



Universidade Estadual Paulista

Câmpus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

**O Teorema de Lefschetz-Hopf
e sua relação com outros teoremas
clássicos da topologia**

Ana Paula Tremura Galves

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Maria Gorete Carreira Andrade

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências,
Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual
Paulista, Câmpus São José do Rio Preto, como parte
dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em
Matemática

São José do Rio Preto

Fevereiro - 2009

ANA PAULA TREMURA GALVES

O Teorema de Lefschetz-Hopf e sua relação com outros
teoremas clássicos da topologia

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Topologia Algébrica junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, “Julio de Mesquita Filho”, Câmpus São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Dr^a. Maria Gorete Carreira Andrade
Professora Doutora
UNESP - São José do Rio Preto
Orientadora

Prof^a. Dr^a. Denise de Mattos
Professora Doutora
ICMC - USP - São Carlos

Prof^a. Dr^a. Ermínia de Lourdes Campello Fanti
Professora Doutora
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 27 de fevereiro de 2009

Aos meus pais,
José Rubens e Carlota,
dedico.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, à Deus por me conceder a graça de concluir mais esta etapa, por ter me fortalecido nos momentos difíceis e pelas pessoas que colocou no meu caminho.

À Prof^a Dr^a Maria Gorete Carreira Andrade pela agradável convivência desde os tempos de PET, pelos valiosos conhecimentos transmitidos e, principalmente, pela importante ajuda para tornar este trabalho realidade.

Aos meus pais José Rubens e Carlota que sempre estiveram ao meu lado me apoiando e me incentivando em todas as minhas decisões.

Ao meu irmão José Ricardo, pela amizade e momentos de descontração.

À minha avó Palmira e à Zenaide (*in memoriam*) pelas orações.

Ao Vinícius, pelo carinho e pela grande ajuda nas digitações do trabalho.

Aos meus amigos de graduação, PET e pós-graduação, em especial à Ana Carolina, Marisa, Neila, Oyran, Rafael, Rodiak e Ruikson por tornarem horas tão difíceis de estudos, em momentos de pura alegria e descontração, pela disponibilidade em ajudar sempre, e pela amizade que construímos.

À banca examinadora: Prof^a Dr^a Denise de Mattos pela disponibilidade, e à Prof^a Dr^a Ermínia de Lourdes Campello Fantí também pela disponibilidade e pela convivência nesses meus anos de IBILCE.

Ao Prof. Dr. Adalberto Spezamiglio pela colaboração e convivência desde os tempos de PET, e ao Prof. Dr. Cláudio Aguinaldo Buzzi pela prestividade em ajudar sempre que necessário.

Aos demais professores do Departamento de Matemática do IBILCE, pela formação acadêmica.

À CAPES pelo apoio financeiro.

À todos que colaboraram, direta ou indiretamente, para a concretização deste sonho.

*“A alegria é o fogo que mantém aquecido o
nosso objetivo, e acesa a nossa inteligência.”*

(Helen Keller)

Resumo

Em Topologia, mais especificamente em Topologia Algébrica, temos alguns resultados clássicos que de alguma forma estão relacionados. No desenvolvimento deste trabalho, estudamos alguns desses resultados, a saber: Teorema de Lefschetz-Hopf, Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz, Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, Teorema da Curva de Jordan e o Teorema Clássico de Borsuk-Ulam. Além disso, tivemos como objetivo principal mostrar relações existentes entre esses teoremas a partir do Teorema de Lefschetz-Hopf.

Palavras chave: pontos fixos, grau, índice de pontos fixos, Lefschetz-Hopf, Borsuk-Ulam.

Abstract

In Topology, more specifically in Algebraic Topology, we have some classical results that are in some way related. In developing this work, we studied some of these results, namely the Lefschetz-Hopf Theorem, the Lefschetz Fixed Point Theorem, the Brouwer Fixed Point Theorem, the Jordan Curve Theorem and the Classic Borsuk-Ulam Theorem. Moreover, our main objective was to show relationships among those theorems by using Lefschetz-Hopf Theorem.

Keywords: fixed points, degree, fixed point index, Lefschetz-Hopf, Borsuk-Ulam.

Sumário

Introdução	9
1 Preliminares	12
1.1 Ações de Grupos	12
1.2 Sequências Exatas	13
1.3 Espaços de Recobrimento	14
1.4 Complexos Simpliciais	18
1.4.1 Simplexos	18
1.4.2 Complexos Simpliciais no \mathbb{R}^n	20
1.4.3 Complexos Simpliciais Geral	23
1.4.4 Complexos Simpliciais Abstratos	24
1.5 Produto Tensorial	26
1.6 Grupos de Homologia e Cohomologia	27
1.6.1 Grupos de Homologia e Cohomologia Simplicial	27
1.6.2 Grupos de Homologia e Cohomologia Singular	32
1.7 Produto Cup	35
1.8 Produto Cap	37
1.8.1 Relação com o Índice de Kronecker	38
1.9 Variedades	39
1.10 CW-complexos	40
2 O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e sua relação com o Teorema da Curva de Jordan	44
2.1 O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer	44
2.2 O Teorema da Curva de Jordan via o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer	47

3	O Número de Lefschetz e o Teorema de Lefschetz-Hopf	56
3.1	Grau de uma aplicação	57
3.1.1	Definição do grau de uma aplicação	57
3.1.2	Propriedades do grau	58
3.2	Índice de Pontos Fixos	60
3.2.1	Propriedades do Índice de Pontos Fixos	61
3.2.2	Espaços ENR e índice de pontos fixos para espaços ENR	63
3.3	Número de Lefschetz e sequências exatas	66
3.4	O Número de Lefschetz na categoria dos CW-complexos	69
3.5	Caracterização do Número de Lefschetz	72
3.6	O Teorema de Lefschetz-Hopf e algumas consequências	77
4	O Teorema de Borsuk-Ulam	83
4.1	Caso Particular	83
4.2	Caso Geral	88
4.3	Borsuk-Ulam implica Brouwer: uma construção direta	97
4.3.1	A Idéia	98
4.3.2	A Construção	99
	Referências Bibliográficas	103
	Índice Remissivo	105

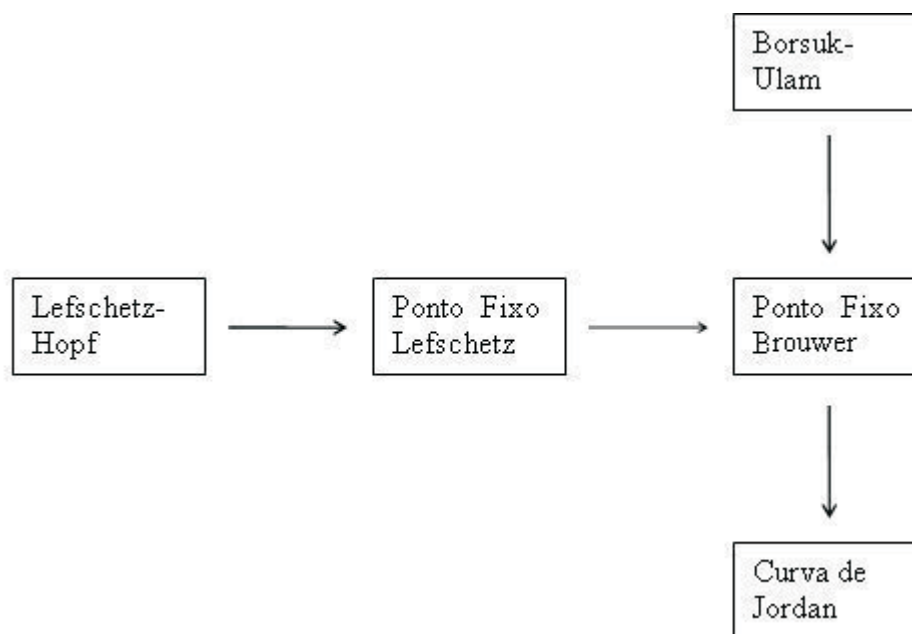
Introdução

A noção de ponto fixo desempenha um papel muito importante em vários ramos da matemática e suas aplicações. Informações sobre a existência de tais pontos geralmente são um argumento crucial na resolução de um problema. Em particular, métodos topológicos da teoria de pontos fixos, apresentaram um foco crescente de interesse durante as últimas décadas.

Tais métodos topológicos são divididos, a grosso modo, em dois tipos. O primeiro deles inclui resultados tais como o Princípio da Contração de Banach (em Análise Funcional), no qual as hipóteses no espaço podem ser muito suaves porém, uma pequena mudança na aplicação pode remover o ponto fixo. O segundo tipo, por outro lado, envolve resultados tais como o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz e Teorema de Lefschetz-Hopf, os quais apresentam a existência de um ponto fixo não somente para uma aplicação dada, como também para qualquer de suas deformações.

O presente trabalho trata do estudo da teoria de pontos fixos, do segundo tipo, baseada no Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz e no Teorema de Lefschetz-Hopf.

Teremos como objetivo principal mostrar que, de maneira direta ou indireta, o Teorema de Lefschetz-Hopf está relacionado com outros quatro Teoremas Clássicos da Topologia, mais especificamente, da Topologia Algébrica. São eles: o Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz, o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, o Teorema de Borsuk-Ulam e o Teorema da Curva de Jordan. As relações estudadas são apresentadas no diagrama seguinte:



A seguir relatamos, sucintamente, o objetivo de estudo de cada capítulo.

No capítulo 1, apresentamos alguns pré-requisitos essenciais para o entendimento do trabalho, como por exemplo, ações de grupos, espaços de recobrimento, complexos simpliciais, CW-complexos, grupos de homologia e cohomologia, produto cup, produto cap e sua relação com o índice de Kronecker, variedades e dualidade de Poincaré. As referências principais para este capítulo são [4], [11] e [12].

No capítulo 2, mostramos um dos teoremas fundamentais na teoria de pontos fixos, conhecido como Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Tal teorema afirma que toda aplicação contínua do n -disco unitário D^n nele mesmo, possui um ponto fixo. Na seção 2.3, vemos o famoso Teorema da Curva de Jordan, o qual afirma que uma curva de Jordan, definida no plano como um subconjunto homeomorfo ao círculo, divide o plano em exatamente duas componentes, uma limitada e uma ilimitada. Nesta seção fornecemos uma prova mais construtiva do Teorema da Curva de Jordan utilizando o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, baseada no artigo de R. Maehara ([10]). As principais referências deste capítulo são [4], [10], [11], [13] e [12].

O capítulo 3 é dedicado à teoria de pontos fixos mais propriamente dita. Nas três primeiras seções, definimos os conceitos de grau de uma aplicação, índice de pontos fixos e número de Lefschetz, os quais são de grande importância para o nosso objetivo principal que é demonstrar o Teorema de Lefschetz-Hopf. Na seção 3.6, usamos a caracterização

do número de Lefschetz reduzido dada pelo Teorema 3.5.1 para provar o Teorema de Lefschetz-Hopf de uma maneira bastante natural, mostrando que o índice de pontos fixos satisfaz os axiomas do Teorema 3.5.1. Como consequência do Teorema de Lefschetz-Hopf temos o Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz, o qual mostramos estar relacionado com o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Como referências principais para este capítulo temos [1], [3], [7], [9] e [19].

O capítulo 4 apresenta um teorema devido a K. Borsuk e S. Ulam, o qual afirma não existir aplicação contínua de S^n em S^{n-1} que preserve pontos antipodais. A prova deste teorema será feita tanto para o caso particular, com $n = 1$ ou $n = 2$, quanto para o caso geral. Os dois casos serão considerados, já que o primeiro deles possui menos pré-requisitos e envolve conceitos mais simples. Apresentamos também algumas consequências interessantes do teorema. Na seção 4.3, vemos uma prova de que o Teorema de Borsuk-Ulam implica o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, baseada no artigo de E. F. Su ([14]), na qual a existência de pontos antipodais em um teorema produz o ponto fixo afirmado no outro. As principais referências para este capítulo são [4], [12], [14] e [15].

Preliminares

Neste capítulo relatamos alguns resultados de fundamental importância para o desenvolvimento dos capítulos posteriores.

1.1 Ações de Grupos

Definição 1.1.1 *Seja G um grupo finito. Uma G -ação em um espaço topológico X é uma aplicação contínua*

$$\begin{aligned}\phi : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longrightarrow \phi(g, x) := gx\end{aligned}$$

tal que:

- (i) $ex = x$, para todo $x \in X$, com $e \in G$ denotando a unidade;
- (ii) $g_1(g_2x) = (g_1g_2)(x)$ para quaisquer $g_1, g_2 \in G$ e $x \in X$.

Nesse caso X é chamado G -espaço.

Observação 1.1.1 *Na definição acima o grupo G é munido da topologia discreta e $G \times X$ é munido da topologia produto.*

Uma aplicação $\varphi : X \rightarrow Y$ entre dois G -espaços é dita uma G -aplicação (ou uma aplicação G -equivariante) se para quaisquer $g \in G$ e $x \in X$,

$$\varphi(gx) = g\varphi(x).$$

Definição 1.1.2 *Seja X um G -espaço. Dizemos que G atua livremente em X se, para*

quaisquer dois elementos $g, h \in G$ e para qualquer $x \in X$, tem-se que $g.x \neq h.x$, ou equivalentemente, se dado $g \in G$ e qualquer $x \in X$, com $g.x = x$, tem-se $g = e$.

Definição 1.1.3 *Seja X um G -espaço. Dizemos que a ação de G em X é **propriamente descontínua** se, para qualquer $x \in X$, existe uma vizinhança U de x tal que $g \cdot U \cap U = \emptyset$, para qualquer $g \in G$, com $g \neq e$, em que $g.U = \{g.u \mid u \in U\}$. Nesse caso dizemos que X é **propriamente descontínuo**.*

Observação 1.1.2 *Se G atua de maneira propriamente descontínua em X , então a ação de G em X é livre.*

Seja X um G -espaço. Dois elementos $x, y \in X$ são chamados **G -equivalentes** se, existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$. Essa relação é uma relação de equivalência e o conjunto de todos os $g \cdot x$, com $g \in G$, denotado por $G \cdot x$, é a classe de equivalência determinada por $x \in X$. Tal conjunto $G \cdot x$ é chamado **órbita** de x .

Definição 1.1.4 *O conjunto $\frac{X}{G}$ é constituído por todos os $G \cdot x$, em que $x \in X$. Este conjunto é munido da topologia quociente, ou seja, da topologia mais fina tal que a projeção $\pi : X \rightarrow \frac{X}{G}$ seja contínua. Esta projeção é definida da seguinte forma, $\pi(x) = G \cdot x$.*

1.2 Sequências Exatas

Definição 1.2.1 *Considere uma sequência (finita ou infinita) de grupos e homomorfismos*

$$\dots \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\phi_1} A_2 \xrightarrow{\phi_2} A_3 \longrightarrow \dots$$

*Tal sequência é dita ser **exata** em A_2 se*

$$\text{Im}\phi_1 = \text{Ker}\phi_2.$$

*Se ela for exata em qualquer grupo A_k , dizemos simplesmente que ela é uma **sequência exata**.*

Listaremos abaixo algumas propriedades com relação a sequência exatas.

- (1) $A_1 \xrightarrow{\phi} A_2 \longrightarrow 0$ é exata se, e somente se, ϕ é um epimorfismo.
- (2) $0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\phi} A_2$ é exata se, e somente se, ϕ é um monomorfismo.

(3) Suponha que a sequência

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\phi} A_2 \xrightarrow{\psi} A_3 \longrightarrow 0$$

é exata; tal sequência é chamada **sequência exata curta**. Assim, $A_2/\phi(A_1)$ é isomorfo a A_3 ; o isomorfismo é induzido por ψ . Por outro lado, se $\psi : A \rightarrow B$ é um epimorfismo com kernel K , então a sequência

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

é exata, na qual i é a aplicação inclusão.

(4) Suponha que a sequência

$$A_1 \xrightarrow{\alpha} A_2 \xrightarrow{\phi} A_3 \xrightarrow{\beta} A_4$$

é exata. Dessa forma, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) α é um epimorfismo.
- (ii) β é um monomorfismo.
- (iii) ϕ é o homomorfismo nulo.

Definição 1.2.2 *Uma **sequência exata longa** é uma sequência exata cujo conjunto índice é o conjunto dos inteiros, ou seja, é uma sequência que é infinita em ambas as direções. Ela pode começar ou terminar com uma série infinita de grupos triviais.*

1.3 Espaços de Recobrimento

Nesta seção, consideraremos conhecidos os conceitos de Homotopia e Grupo Fundamental. Para maiores detalhes ver [4].

Para definirmos espaços de recobrimento assumiremos que os espaços topológicos utilizados são conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos (e portanto, conexo).

Definição 1.3.1 *Seja X um espaço topológico. Um **espaço de recobrimento** de X é um par (\tilde{X}, p) , com \tilde{X} um espaço de recobrimento e $p : \tilde{X} \rightarrow X$ uma aplicação contínua tal que:*

- (1) p é sobrejetora;

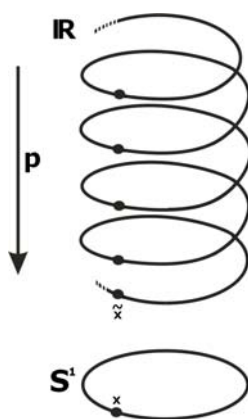
(2) todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança U aberta, conexa por caminhos de modo que a restrição de p a cada componente conexa \tilde{U} de $p^{-1}(U)$ é um homeomorfismo.

Observação 1.3.1 Denominamos a aplicação p e a vizinhança U de **projeção de recobrimento** e **vizinhança elementar**, respectivamente. Ainda, o conjunto $p^{-1}(x)$ é denominado **fibra** no ponto $x \in X$.

Exemplo 1.3.1 Denotemos o plano projetivo por P . Seja $p : S^2 \rightarrow P$ uma aplicação natural a qual identifica cada par de pontos antipodais diametralmente opostos. Para mostrar a existência de vizinhanças elementares, seja w um ponto em P o qual é a imagem de dois pontos antipodais x e $-x$. Seja O um conjunto aberto e conexo por caminhos em S^2 contendo x tal que O não contém pares de pontos antipodais (um pequeno disco centrado em x , por exemplo). Assim $p(O)$ é um conjunto aberto contendo w , e $p^{-1}p(O)$ possui componentes conexas por caminhos O e o conjunto dos pontos antipodais aos pontos em O . Observe que p aplica cada uma dessas componentes conexas por caminhos homeomorficamente sobre $p(O)$; dessa forma, $p(O)$ é uma vizinhança elementar. Logo (S^2, p) é um espaço de recobrimento de P .

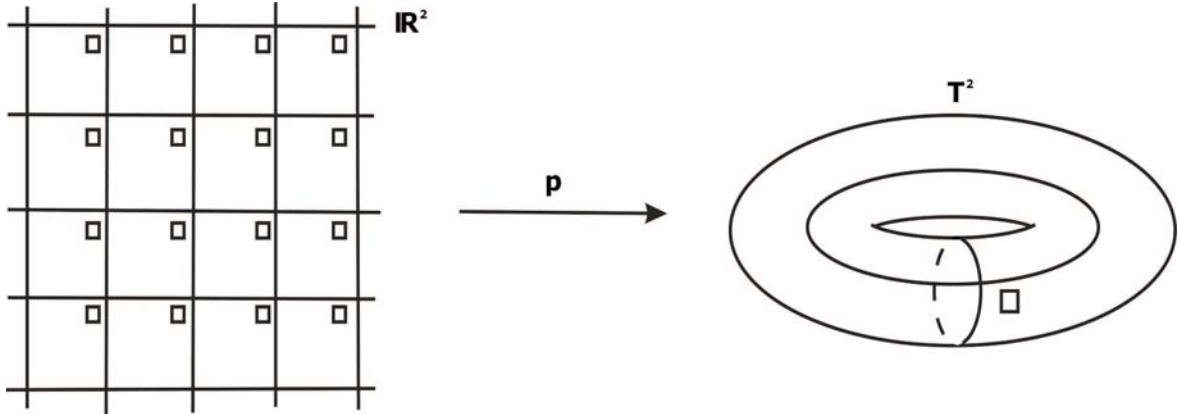
Da mesma forma, considerando a esfera S^n com a relação de equivalência que identifica pontos antipodais, o espaço quociente $P^n = S^n / \sim$ é chamado de **espaço projetivo (real)** e a projeção quociente $p : S^n \rightarrow P^n$ é uma aplicação de recobrimento.

Exemplo 1.3.2 Seja $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por $p(t) = (e^{it}, e^{-it}), t \in \mathbb{R}$. Assim, (\mathbb{R}, p) é um recobrimento de S^1 . Além disso, todo subintervalo aberto de S^1 pode ser visto como uma vizinhança elementar.



Observação 1.3.2 *Sejam (\tilde{X}, p) e (\tilde{Y}, q) recobrimientos de X e Y , respectivamente. Dessa forma, $(\tilde{X} \times \tilde{Y}, p \times q)$ é recobrimento de $X \times Y$, sendo a aplicação $p \times q$ definida como $(p \times q)(x, y) = (p(x), q(y))$. Agora, se U e V são vizinhanças elementares de $x \in X$ e $y \in Y$ então $U \times V$ é uma vizinhança elementar de $(x, y) \in X \times Y$.*

Exemplo 1.3.3 *Como o toro $T^2 = S^1 \times S^1$, segue que seu recobrimento é $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.*



Definição 1.3.2 *Seja (\tilde{X}, p) um espaço de recobrimento de X , e $\alpha : I \rightarrow X$ um caminho. Um caminho $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X}$ tal que $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ é chamado **levantamento de caminho** (ou simplesmente **levantamento**) de α . Se $F : I \times I \rightarrow X$ é uma homotopia, então a homotopia $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \tilde{X}$, na qual $p \circ \tilde{F} = F$, é chamada **levantamento de homotopia** (ou simplesmente **levantamento**) de F .*

Teorema 1.3.1 (Propriedade do Levantamento de Caminho) *Seja (\tilde{X}, p) um espaço de recobrimento de X e $\alpha : I \rightarrow X$ um caminho em X começando no ponto x_0 . Se \tilde{x}_0 é um ponto em \tilde{X} com $p(\tilde{x}_0) = x_0$, então existe um único levantamento de caminho de α até \tilde{x}_0 .*

Demonstração. [4], V.5.3. ■

Teorema 1.3.2 (Propriedade do Levantamento de Homotopia) *Seja (\tilde{X}, p) um espaço de recobrimento de X e $F : I \times I \rightarrow X$ uma homotopia tal que $F(0, 0) = x_0$. Se \tilde{x}_0 é um ponto de \tilde{X} com $p(\tilde{x}_0) = x_0$, então existe um único levantamento de homotopia $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \tilde{X}$ tal que $\tilde{F}(0, 0) = \tilde{x}_0$.*

Demonstração. [4], V.5.4. ■

A propriedade do Levantamento de Homotopia possui importantes aplicações. Uma das mais importantes é o seguinte critério para determinar quando dois caminhos em um espaço de recobrimento são equivalentes, isto é, quando dois caminhos $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ são homotópicos relativamente a um conjunto $\{x_0, x_1\}$ com $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ e $\alpha(1) = \beta(1) = x_1$.

