



Universidade Estadual Paulista

Câmpus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Ruikson Sillas de Oliveira Nunes

Comportamento Assintótico e Controlabilidade Exata para a Equação de Klein-Gordon

São José do Rio Preto

2013

Ruikson Sillas de Oliveira Nunes

Comportamento Assintótico e Controlabilidade Exata para a Equação de Klein-Gordon

Tese apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração- Análise Aplicada, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos

São José do Rio Preto

2013

Ruikson Sillas de Oliveira Nunes

Comportamento Assintótico e Controlabilidade Exata para a Equação de Klein-Gordon

Tese apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração- Análise Aplicada, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus São José do Rio Preto.

Banca Examinadora

Waldemar Donizete Bastos
Professor Livre Docente - UNESP - Rio Preto
Orientador

Dimitar Kolev Dimitrov
Professor Titular - UNESP - Rio Preto

Juliana Conceição Precioso Pereira
Professora Doutora - UNESP - Rio Preto

Olímpio Hiroshi Miyagaki
Professor Titular - UFJF- Juiz de Fora

Juan Amadeo Soriano Palomino
Professor Doutor - UEM- Maringá

São José do Rio Preto

28 de janeiro de 2013

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado a oportunidade de concluir mais uma etapa em minha formação acadêmica.

Também agradeço imensamente ao professor Waldemar Donizete Bastos por sua dedicada orientação e por sua paciência diante de minhas limitações.

Deixo aqui os meus agradecimentos a minha família, em especial a minha mãe (Marta) e minha esposa (Daniela) que sempre me apoiaram nesta caminhada.

Agradeço à banca examinadora: Waldemar Donizete Bastos, Dimitar Kolev Dimitrov, Juliana Conceição Precioso Pereira, Holímpio Hiroshi Miyagaki, Juan Amadeo Soriano Palomino, pela dedicação em avaliar este trabalho.

Aos professores do Departamento de Matemática do Ibilce que direto ou indiretamente contribuíram em minha formação, em especial agradeço ao professor Cláudio Aguinaldo Buzzi por ter me acolhido no início de minhas atividades no Ibilce.

Aos amigos de caminhada na pós-graduação, em especial Oyran(o chifrão), Rodiak e Eduardo. Ao meus amigos Domingos(Bullon) e Tiago por suas divertidas companhia.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

“A vida não entrega nada ao mortal se não em troca de grandes esforços.”

(Horácio)

Resumo

Neste trabalho resolvemos o problema de controlabilidade exata na fronteira para a equação linear de Klein-Gordon em domínios limitados Ω de \mathbb{R}^N , $N \geq 2$, com fronteira suave por partes e sem cuspides. Para dados iniciais em $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ obtemos controle do tipo Neuman, de quadrado integrável, atuando em toda a fronteira do domínio em tempo próximo ao diâmetro de Ω .

Inicialmente provamos que a energia da solução do problema de Cauchy para a referida equação decai localmente numa taxa polinomial. Em seguida, estendendo a solução do problema de Cauchy para tempo complexo provamos que o operador solução associado ao problema de Cauchy é analítico num setor adequado do plano complexo. Utilizando o decaimento de energia, a analiticidade do operador solução e argumentos introduzidos por D. L. Russell e J. Lagnese nos anos setenta do século passado obtemos o resultado desejado.

Palavras chave: Equação Linear de Klein-Gordon, Controle Exato na Fronteira, Decaimento Local de Energia.

Abstract

In this work we solve the problem of exact controllability on the boundary for the linear Klein-Gordon equation in limited domains Ω of \mathbb{R}^N , $N \geq 2$, with piecewise smooth boundary without cusps. For initial data in $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ we get square integrable control of Neuman type, acting on the entire boundary, in a time near the diameter of Ω .

Initially we prove that the energy of the solution of the Cauchy problem for this equation locally decays at a polynomial rate. Then extending the solution of the Cauchy problem for complex time we prove that the solution operator associated with the Cauchy problem is analytic in a suitable sector of the complex plane. Using the local decay of energy, the analiticity of the solution operator and arguments introduced by D. L. Russell and J. Lagnese in the seventies we obtain the desired result.

Keywords: Linear Klein-Gordon Equation, Exact Boundary Control, Local Energy Decay.

Sumário

1	Preliminares	15
1.1	Operadores lineares	15
1.2	Espaços de Sobolev	17
1.3	Existência da derivada conormal	20
2	Estudo da Equação Linear de Klein-Gordon	23
2.1	O problema de Cauchy clássico	23
2.2	Estimativas de Energia	27
2.2.1	Solução Generalizada ou de Energia Finita	32
2.2.2	Propriedades da solução generalizada	35
3	Decaimento Local de Energia	43
3.1	Propriedades das funções de Bessel	43
3.2	Estimativa pontual da solução do problema de Cauchy para a equação de Klein-Gordon	44
3.2.1	Prova do Teorema 3.2.1	46
3.3	Decaimento da energia	63
4	Extensão Analítica	67
4.1	A extensão	68
4.2	A analiticidade da família $\{S_\zeta\}_{\zeta \in \Sigma_0}$	80
5	Controle Exato na Fronteira para Equação de Klein-Gordon	86
5.1	Problema de valor inicial e fronteira	86

5.2	Controle exato na fronteira para equação de Klein-Gordon	88
5.2.1	Controle num grande intervalo de tempo	89
5.3	Controlabilidade em tempo mínimo	94
Bibliografia		96

Introdução

Nos últimos quarenta anos tem havido um grande avanço no estudo de controle para equações diferenciais hiperbólicas (veja [3], [4], [5], [12], [16], [18], [22], [24], [25]). Diversas noções de controle são encontradas na literatura, como por exemplo, controle aproximado, controle exato, controle interno, controle na fronteira, etc.

Neste trabalho estudamos o problema de controle exato na fronteira para equação linear de Klein-Gordon, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + c^2 u = 0$, em $\Omega \times \mathbb{R}$, onde Ω é um domínio suave por partes de \mathbb{R}^N , com $N \geq 2$.

O problema de controle exato na fronteira para a equação acima consiste em encontrar um tempo $T > 0$ e uma maneira adequada de atuar na fronteira do domínio, de modo que o estado inicial do sistema $(u(\cdot, 0), \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0))$ seja conduzido a um estado final $(u(\cdot, T), \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, T))$ desejado. Em muitos casos, o estado final desejado é o de repouso, isto é, $u(\cdot, T) = \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, T) = 0$.

O problema acima tem sido estudado por diversos autores. Em [3] e [25] os autores utilizaram o HUM-(Hilbert Uniqueness Method) descrito em [18], mostrando que em domínios suaves de \mathbb{R}^N o estado final nulo é obtido a partir de um tempo maior ou igual ao diâmetro do domínio. Em [25] a força de controle atuante é do tipo Neumann e em [3] é do tipo Dirichlet.

A maioria dos trabalhos que lidam com o problema de controlabilidade exata na fronteira consideram os domínios suaves. Em [12], Grisvard estudou o problema de controle exato na fronteira para a equação da onda em polígonos e poliédros. Este parece ser o primeiro trabalho sobre controle em domínios não suaves. Nesse trabalho nota-se a grande dificuldade em utilizar o HUM para domínios não suave, mesmo tendo o domínio

uma simples geometria.

Por outro lado, em [4], os autores estudaram o problema de controle exato na fronteira para equação da onda em domínios planos suave por partes utilizando o método de controlabilidade introduzido por D. L. Russell [24] na primeira metade dos anos 70. A aplicação do método de Russell requer do sistema em questão linearidade, reversibilidade em relação ao tempo, decaimento local da energia e uma teoria de traço adequada. Por isso o método de Russell é mais limitado que o HUM. No entanto, o método de Russell é mais facilmente aplicado em casos de domínios não suave.

Neste trabalho estudamos o problema de controle para a equação de Klein-Gordon $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + c^2 u = 0$ com dados iniciais em $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, onde Ω é um domínio limitado com fronteira suave por partes e sem cúspides em \mathbb{R}^N , com $N \geq 2$. Aqui H^m , ($m = 0, 1, 2, \dots$) denota o espaço de Sobolev usual. A verificação de que a energia da solução desta equação decai localmente é a primeira contribuição deste trabalho ([22], [23]).

No capítulo 2, obtemos a fórmula explícita da solução u do problema de Cauchy

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \Delta u + c^2 u = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \quad (1)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0) = u_1 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \quad (3)$$

onde $u_0, u_1 \in C_0^\infty(U)$ e U é um domínio limitado de \mathbb{R}^N .

A representação da solução u muda com a paridade de N . No caso em que N é ímpar a fórmula de u envolve as funções de Bessel de primeira espécie J_0 e J_1 . Quando N é par a representação de u envolve as funções seno e cosseno. No capítulo 3, usando resultados clássicos sobre o comportamento assintótico das funções de Bessel ([11], [28]), mostramos que a solução u do problema (1) – (3) satisfaz, para $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $|\alpha| \leq 1$, a desigualdade

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x \partial t)^\alpha} u(x, t) \right|^2 \leq \frac{K}{t^N} \left\{ \|u_0\|_{H^1(U)}^2 + \|u_1\|_{L^2(U)}^2 \right\}, \quad (4)$$

para todo $x \in U$, $t > 0$ suficientemente grande e alguma constante $K > 0$ que não depende dos dados iniciais. Como consequência da estimativa (4) obtemos

$$\|u(\cdot, t)\|_{H^1(U)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{L^2(U)}^2 \leq \frac{K}{t^N} \left\{ \|u_0\|_{H^1(U)}^2 + \|u_1\|_{L^2(U)}^2 \right\} \quad (5)$$

válida para t suficientemente grande e solução u de (1)-(3) com dados iniciais com energia finita. A estimativa (4) estende um resultado obtido por L. Hörmander [13], pois fazendo uso da análise de Fourier ele mostrou a estimativa

$$|u(x, t)| \leq C |t|^{-N/2} \sum_{|\alpha|+j \leq (N+3)/2} \int \left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial y)^\alpha} u_j(y) \right| dy, \quad (6)$$

para $|t|$ suficientemente grande e uma constante $C > 0$ que não depende de u_j , $j = 0, 1$. Aqui usamos a notação $(\partial y)^\alpha = \partial y_N^{\alpha_N} \dots \partial y_1^{\alpha_1}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$.

Assumindo que $u_0, u_1 \in C_0^\infty(U)$, em que U é um domínio limitado segue:

$$|u(x, t)|^2 \leq \frac{K}{t^N} \left\{ \|u_0\|_{H^m(U)}^2 + \|u_1\|_{H^{m-1}(U)}^2 \right\}, \quad (7)$$

para $|t|$ suficientemente grande e todo inteiro $m \geq \frac{N+3}{2} \geq 2$ contrastando com (4), onde $m = 1$.

A estimativa (7), para $m = 1$ e $N = 1, 2, 3$ já é conhecida a algum tempo (veja [19], [20]) e até onde sabemos, a literatura não dispõe de uma estimativa como (4) para todas as dimensões N , como temos feito aqui.

Seja u a solução do problema (1)-(3), onde os dados iniciais são extensões nulas fora de U , de pares tomados em $H_0^1(U) \times L^2(U)$. Considere o operador

$$S_T : H_0^1(U) \times L^2(U) \longrightarrow H_0^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N),$$

definido por $S_T(u(\cdot, 0), \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0)) = (u(\cdot, T), \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, T))$. Seja R o operador restrição ao conjunto U . Da estimativa (5) segue

$$\begin{aligned} \|RS_T(u(\cdot, 0), \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0))\|_{H^1(U) \times L^2(U)}^2 &= \|S_T(u(\cdot, 0) |U, \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0) |U)\|_{H^1(U) \times L^2(U)}^2 \\ &\leq \frac{K'}{T^N} \|(u(\cdot, 0), \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0))\|_{H_0^1(U) \times L^2(U)}^2. \end{aligned} \quad (8)$$

A desigualdade (8) mostra que, para valores de T suficientemente grande, RS_T é uma contração. Este fato é importante no estudo da controlabilidade para a equação de Klein-Gordon.

Outra contribuição que apresentamos neste trabalho é a prova de que a família de operadores lineares compactos $\{S_T\}_{T \geq T_0}$, $T_0 = \text{diam}(\Omega) + \epsilon$, se estende analiticamente a

uma família de operadores lineares compactos $\{S_\zeta\}_{\zeta \in \Sigma_0}$, em que Σ_0 é o setor do plano complexo dado por

$$\Sigma_0 = \{\zeta = T_0 + z, \quad |arg(z)| \leq \frac{\pi}{4}\}$$

Este resultado é provado no Teorema 4.2.1 do capítulo 4. Tal resultado tem uma importante aplicação na obtenção do controle exato na fronteira em tempo próximo ao valor ótimo para equação linear de Klein-Gordon.

Por fim, o capítulo 5 é dedicado efetivamente ao estudo do problema de controle anteriormente mencionado. O método de controlabilidade de Russell nos mostra que o problema de controle em questão é equivalente a resolver uma equação da forma

$$(I - K_T)(w_0, w_1) = (u_0, u_1). \quad (9)$$

nas variáveis $(w_0, w_1) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, onde $(u_0, u_1) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ são os dados iniciais do problema de controle original. O operador K_T , obtido a partir de S_T , é linear, limitado, compacto e além disso satisfaz

$$\|K_T(w_0, w_1)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{Const.}{T^N} \|(w_0, w_1)\|_{H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2, \text{ para } T > T_0.$$

Assim, para um T suficientemente grande garantimos que o operador K_T é contração e portanto, resolve-se (9). Resolver (9) significa encontrar extensão dos dados iniciais para o espaço todo, de forma que a solução do problema de Cauchy se anule juntamente com sua derivada em relação a t , sobre o domínio Ω . Para concluir a controlabilidade restringe-se essa solução ao cilindro $\Omega \times [0, T]$ e usa-se um teorema adequado de traço para obter o controle à partir do traço da solução do problema de Cauchy em $\partial\Omega \times [0, T]$. Aqui usamos um teorema de traço para a derivada normal, devido a D. Tataru [26].

O tempo de controle obtido no Teorema 5.2.1 não é ótimo. Ainda no capítulo 5 mostramos que podemos controlar a equação de Klein-Gordon em qualquer instante maior que o valor do diâmetro de Ω . Este resultado é provado no Teorema 5.3.1. Usando o fato de que a família de operadores lineares e compactos $\{S_T\}_{T \geq T_0}$, acima definidos, se estende analiticamente a uma família de operadores lineares limitados e compactos $\{S_\zeta\}_{\zeta \in \Sigma_0}$, garantimos que a família de operadores lineares limitados e compactos $\{K_T\}_{T \geq T_0}$ se estende analiticamente a uma família de operadores lineares compactos $\{K_\zeta\}_{\zeta \in \Sigma_0}$. Daí,

usando um teorema de alternativa devido a F. V. Atkinson ([14], pág. 370) garantimos que a equação (9) é solúvel em qualquer instante maior que o valor do diâmetro de Ω . E assim, podemos controlar a equação de Klein-Gordon por meio de um força $h = \frac{\partial u}{\partial \nu}$ atuante na fronteira de Ω , qualquer que seja o instante $T > diam(\Omega)$.

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é apresentar alguns resultados da Análise Funcional essenciais ao desenvolvimento deste trabalho e introduzir parte da notação usada no texto. Destacamos um teorema de alternativa devido à F. V. Atkinson [2], um teorema de regularidade do traço da derivada conormal da solução de uma equação hiperbólica ao longo de uma superfície não característica devido a D. Tataru [26]. Discutimos também a relação entre analiticidade forte e fraca para uma família de operadores que depende de um parâmetro complexo.

1.1 Operadores lineares

Sejam X e Y espaços normados (reais ou complexos), cujas normas são denotadas respectivamente por $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$. O conjunto de todos os operadores lineares limitados definidos em X que tomam valores em Y é denotado por $B(X, Y)$, e por $B(X)$ se $X = Y$. Se $T \in B(X, Y)$, a norma de T é definida por $\|T\|_{B(X, Y)} = \sup\{\|Tx\|_Y; x \in X, \|x\|_X = 1\}$. O conjunto $B(X, Y)$ munido da norma $\|\cdot\|_{B(X, Y)}$ é um espaço vetorial normado, e, se Y é espaço de Banach, então $B(X, Y)$ também o é (veja [15]). Denotamos por Y' o dual topológico de Y . Assim, Y' é um espaço de Banach munido da norma $\|f\|_{Y'} = \sup\{|f(y)|, y \in Y, \|y\|_Y = 1\}$.

É possível provar, via teorema de Hahn-Banach (veja [6]) que para cada $y \in Y$ existe $f \in Y'$ tal que $\|f\|_{Y'} = \|y\|_Y$ e $f(y) = \|y\|_Y^2$. Como consequência, segue que, para cada

$y \in Y$ tem-se $\|y\|_Y = \sup\{|f(y)|; f \in Y', \|f\|_{Y'} \leq 1\}$.

Seja Y um espaço de Hilbert, cujo produto interno denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$. Dado $f \in Y'$ existe um único $v \in Y$ tal que $f(y) = \langle v, y \rangle_Y$ para todo $y \in Y$ e $\|v\|_Y = \|f\|_{Y'}$. Este é o teorema da representação de Riesz (veja [6]).

Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e X, Y espaços de Banach sobre \mathbb{C} , diremos que uma função $T : D \rightarrow B(X, Y)$, $\lambda \mapsto T(\lambda)$ é analítica em D se, para cada $\lambda_0 \in D$ existe $T'(\lambda_0) \in B(X, Y)$ tal que

$$\left\| \frac{T(\lambda_0 + \eta) - T(\lambda_0)}{\eta} - T'(\lambda_0) \right\|_{B(X, Y)} \rightarrow 0, \text{ quando } \eta \rightarrow 0.$$

O operador $T'(\lambda_0)$ é chamado derivada de T em λ_0 . Observemos que se $T : D \rightarrow B(X, Y)$ é analítica e $f \in Y'$ então $h := f \circ T : D \rightarrow \mathbb{C}$ é analítica e vale $h'(\lambda_0) = f(T'(\lambda_0))$. De fato, para todo $x \in X$, vale

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(T(\lambda + \lambda_0)x) - f(T(\lambda_0)x)}{\lambda} - f(T'(\lambda_0)x) \right| &\leq \|f\|_{Y'} \left\| \frac{T(\lambda + \lambda_0)x - T(\lambda_0)x}{\lambda} - T'(\lambda_0)x \right\|_Y \\ &\leq \|f\|_{Y'} \left\| \frac{T(\lambda + \lambda_0) - T(\lambda_0)}{\lambda} - T'(\lambda_0) \right\|_{B(X, Y)} \cdot \|x\|_X. \end{aligned}$$

Assim, quando $\lambda \rightarrow 0$, o lado direito tende a zero. Logo, o lado esquerdo também tende a zero quando $\lambda \rightarrow 0$, garantindo assim o resultado. É importante ressaltar que a recíproca deste resultado é também verdadeira.

Teorema 1.1.1 *Sejam X, Y espaços de Banach sobre \mathbb{C} e D um conjunto aberto de \mathbb{C} . Se para cada $x \in X$ e $f \in Y'$, a função $D \ni \lambda \mapsto f(T(\lambda)x) \in \mathbb{C}$ é analítica, então $D \ni \lambda \mapsto T(\lambda) \in B(X, Y)$ é analítica.*

Demonstração: Veja T. Kato [14], página 152.

□

Em outras palavras o teorema anterior diz que analiticidade fraca implica analiticidade forte.

Seja $T : X \rightarrow Y$ um operador linear limitado. Dizemos que T é compacto se o fecho de $T(B)$ é compacto em Y sempre que $B \subset X$ for limitado. Se S é um operador compacto

e T é um operador linear limitado e a composição $S \circ T$ existe, então $S \circ T$ é operador compacto.

Um escalar λ é autovalor de $T \in B(X)$ se existe algum $x \in X$, $x \neq 0$ tal que $Tx = \lambda x$. Assim, se λ é autovalor de T então $\lambda I - T$ não é inversível. Se $T \in B(X)$ é tal que $\|T\|_{B(X)} < 1$ então $I - T$ é inversível e vale $(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$ com $T^0 = I$, (veja [15]). Logo, 1 não é autovalor de T .

O próximo resultado, devido a F. V. Atkinson [2], quando aplicado ao problema de controle aqui estudado, permite reduzir o tempo de controle a valores próximos a um tempo ótimo.

Teorema 1.1.2 (Atkinson) *Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um domínio, X um espaço de Banach e $\{T(\zeta)\}_{\zeta \in D}$ uma família analítica de operadores compactos definidos em X , isto é, a função $D \ni \zeta \rightarrow T(\zeta) \in B(X)$ é analítica. Então, ou 1 é autovalor de $T(\zeta)$ para todo $\zeta \in D$, ou 1 é autovalor de $T(\zeta)$ para apenas um número finito de ζ em cada subconjunto compacto de D .*

Demonstração: Veja T. Kato [14] página 370 ou [2]. □

Nas condições do Teorema 1.1.2 sejam $\Xi \subset D$ um conjunto compacto e $\zeta_0 \in \Xi$ tal que $I - T(\zeta_0)$ é inversível. Assim, existe $\zeta_0 \in \Xi$ de modo que 1 não é autovalor de $T(\zeta_0)$. Logo, de teorema de Atkinson segue que, exceto para uma quantidade finita de pontos ζ em Ξ o operador $I - T(\zeta)$ é inversível.

1.2 Espaços de Sobolev

Seja $U \subset \mathbb{R}^N$ um domínio. Por $L^1(U)$ denotamos o espaço das funções Lebesgue integráveis em U . Dizemos que uma função mensurável $v : U \rightarrow \mathbb{R}$ está em $L^1_{loc}(U)$ se a restrição de v a qualquer compacto de U é integrável.

Seja $v \in L^1_{loc}(U)$. A α -ésima derivada fraca de v , denotada por $\partial^\alpha v$, é uma função $w \in L^1_{loc}(U)$ que satisfaz a igualdade

$$\int_U v(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U w(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(U)$$

onde $\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \alpha_1 \dots \partial \alpha_N}$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$.

Observamos que nem sempre existe a α -derivada fraca de uma função de $L^1_{loc}(U)$, porém, quando existe é única. O conceito de derivada fraca generaliza o conceito clássico de derivada, isto é, a derivada fraca de uma função suave coincide com sua derivada clássica. Por todo o texto $\partial^\alpha v$ denotará derivada fraca.

Denotamos por $L^2(U)$ o espaço das funções $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, tais que $|f|^2$ é Lebesgue integrável. Prova-se que $L^2(U)$ é um espaço de Hilbert (real ou complexo), com norma e produto interno definidos, respectivamente, por;

$$\|f\|_{L^2(U)}^2 = \int_U |f|^2 dx,$$

$$\langle f, g \rangle_{L^2(U)} = \int_U f \bar{g} dx,$$

onde a barra na última igualdade denota a conjugação quando for o caso (veja [6]).

Para todo domínio U vale a inclusão $L^p(U) \subset L^1_{loc}(U)$, $1 \leq p \leq \infty$, o que permite estender para os elementos de $L^p(U)$ a noção de derivada fraca.

Seja m um inteiro positivo. O espaço de Sobolev $H^m(U)$ é o subespaço de $L^2(U)$ definido por;

$$H^m(U) = \{f \in L^2(U); \partial^\alpha f \in L^2(U), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq m\}.$$

O espaço $H^m(U)$ é um espaço de Hilbert (veja [6]), com norma e produto interno definidos respectivamente por;

$$\|f\|_{H^m(U)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{L^2(U)}^2,$$

$$\langle f, g \rangle_{H^m(U)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \partial^\alpha f, \partial^\alpha g \rangle_{L^2(U)}.$$

Das definições acima temos $H^m(U) \subset H^{m-1}(U)$ e $\|\cdot\|_{H^{m-1}(U)} \leq \|\cdot\|_{H^m(U)}$, $m = 1, 2, \dots$, ou seja, $H^m(U)$ está continuamente imerso em $H^{m-1}(U)$.

Para provar certas propriedades em espaços de Sobolev, começamos inicialmente com funções suaves, e em seguida estendemos os resultados por um argumento de densidade para o respectivo espaço de Sobolev. Daí a necessidade de saber quais espaços de funções

suaves são densos nos espaços de Sobolev. Se U é um domínio limitado de \mathbb{R}^N o espaço $C_0^\infty(U)$ não é denso em $H^m(U)$, ($m = 1, 2, \dots$) embora o seja em $L^2(U)$. Em geral define-se $H_0^m(U)$ como o fecho de $C_0^\infty(U)$ em $H^m(U)$. Verifica-se que $H^m(\mathbb{R}^N) = H_0^m(\mathbb{R}^N)$, (veja [1], [6]).

Se U é um domínio qualquer de \mathbb{R}^N , o teorema de Meyers e Serrin [1] estabelece que $C^\infty(U) \cap H^m(U)$ é denso em $H^m(U)$.

Um operador extensão (ou prolongamento) para o espaço $H^m(U)$ é um operador linear limitado

$$P : H^m(U) \longrightarrow H^m(\mathbb{R}^N),$$

tal que $(Pf)|_U = f$ para qualquer f em $H^m(U)$. Aqui $w|_U$ denota a restrição da função w a um subconjunto U de seu domínio. Se U é um domínio Lipschitziano limitado, então $H^m(U)$ admite um operador prolongamento, veja [21], pag. 75.

Seja $C^\infty(\bar{U})$ o conjunto definido por

$$C^\infty(\bar{U}) = \{v|_{\bar{U}} : v \in C^\infty(\mathbb{R}^N)\}.$$

A existência de um operador prolongamento para $H^m(U)$ acarreta a densidade de $C^\infty(\bar{U})$ em $H^m(U)$. Assim, se U é Lipschitziano e limitado temos:

$$u \in H^m(U) \Leftrightarrow \exists u_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) : u_n|_{\bar{U}} \longrightarrow u \text{ em } H^m(U).$$

Lema 1.2.1 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado Lipschitziano e seja U_δ uma vizinhança de U . Existe um operador linear limitado $E_m : H^m(U) \longrightarrow H^m(\mathbb{R}^N)$ tal que, para toda $f \in H^m(U)$ tem-se:*

$$E_m f|_U = f, \quad \text{supp} E_m f \subset U_\delta \quad \text{e} \quad \|E_m f\|_{H^m(\mathbb{R}^N)} \leq C \|f\|_{H^m(U)}$$

para alguma constante $C > 0$ independente de f .

