birkhoff, G. D. *Dynamical Systems*, A.M.S. Colloquium Publications, New York, 1927.
- [3] Chernov, N. e Markarian, R. *Chaotic Billiards*, Mathematical Surveys and Monographs, 127, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.
- [4] Chernov, N. e Markarian, R. *Introduction to the Ergodic Theory of Chaotic Billiards*, 24° Colóquio Brasileiro de Matemática, Publicações Matemáticas, IMPA, 2003.
- [5] Halpern, B. *Strange Billiard Tables*, Transactions of the American Mathematical Society, 1977.
- [6] Katok, A. e Hasselblat, B. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1995.
- [7] Katok, A. e Strelcyn, J. M. *Invariant Manifolds, Entropy and Billiards; Smooth Maps with Singularities*, Lect. Notes in Math., 1222, Springer-Verlag, 1998.
- [8] Lima, E. L. *Análise Real*, Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro, IMPA, 2004.
- [9] Oliveira, K. e Viana, M. *Um Primeiro Curso sobre Teoria Ergódica com Aplicações*, 25° Colóquio Brasileiro de Matemática, Publicações Matemáticas, IMPA, 2005.
- [10] Strelcyn, J. M. *Plane Billiards as Smooth Dynamical Systems with Singularities*, In: Lect. Notes Math., 1222, Springer, New York, pp. 199 - 278., 1986.