Teorema 1.3.3 (Teorema da Monodromia) *Seja (\tilde{X}, p) um espaço de recobrimento de X , e suponha que $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ sejam caminhos em \tilde{X} com ponto inicial comum \tilde{x}_0 . Assim $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ são equivalentes se, e somente se, $p \circ \tilde{\alpha}$ e $p \circ \tilde{\beta}$ são caminhos equivalentes em X . Em particular, se $p \circ \tilde{\alpha}$ e $p \circ \tilde{\beta}$ são equivalentes então $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ devem possuir o mesmo ponto final.*

Demonstração. [4], V.5.5. ■

Proposição 1.3.1 *Seja (\tilde{X}, p) um espaço de recobrimento de X , então os conjuntos $p^{-1}(x)$ para todo $x \in X$ possuem a mesma cardinalidade (número de elementos).*

Demonstração. [4], V.5.6. ■

Definição 1.3.3 *Se (\tilde{X}, p) é um espaço de recobrimento de X , o número cardinal comum dos conjuntos $p^{-1}(x)$, $x \in X$, é chamado de **número de folhas do recobrimento**. Dizemos que o recobrimento é de n -folhas se $\#p^{-1}(x) = n$ ($\#$ denota a cardinalidade do conjunto) e, de infinitas folhas se $\#p^{-1}(x) = \infty$.*

Proposição 1.3.2 *Se (\tilde{X}, p) é um espaço de recobrimento de X , então $p : \tilde{X} \rightarrow X$ é um homeomorfismo local.*

Demonstração. [11], V.2. ■

Definição 1.3.4 *Seja (\tilde{X}, p) um recobrimento de X . Um homeomorfismo $\varphi : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ é dito **transformação de recobrimento** se $p \circ \varphi = p$. Ainda, o conjunto de todas as transformações de recobrimento (denotado por $A(\tilde{X}, p)$) é um grupo em relação à composição.*

Proposição 1.3.3 *Se (\tilde{X}, p) é um recobrimento de X , com $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ e $x_0 = p(\tilde{x}_0)$, então o homomorfismo induzido $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ é um monomorfismo.*

Demonstração. [11], V.4.1. ■

Definição 1.3.5 Um recobrimento (\tilde{X}, p) de X é dito **recobrimento universal** de X se \tilde{X} é simplesmente conexo, isto é, se \tilde{X} é conexo por caminhos e $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = 0$, para todo $\tilde{x} \in \tilde{X}$.

Definição 1.3.6 Um recobrimento (\tilde{X}, p) é dito **recobrimento regular** se $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ é um subgrupo normal de $\pi_1(X, x)$. Ainda, esta condição independe da escolha do ponto base $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$.

Exemplo 1.3.4 Todo recobrimento universal é regular.

Proposição 1.3.4 Se (\tilde{X}, p) é um recobrimento regular de X , então $A(\tilde{X}, p)$ é isomorfo ao grupo quociente $\pi_1(X, x)/p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$, para todo $x \in X$ e todo $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$.

Demonstração. [11], V.7.4. ■

Observação 1.3.3 Em particular, se o recobrimento é universal, $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) \simeq \{1\}$ e portanto, $A(\tilde{X}, p) \simeq \pi_1(X, x)$ e, a ordem de $\pi_1(X)$ é igual ao número de folhas do recobrimento (\tilde{X}, p) , ou seja, $\#p^{-1}(x) = \#\pi_1(X)$.

Proposição 1.3.5 Se X é um espaço topológico, G é um grupo propriamente descontínuo de homeomorfismos de X e $q : X \rightarrow X/G$ é a aplicação quociente sobre o espaço de órbitas de G , então (X, q) é um recobrimento regular de X/G , com $G = A(X, q)$.

Demonstração. [11], V.8.2. ■

1.4 Complexos Simpliciais

1.4.1 Simplexos

Para cada inteiro positivo n , iremos considerar o espaço euclidiano

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : \text{cada } x_i \text{ é um número real}\}$$

como um espaço vetorial sobre \mathbb{R} e usaremos algumas idéias básicas da teoria dos espaços vetoriais.

Dado um conjunto $\{a_0, \dots, a_k\}$ de pontos de \mathbb{R}^n , dizemos que tal conjunto é **geometricamente independente** se para quaisquer escalares (reais) t_i , as equações

$$\sum_{i=0}^k t_i = 0 \text{ e } \sum_{i=0}^k t_i a_i = 0$$

implicam que $t_0 = t_1 = \dots = t_k = 0$.

Também podemos mostrar que $\{a_0, \dots, a_k\}$ é geometricamente independente se, e somente se, os vetores $a_1 - a_0, \dots, a_k - a_0$ são linearmente independentes no sentido da Álgebra Linear usual. Dessa forma, dois pontos distintos em \mathbb{R}^n formam um conjunto geometricamente independente, assim como três pontos não colineares, quatro pontos não coplanares, e assim por diante, lembrando que conjuntos com um único ponto são sempre geometricamente independentes.

Definição 1.4.1 *Seja $\{a_0, \dots, a_k\}$ um conjunto geometricamente independente em \mathbb{R}^n . Definimos o **k-simplexo** σ gerado por a_0, \dots, a_k como sendo o conjunto de todos os pontos x de \mathbb{R}^n tais que*

$$x = \sum_{i=0}^k t_i a_i, \text{ no qual } \sum_{i=0}^k t_i = 1$$

e $t_i \geq 0$ para todo i . Os números t_i são unicamente determinados por x ; eles são chamados de **coordenadas baricêntricas** do ponto x de σ com respeito a a_0, \dots, a_k .

Exemplo 1.4.1 *Em dimensões mais baixas podemos facilmente retratar um simplexo. Um 0-simplexo é um ponto. O 1-simplexo gerado por a_0 e a_1 consiste de todos os pontos da forma*

$$x = t a_0 + (1 - t) a_1$$

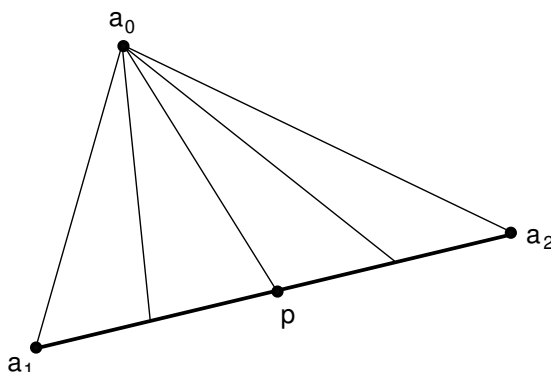
com $0 \leq t \leq 1$, o que representa o segmento de reta ligando a_0 e a_1 . Similarmente, o 2-simplexo σ gerado por a_0, a_1, a_2 representa um triângulo (interior e bordo) possuindo estes três pontos como vértices. Isso pode ser visto facilmente como segue: assumamos $x \neq a_0$. Dessa forma,

$$x = \sum_{i=0}^2 t_i a_i = t_0 a_0 + (1 - t_0) \cdot \left[\left(\frac{t_1}{\lambda} \right) a_1 + \left(\frac{t_2}{\lambda} \right) a_2 \right] = t_0 a_0 + t_1 a_1 + t_2 a_2,$$

com $\lambda = 1 - t_0$. A expressão entre colchetes representa um ponto p do segmento de reta

ligando a_1 e a_2 , já que $\frac{(t_1 + t_2)}{\lambda} = 1$ e $\frac{t_i}{\lambda} \geq 0$ para $i = 1, 2$.

Assim, x é um ponto do segmento de reta ligando a_0 e p . Por outro lado, qualquer ponto de tal segmento de reta está em σ . Logo segue que σ é igual a união de todos os segmentos de reta ligando a_0 a pontos de a_1a_2 , ou seja, σ é um triângulo.



Uma prova similar mostra que um 3-simplexo é um tetraedro.

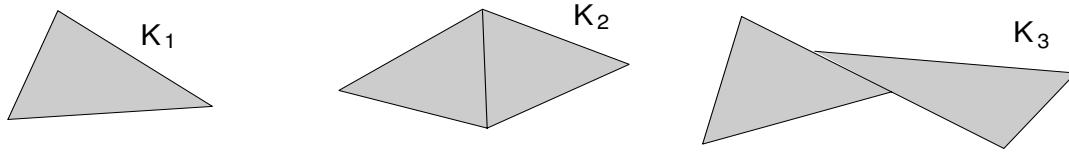
Os pontos a_0, \dots, a_k que geram σ são chamados **vértices**. O número k é a **dimensão** de σ . Qualquer simplexo gerado por um subconjunto de $\{a_0, \dots, a_k\}$ é chamado **face** de σ , o qual denotamos por $[[a_{n_1}, \dots, a_{n_r}]]$ com os índices n_i variando de 0 até k . Em particular, a face de σ gerada por a_1, \dots, a_k é chamada de **face oposta** a a_0 . As faces de σ diferentes do próprio σ são chamadas **faces próprias** de σ ; a união delas é chamada **bordo** de σ .

1.4.2 Complexos Simpliciais no \mathbb{R}^n

Definição 1.4.2 Um **complexo simplicial** K em \mathbb{R}^n é uma coleção de simplexos em \mathbb{R}^n tal que:

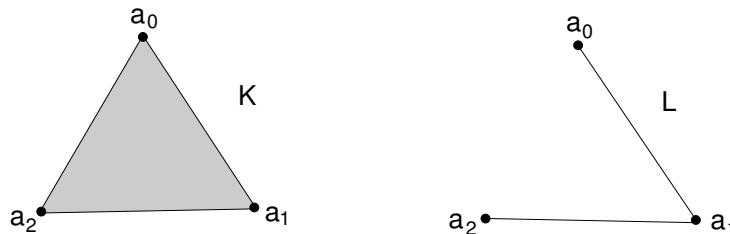
- (1) toda face de um simplexo de K está em K ;
- (2) a interseção de quaisquer dois simplexos de K é uma face de cada um deles.

Exemplo 1.4.2 A coleção K_1 consistindo de um 2-simplexo e suas faces, é um complexo simplicial. A coleção K_2 , consistindo de dois 2-simplexos com uma extremidade em comum, juntamente com suas faces, é um complexo simplicial. Já a coleção K_3 não é um complexo simplicial.



Definição 1.4.3 Seja K um complexo simplicial. Um subconjunto L de K é um **subcomplexo** de K se for um complexo simplicial tal que toda face de L é também face de K .

Exemplo 1.4.3 Seja $K = \{\sigma, [[a_0, a_1]], [[a_1, a_2]], [[a_0, a_2]], a_0, a_1, a_2\}$. Um subcomplexo de K pode ser $L = \{[[a_0, a_1]], [[a_1, a_2]], a_0, a_1, a_2\}$.



Definição 1.4.4 Um subcomplexo de K que contém todos os simplexes de K de dimensão no máximo p é chamado de **p -esqueleto** de K e é denotado por $K^{(p)}$.

Exemplo 1.4.4 Considerando $K = \{\sigma, [[a_0, a_1]], [[a_1, a_2]], [[a_0, a_2]], a_0, a_1, a_2\}$, o mesmo complexo simplicial do exemplo anterior, temos

$$K^{(0)} = \{a_0, a_1, a_2\}, \quad K^{(1)} = \{a_0, a_1, a_2, [[a_0, a_1]], [[a_1, a_2]], [[a_0, a_2]]\}, \quad K^{(2)} = K.$$

Definição 1.4.5 Seja $|K|$ o subconjunto de \mathbb{R}^n que é a união dos simplexes de K . Tomando cada simplexo com sua topologia usual como um subespaço de \mathbb{R}^n , iremos considerar um subconjunto A de $|K|$ como sendo fechado em $|K|$ se, e somente se, $A \cap \sigma$ é fechado em σ , para cada σ em K . É fácil ver que isso define uma topologia em $|K|$, tal coleção de conjuntos é fechada sobre união finita e interseções arbitrárias. O espaço $|K|$ é chamado **espaço adjacente** de K , ou o **polytope** de K .

Um espaço que é o polytope de um complexo simplicial será chamado **poliedro**.

Definição 1.4.6 Seja K um complexo simplicial e L um subcomplexo de K . Dizemos que $|L|$ é um **subpoliedro** de K .

Proposição 1.4.1 *Se L é um subcomplexo de K , então $|L|$ é um subespaço fechado de $|K|$. Em particular, se $\sigma \in K$ então σ é um subespaço fechado de $|K|$.*

Demonstração. [12], I.2.2. ■

Proposição 1.4.2 *Se K é finito, então $|K|$ é compacto. Reciprocamente, se um subconjunto A de $|K|$ é compacto, então $A \subset |K_0|$ para algum subcomplexo finito K_0 de K .*

Demonstração. [12], I.2.5. ■

Seja K um complexo simplicial em \mathbb{R}^n . Descreveremos uma construção que nos permite “fatiar” os simplexes de K e produzir um novo complexo K^1 que possui o mesmo poliedro que K porém, com simplexes de menor diâmetro.

O processo é chamado **subdivisão baricêntrica**. Se A é um simplexo de K com vértices v_0, v_1, \dots, v_k , então cada ponto x de A possui uma expressão única da forma

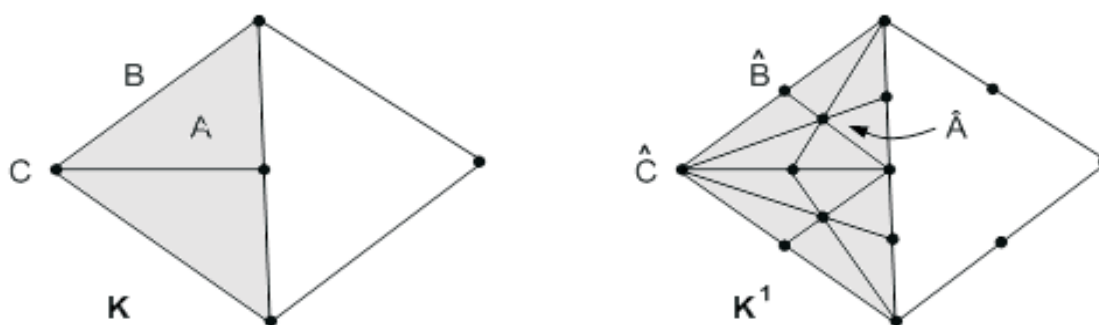
$$x = \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k,$$

na qual $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$ e todos os λ_i são não negativos. Como já vimos, tais números λ_i são chamados **coordenadas baricêntlicas** do ponto x , e o **baricentro** (ou centro de gravidade) de A é o ponto

$$\hat{A} = \frac{1}{k+1}(v_0 + v_1 + \dots + v_k).$$

De modo a formar K^1 , começaremos adicionando vértices extras para K nos baricentros de seus simplexes. Dessa forma, trabalhando de modo a aumentar a dimensão, fatiamos cada simplexo K como um cone com vértice extra em seu baricentro. A figura abaixo ilustra o processo.

Para definir K^1 precisamente, precisamos descrever seus simplexes. Os vértices de K^1 são os baricentros dos simplexes de K . (Isto inclui o vértice original de K já que um 0-simplexo é seu próprio baricentro.)



Uma coleção $\widehat{A}_0, \widehat{A}_1, \dots, \widehat{A}_k$ de tais baricêntricos, formam os vértices de um k -simplexo de K^1 se, e somente se,

$$A_{\sigma(0)} < A_{\sigma(1)} < \dots < A_{\sigma(k)}$$

para alguma permutação σ dos inteiros $0, 1, 2, \dots, k$. Por exemplo, em nossa ilustração os baricêntricos \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} determinam um 2-simplexo de K^1 , e olhando para K vemos $C < B < A$.

1.4.3 Complexos Simpliciais Geral

Nossa insistência de que um complexo simplicial K deve estar em \mathbb{R}^n para algum n , coloca uma limitação na cardinalidade de K e na dimensão dos simplejos de K . Removeremos agora tais restrições.

Seja J um conjunto de índices arbitrários, e seja \mathbb{R}^J denotando o produto de \mathbb{R} com ele mesmo J -vezes. Um elemento de \mathbb{R}^J é uma função de J para \mathbb{R} denotada por $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$. O produto \mathbb{R}^J é um espaço vetorial com a adição e multiplicação (usuais) por escalares.

Denotemos por E^J o subconjunto de \mathbb{R}^J consistindo de todos os pontos $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ tal que $x_\alpha = 0$ para um número finito de valores de α . Dessa forma, E^J é também um espaço vetorial com a adição e multiplicação (usuais) por escalares. Se ε_α é a aplicação de J em \mathbb{R} cujo valor é 1 no índice α e 0 em todos os outros elementos de J , então o conjunto $\{\varepsilon_\alpha \mid \alpha \in J\}$ é uma base para E^J . (Ela não é uma base para \mathbb{R}^J .)

Chamamos E^J de **espaço euclidiano generalizado** e topológico segundo a métrica

$$|x - y| = \max\{|x_\alpha - y_\alpha|\}_{\alpha \in J}.$$

Tudo o que foi feito para complexos em \mathbb{R}^n pode ser generalizado para complexos em E^J . O espaço E^J é a união de certos subespaços de dimensão finita, ou seja, os subespaços

gerados por subconjuntos finitos da base $\{\varepsilon_\alpha \mid \alpha \in J\}$. Cada um desses subespaços é somente uma cópia de \mathbb{R}^n para algum n .

Qualquer conjunto $\{a_0, \dots, a_k\}$ de pontos de E^J estão em um subespaço. Se eles são independentes, o simplexo que eles geram fica no mesmo subespaço. Além disso, a métrica para E^J fornece a topologia usual de cada um dos subespaços. Dessa forma, qualquer coleção finita de simplexos em E^J fica em uma cópia de \mathbb{R}^n para algum n .

Conceitualmente, parece mais complicado trabalhar em E^J do que em \mathbb{R}^n , mais na prática isso não causa tanta dificuldade.

Outro comentário que também vale ser feito é o seguinte: se K é um complexo em \mathbb{R}^n , então cada simplexo de K possui dimensão no máximo n . Por outro lado, se K é um complexo em E^J , não precisamos ter um limite superior na dimensão dos simplexos de K . Definimos a **dimensão** de K , denotada $\dim K$, como sendo a maior dimensão de um simplexo K , se ele existe; caso contrário, dizemos que K tem **dimensão infinita**.

1.4.4 Complexos Simpliciais Abstratos

Na prática, especificar um poliedro X como uma coleção de simplexos cuja união é X não é um caminho muito conveniente para lidar com um poliedro específico. Fica difícil especificar todos os simplexos e verificar que eles interceptam somente onde a definição requer. É mais fácil especificar X por meio de um “complexo simplicial abstrato”, uma noção que introduziremos agora.

Definição 1.4.7 *Um **complexo simplicial abstrato** é uma coleção \mathcal{S} de conjuntos finitos e não vazios, tal que se A é um elemento de \mathcal{S} , então todo subconjunto não vazio de A é também elemento de \mathcal{S} .*

O elemento A de \mathcal{S} é chamado **simplexo** de \mathcal{S} ; sua dimensão é uma a menos que o número de seus elementos. Cada subconjunto não vazio de A é chamado **face** de A . A dimensão de \mathcal{S} é a maior dimensão de um dos seus simplexos, ou é infinita se não existe tal dimensão maior. O **conjunto vértice** V de \mathcal{S} é a união dos elementos pontuais de \mathcal{S} ; não faremos distinção entre o vértice $v \in V$ e o 0-simplexo $\{v\} \in \mathcal{S}$. Uma subcoleção de \mathcal{S} que é um complexo nele mesmo é chamada **subcomplexo** de \mathcal{S} .

Dois complexos abstratos \mathcal{S} e \mathcal{T} são ditos **isomorfos** se existe uma correspondência bijetiva f aplicando o conjunto vértice de \mathcal{S} no conjunto vértice de \mathcal{T} de modo que $\{a_0, \dots, a_n\} \in \mathcal{S}$ se, e somente se, $\{f(a_0), \dots, f(a_n)\} \in \mathcal{T}$.

Definição 1.4.8 *Se K é um complexo simplicial, seja V o conjunto vértice de K . Seja \mathcal{K} a coleção de todos os subconjuntos $\{a_0, \dots, a_n\}$ de V tal que os vértices a_0, \dots, a_n geram um simplexo de K . A coleção \mathcal{K} é chamada **esquematização dos vértices** de K*

A coleção \mathcal{K} é um exemplo particular de um complexo simplicial abstrato. Ela é de fato um exemplo crucial, como mostra o seguinte teorema;

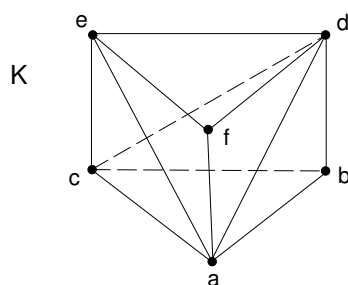
Teorema 1.4.1 (a) *Todo complexo abstrato \mathcal{S} é isomorfo a esquematização dos vértices de algum complexo simplicial K .*

(b) *Dois complexos simpliciais são linearmente isomorfos se, e somente se, suas esquematizações dos vértices são isomorfas como complexos simpliciais abstratos.*

Demonstração. [12], I.3.1. ■

Definição 1.4.9 *Se o complexo simplicial abstrato \mathcal{S} é isomorfo a esquematização dos vértices do complexo simplicial K , chamamos K de **realização geométrica** de \mathcal{S} . Ela é unicamente determinada até um isomorfismo linear.*

Exemplo 1.4.5 *Suponha que desejamos indicar um complexo simplicial K cujo espaço adjacente é homeomorfo ao cilindro $S^1 \times I$ (I denota o intervalo unitário $[0, 1]$). Uma maneira de fazermos isto é, desenhar a figura abaixo, a qual especifica um complexo K (que é homeomorfo a $S^1 \times I$) como uma coleção consistindo de seis 2-simplexos e suas faces. Iremos considerar este complexo como um caminho mais curto de denotar o complexo abstrato \mathcal{S} cujo conjunto vértice consiste nas letras a, b, c, d, e, f , e cujos simplexos são os conjuntos $\{a, f, d\}$, $\{a, b, d\}$, $\{b, c, d\}$, $\{c, d, e\}$, $\{a, c, e\}$, $\{a, e, f\}$, juntamente com seus subconjuntos não vazios. É claro que este complexo abstrato é isomorfo a esquematização dos vértices do complexo K retratado anteriormente assim, ele especifica, precisamente, o mesmo complexo. Ou seja, o complexo K da figura é uma realização geométrica de \mathcal{S} .*



1.5 Produto Tensorial

Definição 1.5.1 *Sejam A e B grupos abelianos. Seja $F(A, B)$ o grupo abeliano livre gerado pelo conjunto $A \times B$. Considere $R(A, B)$ o subgrupo gerado por todos os elementos da forma*

$$(a + a', b) - (a, b) - (a', b),$$

$$(a, b + b') - (a, b) - (a, b').$$

para $a, a' \in A$ e $b, b' \in B$. Definimos

$$A \otimes B = F(A, B)/R(A, B),$$

e o chamamos **produto tensorial** de A e B . Para cada $a \in A$ e $b \in B$, o par (a, b) de $A \otimes B$ será denotado por $a \otimes b$.