Demonstração: Sejam $U_\delta = \{y \in \mathbb{R}^N : |y - x| < \delta, x \in U\}$ e $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\varphi = 1$ em \bar{U} e $\varphi = 0$ em $\mathbb{R}^N - U_{\delta/2}$. Defina $E_m f = \varphi P f$, $f \in H^m(U)$. Claramente, $E_m : H^m(U) \longrightarrow H^m(\mathbb{R}^N)$ é linear, $(E_m f)|_U = f$ em U e $\text{supp}(E_m f) \subset U_\delta$ para toda $f \in H^m(U)$. A limitação de E_m segue da limitação dos operadores prolongamento e multiplicação por φ . \square

Finalizando esta seção observamos que se U é limitado e Lipschitziano, então a imersão

$$H^m(U) \hookrightarrow H^{m-1}(U), \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

é compacta. Veja [7] pag. 124.

Este fato juntamente com o teorema de Meyers e Serrin acarretam a compacidade da imersão

$$C^\infty(U) \cap H^m(U) \hookrightarrow H^{m-1}(U), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (1.2)$$

para todo domínio limitado U e Lipschitziano.

1.3 Existência da derivada conormal

Esta seção é dedicada à apresentação do teorema de existência da derivada conormal das soluções de uma equação hiperbólica.

Sejam $n \geq 3$ inteiro e $U \subset \mathbb{R}^n$ um domínio. Seja $L = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n}$, um operador diferencial hiperbólico de segunda ordem em U , onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $a_\alpha \in C^\infty(U)$.

O símbolo da parte principal de L é o polinômio na variável $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ dado por

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x) \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}.$$

Seja $\Sigma \subset U$ uma superfície C^∞ orientável com vetor normal

$$\eta(x) = (\eta_1(x), \dots, \eta_n(x)), \quad x \in \Sigma.$$

Seja B a expressão

$$B = \eta(x) \cdot \nabla_\xi p(x, \xi),$$

onde $\nabla_\xi p(x, \xi)$ é o gradiente de p relativamente à variável ξ , isto é, $\nabla_\xi p(x, \xi) = \left(\frac{\partial p}{\partial \xi_1}(x, \xi), \dots, \frac{\partial p}{\partial \xi_n}(x, \xi) \right)$.

Dado $u \in C^\infty(U)$, chamamos derivada conormal de u ao longo de Σ e relativamente ao operador L à função definida por

$$(Bu)(x) = \eta(x) \cdot \nabla_\xi p(x, \xi) \Big|_{\xi = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)}, \quad x \in \Sigma.$$

Para melhor entendimento vejamos um exemplo:

Exemplo 1.3.1 *Sejam $n = N + 1$, $N \geq 2$, $U = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} = \{(x, t); x \in \mathbb{R}^N, t \in \mathbb{R}\}$ e $L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + c^2$, $c > 0$. Escrevendo $\eta(x) = (\eta_1(x), \dots, \eta_N(x), \eta_t(x))$ obtém-se facilmente*

$$(Bu)(x) = -2 \left[\frac{\partial u}{\partial x_1} \eta_1(x) + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_N} \eta_N(x) - \frac{\partial u}{\partial t} \eta_t(x) \right].$$

Agora supondo que Σ é cilíndrica e paralela ao eixo t , teremos $n_t \equiv 0$. Neste caso, denotando por Γ a intersecção de Σ com o plano $t = 0$ vemos que $\nu(x) =: (\eta_1(x), \dots, \eta_N(x))$ é o vetor normal à Γ e que

$$-\frac{1}{2}Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu},$$

ou seja, $-\frac{1}{2}Bu$ é o operador que define a condição de fronteira do tipo Neumann ao longo de $\Gamma \times \mathbb{R}$.

Definição 1.3.1 *Sejam $u \in H_{loc}^1(U)$ e $\omega \in L_{loc}^2(\Sigma)$. Denote por V , um aberto qualquer de U com fecho compacto em U , e denote por Σ_0 uma parte compacta qualquer de Σ com interior não vazio.*

Dizemos que ω é o traço da derivada conormal de u (ao longo de Σ relativamente a L) se para quaisquer V e Σ_0 com $\Sigma_0 \subset V$ cumpre-se a seguinte condição:

$$u_n \in C^\infty(U) \cap H^1(U), \quad u_n \rightarrow u \text{ em } H^1(V) \implies Bu_n \rightarrow \omega \text{ em } L^2(\Sigma_0). \quad \square$$

Nas condições da definição acima escrevemos

$$\omega = Bu$$

e afirmamos que u tem derivada conormal localmente de quadrado integrável em Σ .

A prova da existência da derivada conormal ao longo de Σ como função localmente de quadrado integrável é altamente complexa, sendo objeto do trabalho [26] de D. Tataru. Nesse artigo o autor faz diversas contribuições sobre a regularidade do traço de solução de equações hiperbólicas. Antes de enunciar o próximo teorema lembramos que uma superfície Σ é “time-like” relativamente ao operador L se

$$p(x, \eta(x)) > 0, \quad x \in \Sigma.$$

Teorema 1.3.1 (*Theorem 2, [26]*) *Seja $\Sigma \subset U \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ uma superfície suave, não característica em relação a L e do tipo “time-like”. Se $u \in H_{loc}^1(U)$ é tal que $Lu \in L_{loc}^2(U)$ então u admite derivada conormal Bu , ao longo de Σ e $Bu \in L_{loc}^2(\Sigma)$. \square*

Vale observar que a expressão $Lu \in L_{loc}^2(U)$, ou equivalentemente, $Lu = f$, $f \in L_{loc}^2(U)$, empregada no Teorema 1.3.1 é no sentido de distribuições.

No presente trabalho empregamos a noção de solução com energia finita para os problemas de Cauchy tratados. É possível verificar sem dificuldades que soluções com energia finita são também soluções no sentido de distribuição. Assim, podemos fazer uso do Teorema 1.3.1 sem maiores preocupações, na ocasião em que for necessário.

Capítulo 2

Estudo da Equação Linear de Klein-Gordon

Neste capítulo obtemos a fórmula explícita para a solução clássica do problema de Cauchy para a equação linear de Klein-Gordon em \mathbb{R}^{N+1} , $N \geq 1$. Obtemos também algumas estimativas de energia que nos permitem definir a noção de solução generalizada, ou solução com energia finita, para a referida equação.

2.1 O problema de Cauchy clássico

Seja L o operador diferencial

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + c^2, \quad \Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Sejam $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e u solução do problema de Cauchy.

$$Lu(x, t) = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \quad (2.1)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{em } \mathbb{R}^N \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad \text{em } \mathbb{R}^N \quad (2.3)$$

A existência da solução u é garantida usando transformada de Fourier, como em [10] e [27]. O que faremos a seguir é obter a representação explícita da solução.

Seja v a função definida em $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ por

$$v(x, x_{N+1}, t) = \cos(cx_{N+1})u(x, t)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_N)$. Daí

$$v_{tt}(x, x_{N+1}, t) = \cos(cx_{N+1})u_{tt}(x, t)$$

$$\Delta v(x, x_{N+1}, t) = \cos(cx_{N+1})\Delta u(x, t)$$

$$v_{x_{N+1}x_{N+1}}(x, x_{N+1}, t) = -c^2 \cos(cx_{N+1})u(x, t)$$

Assim

$$[v_{tt} - \Delta v - v_{x_{N+1}x_{N+1}}](x, x_{N+1}, t) = \cos(cx_{N+1})Lu(x, t) = 0$$

Como

$$v(x, x_{N+1}, 0) = f(x)\cos(cx_{N+1})$$

$$v_t(x, x_{N+1}, 0) = g(x)\cos(cx_{N+1})$$

Denotando Δ_{N+1} o laplaciano em \mathbb{R}^{N+1} , vemos que $v(x, x_{N+1}, t)$ satisfaz

$$v_{tt}(x, x_{N+1}, t) - \Delta_{N+1}v(x, x_{N+1}, t) = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R} \quad (2.4)$$

$$v(x, x_{N+1}, 0) = f(x)\cos(cx_{N+1}) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^{N+1} \quad (2.5)$$

$$v_t(x, x_{N+1}, 0) = g(x)\cos(cx_{N+1}) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^{N+1} \quad (2.6)$$

Assim concluímos que a solução do problema (2.1)-(2.3) é obtida por

$$u(x, t) = \frac{1}{\cos(cx_{N+1})} \cdot v(x, x_{N+1}, t), \quad (2.7)$$

sendo x_{N+1} um número real diferente de $\frac{1}{c} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right)$, para todo k inteiro.

A solução do problema de Cauchy (2.4)-(2.6), segundo [9], é dada por

$$v(x, x_{N+1}, t) = \beta_{N_1} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \left(t^{N-1} \int_{|y|^2 + |y_{N+1}|^2 = 1} f(x + yt) \cos[c(x_{N+1} + ty_{N+1})] d\sigma(y, y_{N+1}) \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \left(t^{N-1} \int_{|y|^2 + |y_{N+1}|^2 = 1} g(x + yt) \cos[c(x_{N+1} + ty_{N+1})] d\sigma(y, y_{N+1}) \right) \right] \quad (2.8)$$

se N é par e,

$$v(x, x_{N+1}, t) = \beta_{N_2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-1}{2}} \left(t^N \int_{|y|^2 + |y_{N+1}|^2 \leq 1} f(x + yt) \frac{\cos[c(x_{N+1} + ty_{N+1})]}{\sqrt{1 - |y|^2 - |y_{N+1}|^2}} dy dy_{N+1} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-1}{2}} \left(t^N \int_{|y|^2 + |y_{N+1}|^2 \leq 1} f(x + yt) \frac{\cos[c(x_{N+1} + ty_{N+1})]}{\sqrt{1 - |y|^2 - |y_{N+1}|^2}} dy dy_{N+1} \right) \right] \quad (2.9)$$

se N é ímpar. Aqui usamos as notações, $\beta_{N_1} = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdots (N-1)w_{N+1}}$, $\beta_{N_2} = \frac{2}{1 \cdot 3 \cdots Nw_{N+2}}$ e $d\sigma(y, y_{N+1})$ denotando o elemento de área da esfera unitária de \mathbb{R}^{N+1} .

A fim de melhorar a apresentação da fórmula (2.8) notamos que se Σ é uma superfície suave de dimensão N no espaço \mathbb{R}^{N+1} dada por

$$\phi(x_1, \dots, x_{N+1}) = \text{const.}$$

com $\frac{\partial \phi}{\partial x_{N+1}} \neq 0$ numa vizinhança de Σ , então a integral de f sobre a superfície Σ é definida por

$$\int_{\Sigma} f d\Sigma = \int_B f(x_1, \dots, x_N, \psi(x_1, \dots, x_N)) \frac{\sqrt{\phi_{x_1}^2 + \dots + \phi_{x_N}^2}}{|\phi_{x_{N+1}}|} dx_1 \cdots dx_N, \quad (2.10)$$

onde ϕ_{x_i} , $i = 1, \dots, N + 1$ denotam as derivadas parciais da função ϕ .

Fazendo $x_{N+1} = 0$ na equação (2.7) e usando a fórmula (2.10) com $\phi(y, y_{N+1}) = |y|^2 + |y_{N+1}|^2 = 1$ temos, via equação (2.8);

$$u(x, t) = \beta_{N_1} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \left(t^{N-1} \int_{|y|^2 \leq 1} \frac{2\cos[cty_{N+1}]}{\sqrt{1 - |y|^2}} f(x + yt) dy \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \left(t^{N-1} \int_{|y|^2 \leq 1} \frac{2\cos[cty_{N+1}]}{\sqrt{1 - |y|^2}} g(x + yt) dy \right) \right].$$

O fator 2 que aparece na fórmula acima é porque as partes superior e inferior da esfera $\phi(y, y_{N+1}) = 1$ dão a mesma contribuição para a integral. Fazendo a mudança de variável $z = x + ty$ e $z_{N+1} = ty_{N+1}$, e observando que $dy = \frac{1}{t^N} dz$, obtemos

$$u(x, t) = 2\beta_{N_1} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \left(t^{N-1} \int_{|z-x| \leq |t|} \frac{\cos[cz_{N+1}]}{\sqrt{1 - \left| \frac{z-x}{t} \right|^2}} f(z) \frac{dz}{t^N} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \left(t^{N-1} \int_{|z-x| \leq |t|} \frac{\cos[cz_{N+1}]}{\sqrt{1 - \left| \frac{z-x}{t} \right|^2}} g(z) \frac{dz}{t^N} \right) \right].$$

Daí

$$u(x, t) = 2\beta_{N_1} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \left(t^{N-1} \frac{t}{t^N} \int_{|z-x| \leq |t|} \frac{\cos[cz_{N+1}]}{\sqrt{t^2 - |z-x|^2}} f(z) dz \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \left(t^{N-1} \frac{t}{t^N} \int_{|z-x| \leq |t|} \frac{\cos[cz_{N+1}]}{\sqrt{t^2 - |z-x|^2}} g(z) dz \right) \right],$$

onde $z_{N+1} = \sqrt{t^2 - |z-x|^2}$, pois $\left| \frac{z-x}{t} \right|^2 + \left| \frac{z_{N+1}}{t} \right|^2 = 1$.

Assim, concluímos que se N é par a solução do problema de Cauchy (2.1)-(2.3), (com $z = y$), é:

$$u(x, t) = 2\beta_{N_1} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \left(\int_{|y-x| \leq |t|} \frac{\cos[c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}]}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} f(y) dy \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \left(\int_{|y-x| \leq |t|} \frac{\cos[c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}]}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} g(y) dy \right) \right]. \quad (2.11)$$

Veamos agora o caso em que N é ímpar. Fazendo $x_{N+1} = 0$ na fórmula (2.9) e efetuando a mudança de variáveis $z = x + ty$, $z_{N+1} = ty_{N+1}$ temos $dy dy_{N+1} = \frac{1}{t^{N+1}} dz dz_{N+1}$, o que fornece:

$$u(x, t) = \beta_{N_2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-1}{2}} \left(t^N \int_{|z-x|^2 + |z_{N+1}|^2 \leq t^2} \frac{t \cos[cz_{N+1}] f(z)}{\sqrt{t^2 - |z-x|^2 - |z_{N+1}|^2}} \frac{dz dz_{N+1}}{t^{N+1}} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-1}{2}} \left(t^N \int_{|z-x|^2 + |z_{N+1}|^2 \leq t^2} \frac{t \cos[cz_{N+1}] g(z)}{\sqrt{t^2 - |z-x|^2 - |z_{N+1}|^2}} \frac{dz dz_{N+1}}{t^{N+1}} \right) \right] \\ = \beta_{N_2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-1}{2}} \left(t^N \frac{t}{t^{N+1}} \int_{|z-x| \leq |t|} f(z) \int_{|z_{N+1}| \leq \mu} \frac{\cos[cz_{N+1}]}{\sqrt{\mu^2 - |z_{N+1}|^2}} dz_{N+1} dz \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-1}{2}} \left(t^N \frac{t}{t^{N+1}} \int_{|z-x| \leq |t|} g(z) \int_{|z_{N+1}| \leq \mu} \frac{\cos[cz_{N+1}]}{\sqrt{\mu^2 - |z_{N+1}|^2}} dz_{N+1} dz \right) \right]$$

onde $\mu = \sqrt{t^2 - |z - x|^2}$. Vamos agora analisar a integral interna

$$\int_{|z_{N+1}| \leq \mu} \frac{\cos[cz_{N+1}]}{\sqrt{\mu^2 - |z_{N+1}|^2}} dz_{N+1}.$$

Como $\frac{\cos[cz_{N+1}]}{\sqrt{\mu^2 - |z_{N+1}|^2}}$ é uma função par e contínua na origem podemos escrever

$$\int_{|z_{N+1}| \leq \mu} \frac{\cos[cz_{N+1}]}{\sqrt{\mu^2 - |z_{N+1}|^2}} dz_{N+1} = 2 \int_0^\mu \frac{\cos[cz_{N+1}]}{\sqrt{\mu^2 - |z_{N+1}|^2}} dz_{N+1}.$$

Usando a fórmula de integração ([11], página 437, fórmula (8))

$$\int_0^\mu (\mu^2 - x^2)^{\nu - \frac{1}{2}} \cos(ax) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2\mu}{a}\right)^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) J_\nu(a\mu),$$

onde $a > 0$, $u > 0$ e $Re\nu > -\frac{1}{2}$ e J_ν é a função de Bessel de primeira espécie e de ordem ν temos

$$\int_0^\mu \frac{\cos[cz_{N+1}]}{\sqrt{\mu^2 - |z_{N+1}|^2}} dz_{N+1} = \frac{\pi}{2} J_0(c\mu).$$

Assim, obtemos

$$u(x, t) = \beta_{N_2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-1}{2}} \left(\int_{|z-x| \leq |t|} \pi J_0(c\mu) f(z) dz \right) + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-1}{2}} \left(\int_{|z-x| \leq |t|} \pi J_0(c\mu) f(z) dz \right) \right].$$

Fazendo a mudança $z = y$, concluímos que a solução do problema de Cauchy (2.1)-(2.3) para N ímpar é dada pela fórmula;

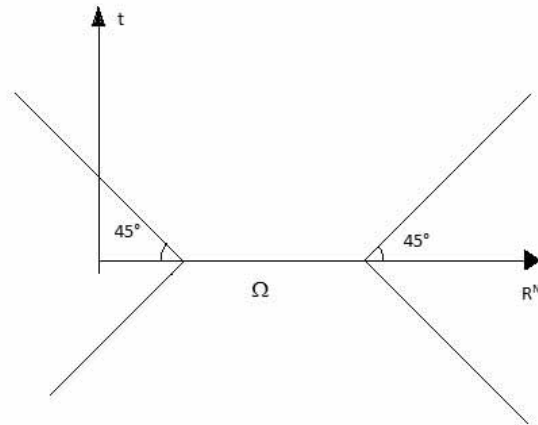
$$u(x, t) = \pi \beta_{N_2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-1}{2}} \left(\int_{|y-x| \leq |t|} J_0(c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}) f(y) dy \right) + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-1}{2}} \left(\int_{|y-x| \leq |t|} J_0(c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}) g(y) dy \right) \right]. \quad (2.12)$$

2.2 Estimativas de Energia

Podemos ver imediatamente das fórmula (2.11) e (2.12) que o operador linear de Klein-Gordon, diferentemente do operador da onda, não satisfaz o princípio de Huygens

qualquer que seja a dimensão do espaço euclidiano em questão. Isso, porque o valor da solução u no ponto (x, t) depende dos dados iniciais em toda a bola $B(x, |t|)$, $t \neq 0$. Todavia, se considerarmos $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, com suporte de ambas em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, então a solução u do problema (2.1)-(2.3) terá o suporte contido na região

$$\Xi = \{(y, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}; |y - x| \leq |t|; x \in \Omega\}$$



Seja u solução da equação $u_{tt} - \Delta_N u + c^2 u = 0$. Multiplicando esta equação por u_t obtemos

$$u_t u_{tt} - u_t \Delta u + u_t c^2 u = 0.$$

Observando que

$$\begin{aligned} u_t u_{tt} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [u_t^2], \\ u_t \Delta u &= \operatorname{div}_x [u_t \nabla u] - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} |\nabla u|^2, \end{aligned}$$

e

$$u_t c^2 u = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{c^2}{2} u^2 \right]$$

obtemos;

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [u_t^2] - \operatorname{div}_x [u_t \nabla u] + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{c^2}{2} u^2 \right] = 0,$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{c^2}{2} u^2 \right] - \operatorname{div}_x [u_t \nabla u] = 0. \quad (2.13)$$

A equação (2.13) é denominada a equação de Klein-Gordon em forma divergente, porque o lado esquerdo da mesma é o divergente na variável (x, t) do campo

$$\vec{F} = (-u_t \nabla u, \frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{c^2}{2}u^2).$$

Assumindo $\text{supp} f, \text{supp} g \subset \Omega$, onde Ω é uma região limitada do \mathbb{R}^N e integrando a equação (2.13) em relação a $x \in \mathbb{R}^N$, no domínio $\Omega_{t+\delta} = \Omega + B(0, |t| + \delta)$, obtemos

$$\int_{\Omega_{t+\delta}} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{c^2}{2}u^2 \right] (x, t) dx - \int_{\Omega_{t+\delta}} \text{div}_x [u_t \nabla u](x, t) dx = 0.$$

Usando o teorema da divergência

$$\int_{\Omega_{t+\delta}} \text{div}_x [u_t \nabla u](x, t) dx = \int_{\partial\Omega_{t+\delta}} u_t \nabla u(y) \cdot \nu(y) d\sigma(y),$$

onde ν é o vetor normal externo sobre a superfície $\partial\Omega_{t+\delta}$, no ponto y . Como u e suas derivadas se anulam em $\partial\Omega_{t+\delta}$, então

$$\int_{\partial\Omega_{t+\delta}} u_t \nabla u(y) \cdot \nu(y) d\sigma(y) = 0.$$

Logo, para todo $t > 0$ temos

$$\int_{\Omega_{t+\delta}} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{c^2}{2}u^2 \right] (x, t) dx = 0.$$

Como o integrando é identicamente nulo fora de Ω_t , podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{c^2}{2}u^2 \right] (x, t) dx = 0,$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{c^2}{2}u^2 \right] (x, t) dx = 0.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{c^2}{2}u^2 \right] (x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{2}g(x)^2 + \frac{1}{2}|\nabla f(x)|^2 + \frac{c^2}{2}f(x)^2 \right] dx. \quad (2.14)$$

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $t > 0$ a quantidade

$$\varepsilon(\Omega, u, t) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{c^2}{2}u^2 \right] (x, t) dx \quad (2.15)$$

é a energia da solução u no conjunto Ω .

Quando $\Omega = \mathbb{R}^N$ dizemos que a quantidade $\varepsilon(\Omega, u, t)$ é a energia total da solução u em um dado instante t . A igualdade (2.14) expressa a conservação da energia:

$$\varepsilon(\mathbb{R}^N, u, t) = \varepsilon(\mathbb{R}^N, u, 0), \quad t > 0,$$

ou seja, podemos dizer que a energia total da solução u para o problema (2.1)-(2.3) é conservada com o passar do tempo.

No entanto, o mesmo fenômeno não ocorre quando consideramos a energia confinada em uma região limitada de \mathbb{R}^N . No capítulo 3 provaremos que a energia confinada em uma região limitada decai com o passar do tempo.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, consideremos a quantidade

$$E(\Omega, u, t) = \int_{\Omega} (u_t^2 + |\nabla u|^2 + u^2)(x, t) dx.$$

Usando as normas do espaço de Sobolev temos

$$E(\Omega, u, t) = \|u(x, t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|u_t(x, t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Para todo $t \geq 0$ vale:

$$C_0 E(\Omega, u, t) \leq \varepsilon(\Omega, u, t) \leq C_1 E(\Omega, u, t), \quad (2.16)$$

onde $C_0 = \min\{\frac{1}{2}, \frac{c^2}{2}\}$ e $C_1 = \max\{\frac{1}{2}, \frac{c^2}{2}\}$. De fato, usando a definição de C_0 e C_1 temos

$$C_0(u_t^2 + |\nabla u|^2 + u^2) \leq \left[\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{c^2}{2}u^2 \right] \leq C_1(u_t^2 + |\nabla u|^2 + u^2).$$

Integrando em Ω esta última sequência de desigualdades obtemos (2.16). Como uma consequência da desigualdade (2.16) e da conservação da energia obtemos a seguinte desigualdade;

$$\|u(\cdot, t)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq C \left\{ \|u(\cdot, 0)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right\}, \quad (2.17)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e algum $C > 1$.

No início desta seção foi visto que se os dados iniciais do problema de Cauchy possuem suportes contidos em um domínio limitado Ω , então para cada $t \in \mathbb{R}$ o suporte da função

$x \mapsto u(x, t)$ está contido em $\Omega_{|t|}$, onde $\Omega_{|t|} = \Omega + B(0, |t|)$. Assim, a estimativa (2.17) pode ser reescrita como

$$\|u(\cdot, t)\|_{H^1(\Omega_{|t|})}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Omega_{|t|})}^2 \leq C \{ \|u(\cdot, 0)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \}, \quad (2.18)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.2.1 *Se $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ são funções com suporte compacto contido no domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e u a solução do problema de Cauchy*

$$Lu(x, t) = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \quad (2.19)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \quad (2.21)$$

então

$$\|u\|_{H^1(\Omega_T \times]-T, T])}^2 \leq 2CT \{ \|f\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|g\|_{L^2(\Omega)}^2 \} \quad (2.22)$$

para todo $T > 0$.

Demonstração: Se $T > 0$ e $|t| < T$, então $\Omega_{|t|} \subset \Omega_T$. Devido a desigualdade (2.18) temos

$$\|u(\cdot, t)\|_{H^1(\Omega_T)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \leq C \{ \|u(\cdot, 0)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Integrando esta última desigualdade em relação a t no intervalo $[-T, T]$ obtemos

$$\int_{-T}^T \{ \|u(\cdot, t)\|_{H^1(\Omega_T)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \} dt \leq 2CT \{ \|u(\cdot, 0)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \}.$$

Usando o teorema de Fubini e a definição de normas em espaços de Sobolev temos a validade da fórmula (2.22). \square

Agora seja $K \subset \mathbb{R}^{N+1}$ um conjunto compacto com $\text{int}(K) \neq \emptyset$. Para algum $T > 0$ temos

$$K \subset \Omega_T \times]-T, T[.$$

Daí, fazendo $c(K) = 2CT$ obtemos

$$\|u\|_{H^1(K)}^2 \leq c(K) \{ \|f\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|g\|_{L^2(\Omega)}^2 \}. \quad (2.23)$$

2.2.1 Solução Generalizada ou de Energia Finita

Nesta seção definimos solução para o problema de Cauchy (2.1)-(2.3) quando $f \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ ambas com suporte compacto.

Definição 2.2.1 (Solução Generalizada ou Solução com Energia Finita) *Sejam $f \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ funções com suportes compactos. A função $u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ é solução generalizada do problema de Cauchy*

$$Lu = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \quad (2.24)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \quad (2.26)$$

se existir uma sequência $(u_n)_{n=1}^\infty \subset C^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ tal que

a) Para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, com interior não vazio, se tem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \quad \text{em} \quad H^1(\text{int}(K));$$

b) $Lu_n = 0$ em $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, para todo $n = 0, 1, \dots$;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, 0) = f(x)$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$;

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, 0) = g(x)$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Tendo em mente esta definição, é importante saber se realmente tal definição faz sentido, isto é, se o problema de Cauchy (2.24)-(2.26) é bem posto. Ou seja, se possui única solução e se ela depende continuamente dos dados iniciais.

Mostraremos primeiramente a existência e unicidade de solução generalizada, isto será feito no teorema abaixo.

Teorema 2.2.2 *Sejam $f \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ funções com suportes contidos em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. O problema de Cauchy generalizado (2.24)-(2.26) admite uma única solução generalizada $u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$.*

Demonstração: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, onde $\text{supp} f, \text{supp} g \subset \Omega$. Então $f \in H_0^1(\Omega)$ e $g \in L^2(\Omega)$. Sendo $C_0^\infty(\Omega)$ denso em $H_0^1(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$, então deve existir uma sequência

$$(f_n)_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega), \quad (g_n)_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$$

tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \text{ em } H^1(\Omega) \quad (2.27)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g \text{ em } L^2(\Omega). \quad (2.28)$$

Para cada n podemos olhar f_n e g_n definidas em todo o \mathbb{R}^N , nulas fora de Ω . Assim, para cada n temos $f_n, g_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, ambas com o suporte contido no domínio limitado Ω .

Seja u_n a solução clássica do problema de Cauchy

$$Lu_n(x, t) = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \quad (2.29)$$

$$u_n(x, 0) = f_n(x) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}(x, 0) = g_n(x) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \quad (2.31)$$

A função $u_m - u_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ satisfaz o problema de Cauchy

$$L(u_m - u_n) = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \quad (2.32)$$

$$(u_m - u_n)(x, 0) = (f_m - f_n)(x) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial(u_m - u_n)}{\partial t}(x, 0) = (g_m - g_n)(x) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \quad (2.34)$$

Fixando $T > 0$, a desigualdade (2.22) aplicada a $u_m - u_n$ nos fornece

$$\|u_m - u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N \times]-T, T])}^2 \leq 2CT \{ \|f_m - f_n\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|g_m - g_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \}.$$

Combinando esta última desigualdade com as igualdades (2.27) e (2.28), concluímos que $(u_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $H^1(\mathbb{R}^N \times]-T, T])$. Como este espaço é Banach, podemos então afirmar a existência de uma função $u^T \in H^1(\mathbb{R}^N \times]-T, T])$ e uma sequência $(u_n)_{n=1}^\infty \subset C^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ tal que

a) $Lu_n = 0$ em $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, para todo $n = 0, 1, \dots$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u^T$ em $H^1(\mathbb{R}^N \times]-T, T])$;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, 0) = f(x)$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $\text{supp } u_n(\cdot, 0) \subset \Omega$;

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, 0) = g(x)$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e $\text{supp } \frac{\partial}{\partial t} u_n(\cdot, 0) \subset \Omega$.

Agora, vamos provar que u^T é a única função de $H^1(\mathbb{R}^N \times]-T, T[)$ que satisfaz (a)-(d). Para isso, suponhamos que existam $\tilde{u}^T \in H^1(\mathbb{R}^N \times]-T, T[)$ e $(\tilde{u}_n)_{n=1}^\infty \subset C^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ satisfazendo (a)-(d). Aplicando a desigualdade (2.22) à $u_n - \tilde{u}_n$, obtemos

$$\|u_n - \tilde{u}_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N \times]-T, T[)}^2 \leq 2CT \left\{ \|u_n(\cdot, 0) - \tilde{u}_n(\cdot, 0)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial u_n}{\partial t}(\cdot, 0) - \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial t}(\cdot, 0) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ e usando (a)-(d) obteremos

$$\|u^T - \tilde{u}^T\|_{H^1(\mathbb{R}^N \times]-T, T[)}^2 \leq 2CT \left\{ \|f - \tilde{f}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|g - \tilde{g}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} = 0,$$

logo concluímos que $u^T = \tilde{u}^T$ em $H^1(\mathbb{R}^N \times]-T, T[)$. Agora, fazendo $T = j$, sendo j um inteiro positivo, e considerando as funções u^j e u^{j+1} . A restrição de u^{j+1} a faixa $\mathbb{R}^N \times [-j, j]$ coincide com u^j pois ambas satisfazem (a)-(b). Assim, u^{j+1} é a extensão de u^j . Se fizemos j variar no conjunto dos inteiros positivos construímos a função $u \in H^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ satisfazendo as condições da definição 2.2.1.

Provemos agora a unicidade da solução do problema generalizado. Suponhamos que u^1 e u^2 pertencentes a $H_{loc}^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ sejam soluções generalizadas do problema (2.24)-(2.26). Sejam $(u_n^1)_{n=1}^\infty, (u_n^2)_{n=1}^\infty \subset C^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ seqüências como na definição. Tomando $K \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, existe $T > 0$, onde $K \subset \mathbb{R}^N \times [-T, T]$. Como, $\|u\|_{H^1(K)} \leq \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N \times]-T, T[)}$, utilizando a desigualdade (2.22) para $u_n^1 - u_n^2$ obtemos;

$$\|u_n^1 - u_n^2\|_{H^1(K)}^2 \leq 2CT \left\{ \|u_n^1(\cdot, 0) - u_n^2(\cdot, 0)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial u_n^1}{\partial t}(\cdot, 0) - \frac{\partial u_n^2}{\partial t}(\cdot, 0) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo compacto $K \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. Se fizermos $n \rightarrow \infty$ nesta última desigualdade obteremos

$$\|u^1 - u^2\|_{H^1(K)}^2 \leq 2CT \left\{ \|f - f\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|g - g\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} = 0.$$

Assim, $u^1 = u^2$ em todo compacto $K \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. Logo, concluímos que $u^1 = u^2$ em $H_{loc}^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$.

□

Outro fato importante a ser mostrado é que a solução com energia finita tem dependência contínua em relação aos dados iniciais. De fato, se considerarmos $u^i \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ como soluções dos seguintes problemas de Cauchy

$$\begin{aligned} Lu^i(x, t) &= 0 & \text{em } & \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \\ u^i(x, 0) &= f^i(x) & \text{em } & \mathbb{R}^N \\ \frac{\partial u^i}{\partial t}(x, 0) &= g^i(x) & \text{em } & \mathbb{R}^N, \end{aligned}$$

onde $i = 1, 2$ e $f^i \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $g^i \in L^2(\mathbb{R}^N)$, todos com suportes compactos, devido a definição 2.2.1, deve existir sequências $(u_n^i)_{n=1}^\infty \subset C^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$, $i=1,2$, satisfazendo as condições (a)-(d) da definição acima mencionada. Aplicando a desigualdade (2.22) temos

$$\|u_n^1 - u_n^2\|_{H^1(\Omega_T \times]-T, T])}^2 \leq 2CT\{\|f_n^1 - f_n^2\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|g_n^1 - g_n^2\|_{L^2(\Omega)}^2\}.$$

Tomando T suficientemente grande de forma que $K \subset \Omega_T \times [-T, T]$, obtemos então $\|u_n^1 - u_n^2\|_K^2 \leq \|u_n^1 - u_n^2\|_{H^1(\Omega_T \times]-T, T])}^2$, aplicando o limite obteremos

$$\|u^1 - u^2\|_{H^1(K)}^2 \leq 2CT\{\|f^1 - f^2\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|g^1 - g^2\|_{L^2(\Omega)}^2\}.$$

Esta última desigualdade garante a dependência contínua em relação aos dados iniciais do problema de Cauchy generalizado.

2.2.2 Propriedades da solução generalizada

Outra importante propriedade das soluções com energia finita para o problema de Cauchy (2.24)-(2.26) é que o estado da solução em um dado instante t tem também energia finita, isto é $(u(x, t), \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$. E tais propriedades serão mostrados nas próximas proposições.

Proposição 2.2.1 *Se $f \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ são funções com suportes compactos contidos em Ω , então a solução $u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ do problema de Cauchy (2.24)-(2.26) tem traço $u(\cdot, t) \in H^1(\mathbb{R}^N)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: A existência do traço $u(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ é consequência dos teoremas clássicos de traço. Vamos mostrar agora que $u(\cdot, t) \in H^1(\mathbb{R}^N)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Seja $(u_n)_{n=1}^\infty \subset C^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ uma sequência de soluções de

$$\begin{aligned} Lu_n(x, t) &= 0 & \text{em} & \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \\ u_n(x, 0) &= f_n(x) & \text{em} & \mathbb{R}^N \\ \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, 0) &= g_n(x) & \text{em} & \mathbb{R}^N, \end{aligned}$$

onde $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) = u(x, t)$ em $H^1(\text{int}K)$, para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, onde $\text{int}K \neq \emptyset$. Da definição de traço, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) = u(x, t) \text{ em } L^2(\mathbb{R}^N)$$

Fixando $T > 0$, aplicando a desigualdade (2.17) e eliminando um termo teremos

$$\|u_m(\cdot, t) - u_n(\cdot, t)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 \leq C(T) \{ \|f_m - f_n\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|g_m - g_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \}$$

para todo $m, n \in \mathbb{N}$ e $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < t < T$. Como $(f_n)_{n=1}^\infty$ e $(g_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy, segue que (u_n) é uma sequência de Cauchy em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Assim, para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < t < T$, existe $g_t \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(\cdot, t) = g_t \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N)$$

assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(\cdot, t) = g_t \text{ em } L^2(\mathbb{R}^N)$$

A unicidade do limite em $L^2(\mathbb{R}^N)$ implica que $g_t = u(\cdot, t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < t < T$. Como T foi tomado arbitrariamente, então $u(\cdot, t) = g_t \in H^1(\mathbb{R}^N)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. \square

O nosso objetivo agora consiste em mostrar que $\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Primeiramente, precisamos entender o significado a função $\frac{\partial}{\partial t}u(\cdot, t)$, isto é, precisamos entender se tal função é bem definida. Para isso, consideremos

$$u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad (u_n)_{n=1}^\infty \subset C^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$$

como na proposição anterior.

Fixe $T > 0$, apliquemos a desigualdade (2.17) a função $u_m - u_n$ e obteremos que

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} u_m - \frac{\partial}{\partial t} u_n \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq \{ \|f_m - f_n\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|g_m - g_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \}$$

para $t \in \mathbb{R}$, $|t| < T$.

Assim, para cada $t \in \mathbb{R}$ com $|t| < T$, existe $h_t \in L^2(\mathbb{R}^N)$ onde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_n}{\partial t} = h_t \text{ em } L^2(\mathbb{R}^N)$$

Defina $h : [-T, T] \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ por $h(x, t) = h_t(x)$. Vamos provar que h é contínua, isto é;

$$h \in C([-T, T], L^2(\mathbb{R}^N))$$

Fixemos t_1 tal que $|t_1| \leq T$ e $k \in \mathbb{R}$ com $|k|$ pequeno. Definamos

$$U_n(x, t) = u_n(x, t + k) - u_n(x, t)$$

em $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Esta função satisfaz

$$\begin{aligned} LU_n(x, t) &= 0 && \text{em } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \\ U_n(x, t_1) &= u_n(x, t_1 + k) - u_n(x, t_1) && \text{em } \mathbb{R}^N \\ \frac{\partial U_n}{\partial t}(x, 0) &= \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t_1 + k) - \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t_1) && \text{em } \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

É importante observar que os dados iniciais deste último problema de Cauchy possuem suportes compactos. Assim, pela conservação da energia segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial t} U_n \right|^2 + |\nabla U_n|^2 + c^2 |U_n|^2 \right\} (x, t_1) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial t} U_n \right|^2 + |\nabla U_n|^2 + c^2 |U_n|^2 \right\} (x, t) dx.$$

Integrando a igualdade acima, em relação a t no intervalo $[-T, T]$ e desprezando dois termos do primeiro membro obteremos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial}{\partial t} U_n(x, t_1) \right|^2 dx \leq \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial t} U_n \right|^2 + |\nabla U_n|^2 + c^2 |U_n|^2 \right\} (x, t) dx dt.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x, t) &= u_n(x, t+k) - u_n(x, t) && \text{em } L^2(\mathbb{R}^N \times [-T, T]) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} U_n(x, t_1) &= h_{t_1+k} - h_{t_1} && \text{em } L^2(\mathbb{R}^N) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial U_n}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t+k) - \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) && \text{em } L^2(\mathbb{R}^N \times [-T, T]) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \nabla U_n(x, t) &= \nabla u_n(x, t+k) - \nabla u_n(x, t) && \text{em } L^2(\mathbb{R}^N \times [-T, T]). \end{aligned}$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ na última desigualdade obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |h_{t_1+k}(x) - h_{t_1}(x)|^2 dx &\leq \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial}{\partial t} u(x, t+k) - \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \right|^2 dx dt \\ + \frac{1}{2T} \left[\int_{-T}^T \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x, t+k) - \nabla u(x, t)|^2 dx dt + \int_{-T}^T \int_{\mathbb{R}^N} c^2 |u(x, t+k) - u(x, t)|^2 dx dt \right]. \end{aligned}$$

Usando o teorema de continuidade em L^2 , segue que

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial}{\partial t} u(x, t+k) - \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \right|^2 dx dt = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x, t+k) - \nabla u(x, t)|^2 dx dt = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{\mathbb{R}^N} c^2 |u(x, t+k) - u(x, t)|^2 dx dt = 0$$

Logo, $\lim_{k \rightarrow 0} \|h_{t_1+k} - h_{t_1}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = 0$, ou seja, $\lim_{k \rightarrow 0} h_{t_1+k} = h_{t_1}$.

Isto quer dizer que a função h é contínua em $[-T, T]$. Como T foi tomado arbitrariamente podemos definir h para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, h é uma função contínua em \mathbb{R} , ou seja, $h \in C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^N))$.

Seja $[a, b] \subset \mathbb{R}$, temos $h \in C([a, b], L^2(\mathbb{R}^N))$. Como $C([a, b], L^2(\mathbb{R}^N)) \subset L^2([a, b], L^2(\mathbb{R}^N))$ e pelo teorema de Fubini $L^2([a, b], L^2(\mathbb{R}^N)) = L^2([a, b] \times \mathbb{R}^N)$. Podemos redefinir a função h nas variáveis x e t

$$h : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por $(x, t) \longmapsto h(x, t) = h_t(x)$.

Observe que $h \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$. Mais ainda, para todo $t \in \mathbb{R}$ se tem

$$\begin{aligned} h(\cdot, t) : \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto h(x, t) \end{aligned}$$

em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial U_n}{\partial t}(\cdot, t) = h(\cdot, t) \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^N)$$

Particularmente temos $h(\cdot, 0) = g$. Para concluir que $\frac{\partial}{\partial t}u(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^N)$, para cada $t \in \mathbb{R}$, consideremos a seguinte proposição.

Proposição 2.2.2 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, $f \in H^1(\Omega)$ e $g \in L^2(\Omega)$ funções cujos suportes estejam contidos em Ω . Seja $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ a solução do problema de Cauchy generalizado*

$$\begin{aligned} Lu(x, t) &= 0 && \text{em } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \\ u(x, 0) &= f(x) && \text{em } \mathbb{R}^N \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x) && \text{em } \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Então, existe uma função $h \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ onde

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto h(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^N)$$

é contínua, para todo $t \in \mathbb{R}$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) = h(x, t) \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^N),$$

onde $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ é a sequência da Definição 2.2.1. Mais ainda, $\frac{\partial}{\partial t}u = h$ quase sempre em $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$.

Demonstração: A existência da função h foi mostrada na discussão anterior. Resta mostrar apenas que $\frac{\partial}{\partial t}u = h$ quase sempre em $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$.

Para isso, consideremos $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, temos $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) = h(x, t)$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) \varphi(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^N} h(x, t) \varphi(x, t) dx$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definamos $\Phi_n(t) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) \varphi(x, t) dx$. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz temos

$$|\Phi_n(t)| \leq \left\| \frac{\partial u_n}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|\varphi(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \quad (2.35)$$

Pela desigualdade (2.17) obtemos

$$\left\| \frac{\partial u_n}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq \{ \|u_n(\cdot, 0)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|u_n(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \}$$

Como as seqüências $(u_n(\cdot, 0))_{n=1}^\infty$ e $(\frac{\partial u_n}{\partial t}(\cdot, 0))_{n=1}^\infty$ são convergentes em $H^1(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$, respectivamente, segue que a seqüência

$$\left(\left\| \frac{\partial u_n}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \right)_{n=1}^\infty$$

é limitada uniformemente em t , $t \in [-T, T]$.

Seja $T \geq 0$ tal que $\text{supp} \varphi \subset \mathbb{R}^N \times [-T, T]$. Então, $\|\varphi(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ é limitada em $[-T, T]$.

Voltando a desigualdade (2.35) concluímos que a seqüência $(\Phi_n)_{n=1}^\infty$ é limitada em $[-T, T]$. Observemos que $\varphi(\cdot, t) = 0$ se $|t| > T$. Concluímos assim que $(\Phi_n)_{n=1}^\infty$ é limitada em \mathbb{R} . Assim, cada $(\Phi_n)_{n=1}^\infty$ é integrável em compactos de \mathbb{R} e converge, para todo $t \in \mathbb{R}$, para a função

$$\Phi(t) = \int_{\mathbb{R}^N} h(x, t) \varphi(x, t) dx$$

Logo, Φ é integrável em cada intervalo limitado e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial u_n}{\partial t}(\cdot, t) \varphi(\cdot, t) dx dt = \int_I \int_{\mathbb{R}^N} h(\cdot, t) \varphi(\cdot, t) dx dt$$

Mas a seqüência $(\frac{\partial}{\partial t} u_n)_{n=1}^\infty$ converge para $\frac{\partial}{\partial t} u$ em $L^2(K)$, para qualquer compacto $K \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. Seja $K = \text{supp} \varphi$ e I tal que $K \subset \mathbb{R}^N \times I$. Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial u_n}{\partial t}(\cdot, t) \varphi(\cdot, t) dx dt = \int_I \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \varphi(\cdot, t) dx dt.$$

Assim

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}} h(x, t) \varphi(x, t) dx dt = \int_{\mathbb{R}^{N+1}} \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \varphi(\cdot, t) dx dt,$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$.

Logo $h = \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t)$ quase sempre em \mathbb{R}^{N+1} . \square

Como $\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) = h$ quase sempre em \mathbb{R}^{N+1} e $h \in C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^N))$ é natural então definir $\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t)$ no instante $t \in \mathbb{R}$ por

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \equiv h(x, t)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Assim, a solução $u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ do problema de Cauchy

$$\begin{aligned} Lu(x, t) &= 0 && \text{em } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \\ u(x, 0) &= f(x) && \text{em } \mathbb{R}^N \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x) && \text{em } \mathbb{R}^N, \end{aligned}$$

com $f \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$, com suportes em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, é tal que

$$(u(x, t), \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Para finalizar este capítulo vamos introduzir uma família de operadores lineares a qual desempenhará um papel fundamental na resolução do controle exato na fronteira.

Seja $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$ e S_t o operador

$$S_t : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N),$$

definido por $S_t(u(\cdot, 0), \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0)) = (u(\cdot, t), \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t))$, onde $u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ é a única solução do problema de Cauchy acima. O operador S_t é denominado operador solução. Da linearidade do operador L segue que o operador S_t é também linear.

Vamos considerar o espaço $H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$ munido da norma

$$\|(\alpha, \beta)\|_{H^1 \times L^2} = \sqrt{\|\alpha\|_{H^1}^2 + \|\beta\|_{L^2}^2}$$

Usando a norma definida acima e a estimativa de energia (2.17) prova-se que o operador S_t é um operador limitado, para todo $t \in \mathbb{R}$. De fato;

$$\|u_n(\cdot, t)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 + \left\| \frac{\partial u_n}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq C \left\{ \|u_n(\cdot, 0)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial t} u_n(\cdot, 0) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right\}$$

que é

$$\left\| \left(u_n(\cdot, t), \frac{\partial u_n}{\partial t}(\cdot, t) \right) \right\|_{H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \sqrt{C} \left\| \left(u_n(\cdot, 0), \frac{\partial}{\partial t} u_n(\cdot, 0) \right) \right\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, onde $|t| < T$. Fazendo $n \rightarrow \infty$ e das proposições 2.2.1 e 2.2.2 obtemos

$$\left\| \left(u(\cdot, t), \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \right) \right\|_{H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \sqrt{C} \left\| (f, g) \right\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, onde $|t| < T$. Assim,

$$\|S_t(f, g)\|_{H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \sqrt{C} \|(f, g)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \quad (2.36)$$

para todo $(f, g) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. A desigualdade (2.36) mostra que o operador S_t é limitado.

Capítulo 3

Decaimento Local de Energia

Decaimento local da energia desempenha um papel importante no estudo da controlabilidade exata para equação de Klein-Gordon. Este é o objeto de estudo deste capítulo. O resultado principal é o Teorema 3.3.1 que estabelece decaimento polinomial da energia local da solução da equação de Klein-Gordon. Inicialmente apresentamos algumas propriedades das funções de Bessel que serão utilizadas ao longo do texto.

3.1 Propriedades das funções de Bessel

O conteúdo desta seção é baseado na referência [28]. A função de Bessel de primeira espécie e de ordem $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ é definida por

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n}, \quad (3.1)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ ou $x \in \mathbb{C}$.

É possível provar que para todo n vale a fórmula de derivação

$$J'_n(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x). \quad (3.2)$$

A fórmula (3.2) juntamente com a identidade

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (3.3)$$

serão utilizadas no trato da solução do problema de Cauchy para a equação linear de Klein-Gordon quando o espaço tem dimensão ímpar.

A funções de Bessel J_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, podem ser representadas na forma de uma integral como:

$$J_{2n}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \operatorname{sen} \theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad (3.4)$$

$$J_{2n+1}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen}(n\theta) d\theta, \quad (3.5)$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$, de onde segue a estimativa

$$|J_n(x)| \leq 1, \quad (3.6)$$

para todo n e todo $x \in \mathbb{R}$. Derivando dentro do sinal de integral das fórmulas (3.4) e (3.5) obtém-se facilmente a estimativa

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} J_n(x) \right| \leq 1, \quad (3.7)$$

para todo $k = 0, 1, 2, \dots$ e $x \in \mathbb{R}$.

Terá um papel fundamental neste trabalho a informação sobre o comportamento assintótico das funções de Bessel expressa no lema abaixo.

Lema 3.1.1 *Para cada $n = 0, 1, 2, \dots$, existem constantes M_n e $A_n > 0$, tal que*

$$\left| J_n(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{A_n}{x^{3/2}} \quad (3.8)$$

para $|x| > M_n$.

Demonstração: Veja [8] página 139. □

3.2 Estimativa pontual da solução do problema de Cauchy para a equação de Klein-Gordon

Nesta seção obtemos estimativas pontuais para as derivadas da solução clássica do problema de Cauchy (2.1)-(2.3) com dados iniciais $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, ambos com suporte compacto em um domínio limitado $U \subset \mathbb{R}^N$. De agora em diante o diâmetro

de um domínio U limitado de \mathbb{R}^N será denotado por $d(U)$. Conforme o capítulo anterior, para todo

$$x \in U \quad \text{e} \quad t > d(U),$$

o valor $u(x, t)$ da solução é dado por;

$$u(x, t) = 2\beta_{N_1} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \left(\int_U \frac{\cos[c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}]}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} f(y) dy \right) + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \left(\int_U \frac{\cos[c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}]}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} g(y) dy \right) \right] \quad (3.9)$$

se $N \geq 2$ é par e

$$u(x, t) = \pi\beta_{N_2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-1}{2}} \left(\int_U J_0(c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}) f(y) dy \right) + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-1}{2}} \left(\int_U J_0(c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}) g(y) dy \right) \right] \quad (3.10)$$

se $N \geq 1$ é ímpar. Aqui β_{N_1} e β_{N_2} são constantes dadas por $\beta_{N_1} = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdots (N-1)w_{N+1}}$ e $\beta_{N_2} = \frac{2}{1 \cdot 3 \cdots Nw_{N+2}}$.

Explorando as fórmulas explícitas da solução u dadas em (3.9) e (3.10) e propriedades das funções de Bessel provaremos o seguinte teorema.

Teorema 3.2.1 *Sejam N um inteiro positivo e $U \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado. Existem constantes $K > 0$ e $T_0 > d(U)$ tais que, dados $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com*

$$\text{supp} f, \text{supp} g \subset U,$$

a solução u do problema de Cauchy (2.1)-(2.3) satisfaz

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x, t)^\alpha} u(x, t) \right|^2 \leq \frac{K}{t^N} \{ \|f\|_{H^1(U)}^2 + \|g\|_{L^2(U)}^2 \} \quad (3.11)$$

para todo multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}^{N+1}$ com $|\alpha| \leq 1$ e todo $x \in U$ e $t > T_0$.