Agora, qualquer função f do conjunto $A \times B$ no grupo abeliano C determina um único homomorfismo de $F(A, B)$ em C , desde que os elementos de $A \times B$ sejam os elementos básicos para $F(A, B)$.

A função f é bilinear se, e somente se, ela aplica o subgrupo $R(A, B)$ no zero. Assim todo homomorfismo de $A \times B$ em C leva à uma função bilinear de $A \times B$ em C , e vice-versa.

Observemos que qualquer elemento de $F(A, B)$ é uma combinação linear finita de pares (a, b) , assim qualquer elemento de $A \otimes B$ é uma combinação linear finita de elementos da forma $a \otimes b$.

Para $a, a' \in A$ e $b, b' \in B$ temos as seguintes relações em $A \otimes B$:

$$(a + a') \otimes b = a \otimes b + a' \otimes b,$$

$$a \otimes (b + b') = a \otimes b + a \otimes b',$$

pela definição. De maneira imediata segue que $0 \otimes b = 0$, visto que

$$a \otimes b = (0 + a) \otimes b = 0 \otimes b + a \otimes b.$$

Similarmente, $a \otimes 0 = 0$ para todo a . Também temos

$$(-a) \otimes b = -(a \otimes b) = a \otimes (-b),$$

já que adicionando $a \otimes b$ em cada expressão acima resulta em zero. Uma consequência imediata é a relação

$$(na) \otimes b = n(a \otimes b) = a \otimes (nb),$$

com n um inteiro arbitrário.

Definição 1.5.2 *Sejam $f : A \rightarrow A'$ e $g : B \rightarrow B'$ homomorfismos. Existe um único homomorfismo*

$$f \otimes g : A \otimes B \rightarrow A' \otimes B'$$

*tal que $(f \otimes g)(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b)$, para todo $a \in A$ e $b \in B$. Tal homomorfismo é chamado **produto tensorial** de f e g .*

1.6 Grupos de Homologia e Cohomologia

1.6.1 Grupos de Homologia e Cohomologia Simplicial

Definição 1.6.1 *Seja σ um simplexo (geométrico ou abstrato). Defina duas ordens dos seus conjuntos vértices como sendo equivalentes se elas diferem entre si por uma permutação. Se $\dim \sigma > 0$, as ordens dos vértices de σ caem sobre duas classes de equivalência. Cada uma dessas classes é chamada uma **orientação** de σ . (Se σ é um 0-simplexo, então existe somente uma classe e assim, somente uma orientação de σ .) Um **simplexo orientado** é um simplexo σ junto com uma orientação de σ .*

Seja $\{v_0, \dots, v_p\}$ um conjunto de pontos do \mathbb{R}^n . Se tais pontos são geometricamente independentes, usaremos o símbolo

$$v_0 \dots v_p$$

para denotar o simplexo que eles geram, e usaremos o símbolo

$$[v_0, \dots, v_p]$$

para denotar o simplexo orientado consistindo do simplexo $v_0 \dots v_p$ e a classe de equivalência de ordem específica (v_0, \dots, v_p) .

Definição 1.6.2 *Seja K um complexo simplicial. Uma **p-cadeia** em K é uma função c do conjunto dos p -simplexos orientados de K nos inteiros, tal que:*

- (i) $c(\sigma) = -c(\sigma')$ se σ e σ' são orientações opostas do mesmo simplexo;
- (ii) $c(\sigma) = 0$ para um número finito de p -simplexos orientados σ .

Juntamos p -cadeias adicionando seus valores; o grupo resultante é denotado por $C_p(K)$ e é chamado o **grupo das p -cadeias (orientadas)** de K . Se $p < 0$ ou $p > \dim K$, denotaremos o grupo trivial por $C_p(K)$.

Lema 1.6.1 *Seja K um complexo simplicial, $C_p(K)$ é um grupo abeliano livre. Uma base para $C_p(K)$ pode ser obtida orientando cada p -simplexo e usando as correspondentes cadeias elementares como uma base.*

Demonstração. [12], I.5.1. ■

Definição 1.6.3 *Definimos um homomorfismo $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$ como sendo o **operador bordo**. Se $\sigma = [v_0, \dots, v_p]$ é um simplexo orientado com $p > 0$, definimos*

$$\partial_p \sigma = \partial_p [v_0, \dots, v_p] = \sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_p],$$

em que o símbolo \widehat{v}_i significa que o vértice v_i será retirado da matriz. Como $C_p(K)$ é o grupo trivial para $p < 0$, o operador ∂_p é o homomorfismo trivial para $p \leq 0$.

Lema 1.6.2 $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$.

Demonstração. [12], I.5.3. ■

A sequência

$$\dots \longrightarrow C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K) \xrightarrow{\partial_{p-1}} C_{p-2}(K) \longrightarrow \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

é um complexo de cadeia associado ao complexo simplicial K .

Definição 1.6.4 O núcleo de $\partial_p : C_p(K) \longrightarrow C_{p-1}(K)$ é chamado **grupo dos p -ciclos** e é denotado por $Z_p(K) = \text{Ker}(\partial_p)$. A imagem de $\partial_{p+1} : C_{p+1}(K) \longrightarrow C_p(K)$ é chamada **grupo dos p -bordos** e é denotada por $B_p(K) = \text{Im}(\partial_{p+1})$. Pelo Lema anterior, cada bordo de uma $p+1$ cadeia é automaticamente um p -ciclo. Isto é, $B_p(K) \subset Z_p(K)$. Definimos

$$H_p(K) = \frac{Z_p(K)}{B_p(K)},$$

e o chamamos p -ésimo **grupo de homologia** de K .

Definição 1.6.5 Seja $\varepsilon : C_0(K) \longrightarrow \mathbb{Z}$ o homomorfismo sobrejetivo definido por $\varepsilon(v) = 1$ para cada vértice v de K . Se c é uma 0 -cadeia, $\varepsilon(c)$ é igual a soma dos valores de c nos vértices de K . A aplicação ε é chamada **aplicação aumentação** para $C_0(K)$. Notemos que $\varepsilon(\partial d) = 0$ se d é uma 1 -cadeia.

A sequência

$$\cdots \longrightarrow C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\varepsilon} 0$$

é chamada **complexo de cadeia reduzido** associado ao complexo simplicial K e, é denotado por $\{C_*(K), \varepsilon\}$.

Definimos o **grupo de homologia reduzida** de K em dimensão 0 , denotado $\tilde{H}_0(K)$, pela equação

$$\tilde{H}_0(K) = \frac{\text{Ker}\varepsilon}{\text{Im}\partial_1}.$$

(Se $p > 0$, $\tilde{H}_p(K)$ também denota o grupo usual $H_p(K)$.)

Suponhamos K_0 um subcomplexo do complexo K . Em muitas aplicações da topologia, é conveniente considerar o que chamamos grupos de homologia relativa de K módulo K_0 , os quais definiremos a seguir.

Definição 1.6.6 Se K_0 é um subcomplexo de K , o grupo quociente $C_p(K)/C_p(K_0)$ é chamado **grupo de cadeias relativas** de K módulo K_0 , e é denotado por $C_p(K, K_0)$.

Observemos que o grupo $C_p(K, K_0)$ é abeliano livre.

Definição 1.6.7 Consideremos o operador bordo $\partial : C_p(K_0) \longrightarrow C_{p-1}(K_0)$ que nada mais é do que a restrição do operador bordo em $C_p(K)$. Usamos o mesmo símbolo para denotar os dois homomorfismos, quando houver perigo de confusão. Este homomorfismo induz um homomorfismo

$$C_p(K, K_0) \longrightarrow C_{p-1}(K, K_0)$$

de grupos de cadeias relativas, o qual também denotaremos por ∂ . Do mesmo modo anterior, ele satisfaz a equação $\partial \circ \partial = 0$.

A sequência

$$\dots \longrightarrow C_p(K, K_0) \xrightarrow{\partial} C_{p-1}(K, K_0) \xrightarrow{\partial} C_{p-2}(K, K_0) \longrightarrow \dots \xrightarrow{\partial} C_0(K, K_0) \longrightarrow 0$$

é um complexo de cadeia relativo associado ao par (K, K_0) .

Sejam

$$Z_p(K, K_0) = \text{Ker} \partial : C_p(K, K_0) \longrightarrow C_{p-1}(K, K_0),$$

$$B_p(K, K_0) = \text{Im} \partial : C_{p+1}(K, K_0) \longrightarrow C_p(K, K_0),$$

$$H_p(K, K_0) = \frac{Z_p(K, K_0)}{B_p(K, K_0)}.$$

Estes grupos são chamados, respectivamente, **grupo dos p-ciclos relativos**, **grupo dos p-bordos relativos**, e **grupo de homologia relativa**, em dimensão p , de K módulo K_0 .

Se K é um complexo simplicial e G é um grupo abeliano, podemos definir uma **p-cadeia** de K com coeficientes em G como uma função c_p dos p -simplexos orientados de K em G com as mesmas propriedades definidas para uma p -cadeia de K com coeficientes em \mathbb{Z} , vista anteriormente.

O **grupo das p-cadeias** (orientadas) de K com coeficientes em G , é denotado por $C_p(K; G)$ e é obtido de forma análoga a $C_p(K)$.

Definição 1.6.8 Seja σ um simplexo orientado de K e $g \in G$. O operador bordo $\partial : C_p(K; G) \longrightarrow C_{p-1}(K; G)$ é definido pela fórmula

$$\partial(g\sigma) = g(\partial\sigma)$$

com $\partial\sigma$ o bordo usual, definido anteriormente. Como vimos, $\partial\circ\partial = 0$. Definimos $Z_p(K; G)$ como o núcleo do homomorfismo

$$\partial : C_p(K; G) \longrightarrow C_{p-1}(K; G),$$

$B_{p-1}(K; G)$ como a sua imagem, e

$$H_p(K; G) = \frac{Z_p(K; G)}{B_p(K; G)}.$$

Estes grupos são chamados, respectivamente, **p-ciclos**, **p-bordos**, e **homologia** de K com coeficientes em G .

Podemos definir também, o conceito de homologia relativa com coeficientes em G . Tal definição é análoga a que foi vista anteriormente com coeficientes em \mathbb{Z} . Os grupos em questão serão denotados por $H_p(K, K_0; G)$. Ou seja,

$$H_p(K, K_0; G) = H_p(C_*(K, K_0); G).$$

Definimos os grupos de homologia reduzida pela equação

$$\tilde{H}_p(K; G) = H_p(\{C_*(K), \varepsilon\}; G),$$

com ε a aplicação aumentação usual para $C_*(K)$.

Veremos agora a definição de grupos de cohomologia simplicial.

Definição 1.6.9 *Sejam K um complexo simplicial e G um grupo abeliano. O grupo de **co-cadeias p-dimensional** de K , com coeficientes em G , é o grupo*

$$C^p(K; G) = \text{Hom}(C_p(K), G) = \{f : C_p(K) \rightarrow G \mid f \text{ é homomorfismo}\}.$$

O operador **co-bordo** δ é definido como sendo o dual do operador bordo $\partial : C_{p+1}(K) \rightarrow C_p(K)$. Dessa forma

$$C^p(K; G) \xrightarrow{\delta} C^{p+1}(K; G),$$

visto que δ aumenta uma dimensão. Definimos $Z^p(K; G)$ como sendo o núcleo desse homomorfismo, $B^{p+1}(K; G)$ como sendo sua imagem, e (notando que $\delta^2 = 0$ pois $\partial^2 = 0$),

$$H^p(K; G) = \frac{Z^p(K; G)}{B^p(K; G)}.$$

Tais grupos são chamados de grupo dos **co-ciclos**, grupo dos **co-bordos**, e **grupo de cohomologia**, respectivamente, de K com coeficientes em G . Omitimos G da notação quando G é igual ao grupo dos inteiros.

Analogamente, como na homologia, pode-se definir os grupos de cohomologia relativa $H^p(K, K_0; G)$.

Observação 1.6.1 Se c^p é uma co-cadeia p -dimensional, e c_p é uma cadeia p -dimensional usaremos, de maneira comum, a notação $\langle c^p, c_p \rangle$ para denotar o valor de c^p sobre c_p . Uma outra notação que também pode ser considerada é $c^p(c_p)$.

1.6.2 Grupos de Homologia e Cohomologia Singular

Consideremos \mathbb{R}^∞ e o espaço vetorial E^J , com J o conjunto dos inteiros positivos. Um elemento de \mathbb{R}^∞ é uma sequência infinita de números reais possuindo somente um número finito de componentes não nulas. Seja Δ_p o p -simplexo em \mathbb{R}^∞ com vértices

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= (0, 0, \dots, 0, \dots), \\ \varepsilon_1 &= (1, 0, \dots, 0, \dots), \\ &\dots \\ \varepsilon_p &= (0, 0, \dots, 1, \dots). \end{aligned}$$

Chamamos de Δ_p o **p -simplexo padrão**. Notemos que sobre essa definição, Δ_{p-1} é uma face de Δ_p .

Se X é um espaço topológico, definimos um **p -simplexo singular** de X como sendo uma aplicação contínua

$$T : \Delta_p \rightarrow X.$$

O grupo abeliano livre gerado pelo p -simplexo singular de X é denotado $S_p(X)$ e chamado o **grupo de cadeia singular** de X em dimensão p . Por uma convenção usual para grupos abelianos livres, denotaremos um elemento de $S_p(X)$ por uma combinação linear formal, com coeficientes inteiros, de p -simplexos singulares.

É conveniente considerar um tipo especial de simplexo singular. Dados pontos a_0, \dots, a_p em algum espaço euclidiano E^J , os quais não precisam ser independentes, existe uma única aplicação afim l de Δ_p sobre E^J que aplica ε_i em a_i para $i = 0, \dots, p$. Ela é definida pela equação

$$l(x_1, \dots, x_p, 0, \dots) = a_0 + \sum_{i=1}^p x_i(a_i - a_0).$$

Chamamos essa aplicação de **simplexo singular linear** determinado por a_0, \dots, a_p ; e o denotamos por $l(a_0, \dots, a_p)$.

Por exemplo, a aplicação $l(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_p)$ nada mais é do que a aplicação inclusão de Δ_p sobre \mathbb{R}^∞ .

Similarmente, se usarmos a notação $\widehat{\varepsilon}_i$ para denotar que o símbolo ε_i deve ser retirado, então a aplicação

$$l(\varepsilon_0, \dots, \widehat{\varepsilon}_i, \dots, \varepsilon_p)$$

é uma aplicação de Δ_{p-1} sobre \mathbb{R}^∞ que leva Δ_{p-1} , por um homeomorfismo linear, sobre a face $\varepsilon_0 \dots \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i+1} \dots \varepsilon_p$ de Δ_p . Geralmente consideramos ela como uma aplicação de Δ_{p-1} sobre Δ_p mais do que sobre \mathbb{R}^∞ . Assim, se $T : \Delta_p \rightarrow X$, podemos formar a composta

$$T \circ l(\varepsilon_0, \dots, \widehat{\varepsilon}_i, \dots, \varepsilon_p).$$

Essa é um p -simplexo singular de X , o qual pensamos como a “ i -ésima face” do p -simplexo singular T .

Definição 1.6.10 *A família dos grupos $S_p(X)$ e homomorfismos $\partial : S_p(X) \rightarrow S_{p-1}(X)$ é chamada **complexo de cadeia singular** de X , e é denotada por $S_*(X)$. Os grupos de homologia desse complexo de cadeia são chamados **grupos de homologia singular** de X , e são denotados por $H_p(X)$.*

Definição 1.6.11 *O complexo de cadeia $S_*(X)$ é aumentado pelo homomorfismo $\varepsilon : S_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$, definido por $\varepsilon(T) = 1$ para cada 0 -simplexo singular $T : \Delta_0 \rightarrow X$. É imediato que se T é um 1 -simplexo singular, então $\varepsilon(\partial T) = 0$. Os grupos de homologia de $\{S_*(X), \varepsilon\}$ são chamados **grupos de homologia singular reduzida** de X , e são denotados $\widetilde{H}_p(X)$.*

Introduziremos agora, o conceito de grupos de homologia singular relativa.

Definição 1.6.12 Se X é um espaço e A é um subespaço de X , existe uma inclusão natural $S_p(A) \longrightarrow S_p(X)$. O **grupo de cadeias singular relativas** é definido por

$$S_p(X, A) = \frac{S_p(X)}{S_p(A)}.$$

O operador bordo $\partial : S_p(X) \longrightarrow S_{p-1}(X)$ restringe o operador bordo em $S_p(A)$; dessa forma, ele induz um operador bordo

$$\partial : S_p(X, A) \longrightarrow S_{p-1}(X, A)$$

em cadeias relativas. A família dos grupos $S_p(X, A)$ e homomorfismos ∂ é chamada **complexo de cadeia singular** do par (X, A) e denotada por $S_*(X, A)$. Os grupos de homologia deste complexo de cadeia são chamados **grupos de homologia singular** do par (X, A) e são denotados por $H_p(X, A)$.

Definimos os grupos de homologia singular de um espaço topológico X , com coeficientes em um grupo abeliano G , pela equação

$$H_p(X; G) = H_p(S_*(X); G).$$

Já os grupos de homologia reduzida são definidos pela equação

$$\tilde{H}_p(X; G) = H_p(\{S_*(X), \varepsilon\}; G),$$

com ε a aplicação aumentação usual para $S_*(X)$.

Podemos definir também, o conceito de homologia relativa com coeficientes em G . Tal definição é análoga a que foi vista anteriormente com coeficientes em \mathbb{Z} . Os grupos em questão serão denotados por $H_p(X, A; G)$.

Definição 1.6.13 Se X é um espaço de Hausdorff e se x pertence a X , então os **grupos de homologia local** de X para x são os grupos de homologia singular

$$H_p(X, X - x).$$

A razão para o termo “local” vem do seguinte lema.

Lema 1.6.3 Seja $A \subset X$. Se A contém uma vizinhança do ponto x , então

$$H_p(X, X - x) \simeq H_p(A, A - x).$$

Dessa forma, se $x \in X$ e $y \in Y$ possuem vizinhanças U, V , respectivamente, tal que $(U, x) \approx (V, y)$, então os grupos de homologia local de X para x e de Y para y são isomorfos.

Demonstração. [12], IV.35.1. ■

Veremos agora a definição de grupos de cohomologia singular.

Definição 1.6.14 *Sejam X um espaço topológico e G um grupo abeliano. O grupo das **co-cadeias p -dimensional** de X com coeficientes em G , é o grupo*

$$S^p(X; G) = \text{Hom}(S_p(X), G) = \{f : S_p(X) \rightarrow G \mid f \text{ é homeomorfismo}\}.$$

O operador **co-bordo** δ é definido como sendo o dual do operador bordo $\partial : S_{p-1}(X) \rightarrow S_p(X)$. Dessa forma,

$$S^{p-1}(X; G) \xrightarrow{\delta} S^p(X; G)$$

visto que δ aumenta uma dimensão.

Os **grupos de cohomologia singular** de um espaço topológico X , com coeficientes no grupo abeliano G , são definidos pela equação

$$H^p(X; G) = H^p(S^*(X); G),$$

em que $S^*(X)$ é o complexo de cadeia singular de X . Como é usual, retiramos G da notação se ele for igual ao grupo dos inteiros.

Analogamente, como na homologia, pode-se definir os grupos de cohomologia relativa $H^p(X, A; G)$.

1.7 Produto Cup

Nas próximas definições consideraremos R como um anel comutativo com elemento unitário.

Definição 1.7.1 *Seja X um espaço topológico. Considere $S^p(X; R) = \text{Hom}(S_p(X), R)$ o grupo das p co-cadeias singulares de X , com coeficientes em R . Definimos uma aplicação*

$$S^p(X; R) \times S^q(X; R) \xrightarrow{\cup} S^{p+q}(X; R)$$

pela seguinte equação: se $T : \Delta_{p+q} \rightarrow X$ é um $p + q$ simplexo singular, seja

$$\langle c^p \cup c^q, T \rangle = \langle c^p, T \circ l(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_p) \rangle \cdot \langle c^q, T \circ l(\varepsilon_p, \dots, \varepsilon_{p+q}) \rangle.$$

A co-cadeia $c^p \cup c^q$ é chamada **produto cup** das co-cadeias c^p e c^q .

Lembremos que $l(a_0, \dots, a_p)$ é o simplexo singular linear aplicando ε_i em a_i para $i = 0, \dots, p$. A aplicação $T \circ l(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_p)$ é somente a restrição de T a “p-face frontal” Δ_p de Δ_{p+q} ; ela é um p-simplexo singular em X . Similarmente, $T \circ l(\varepsilon_p, \dots, \varepsilon_{p+q})$ é, a grosso modo, a restrição de T a “q-face traseira” de Δ_{p+q} ; ela é um q-simplexo singular em X . A multiplicação indicada no lado direito da equação é a multiplicação no anel R .

Teorema 1.7.1 *O produto cup das co-cadeias é bilinear e associativo. A co-cadeia z^0 cujo valor é 1 em cada 0-simplexo singular age como um elemento unitário. Além disso, a seguinte fórmula co-bordo afirma:*

$$\delta(c^p \cup c^q) = (\delta c^p) \cup c^q + (-1)^p c^p \cup (\delta c^q).$$

Demonstração. [12], V.48.1. ■

Teorema 1.7.2 *As co-cadeias do produto cup induzem uma operação*

$$H^p(X; R) \times H^q(X; R) \xrightarrow{\cup} H^{p+q}(X; R)$$

que é bilinear e associativa. A classe de cohomologia $\{z^0\}$ age como um elemento unitário.

Demonstração. [12], V.48.2. ■

Teorema 1.7.3 *Se $h : X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua, então h^* (homomorfismo de cohomologia) preserva produtos cup.*

Demonstração. [12], V.48.3. ■

Definição 1.7.2 *Seja $H^*(X; R)$ uma denotação para a soma direta externa $\bigoplus H^i(X; R)$. A operação produto cup faz desse grupo um anel com um elemento unitário. Ele é chamado **anel de cohomologia** de X com coeficientes em R .*

Se $h : X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua, então h^* é um homomorfismo de anel. Dessa forma, uma equivalência de homotopia induz um isomorfismo de anel. Daí segue que o anel de cohomologia é um invariante topológico.

Observação 1.7.1 *Em geral, um anel de cohomologia não é comutativo. Em vez da comutatividade, ele possui uma propriedade usualmente chamada **anti-comutatividade**. Especificamente, se $\alpha^p \in H^p(X; R)$ e $\beta^q \in H^q(X; R)$, então*

$$\alpha^p \cup \beta^q = (-1)^{pq} \beta^q \cup \alpha^p.$$

1.8 Produto Cap

Trataremos agora de uma operação chamada **produto cap** de uma classe de cohomologia e uma classe de homologia. Essa definição é similar à definição de produto cup dada anteriormente.

Nesta seção também consideraremos R como um anel comutativo com elemento unitário.