3.2.1 Prova do Teorema 3.2.1

Como a solução do problema (2.1)-(2.3) tem fórmulas distintas conforme a paridade de N , na demonstração do teorema faremos sempre a distinção de ambos os casos. Para manusear as fórmulas (3.9)-(3.10) convém definir funções

$$\gamma_k(x, y, t) = \frac{\cos(c\sqrt{t^2 - |y - x|^2})}{(t^2 - |y - x|^2)^{\frac{k}{2}}}, \quad (3.12)$$

$$\theta_k(x, y, t) = \frac{\text{sen}(c\sqrt{t^2 - |y - x|^2})}{(t^2 - |y - x|^2)^{\frac{k}{2}}}, \quad (3.13)$$

$$\xi_{n,k}(x, y, t) = \frac{J_n(c\sqrt{t^2 - |y - x|^2})}{(t^2 - |y - x|^2)^{\frac{k}{2}}}, \quad (3.14)$$

onde $k, n = 0, 1, 2, \dots$ e J_n é a função de Bessel de primeira espécie de ordem n , onde $x, y \in U$ e $t > d(U)$. Observe que para $n = 0, 1, 2, \dots$ temos

$$\gamma_k(x, y, t) = \frac{\cos(c\sqrt{t^2 - |y - x|^2})}{t^k \left(\sqrt{1 - \left| \frac{y-x}{t} \right|^2} \right)^k},$$

$$\theta_k(x, y, t) = \frac{\text{sen}(c\sqrt{t^2 - |y - x|^2})}{t^k \left(\sqrt{1 - \left| \frac{y-x}{t} \right|^2} \right)^k},$$

$$\xi_{n,k}(x, y, t) = \frac{J_n(c\sqrt{t^2 - |y - x|^2})}{t^k \left(\sqrt{1 - \left| \frac{y-x}{t} \right|^2} \right)^k}.$$

Introduzindo a função

$$\chi(s) = \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}}, \quad -1 < s < 1,$$

e observando que para $t > d(U)$ temos $0 \leq \left| \frac{y-x}{t} \right| < 1$, podemos reescrever a equação (3.12)-(3.14) nas formas

$$\gamma_k(x, y, t) = \frac{1}{t^k} \cos(c\sqrt{t^2 - |y - x|^2}) \chi\left(\left| \frac{y-x}{t} \right|\right)^k, \quad (3.15)$$

$$\theta_k(x, y, t) = \frac{1}{t^k} \text{sen}(c\sqrt{t^2 - |y - x|^2}) \chi\left(\left| \frac{y-x}{t} \right|\right)^k, \quad (3.16)$$

$$\xi_{n,k}(x, y, t) = \frac{1}{t^k} J_n(c\sqrt{t^2 - |y - x|^2}) \chi\left(\left| \frac{y-x}{t} \right|\right)^k. \quad (3.17)$$

Agora, do Lema 3.1.1 temos

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(x - n\pi/2 - \pi/4)}{\sqrt{x}} + F_n(x)$$

onde F_n é uma função tal que $|F_n(x)| \leq \frac{A_n}{x^{3/2}}$ para todo $|x| \geq M_n$ e $n = 0, 1, 2, \dots$.

Embora muitas das estimativas obtidas nesta seção valiam para quaisquer naturais n e k , faremos uso, no resultado principal deste trabalho, apenas dos valores $n = 0, 1$. Tomando

$$M = \max\{M_0, M_1\} \quad \text{e} \quad A = \max\{A_0, A_1\}$$

obtemos a estimativa

$$|J_n(s)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{A}{s^{3/2}}$$

para todo $|s| > M$ e $n = 0, 1$.

Queremos aplicar a estimativa acima para $s = c\sqrt{t^2 - |y - x|^2}$ com $x, y \in U$. Agora observe que se $t > T_0 =: \sqrt{(\frac{M}{c})^2 + (d(U))^2}$ e $x, y \in U$, então $c\sqrt{t^2 - |y - x|^2} > M$. Logo para $t > \sqrt{(\frac{M}{c})^2 + (d(U))^2} =: T_0$ vale a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} |J_n(c\sqrt{t^2 - |y - x|^2})| &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c\sqrt{t^2 - |y - x|^2}}} + \frac{A}{(c\sqrt{t^2 - |y - x|^2})^{3/2}}, \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{ct}} \chi\left(\left|\frac{y - x}{t}\right|\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{A}{c^{\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}}} \chi\left(\left|\frac{y - x}{t}\right|\right)^{\frac{3}{2}}, \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{t}} \left[\sqrt{\frac{2}{c\pi}} \cdot \chi\left(\left|\frac{y - x}{t}\right|\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{A}{c^{\frac{3}{2}}t} \chi\left(\left|\frac{y - x}{t}\right|\right)^{\frac{3}{2}} \right], \end{aligned}$$

para todo $x, y \in U$ e $n = 0, 1$.

Agora escolha η tal que $\frac{d(U)}{T_0} < \eta < 1$ e seja $\varrho = \max\{\chi(s), s \in [-\eta, \eta]\}$. Se $x, y \in U$ e $t > T_0$ temos

$$\left|\frac{y - x}{t}\right| < \frac{d(U)}{T_0} < \eta,$$

acarretando $\chi(|\frac{y-x}{t}|) \leq \varrho$. Daí

$$|J_n(c\sqrt{t^2 - |y - x|^2})| \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \left[\sqrt{\frac{2}{c\pi}} \cdot \varrho^{\frac{1}{2}} + \frac{A}{c^{\frac{3}{2}}T_0} \cdot \varrho^{\frac{3}{2}} \right]$$

para todo $x, y \in U$ e $t > T_0$. Denotando $\Xi = \sqrt{\frac{2}{c\pi}} \cdot \varrho^{\frac{1}{2}} + \frac{A}{c^{\frac{3}{2}}T_0} \cdot \varrho^{\frac{3}{2}}$, temos

$$|J_0(c\sqrt{t^2 - |y - x|^2})| \leq \frac{\Xi}{\sqrt{t}}, \quad (3.18)$$

$$|J_1(c\sqrt{t^2 - |y - x|^2})| \leq \frac{\Xi}{\sqrt{t}}, \quad (3.19)$$

para todos $x, y \in U$ e $t > T_0$.

Observe que a constante Ξ depende, essencialmente, do domínio U , das funções de Bessel J_0, J_1 e do coeficiente c da equação de Klein-Gordon.

Apresentaremos agora alguns lemas técnicos que nos permitirão estimar as derivadas $(\frac{\partial}{\partial t})^\ell \xi_{n,k}$, $(\frac{\partial}{\partial t})^\ell \gamma_k$ e $(\frac{\partial}{\partial t})^\ell \theta_k$, para todos $x, y \in U$ e $t \geq T_0$, sendo ℓ natural não nulo e $n, k = 0, 1, 2, \dots$.

Lema 3.2.1 *Seja k um número natural e f uma função que tenha derivada de qualquer ordem, então*

$$\left(\frac{1}{t} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\right)^k f = \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} \frac{C_{ij}}{t^j} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(i)} f \quad (3.20)$$

Demonstração: Vamos fazer a demonstração do Lema 3.2.1 usando a indução.

Se $k = 1$, então $(\frac{1}{t} \cdot \frac{\partial}{\partial t}) f = \frac{f^{(1)}}{t}$, neste caso, $i = 1$ e $j = 1$ e $C_{1,1} = 1$. Vamos supor agora que o resultado seja válido para $k - 1$, então

$$\left(\frac{1}{t} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\right)^{k-1} f = \sum_{\substack{i+j=2k-2 \\ k-1 \leq j < 2k-2}} \frac{C_{ij}}{t^j} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(i)} f.$$

Agora

$$\left(\frac{1}{t} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\right)^k f = \left(\frac{1}{t} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{1}{t} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\right)^{k-1} f = \left(\frac{1}{t} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\right) \sum_{\substack{i+j=2k-2 \\ k-1 \leq j < 2k-2}} \frac{C_{ij}}{t^j} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(i)} f.$$

Como

$$\left(\frac{1}{t} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\right) \sum_{\substack{i+j=2k-2 \\ k-1 \leq j < 2k-2}} \frac{C_{ij}}{t^j} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(i)} f = \frac{1}{t} \sum_{\substack{i+j=2k-2 \\ k-1 \leq j < 2k-2}} C_{ij} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{(\frac{\partial}{\partial t})^{(i)} f}{t^j}\right).$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{t} \sum_{\substack{i+j=2k-2 \\ k-1 \leq j < 2k-2}} C_{ij} \left(\frac{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(i+1)} f}{t^j} - \frac{j \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(i)} f}{t^{j+1}} \right) \\
&= \sum_{\substack{i+j=2k-2 \\ k-1 \leq j < 2k-2}} C_{ij} \left(\frac{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(i+1)} f}{t^{j+1}} - \frac{j \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(i)} f}{t^{j+2}} \right).
\end{aligned}$$

Fazendo uma nova indexação, reorganizando a soma e redefinindo os coeficientes C_{ij} obtemos a igualdade (3.20). \square

As seguintes fórmulas de diferenciação

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma_k(x, y, t) = -ct\theta_{k+1}(x, y, t) - kt\gamma_{k+2}(x, y, t), \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta_k(x, y, t) = ct\gamma_{k+1}(x, y, t) - kt\theta_{k+2}(x, y, t), \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi_{n,k}(x, y, t) = ct\xi_{n-1,k+1}(x, y, t) - t(n+k)\xi_{n,k+2}(x, y, t), \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \gamma_k(x, y, t) = -c(y_i - x_i)\theta_{k+1}(x, y, t) - k(y_i - x_i)\gamma_{k+2}(x, y, t), \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \xi_{n,k}(x, y, t) = c(y_i - x_i)\xi_{n-1,k+1}(x, y, t) - (n+k)(y_i - x_i)\xi_{n,k+2}(x, y, t), \quad (3.25)$$

são obtidas através de um simples cálculo usando a definição das funções γ_k , θ_k e $\xi_{n,k}$. Mostraremos agora que as derivadas de ordem ℓ das funções $\xi_{n,k}$, γ_k e θ_k , são expressas em função delas mesmas.

Lema 3.2.2 *Sejam ℓ, n e k inteiros não negativos.*

a) *A derivada*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\ell \xi_{n,k}(x, y, t), \quad x, y \in U, \quad t > T_0$$

é expressa como combinação linear de termos da forma

$$t^s \xi_{p,k+r}(x, y, t),$$

em que p é inteiro, s e r são inteiros não negativos satisfazendo; $n - \ell \leq p \leq n$, $r \leq 2\ell$ e $s \leq \min\{r, \ell\}$.

b) *As derivadas*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\ell \gamma_k(x, y, t), \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\ell \theta_k(x, y, t), \quad x, y \in U, \quad t > T_0$$

são expressas como combinação linear de termos da forma $t^m \theta_{k+\nu}$ e $t^s \gamma_{k+r}$, onde r, s, m, ν , são inteiros positivos tais que $r, \nu \leq 2\ell$, $s \leq \min\{r, \ell\}$ e $m \leq \min\{\nu, \ell\}$.

Demonstração: a) Provaremos o Lema 3.2.2 usando a indução sobre ℓ . Provemos primeiramente o resultado para $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\ell \xi_{n,k}$. Se $\ell = 1$, o resultado segue imediatamente de (3.23). Suponhamos que tal resultado seja válido para $\ell - 1$. Então $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\ell-1} \xi_{n,k}(x, y, t)$ é combinação linear de termos $t^s \xi_{p,k+r}(x, y, t)$ em que;

$$n - (\ell - 1) \leq p \leq n, \quad r \leq 2(\ell - 1) \text{ e } s \leq \min\{r, \ell - 1\}.$$

Para ver que $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\ell \xi_{n,k}$ é soma finita de termos $t^s \xi_{p,k+r}(x, y, t)$ com

$$n - \ell \leq p \leq n, \quad r \leq 2\ell \text{ e } s \leq \min\{r, \ell\},$$

basta verificar que $\frac{\partial}{\partial t}(t^{\bar{s}} \xi_{\bar{p},k+\bar{r}})$ com

$$n - (\ell - 1) \leq \bar{p} \leq n, \quad \bar{r} \leq 2(\ell - 1) \text{ e } \bar{s} \leq \min\{\bar{r}, \ell - 1\}$$

é soma finita de termos do mesmo tipo, com $n - \ell \leq p \leq n$, $r \leq 2\ell$ e $s \leq \min\{r, \ell\}$.

Mas, isso segue de

$$\frac{\partial}{\partial t}(t^{\bar{s}} \xi_{\bar{p},k+\bar{r}}) = \bar{s} t^{\bar{s}-1} \xi_{\bar{p},k+\bar{r}} + c t^{\bar{s}+1} \xi_{\bar{p}-1,k+\bar{r}+1} - t^{\bar{s}+1} (\bar{p} + k + \bar{r}) \xi_{\bar{p},k+\bar{r}+2}.$$

b) Para o caso das derivadas $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\ell \gamma_k$, $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\ell \theta_k$, se $\ell = 1$ o resultado segue imediatamente das igualdades (3.21)-(3.22). Suponhamos então que o resultado seja válido para $\ell - 1$, ou seja, $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\ell-1} \gamma_k$ e $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\ell-1} \theta_k$ são combinações lineares de termos da forma $t^m \theta_{k+\nu}$ e $t^s \gamma_{k+r}$ onde

$$r, \nu \leq 2(\ell - 1), \quad s \leq \min\{r, \ell - 1\} \text{ e } m \leq \min\{\nu, \ell - 1\}.$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial t}(t^m \theta_{k+\nu}) = m t^{m-1} \theta_{k+\nu} + c t^{m+1} \gamma_{k+\nu+1} - (k + \nu) t^{m+1} \theta_{k+\nu+2},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(t^s \gamma_{k+r}) = st^{s-1} \gamma_{k+r} - ct^{s+1} \theta_{k+r+1} - (k+r)t^{s+1} \gamma_{k+r+2},$$

vemos que $\frac{\partial}{\partial t}(t^m \theta_{k+\nu})$ e $\frac{\partial}{\partial t}(t^s \gamma_{k+r})$ são combinações lineares da forma $t^m \theta_{k+\nu}$ e $t^s \gamma_{k+r}$, onde

$$r, \nu \leq 2\ell, s \leq \min\{r, \ell\} \text{ e } m \leq \min\{\nu, \ell\},$$

acarretando o mesmo para $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\ell \gamma_k$, $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\ell \theta_k$.

□

Retornando as identidades (3.15)-(3.17) e lembrando que ϱ é o máximo da função χ em $[-\eta, \eta]$ obtemos;

$$\begin{aligned} |\gamma_k(x, y, t)| &\leq \frac{1}{t^k} |\cos(c\sqrt{t^2 - |y-x|^2})| \varrho^k, \\ |\theta_k(x, y, t)| &\leq \frac{1}{t^k} |\text{sen}(c\sqrt{t^2 - |y-x|^2})| \varrho^k, \\ |\xi_{n,k}(x, y, t)| &\leq \frac{1}{t^k} |J_n(c\sqrt{t^2 - |y-x|^2})| \varrho^k, \end{aligned}$$

para todos $x, y \in U$ e $t \geq T_0$.

As duas primeiras desigualdades acarretam

$$|\gamma_k(x, y, t)|, |\theta_k(x, y, t)| \leq \frac{\varrho^k}{t^k}, \quad (3.26)$$

para todos $x, y \in U$ e $t \geq T_0$. Agora, usando as desigualdades (3.18)-(3.19), que expressam o comportamento assintótico das funções de Bessel, obtemos

$$|\xi_{n,k}(x, y, t)| \leq \frac{\varrho^k}{t^k} \cdot \frac{\Xi}{\sqrt{t}} \leq \Xi \varrho^k \frac{1}{t^{k+\frac{1}{2}}}, \quad (3.27)$$

para $n = 0, 1$ e todos $x, y \in U$ e $t > T_0$.

Consideremos o seguinte resultado:

Lema 3.2.3 *Para cada par de inteiros não negativos ℓ e k e natural $n = 0, 1$ existem constantes reais positivas $C_{n,k}^\ell$, C_k^ℓ , tais que*

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\ell \xi_{n,k}(x, y, t) \right| \leq \frac{C_{n,k}^\ell}{t^{k+\frac{1}{2}}},$$

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\ell \gamma_k(x, y, t) \right| \leq \frac{C_k^\ell}{t^k},$$

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\ell \theta_k(x, y, t) \right| \leq \frac{C_k^\ell}{t^k},$$

para todos $x, y \in U$ e $t > T_0$.

Demonstração: Do Lema 3.2.2 sabemos que $\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\ell \xi_{n,k}$ é combinação linear de termos da forma $t^s \xi_{p,k+r}$, onde $s \leq r$. Logo, para estimar $\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\ell \xi_{n,k} \right|$ basta estimar $|t^s \xi_{p,k+r}|$. Usando (3.27) temos

$$\begin{aligned} |t^s \xi_{p,k+r}(x, y, t)| &\leq t^s \Xi \varrho^{k+r} \cdot \frac{1}{t^{k+r+\frac{1}{2}}}, \\ &\leq \frac{\Xi \varrho^{k+r}}{T_0^{r-s}} \cdot \frac{1}{t^{k+\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

para todos $x, y \in U$ e $t > T_0$. Colocando em evidência o fator $\frac{1}{t^{k+\frac{1}{2}}}$ presente em cada parcela da expressão que majora $\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\ell \gamma_{n,k}(x, y, t) \right|$, vemos que existe uma constante $C_{n,k}^\ell > 0$, tal que

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\ell \xi_{n,k}(x, y, t) \right| \leq \frac{C_{n,k}^\ell}{t^{k+\frac{1}{2}}},$$

para todos $x, y \in U$ e $t > T_0$.

Para as outras duas estimativas, pelo Lema 3.2.2 sabemos que $\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\ell \gamma_k$ e $\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\ell \theta_k$ são combinações lineares de termos da forma $t^m \theta_{k+\nu}$ e $t^s \gamma_{k+r}$, onde $r, \nu \leq 2\ell$, $s \leq \min\{r, \ell\}$ e $m \leq \min\{\nu, \ell\}$. Assim, para estimarmos $\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\ell \gamma_k(x, y, t) \right|$, $\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\ell \theta_k(x, y, t) \right|$ é suficiente estimar $|t^m \theta_{k+\nu}|$ e $|t^s \gamma_{k+r}|$.

Usando (3.26) temos

$$\begin{aligned} |t^m \theta_{k+\nu}| &\leq t^m \frac{\varrho^{k+\nu}}{t^{k+\nu}} \\ &\leq \frac{\varrho^{k+\nu}}{T_0^{\nu-m}} \cdot \frac{1}{t^k}, \\ |t^s \gamma_{k+r}| &\leq t^s \frac{\varrho^{k+r}}{t^{k+r}}, \\ &\leq \frac{\varrho^{k+r}}{T_0^{r-s}} \cdot \frac{1}{t^k} \end{aligned}$$

para todos $x, y \in U$ e $t > T_0$. Agora, colocando em evidência o fator $\frac{1}{t^k}$ que está presente em cada parcela que majora $\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\ell \gamma_k(x, y, t) \right|$ e $\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\ell \theta_k(x, y, t) \right|$, vemos que existe de uma constante $C_k^\ell > 0$, tal que

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\ell \gamma_k(x, y, t) \right|, \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\ell \theta_k(x, y, t) \right| \leq \frac{C_k^\ell}{t^k},$$

para todos $x, y \in U$ e $t > T_0$. \square

Tendo em vista as fórmulas explícitas da solução u , dada pela igualdade (3.9)-(3.10), e nosso interesse em estimar as derivadas $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^\alpha} u(x, t)$ com $|\alpha| \leq 1$, convém definir

$$\begin{aligned} \psi_0(x, y, t) &=: \pi \beta_{N_2} \left(\frac{1}{t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-1}{2}} \xi_{0,0}(x, y, t) \\ &= \pi \beta_{N_2} \left(\frac{1}{t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-1}{2}} J_0(c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}), \\ \Gamma_0(x, y, t) &=: 2\beta_{N_1} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \gamma_1(x, y, t) \\ &= 2\beta_{N_1} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \frac{\cos[c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}]}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}. \end{aligned}$$

Assim, as fórmulas (3.9)-(3.10) podem ser reescritas como

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_U \psi_0(x, y, t) f(y) dy + \int_U \psi_0(x, y, t) g(y) dy, \quad (3.28)$$

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_U \Gamma_0(x, y, t) f(y) dy + \int_U \Gamma_0(x, y, t) g(y) dy, \quad (3.29)$$

para todos $x, y \in U$ e $t > T_0$, respectivamente.

Na sequência procuramos estimativas pontuais para cada uma das seguintes funções

$$\psi_0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \psi_0, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \psi_0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} \psi_0, \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \psi_0, \quad (3.30)$$

$$\Gamma_0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_0, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_0, \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \Gamma_0, \quad (3.31)$$

onde $i = 1, \dots, N$.

Afim de organizar nosso trabalho, vamos estimar primeiramente as funções (3.30) e em seguida estimaremos as funções (3.31).

Estimativa para a função ψ_0 : Do Lema 3.2.1 segue que

$$\psi_0(x, y, t) = \pi\beta_{N_2} \left(\frac{1}{t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right)^k \xi_{0,0}(x, y, t) = \pi\beta_{N_2} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \frac{1}{t^j} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i)} \xi_{0,0}(x, y, t)$$

onde $k = \frac{N-1}{2}$. Daí

$$\begin{aligned} |\psi_0(x, y, t)| &\leq \pi\beta_{N_2} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \frac{1}{t^j} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i)} \xi_{0,0}(x, y, t) \right| \\ &\leq \pi\beta_{N_2} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \frac{1}{t^j} \frac{C_{0,0}^i}{t^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq \pi\beta_{N_2} \frac{1}{t^{k+\frac{1}{2}}} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \frac{C_{0,0}^i}{t^{j-k}} \\ &\leq \pi\beta_{N_2} \frac{1}{t^{k+\frac{1}{2}}} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \frac{C_{0,0}^i}{T_0^{j-k}} \\ &\leq \frac{const.}{t^{k+\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Concluimos então que

$$|\psi_0(x, y, t)| \leq \frac{const.}{t^{\frac{N}{2}}}. \quad (3.32)$$

Estimativa para a função $\frac{\partial}{\partial t} \psi_0$: Seja $\frac{\partial}{\partial t} \psi_0(x, y, t) = \pi\beta_{N_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right)^k \xi_{0,0}(x, y, t)$, onde $k = \frac{N-1}{2}$. Usando novamente o Lema 3.2.1 observamos que vale a fórmula

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right)^k f = \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \left[\frac{-j}{t^{j+1}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i)} f + \frac{1}{t^j} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i+1)} f \right].$$

Daí

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_0(x, y, t) = \pi\beta_{N_2} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \left[\frac{-j}{t^{j+1}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i)} \xi_{0,0}(x, y, t) + \frac{1}{t^j} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i+1)} \xi_{0,0}(x, y, t) \right]$$

onde $k = \frac{N-1}{2}$.

Logo

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial}{\partial t} \psi_0(x, y, t) \right| &\leq \pi \beta_{N_2} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \left[\frac{j}{t^{j+1}} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i)} \xi_{0,0} \right| + \frac{1}{t^j} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i+1)} \xi_{0,0} \right| \right] \\
&\leq \pi \beta_{N_2} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \left[\frac{j}{t^{j+1}} \frac{C_{0,0}^i}{t^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{t^j} \frac{C_{0,0}^{i+1}}{t^{\frac{1}{2}}} \right] \\
&\leq \pi \beta_{N_2} \frac{1}{t^{k+\frac{1}{2}}} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \left[\frac{j}{t^{j-k+1}} C_{0,0}^i + \frac{1}{t^{j-k}} C_{0,0}^{i+1} \right] \\
&\leq \pi \beta_{N_2} \frac{1}{t^{k+\frac{1}{2}}} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \left[\frac{j}{T_0^{j-k+1}} C_{0,0}^i + \frac{1}{T_0^{j-k}} C_{0,0}^{i+1} \right].
\end{aligned}$$

Como $k = \frac{N-1}{2}$, segue que

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \psi_0(x, y, t) \right| \leq \frac{\text{const.}}{t^{\frac{N}{2}}}. \quad (3.33)$$

Estimativa para a função $\frac{\partial}{\partial x_i} \psi_0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} \psi_0(x, y, t) &= \pi \beta_{N_2} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \frac{1}{t^j} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i)} \xi_{0,0}(x, y, t) \\
&= \pi \beta_{N_2} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \frac{1}{t^j} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_i} \xi_{0,0}(x, y, t) \\
&= -\pi \beta_{N_2} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \frac{1}{t^j} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i)} c(y_i - x_i) \xi_{1,1}(x, y, t)
\end{aligned}$$

onde $k = \frac{N-1}{2}$.