Definição 1.8.1 *Seja X um espaço topológico. Definimos uma aplicação*

$$S^p(X; R) \otimes S_{p+q}(X; R) \xrightarrow{\cap} S_q(X; R)$$

pela seguinte equação: se $T : \Delta_{p+q} \rightarrow X$ é um simplexo singular em X , e se $\alpha \in R$, então

$$c^p \cap (T \otimes \alpha) = T \circ l(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_q) \otimes \alpha \cdot \langle c^p, T \circ l(\varepsilon_q, \dots, \varepsilon_{p+q}) \rangle.$$

*Essa cadeia é chamada **produto cap** da co-cadeia c^p e a cadeia $T \otimes \alpha$.*

A grosso modo, $c^p \cap (T \otimes \alpha)$ é igual a restrição de T a “q-face frontal” de Δ_{p+q} , com coeficiente o produto de α e o valor de c^p na “p-face traseira” de T .

Teorema 1.8.1 *O produto cap é bilinear, e é natural com respeito a aplicações contínuas. Ele satisfaz a fórmula bordo*

$$\partial(d^p \cap c_{p+q}) = (-1)^q (\delta d^p \cap c_{p+q}) + d^p \cap \partial c_{p+q},$$

e está relacionado com o produto cup pela fórmula

$$c^p \cap (d^q \cap e_{p+q+r}) = (c^p \cup d^q) \cap e_{p+q+r}.$$

Demonstração. [12], VIII.66.1. ■

Teorema 1.8.2 *O produto cap induz um homomorfismo*

$$H^p(X; R) \otimes H_{p+q}(X; R) \xrightarrow{\cap} H_q(X; R).$$

Ele é natural e satisfaz a fórmula

$$\alpha^p \cap (\beta^q \cap \gamma_{p+q+r}) = (\alpha^p \cup \beta^q) \cap \gamma_{p+q+r}.$$

Demonstração. [12], VIII.66.2. ■

1.8.1 Relação com o Índice de Kronecker

Definição 1.8.2 *Se $\mathcal{C} = \{C_i, \partial\}$ é um complexo de cadeia, existe uma aplicação*

$$\text{Hom}(C_p, G) \times C_p \rightarrow G$$

*que leva o par (c^p, c_p) no elemento $\langle c^p, c_p \rangle$ de G . Tal aplicação é bilinear, e é chamada **aplicação avaliação**. Ela induz uma aplicação bilinear*

$$H^p(\mathcal{C}; G) \times H_p(\mathcal{C}) \rightarrow G,$$

*a qual chamamos de **índice de Kronecker**. Denotamos a imagem de α^p e β_p sobre a aplicação por $\langle \alpha^p, \beta_p \rangle$.*

Definição 1.8.3 *A **aplicação de Kronecker***

$$k : H^p(\mathcal{C}; G) \rightarrow \text{Hom}(H_p(\mathcal{C}), G)$$

é a aplicação que a cada α , associa o homomorfismo $\langle \alpha, \cdot \rangle$. Formalmente, definimos

$$[k(\alpha^p)](\beta_p) = \langle \alpha^p, \beta_p \rangle.$$

Observe que a aplicação k é um homomorfismo pois, o índice de Kronecker é linear na primeira variável.

Teorema 1.8.3 *Se X é um espaço topológico e F é um corpo, então existe um isomorfismo natural entre espaços vetoriais*

$$H^p(X; F) \longrightarrow \text{Hom}_F(H_p(X; F), F),$$

dado pela aplicação de Kronecker.

Demonstração. [12], VII.53.6. ■

Daremos agora um resultado que relaciona o índice de Kronecker com o produto cap.

Teorema 1.8.4 *Seja $\varepsilon_* : H_0(X; G) \rightarrow G$ o homomorfismo induzido pela aplicação aumentação ε , que é um isomorfismo se X é conexo por caminhos. Então, o índice de Kronecker é igual a composta*

$$H^p(X; G) \otimes H_p(X) \xrightarrow{\cap} H_0(X; G) \xrightarrow{\varepsilon_*} G.$$

Demonstração. [12], VIII.66.3. ■

1.9 Variedades

Definição 1.9.1 *Um espaço de Hausdorff X é chamado uma ***n*-variedade** se cada ponto de X possui uma vizinhança homeomorfa a um subconjunto aberto do espaço euclidiano \mathbb{R}^n .*

Apresentaremos agora um Teorema da Dualidade de Poincaré. Na sua prova, o isomorfismo dualidade será construído usando produtos cap.

Teorema 1.9.1 (Teorema da Dualidade de Poincaré) *Seja X uma *n*-variedade fechada (compacta e sem bordo). Se X é orientável, e se $\Gamma \in H_n(X)$ é uma classe de orientação para X , então*

$$H^p(X; G) \xrightarrow{\cap \Gamma} H_{n-p}(X; G)$$

é um isomorfismo para G arbitrário. Se X for orientável ou não e Γ for o único elemento não trivial de $H_n(X; \mathbb{Z}_2)$, então

$$H^p(X; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cap \Gamma} H_{n-p}(X; \mathbb{Z}_2)$$

é um isomorfismo.

Demonstração. [12], VIII.67.1. ■

1.10 CW-complexos

Definição 1.10.1 Um espaço X de Hausdorff admite uma estrutura de **CW-complexo** se possui uma coleção de subconjuntos fechados σ_j^q , chamados **células** ($q \geq 0$ representando a dimensão e j variando sobre um conjunto de índices J_q) junto com uma família de subespaços fechados $X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^q \subset \dots$, sendo $X^q = \bigcup_{\substack{p \leq q \\ j \in J_p}} \sigma_j^p$ (com $X^{-1} := \emptyset$) e o bordo dado por $f_j^q = \sigma_j^q \cap X^{q-1}$, satisfazendo:

(1) $\sigma_i^p - f_i^p$ intercepta $\sigma_j^q - f_j^q$ se $p = q$ e $i = j$.

(2) $X = \bigcup_q X^q$.

(3) Para cada σ_j^q existe uma aplicação, chamada **aplicação característica** $\phi_j^q : D^q \rightarrow \sigma_j^q$ (com D^q o disco fechado de dimensão q) que leva S^{q-1} (esfera de dimensão $q-1$) sobre f_j^q e aplica $D^q - S^{q-1}$ homeomorficamente sobre $\sigma_j^q - f_j^q$ (com $S^{-1} := \emptyset$).

(4) f_j^q intercepta um número finito de conjuntos $(\sigma_i^q - f_i^q)$, $i \in J_q$.

(5) Um subconjunto Y de X é fechado se $Y \cap \sigma_j^q$ é fechado em σ_j^q , para todo q e todo $j \in J_q$, com σ_j^q tendo a topologia quociente de D^q coinduzida por ϕ_j^q .

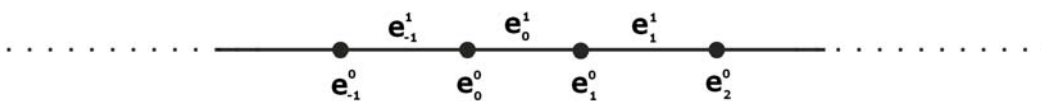
O subconjunto X^n de X é chamado de **n -esqueleto**. Os pontos de X^0 são chamados de **vértices** ou **0-células**. Um CW-complexo é dito ser **finito** ou **infinito** se o número de células é finito ou infinito, respectivamente. Se $X = X^n$ para algum n o CW-complexo é dito de **dimensão finita** e o menor inteiro n para o qual isto ocorre é chamado **dimensão** de X .

Observação 1.10.1 (a) Denotamos por $e^q = \sigma^q - f^q$ a célula aberta de dimensão q .

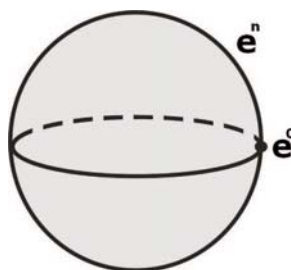
(b) Para CW-complexos finitos as condições (4) e (5) (também denotadas por C e W) são supérfluas. Este fato simplifica a teoria no caso finito, que será de nosso maior interesse.

Exemplo 1.10.1 Seja $X = \mathbb{R}$. Podemos dar a \mathbb{R} uma estrutura natural de CW-complexo, em que as 0-células e 1-células são dadas, respectivamente, por $e_n^0 = \{n\}$ e $e_n^1 = (n, n+1)$,

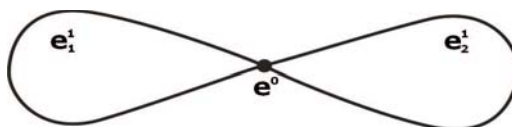
$n \in \mathbb{Z}$.



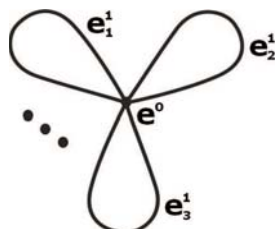
Exemplo 1.10.2 Seja $X = S^n$ (n -esfera). Uma estrutura de CW-complexo sobre S^n pode ser dada por uma 0-célula e uma n -célula, ou seja, $S^n = e^0 \cup e^n$.



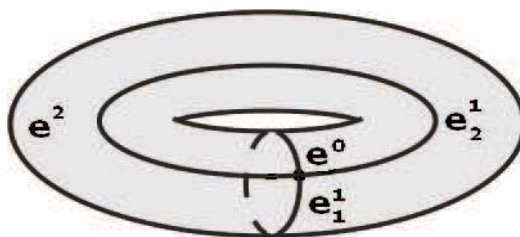
Exemplo 1.10.3 Consideremos X a figura oito. É possível dar a X uma estrutura de CW-complexo 1-dimensional, com uma única 0-célula, e duas 1-células, ou seja, $X = e^0 \cup e_1^1 \cup e_2^1$.



Exemplo 1.10.4 Como um caso mais geral, consideremos $X = \bigvee_{s \in S} S_s^1$, o bouquet de círculos indexados por um conjunto S . Podemos dar a X uma estrutura de CW-complexo 1-dimensional, com uma única 0-célula e uma 1-célula para cada elemento de S , ou seja, $X = (e^0 \cup (\bigcup_{s \in S} e_s^1))$.



Exemplo 1.10.5 O toro (T^2) admite uma estrutura de CW-complexo 2-dimensional, com uma 0-célula, duas 1-células e uma 2-célula, ou seja, $T^2 = e^0 \cup e_1^1 \cup e_2^1 \cup e^2$.



Observação 1.10.2 *É também usual denotar uma n -célula por σ^n ou, simplesmente por σ , caso a dimensão esteja clara no contexto.*

Veremos agora dois resultados que serão de grande importância para a demonstração do Teorema do Borsuk-Ulam no caso geral.

Lema 1.10.1 *Seja X um CW-complexo. Dado uma q -célula σ^q de X , qualquer aplicação característica para σ^q ,*

$$\phi^q : (D^q, S^{q-1}) \longrightarrow (f^q, e^q),$$

induz um isomorfismo em homologia relativa.

Demonstração. [12], IV.39.1. ■

Teorema 1.10.1 *Seja X um CW-complexo. O grupo $H_i(X^q, X^{q-1})$ é zero para $i \neq q$, e é abeliano livre para $i = q$. Se γ gera $H_q(D^q, S^{q-1})$, então os elementos $(\phi^q)_*(\gamma)$ formam uma base para $H_q(X^q, X^{q-1})$, já que ϕ^q percorre um conjunto de aplicações características para as q -células de X .*

Demonstração. [12], IV.39.3. ■

Definição 1.10.2 *Uma aplicação contínua $f : X \longrightarrow Y$, em que X e Y são CW-complexos, é chamada **celular** se $f(X^{(n)}) \subset Y^{(n)}$ para $n = 0, 1, 2, \dots$ ($X^{(n)}$ e $Y^{(n)}$ são os n -esqueletos de X e Y , respectivamente).*

Definição 1.10.3 *Uma **retração de deformação** de um espaço X em um espaço A é uma aplicação contínua $k : X \times I \rightarrow X$ tal que*

$$k(x, 0) = x \text{ para todo } x \in X,$$

$$k(x, 1) \in A \text{ para todo } x \in X,$$

$k(a, t) = a$ para todo $a \in A$ e todo $t \in I$.

A aplicação $r : X \rightarrow A$ dada por $r(x) = k(x, 1)$ é usualmente chamada de **retrato de deformação** de A em X .

Teorema 1.10.2 *Se A é um subcomplexo de um CW-complexo de X então existe uma vizinhança U de X com $A \subset U$ tal que A é retrato de deformação de U*

Demonstração. [8], A.5. ■

Propriedade da Extensão da Homotopia:

Definição 1.10.4 *Um par de espaços topológicos (X, A) tem a **propriedade da extensão da homotopia** se toda aplicação $X \times \{0\} \cup A \times I \rightarrow Y$ pode ser estendida à uma aplicação $X \times I \rightarrow Y$.*

Proposição 1.10.1 *Se X é um CW-complexo e A é um subcomplexo de X então (X, A) possui a propriedade da extensão da homotopia.*

Demonstração. [8], 0.0.16. ■

O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e sua relação com o Teorema da Curva de Jordan

O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer foi primeiramente publicado em 1909, por L. E. J. Brouwer, para o caso $n = 3$. Em 1910, Hadamard seguiu com a prova para todas as dimensões, prova esta que Brouwer também conseguiu porém, em 1912.

Em dimensão três, o Teorema de Brouwer é geralmente interpretado da seguinte maneira: não importa como mexemos ao redor do café em um copo (fazendo isso continuamente ou não), sempre existirá um ponto na mesma posição que ele estava antes de mexer o café. Além disso, se tentarmos mexer tal ponto de sua posição original iremos, inevitavelmente, mexer algum outro ponto para sua posição original.

Neste capítulo veremos a demonstração desse teorema para aplicações contínuas $f : D^n \rightarrow D^n$, com $n \in \mathbb{N}$; lembrando que $D^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ denota o n -disco unitário.

Como aplicação, faremos uma prova do famoso Teorema da Curva de Jordan usando o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, prova essa que será baseada no artigo de R. Maehara (ver [10]).

2.1 O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Nesta seção apresentaremos uma demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer para aplicações contínuas do n -disco unitário D^n nele mesmo, com $n \geq 1$. Para isto serão

necessários alguns conceitos preliminares, os quais veremos a seguir.

Definição 2.1.1 Um **ponto fixo** para uma aplicação f de um espaço nele mesmo é um ponto y tal que $f(y) = y$.

Observação 2.1.1 O conjunto de todos os pontos fixos de uma aplicação f de um espaço nele mesmo é denotado por $Fix(f)$.

Definição 2.1.2 Seja $A \subset X$. Uma **retração** de X sobre A é uma aplicação contínua $r : X \rightarrow A$ tal que $r|_A$ é a aplicação identidade de A . Se tal aplicação r existe, dizemos que A é um **retrato** de X .

Proposição 2.1.1 Não existe uma retração de D^n em S^{n-1} .

Demonstração. Para $n = 1$ o resultado é óbvio já que D^1 é conexo e S^0 não é conexo.

Suponhamos $n > 1$ e seja $f : D^n \rightarrow S^{n-1}$ uma aplicação contínua tal que $f \circ i = id$, na qual i é a aplicação inclusão de S^{n-1} em D^n e id é a aplicação identidade de S^{n-1} . Isto implica que o diagrama seguinte de grupos de homologia e homomorfismos induzidos é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} H_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{id} & H_{n-1}(S^{n-1}) \\ i_* \downarrow & \nearrow f_* & \\ H_{n-1}(D^n) & & \end{array}$$

Entretanto, como $H_{n-1}(D^n) = \{0\}$ e $H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$ segue que $id = f_* \circ i_* = 0$, o que é um absurdo.

Dessa forma, não existe uma retração de D^n em S^{n-1} . ■

Teorema 2.1.1 Toda aplicação contínua $f : D^n \rightarrow D^n$ possui um ponto fixo, isto é, existe x pertencente a D^n tal que $f(x) = x$.

Demonstração. Suponhamos que $f : D^n \rightarrow D^n$ não possui pontos fixos.

Definamos uma função $g : D^n \rightarrow S^{n-1}$ da seguinte maneira: para x pertencente a D^n , existe uma semi-reta l_x bem definida começando em $f(x)$ e com direção $x - f(x)$. Consideremos $g(x)$ como sendo o ponto no qual esta semi-reta intercepta S^{n-1} .

Faremos agora os cálculos para encontrar a equação que define g em função de $f(x)$ e de x .

$$\text{Temos } \begin{cases} l_x(\lambda) = f(x) + \lambda_x(x - f(x)), \lambda_x \in \mathbb{R}, \lambda_x > 0 \\ |l_x(\lambda)|^2 = 1. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |l_x(\lambda)|^2 = 1 &\Rightarrow |f(x) + \lambda_x(x - f(x))|^2 = 1 \Rightarrow \langle f(x) + \lambda_x(x - f(x)), f(x) + \lambda_x(x - f(x)) \rangle = 1 \\ \langle f(x), f(x) \rangle + 2\lambda_x \langle f(x), x - f(x) \rangle + \lambda_x^2 \langle x - f(x), x - f(x) \rangle &= 1 \\ \lambda_x^2 \cdot |x - f(x)|^2 + 2\lambda_x \langle f(x), x - f(x) \rangle + |f(x)|^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Temos

$$\Delta = 4 \cdot \langle f(x), x - f(x) \rangle^2 - 4 \cdot |x - f(x)|^2 \cdot (|f(x)|^2 - 1).$$

Agora,

$$\begin{aligned} \langle f(x), x - f(x) \rangle^2 - |x - f(x)|^2 \cdot (|f(x)|^2 - 1) &= \\ = (\langle f(x), x \rangle - \langle f(x), f(x) \rangle)^2 - (|x|^2 - 2\langle x, f(x) \rangle + |f(x)|^2) \cdot (|f(x)|^2 - 1) &= \\ = \langle f(x), x \rangle^2 - 2\langle x, f(x) \rangle \cdot |f(x)|^2 + |f(x)|^4 - |x|^2 \cdot |f(x)|^2 + |x|^2 + 2\langle x, f(x) \rangle \cdot |f(x)|^2 - & \\ - 2\langle x, f(x) \rangle - |f(x)|^4 + |f(x)|^2 = \langle x, f(x) \rangle^2 - |x|^2 \cdot |f(x)|^2 + |x|^2 - 2\langle x, f(x) \rangle + |f(x)|^2 &= \\ = \langle x, f(x) \rangle^2 - |x|^2 \cdot |f(x)|^2 + |x - f(x)|^2. & \end{aligned}$$

Obtemos assim que $\Delta = 4 \cdot (\langle x, f(x) \rangle^2 - |x|^2 \cdot |f(x)|^2 + |x - f(x)|^2)$.

Segue da construção da função g que $\Delta > 0$.

Assim o valor de λ_x é

$$\lambda_x = \frac{-2 \cdot \langle f(x), x - f(x) \rangle + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot |x - f(x)|^2} \quad \text{ou} \quad \lambda_x = \frac{2 \cdot \langle f(x), x - f(x) \rangle - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot |x - f(x)|^2}.$$

Logo, $g(x) = f(x) \pm \frac{\sqrt{\Delta} - 2 \cdot \langle f(x), x - f(x) \rangle}{2 \cdot |x - f(x)|^2} \cdot (x - f(x))$, para todo $x \in D^n$.

Portanto, segue que a aplicação g definida acima é uma aplicação contínua, já que f é contínua por hipótese, e não possui pontos fixos. Além disso, $g(x) = x$ para todo $x \in S^{n-1}$, pois todo $x = 1$, e dessa forma, g é uma retração de D^n em S^{n-1} .

Porém, a existência de tal aplicação g contradiz a Proposição 2.1.1.

Logo, $f : D^n \rightarrow D^n$ deve possuir um ponto fixo.

Podemos observar que não é fácil se convencer da continuidade da aplicação g definida acima sem apresentar uma fórmula que a exhibe porém, é desagradável fazer todas essas contas.

Uma outra retração para a qual a continuidade é evidente é dada como segue: considere o disco D de raio 2 e defina uma aplicação $h : D \rightarrow D$ da seguinte maneira

$$h(x) = \begin{cases} (2 - |x|) f\left(\frac{x}{|x|}\right) & \text{se } |x| \geq 1, \\ f(x) & \text{se } |x| \leq 1. \end{cases}$$

É claro que h não possui pontos fixos, já que a imagem de cada ponto está no disco de raio 1 no qual h e f coincidem.

Dessa forma, defina $g : D \rightarrow D$ por $g(x) = \frac{2(x - h(x))}{|x - h(x)|}$. Tal aplicação é contínua, já que h é contínua, e se $|x| = 2$ então $h(x) = 0$ e assim $r(x) = x$. ■

2.2 O Teorema da Curva de Jordan via o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Definição 2.2.1 *Um arco no plano é um subconjunto homeomorfo a um intervalo fechado $[a, b]$. Uma **curva de Jordan** é um subconjunto do plano homeomorfo a um círculo.*

Um dos teoremas mais clássicos na topologia é o seguinte:

Teorema 2.2.1 (Teorema da Curva de Jordan) *O complementar no plano \mathbb{R}^2 de uma curva de Jordan J consiste de duas componentes, cada uma das quais possui J como seu bordo.*

Por um longo tempo, o Teorema da Curva de Jordan foi considerado tão óbvio que ninguém ousou contradizê-lo e nem ao menos prová-lo. O resultado foi primeiramente dado como um teorema por Camille Jordan em 1887, e por isso recebeu seu nome. Jordan mostrou que provar esse teorema não era uma coisa fácil, e de fato a prova que ele fez para tal resultado estava completamente errada.

A primeira prova correta do Teorema da Curva de Jordan foi dada por O. Veblen ([16]) em 1905. Desde então, uma variedade de provas elementares foram fornecidas por muitos autores porém, a maioria delas, apesar de intuitivas e transparentes, são longas.

O propósito desta seção é fornecer uma prova mais construtiva, baseada no artigo de R. Maehara (ver [10]) do Teorema da Curva de Jordan utilizando o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer visto anteriormente. Para isto, necessitamos de alguns resultados preliminares.

Proposição 2.2.1 (a) *Se $K \subset \mathbb{R}^2$ é um subconjunto compacto do plano, então $\mathbb{R}^2 - K$ tem exatamente uma componente ilimitada. Em particular, se J é uma curva de Jordan então $\mathbb{R}^2 - J$ tem exatamente uma componente ilimitada.*

(b) *Se J é uma curva de Jordan, então cada componente de $\mathbb{R}^2 - J$ é conexa por caminhos e aberta.*

Demonstração. Mostremos inicialmente a afirmação (a).

Por hipótese, temos K compacto assim, em particular, K é limitado. Dessa forma existe um disco fechado D tal que $K \subset D$.

Consideremos \mathcal{C} uma componente qualquer de $\mathbb{R}^2 - K$. Temos duas possibilidades para tal componente

(i) $\mathcal{C} \cap (\mathbb{R}^2 - D) = \emptyset$.

Neste caso, $\mathcal{C} \subset D$. Agora sendo $\overline{\mathcal{C}}$ fechado e D compacto e de Hausdorff segue que $\overline{\mathcal{C}}$ é compacto. Logo, \mathcal{C} é limitado.

(ii) $\mathcal{C} \cap (\mathbb{R}^2 - D) \neq \emptyset$.

Como $\mathbb{R}^2 - D$ é conexo, existe uma componente conexa \mathcal{P} tal que $\mathbb{R}^2 - D \subset \mathcal{P}$. Agora sendo $\mathbb{R}^2 - D$ ilimitado e $\mathcal{C} \cap (\mathbb{R}^2 - D) \neq \emptyset$ segue que $\mathcal{C} \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$. Assim $\mathcal{C} = \mathcal{P}$.

Logo \mathcal{C} é uma componente ilimitada.

Portanto, $\mathbb{R}^2 - K$ tem exatamente uma componente não limitada.

Em particular, se J é uma curva de Jordan então J é um subconjunto compacto do plano. Assim, pelo que foi provado anteriormente, $\mathbb{R}^2 - J$ tem exatamente uma componente não limitada.

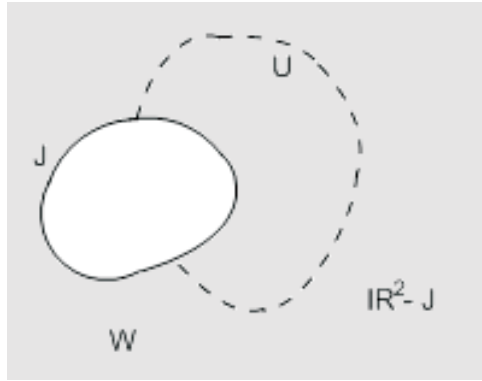
Agora, a afirmação (b) segue do fato de \mathbb{R}^2 ser localmente conexo por caminhos e J ser fechado. ■

A prova do Teorema da Curva de Jordan segue dos dois próximos lemas, cujas demonstrações utilizam o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, visto anteriormente.

Lema 2.2.1 *Se $\mathbb{R}^2 - J$ não é conexo, então cada componente possui J como seu bordo.*

Demonstração. Segue da hipótese que $\mathbb{R}^2 - J$ possui no mínimo duas componentes.

Seja U uma componente arbitrária. Como qualquer outra componente W é disjunta de U e aberta, segue que W não contém pontos do fecho \bar{U} e assim, não contém pontos do bordo $\bar{U} \cap U^c$ de U . Além disso, como $U \subset \mathbb{R}^2 - J = J^c$ temos $J \subset U^c$. Logo, $\bar{U} \cap U^c \subset J$, já que para qualquer componente W de $\mathbb{R}^2 - J$ temos $(\bar{U} \cap U^c) \cap W = \emptyset$ e $\mathbb{R}^2 - J = \bigcup_{W \text{ comp}} W$.



Suponhamos que $\bar{U} \cap U^c \neq J$. Dessa forma, existe um arco $A \subset J$ tal que

$$\bar{U} \cap U^c \subset A. \quad (2.1)$$

Mostraremos que tal suposição nos levará a uma contradição.

Pela afirmação (a) da Proposição 2.2.1, segue que $\mathbb{R}^2 - J$ possui no mínimo uma componente limitada. Considere 0 como sendo um ponto em uma componente limitada. Sem perda de generalidade, assumiremos que U é limitado e, dessa forma, escolhemos 0 em U .

Seja D um disco suficientemente grande, com centro 0 tal que seu interior contenha J . Logo, o bordo S de D está contido na componente não limitada de $\mathbb{R}^2 - J$.

De fato. Consideremos $K = J \cup \text{int}(J)$, obtemos assim que $K \subset \mathbb{R}^2$ é compacto. Além disso, por hipótese, $K \subset \text{int}(D)$. Logo $\mathbb{R}^2 - \text{int}(D) \subset \mathbb{R}^2 - K$.

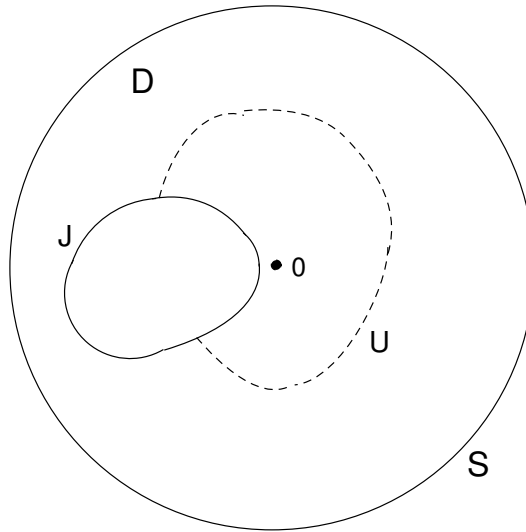
Como $\mathbb{R}^2 - D \subset \mathbb{R}^2 - \text{int}(D)$ e $\mathbb{R}^2 - \text{int}(D)$ é conexo, segue que

$$\mathbb{R}^2 - D \subset \mathbb{R}^2 - \text{int}(D) \subset \mathbb{R}^2 - K = \cup \mathcal{C},$$

em que cada \mathcal{C} é uma componente qualquer de $\mathbb{R}^2 - D$.

Dessa forma, segue pela Proposição 2.2.1 que \mathcal{C} não é limitada.

Portanto o bordo S de D está contido na componente não limitada de $\mathbb{R}^2 - J$.



Sabemos que o disco D é um espaço normal com a topologia usual e também, o arco A é um subespaço fechado de D . Sendo o arco A homeomorfo ao intervalo $[0, 1]$ segue, pelo Teorema da Extensão de Tietze (ver [13], IV.35.1), que a aplicação identidade $i : A \rightarrow A$ possui uma extensão contínua $r : D \rightarrow A$.

Definamos uma aplicação $q : D \rightarrow D - \{0\}$, dependendo de U ser limitado ou não, por

$$q(z) = \begin{cases} r(z) & \text{para } z \in \bar{U}, \\ z & \text{para } z \in U^c; \end{cases} \quad \text{ou} \quad q(z) = \begin{cases} z & \text{para } z \in \bar{U}, \\ r(z) & \text{para } z \in U^c, \end{cases}$$

respectivamente.

Pela inclusão (2.1), a interseção dos dois conjuntos fechados \bar{U} e U^c está em A , sobre o qual r é a aplicação identidade. Assim, q está bem definida e é contínua. Notemos que $q(z) = z$ se z pertence a S .

Consideremos $p : D - \{0\} \rightarrow S$ a projeção natural e seja $t : S \rightarrow S$ a aplicação antípoda. Dessa forma, a composição $t \circ p \circ q : D \rightarrow S \subset D$ não possui pontos fixos.

De fato. Sem perda de generalidade vamos supor $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$.

Se $z \in S$ obtemos

$$(t \circ p \circ q)(z) = t(p(q(z))) = t(p(z)) = t(z) = -z,$$

ou seja, $t \circ p \circ q$ não possui pontos fixos.

Se $z \notin S$ podem ocorrer dois casos:

(i) U é limitado;

$$(t \circ p \circ q)(z) = \begin{cases} \frac{-r(z)}{|r(z)|} & \text{para } z \in \bar{U}, \\ \frac{-z}{|z|} & \text{para } z \in U^c. \end{cases}$$

Pelo domínio da extensão r , z só pode pertencer ao interior de D já que estamos supondo $z \notin S$. Assim, $\frac{-r(z)}{|r(z)|}$ deve pertencer a S . Logo $\frac{-r(z)}{|r(z)|} \neq z$.

Além disso, para que $\frac{-z}{|z|}$ fosse igual a z deveríamos ter $z \in S$, o que não ocorre.

Assim segue que $t \circ p \circ q$ não possui pontos fixos.

(ii) U não é limitado;

$$(t \circ p \circ q)(z) = \begin{cases} \frac{-z}{|z|} & \text{para } z \in \bar{U}, \\ \frac{-r(z)}{|r(z)|} & \text{para } z \in U^c. \end{cases}$$

Pela mesma justificativa utilizada no item (i) segue que $t \circ p \circ q$ não possui pontos fixos.

Portanto, a composição $t \circ p \circ q : D \rightarrow S \subset D$ não possui pontos fixos.

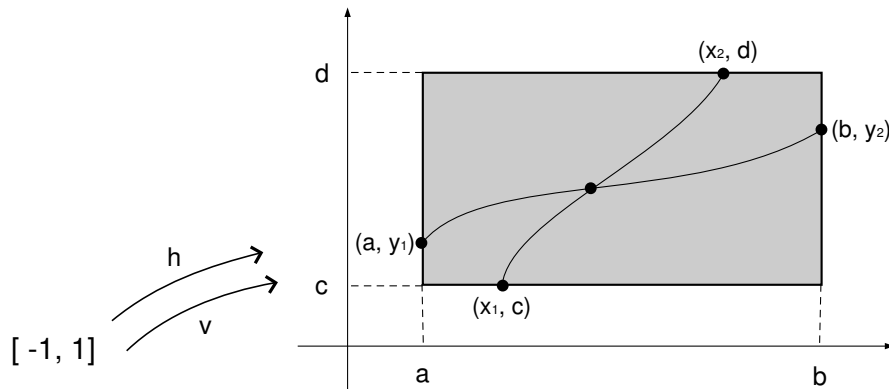
Porém, o fato da composição anterior não possuir pontos fixos, contradiz o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer visto na seção anterior. Dessa forma, se $\mathbb{R}^2 - J$ não é conexo, então cada componente possui J como seu bordo. ■

Para o próximo lema, denotemos $E(a, b; c, d)$ como o conjunto retangular $\{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ no plano \mathbb{R}^2 , com $a < b$ e $c < d$.

Lema 2.2.2 *Sejam $h(t) = (h_1(t), h_2(t))$ e $v(t) = (v_1(t), v_2(t))$ ($-1 \leq t \leq 1$) caminhos contínuos em $E(a, b; c, d)$ satisfazendo*

$$h_1(-1) = a, \quad h_1(1) = b, \quad v_2(-1) = c, \quad v_2(1) = d. \quad (2.2)$$

Dessa forma, os dois caminhos encontram-se, isto é, $h(s) = v(t)$ para algum s, t em $[-1, 1]$.



Demonstração. Suponhamos $h(s) \neq v(t)$ para todo s, t em $[-1, 1]$.

Denotemos por $N(s, t)$ a norma do máximo de $h(s) - v(t)$, isto é,

$$N(s, t) = \max\{|h_1(s) - v_1(t)|, |h_2(s) - v_2(t)|\}.$$

Assim $N(s, t) \neq 0$ para todo s, t .

Definamos uma aplicação contínua F de $E(-1, 1; -1, 1)$ nele mesmo por

$$F(s, t) = \left(\frac{v_1(t) - h_1(s)}{N(s, t)}, \frac{h_2(s) - v_2(t)}{N(s, t)} \right).$$

Notemos que a imagem de F está no bordo de $E(-1, 1; -1, 1)$.

De fato. Sabemos que a equação que define um quadrado Q de lados x e y , limitado por $E(-1, 1; -1, 1)$, é a seguinte $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} = 1\}$.

Assim, para que a imagem de F esteja no bordo de $E(-1, 1; -1, 1)$, é necessário e suficiente que F satisfaça a equação acima, ou seja, que

$$\max \left\{ \left| \frac{v_1(t) - h_1(s)}{N(s, t)} \right|, \left| \frac{h_2(s) - v_2(t)}{N(s, t)} \right| \right\} = 1.$$

- Se $N(s, t) = |h_1(s) - v_1(t)|$ temos

$$\left| \frac{v_1(t) - h_1(s)}{|h_1(s) - v_1(t)|} \right| = 1 \quad \text{e} \quad \left| \frac{h_2(s) - v_2(t)}{|h_1(s) - v_1(t)|} \right| < 1$$

já que $|h_2(s) - v_2(t)| < |h_1(s) - v_1(t)|$.

- Se $N(s, t) = |h_2(s) - v_2(t)|$ temos

$$\left| \frac{h_2(s) - v_2(t)}{|h_2(s) - v_2(t)|} \right| = 1 \quad \text{e} \quad \left| \frac{v_1(t) - h_1(s)}{|h_2(s) - v_2(t)|} \right| < 1$$

já que $|h_1(s) - v_1(t)| < |h_2(s) - v_2(t)|$.

$$\text{Portanto, } \max \left\{ \left| \frac{v_1(t) - h_1(s)}{N(s, t)} \right|, \left| \frac{h_2(s) - v_2(t)}{N(s, t)} \right| \right\} = 1.$$

Para mostrarmos que F não possui pontos fixos, assumiremos que $F(s_0, t_0) = (s_0, t_0)$.

Pelo que já foi comentado anteriormente segue que $|s_0| = 1$ ou $|t_0| = 1$. Suponhamos, por exemplo, $s_0 = -1$. Assim, pelas equações de (2.2), a primeira coordenada de $F(-1, t_0)$ é

$$\frac{v_1(t_0) - h_1(-1)}{N(-1, t_0)} = \frac{v_1(t_0) + 1}{N(-1, t_0)}.$$

Como $N(-1, t_0) = \max\{|1 - v_1(t_0)|, |h_2(-1) - v_2(t_0)|\}$ obtemos

$$v_1(t_0) + 1 \leq |v_1(t_0) + 1| \leq N(-1, t_0) \Rightarrow 0 \leq N(-1, t_0) - (v_1(t_0) + 1).$$

Logo, $\frac{v_1(t_0) + 1}{N(-1, t_0)}$ é não negativa e dessa forma, não pode ser igual a $s_0 = -1$.

Similarmente, as outras possibilidades de $|s_0| = 1$ ou $|t_0| = 1$ não podem ocorrer.

Portanto, F não possui pontos fixos, o que contradiz o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, já que $E(-1, 1; -1, 1)$ é homeomorfo a um disco. ■

Estamos agora prontos para provar o Teorema da Curva de Jordan de uma maneira bastante construtiva, utilizando essencialmente os dois resultados anteriores.

Demonstração do Teorema 2.2.1. Pelo Lema 2.2.1, precisamos somente provar que $\mathbb{R}^2 - J$ possui uma, e somente uma, componente limitada. Tal prova será dividida em três etapas:

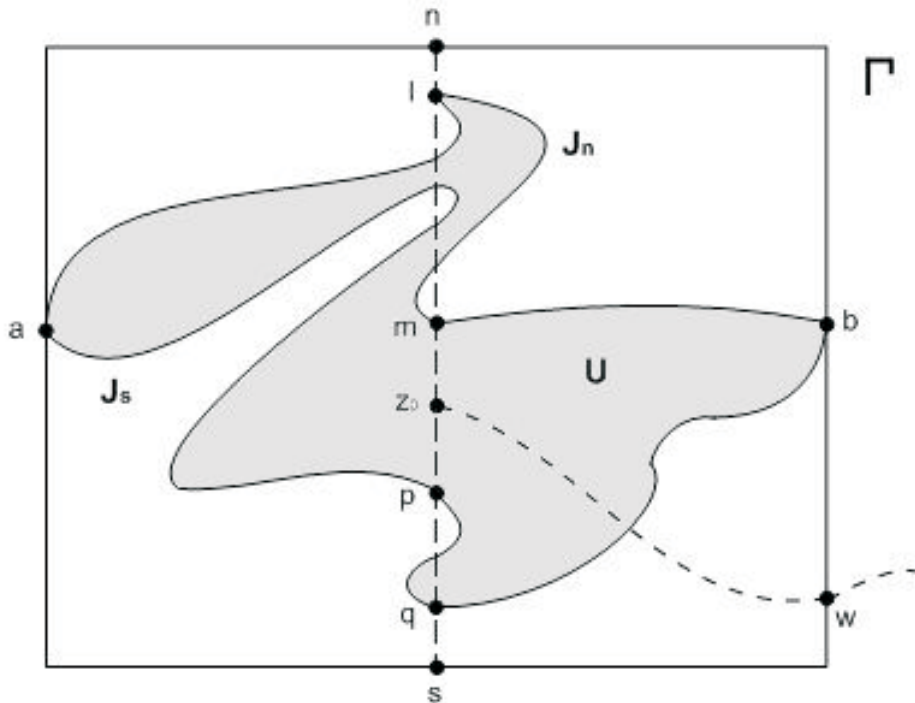
- (1) estabelecer a notação e definir um ponto z_0 em $\mathbb{R}^2 - J$;
- (2) provar que a componente U contendo z_0 é limitada;
- (3) mostrar que não existe componente limitada exceto U .

Sendo J compacto, existem pontos a, b em J tais que a distância $|a - b|$ é máxima. Assumiremos que $a = (-1, 0)$ e $b = (1, 0)$. Dessa forma, o conjunto retangular $E(-1, 1; -2, 2)$ contém J , e seu bordo Γ encontra J em exatamente dois pontos a e b .

Seja n o ponto médio do lado superior de $E(-1, 1; -2, 2)$, e s o ponto médio do lado inferior; isto é, $n = (0, 2)$ e $s = (0, -2)$. O segmento \overline{ns} encontra J , pelo Lema 2.2.2. Seja l o y -ponto maximal (ou seja, o ponto $(0, y)$ com y maximal) em $J \cap \overline{ns}$.

Os pontos a e b dividem J em dois arcos; denotamos o arco contendo l por J_n e o outro por J_s . Seja m o y -ponto minimal em $J_n \cap \overline{ns}$ (possivelmente, $l = m$). Assim, o segmento \overline{ms} encontra J_s ; caso contrário, se o segmento \overline{ms} não encontrasse J_s então, considerando o caminho $\overline{nl} + \widehat{lm} + \overline{ms}$ (em que \widehat{lm} denota o subarco de J_n com pontos finais l e m), $\overline{nl} + \widehat{lm}$ deveria encontrar J_s mas, como l é o y -ponto maximal em $J \cap \overline{ns}$ e o arco J_s não contém l segue que \widehat{lm} deveria encontrar J_s . Agora se isso ocorresse, não teríamos J homeomorfo a um círculo, já que este possuiria um ponto de auto-interseção (em $\widehat{lm} \cap J_s$). Assim, J_s não encontraria o caminho $\overline{nl} + \widehat{lm} + \overline{ms}$, contrariando o Lema 2.2.2.

Consideremos p e q o y -ponto maximal e o y -ponto minimal em $J_s \cap \overline{ms}$, respectivamente. Finalmente, seja z_0 o ponto médio do segmento \overline{mp} .



Agora mostraremos que U , a componente de $\mathbb{R}^2 - J$ que contém z_0 , é limitada.

Suponhamos que U não seja limitada. Como U é conexo por caminhos, existe um caminho α em U de z_0 para um ponto fora de $E(-1, 1; -2, 2)$. Seja w o primeiro ponto no qual α encontra o bordo Γ de $E(-1, 1; -2, 2)$. Denotemos por α_w a parte de α de z_0 até w .

Se w está na metade inferior de Γ , podemos encontrar um caminho \widehat{ws} em Γ de w para s , o qual não contém a nem b .

Consideremos agora o caminho $\overline{nl} + \widehat{lm} + \overline{mz_0} + \alpha_w + \widehat{ws}$. Desde que α_w está contido em $U \subset \mathbb{R}^2 - J$, então esse caminho não encontra J_s , contradizendo o Lema 2.2.2.

Similarmente, se w está na metade superior de Γ , o caminho $\overline{sz_0} + \alpha_w + \widehat{wn}$ não encontra J_n , no qual \widehat{wn} é o menor caminho em Γ de w até n .

A contradição mostra que U é uma componente limitada.

Finalmente, suponhamos que exista outra componente limitada W ($\neq U$) de $\mathbb{R}^2 - J$. Claramente $W \subset E(-1, 1; -2, 2)$.

Denotemos por β o caminho $\overline{nl} + \widehat{lm} + \overline{mp} + \widehat{pq} + \overline{qs}$, no qual \widehat{pq} é o subarco de J_s de p até q . Como pode ser facilmente visto, β não possui pontos de W .

Como a e b não estão em β , existem vizinhanças V_a e V_b de a e b , respectivamente, tais que cada uma delas não contém pontos de β . Pelo Lema 2.2.1, como W é uma componente que possui J como seu bordo, segue que a e b estão em \overline{W} . Assim, existem $a_1 \in W \cap V_a$ e $b_1 \in W \cap V_b$. Seja $\widehat{a_1b_1}$ um caminho em W de a_1 para b_1 . Logo o caminho $\overline{aa_1} + \widehat{a_1b_1} + \overline{b_1b}$ não encontra β . Porém, isso contradiz o Lema 2.2.2.

Portanto $\mathbb{R}^2 - J$ possui exatamente duas componentes, uma ilimitada e uma limitada, cada uma das quais tendo J como seu bordo. Dessa forma, a prova do Teorema da Curva de Jordan fica completa. ■

O Número de Lefschetz e o Teorema de Lefschetz-Hopf

Em 1923 S. Lefschetz formulou o famoso teorema de pontos fixos, conhecido como Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz. Tal resultado foi primeiramente descoberto para variedades fechadas e, em 1926, ele foi estendido, pelo próprio Lefschetz, para variedades com bordo. Mais tarde, em 1928, H. Hopf apresentou uma nova prova do Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz para auto-aplicações de poliedros, isto é, aplicações de um poliedro nele mesmo. Este último resultado ficou conhecido como Teorema de Lefschetz-Hopf.

Neste capítulo apresentaremos a teoria clássica do ponto fixo de Lefschetz, que culmina em um teorema fundamental na teoria de pontos fixos que é o Teorema de Lefschetz-Hopf. Tal teorema compara duas componentes importantes: uma geométrica (local), que consiste no índice de pontos fixos, e outra algébrica (global), que consiste no número de Lefschetz.

Teremos como objetivo provar o Teorema de Lefschetz-Hopf, prova esta que será baseada no artigo de M. Arkowitz e R. F. Brown ([1]). Como consequência, mostraremos o Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz e o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Além disso, definiremos os conceitos de grau de uma aplicação, índice de pontos fixos e número de Lefschetz.

3.1 Grau de uma aplicação

3.1.1 Definição do grau de uma aplicação

Definição 3.1.1 *Sejam E o espaço euclidiano e $U \subset E$ um subconjunto aberto. Uma aplicação contínua $f : U \rightarrow E$ é chamada **d-compacta** se $f^{-1}(0)$ é compacto.*

Exemplo 3.1.1 *Se $f = id_E$ então $f^{-1}(0) = \{0\}$ que é um conjunto compacto. Logo, $f = id_E$ é uma aplicação d-compacta.*

Exemplo 3.1.2 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação dada por $f(t) = t^2 - 1$. Como $f^{-1}(0) = \{-1, +1\}$, que é compacto, segue que f é d-compacta.*

Definição 3.1.2 *A **orientação** de um espaço euclidiano n -dimensional E , em um ponto $x \in E$, é dada pela escolha de um gerador do grupo de homologia $H_n(E, E \setminus x) \approx \mathbb{Z}$.*

Seja $\Delta_n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : t_0 + \dots + t_n = 1, t_i \geq 0\}$ o simplexo n -dimensional. Este simplexo é um conjunto convexo gerado pelo vértices da base de

$$\mathbb{R}^{n+1} : v_0 = (1, 0, \dots, 0), v_1 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, v_n = (0, \dots, 0, 1).$$

Agora uma escolha de quaisquer pontos linearmente independentes a_0, \dots, a_n , determina a aplicação afim $\phi : \Delta_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\phi(v_i) = a_i$. Se $y \in \text{int}(\phi(\Delta_n))$, então a classe de homologia $[\phi]$ é um gerador do grupo de homologia $H_n(E, E \setminus \{y\}) = \mathbb{Z}$. Denotemos este gerador por z_y .