Daí

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial}{\partial x_i} \psi_0(x, y, t) \right| &\leq \pi \beta_{N_2} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \frac{1}{t^j} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i)} c(y_i - x_i) \xi_{1,1}(x, y, t) \right| \\
&\leq c \pi \beta_{N_2} d(U) \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \frac{1}{t^j} \frac{C_{1,1}^i}{t^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c\pi\beta_{N_2}d(U)\frac{1}{t^{k+\frac{3}{2}}}\sum_{\substack{i+j=2k \\ k\leq j<2k}}C_{ij}\frac{C_{1,1}^i}{t^{j-k}} \\
&\leq c\pi\beta_{N_2}d(U)\frac{1}{t^{k+\frac{3}{2}}}\sum_{\substack{i+j=2k \\ k\leq j<2k}}C_{ij}\frac{C_{1,1}^i}{T_0^{j-k}}.
\end{aligned}$$

Como $k = \frac{N-1}{2}$, concluímos que

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\psi_0(x, y, t)\right|\leq\frac{const.}{t^{\frac{N}{2}+1}}. \quad (3.34)$$

Estimativa para a função $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_i}\psi_0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_i}\psi_0(x, y, t) &= \pi\beta_{N_2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{N-1}{2}}\frac{\partial}{\partial x_i}\xi_{0,0}(x, y, t) \\
&= -\pi\beta_{N_2}\sum_{\substack{i+j=2k \\ k\leq j<2k}}C_{ij}c(y_i-x_i)\left[\frac{-j}{t^{j+1}}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(i)}\xi_{1,1}(x, y, t)+\frac{1}{t^j}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(i+1)}\xi_{1,1}(x, y, t)\right],
\end{aligned}$$

onde $k = \frac{N-1}{2}$. Daí

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_i}\psi_0(x, y, t)\right| &\leq c\pi\beta_{N_2}d(U)\sum_{\substack{i+j=2k \\ k\leq j<2k}}C_{ij}\left[\frac{j}{t^{j+1}}\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(i)}\xi_{1,1}\right|+\frac{1}{t^j}\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(i+1)}\xi_{1,1}\right|\right] \\
&\leq c\pi\beta_{N_2}d(U)\sum_{\substack{i+j=2k \\ k\leq j<2k}}C_{ij}\left[\frac{j}{t^{j+1}}\frac{C_{1,1}^i}{t^{1+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{t^j}\frac{C_{1,1}^{i+1}}{t^{1+\frac{1}{2}}}\right] \\
&\leq c\pi\beta_{N_2}d(U)\frac{1}{t^{k+\frac{3}{2}}}\sum_{\substack{i+j=2k \\ k\leq j<2k}}C_{ij}\left[\frac{jC_{1,1}^i}{T_0^{j-k+1}}+\frac{C_{1,1}^{i+1}}{T_0^{j-k}}\right].
\end{aligned}$$

Observando que $k = \frac{N-1}{2}$, concluímos

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_i}\psi_0(x, y, t)\right|\leq\frac{const.}{t^{\frac{N}{2}+1}}. \quad (3.35)$$

Estimativa para a função $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi_0$: Usando a expressão de $\frac{\partial}{\partial t}\psi_0$ calculado anteriormente temos

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi_0(x, y, t) =$$

$$= \pi\beta_{N_2} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \left[\frac{j(j+1)}{t^{j+2}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i)} \xi_{0,0} - \frac{2j}{t^{j+1}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i+1)} \xi_{0,0} + \frac{1}{t^j} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i+2)} \xi_{0,0} \right],$$

para $k = \frac{N-1}{2}$. Daí

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \psi_0(x, y, t) \right| \leq \\ & \leq \pi\beta_{N_2} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \left[\frac{j(j+1)}{t^{j+2}} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i)} \xi_{0,0} \right| + \frac{2j}{t^{j+1}} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i+1)} \xi_{0,0} \right| + \frac{1}{t^j} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i+2)} \xi_{0,0} \right| \right] \\ & \leq \pi\beta_{N_2} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \left[\frac{j(j+1) C_{0,0}^i}{t^{j+2} t^{\frac{1}{2}}} + \frac{2j C_{0,0}^{i+1}}{t^{j+1} t^{\frac{1}{2}}} + \frac{1 C_{0,0}^{i+2}}{t^j t^{\frac{1}{2}}} \right] \\ & \leq \pi\beta_{N_2} \frac{1}{t^{k+\frac{1}{2}}} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \left[\frac{j(j+1) C_{0,0}^i}{T_0^{j-k+2}} + \frac{2j C_{0,0}^{i+1}}{T_0^{j-k+1}} + \frac{C_{0,0}^{i+2}}{T_0^{j-k}} \right]. \end{aligned}$$

Lembrando que $k = \frac{N-1}{2}$, concluímos

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \psi_0(x, y, t) \right| \leq \frac{\text{const.}}{t^{\frac{N}{2}}}. \quad (3.36)$$

Vamos estimar agora as funções (3.31)

Estimativa para a função Γ_0 : Fazendo $k = \frac{N-2}{2}$, escrevemos

$$\Gamma_0(x, y, t) = 2\beta_{N_1} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^k \gamma_1(x, y, t).$$

Usando o Lema 3.2.1 obtemos

$$\Gamma_0(x, y, t) = 2\beta_{N_1} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \frac{1}{t^j} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i)} \gamma_1(x, y, t),$$

de onde segue

$$|\Gamma_0(x, y, t)| \leq 2\beta_{N_1} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \frac{1}{t^j} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i)} \gamma_1(x, y, t) \right|.$$

Agora, usando a Lema 3.2.3 temos

$$\begin{aligned}
|\Gamma_0(x, y, t)| &\leq 2\beta_{N_1} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \frac{1}{t^j} \frac{C_{1\gamma}^k}{t^1}, \\
&\leq 2\beta_{N_1} \frac{1}{t^{k+1}} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \frac{C_{1\gamma}^k}{t^{j-k}}, \\
&\leq 2\beta_{N_1} \frac{1}{t^{k+1}} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \frac{C_{1\gamma}^k}{T_0^{j-k}},
\end{aligned}$$

para todo $x, y \in U$ e $t > T_0$. Como $k = \frac{N-2}{2}$, obtemos

$$|\Gamma_0(x, y, t)| \leq \frac{\text{const.}}{t^{\frac{N}{2}}}, \quad (3.37)$$

para todo $x, y \in U$, $t > T_0$ e uma constante *const.* conveniente.

Estimativa para a função $\frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_0$: Fazendo $k = \frac{N-2}{2}$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_0(x, y, t) &= 2\beta_{N_1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^k \gamma_1(x, y, t) \\
&= 2\beta_{N_1} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^k [-c(y_i - x_i)\theta_2 - k(y_i - x_i)\gamma_3].
\end{aligned}$$

Usando o Lema 3.2.1 segue

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_0(x, y, t) = \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \frac{1}{t^j} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i)} [-c(y_i - x_i)\theta_2 - k(y_i - x_i)\gamma_3],$$

e consequentemente, usando o Lema 3.2.3 podemos escrever

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_0(x, y, t) \right| &\leq 2\beta_{N_1} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \frac{1}{t^j} \left[c \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i)} \theta_2 \right| |(y_i - x_i)| + k \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i)} \gamma_3 \right| |(y_i - x_i)| \right], \\
&\leq 2\beta_{N_1} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \frac{1}{t^j} \left[\frac{C_2^i}{t^2} d(U) + k \frac{C_3^i}{t^3} d(U) \right], \\
&\leq 2\beta_{N_1} \frac{1}{t^{k+2}} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \frac{1}{t^{j-k}} \left[C_2^i d(U) + k \frac{C_3^i}{t} d(U) \right],
\end{aligned}$$

$$\leq 2\beta_{N_1} \frac{1}{t^{k+2}} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \frac{1}{T_0^{j-k}} \left[C_2^i d(U) + k \frac{C_3^i}{T_0} d(U) \right],$$

para todo $x, y \in U$ e $t > T_0$. Como $k = \frac{N-2}{2}$ obtemos

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_0(x, y, t) \right| \leq \frac{\text{const.}}{t^{\frac{N}{2}+1}}, \quad (3.38)$$

para todo $x, y \in U$, $t > T_0$ e uma constante *const.* conveniente.

Estimativa para a função $\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_0$: Tomando $k = \frac{N-2}{2}$ temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_0(x, y, t) = 2\beta_{N_1} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^k \gamma_1(x, y, t),$$

e do Lema 3.2.1 segue

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_0(x, y, t) = 2\beta_{N_1} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \left[\frac{-j}{t^{j+1}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i)} + \frac{1}{t^j} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i+1)} \right] \gamma_1(x, y, t)$$

Fazendo uso do Lema 3.2.3 temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_0(x, y, t) \right| &\leq 2\beta_{N_1} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \left[\frac{j}{t^{j+1}} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i)} \gamma_1(x, y, t) \right| + \frac{1}{t^j} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i+1)} \gamma_1(x, y, t) \right| \right], \\ &\leq 2\beta_{N_1} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \left[\frac{j}{t^{j+1}} \frac{C_1^i}{t} + \frac{1}{t^j} \frac{C_1^{i+1}}{t} \right], \\ &\leq 2\beta_{N_1} \frac{1}{t^{k+1}} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \left[\frac{j C_1^i}{t^{j-k+1}} + \frac{C_1^{i+1}}{t^{j-k}} \right], \\ &\leq 2\beta_{N_1} \frac{1}{t^{k+1}} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \left[\frac{j C_1^i}{T_0^{j-k+1}} + \frac{C_1^{i+1}}{T_0^{j-k}} \right], \end{aligned}$$

para todo $x, y \in U$ e $t > T_0$. Como $k = \frac{N-2}{2}$ obtemos

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_0(x, y, t) \right| \leq \frac{\text{const.}}{t^{\frac{N}{2}}}, \quad (3.39)$$

para todos $x, y \in U$, $t > T_0$ e uma constante *const.* conveniente.

Estimativa para a função $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_0$: Temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_0(x, y, t) = 2\beta_{N_1} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^k \frac{\partial}{\partial x_i} \gamma_1(x, y, t),$$

onde $k = \frac{N-2}{2}$. Aplicando o Lema 3.2.1 obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_0(x, y, t) &= 2\beta_{N_1} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \left[\frac{-j}{t^{j+1}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i)} + \frac{1}{t^j} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i+1)} \right] \frac{\partial}{\partial x_i} \gamma_1(x, y, t), \\ &= 2\beta_{N_1} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \left[\frac{-j}{t^{j+1}} \left\{ -c \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i)} (y_i - x_i) \theta_2 - k \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i)} (y_i - x_i) \gamma_3 \right\} \right] + \\ &\quad + \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \left[\frac{1}{t^j} \left\{ -c \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i+1)} (y_i - x_i) \theta_2 - k \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i+1)} (y_i - x_i) \gamma_3 \right\} \right]. \end{aligned}$$

Daí, usando do Lema 3.2.3 segue

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_0(x, y, t) \right| &\leq \\ &\leq 2\beta_{N_1} \sum_{\substack{i+j=2k, k \leq j < 2k}} C_{ij} \left[\frac{j}{t^{j+1}} \left\{ c \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i)} \theta_2 \right| |(y_i - x_i)| + k \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i)} \gamma_3 \right| |(y_i - x_i)| \right\} \right] \\ &\quad + 2\beta_{N_1} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \left[\frac{1}{t^j} \left\{ c \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i+1)} \theta_2 \right| |(y_i - x_i)| + k \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i+1)} \gamma_3 \right| |(y_i - x_i)| \right\} \right], \\ &\leq 2\beta_{N_1} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \left[\frac{j}{t^{j+1}} \left\{ c \frac{C_2^i}{t^2} d(U) + k \frac{C_3^i}{t^3} d(U) \right\} \right] \\ &\quad + 2\beta_{N_1} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \left[\frac{1}{t^j} \left\{ c \frac{C_2^{i+1}}{t^2} d(U) + k \frac{C_3^{i+1}}{t^3} d(U) \right\} \right], \\ &\leq 2\beta_{N_1} \frac{1}{t^{k+2}} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \left[\frac{j}{T_0^{j-k+1}} \left\{ c C_2^i d(U) + k \frac{C_3^i}{T_0} d(U) \right\} \right] \\ &\quad + 2\beta_{N_1} \frac{1}{t^{k+2}} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \left[\frac{1}{T_0^{j-k}} \left\{ c C_2^{i+1} d(U) + k \frac{C_3^{i+1}}{T_0} d(U) \right\} \right]. \end{aligned}$$

para todo $x, y \in U$ e $t > T_0$. Como $k = \frac{N-2}{2}$ obtemos

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_0(x, y, t) \right| \leq \frac{\text{const.}}{t^{\frac{N}{2}+1}}, \quad (3.40)$$

para todos $x, y \in U$, $t > T_0$ e uma constante *const.* conveniente.

Estimativa para a função $(\frac{\partial}{\partial t})^2 \Gamma_0$: Temos

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \Gamma_0(x, y, t) = 2\beta_{N_1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^k \gamma_1(x, y, t),$$

onde $k = \frac{N-2}{2}$. Usando o Lema 3.2.1 segue

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \Gamma_0(x, y, t) = 2\beta_{N_1} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \left[\frac{j(j+1)}{t^{j+2}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i)} - \frac{2j}{t^{j+1}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i+1)} + \frac{1}{t^j} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i+2)} \right] \gamma_1.$$

Usando o Lema 3.2.3 tem-se

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \Gamma_0 \right| &\leq 2\beta_{N_1} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \left[\frac{j(j+1)}{t^{j+2}} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i)} \gamma_1 \right| - \frac{2j}{t^{j+1}} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i+1)} \gamma_1 \right| + \frac{1}{t^j} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i+2)} \gamma_1 \right| \right], \\ &\leq 2\beta_{N_1} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \left[\frac{j(j+1)}{t^{j+2}} \frac{C_1^i}{t} + \frac{2j}{t^{j+1}} \frac{C_1^{i+1}}{t} + \frac{1}{t^j} \frac{C_1^{i+2}}{t} \right], \\ &\leq 2\beta_{N_1} \frac{1}{t^{k+1}} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \left[\frac{j(j+1)}{t^{j-k+2}} C_1^i + \frac{2j}{t^{j-k+1}} C_1^{i+1} + \frac{1}{t^{j-k}} C_1^{i+2} \right], \\ &\leq 2\beta_{N_1} \frac{1}{t^{k+1}} \sum_{\substack{i+j=2k \\ k \leq j < 2k}} C_{ij} \left[\frac{j(j+1)}{T_0^{j-k+2}} C_1^i + \frac{2j}{T_0^{j-k+1}} C_1^{i+1} + \frac{1}{T_0^{j-k}} C_1^{i+2} \right], \end{aligned}$$

para todo $x, y \in U$ e $t > T_0$. Como $k = \frac{N-2}{2}$ obtemos

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \Gamma_0(x, y, t) \right| \leq \frac{\text{const.}}{t^{\frac{N}{2}}}, \quad (3.41)$$

para todos $x, y \in U$, $t > T_0$ e uma constante *const.* conveniente.

Seja agora α um multiíndice tal que $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N, \alpha_{N+1}) \in \mathbb{N}^{N+1}$, onde $|\alpha| = \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i \leq 1$. Queremos estimar $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^\alpha} \psi_0$, $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^\alpha} \Gamma_0$ e $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^\alpha} \psi_0$, $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^\alpha} \Gamma_0$. Para tanto

basta considerar as derivadas listadas em (3.30) e (3.31) e as estimativas (3.32)-(3.41).

Isto nos permite escrever

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^\alpha} \psi_0(x,y,t) \right| \leq \frac{C_1}{t^{\frac{N}{2}}}, \quad (3.42)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^\alpha} \psi_0(x,y,t) \right| \leq \frac{C_2}{t^{\frac{N}{2}}}, \quad (3.43)$$

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^\alpha} \Gamma_0(x,y,t) \right| \leq \frac{C_3}{t^{\frac{N}{2}}}, \quad (3.44)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^\alpha} \Gamma_0(x,y,t) \right| \leq \frac{C_4}{t^{\frac{N}{2}}}, \quad (3.45)$$

para todo $t > T_0 > d(U)$ e todo $x, y \in U$. Aqui C_i , $i = 1, 2, 3, 4$, são constantes positivas que dependem de U , das funções de Bessel J_0 , J_1 e da constante c da equação de Klein-Gordon.

Retomando a fórmula explícita da solução u do problema de Cauchy (2.1)-(2.3), conforme expressa nas igualdades (3.28) e (3.29) observamos que

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^\alpha} u(x,t) = \int_U \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^\alpha} \psi_0(x,y,t) f(y) dy + \int_U \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^\alpha} \psi_0(x,y,t) g(y) dy, \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^\alpha} u(x,t) = \int_U \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^\alpha} \Gamma_0(x,y,t) f(y) dy + \int_U \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^\alpha} \Gamma_0(x,y,t) g(y) dy, \quad (3.47)$$

para todos $x, y \in U$ e $t > T_0$.

Utilizando agora as estimativas (3.42)-(3.45) temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^\alpha} u(x,t) \right| &\leq \int_U \left| \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^\alpha} \psi_0(x,y,t) \right| |f(y)| dy + \int_U \left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^\alpha} \psi_0(x,y,t) \right| |g(y)| dy \\ &\leq \frac{C_1 + C_2}{t^{\frac{N}{2}}} \left\{ \int_U |f(y)| dy + \int_U |g(y)| dy \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^\alpha} u(x,t) \right| &\leq \int_U \left| \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^\alpha} \Gamma_0(x,y,t) \right| |f(y)| dy + \int_U \left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^\alpha} \Gamma_0(x,y,t) \right| |g(y)| dy \\ &\leq \frac{C_3 + C_4}{t^{\frac{N}{2}}} \left\{ \int_U |f(y)| dy + \int_U |g(y)| dy \right\}. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder e o fato de que $\|\cdot\|_{L^2(U)} \leq \|\cdot\|_{H^1(U)}$, obtemos, em ambos os casos que

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^\alpha} u(x,t) \right| \leq \frac{Const.}{t^{\frac{N}{2}}} \{ \|f\|_{H^1(U)} + \|g\|_{L^2(U)} \}$$

para todo $x \in U$, $t > T_0$ e alguma constante $Const. > 0$.

Finalmente, elevando a ultima desigualdade ao quadrado, obtemos;

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^\alpha} u(x,t) \right|^2 \leq \frac{K}{t^N} \{ \|f\|_{H^1(U)}^2 + \|g\|_{L^2(U)}^2 \}, \quad x \in U, \quad t > T_0, \quad (3.48)$$

onde K é uma constante positiva que depende de U , das funções de Bessel J_0 , J_1 e da constante c da equação de Klein-Gordon. Fica assim provado o Teorema 3.2.1.

3.3 Decaimento da energia

Seja agora N um natural arbitrário e não nulo. Sob as hipóteses do Teorema 3.2.1, considerando todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^{N+1}$, tal que $|\alpha| \leq 1$, como foi feito na seção anterior, segue que são válidas as seguintes desigualdades

$$|u(x,t)|^2 \leq \frac{K}{t^N} \{ \|f\|_{H^1(U)}^2 + \|g\|_{L^2(U)}^2 \}, \quad (3.49)$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right|^2 \leq \frac{K}{t^N} \{ \|f\|_{H^1(U)}^2 + \|g\|_{L^2(U)}^2 \}, \quad (3.50)$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) \right|^2 \leq \frac{K}{t^N} \{ \|f\|_{H^1(U)}^2 + \|g\|_{L^2(U)}^2 \}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.51)$$

Integrando em U as $N + 2$ desigualdades expressas em (3.49)-(3.51) e em seguida somando-as, obtemos;

$$\|u(\cdot, t)\|_{H^1(U)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{L^2(U)}^2 \leq \frac{(N+2)K|U|}{t^N} \{ \|f\|_{H^1(U)}^2 + \|g\|_{L^2(U)}^2 \} \quad (3.52)$$

para todo $t > T_0$.

Um fato importante é que a desigualdade (3.52) é também satisfeita para soluções de problemas de Cauchy generalizado. Como pode ser visto no seguinte resultado;

Teorema 3.3.1 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, $f \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ funções com suportes compactos contidos em U . Se $u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ é a solução do problema de Cauchy generalizado*

$$Lu = u_{tt} - \Delta_n u + c^2 u = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \quad (3.53)$$

$$u(., 0) = f \quad \text{em } \mathbb{R}^N \quad (3.54)$$

$$u_t(., 0) = g \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \quad (3.55)$$

então existe uma constante real positiva K' , independente de f, g tal que

$$\|u(., t)\|_{H^1(U)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(., t) \right\|_{L^2(U)}^2 \leq \frac{K'}{t^N} \left\{ \|f\|_{H^1(U)}^2 + \|g\|_{L^2(U)}^2 \right\} \quad (3.56)$$

para todo $t > T_0$.

Demonstração: Sejam $(f_n)_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(U)$ e $(g_n)_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(U)$ sequências de funções tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \quad \text{em } H^1(U) \quad (3.57)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g \quad \text{em } L^2(U) \quad (3.58)$$

Seja $(u_n)_{n=1}^\infty$ soluções clássicas do problema de Cauchy para o operador L com dados iniciais f_n e g_n . Da Definição 2.2.1, de solução generalizada, segue que para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, com interior não vazio, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(., t) = u \quad \text{em } H^1(\text{int}(K)).$$

Além disso, das Proposições 2.2.1 e 2.2.2 temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(., t) = u(., t) \quad \text{em } H^1(\mathbb{R}^N), \quad (3.59)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(., t) = \frac{\partial u}{\partial t}(., t) \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^N), \quad (3.60)$$

para cada $t \in \mathbb{R}$.

Aplicando a desigualdade (3.52) à u_n temos

$$\|u_n(., t)\|_{H^1(U)}^2 + \left\| \frac{\partial u_n}{\partial t}(., t) \right\|_{L^2(U)}^2 \leq \frac{(N+2)K|U|}{t^N} \left\{ \|f_n\|_{H^1(U)}^2 + \|g_n\|_{L^2(U)}^2 \right\}$$

para todo $x \in U$ e $t > T_0$.

Passando o limite nesta última desigualdade e usando (3.59)-(3.60) obtemos a estimativa (3.56). \square

Para resolver o problema de controle precisamos também uma estimativa local de energia, como a estimativa (3.56), para o problema de Cauchy com tempo reverso e dados iniciais em algum $t = T > 0$.

Teorema 3.3.2 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, $f \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ funções com suportes compactos contidos em U . Considere $T > T_0$. Se $z \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ é a solução do problema de Cauchy generalizado*

$$Lz = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \quad (3.61)$$

$$z(\cdot, T) = f \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \quad (3.62)$$

$$z_t(\cdot, T) = g \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \quad (3.63)$$

então existe uma constante real positiva K' , independente de f, g tal que

$$\|z(\cdot, 0)\|_{H^1(U)}^2 + \left\| \frac{\partial z}{\partial t}(\cdot, 0) \right\|_{L^2(U)}^2 \leq \frac{K'}{T^N} \left\{ \|f\|_{H^1(U)}^2 + \|g\|_{L^2(U)}^2 \right\} \quad (3.64)$$

para todo $T > T_0$.

Demonstração: Seja $W \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ a solução do problema de Cauchy generalizado

$$LW(\cdot, \tau) = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$$

$$W(\cdot, 0) = f \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

$$W_\tau(\cdot, 0) = -g \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

A estimativa (3.56) do Teorema 3.3.1 aplicada a W fornece

$$\|W(\cdot, \tau)\|_{H^1(U)}^2 + \left\| \frac{\partial W}{\partial \tau}(\cdot, \tau) \right\|_{L^2(U)}^2 \leq \frac{K'}{\tau^N} \left\{ \|f\|_{H^1(U)}^2 + \|g\|_{L^2(U)}^2 \right\},$$

para todo $\tau > T_0$. Fazendo $\tau = T - t$ e observando que

$$W(\cdot, T - t) = z(\cdot, t),$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} W(\cdot, T - t) = -\frac{\partial z}{\partial t}(\cdot, t),$$

obtemos da estimativa acima

$$\|z(\cdot, t)\|_{H^1(U)}^2 + \left\| \frac{\partial z}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{L^2(U)}^2 \leq \frac{K'}{(T - t)^N} \left\{ \|f\|_{H^1(U)}^2 + \|g\|_{L^2(U)}^2 \right\},$$

sempre que $T - t > T_0 > d(U)$.

Agora, fazendo $t = 0$ na última desigualdade e lembrando que $T > T_0$ segue (3.64). \square

Assim, em $H_0^1(U) \times L^2(U)$, podemos definir o operador linear limitado

$$\bar{S}_T : H_0^1(U) \times L^2(U) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N),$$

dado por $\bar{S}_T(f, g) = (z(\cdot, 0), \frac{\partial z}{\partial t}(\cdot, 0))$.

Em geral podemos definir \bar{S}_t para todo $t > 0$ e, analogamente à estimativa (2.36), vale

$$\|\bar{S}_t(f, g)\|_{H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \sqrt{C} \|(f, g)\|_{H_0^1(U) \times L^2(U)}$$

para todo $f \in H_0^1(U)$ e $g \in L^2(U)$ e alguma constante $C > 1$.

Agora reescreveremos as estimativas (3.56) e (3.64) utilizando os operadores S_T , \bar{S}_T e o operador R de restrição ao conjunto U . Usando a norma $\|(\cdot, \cdot)\|_{H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = \|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 + \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2$, as estimativas (3.56) e (3.64) se transformam em:

$$\begin{aligned} \|RS_T(f, g)\|_{H^1(U) \times L^2(U)}^2 &= \|u(\cdot, T)\|_{H^1(U)}^2 + \|\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, T)\|_{L^2(U)}^2 \leq \\ &\leq \frac{K'}{t^N} \left\{ \|f\|_{H^1(U)}^2 + \|g\|_{L^2(U)}^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} \|R\bar{S}_T(f, g)\|_{H^1(U) \times L^2(U)}^2 &= \|z(\cdot, 0)\|_{H^1(U)}^2 + \|\frac{\partial z}{\partial t}(\cdot, 0)\|_{L^2(U)}^2 \leq \\ &\leq \frac{K'}{t^N} \left\{ \|f\|_{H^1(U)}^2 + \|g\|_{L^2(U)}^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.66)$$

As estimativas (3.65) e (3.66) mostram que RS_T e $R\bar{S}_T$ são contrações se T é suficientemente grande. Tais estimativas serão utilizadas explicitamente na resolução do problema de controle para a equação linear de Klein-Gordon que será estabelecido no capítulo 5.

Capítulo 4

Extensão Analítica

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, $\Omega_\delta = \Omega + B(0, \delta)$, $\delta > 0$, e $T_0 > d(\Omega_\delta)$. Seja Σ_0 o setor do plano complexo dado por

$$\Sigma_0 = \left\{ \zeta = T_0 + z; \quad |arg z| \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$$

Neste capítulo o conjunto Ω_δ fará o papel do conjunto U do capítulo anterior. Assim, o operador R , de restrição ao conjunto U será agora restrição ao conjunto Ω_δ o que passamos a denotar por R_δ . O objetivo deste capítulo é estender as famílias de operadores $\{R_\delta S_T\}_{T \geq T_0}$ e $\{R_\delta \bar{S}_T\}_{T \geq T_0}$, definidos nos capítulos anteriores, para parâmetros T complexos variando no setor Σ_0 . Provaremos que tal extensão é analítica.