Fixando a orientação em um ponto x , determinamos a orientação ao longo de cada subconjunto compacto do espaço euclidiano.

Se $U \subset E$ é um subconjunto aberto contendo o conjunto compacto K , então $z_K \in H_m(E, E \setminus K)$, a orientação ao longo de K , pode ser considerado como o elemento de $H_m(U, U \setminus K) = H_m(E, E \setminus K)$.

Definição 3.1.3 *Sejam E o espaço euclidiano n -dimensional e $U \subset E$ um subconjunto aberto. Fixemos uma orientação para o espaço E tomando um gerador $z_0 \in H_n(E, E \setminus \{0\})$. Consideremos $f : U \rightarrow E$ uma aplicação d-compacta.*

Denotemos a orientação ao longo do conjunto compacto $f^{-1}(0)$ por $z_{f^{-1}(0)} \in H_n(U, U \setminus f^{-1}(0)) = H_n(E, E \setminus f^{-1}(0))$. A aplicação f induz o homomorfismo

$$f_* : H_n(U, U \setminus f^{-1}(0)) \longrightarrow H_n(E, E \setminus 0) = \mathbb{Z}.$$

Agora, $f_*(z_{f^{-1}(0)}) = d.z_0$ para um inteiro d . Esse número é chamado **grau** da aplicação d -compacta f e é denotado por $\deg(f)$.

Exemplo 3.1.3 Temos $\deg(\text{id}_{\mathbb{R}^m}) = 1$, já que $\text{id}_*(z_0) = 1.z_0$.

Exemplo 3.1.4 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação dada por $f(t) = at$. Se $a \neq 0$, então $f^{-1}(0) = \{0\}$ é compacto. O homomorfismo $f_* : H_1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus 0) \rightarrow H_1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus 0)$ é dado por $f_*(z) = \text{sgn}(a).z$, com $\text{sgn}(a)$ igual a $+1$ se $a > 0$ e -1 se $a < 0$, o que implica $\deg(f) = \text{sgn}(a)$. Para $a = 0$, a aplicação f não é d -compacta, logo o grau não está definido.

3.1.2 Propriedades do grau

Apresentaremos as propriedades básicas do grau de uma aplicação, cujas demonstrações podem ser encontradas em [9].

Definição 3.1.4 Seja X um espaço topológico. Dizemos que uma aplicação $f : X \rightarrow X$ é **compactamente fixada** se o conjunto dos seus pontos fixos é compacto.

Seja $U \subset E$ um subconjunto aberto de um espaço euclidiano E e seja $f : U \rightarrow E$ uma aplicação d -compacta.

Lema 3.1.1 (Localização) Seja $i : V \rightarrow U$ a inclusão de um subconjunto aberto satisfazendo $f^{-1}(0) \subset V$ e $f|_V : V \rightarrow E$ a restrição de f . Assim, $\deg(f|_V) = \deg(f)$. ■

Lema 3.1.2 (Unidade) Se $i : U \rightarrow E$ é a aplicação inclusão, então

$$\deg(i) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \in U; \\ 0, & \text{se } 0 \notin U. \end{cases}$$

■

Lema 3.1.3 (Aditividade) Se $U_1, U_2 \subset U$ são subconjuntos abertos tais que as restrições $f_1 = f|_{U_1}, f_2 = f|_{U_2}$ são compactamente fixadas e $U_1 \cap U_2$ é disjunto de $f^{-1}(0)$, então

$$\deg(f) = \deg(f_1) + \deg(f_2).$$

■

Lema 3.1.4 (Invariância Homotópica) Seja $U \subset E$ um subconjunto aberto e seja $F : U \times I \rightarrow E$ uma aplicação d -compacta. Dessa forma, $\deg(f_0) = \deg(f_1)$ (com $f_t = F(\cdot, t)$ para $0 \leq t \leq 1$).

■

Lema 3.1.5 (Multiplicatividade) Se $f : U \rightarrow E, f' : U' \rightarrow E'$ são d -compactas, então também o é $f \times f' : U \times U' \rightarrow E \times E'$ e $\deg(f \times f') = \deg(f) \cdot \deg(f')$.

■

Teorema 3.1.1 Existe uma única função associando a cada aplicação d -compacta $f : U \rightarrow E$, com U um subconjunto aberto do espaço euclidiano E , um inteiro $\deg(f, U)$ que satisfaz as propriedades: Localização, Unidade, Aditividade, Invariância Homotópica e Multiplicatividade.

■

Proposição 3.1.1 Uma aplicação linear $f : E \rightarrow E$ é d -compacta se, e somente se, é um isomorfismo. Assim

$$\deg(f) = \begin{cases} +1, & \text{se } f \text{ preserva a orientação;} \\ -1, & \text{se } f \text{ inverte a orientação.} \end{cases}$$

Em outras palavras, $\deg(f) = \text{sgn}(\det A)$, em que A é a matriz representando f .

Demonstração. Seja $f : E \rightarrow E$ uma aplicação linear. Dessa forma, $f^{-1}(0) = \text{Ker}(f)$ e este último é compacto se, e somente se, f é um isomorfismo. Assumiremos assim, que f é um isomorfismo.

Sabemos que o grupo $Gl(\mathbb{R}, n)$ possui duas componentes conexas.

Se a matriz A representando a aplicação f (em uma base fixada) satisfaz $\det A > 0$, então existe um caminho em $Gl(\mathbb{R}, n)$ juntando A com a matriz identidade. Isso resulta em uma homotopia de f para a aplicação identidade id_E . Assim, $\deg(f) = \deg(id_E) = 1$.

Agora, se $\det A < 0$, então f pode ser homotópica a uma aplicação $g(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_{n-1}, -t_n)$. Pela Propriedade de Multiplicatividade, $\deg(f) = -1$.

Portanto, em cada caso $\deg(f) = \text{sgn}(\det(A))$. ■

Proposição 3.1.2 *Seja $U \subset E$ um subconjunto aberto, $x_0 \in E$ e seja $s_{x_0} : U \rightarrow E$ dado por $s_{x_0}(x) = x - x_0$. Assim*

$$\deg(s_{x_0}) = \begin{cases} +1, & \text{se } x_0 \in U; \\ 0, & \text{se } x_0 \notin U. \end{cases}$$

Demonstração. Se $x_0 \notin U$ então $s_{x_0}^{-1}(0) = \emptyset$ assim, $\deg(s_{x_0}) = 0$.

Se $x_0 \in U$ então $s_{x_0}^{-1}(0) = \{x_0\}$, e a matriz que representa s_{x_0} possui determinante igual a 1. Dessa forma, pela Proposição anterior, segue que $\deg(s_{x_0}) = 1$. ■

3.2 Índice de Pontos Fixos

Usaremos o grau para definir o índice de pontos fixos que é uma medida algébrica do número de pontos fixos de uma auto-aplicação, isto é, uma aplicação que vai de um espaço nele mesmo, contínua.

Seja X um espaço topológico, U seu subconjunto e $f : U \rightarrow X$ uma aplicação. Lembremos que $\text{Fix}(f) = \{x \in U \mid f(x) = x\}$ denota o **conjunto dos pontos fixos** que é um conjunto fechado em X .

Se $X = E$ é um espaço euclidiano, $\text{Fix}(f) = F^{-1}(0)$ com $F : U \rightarrow E$ dado pela fórmula $F(x) = x - f(x)$.

Notemos que uma aplicação $f : E \rightarrow E$ de um espaço euclidiano é compactamente fixada se, e somente se, $F(x) = x - f(x)$ é d -compacto. Além disso, um ponto x é um ponto fixo de f se, e somente se, x é um zero de F .

Definição 3.2.1 *Seja $U \subset E$ um subconjunto aberto de um espaço euclidiano e seja $f : U \rightarrow E$ uma aplicação compactamente fixada. Definimos o **índice de pontos fixos** da f como $\text{ind}(f) := \deg(F)$, com $F(x) = x - f(x)$.*

Observação 3.2.1 *$\text{ind}(f) \neq 0$ implica na existência de um ponto fixo para a aplicação f .*

De fato. Se $\deg(F) = \text{ind}(f) \neq 0$ então existe um zero de F que é um ponto fixo da f .

Observação 3.2.2 Quando o domínio de $f : U \rightarrow E$ é óbvio, escrevemos simplesmente $ind(f)$. Entretanto, costumamos restringir o domínio da aplicação dada. Assim, escrevemos $ind(f, U)$ para especificar qual o domínio atual.

Podemos ter também diferentes funções com domínios e imagens restritas, neste caso se tal função for $g : U \rightarrow V$ por exemplo, denotamos seu índice de pontos fixos por $ind(V, g, U)$ para que não haja perigo de confusão.

Exemplo 3.2.1 Seja $s : U \rightarrow E$ uma aplicação constante $s(U) = x_0$. Logo

$$ind(s) = \begin{cases} +1, & \text{se } x_0 \in U; \\ 0, & \text{se } x_0 \notin U. \end{cases}$$

De fato. A aplicação $F(x) = x - s(x) = x - x_0$ é a inclusão do subconjunto aberto e $0 \in F(U)$ se, e somente se, $x_0 \in U$. Dessa forma, o resultado segue da Proposição 3.1.2.

Exemplo 3.2.2 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = at$ para $a \neq 1$. Assim

$$ind(f) = \begin{cases} +1, & \text{para } a < 1; \\ -1, & \text{para } a > 1. \end{cases}$$

3.2.1 Propriedades do Índice de Pontos Fixos

As propriedades do grau implicam em propriedades similares para o índice de pontos fixos no espaço euclidiano. Seja $f : U \rightarrow E$ uma aplicação compactamente fixada de um subconjunto aberto do espaço euclidiano.

Lema 3.2.1 (Localização) Seja $i : U' \rightarrow U$ a inclusão de um subconjunto aberto satisfazendo $Fix(f) \subset U'$. Dessa forma, $f|_{U'}$ é compactamente fixada e $ind(f|_{U'}) = ind(f)$.

Demonstração. Recordemos que $ind(f) = deg(id - f)$ e $ind(f|_{U'}) = deg(id - f)|_{U'}$.

Além disso,

$$(id - f)^{-1}(0) = Fix(f) = Fix(f|_{U'}) = (id - f)|_{U'}^{-1}(0).$$

Logo, pelo Lema 3.1.1, os graus são iguais e o resultado fica provado. ■

Lema 3.2.2 (Unidade) *Se $\rho : U \rightarrow E$ é a aplicação constante $\rho(U) = x_0$, então*

$$\text{ind}(\rho) = \begin{cases} +1, & \text{se } x_0 \in U; \\ 0, & \text{se } x_0 \notin U. \end{cases}$$

Demonstração. Como $\text{ind}(\rho) = \text{deg}(s_{x_0})$ com $s_{x_0} = \text{id} - \rho$, basta aplicar a Proposição 3.1.2 e o resultado segue. ■

Lema 3.2.3 (Aditividade) *Se $U_1, U_2 \subset U$ são subconjuntos abertos tais que as restrições $f|_{U_1}, f|_{U_2}$ são compactamente fixadas e $U_1 \cap U_2$ é disjunto de $\text{Fix}(f)$, então*

$$\text{ind}(f) = \text{ind}(f|_{U_1}) + \text{ind}(f|_{U_2}).$$

Demonstração. A aplicação $\text{id} - f$ satisfaz as condições do Lema 3.1.3, assim

$$\text{ind}(f) = \text{deg}(\text{id} - f) = \text{deg}(\text{id} - f|_{U_1}) + \text{deg}(\text{id} - f|_{U_2}) = \text{ind}(f|_{U_1}) + \text{ind}(f|_{U_2}).$$

Lema 3.2.4 (Invariância Homotópica) *Sejam $W \subset E \times [0, 1]$ um subconjunto aberto e $F : W \rightarrow E$ uma aplicação compactamente fixada, isto é, o conjunto*

$$\text{Fix}(F) = \{(x, t) \in W \mid F(x, t) = x\}$$

é compacto. Assim, $\text{ind}(f_0) = \text{ind}(f_1)$, com $f_t = F(\cdot, t)$ para $0 \leq t \leq 1$.

Demonstração. Como $(p_1 - F)^{-1}(0) = \text{Fix}(F)$ é compacto, aplicamos o Lema 3.1.4 e obtemos,

$$\text{ind}(f_0) = \text{deg}(p_1 - f_0) = \text{deg}(p_1 - f_1) = \text{ind}(f_1).$$

Lema 3.2.5 (Multiplicatividade) *Se $f : U \rightarrow E$, $f' : U' \rightarrow E'$ são aplicações compactamente fixadas, então $f \times f' : U \times U' \rightarrow E \times E'$ também é compactamente fixada e, $\text{ind}(f \times f') = \text{ind}(f) \cdot \text{ind}(f')$.*

Demonstração. Visto que $\text{Fix}(f \times f') = \text{Fix}(f) \times \text{Fix}(f')$ podemos aplicar o Lema 3.1.5. Dessa forma,

$$\text{ind}(f \times f') = \text{deg}(\text{id} \times \text{id}' - f \times f') = \text{deg}(\text{id} - f) \cdot \text{deg}(\text{id}' - f') = \text{ind}(f) \cdot \text{ind}(f').$$

O índice de pontos fixos também possui uma outra propriedade muito importante através da qual, será possível estender sua definição para uma classe de espaços muito mais ampla.

Lema 3.2.6 (Comutatividade) *Se $U \subset E$, $U' \subset E'$ são subconjuntos abertos dos espaços euclidianos e, $f : U \rightarrow E'$ e $g : U' \rightarrow E$ são aplicações contínuas, então as compostas*

$$g \circ f : V = f^{-1}(U') \rightarrow E, \quad f \circ g : V' = g^{-1}(U) \rightarrow E'$$

possuem conjuntos dos pontos fixos homeomorfos $Fix(g \circ f) = Fix(f \circ g)$. E se além disso esses conjuntos são compactos, então $ind(f \circ g) = ind(g \circ f)$.

Demonstração. [9], II.2.2.11. ■

3.2.2 Espaços ENR e índice de pontos fixos para espaços ENR

Visto que questões sobre a existência de um ponto fixo faz sentido para auto-aplicações de um espaço topológico arbitrário, é natural indagarmos se a noção de índice dos pontos fixos pode ser generalizada para uma classe maior de espaços.

Primeiramente, recordemos que um espaço topológico X é chamado **retrato** de um outro espaço Y se existem aplicações $s : X \rightarrow Y$, $r : Y \rightarrow X$ satisfazendo $r \circ s = id_X$. Se a aplicação r existe, então ela é chamada de **retração**.

Passamos agora a apresentar a classe de espaços na qual definiremos o índice.

Definição 3.2.2 *Um espaço métrico X é chamado **retrato de vizinhança euclidiana**, abreviadamente **ENR**, se X é um retrato de um subconjunto aberto de um espaço euclidiano. Escrevemos $X \in ENR$.*

Como exemplos de **ENR** temos:

- (a) um número finito de pontos em \mathbb{R}^n ;
- (b) um p -simplexo em \mathbb{R}^n ;
- (c) um CW-complexo finito.

Seja X um ENR, $U \subset X$ seu subconjunto aberto e $f : U \rightarrow X$ uma aplicação compactamente fixada. Fixemos um subconjunto aberto de um espaço euclidiano $V \subset E$

com as aplicações $r : V \rightarrow X$, $s : X \rightarrow V$, $r \circ s = id_X$. Consideremos a aplicação $(s \circ f \circ r)|_1 : r^{-1}(U) \rightarrow V$ dada por $(s \circ f \circ r)|_1(x) = (s \circ f \circ r)(x)$.

Proposição 3.2.1 *Os conjuntos dos pontos fixos $Fix(s \circ f \circ r)|_1$, $Fix(f)$ são homeomorfos. Os homeomorfismos são dados pela restrições das aplicações r e s .*

Demonstração. Seja $x \in Fix(f)$. Mostremos que $s(x) \in Fix(s \circ f \circ r)|_1$. Primeiramente notemos que $s(x) \in r^{-1}(U) = \text{domínio de } (s \circ f \circ r)|_1$. De fato, $(r \circ s)(x) = x \in U = \text{domínio de } f$, assim $s(x) \in r^{-1}(U)$. Agora,

$$(s \circ f \circ r)|_1(s(x)) = s \circ f(r \circ s(x)) = s \circ f(x) = s(x),$$

logo $s(x) \in Fix(s \circ f \circ r)|_1$.

Seja $y \in Fix(s \circ f \circ r)|_1$. Mostremos que $r(y) \in Fix(f)$. Como $y \in r^{-1}(U)$ e $y = (s \circ f \circ r)(y)$,

$$r(y) = r((s \circ f \circ r)(y)) = f \circ r(y),$$

logo $r(y) \in Fix(f)$. ■

A igualdade anterior do conjunto dos pontos fixos sugere a seguinte extensão da definição de índice de pontos fixos: seguindo a notação anterior, definimos o índice de pontos fixos de uma aplicação compactamente fixada $f : U \rightarrow X$, com X um espaço ENR e $U \subset X$ um subconjunto aberto, como

$$ind(f) = ind(s \circ f \circ r)|_1.$$

Sendo f compactamente fixada, pela Proposição anterior $(s \circ f \circ r)|_1 : r^{-1}(U) \rightarrow E$ também é compactamente fixada, assim o índice do lado direito da igualdade está definido. Resta agora provar que tal definição está correta, isto é, não depende da escolha das aplicações r e s , que é o que mostra a proposição a seguir.

Proposição 3.2.2 *Sejam X um espaço ENR, V seu subconjunto aberto e $f : V \rightarrow X$ uma aplicação compactamente fixada. Suponha que $U \subset E$, $U' \subset E'$ são subconjuntos abertos de espaços euclidianos e, sejam $U \xrightarrow{r} X \xrightarrow{s} U$, $U' \xrightarrow{r'} X \xrightarrow{s'} U'$ aplicações satisfazendo $r \circ s = id_X$, $r' \circ s' = id_X$. Assim*

$$ind(s \circ f \circ r)|_1, r^{-1}(V) = ind(s' \circ f \circ r')|_1, r'^{-1}(V).$$

Demonstração. Consideremos as aplicações $(s' \circ f \circ r)_| : r^{-1}(V) \rightarrow U' \subset E'$, $(s \circ r')_| : U' \rightarrow U \subset E$. Dessa forma,

$$(s \circ r')_|(s' \circ f \circ r)_| = s \circ f \circ r_|, \quad (s' \circ f \circ r)_|(s \circ r')_| = s' \circ f \circ r'_|.$$

Como essas aplicações são compactamente fixadas, o Lema da Comutatividade implica que $ind(s \circ f \circ r_|, r^{-1}(V)) = ind(s' \circ f \circ r'_|, r'^{-1}(V))$. ■

Logo para cada tripla (V, f, X) (com X um espaço ENR, $V \subset X$ um subconjunto aberto, $f : V \rightarrow X$ uma aplicação compactamente fixada) corresponde um inteiro $ind(f, V)$.

As propriedades do índice consideradas anteriormente permanecem válidas para esta classe mais geral de espaços ENR.

Teorema 3.2.1 *Existe uma única função (um inteiro) associada a cada aplicação compactamente fixada $f : V \rightarrow X$, em que V é um subconjunto aberto de um espaço ENR X , satisfazendo as propriedades: Localização, Unidade, Aditividade, Invariância Homotópica, Multiplicatividade e Comutatividade.* ■

Exemplo 3.2.3 *Consideremos o círculo unitário $S^1 \subset \mathbb{C}$. Seja $f_r : S^1 \rightarrow S^1$ uma aplicação de grau $r \in \mathbb{Z}$. Assumiremos que $f_r(z) = z^r$. Mostremos que $ind(f_r) = 1 - r$.*

Primeiramente notemos que $f_0 = cte$, assim $ind(f_0) = +1$.

Agora, $f_1(z) = z = \cos x + i \operatorname{sen} x$. Através de uma rotação por um pequeno ângulo θ , f_1 é homotópica a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} f_\theta(z) &= \cos(x + \theta) + i \operatorname{sen}(x + \theta) = \cos x \cos \theta - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \theta + i(\operatorname{sen} x \cos \theta + \cos x \operatorname{sen} \theta) = \\ &= \cos \theta(\cos x + i \operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} \theta(-\operatorname{sen} x + i \cos x) = \cos \theta(\cos x + i \operatorname{sen} x) + i \operatorname{sen} \theta(\cos x + i \operatorname{sen} x) = \\ &= z(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = e^{i\theta} z, \end{aligned}$$

pela homotopia

$$H(z, t) = \cos(x + t\theta) + i \operatorname{sen}(x + t\theta) = z(\cos t\theta + i \operatorname{sen} t\theta) = e^{it\theta} z.$$

Como a aplicação f_θ é livre de pontos fixos e f_1 é homotópica a f_θ , segue que $ind(f_1) = 0$.

Seja $r \geq 2$. Neste caso, $z^r = z$ implica $z(z^{r-1} - 1) = 0$, assim z é uma raiz da unidade de grau $r - 1$ que possui $r - 1$ pontos fixos. Agora, notemos que próximo a cada ponto fixo a

aplicação f é expandida (r -vezes) e preserva a orientação. Assim, por um homeomorfismo local (com uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}$) f corresponde a cada aplicação $t \mapsto rt \in \mathbb{R}$. Pelo Exemplo 3.2.2, como $r \geq 2$ segue que $\text{ind}(f, z) = -1$. Logo, $\text{ind}(f_r) = (r-1)(-1) = 1-r$.

Consideremos agora $r < 0$. Neste caso, $z^r = z$ implica $z^{1-r} = 1$, $1-r > 0$, assim temos $1-r$ pontos fixos. Como f_r reverte orientação para $r < 0$, pelo Exemplo 3.2.2, o índice de cada ponto fixo é igual a $+1$. Logo, $\text{ind}(f_r) = (1-r)(+1) = 1-r$.

Portanto, $\text{ind}(f_r) = 1-r$ para todo $r \in \mathbb{Z}$.

3.3 Número de Lefschetz e sequências exatas

Nesta seção veremos, primeiramente, a definição do número de Lefschetz para espaços vetoriais de dimensão finita e, algumas propriedades envolvendo sequências exatas.

Consideremos todos os espaços vetoriais sobre um corpo fixado F , o qual não será mencionado, e possuindo dimensões finitas.

Um **espaço vetorial classificado** $V = \{V_n\}$ terá sempre as seguintes propriedades:

- i) cada V_n possui dimensão finita, e
- ii) $V_n = 0$, para $n < 0$ e $n > N$, no qual N é algum inteiro não negativo que varia com V .

Uma aplicação $f : V \rightarrow W$ de espaços vetoriais classificados $V = \{V_n\}$ e $W = \{W_n\}$ é uma sequência de transformações lineares $f_n : V_n \rightarrow W_n$. Para cada aplicação $f : V \rightarrow V$, o **número de Lefschetz** é definido por

$$L(f) = \sum (-1)^n \text{Tr}(f_n),$$

com Tr denotando o traço da matriz de f_n .