Afim de simplificar a notação usaremos apenas S_T, \bar{S}_T para denotarem $R_\delta S_T$ e $R_\delta \bar{S}_T$ respectivamente. Portanto, daqui para frente S_T denota o operador

$$S_T : H_0^1(\Omega_\delta) \times L^2(\Omega_\delta) \longrightarrow H^1(\Omega_\delta) \times L^2(\Omega_\delta),$$

definido por

$$S_T(f_\delta, g_\delta) = (u_\delta(\cdot, T)|_{\Omega_\delta}, \frac{\partial}{\partial t} u_\delta(\cdot, T)|_{\Omega_\delta}),$$

onde u_δ é a solução do problema de Cauchy generalizado

$$Lu_\delta = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

$$u_\delta(x, 0) = f_\delta \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial t}(x, 0) = g_\delta \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \quad (4.3)$$

com f_δ e g_δ estendidas por zero fora de Ω_δ .

No que seguirá, a família analítica $\{S_\zeta\}_{\zeta \in \Sigma_0}$ permitirá provar controlabilidade exata na fronteira, para a equação de Klein-Gordon em tempo T próximo ao diâmetro de Ω , com dados iniciais em $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Em [16] J. Lagnese usou este argumento para a equação da onda em $H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

4.1 A extensão

Como foi visto no capítulo 2, a solução do problema (4.1)-(4.3), com dados iniciais $f_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $g_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\text{supp} f_\delta, \text{supp} g_\delta \subset \Omega_\delta$, é dada explicitamente por

$$u(x, t) = 2\beta_{N_1} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \left(\int_{\Omega_\delta} \frac{\cos[c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}]}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} f_\delta(y) dy \right) + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \left(\int_{\Omega_\delta} \frac{\cos[c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}]}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} g_\delta(y) dy \right) \right] \quad (4.4)$$

se $N \geq 2$ é par e

$$u(x, t) = \pi\beta_{N_2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-1}{2}} \left(\int_{\Omega_\delta} J_0(c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}) f_\delta(y) dy \right) + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-1}{2}} \left(\int_{\Omega_\delta} J_0(c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}) g_\delta(y) dy \right) \right] \quad (4.5)$$

se N é ímpar, para todo $x, y \in \Omega_\delta$ e $t > T_0$. As constantes β_{N_1} e β_{N_2} foram introduzidas nas fórmulas (3.9) e (3.10).

Seja agora $f_\delta \in H_0^1(\Omega_\delta)$ e $g_\delta \in L^2(\Omega_\delta)$, definamos

$$v_1(x, t) =: 2\beta_{N_1} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \left(\int_{\Omega_\delta} \frac{\cos[c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}]}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} f_\delta(y) dy \right) + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \left(\int_{\Omega_\delta} \frac{\cos[c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}]}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} g_\delta(y) dy \right) \right] \quad (4.6)$$

$$v_2(x, t) =: \pi\beta_{N_2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-1}{2}} \left(\int_{\Omega_\delta} J_0(c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}) f_\delta(y) dy \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-1}{2}} \left(\int_{\Omega_\delta} J_0(c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}) g_\delta(y) dy \right) \right] \quad (4.7)$$

onde, $x, y \in \Omega_\delta$, $t > T_0$.

Nosso objetivo agora é mostrar que a solução u_δ do problema de Cauchy (4.1)-(4.3) também pode ser representado pelas fórmulas (4.6)-(4.7) para $x \in \Omega_\delta$ e $t > T_0$.

As funções γ_k , θ_k e $\xi_{n,k}$ são contínuas no compacto $\bar{\Omega}_\delta \times \bar{\Omega}_\delta \times [T_0, \sqrt{(\frac{M}{c})^2 + (d(\Omega_\delta))^2 + 1}]$. Usando este fato juntamente com os lemas 3.2.2 e 3.2.3 concluímos que existem constantes positivas C_i , $i = 1, \dots, 6$ tais que

$$\left| \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \frac{\cos[c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}]}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} \right| \leq C_1, \\ \left| \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \frac{\cos[c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}]}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} \right| \leq C_2, \\ \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \frac{\cos[c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}]}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} \right| \leq C_3, \\ \left| \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} J_0(c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}) \right| \leq C_4, \\ \left| \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} J_0(c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}) \right| \leq C_5, \\ \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} J_0(c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}) \right| \leq C_6,$$

para todos $x, y \in \Omega_\delta$, $t > T_0$. Assim, nas expressões de v_1 , $\frac{\partial}{\partial t} v_1$, v_2 e $\frac{\partial}{\partial t} v_2$ podemos colocar as derivadas dentro do sinal de integral.

Seja $u_\delta \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ a solução com energia finita do problema de Cauchy (4.1)-(4.2). Existem seqüências $(f_\delta^n), (g_\delta^n) \subset C_0^\infty(\Omega_\delta)$ tais que

$$f_\delta^n \longrightarrow f_\delta \quad \text{em} \quad H^1(\Omega_\delta), \\ g_\delta^n \longrightarrow g_\delta \quad \text{em} \quad L^2(\Omega_\delta),$$

onde $\text{supp} f_\delta^n, \text{supp} g_\delta^n \subset \Omega_\delta$, para qualquer natural n . Seja $u_\delta^n \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ solução clássica de

$$Lu_\delta^n = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \quad (4.8)$$

$$u_\delta^n(x, 0) = f_\delta^n \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial u_\delta^n}{\partial t}(x, 0) = g_\delta^n \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \quad (4.10)$$

Da definição de solução generalizada do problema de Cauchy (4.1)-(4.2) segue que, para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, com $\text{int}(K) \neq \emptyset$ tem se,

$$u_\delta^n \longrightarrow u_\delta \quad \text{em} \quad H^1(\text{int}(K)).$$

Mais ainda, vale a representação

$$u_\delta^n(x, t) = 2\beta_{N_1} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \left(\int_{\Omega_\delta} \frac{\cos[c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}]}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} f_\delta^n(y) dy \right) + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \left(\int_{\Omega_\delta} \frac{\cos[c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}]}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} g_\delta^n(y) dy \right) \right], \quad (4.11)$$

se $N \geq 2$ é par e

$$u_\delta^n(x, t) = \pi\beta_{N_2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-1}{2}} \left(\int_{\Omega_\delta} J_0(c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}) f_\delta^n(y) dy \right) + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-1}{2}} \left(\int_{\Omega_\delta} J_0(c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}) g_\delta^n(y) dy \right) \right], \quad (4.12)$$

se N é ímpar. Para todo $x \in \Omega_\delta$ e $t > T_0$.

Seja $K \subset \mathbb{R}^N \times [T_0, \infty[$, um conjunto compacto com interior não vazio. Mostraremos que

$$u_\delta^n \longrightarrow v_1 \quad \text{em} \quad L^2(K), \quad \text{se } N \text{ é par}$$

$$u_\delta^n \longrightarrow v_2 \quad \text{em} \quad L^2(K), \quad \text{se } N \text{ é ímpar.}$$

Uma vez provado isto, da unicidade do limite em $L^2(K)$, segue que

$$v_1 = u_\delta \quad \text{em} \quad L^2(K),$$

$$v_2 = u_\delta \quad \text{em} \quad L^2(K),$$

para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^N \times [T_0, \infty[$ com interior não vazio.

Segue desta discussão que

$$u_\delta = v_1, \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^N \times [T_0, \infty[, \text{ se } N \text{ é par}$$

$$u_\delta = v_2, \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^N \times [T_0, \infty[, \text{ se } N \text{ é ímpar}$$

ou seja, a solução generalizada u_δ é dada explicitamente pelas fórmulas (4.6)-(4.7) quase sempre em $\mathbb{R}^N \times [T_0, \infty[$.

Passemos a prova da convergência $u_\delta^n \rightarrow v_1$, em $L^2(K)$. O caso $u_\delta^n \rightarrow v_2$ é análogo. Considerando as fórmulas (4.6) e (4.11) temos

$$\begin{aligned} |u_\delta^n(x, t) - v_1(x, t)| &\leq 2\beta_{N_1} \left[\int_{\Omega_\delta} C_2 |f_\delta^n(y) - f_\delta(y)| dy + \int_{\Omega_\delta} C_1 |g_\delta^n(y) - g_\delta(y)| dy \right], \\ &\leq 2\beta_{N_1} \max\{C_1, C_2\} |\Omega_\delta|^{\frac{1}{2}} \{ \|f_\delta^n - f_\delta\|_{H^1(\Omega_\delta)} + \|g_\delta^n - g_\delta\|_{L^2(\Omega_\delta)} \}. \end{aligned}$$

Como $f_\delta^n \rightarrow f_\delta$ em $H^1(\Omega_\delta)$ e $g_\delta^n \rightarrow g_\delta$ em $L^2(\Omega_\delta)$, segue que $u_n \rightarrow v_1$ uniformemente em $\text{int}(K)$. Logo $u_\delta^n \rightarrow v_1$ em $L^2(K)$, como queríamos demonstrar.

Nosso objetivo agora consiste em mostrar que, no caso N ímpar, a solução generalizada

$$\begin{aligned} u_\delta(x, t) &= 2\beta_{N_1} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \left(\int_{\Omega_\delta} J_0(c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}) f_\delta(y) dy \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \left(\int_{\Omega_\delta} J_0(c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}) g_\delta(y) dy \right) \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

e sua derivada $\frac{\partial u_\delta}{\partial t}$ são expressas como combinações lineares de integrais da forma

$$\frac{1}{t^p} \int_{\Omega_\delta} \xi_{n,r}(x, y, t) h(y) dy,$$

onde p é inteiro positivo, h representa um dos dados iniciais f_δ , g_δ , e $\xi_{n,k}$ é definida em (3.14). No caso em que N é par, mostraremos que a representação da solução generalizada

$$u_\delta(x, t) = 2\beta_{N_1} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \left(\int_{\Omega_\delta} \frac{\cos[c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}]}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} f_\delta(y) dy \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \left(\int_{\Omega_\delta} \frac{\cos[c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}]}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} g_\delta(y) dy \right) \right] \quad (4.14)$$

e sua derivada $\frac{\partial u_\delta}{\partial t}$ são expressas como combinação linear de integrais da forma

$$\frac{1}{t^p} \int_{\Omega_\delta} \gamma_\nu(x, y, t) h(y) dy, \quad \frac{1}{t^q} \int_{\Omega_\delta} \theta_k(x, y, t) h(y) dy,$$

onde p, q são inteiros positivos, h representa um dos dados iniciais f_δ, g_δ , e γ_ν, θ_k são definidas em (3.12) e (3.13).

Agora, derivando as fórmulas (4.13) e (4.14) em relação a t , obteremos

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial t}(x, t) = 2\beta_{N_1} \left[\int_{\Omega_\delta} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \frac{\cos[c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}]}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} f(y) dy \right. \\ \left. + \int_{\Omega_\delta} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \frac{\cos[c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}]}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} g(y) dy \right], \quad (4.15)$$

se $N \geq 2$ é par e

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial t}(x, t) = \pi\beta_{N_2} \left[\int_{\Omega_\delta} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-1}{2}} J_0(c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}) f(y) dy \right. \\ \left. + \int_{\Omega_\delta} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-1}{2}} J_0(c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}) g(y) dy \right], \quad (4.16)$$

se N é ímpar.

Usando a fórmula de derivação

$$\left(\frac{1}{t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right)^\ell f = \sum_{\substack{i+j=2\ell \\ \ell \leq j < 2\ell}} C_{ij} \frac{1}{t^j} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i)} f, \quad (4.17)$$

obtida no Lema 3.2.1, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right)^\ell f = \sum_{\substack{i+j=2\ell \\ \ell \leq j < 2\ell}} C_{ij} \left[\frac{-j}{t^{j+1}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i)} + \frac{1}{t^j} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i+1)} \right] f, \quad (4.18)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \left(\frac{1}{t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right)^\ell f = \sum_{\substack{i+j=2\ell \\ \ell \leq j < 2\ell}} C_{ij} \left[\frac{j(j+1)}{t^{j+2}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i)} - \frac{2j}{t^{j+1}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i+1)} + \frac{1}{t^j} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(i+2)} \right] f. \quad (4.19)$$

As fórmulas acima serão usadas na demonstração do lema a seguir.

Lema 4.1.1 *Se N é ímpar, a solução u_δ do problema de Cauchy generalizado (4.1)-(4.3) e sua derivada $\frac{\partial u_\delta}{\partial t}$ são expressas como combinações lineares de integrais da forma*

$$\frac{1}{t^p} \int_{\Omega_\delta} \xi_{n,r}(x, y, t) h(y) dy, \quad n = 0, 1, \quad (4.20)$$

onde p é inteiro positivo tal que $p + r \geq \frac{N-1}{2}$.

Se N é par, u_δ e $\frac{\partial u_\delta}{\partial t}$ são combinações lineares de integrais da forma

$$\frac{1}{t^p} \int_{\Omega_\delta} \gamma_\nu(x, y, t) h(y) dy, \quad \frac{1}{t^q} \int_{\Omega_\delta} \theta_k(x, y, t) h(y) dy, \quad (4.21)$$

com p, n, k inteiros positivos, onde $p + \nu \geq \frac{N-2}{2}$ e $q + k \geq \frac{N-2}{2}$. Em ambos os casos $x \in \Omega_\delta$, $t > T_0$ e h representa o dado inicial pertinente.

Demonstração: Consideremos inicialmente N ímpar. Seja $\ell = \frac{N-1}{2}$, usando as fórmulas (4.17)-(4.19) na expressão (4.13) de u_δ e também na expressão (4.16) de $\frac{\partial}{\partial t} u_\delta$, vemos que u_δ e $\frac{\partial}{\partial t} u_\delta$ são combinações lineares de termos da forma

$$\frac{1}{t^\tau} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^s \int_{\Omega_\delta} \xi_{0,0}(x, y, t) h(y) dy = \frac{1}{t^\tau} \int_{\Omega_\delta} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^s \xi_{0,0}(x, y, t) h(y) dy$$

para $x \in \Omega_\delta$ e $t > T_0$, onde $\frac{N-1}{2} \leq \tau \leq N + 1$ e $0 \leq s \leq \frac{N+3}{2}$.

Quando N é par, tomando $\ell = \frac{N-2}{2}$ e usando as fórmulas (4.17)-(4.19) nas expressões (4.14) e (4.15), concluímos que u_δ e $\frac{\partial}{\partial t} u_\delta$ são combinações de integrais da forma

$$\frac{1}{t^\tau} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^s \int_{\Omega_\delta} \gamma_1(x, y, t) h(y) dy = \frac{1}{t^\tau} \int_{\Omega_\delta} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^s \gamma_1(x, y, t) h(y) dy$$

para $x \in \Omega_\delta$ e $t > T_0$, onde $\frac{N-2}{2} \leq \tau \leq N$ e $0 \leq s \leq \frac{N+2}{2}$.

Do Lema 3.2.2 segue que, $(\frac{\partial}{\partial t})^s \xi_{0,0}$ é combinação linear de termos $t^\alpha \xi_{n,r}$, onde $n = 0, 1$ e $\alpha \leq \min\{r, s\}$. Do mesmo lema, segue que $(\frac{\partial}{\partial t})^s \gamma_1$ é combinação linear de termos da forma $t^m \theta_\nu, t^\alpha \gamma_k$, onde $m \leq \min\{\nu, s\}$ e $\alpha \leq \min\{k, s\}$. Assim, concluímos que para N ímpar, u_δ e $\frac{\partial}{\partial t} u_\delta$ são combinações lineares de termos da forma

$$\frac{1}{t^\tau} \int_{\Omega_\delta} t^\alpha \xi_{n,r}(x, y, t) h(y) dy = \frac{1}{t^{\tau-\alpha}} \int_{\Omega_\delta} \frac{1}{t^r} J_n(c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}) \chi\left(\left|\frac{y-x}{t}\right|\right)^r h(y) dy. \quad (4.22)$$

Para N par, u_δ e $\frac{\partial}{\partial t} u_\delta$ são combinações lineares de termos da forma

$$\frac{1}{t^\tau} \int_{\Omega_\delta} t^\alpha \gamma_\nu(x, y, t) h(y) dy = \frac{1}{t^{\tau-\alpha}} \int_{\Omega_\delta} \frac{1}{t^k} \cos(c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}) \chi\left(\left|\frac{y-x}{t}\right|\right)^k h(y) dy, \quad (4.23)$$

$$\frac{1}{t^q} \int_{\Omega_\delta} \theta_k(x, y, t) h(y) dy = \frac{1}{t^{\tau-m}} \int_{\Omega_\delta} \frac{1}{t^\nu} \sin(c\sqrt{t^2 - |y-x|^2}) \chi\left(\left|\frac{y-x}{t}\right|\right)^\nu h(y) dy. \quad (4.24)$$

No caso N ímpar, temos $\alpha \leq \min\{r, s\}$ e $\frac{N-1}{2} \leq \tau \leq N+1$, daí, segue que $\tau+r-\alpha \geq \frac{N-1}{2}$. Logo (4.22) é equivalente a

$$\frac{1}{t^p} \int_{\Omega_\delta} \xi_{n,r}(x, y, t) h(y) dy,$$

onde $p = \tau - \alpha$. Com isso o lema fica provado para N ímpar.

Se N é par, temos $m \leq \min\{\nu, s\}$ e $\alpha \leq \min\{k, s\}$ e $\frac{N-2}{2} \leq \tau \leq N$. Assim, $\tau+\nu-m \geq \frac{N-2}{2}$ e $\tau+k-\alpha \geq \frac{N-2}{2}$. Logo (4.23) e (4.24) são equivalentes, respectivamente à

$$\frac{1}{t^p} \int_{\Omega_\delta} \gamma_\nu(x, y, t) h(y) dy, \quad \frac{1}{t^q} \int_{\Omega_\delta} \theta_k(x, y, t) h(y) dy,$$

onde $p = \tau - m$ e $q = \tau - \alpha$. Isso prova o lema para o caso em que N é par. □

Seja agora $\zeta = T_0 + z \in \Sigma_0$. Como $|\arg z| \leq \frac{\pi}{4}$, então $|\tan(\arg z)| \leq 1$. Daí $\left| \frac{Im(z)}{Re(z)} \right| \leq 1$, e portanto, $|Re(z)| - |Im(z)| \geq 0$. Sejam $x, y \in \Omega_\delta$. Como

$$(\zeta^2 - |x-y|^2) = T_0^2 + 2T_0z + Re(z)^2 - Im(z)^2 + 2Re(z)Im(z)i - |y-x|^2,$$

então

$$Re(\zeta^2 - |x-y|^2) = T_0^2 + 2T_0Re(z) + Re(z)^2 - Im(z)^2 - |y-x|^2,$$

$$\begin{aligned}
&\geq T_0^2 - |y - x|^2, \\
&= T_0^2 \left(1 - \left| \frac{y - x}{T_0} \right|^2 \right), \\
&\geq T_0^2(1 - \eta^2),
\end{aligned}$$

onde η é escolhido de tal forma que $\frac{d(\Omega_\delta)}{T_0} < \eta < 1$. Assim, para $\zeta \in \Sigma_0$ e $x, y \in \Omega_\delta$ obtemos a desigualdade

$$|\zeta^2 - |x - y|^2| \geq T_0^2(1 - \eta^2). \quad (4.25)$$

Como $Re(\zeta^2 - |x - y|^2) \geq T_0^2(1 - \eta^2)$ então $|arg(\zeta^2 - |x - y|^2)| \leq \frac{\pi}{2}$. Fixados $x, y \in \bar{\Omega}_\delta$, escolhemos o ramo de $(\zeta^2 - |x - y|^2)^{\frac{1}{2}}$ em que a parte real é positiva. Assim, para $y, x \in \bar{\Omega}_\delta$ fixos, obtemos a função analítica

$$\Sigma_0 \ni \zeta \mapsto (\zeta^2 - |x - y|^2)^{\frac{1}{2}}$$

cujos valores estão contidos no setor

$$\Sigma_\eta = \left\{ \zeta : \zeta = \sqrt{1 - \eta^2} T_0 + z : |arg z| \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$$

Convém agora definir a função

$$\Sigma_0 \ni \zeta \mapsto F_k(\zeta) = (\zeta^2 - |x - y|^2)^{-\frac{k}{2}},$$

onde $k = 1, 2, \dots$. A função F_k é analítica no interior de Σ_0 e, devido a desigualdade (4.25) obtemos

$$|F_k(\zeta)| \leq \frac{1}{T_0^k (1 - \eta^2)^{\frac{k}{2}}}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.26)$$

para todos $x, y \in \Omega_\delta$ e ζ no interior de Σ_0 e $k = 1, 2, \dots$.

Para x e y fixos, as funções de ζ

$$\zeta \mapsto J_n(c\sqrt{\zeta^2 - |x - y|^2}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.27)$$

$$\zeta \mapsto \cos(c\sqrt{\zeta^2 - |x - y|^2}), \quad (4.28)$$

$$\zeta \mapsto \text{sen}(c\sqrt{\zeta^2 - |x - y|^2}), \quad (4.29)$$

são também analíticas no interior de Σ_0 . Logo, as funções de ζ

$$\gamma_k(x, y, \zeta) = \frac{\cos(c\sqrt{\zeta^2 - |y-x|^2})}{(\zeta^2 - |y-x|^2)^{\frac{k}{2}}},$$

$$\theta_k(x, y, \zeta) = \frac{\text{sen}(c\sqrt{\zeta^2 - |y-x|^2})}{(\zeta^2 - |y-x|^2)^{\frac{k}{2}}},$$

$$\xi_{n,k}(x, y, \zeta) = \frac{J_n(c\sqrt{\zeta^2 - |y-x|^2})}{(\zeta^2 - |y-x|^2)^{\frac{k}{2}}},$$

são analíticas no interior de Σ_0 , para todos $x, y \in \Omega_\delta$ e $n, k = 0, 1, 2, \dots$.

Pela desigualdade (4.26) temos

$$|\gamma_k(x, y, \zeta)| = \frac{|\cos(c\sqrt{\zeta^2 - |y-x|^2})|}{T_0^k(1-\eta^2)^{\frac{k}{2}}}, \quad (4.30)$$

$$|\theta_k(x, y, \zeta)| = \frac{|\text{sen}(c\sqrt{\zeta^2 - |y-x|^2})|}{T_0^k(1-\eta^2)^{\frac{k}{2}}}, \quad (4.31)$$

$$|\xi_{n,k}(x, y, \zeta)| = \frac{|J_n(c\sqrt{\zeta^2 - |y-x|^2})|}{T_0^k(1-\eta^2)^{\frac{k}{2}}}, \quad (4.32)$$

para todos $x, y \in \Omega_\delta$, $\zeta \in \Sigma_0$, e $n, k = 0, 1, 2, \dots$.

As funções (4.27)-(4.29) são analíticas no interior de Σ_0 e contínuas em relação aos parâmetros $x, y \in \bar{\Omega}_\delta$. Então, para cada vizinhança compacta \bar{V}_{ζ_0} de ζ_0 existe uma constante real positiva P_{ζ_0} de tal forma que vale

$$|\gamma_k(x, y, \zeta)|, |\theta_k(x, y, \zeta)|, |\xi_{n,k}(x, y, \zeta)| \leq \frac{P_{\zeta_0}}{T_0^k(1-\eta^2)^{\frac{k}{2}}} \quad (4.33)$$

para todos $x, y \in \bar{\Omega}_\delta$, $\zeta \in \bar{V}_{\zeta_0}$, $n = 0, 1$ e k conveniente.

Devido a desigualdade (4.33) temos

$$\int_{\bar{\Omega}_\delta} |\xi_{n,k}(x, y, \zeta)| |h(y)| dy \leq \frac{P_{\zeta_0}}{T_0^k(1-\eta^2)^{\frac{k}{2}}} \|h\|_{L^1(\Omega_\delta)} \quad (4.34)$$

$$\int_{\bar{\Omega}_\delta} |\gamma_k(x, y, \zeta)| |h(y)| dy \leq \frac{P_{\zeta_0}}{T_0^k(1-\eta^2)^{\frac{k}{2}}} \|h\|_{L^1(\Omega_\delta)} \quad (4.35)$$

$$\int_{\bar{\Omega}_\delta} |\theta_k(x, y, \zeta)| |h(y)| dy \leq \frac{P_{\zeta_0}}{T_0^k(1-\eta^2)^{\frac{k}{2}}} \|h\|_{L^1(\Omega_\delta)} \quad (4.36)$$

para todos $x \in \overline{\Omega}_\delta$, ζ em \overline{V}_{ζ_0} , onde $n = 0, 1$ e k conveniente. As desigualdades (4.34)-(4.36) garantem que as integrais $\int_{\Omega_\delta} \xi_{n,k}(x, y, t)h(y)dy$, $\int_{\Omega_\delta} \gamma_k(x, y, t)h(y)dy$ e $\int_{\Omega_\delta} \theta_k(x, y, t)h(y)dy$, ficam ainda bem definidas quando trocamos t por ζ .

Como u_δ e $\frac{\partial}{\partial t}u_\delta$ são formadas por combinações de integrais do tipo (4.20)-(4.21), então podemos estendê-las ao setor complexo Σ_0 fazendo simplesmente a troca de t por ζ nas fórmulas (4.13)-(4.16). Com isso, pelo Lema 4.1.1 concluímos que $u_\delta(\cdot, \zeta)$ e $\frac{\partial}{\partial t}u_\delta(\cdot, \zeta)$ são combinações de integrais da forma

$$\frac{1}{\zeta^p} \int_{\Omega_\delta} \xi_{n,r}(x, y, \zeta)h(y)dy, \quad (4.37)$$

se N é ímpar, onde $p + r \geq \frac{N-1}{2}$, $n = 0, 1$, e

$$\frac{1}{\zeta^p} \int_{\Omega_\delta} \gamma_\nu(x, y, \zeta)h(y)dy, \quad \frac{1}{t^q} \int_{\Omega_\delta} \theta_k(x, y, \zeta)h(y)dy, \quad (4.38)$$

se N é par, onde $p + \nu \geq \frac{N-2}{2}$ e $q + k \geq \frac{N-2}{2}$, para todo $x, y \in \Omega_\delta$ e $\zeta \in \Sigma_0$.

Sejam

$$V_0^1(\Omega_\delta) =: H_0^1(\Omega_\delta) \times L^2(\Omega_\delta),$$

$$V^1(\Omega_\delta) =: H^1(\Omega_\delta) \times L^2(\Omega_\delta),$$

e $S_T : V_0^1(\Omega_\delta) \longrightarrow V^1(\Omega_\delta)$, com $T > T_0$, como definido anteriormente. Da desigualdade (2.36) segue que S_T é um operador linear limitado.

Consideremos agora os seguintes operadores projeções

$$P_1 : H^1(\Omega_\delta) \times L^2(\Omega_\delta) \longrightarrow H^1(\Omega_\delta),$$

$$P_2 : H^1(\Omega_\delta) \times L^2(\Omega_\delta) \longrightarrow L^2(\Omega_\delta),$$

definidos por $P_1(f, g) = f$ e $P_2(f, g) = g$. Temos então

$$P_1 S_T(u_\delta(\cdot, 0), \frac{\partial u_\delta}{\partial t}(\cdot, 0)) = u_\delta(\cdot, T),$$

$$P_2 S_T(u_\delta(\cdot, 0), \frac{\partial u_\delta}{\partial t}(\cdot, 0)) = \frac{\partial}{\partial t}u_\delta(\cdot, T).$$

As famílias de operadores lineares limitados $\{P_1 S_T\}_{T \geq T_0}$ e $\{P_2 S_T\}_{T \geq T_0}$ tem um papel importante, como mostra o seguinte resultado.

Proposição 4.1.1 *Sejam os operadores $P_i S_T$, ($i=1,2$) como acima definidos. Se para cada $i = 1,2$, a família de operadores $\{P_i S_T\}_{T \geq T_0}$, se estende analiticamente para parâmetro complexo no interior do setor Σ_0 , então a família $\{S_T\}_{T \geq T_0}$ também se estende analiticamente a este setor.*

Demonstração: Sendo $P_i S_\zeta$, $i = 1,2$, analítica, para $\zeta \in \Sigma_0$, segue que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left\| \frac{P_i S_{(\zeta+\eta)} - P_i S_{(\zeta)}}{\eta} \right\|_{H^{i-1}(\Omega_\delta)}$$

existe, para ($i=1,2$). Como

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} \left\| \frac{S_{(\zeta+\eta)} - S_{(\zeta)}}{\eta} \right\|_{H^1(\Omega_\delta) \times L^2(\Omega_\delta)}^2 &= \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \left\| \left(\frac{w_\delta(\cdot, \zeta + \eta) - w_\delta(\cdot, \zeta)}{\eta}, \frac{\frac{\partial}{\partial t} w_\delta(\cdot, \zeta + \eta) - \frac{\partial}{\partial t} w_\delta(\cdot, \zeta)}{\eta} \right) \right\|_{H^1(\Omega_\delta) \times L^2(\Omega_\delta)}^2 \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \left\| \frac{P_1 S_{(\zeta+\eta)} - P_1 S_{(\zeta)}}{\eta} \right\|_{H^1(\Omega_\delta)}^2 + \lim_{\eta \rightarrow 0} \left\| \frac{P_2 S_{(\zeta+\eta)} - P_2 S_{(\zeta)}}{\eta} \right\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2. \end{aligned}$$

Como os limites do lado direito da última igualdade existem, devido a hipótese, concluímos então que os limites do lado direito da última igualdade existem, logo $\lim_{\eta \rightarrow 0} \left\| \frac{S_{(\zeta+\eta)} - S_{(\zeta)}}{\eta} \right\|_{H^1(\Omega_\delta) \times L^2(\Omega_\delta)}$ existe, e assim o resultado segue. \square

Como mostramos anteriormente, as funções de $t \geq T_0$, $u_\delta(\cdot, t)$ e $\frac{\partial}{\partial t} u_\delta(\cdot, t)$ se estendem para $t = \zeta \in \Sigma_0$. Logo, as famílias $\{P_1 S_T\}_{T \geq T_0}$ e $\{P_2 S_T\}_{T \geq T_0}$ se estendem para o parâmetro $\zeta \in \Sigma_0$.

Nosso próximo passo é provar que os operadores lineares limitados $P_i S_\zeta$, $i = 1,2$ são compactos. Para isto consideremos o resultado a seguir.

Lema 4.1.2 *Sejam ℓ, n e k inteiros não negativos.*

a) *A derivada*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^\ell \xi_{n,k}(x, y, \zeta), \quad x, y \in \Omega_\delta, \quad \zeta \in \Sigma_0$$

é expressa como combinação linear de termos da forma

$$(y_i - x_i)^s \xi_{p,k+r}(x, y, \zeta)$$

em que p é inteiro, s e r são inteiros não negativos satisfazendo; $n - \ell \leq p \leq n$, $r \leq 2\ell$ e $s \leq \min\{r, \ell\}$.

b) *As derivadas*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^\ell \gamma_k(x, y, \zeta), \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^\ell \theta_k(x, y, \zeta), \quad x, y \in \Omega_\delta, \quad \zeta \in \Sigma_0$$

são expressas como combinação linear de termos da forma $(y_i - x_i)^m \theta_{k+\nu}$ e $(y_i - x_i)^s \gamma_{k+r}$, onde r, s, m, ν , são inteiros positivos tais que $r, \nu \leq 2\ell$, $s \leq \min\{r, \ell\}$ e $m \leq \min\{\nu, \ell\}$.

Demonstração: Procedemos de forma análoga na demonstração do Lema 3.2.2. Basta trocar t por x_i no Lema 3.2.2 e observar que os fatores do tipo $(y_i - x_i)$ aparecerão na medida em que calculamos as derivadas em relação a x_i . \square

Proposição 4.1.2 *Para cada $\zeta \in \Sigma_0$, as funções de x*

$$\begin{aligned} x &\longmapsto u_\delta(\cdot, \zeta), \\ x &\longmapsto \frac{\partial}{\partial \zeta} u_\delta(\cdot, \zeta), \end{aligned}$$

são de classe $C^\infty(\Omega_\delta)$ e limitadas em $\bar{\Omega}_\delta$.

Demonstração: Para provar que as funções acima são $C^\infty(\Omega_\delta)$ é suficiente provar que as derivadas parciais $(\frac{\partial}{\partial x_i})^\ell$, $\ell = 1, 2, \dots$, existam para todo $x \in \Omega_\delta$. Como vimos anteriormente, $u_\delta(\cdot, \zeta)$ e $\frac{\partial}{\partial \zeta} u_\delta(\cdot, \zeta)$ são combinações lineares de integrais da forma (4.37) se N é ímpar e da forma (4.38) se N é par. Assim, temos de garantir que as derivadas $(\frac{\partial}{\partial x_i})^\ell$ podem ser efetuadas sob o sinal de tais integrais.

Pelo lema 4.1.2, segue que $(\frac{\partial}{\partial x_i})^\ell \xi_{n,k}(x, y, \zeta)$ é combinação linear de termos da forma $(y_i - x_i)^s \xi_{n,k+r}(x, y, \zeta)$, onde $s \leq \min\{r, \ell\}$ e que $(\frac{\partial}{\partial x_i})^\ell \gamma_k(x, y, \zeta)$ e $(\frac{\partial}{\partial x_i})^\ell \theta_k(x, y, \zeta)$ são combinações lineares de funções da forma $(y_i - x_i)^m \gamma_{k+\nu}(x, y, \zeta)$ e $(y_i - x_i)^s \theta_{k+r}(x, y, \zeta)$, onde $m \leq \min\{\nu, \ell\}$ e $s \leq \min\{r, \ell\}$.

Como Ω_δ é um domínio limitado e ζ está fixo, segue da desigualdade (4.33) que $(\frac{\partial}{\partial x_i})^\ell \xi_{n,k}(x, y, \zeta)$, $(\frac{\partial}{\partial x_i})^\ell \gamma_k(x, y, \zeta)$ e $(\frac{\partial}{\partial x_i})^\ell \theta_k(x, y, \zeta)$ são limitadas em $\bar{\Omega}_\delta$. Assim, podemos efetuar a derivada $(\frac{\partial}{\partial x_i})^\ell$ sob o sinal de integração.

Como as funções de x

$$x \mapsto \xi_{n,k}(x, y, \zeta),$$

$$x \mapsto \gamma_k(x, y, \zeta),$$

$$x \mapsto \theta_k(x, y, \zeta),$$

são de classe $C^\ell(\Omega_\delta)$, ($\ell = 1, 2, \dots$), e limitadas em $\overline{\Omega}_\delta$, devido a desigualdade (4.33).

Concluimos então que $u_\delta(x, \zeta)$ e $\frac{\partial}{\partial \zeta} u_\delta(x, \zeta)$ são $C^\infty(\Omega_\delta)$ e limitadas em $\overline{\Omega}_\delta$.

□

Como

$$P_1 S_\zeta \left(u_\delta(\cdot, \zeta), \frac{\partial u_\delta}{\partial \zeta}(\cdot, \zeta) \right) = u_\delta(\cdot, \zeta),$$

$$P_2 S_\zeta \left(u_\delta(\cdot, \zeta), \frac{\partial u_\delta}{\partial \zeta}(\cdot, \zeta) \right) = \frac{\partial u_\delta}{\partial \zeta}(\cdot, \zeta),$$

então, pela Proposição 4.1.2 segue que a imagem dos operadores $P_i S_\zeta$, $i = 1, 2$ estão contidas em $C^\infty(\Omega_\delta) \cap H^2(\Omega_\delta)$. Agora, $C^\infty(\Omega_\delta) \cap H^2(\Omega_\delta) \subset H^2(\Omega_\delta)$ com imersão contínua e $H^2(\Omega_\delta) \subset H^i(\Omega_\delta)$, $i = 0, 1$, com imersão compacta, conforme vista no capítulo 1, imersão (1.1). Assim, concluimos que as famílias de operadores lineares limitados $\{P_1 S_\zeta\}_{\zeta \in \Sigma_0}$ e $\{P_2 S_\zeta\}_{\zeta \in \Sigma_0}$ são também famílias de operadores compactos e portanto também o é a família $\{S_\zeta\}_{\zeta \in \Sigma_0}$. Particularmente, a família de operadores lineares limitadas $\{S_T\}_{T > T_0}$ é também compacta.

4.2 A analiticidade da família $\{S_\zeta\}_{\zeta \in \Sigma_0}$

Neste parágrafo nosso objetivo é mostrar que as famílias de operadores compactos $\{P_1 S_\zeta\}_{\zeta \in \Sigma_0}$ e $\{P_2 S_\zeta\}_{\zeta \in \Sigma_0}$ são analíticas no interior do setor Σ_0 . Para tanto, é suficiente mostrarmos que tais famílias são fracamente analíticas em vista do Teorema 1.1.1. É importante observar que nesta seção estaremos considerando os espaços $H^i(\Omega_\delta)$, $i = 0, 1$, como complexificados.

Teorema 4.2.1 *As aplicações*

$$\Sigma_0 \ni \zeta \longrightarrow P_1 S_\zeta \in B(V_0^1(\Omega_\delta), H^1(\Omega_\delta))$$

$$\Sigma_0 \ni \zeta \longrightarrow P_2 S_\zeta \in B(V_0^1(\Omega_\delta), L^2(\Omega_\delta))$$

são analíticas no interior de Σ_0 .

Demonstração: Identificaremos H^1 e L^2 com seus respectivos duais, via o Teorema de representação de Riesz. Em vista do Teorema 1.1.1 basta mostrar que as funções complexas

$$\Sigma_0 \ni \zeta \longrightarrow F(\zeta) = \langle P_1 S_\zeta w, v \rangle_{H^1(\Omega_\delta)} \in \mathbb{C}, \quad w \in V_0^1(\Omega_\delta), \quad v \in H^1(\Omega_\delta),$$

$$\Sigma_0 \ni \zeta \longrightarrow \Gamma(\zeta) = \langle P_2 S_\zeta w, v \rangle_{L^2(\Omega_\delta)} \in \mathbb{C}, \quad w \in V_0^1(\Omega_\delta), \quad v \in L^2(\Omega_\delta),$$

são analíticas no interior do setor Σ_0 . Provemos primeiramente a analiticidade da função F . Para cada $w \in V_0^1(\Omega_\delta)$ e $v \in H^1(\Omega_\delta)$ temos

$$\langle P_1 S_\zeta w, v \rangle_{H^1(\Omega_\delta)} = \int_{\Omega_\delta} u_\delta(x, \zeta) \overline{v(x)} dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_\delta} \frac{\partial}{\partial x_i} u_\delta(x, \zeta) \overline{\frac{\partial}{\partial x_i} v(x)} dx.$$

Dependendo da paridade de N as fórmulas que representam a função $u_\delta(\cdot, \zeta)$ são distintas. Assim, é conveniente, para um melhor entendimento, dividiremos a prova nos casos em que N é ímpar e em que N é par.

Se N é ímpar, a função $P_1 S_\zeta w(x, \zeta) = u_\delta(\cdot, \zeta)$ é combinação linear de integrais da forma (4.37). Como

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \xi_{n,k}(x, y, \zeta) = c(y_i - x_i) \xi_{n-1, k+1}(x, y, \zeta) - (n+k)(y_i - x_i) \xi_{n, k+2}(x, y, \zeta),$$

então $u_\delta(\cdot, \zeta)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i} u_\delta(\cdot, \zeta)$ são combinações lineares de integrais da forma

$$\frac{1}{\zeta^p} \int_{\Omega_\delta} \xi_{n,k}(x, y, \zeta) (y_i - x_i)^s h(y) dy, \quad (4.39)$$

onde $p+k \geq \frac{N+1}{2}$ e $s, n = 0, 1$.

Assim, para este caso, concluímos que F é combinação linear de integrais da forma

$$\int_{\Omega_\delta} \frac{1}{\zeta^p} \int_{\Omega_\delta} \xi_{n,k}(x, y, \zeta) (y_i - x_i)^s h(y) dy \overline{\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^l} v(x) dx, \quad (4.40)$$

onde $s, l = 0, 1$.

Usando o teorema de Fubini, segue que F é combinação linear de integrais da forma

$$\frac{1}{\zeta^p} \int_{\Omega_\delta \times \Omega_\delta} \psi(x, y) \xi_{n,k}(x, y, \zeta) dx dy, \quad (4.41)$$

sendo $\psi(x, y) = (y_i - x_i)^s h(y) \overline{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^l v(x)}$ e $s, l = 0, 1$.

Logo, para mostrar que a função F é analítica no interior de Σ_0 , é suficiente mostrar que

$$\Sigma_0 \ni \zeta \longmapsto \frac{1}{\zeta^p} \int_{\Omega_\delta \times \Omega_\delta} \psi(x, y) \xi_{n,k}(x, y, \zeta) dx dy, \quad (4.42)$$

é analítica aí neste setor.

Como

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \xi_{n,k}(x, y, \zeta) = c\zeta \xi_{n-1,k+1}(x, y, \zeta) - \zeta(n+k) \xi_{n,k+2}(x, y, \zeta),$$

então, pelas desigualdades (4.33), segue que

$$\left| \frac{\partial}{\partial \zeta} \xi_{n,k}(x, y, \zeta) \right| \leq \text{const.}, \quad (4.43)$$

em \bar{V}_ζ , onde V_ζ é uma vizinhança de ζ em Σ_0 .

Como $\psi \in L^1(\Omega_\delta \times \Omega_\delta)$ então

$$\int_{\Omega_\delta \times \Omega_\delta} \left| \frac{\partial}{\partial \zeta} \xi_{n,k}(x, y, \zeta) \right| |\psi(x, y)| dx dy \leq \text{const.} \|\psi\|_{L^1(\Omega_\delta \times \Omega_\delta)},$$

para todo $x, y \in \Omega_\delta$. Esta última desigualdade garante que a derivada $\frac{\partial}{\partial \zeta}$ pode ser efetuada sob o sinal da integral em (4.42). Isso comprova a analiticidade da função (4.42) no interior de Σ_0 , pois $\xi_{n,k}(x, y, \zeta)$ é aí analítica. Consequentemente, temos a analiticidade de F no interior de Σ_0 .

Caso $N \geq 2$ é par, $u_\delta(\cdot, \zeta)$ é combinação linear de integrais da forma (4.38). Como

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \gamma_k(x, y, \zeta) = -c(y_i - x_i) \theta_{k+1}(x, y, \zeta) - k(y_i - x_i) \gamma_{k+2}(x, y, \zeta),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \theta_k(x, y, \zeta) = c(y_i - x_i) \theta_{k+1}(x, y, \zeta) - k(y_i - x_i) \gamma_{k+2}(x, y, \zeta),$$

então, para este caso, $u_\delta(\cdot, \zeta)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i} u_\delta(\cdot, \zeta)$ são combinações lineares de integrais da forma

$$\frac{1}{\zeta^p} \int_{\Omega_\delta} \gamma_k(x, y, \zeta) (y_i - x_i)^s h(y) dy, \quad \frac{1}{\zeta^q} \int_{\Omega_\delta} \theta_\nu(x, y, \zeta) (y_i - x_i)^s h(y) dy, \quad (4.44)$$

onde $p + k, q + \nu \geq \frac{N}{2}$ e $s = 0, 1$.

Assim, concluímos que F é combinação linear de integrais da forma

$$\int_{\Omega_\delta} \frac{1}{\zeta^p} \int_{\Omega_\delta} \gamma_k(y_i - x_i)^s h(y) dy \overline{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^l} v(x) dx, \int_{\Omega_\delta} \frac{1}{\zeta^q} \int_{\Omega_\delta} \theta_k(y_i - x_i)^s h(y) dy \overline{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^l} v(x) dx, \quad (4.45)$$

onde $s, l = 0, 1$.

Usando o teorema de Fubini nas integrais (4.45), segue que F é combinação linear de integrais da forma

$$\frac{1}{\zeta^p} \int_{\Omega_\delta \times \Omega_\delta} \psi(x, y) \gamma_k(x, y, \zeta) dx dy, \frac{1}{\zeta^q} \int_{\Omega_\delta \times \Omega_\delta} \psi(x, y) \theta_\nu(x, y, \zeta) dx dy, \quad (4.46)$$

onde $\psi(x, y) = (y_i - x_i)^s h(y) \overline{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^l} v(x)$, sendo $s, l = 0, 1$.

Assim, para mostrar que F é analítica no interior de Σ_0 é suficiente mostrar que

$$\Sigma_0 \ni \zeta \mapsto \frac{1}{\zeta^p} \int_{\Omega_\delta \times \Omega_\delta} \varphi(x, y) \theta_k(x, y, \zeta) dx dy, \quad (4.47)$$

$$\Sigma_0 \ni \zeta \mapsto \frac{1}{\zeta^q} \int_{\Omega_\delta \times \Omega_\delta} \varphi(x, y) \xi_{n,k}(x, y, \zeta) dx dy, \quad (4.48)$$

são analíticas no interior de Σ_0 . Como

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \gamma_k(x, y, \zeta) = -c\zeta \theta_{k+1}(x, y, \zeta) - k\zeta \gamma_{k+2}(x, y, \zeta),$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \theta_k(x, y, \zeta) = c\zeta \gamma_{k+1}(x, y, \zeta) - k\zeta \theta_{k+2}(x, y, \zeta),$$

então, por usar a desigualdade (4.33), segue que

$$\left| \frac{\partial}{\partial \zeta} \gamma_k(x, y, \zeta) \right|, \left| \frac{\partial}{\partial \zeta} \theta_k(x, y, \zeta) \right| \leq \text{const.}, \quad (4.49)$$

em \bar{V}_ζ , onde V_ζ é uma vizinhança compacta de ζ no interior de Σ_0 .

Como $\psi \in L^1(\Omega_\delta \times \Omega_\delta)$, temos

$$\int_{\Omega_\delta \times \Omega_\delta} \left| \frac{\partial}{\partial \zeta} \gamma_k(x, y, \zeta) \right| |\psi(x, y)| dx dy \leq \text{const.} \|\psi\|_{L^1(\Omega_\delta \times \Omega_\delta)},$$

$$\int_{\Omega_\delta \times \Omega_\delta} \left| \frac{\partial}{\partial \zeta} \theta_k(x, y, \zeta) \right| |\psi(x, y)| dx dy \leq \text{const.} \|\psi\|_{L^1(\Omega_\delta \times \Omega_\delta)},$$

para todo $x, y \in \Omega_\delta$ e $\zeta \in V_\zeta$. Isso então garante que a derivada $\frac{\partial}{\partial \zeta}$ pode ser efetuada sob o sinal de integral em (4.49) e (4.48). Assim temos comprovada a analiticidade de F , no interior de Σ_0 , para o caso em que $N \geq 2$ é par.

Provemos agora que a função

$$\Gamma(\zeta) = \langle P_2 S_\zeta w, v \rangle_{L^2(\Omega_\delta)} = \int_{\Omega_\delta} P_2 S_\zeta w(x, \zeta) \overline{v(x)} dx$$

é analítica no interior de Σ_0 .

Como no caso anterior vamos separar os casos em que N é par e N ímpar.

Se N é ímpar, então $P_2 S_\zeta w = \frac{\partial}{\partial \zeta} u_\delta(\cdot, \zeta)$ é uma combinação linear de integrais da forma (4.37). Assim, Γ é combinação linear de termos da forma

$$\int_{\Omega_\delta} \frac{1}{\zeta^p} \int_{\Omega_\delta} \xi_{n,k}(x, y, \zeta) h(y) dy \overline{v(x)} dx, \quad (4.50)$$

onde $n = 0, 1$, $p + k \geq \frac{N+1}{2}$.

Usando o teorema de Fubini segue que Γ é combinação linear de integrais da forma

$$\frac{1}{\zeta^p} \int_{\Omega_\delta \times \Omega_\delta} \psi(x, y) \xi_{n,k}(x, y, \zeta) dx dy, \quad (4.51)$$

sendo $\psi(x, y) = h_\delta(y) \overline{v(x)}$. Logo, para mostrar que Γ é analítica no interior Σ_0 , é suficiente mostrar que a função

$$\text{int}\Sigma_0 \ni \zeta \longmapsto \int_{\Omega_\delta \times \Omega_\delta} \psi(x, y) \xi_{n,k}(x, y, \zeta) dx dy,$$

é analítica. Mas isso segue do caso anterior.

Se N é par, então então $P_2 S_\zeta w = \frac{\partial}{\partial \zeta} u_\delta(\cdot, \zeta)$ é uma combinação linear de integrais da forma (4.38). Assim, Γ é combinação linear de termos da forma

$$\int_{\Omega_\delta} \frac{1}{\zeta^p} \int_{\Omega_\delta} \gamma_k(x, y, \zeta) h(y) dy \overline{v(x)} dx, \quad \int_{\Omega_\delta} \frac{1}{\zeta^q} \int_{\Omega_\delta} \theta_\nu(x, y, \zeta) h(y) dy \overline{v(x)} dx, \quad (4.52)$$

para $p + k, q + \nu \geq \frac{N}{2}$, todo $x, y \in \Omega_\delta$ e $\zeta \in \Sigma_0$.

Usando o teorema de Fubini, segue que Γ é combinação linear de termos da forma

$$\frac{1}{\zeta^p} \int_{\Omega_\delta \times \Omega_\delta} \psi(x, y) \gamma_k(x, y, \zeta) dx dy, \quad \frac{1}{\zeta^q} \int_{\Omega_\delta \times \Omega_\delta} \psi(x, y) \theta_\nu(x, y, \zeta) dx dy, \quad (4.53)$$

onde $\psi(x, y) = h_\delta(y) \overline{v(x)}$.

Daí, mostrar que Γ é analítico no interior de Σ_0 é suficiente mostrar que as funções complexas

$$\begin{aligned} \Sigma_0 \ni \zeta &\longmapsto \int_{\Omega_\delta \times \Omega_\delta} \psi(x, y) \gamma_k(x, y, \zeta) dx dy, \\ \Sigma_0 \ni \zeta &\longmapsto \int_{\Omega_\delta \times \Omega_\delta} \psi(x, y) \theta_\nu(x, y, \zeta) dx dy, \end{aligned}$$

são analíticas. Mas, isso segue de modo análogo ao que foi feito no caso de F . \square

Do teorema acima segue que as famílias de operadores $\{P_1 S_\zeta\}_{\zeta \in \Sigma_0}$ e $\{P_2 S_\zeta\}_{\zeta \in \Sigma_0}$ são analíticas no interior de Σ_0 . E com isso, concluimos que a família de operadores compactos $\{S_T\}_{T \geq T_0}$ se estende analiticamente à família de operadores compactos $\{S_\zeta\}_{\zeta \in \Sigma_0}$ no interior do setor Σ_0 , como gostaríamos de mostrar.

Capítulo 5

Controle Exato na Fronteira para Equação de Klein-Gordon

Neste capítulo resolveremos o problema de controle exato na fronteira para a equação linear de Klein-Gordon, cujo controle age sobre toda fronteira do domínio. Aqui iremos considerar domínios mais gerais do que aqueles de fronteira C^∞ , como considerados em [16] e [24].

A contribuição que apresentaremos neste capítulo consiste em mostrar que a equação de Klein-Gordon é exatamente controlável na fronteira de um domínio Ω suave por partes e sem cúspides, com controle do tipo Neumann, de quadrado integrável. Além disso, mostramos também que o tempo de controle T pode ser qualquer valor maior que o diâmetro de Ω .

5.1 Problema de valor inicial e fronteira

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N > 1$, um domínio limitado, com fronteira Γ suave por partes e sem cúspides. Assumimos que Ω situa-se somente em um lado da fronteira. Logo, o vetor normal externo $\nu = \nu(x)$ é definido em quase todo ponto $x \in \Gamma$. Assumimos ainda, $\Gamma = \bigcup_{j=1}^k \gamma_j$, onde cada γ_j é parte compacta de uma variedade $\Sigma_j \subset \mathbb{R}^N$, $N - 1$ dimensional de classe C^∞ , com $\text{int}(\gamma_j) \neq \emptyset$ para todo j e $\text{int}(\gamma_j) \cap \text{int}(\gamma_l) = \emptyset$ se $l \neq j$. Cada parte γ_j

da fronteira de Ω é chamado de face do domínio Ω .