Lema 3.3.1 *Dado uma aplicação de sequências exatas de espaços vetoriais*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & U & \longrightarrow & V & \longrightarrow & W & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & U & \longrightarrow & V & \longrightarrow & W & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

então $\text{Tr}(g) = \text{Tr}(f) + \text{Tr}(h)$.

Demonstração. Considere o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & U & \xrightarrow{i_1} & V & \xrightarrow{p_1} & W & \longrightarrow & 0 \\
& & f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & U & \xrightarrow{i_2} & V & \xrightarrow{p_2} & W & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

Como U , V e W são espaços vetoriais sobre um corpo F , existem homomorfismos $\psi_1 : V \rightarrow U$ e $\psi_2 : V \rightarrow U$ tais que $\psi_1 \circ i_1 = id_U$ e $\psi_2 \circ i_2 = id_U$.

Além disso, $V = Im i_1 \oplus Ker \psi_1 = Im i_2 \oplus Ker \psi_2$.

Dado $v \in V$ temos $v = i_1(u_1) + v_1$ com $u_1 \in U$ e $\psi_1(v_1) = 0$.

Definimos $\chi_1 : V \rightarrow U \times W$ por $\chi_1(v) = (u_1, p_1(v_1))$.

Da mesma forma, $v = i_2(u_2) + v_2$ com $u_2 \in U$ e $\psi_2(v_2) = 0$.

Definimos $\chi_2 : V \rightarrow U \times W$ por $\chi_2(v) = (u_2, p_2(v_2))$.

Claramente, χ_1 e χ_2 são isomorfismos.

Da comutatividade do diagrama acima obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
V & \xrightarrow{\chi_1} & U \times W \\
g \downarrow & & \downarrow f \times h \\
V & \xrightarrow{\chi_2} & U \times W
\end{array}$$

com $(f \times h)(u, w) = (f(u), h(w))$.

Assim,

$$Tr(g) = Tr(\chi_2^{-1} \circ (f \times h) \circ \chi_1) = Tr(\chi_2^{-1} \circ \chi_1 \circ (f \times h)) = Tr(f \times h) = Tr(f) + Tr(h). \quad \blacksquare$$

Teorema 3.3.1 *Sejam A , B e C espaços vetoriais classificados com aplicações $\alpha : A \rightarrow B$, $\beta : B \rightarrow C$ e auto-aplicações $f : A \rightarrow A$, $g : B \rightarrow B$, e $h : C \rightarrow C$. Se, para todo N , existe uma transformação linear $\partial_n : C_n \rightarrow A_{n-1}$, $0 \leq n \leq N$, tal que o seguinte diagrama é comutativo e possui linhas exatas:*

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & \longrightarrow & A_N & \xrightarrow{\alpha_N} & B_N & \xrightarrow{\beta_N} & C_N & \xrightarrow{\partial_N} & A_{N-1} & \xrightarrow{\alpha_{N-1}} & \cdots & \xrightarrow{\partial_1} & A_0 & \xrightarrow{\alpha_0} & B_0 & \xrightarrow{\beta_0} & C_0 & \longrightarrow & 0 & \quad (3.1) \\
& & f_N \downarrow & & g_N \downarrow & & h_N \downarrow & & f_{N-1} \downarrow & & & & f_0 \downarrow & & g_0 \downarrow & & h_0 \downarrow & & & \\
0 & \longrightarrow & A_N & \xrightarrow{\alpha_N} & B_N & \xrightarrow{\beta_N} & C_N & \xrightarrow{\partial_N} & A_{N-1} & \xrightarrow{\alpha_{N-1}} & \cdots & \xrightarrow{\partial_1} & A_0 & \xrightarrow{\alpha_0} & B_0 & \xrightarrow{\beta_0} & C_0 & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

então $L(g) = L(f) + L(h)$.

Demonstração. Consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \text{Im}\beta_n & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & \text{Im}\partial_n \longrightarrow 0 \\
& & h_n|\text{Im}\beta_n \downarrow & & h_n \downarrow & f_{n-1}|\text{Im}\partial_n \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & \text{Im}\beta_n & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & \text{Im}\partial_n \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Pelo Lema 3.3.1 temos, $Tr(h_n) = Tr(h_n|\text{Im}\beta_n) + Tr(f_{n-1}|\text{Im}\partial_n)$. Similarmente, o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \text{Im}\partial_n & \longrightarrow & A_{n-1} & \longrightarrow & \text{Im}\alpha_{n-1} \longrightarrow 0 \\
& & f_{n-1}|\text{Im}\partial_n \downarrow & & f_{n-1} \downarrow & g_{n-1}|\text{Im}\alpha_{n-1} \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & \text{Im}\partial_n & \longrightarrow & A_{n-1} & \longrightarrow & \text{Im}\alpha_{n-1} \longrightarrow 0.
\end{array}$$

produz que $Tr(f_{n-1}|\text{Im}\partial_n) = Tr(f_{n-1}) - Tr(g_{n-1}|\text{Im}\alpha_{n-1})$. Assim,

$$Tr(h_n) = Tr(h_n|\text{Im}\beta_n) + Tr(f_{n-1}) - Tr(g_{n-1}|\text{Im}\alpha_{n-1}).$$

Agora consideremos

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \text{Im}\alpha_{n-1} & \longrightarrow & B_{n-1} & \longrightarrow & \text{Im}\beta_{n-1} \longrightarrow 0 \\
& & g_{n-1}|\text{Im}\alpha_{n-1} \downarrow & & g_{n-1} \downarrow & h_{n-1}|\text{Im}\beta_{n-1} \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & \text{Im}\alpha_{n-1} & \longrightarrow & B_{n-1} & \longrightarrow & \text{Im}\beta_{n-1} \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Logo, $Tr(g_{n-1}|\text{Im}\alpha_{n-1}) = Tr(g_{n-1}) - Tr(h_{n-1}|\text{Im}\beta_{n-1})$. Juntando as duas últimas igualdades, obtemos

$$Tr(h_n) = Tr(h_n|\text{Im}\beta_n) + Tr(f_{n-1}) - Tr(g_{n-1}) + Tr(h_{n-1}|\text{Im}\beta_{n-1}). \quad (3.2)$$

Observemos agora a parte final mais a esquerda do diagrama (3.1), obteremos daí os seguintes diagramas comutativos e as seguintes igualdades

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \text{Im}\alpha_N & \longrightarrow & B_N & \longrightarrow & \text{Im}\beta_N \longrightarrow 0 \\
& & g_N|\text{Im}\alpha_N \downarrow & & g_N \downarrow & h_N|\text{Im}\beta_N \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & \text{Im}\alpha_N & \longrightarrow & B_N & \longrightarrow & \text{Im}\beta_N \longrightarrow 0
\end{array}$$

$$Tr(g_N) = Tr(g_N|\text{Im}\alpha_N) + Tr(h_N|\text{Im}\beta_N).$$

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \text{Im}\partial_{N+1} & \longrightarrow & A_N & \longrightarrow & \text{Im}\alpha_N \longrightarrow 0 \\
& & f_N|\text{Im}\partial_{N+1} \downarrow & & f_N \downarrow & g_N|\text{Im}\alpha_N \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & \text{Im}\partial_{N+1} & \longrightarrow & A_N & \longrightarrow & \text{Im}\alpha_N \longrightarrow 0
\end{array}$$

$Tr(f_N) = Tr(f_N|Im\partial_{N+1}) + Tr(g_N|Im\alpha_N)$, juntando com a igualdade anterior segue que

$$Tr(f_N) = Tr(f_N|Im\partial_{N+1}) + Tr(g_N) - Tr(h_N|Im\beta_N).$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Im\partial_{N+1} & \longrightarrow & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ h_{N+1} & & f_N|Im\partial_{N+1} & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Im\partial_{N+1} & \longrightarrow & 0. & & \end{array}$$

Deste último obtemos $0 = Tr(h_{N+1}) = Tr(f_N|Im\partial_{N+1})$.

Assim, pela parte final mais a esquerda do diagrama (3.1) temos

$$0 = Tr(h_{N+1}) = Tr(f_N) - Tr(g_N) + Tr(h_N|Im\beta_N). \quad (3.3)$$

Fazendo agora alguns cálculos e, considerando todo homomorfismo com um subíndice negativo como o homomorfismo nulo, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (-1)^n Tr(h_n) &= \sum_{n=0}^N (-1)^n Tr(h_n) + (-1)^{N+1} Tr(h_{N+1}) = \sum_{n=0}^N (-1)^n \left[Tr(h_n|Im\beta_n) + \right. \\ &+ Tr(f_{n-1}) - Tr(g_{n-1}) + Tr(h_{n-1}|Im\beta_{n-1}) \left. \right] + (-1)^{N+1} \left[Tr(f_N) - Tr(g_N) + Tr(h_N|Im\beta_N) \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{N+1} (-1)^n Tr(f_{n-1}) - \sum_{n=0}^{N+1} (-1)^n Tr(g_{n-1}) + \left(\sum_{n=0}^N (-1)^n \left[Tr(h_n|Im\beta_n) + Tr(h_{n-1}|Im\beta_{n-1}) \right] + \right. \\ &+ (-1)^{N+1} Tr(h_N|Im\beta_N) \left. \right) \stackrel{r=n-1}{=} \sum_{r=0}^N (-1)^{r-1} Tr(f_r) - \sum_{r=0}^N (-1)^{r-1} Tr(g_r) + \sum_{n=0}^N (-1)^n Tr(h_n|Im\beta_n) + \\ &+ \sum_{r=0}^{N-1} (-1)^{r+1} Tr(h_r|Im\beta_r) + (-1)^{N+1} Tr(h_N|Im\beta_N) \stackrel{n=r}{=} \sum_{n=0}^N (-1)^n Tr(g_n) - \sum_{n=0}^N (-1)^n Tr(f_n) + \\ &+ \left[\sum_{n=0}^N (-1)^n Tr(h_n|Im\beta_n) - \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n Tr(h_n|Im\beta_n) \right] + (-1)^{N+1} Tr(h_N|Im\beta_N) = \\ &= \sum_{n=0}^N (-1)^n Tr(g_n) - \sum_{n=0}^N (-1)^n Tr(f_n) + (-1)^N Tr(h_N|Im\beta_N) + (-1)^{N+1} Tr(h_N|Im\beta_N) = \\ &= \sum_{n=0}^N (-1)^n Tr(g_n) - \sum_{n=0}^N (-1)^n Tr(f_n). \end{aligned}$$

Portanto, $L(h) = L(g) - L(f)$. ■

3.4 O Número de Lefschetz na categoria dos CW-complexos

Seja \mathcal{C} uma coleção de espaços X com o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo finito e conexo. Se $X \in \mathcal{C}$, assumiremos que X possui ponto base somente quando X for

uma esfera ou um bouquet de esferas.

Uma aplicação $f : X \rightarrow X$, com $X \in \mathcal{C}$, induz homomorfismos triviais $f_{*k} : H_k(X) \rightarrow H_k(X)$ entre grupos de homologia com coeficiente racional, para todo $k > \dim X$. O **número de Lefschetz** $L(f)$ de f é definido por

$$L(f) = \sum_k (-1)^k \text{Tr}(f_{*k}),$$

no qual Tr denota o traço. O **número de Lefschetz reduzido** \tilde{L} é dado por $\tilde{L}(f) = L(f) - 1$ ou, equivalentemente, podemos definir $\tilde{L}(f)$ considerando os homomorfismos de grupos de homologia reduzida com coeficiente racional induzidos pela f .

Para $k \geq 1$, denotemos por $\bigvee^k S^n$ o bouquet de k cópias de n -esferas S^n , $n \geq 1$. Se escrevermos $\bigvee^k S^n$ como $S_1^n \vee S_2^n \vee \dots \vee S_k^n$, com $S_j^n = S^n$, então obtemos inclusões $e_j : S_j^n \rightarrow \bigvee^k S^n$ e projeções $p_j : \bigvee^k S^n \rightarrow S_j^n = S^n$, com $j = 1, \dots, k$. Se $f : \bigvee^k S^n \rightarrow \bigvee^k S^n$ é uma aplicação, então $f_j : S_j^n \rightarrow S_j^n$ denota a composição $p_j \circ f \circ e_j$.

Se $f : (X, A) \rightarrow (X, A)$ é uma auto-aplicação contínua de um par, em que $X, A \in \mathcal{C}$, então f determina $f_X : X \rightarrow X$ e $f_A : A \rightarrow A$. A aplicação f induz homomorfismos $f_{*k} : H_k(X, A) \rightarrow H_k(X, A)$ de homologia relativa com coeficiente racional.

O **número de Lefschetz relativo** $L(f; X, A)$ é definido por

$$L(f; X, A) = \sum_k (-1)^k \text{Tr}(f_{*k}).$$

Aplicando o Teorema 3.3.1 para a homologia de seqüências exatas do par (X, A) , obtemos os seguintes resultados.

Proposição 3.4.1 *Se $f : (X, A) \rightarrow (X, A)$ é uma aplicação contínua de pares, em que $X, A \in \mathcal{C}$, então*

$$L(f; X, A) = L(f_X) - L(f_A).$$

Demonstração. Consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) \longrightarrow \cdots \\ & & f_A \downarrow & & f_X \downarrow & & f \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Pelo Teorema 3.3.1 segue que $L(f; X, A) = L(f_X) - L(f_A)$. ■

Proposição 3.4.2 *Suponhamos $X = P \cup Q$, com $X, P, Q \in \mathcal{C}$. Se $f : X \rightarrow X$ é uma aplicação contínua tal que $f(P) \subseteq P$ e $f(Q) \subseteq Q$, então, para f_P, f_Q e $f_{P \cap Q}$ (restrições de f para P, Q e $P \cap Q$, respectivamente), temos*

$$L(f) = L(f_P) + L(f_Q) - L(f_{P \cap Q}).$$

Demonstração. A aplicação f e suas restrições induz uma aplicação da sequência de homologia de Mayer Vietoris nela mesma, como mostra o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_n(P \cap Q) & \longrightarrow & H_n(P) \oplus H_n(Q) & \longrightarrow & H_n(X) \longrightarrow \cdots \\ & & f_{P \cap Q} \downarrow & & f_P + f_Q \downarrow & & f \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & H_n(P \cap Q) & \longrightarrow & H_n(P) \oplus H_n(Q) & \longrightarrow & H_n(X) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Assim, pelo Teorema 3.3.1, concluímos que $L(f) = L(f_P) + L(f_Q) - L(f_{P \cap Q})$. ■

Nossa última consequência do Teorema 3.3.1 será utilizada na caracterização do número de Lefschetz reduzido.

Proposição 3.4.3 *Se A é um subpoliedro de X , $A \rightarrow X \rightarrow X/A$ é a sequência cofibrada resultante dos espaços em \mathcal{C} , e se existe um diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X/A \\ f' \downarrow & & f \downarrow & & \bar{f} \downarrow \\ A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X/A, \end{array}$$

então $L(f) = L(f') + L(\bar{f}) - 1$.

Demonstração. Aplicamos o Teorema 3.3.1 na sequência cofibrada de homologia. O

“menos um” que aparece no lado direito da igualdade, surge do fato da sequência terminar com o grupo de homologia reduzida, isto é, a sequência termina da seguinte forma

$$\longrightarrow H_0(A) \longrightarrow H_0(X) \longrightarrow \widetilde{H}_0(X/A) \longrightarrow 0.$$

■

3.5 Caracterização do Número de Lefschetz

Nesta seção vamos caracterizar o número de Lefschetz reduzido pelos quatro axiomas dados a seguir.

Seja λ uma função do conjunto das auto-aplicações contínuas dos espaços em \mathcal{C} para o conjunto dos inteiros, satisfazendo os seguintes axiomas:

(1) (Axioma da Homotopia) Se $f, g : X \rightarrow X$ são aplicações homotópicas, então $\lambda(f) = \lambda(g)$.

(2) (Axioma da Cofibração) Se A é um subcomplexo de X , $A \longrightarrow X \longrightarrow X/A$ é uma sequência natural usualmente denominada sequência cofibrada resultante, e dado o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X/A \\ f' \downarrow & & f \downarrow & & \bar{f} \downarrow \\ A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X/A, \end{array}$$

então $\lambda(f) = \lambda(f') + \lambda(\bar{f})$.

(3) (Axioma da Comutatividade) Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ são aplicações contínuas, então $\lambda(g \circ f) = \lambda(f \circ g)$.

(4) (Axioma do Bouquet de Círculos) Se $f : \bigvee^k S^1 \rightarrow \bigvee^k S^1$ é uma aplicação contínua, $k \geq 1$, então

$$\lambda(f) = -\left(\deg(f_1) + \dots + \deg(f_k)\right), \quad \text{com } f_j = p_j \circ f \circ e_j.$$

Para λ são válidos os seguintes resultados.

Lema 3.5.1 *Se $f : X \rightarrow X$ é uma aplicação contínua e $h : X \rightarrow Y$ é uma equivalência de homotopia com homotopia inversa $k : Y \rightarrow X$, então $\lambda(f) = \lambda(h \circ f \circ k)$.*

Demonstração. $\lambda(h(f \circ k)) \stackrel{\text{comut.}}{=} \lambda((f \circ k)h) = \lambda(f(h \circ k)) \stackrel{\text{homot.}}{=} \lambda(f)$. ■

Lema 3.5.2 Se $f : X \rightarrow X$ é homotópica a uma aplicação constante, então $\lambda(f) = 0$.

Demonstração. Consideremos $\{*\}$ um espaço com um ponto e $\varphi : \{*\} \rightarrow \{*\}$ a única aplicação de tal espaço. Da aplicação de sequências cofibradas

$$\begin{array}{ccccc} \{*\} & \longrightarrow & \{*\} & \longrightarrow & \{*\}/\{*\} = \{\bar{*}\} = \{*\} \\ \varphi \downarrow & & \varphi \downarrow & & \varphi \downarrow \\ \{*\} & \longrightarrow & \{*\} & \longrightarrow & \{*\} \end{array}$$

e do axioma da cofibração, segue que $\lambda(\varphi) = \lambda(\varphi) + \lambda(\varphi)$, e dessa forma $\lambda(\varphi) = 0$.

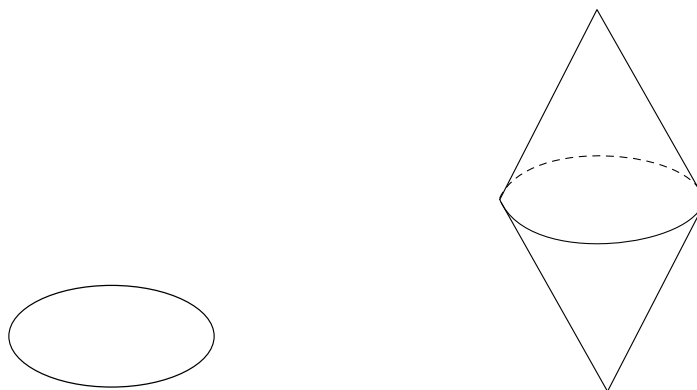
Seja $c : X \rightarrow X$ uma aplicação constante tal que $c(x) = *$, para algum $x \in X$. Considere $e : \{*\} \rightarrow X$ a aplicação inclusão e $p : X \rightarrow \{*\}$ a aplicação projeção. Dessa forma $c = e \circ p$ e $p \circ e = \varphi$, assim, pelo axioma da comutatividade, obtemos

$$\lambda(c) = \lambda(e \circ p) = \lambda(p \circ e) = \lambda(\varphi) = 0.$$

Logo, $\lambda(c) = 0$.

Agora, como f é homotópica a aplicação c , segue do axioma da homotopia que $\lambda(f) = \lambda(c) = 0$, portanto $\lambda(f) = 0$. ■

Definição 3.5.1 A **suspensão de um espaço** X , denotada por ΣX , é o espaço obtido de $I \times X$ pela identificação de cada um dos subconjuntos $\{0\} \times X$ e $\{1\} \times X$ a um ponto. Mais intuitivamente, ΣX é o cone duplo sobre X .



Já o **cone de suspensão** de X , denotado por CX , é o espaço obtido de $I \times X$ pela identificação de um dos subconjuntos $\{0\} \times X$ ou $\{1\} \times X$ a um ponto. Geometricamente, o cone de suspensão é da seguinte forma



Se X é um espaço baseado, isto é, com um ponto base denotado por $*$, ou seja, uma esfera ou um bouquet de esferas, então o cone e a suspensão de X são definidos por $CX = X \times I / (X \times \{1\} \cup \{*\} \times I)$ e $\Sigma X = CX / (X \times \{0\})$, respectivamente.

Lema 3.5.3 *Se X é um espaço baseado, $f : X \rightarrow X$ é uma aplicação contínua e baseada, e $\Sigma f : \Sigma X \rightarrow \Sigma X$ é a suspensão de f , então $\lambda(\Sigma f) = -\lambda(f)$.*

Demonstração. Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & CX & \longrightarrow & \Sigma X \\ f \downarrow & & Cf \downarrow & & \Sigma f \downarrow \\ X & \longrightarrow & CX & \longrightarrow & \Sigma X. \end{array}$$

Como CX é contrátil, Cf é homotópica a uma aplicação constante. Dessa forma, pelo Lema 3.5.2 e pelo axioma da cofibração,

$$0 = \lambda(Cf) = \lambda(f) + \lambda(\Sigma f).$$

Assim, $\lambda(\Sigma f) = -\lambda(f)$. ■

Lema 3.5.4 *Para qualquer $k \geq 1$ e $n \geq 1$, se $f : \bigvee^k S^n \rightarrow \bigvee^k S^n$ é uma aplicação contínua, então*

$$\lambda(f) = (-1)^n \left(\deg(f_1) + \dots + \deg(f_k) \right),$$

com $e_j : S^n \rightarrow \bigvee^k S^n$ e $p_j : \bigvee^k S^n \rightarrow S^n$, para $j = 1, \dots, k$, as inclusões e as projeções, respectivamente, e $f_j = p_j \circ f \circ e_j$.

Demonstração. A prova será feita por indução sobre esferas de dimensão n .

O caso $n = 1$ nada mais é do que o axioma do bouquet de círculos.

Se $n \geq 2$, então $f : \bigvee^k S^n \rightarrow \bigvee^k S^n$ é homotópica a uma aplicação baseada $f' : \bigvee^k S^n \rightarrow \bigvee^k S^n$. Considere $d_j = \deg(f'_j)$.

Seja $g_j : S_j^{n-1} \rightarrow S_j^{n-1}$, $j = 1, \dots, k$, aplicações contínuas com $\deg(g_j) = d_j$ (ver [7], II.2.8), com g_j uma aplicação baseada.

Considere $Y = \bigvee_{j=1}^k S_j^{n-1}$ e $g : Y \rightarrow Y$ definida por $g(x) := g_j(x)$, $x \in S_j^{n-1}$.

Usando os seguintes fatos:

- (i) $\sum S^{n-1} = S^n$ (ver [7], II.2.8);
- (ii) se $h : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ tem grau d , então $\sum h : S^n \rightarrow S^n$ também tem grau d (ver [7], II.2.8);
- (iii) $\sum (\bigvee_{j=1}^k S_j^{n-1}) = \bigvee_{j=1}^k \sum S_j^{n-1} \stackrel{(i)}{=} \bigvee_{j=1}^k S_j^{n-1}$ (ver [8], 0.0.10);

obtemos a aplicação $\sum g : X \rightarrow X$ tal que $\sum g(x) = \sum g_j(x)$, $x \in S_j^n$, $j = 1, \dots, k$, com $\deg(f'_j) = \deg(\sum g_j) = d_j$.