Se $x \in \text{int}(\gamma_j)$ para algum j , podemos assumir que o vetor normal $\nu(x)$ coincide com o proveniente da parametrização usual de Σ_j , salvo a uma mudança de orientação. O domínio $Q_T = \Omega \times]0, T[$ é um domínio suave por partes e sem cúspides cujas faces laterais são $\Lambda_j = \gamma_j \times [0, T]$, $j = 1, 2, \dots, k$. Daí, $\bigcup_{j=1}^k \Lambda_j$ é a superfície lateral de Q_T .

Definimos agora a noção de solução para problemas de valor inicial e fronteira que utilizaremos aqui.

Definição 5.1.1 *Seja $T > 0$ um número real. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, ($N = 2, 3, \dots$) um domínio suave por partes cuja fronteira se escreve como*

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^k \gamma_j.$$

Dados $(f, g) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $h \in L^2(\Gamma \times]0, T[)$, uma função $u \in H^1(\Omega \times]0, T[)$ é solução do problema

$$Lu = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times]0, T[, \quad (5.1)$$

$$u(\cdot, 0) = f \quad \text{em} \quad \Omega, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0) = g \quad \text{em} \quad \Omega, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = h \quad \text{em} \quad \Gamma \times [0, T], \quad (5.4)$$

se existir uma sequência $(u_n) \subset C^\infty(\overline{\Omega} \times [0, T])$ satisfazendo as seguintes condições;

$$a) \quad Lu_n = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times]0, T[, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \quad \text{em} \quad H^1(\Omega \times]0, T[),$$

$$c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(\cdot, 0) = f \quad \text{em} \quad H^1(\Omega),$$

$$d) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(\cdot, 0) = g \quad \text{em} \quad L^2(\Omega),$$

$$e) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial u_n}{\partial \nu} \right) = h \quad \text{em} \quad L^2(\Gamma \times]0, T[).$$

Com esta noção de solução o problema misto (5.1)-(5.4) fica bem posto, ver [17].

O próximo teorema nos fornece um método para obtermos a solução do problema misto (5.1)- (5.4). Para isso consideremos o seguinte problema de Cauchy;

$$Lu = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \quad (5.5)$$

$$u(., 0) = f \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(., 0) = g \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \quad (5.7)$$

onde $f \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ são funções com suporte compacto.

Teorema 5.1.1 *Seja $(f, g) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$ um par de funções com suporte compacto e seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, ($N = 2, 3, \dots$), um domínio suave por partes sem cúspides. Se $u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ é solução do problema de Cauchy (5.5)-(5.7) e $T > 0$ é um número real dado, então u admite traço $\frac{\partial u}{\partial \nu} = h \in L^2(\Gamma \times]0, T[)$ e a restrição $u|_{\Omega \times]0, T[} = \tilde{u}$ ao domínio $Q_T = \Omega \times]0, T[\subset \mathbb{R}^{N+1}$ é solução do problema de valor inicial e fronteira (5.1)- (5.4) com dados iniciais $f|_{\Omega} \in H^1(\Omega)$, $g|_{\Omega} \in L^2(\Omega)$ e $h \in L^2(\Gamma \times]0, T[)$.*

Demonstração: As estimativas usuais de energia nos garantem as condições (b), (c) e (d) da definição 5.1.1. O Teorema de traço 1.3.1 nos assegura a existência de h . Defina $\tilde{u} = u|_{\Omega}$, usando a definição de solução de problema de Cauchy, solução de problema de valor inicial e fronteira e também a definição de traço da derivada conormal (Definição 1.3.1) obtemos o resultado. \square

5.2 Controle exato na fronteira para equação de Klein-Gordon

Para um melhor entendimento do problema de controle exato iniciaremos esta seção explicando intuitivamente o significado físico do mesmo. Para o caso $N = 2$, suponha que temos uma membrana a qual esteja perfeitamente esticada e que em seu estado de repouso ocupe a região Ω . Suponhamos ainda, que tal membrana esteja vibrando por ter sido inicialmente perturbada de seu estado de repouso, por uma força externa transversal. Suponha também que o meio onde a membrana se encontra promove uma

força restauradora proporcional ao deslocamento da mesma. Esse tipo de problema é modelado pela equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + c^2 u = 0. \quad (5.8)$$

A equação (5.8) é conhecida na literatura como equação de Klein-Gordon linear. A função $u(x, t)$ indica a posição da partícula x da membrana no instante t e $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$ representa a velocidade da partícula x da membrana no instante t .

Para a situação acima referida é colocado o seguinte problema de controle: encontrar um tempo finito $T > 0$ e uma maneira de atuar na fronteira Γ da membrana Ω , de modo que, no instante T a vibração da mesma atinja em um estado desejado. Este é o significado físico do termo “controle exato” expresso neste trabalho.

Podemos atuar na fronteira de diversas maneiras. Uma delas é prescrevendo o movimento da membrana em cada ponto de Γ . Neste caso a função u deve satisfazer a condição de fronteira do tipo $u(x, t) = h(x, t)$ para todo $(x, t) \in \Gamma \times [0, T]$. Outra maneira, é agir na fronteira por meio de um dispositivo que exerça uma força nos pontos de Γ , perpendicular ao deslocamento. Neste caso a condição de fronteira satisfeita por u é $\frac{\partial u}{\partial \nu} = h(x, t)$, $(x, t) \in \Gamma \times [0, T]$, onde ν é vetor normal exterior a Γ . Esta condição é denominada condição de Neumann. Além disso, podemos também atuar na fronteira por meio de um dispositivo que é a “combinação linear” dos dois acima citados. Neste caso a condição de fronteira é dada por $\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \nu}$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

O problema de controle para a equação (5.8), consiste em encontrar um instante $T > 0$ e uma função controle h atuando na fronteira do sistema de modo que o estado inicial $(u(x, 0), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0))$ é conduzido a um estado final $(u(x, T), \frac{\partial u}{\partial t}(x, T))$. Quando o estado final desejado é o estado de repouso, expresso por $u(x, T) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, T) = 0$, o problema de controle recebe o nome especial de controlabilidade nula. Para equações lineares reversíveis no tempo a controlabilidade nula é equivalente a controlabilidade exata.

5.2.1 Controle num grande intervalo de tempo

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, ($N = 2, 3, \dots$), um domínio nas condições da seção anterior com vetor normal externo $\nu = \nu(x)$, $x \in \Gamma$.

Teorema 5.2.1 *Seja Ω como na seção 5.1 . Existe $T > 0$ dependendo apenas de Ω , c e das funções de Bessel J_0 e J_1 , tal que; para cada estado inicial $(f, g) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, existe uma função controle $h \in L^2(\Gamma \times]0, T[)$ de forma que a solução $u \in H^1(\Omega \times]0, T[)$ do problema de valor inicial e fronteira*

$$Lu = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times]0, T[, \quad (5.9)$$

$$u(., 0) = f \quad \text{em} \quad \Omega, \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(., 0) = g \quad \text{em} \quad \Omega, \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = h \quad \text{em} \quad \Gamma \times [0, T], \quad (5.12)$$

satisfaz

$$u(., T) = \frac{\partial u}{\partial t}(., T) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Demonstração: Sejam $\Omega_\delta = \Omega + B(0, \delta)$, onde $\delta > 0$ e $\tilde{T}_0 =: \sqrt{(\frac{M}{c})^2 + (d(\Omega_\delta))^2}$. Seja $E_1 : H^1(\Omega) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ o operador extensão introduzido no Lema 1.2.1 que estende $w_0 \in H^1(\Omega)$ à uma função $E_1 w_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com suporte compacto contido em Ω_δ . Seja $E_0 : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ o operador linear limitado que estende $w_1 \in L^2(\Omega)$ para uma função $E_0 w_1 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ que se anula no complementar de Ω_δ . O operador

$$E : H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$$

definido por $E(w_0, w_1) = (E_1 w_0, E_0 w_1)$ é linear e $\|E(w_0, w_1)\|_{H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq C \|(w_0, w_1)\|_{H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2$ para alguma constante $C > 0$. Além disso, $\text{supp} E_1 w_0, \text{supp} E_0 w_1 \subset \Omega_\delta$, para todo $(w_0, w_1) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Sejam (w_0, w_1) um dado inicial arbitrário em $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $w_\delta \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ a solução do problema de Cauchy

$$Lw_\delta = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \quad (5.13)$$

$$w_\delta(., 0) = E_1 w_0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial w_\delta}{\partial t}(., 0) = E_0 w_1 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \quad (5.15)$$

Sejam $T > \tilde{T}_0$ um número real a ser escolhido posteriormente e $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ uma função teste tal que $\phi \equiv 1$ em $\Omega_{\delta/2}$ e $\phi \equiv 0$ no complementar de $\Omega_{\frac{3\delta}{4}}$. Observemos que o

par $(\phi w_\delta(\cdot, T), \phi \frac{\partial}{\partial t} w_\delta(\cdot, T))$ está em $H_0^1(\Omega_\delta) \times L^2(\Omega_\delta)$. Seja $z \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ a solução do problema de Cauchy retrógrado

$$Lz = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \quad (5.16)$$

$$z(\cdot, T) = \phi w_\delta(\cdot, T) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}(\cdot, T) = \phi \frac{\partial w_\delta}{\partial t}(\cdot, T) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \quad (5.18)$$

Usando os operadores S_T e \bar{S}_T , como definidos nos capítulos 2 e 3, o operador E e o operador multiplicação por ϕ , denotado por \mathcal{M}_ϕ , podemos escrever

$$\begin{aligned} \left(\phi w_\delta(\cdot, T), \phi \frac{\partial w_\delta}{\partial t}(\cdot, T) \right) &= \mathcal{M}_\phi R_\delta S_T (E_1 w_0, E_0 w_1) \\ &= \mathcal{M}_\phi R_\delta S_T E(w_0, w_1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(z(\cdot, 0)|_{\Omega_\delta}, \frac{\partial z}{\partial t}(\cdot, 0)|_{\Omega_\delta} \right) &= R_\delta \bar{S}_T \left(z(\cdot, T), \frac{\partial z}{\partial t}(\cdot, T) \right), \\ &= R_\delta \bar{S}_T \left(\phi w_\delta(\cdot, T), \phi \frac{\partial w_\delta}{\partial t}(\cdot, T) \right), \\ &= R_\delta \bar{S}_T \mathcal{M}_\phi R_\delta S_T E(w_0, w_1). \end{aligned}$$

Defina a função

$$\tilde{u} = w_\delta - z \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}).$$

Observe que a função \tilde{u} satisfaz o problema de Cauchy

$$L\tilde{u} = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \quad (5.19)$$

$$\tilde{u}(\cdot, 0) = E_1 w_0 - z(\cdot, 0) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(\cdot, 0) = E_0 w_1 - \frac{\partial z}{\partial t}(\cdot, 0) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \quad (5.21)$$

Além disso são válidas as seguintes condições;

$$\tilde{u}(x, T) = w_\delta(x, T) - \phi w_\delta(x, T) = (1 - \phi(x))w_\delta(x, T), \quad x \in \Omega$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x, T) = \frac{\partial w_\delta}{\partial t}(x, T) - \phi(x) \frac{\partial w_\delta}{\partial t}(x, T) = (1 - \phi(x)) \frac{\partial w_\delta}{\partial t}(x, T) \quad x \in \Omega.$$

Como $\phi \equiv 1$ em $\Omega_{\delta/2}$, obtemos

$$\tilde{u}(\cdot, T) = 0 = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(\cdot, T) \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Como estamos interessados em resolver o problema de valor inicial e fronteira com dados iniciais $(f, g) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, seria interessante se tivéssemos as igualdades

$$\tilde{u}(\cdot, 0) = f, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(\cdot, 0) = g \quad \text{em } \Omega.$$

Isto é equivalente a resolver, para a incógnita $(w_0, w_1) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ as equações

$$E_1 w_0 - z(\cdot, 0) = f \quad \text{em } \Omega,$$

$$E_0 w_1 - \frac{\partial z}{\partial t}(\cdot, 0) = g \quad \text{em } \Omega,$$

e que em termos dos operadores E , S_T , \bar{S}_T e \mathcal{M}_ϕ são resumidos na equação

$$E(w_0, w_1) - R_\delta \bar{S}_T \mathcal{M}_\phi R_\delta S_T E(w_0, w_1) = (f, g) \quad \text{em } \Omega. \quad (5.22)$$

Seja R o operador restrição ao conjunto Ω . Assim, $RE(w_0, w_1) = (w_0, w_1)$ e a equação (5.22) pode ser reescrita da forma

$$(I - R(R_\delta \bar{S}_T) \mathcal{M}_\phi (R_\delta S_T) E)(w_0, w_1) = (f, g), \quad (5.23)$$

onde I é o operador identidade em $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Denotamos o operador $R(R_\delta \bar{S}_T) \mathcal{M}_\phi (R_\delta S_T) E$ por K_T , assim a equação (5.23) se torna

$$(I - K_T)(w_0, w_1) = (f, g). \quad (5.24)$$

O operador $K_T : H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ é um operador linear limitado e compacto pois é uma composição de operadores lineares limitados e operadores compactos.

Agora procuremos T de modo que K_T seja uma contração, pois assim garantimos que $I - K_T$ é inversível, e então resolvemos (5.24). Observe que

$$\begin{aligned} \|K_T(w_0, w_1)\|_{H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 &= \left\| \left(z(\cdot, 0) \Big|_\Omega, \frac{\partial z}{\partial t}(\cdot, 0) \Big|_\Omega \right) \right\|_{H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2, \\ &\leq \left\| \left(z(\cdot, 0) \Big|_{\Omega_\delta}, \frac{\partial z}{\partial t}(\cdot, 0) \Big|_{\Omega_\delta} \right) \right\|_{H^1(\Omega_\delta) \times L^2(\Omega_\delta)}^2, \\ &= \|(R_\delta \bar{S}_T) \mathcal{M}_\phi (R_\delta S_T) E(w_0, w_1)\|_{H^1(\Omega_\delta) \times L^2(\Omega_\delta)}^2. \end{aligned}$$

Usando a estimativa (3.66) temos;

$$\|(R_\delta \bar{S}_T) \mathcal{M}_\phi (R_\delta S_T) E(w_0, w_1)\|_{H^1(\Omega_\delta) \times L^2(\Omega_\delta)}^2 \leq \frac{K'}{T^N} \|\mathcal{M}_\phi (R_\delta S_T) E(w_0, w_1)\|_{H^1(\Omega_\delta) \times L^2(\Omega_\delta)}^2$$

para $T > \tilde{T}_0$.

Agora, $\|\mathcal{M}_\phi(R_\delta S_T)E(w_0, w_1)\|_{H^1(\Omega_\delta) \times L^2(\Omega_\delta)}^2 \leq \alpha \|(R_\delta S_T)E(w_0, w_1)\|_{H^1(\Omega_\delta) \times L^2(\Omega_\delta)}^2$, onde α é uma constante real positiva que depende apenas de ϕ . Assim,

$$\|K_T(w_0, w_1)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{\alpha K'}{T^N} \|(R_\delta S_T)E(w_0, w_1)\|_{H^1(\Omega_\delta) \times L^2(\Omega_\delta)}^2, \text{ para } T > \tilde{T}_0.$$

Usando a desigualdade (3.65) obtemos

$$\|(R_\delta S_T)E(w_0, w_1)\|_{H^1(\Omega_\delta) \times L^2(\Omega_\delta)}^2 \leq \frac{K'}{T^N} \|E(w_0, w_1)\|_{H^1(\Omega_\delta) \times L^2(\Omega_\delta)}^2, \text{ para } T > \tilde{T}_0.$$

Assim,

$$\|K_T(w_0, w_1)\|_{H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{\alpha K' K'}{T^N T^N} \|E(w_0, w_1)\|_{H^1(\Omega_\delta) \times L^2(\Omega_\delta)}^2.$$

Como o operador E é limitado obtemos

$$\|K_T(w_0, w_1)\|_{H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{Const.}{T^{2N}} \|(w_0, w_1)\|_{H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2,$$

para todo $(w_0, w_1) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $T > \tilde{T}_0$, e alguma constante $Const. > 0$. Daí

$$\|K_T\| = \sup_{\substack{(w_0, w_1) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ f \neq 0, g \neq 0}} \frac{\|K_T(w_0, w_1)\|_{H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}}{\|(w_0, w_1)\|_{H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}} \leq \frac{\sqrt{Const.}}{T^N}.$$

Este é o ponto em que fixamos um valor para $T > \tilde{T}_0$ de tal forma que $\frac{\sqrt{Const.}}{T^N} < 1$. Seja $T > \tilde{T}_0$ fixado de modo que K_T é contração. Seja (w_0, w_1) a solução da equação (5.24). Levamos tal solução (w_0, w_1) no início desta demonstração e construímos w_δ e z . Da construção vemos que as funções

$$E_1 w_0 - z(\cdot, 0) \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

$$E_0 w_1 - \frac{\partial z}{\partial t}(\cdot, 0) \in L^2(\mathbb{R}^N),$$

são, respectivamente, extensões de f e g , de Ω para \mathbb{R}^N . Mais ainda, possuem suporte compacto que inclui Ω em seu interior. Usando tais extensões como dados iniciais resolvemos o problema de Cauchy (5.19)-(5.21) e observamos que sua única solução \tilde{u} satisfaz $\tilde{u}(\cdot, T) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(\cdot, T) = 0$ em Ω . De acordo com o teorema 5.1.1, definindo

$$u = \tilde{u}|_{\Omega \times [0, T]} \quad \text{e} \quad h = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu},$$

vemos que u e h satisfazem o problema misto (5.9)-(5.12), além disso, é válida a condição $u(\cdot, T) = 0 = \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, T)$ em Ω . \square

5.3 Controlabilidade em tempo mínimo

No teorema 5.2.1 provamos a existência de um número real $T > 0$ que resolve o problema de controle. No entanto, não podemos precisar quão grande é T . Desta forma, nosso objetivo de agora em diante é mostrar que o tempo de controle T para o sistema (5.9)-(5.12) pode ser obtido próximo ao valor do diâmetro de Ω .

Teorema 5.3.1 *Seja $T_{min} > d(\Omega)$ dado arbitrariamente. Para cada estado inicial $(f, g) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, existe uma função controle $h \in L^2(\Gamma \times]0, T_{min}[)$ de forma que a solução $u \in H^1(\Omega \times]0, T_{min}[)$ do problema (5.9)-(5.12) satisfaz*

$$u(\cdot, T_{min}) = \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, T_{min}) = 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Demonstração: Usamos aqui a mesma notação e os mesmos operadores do Teorema 5.2.1. Na demonstração do teorema 5.2.1 foi visto que para obter a controlabilidade basta resolver a equação

$$(I - K_T)(w_0, w_1) = (f, g)$$

em $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Porém, resolver a equação acima é equivalente a mostrar a existência do operador inverso $(I - K_T)^{-1}$ em $B(H^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$. Como vimos, isto é possível para T suficientemente grande.

Agora fixamos T_0 tal que $d(\Omega) < T_0 < T_{min}$ e escolhemos $\delta > 0$ de modo que $T_0 > \text{diam}(\Omega_\delta)$. No Teorema 4.2.1 foi mostrado que a família de operadores lineares limitados compactos $\{S_T\}_{T \geq T_0}$ em $B(H^1(\Omega_\delta) \times L^2(\Omega_\delta))$ se estende de forma analítica a uma família de operadores lineares compactos $\{S_\zeta\}_{\zeta \in \Sigma_0}$, onde $\Sigma_0 = \{\zeta = T_0 + z; |arg z| \leq \frac{\pi}{4}\}$. Vimos também que a analiticidade da família $\{S_\zeta\}_{\zeta \in \Sigma_0}$ implica a analiticidade da família de operadores compactos $\{\bar{S}_\zeta\}_{\zeta \in \Sigma_0}$ neste mesmo setor. Como $K_T = R(R_\delta \bar{S}_T) \mathcal{M}_\phi(R_\delta S_T) E$ concluímos que a família de operadores lineares compactos $\{K_T\}_{T \geq T_0}$ se estende analiticamente a uma família de operadores lineares compactos $\{K_\zeta\}_{\zeta \in \Sigma_0}$.

Garantida a analiticidade da família de operadores lineares compactos $\{K_\zeta\}_{\zeta \in \Sigma_0}$ podemos usar o teorema 1.1.2 (de F. V. Atkinson) para mostrar que podemos reduzir o tempo de controle para valor $T_{min} > d(\Omega)$ dado no enunciado. De fato, como foi mostrado no teorema 5.2.1 a existência de um valor $T > \tilde{T}_0$ tal que $I - K_T$ é inversível, concluímos

que existem valores reais $T = \zeta \in \Sigma_0$ para os quais 1 não é autovalor do operador K_ζ . Assim, é válida a outra alternativa do teorema 1.1.2, isto é, em cada compacto contido em Σ_0 existe apenas um número finito de ζ 's para os quais 1 é autovalor de K_ζ . Isto é, o operador $(I - K_\zeta)^{-1}$ deixa de existir em apenas um número finito de elementos de cada compacto contido no setor Σ_0 .

Tome $T_1 \geq T$. O compacto $[T_0, T_1]$ está contido no setor Σ_0 e $T_{min} \in]T_0, T_1[$. Do teorema 1.1.2 concluímos que existe $(I - K_{\tilde{T}})^{-1}$ para $T_0 \leq \tilde{T} \leq T_1$, exceto possivelmente para um número finito de \tilde{T} 's. Escolha um $\tilde{T} \in [T_0, T_1]$ com $T_0 < \tilde{T} < T_{min}$, tal que $(I - K_{\tilde{T}})^{-1}$ exista.

Para este valor \tilde{T} escolhido temos a controlabilidade exata desejada, conforme o teorema 5.2.1. Como $\tilde{T} < T_{min}$, temos também controlabilidade em T_{min} .

□

Referências Bibliográficas

- [1] Adams, R. A.; Fournier J. J. F. **Sobolev spaces**. 2 ed. London: Elsevier Science Ltd, 2003.
- [2] Atkinson, F. V. A spectral problem for completely continuous operator. **Acta Mathematica Hungarica**, Budapest, v. 3, p. 53-60, 1952.
- [3] Bardos, C.; Lebeau, G.; Rauch, J. Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary. **SIAM Journal of Control and Optimization**, Philadelphia, v. 30, n.5, p. 1024-1065, 1992.
- [4] Bastos, W. D.; Spezamiglio, A. A note on the controllability for the wave equation on nonsmooth plane domains. **Systems and Control Letters**, Amsterdam, v. 55, p. 17-20, 2006.
- [5] Bastos, W. D.; Spezamiglio, A.; Raposo, C. A. On exact boundary controllability for linearly coupled wave equations. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, Amsterdam, v. 381, p. 557-564, 2011.
- [6] Brézis, H. **Análisis funcional teoria y aplicaciones**. Madrid: Alianza Editora, 1984.
- [7] Dautray, R.; Lions J-L. **Mathematical analysis and numerical methods for science and technology**. vol. 2. Berlin: Springer-Verlag, 1988.

-
- [8] Folland, G. B. **Fourier analysis and its applications**. California: Pacific Grove, 1992.
- [9] Folland, G. B., **Introduction to partial differential equation**, 2 ed. Princeton: Princeton University Press, 1995.
- [10] Fritz, J. **Partial differential equations**. 4 ed. New York: Springer-Verlag, 1981.
- [11] Gradshteyn, I. S.; Ryzhik, I. M. **Table of integrals, series and products**, 6 ed. San Diego: Academic Press, 2000.
- [12] Grisvard, P. Contrôlabilité exacte des solutions de l'équation des ondes en présence de singularités. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, Amsterdam, v. 68, p. 215-259, 1989.
- [13] Hörmander, L. Remarks on the Klein-Gordon equation. **Journées Équations aux Dérivées Partielles**, p. 1-9, 1987.
- [14] Kato, T. **Perturbation theory for linear operators**. Berlin: Springer-Verlag, 1976.
- [15] Kreyszig, E. **Introductory functional analysis with applications**. New York: John Wiley & Sons, 1978.
- [16] Lagnese, J. Boundary value control of a class of hyperbolic equations in a general region. **SIAM Journal of Control and Optimization**, Philadelphia, v. 15, p. 973-983, 1977.
- [17] Laydzhenskaya, O. A. **The boundary value problems of mathematical physics**. New York: Springer-Verlag, 1985.
- [18] Lions, J. L., Controlabilité exacte des systèmes distribués, **Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris**, Amistetdam, v. 302, p. 471-475, 1986.

- [19] Morawetz, C. S. Decay for solutions of the exterior problem for the wave equation. **Communication on Pure and Applied Mathematics**, Hoboken, v. 28, p. 229-264, 1975.
- [20] Morawetz, C. S.; Strauss, W. Decay and scattering of solutions of a nonlinear relativistic wave equation. **Communication on Pure and Applied Mathematics**, Hoboken, v. 25, p. 1-31, 1972.
- [21] Nečas, J. **Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques**. Paris: Masson et *C^{ie}* Éditeurs, 1967.
- [22] Nunes, R. S. O.; Bastos, W. D. Energy decay for the linear Klein-Gordon equation and boundary control. (**artigo submetido**)
- [23] Nunes, R. S. O.; Bastos, W. D. Sobre comportamento assintótico e controle exato para a equação de Klein-Gordon em domínios limitados. **VI ENAMA-Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações**, Aracaju, 2012.
- [24] Russell, D. L. A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equation. **Studies in Applied Mathematics**, Malden, v. 52, p. 189-211, 1973.
- [25] Soriano, J. A. Controlabilidad exacta de la ecuación del telégrafo generalizada. **Revista Matemática de la Universidade Complutense de Madrid**, Madrid, v. 8, n. 2, p. 459-493, 1995.
- [26] Tataru, D. On regularity of the boundary traces for the wave. **Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze. Serie V**, Pisa, v. 26, n. 4, p. 185-206, 1998.
- [27] Trèves, F. **A basic linear partial differential equations**. New York: Dover Publications, 2003.

-
- [28] Watson, G. N. **A treatise on the theory of Bessel function.** 2 ed.
Cambridge: Cambridge university Press, 1966.