Por propriedades de grau temos $f'_j \stackrel{H_j}{\sim} \sum g_j$ por uma homotopia H_j , $j = 1, \dots, k$, preservando ponto base.

A aplicação $H : X \times I \rightarrow X$ definida por $H(x, t) = H_j(x, t)$ se $x \in S_j^n$, $j = 1, \dots, k$ é uma homotopia entre f' e $\sum g$.

Logo, f' é homotópica a $\sum g$. Observemos que se $g_j : S_j^{n-1} \rightarrow S_j^{n-1}$, então $\sum g_j$ é homotópica a $f_j : S_j^n \rightarrow S_j^n$. Assim, pelo Lema 3.5.3 e pela hipótese de indução,

$$\begin{aligned} \lambda(f) &= \lambda(f') = \lambda(\sum g) = -\lambda(g) = -(-1)^{n-1} (\deg(g_1) + \dots + \deg(g_k)) = \\ &= (-1)^n (\deg(f_1) + \dots + \deg(f_k)). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

O teorema abaixo apresenta uma caracterização axiomática para o número de Lefschetz reduzido.

Teorema 3.5.1 *O número de Lefschetz reduzido \tilde{L} é a única função λ , do conjunto de auto-aplicações contínuas de espaços em \mathcal{C} nos inteiros, que satisfaz o Axioma da Homotopia, o Axioma da Cofibração, o Axioma da Comutatividade e o Axioma do Bouquet de Círculos, dados anteriormente.*

Demonstração. Pela Proposição 3.4.3 temos $L(f) = L(f') + L(\bar{f}) - 1$, com o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X/A \\ f' \downarrow & & f \downarrow & & \bar{f} \downarrow \\ A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X/A, \end{array}$$

A é um subpoliedro de X e $A \longrightarrow X \longrightarrow X/A$ é a sequência cofibrada resultante dos espaços em \mathcal{C} . Porém, sabemos que $\tilde{L}(f) = L(f) - 1$, $\tilde{L}(f') = L(f') - 1$ e $\tilde{L}(\bar{f}) = L(\bar{f}) - 1$ dessa forma, aplicando tais equações no resultado da Proposição 3.4.3, obtemos

$$\tilde{L}(f) = \tilde{L}(f') + \tilde{L}(\bar{f}).$$

E assim, \tilde{L} satisfaz o axioma da cofibração.

Mostraremos agora que \tilde{L} satisfaz o axioma do bouquet de círculos.

Temos que existe um isomorfismo $\theta : \bigoplus^k H_1(S^1) \rightarrow H_1(\bigvee^k S^1)$, definido por

$$\theta(x_1, \dots, x_k) = e_{1*}(x_1) + \dots + e_{k*}(x_k),$$

em que $x_i \in H_1(S^1)$, cuja inversa $\theta^{-1} : H_1(\bigvee^k S^1) \rightarrow \bigoplus^k H_1(S^1)$ é dada por

$$\theta^{-1}(y) = (p_{1*}(y), \dots, p_{k*}(y)),$$

sendo e_i e p_j as inclusões e projeções, respectivamente.

Se $u \in H_1(S^1)$ é um gerador, então uma base para $H_1(\bigvee^k S^1)$ é $e_{1*}(u), \dots, e_{k*}(u)$.

Consideremos $f_* = f_{*1}$, isto é, f_* no nível 1 de homologia. Calculando o traço de $f_{*1} : H_1(\bigvee^k S^1) \rightarrow H_1(\bigvee^k S^1)$ com relação a esta base, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{L}(f) &= L(f) - 1 = (-1)^0 \text{Tr} f_{*0} + (-1)^1 \text{Tr} f_{*1} - 1 \\ &= 1 - \left(\text{deg}(f_1) + \dots + \text{deg}(f_k) \right) - 1 = - \left(\text{deg}(f_1) + \dots + \text{deg}(f_k) \right). \end{aligned}$$

Os outros axiomas são satisfeitos de maneira clara por \tilde{L} .

Logo, \tilde{L} satisfaz os axiomas da homotopia, da cofibração, da comutatividade e do bouquet de círculos.

Agora para provar a unicidade, suponhamos que λ seja uma função de auto-aplicações de espaços em \mathcal{C} nos inteiros, a qual satisfaz os axiomas do teorema.

Consideremos X como um CW-complexo conexo e finito. Se X for contrátil, $\tilde{L}(f) = 0$ e pelo Lema 3.5.2 temos $\lambda(f) = 0$. Assim, $\lambda(f) = \tilde{L}(f)$. Se X não for contrátil, procederemos por indução sobre a dimensão de X .

Se X é 1-dimensional, então ele possui o mesmo tipo de homotopia de um bouquet de círculos. Pelo Lema 3.5.1, podemos considerar f como uma auto-aplicação de $\bigvee^k S^1$ e assim, pelo axioma do bouquet de círculos, obtemos

$$\lambda(f) = - \left(\text{deg}(f_1) + \dots + \text{deg}(f_k) \right) = \tilde{L}(f).$$

Suponhamos agora que X é n -dimensional e consideremos X^{n-1} o $(n-1)$ -esqueleto de X . Dessa forma, f é homotópica a uma aplicação celular $g : X \rightarrow X$, pelo Teorema da Aproximação Celular (ver [8], IV.4.8). Assim, $g(X^{n-1}) \subseteq X^{n-1}$ e temos um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} X^{n-1} & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X/X^{n-1} = \bigvee^k S^n \\ g' \downarrow & & g \downarrow & & \bar{g} \downarrow \\ X^{n-1} & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X/X^{n-1} = \bigvee^k S^n. \end{array}$$

Aplicando o axioma da cofibração, segue que $\lambda(g) = \lambda(g') + \lambda(\bar{g})$.

Agora, pelo Lema 3.5.4,

$$\lambda(\bar{g}) = (-1)^n \left(\deg(\bar{g}_1) + \dots + \deg(\bar{g}_k) \right) = \tilde{L}(\bar{g}).$$

Logo, aplicando a hipótese de indução sobre g' , ficamos com $\lambda(g) = \tilde{L}(g') + \tilde{L}(\bar{g})$. Como já foi mostrado anteriormente, o número de Lefschetz reduzido satisfaz o axioma da cofibração, portanto concluímos que $\lambda(g) = \tilde{L}(g)$. E finalmente, pelo axioma da homotopia, $\lambda(f) = \tilde{L}(f)$. ■

3.6 O Teorema de Lefschetz-Hopf e algumas consequências

Seja X um poliedro finito e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação. Denotemos por $ind(f)$ o índice de pontos fixos da f em todo X e seja $\widetilde{ind}(f) = ind(f) - 1$ o **índice de pontos fixos reduzido**.

Nesta seção, provaremos o Teorema de Lefschetz-Hopf mostrando que, com coeficientes racionais, $ind(f) = L(f)$.

Uma prova que depende de argumentos bastante algébricos pode ser encontrada no livro do A. Dold ([5]). O livro de A. Granas e J. Dugundji ([6]) apresenta um argumento baseado em técnicas clássicas de H. Hopf (ver [3]). Usaremos aqui a caracterização do número de Lefschetz reduzido dada pelo Teorema 3.5.1 para provar o Teorema de Lefschetz-Hopf de uma maneira bastante natural.

Teorema 3.6.1 (Teorema de Lefschetz-Hopf) *Se X é um poliedro finito e $f : X \rightarrow X$ é uma aplicação contínua, então $ind(f)$ (o índice de pontos fixos da f em todo X) é igual*

ao número de Lefschetz $L(f)$ da f .

Demonstração. Teremos como objetivo provar que \widetilde{ind} satisfaz os axiomas do Teorema 3.5.1 e dessa forma, chegaremos que $\widetilde{ind}(f) = \widetilde{L}(f)$.

Sabemos que os axiomas da homotopia e da comutatividade são propriedades bastante conhecidas na teoria do índice de pontos fixos.

Mostraremos assim que \widetilde{ind} satisfaz o axioma da cofibração.

Consideremos A um subpoliedro de X com $f(A) \subseteq A$. Seja $f' : A \rightarrow A$ a restrição de f e $\bar{f} : X/A \rightarrow X/A$ a aplicação induzida em espaços quocientes. Pelo Teorema 1.10.2, existe uma vizinhança U em X tal que $r : U \rightarrow A$ é um retrato de deformação. Seja L um subpoliedro de uma subdivisão baricêntrica de X tal que $A \subseteq \text{int}(L) \subseteq L \subseteq U$.

Como $L \subset U$ e $r : U \rightarrow A$ é um retrato de deformação, temos definida uma aplicação contínua $k : (X \times \{0\}) \cup (L \times I) \rightarrow X$ tal que

$$k(x, 0) = x \text{ para todo } x \in X;$$

$$k(x, 1) = r(x) \text{ para todo } x \in L;$$

$$k(a, t) = a \text{ para todo } a \in A \text{ e todo } t \in I.$$

Considere $G = f \circ k$. Pela Propriedade da Extensão da Homotopia, existe uma aplicação contínua $H : X \times I \rightarrow X$ satisfazendo $H(x, 0) = f(x)$ para todo $x \in X$, $H(x, 1) = (f \circ r)(x)$ para todo $x \in X$ e $H(a, t) = f(a)$ para todo $a \in A$ e todo $t \in I$. Se fixarmos $g(x) = H(x, 1)$ então, não existem pontos fixos de g em $L - A$.

De fato. Seja $x \in L - A$,

$$g(x) = (f \circ r)(x) = f(r(x)) \in f(A) \subset A.$$

Logo, $g(L - A) \subset A$.

Pela propriedade aditiva temos

$$ind(g) = ind(X, g, \text{int}(L)) + ind(X, g, X - L). \quad (3.4)$$

Discutiremos cada parcela da equação (3.4) separadamente. Começaremos com $ind(X, g, \text{int}(L))$.

Como $g(L) = H(L, 1) = f \circ r(L) \subseteq A \subseteq L$ segue, pela definição de índice, que $ind(X, g, \text{int}(L)) = ind(L, g, \text{int}(L))$. Além disso, $ind(L, g, \text{int}(L)) = ind(L, g, L)$ já que não existem pontos fixos de g em $L - \text{int}(L)$ (teorema da excisão).

Seja $e : A \rightarrow L$ a inclusão, pela propriedade comutativa, temos

$$\text{ind}(L, g, L) = \text{ind}(L, e \circ g, L) = \text{ind}(A, g \circ e, A) = \text{ind}(f'),$$

pois $f(a) = H(a, t)$ para todo t , em particular, para $t = 1$, assim $f(a) = H(a, 1) = g(a)$ para todo $a \in A \subseteq L$.

Consideremos agora, a parcela $\text{ind}(X, g, X - L)$ da equação (3.4).

Seja $\pi : X \rightarrow X/A$ a aplicação quociente, fixemos $\pi(A) = \{*\}$ e, notemos que $\pi^{-1}(\{*\}) = A$. Se $\bar{g} : X/A \rightarrow X/A$ é induzida por g , a restrição de \bar{g} para a vizinhança $\pi(\text{int}(L))$ de $\{*\}$ em X/A é constante.

De fato. Sabemos que $A \subseteq \text{int}(L) \subseteq L$, $g(L) \subseteq A \subseteq L$ e $\pi(\text{int}(L)) = \frac{\text{int}(L)}{A}$. Assim, a restrição de \bar{g} para a vizinhança $\pi(\text{int}(L))$ de $\{*\}$ em X/A é da forma

$$\bar{g} : \frac{\text{int}(L)}{A} \longrightarrow \frac{g(\text{int}(L))}{A} \subseteq \frac{g(L)}{A} \subseteq \frac{A}{A} = \{*\}.$$

Ou seja, tal restrição é constante.

Logo, $\text{ind}(X/A, \bar{g}, \pi(\text{int}(L))) = 1$.

Se denotarmos o conjunto dos pontos fixos de \bar{g} sem $\{*\}$ por $\text{Fix}_*\bar{g}$ ($= \text{Fix}\bar{g} - \{*\}$), então $\text{Fix}_*\bar{g}$ está no subconjunto aberto $X/A - \pi(L)$ de X/A .

Seja W um subconjunto aberto de X/A tal que $\text{Fix}_*\bar{g} \subseteq W \subseteq X/A - \pi(L)$ com a propriedade que $\bar{g}(W) \cap \pi(L) = \emptyset$. Pela propriedade aditiva, obtemos

$$\text{ind}(\bar{g}) = \text{ind}(X/A, \bar{g}, \pi(\text{int}(L))) + \text{ind}(X/A, \bar{g}, W) = 1 + \text{ind}(X/A, \bar{g}, W).$$

Agora, identificando $X - L$ com o subconjunto correspondente $\pi(X - L)$ de X/A e, identificando as restrições de \bar{g} e g para tais subconjuntos, ficamos com $\text{ind}(X/A, \bar{g}, W) = \text{ind}(X, g, \pi^{-1}(W))$. O teorema da excisão implica que $\text{ind}(X, g, \pi^{-1}(W)) = \text{ind}(X, g, X - L)$. Logo, acabamos de determinar a segunda parcela da equação (3.4): $\text{ind}(X, g, X - L) = \text{ind}(\bar{g}) - 1$.

Dessa forma, da equação (3.4) segue que $\text{ind}(g) = \text{ind}(f') + \text{ind}(\bar{g}) - 1$. Como f é homotópica a g e \bar{f} é homotópica a \bar{g} , pela propriedade de homotopia, obtemos

$$\text{ind}(f) = \text{ind}(f') + \text{ind}(\bar{f}) - 1 \Rightarrow \widetilde{\text{ind}}(f) = \widetilde{\text{ind}}(f') + \widetilde{\text{ind}}(\bar{f}).$$

Portanto, \widetilde{ind} satisfaz o axioma da cofibração.

Resta agora verificar que \widetilde{ind} satisfaz o axioma do bouquet de círculos.

Seja $X = \bigvee^k S^1 = S_1^1 \vee \dots \vee S_k^1$ um bouquet de círculos com ponto base $*$ e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação.

Primeiramente, verificaremos o axioma no caso $k = 1$. Neste caso, temos $f : S^1 \rightarrow S^1$ e denotaremos seu grau por $deg(f) = d$. Consideremos $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ (conjunto dos números complexos), segundo o Exemplo 3.2.3, f é homotópica a g_d , na qual $g_d(z) = z^d$ possui $|d - 1|$ pontos fixos para $d \neq 1$. Também pelo mesmo exemplo, o índice de pontos fixos de g_d em uma vizinhança de um ponto fixo que não contém outro ponto fixo de g_d é -1 se $d \geq 2$ e é 1 se $d \leq 0$. E como g_1 é homotópica a uma aplicação sem pontos fixos, concluímos que $ind(g_d) = -d + 1$ para todo inteiro d . Dessa forma, sendo f homotópica a g_d , mostramos que $ind(f) = -deg(f) + 1$.

Suponhamos agora, $k \geq 2$. Se $f(*) = *$ então, pelo Propriedade da Extensão da Homotopia, f é homotópica a uma aplicação que não fixa $*$. Dessa forma, assumiremos, sem perda de generalidade, que $f(*) \in S_1^1 - \{*\}$.

Seja V uma vizinhança de $f(*)$ em $S_1^1 - \{*\}$ tal que existe uma vizinhança U de $*$ em X , disjunta de V , com $f(\overline{U}) \subseteq V$. Como \overline{U} não contém pontos fixos da f e, os subconjuntos abertos $S_j^1 - \overline{U}$ de X são disjuntos, a propriedade aditiva implica que

$$ind(f) = ind(X, f, S_1^1 - \overline{U}) + \sum_{j=2}^k ind(X, f, S_j^1 - \overline{U}). \quad (3.5)$$

Também, pela propriedade aditiva, temos

$$ind(f_j) = ind(S_j^1, f_j, S_j^1 - \overline{U}) + ind(S_j^1, f_j, S_j^1 \cap U). \quad (3.6)$$

Existe uma vizinhança W_j de $(Fix f) \cap S_j^1$ em S_j^1 tal que $f(\overline{W_j}) \subseteq S_j^1$.

Assim, $f_j(x) = f(x)$ para $x \in W_j$ e dessa forma, pelo teorema da excisão,

$$ind(S_j^1, f_j, S_j^1 - \overline{U}) = ind(S_j^1, f_j, W_j) = ind(X, f, W_j) = ind(X, f, S_j^1 - \overline{U}). \quad (3.7)$$

Como $f(\overline{U}) \subseteq S_1^1$, temos $f_1(x) = f(x)$ para todo $x \in \overline{U} \cap S_1^1$. Agora, não existem pontos

fixos da f em \bar{U} , logo $ind(S_1^1, f_1, S_1^1 \cap U) = 0$ e assim,

$$ind(f_1) \stackrel{(3.6)}{=} ind(S_1^1, f_1, S_1^1 - \bar{U}) + ind(S_1^1, f_1, S_1^1 \cap U) = ind(S_1^1, f_1, S_1^1 - \bar{U}) \stackrel{(3.7)}{=} ind(X, f, S_1^1 - \bar{U}).$$

Para $j \geq 2$, o fato de que $f_j(U) = *$ nos dá $ind(S_j^1, f_j, S_j^1 \cap U) = 1$, assim

$$ind(f_j) \stackrel{(3.6)}{=} ind(S_j^1, f_j, S_j^1 - \bar{U}) + 1 \stackrel{(3.7)}{=} ind(X, f, S_j^1 - \bar{U}) + 1.$$

Agora, como $f_j : S_j^1 \rightarrow S_j^1$, aplicando o argumento para o caso $k = 1$, obtemos $ind(f_j) = -deg(f_j) + 1$ para $j = 1, 2, \dots, k$. Em particular,

$$ind(X, f, S_1^1 - \bar{U}) = ind(f_1) = -deg(f_1) + 1,$$

enquanto que para $j \geq 2$, temos

$$ind(X, f, S_j^1 - \bar{U}) = -deg(f_j).$$

Logo, pela equação (3.5),

$$ind(f) = ind(X, f, S_1^1 - \bar{U}) + \sum_{j=2}^k ind(X, f, S_j^1 - \bar{U}) = - \sum_{j=1}^k deg(f_j) + 1.$$

Assim, $\widetilde{ind}(f) = ind(f) - 1 = - \sum_{j=1}^k deg(f_j)$, ou seja, \widetilde{ind} satisfaz o axioma do bouquet de círculos.

Portanto, mostramos que \widetilde{ind} satisfaz os axiomas do Teorema 3.5.1 e dessa forma, chegamos que $\widetilde{ind}(f) = \widetilde{L}(f)$. Logo, $L(f) = ind(f)$. ■

Os seguintes resultados estabelecem a relação do Teorema de Lefschetz-Hopf com os Teoremas de Pontos Fixos de Lefschetz e Brouwer.

Teorema 3.6.2 (Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz) *Seja $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua de um poliedro finito. Se $L(f) \neq 0$ então f tem pelo menos um ponto fixo.*

Demonstração. Suponhamos que a aplicação f não possui pontos fixos. Dessa forma, temos $ind(f) = 0$. Assim, pelo Teorema de Lefschetz-Hopf segue que

$$L(f) = ind(f) = 0,$$

o que contradiz a hipótese.

Portanto, se $L(f) \neq 0$ então f tem pelo menos um ponto fixo. ■

Corolário 3.6.1 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer) *Seja X um poliedro finito contrátil. Toda aplicação contínua $f : X \rightarrow X$ tem pelo menos um ponto fixo.*

Demonstração. Como por hipótese X é contrátil, segue que $H_p(X, \mathbb{Q}) = 0$ para todo $p > 0$. Dessa forma, para qualquer $f : X \rightarrow X$,

$$L(f) = \text{Tr}(f_{*0}) = \text{Tr}(id) = 1 \neq 0.$$

Assim, pelo Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz, segue que f tem pelo menos um ponto fixo. ■

O Teorema de Borsuk-Ulam

O Teorema de Borsuk-Ulam foi conjecturado por S. Ulam e provado por K. Borsuk em 1933. Em particular, ele afirma que se $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ é um conjunto de n funções contínuas com valores reais na esfera unitária, então devem existir pontos antipodais nos quais todas as funções coincidem. Uma interpretação para o caso $n = 2$ é que sempre existe um par de pontos antipodais na superfície da Terra com a mesma temperatura e a mesma pressão atmosférica (assumindo, é claro, que temperatura e pressão variam continuamente).

Neste capítulo veremos a demonstração desse teorema tanto para o caso particular com $n = 1$ ou $n = 2$, quanto para o caso geral. Além disso, serão apresentadas algumas consequências interessantes do teorema.

Apresentaremos também, na última seção, uma construção, baseada no artigo de F. E. Su ([14]), que mostra que o Teorema de Borsuk-Ulam implica o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

4.1 Caso Particular

Dividiremos o estudo do Teorema de Borsuk-Ulam em dois casos, pois o primeiro deles (o caso particular), para aplicações contínuas de S^n em S^{n-1} com $n = 1$ ou $n = 2$, é utilizado com mais frequência e além disso, sua prova envolve conceitos mais simples do que no caso geral. Nesta primeira seção, teremos como objetivo demonstrar o caso particular do Teorema de Borsuk-Ulam.

Definição 4.1.1 *Seja S^n a esfera unitária n -dimensional em \mathbb{R}^{n+1} . Para quaisquer inteiros*

positivos m e n , seja $f : S^m \rightarrow S^n$ uma aplicação. Dizemos que tal aplicação **preserva pontos antipodais** se $f(-x) = -f(x)$, para qualquer x pertencente a S^m .

Teorema 4.1.1 Não existe aplicação contínua $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$ que preserve pontos antipodais para $n = 1$ ou $n = 2$.

Demonstração. Considerando o caso $n = 1$, suponhamos que exista aplicação contínua $f : S^1 \rightarrow S^0$ que preserve pontos antipodais.

Temos que S^1 é conexo e $S^0 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = 1\} = \{-1, 1\}$.

Observemos que f é sobrejetora, pois se $x \in S^1$ e supondo $f(x) = 1$, temos

$$f(-x) = -f(x) = -1 \in S^0.$$

Analogamente, se $f(x) = -1$ então $f(-x) = -f(x) = 1 \in S^0$.

Sendo f contínua e S^1 conexo, segue que S^0 é conexo. Porém, isso é um absurdo, já que S^0 não é conexo.

Portanto não existe tal aplicação contínua para $n = 1$.

Veremos agora a demonstração para o caso $n = 2$.

Suponhamos que exista uma aplicação contínua $f : S^2 \rightarrow S^1$ que preserve pontos antipodais. Consideremos agora os espaços quocientes de S^2 e S^1 obtidos pela identificação dos pontos antipodais. Esses espaços são, respectivamente, o plano projetivo real P^2 (S^2 / \sim) e o espaço projetivo P^1 (S^1 / \sim), o qual é homeomorfo a S^1 .

Denotemos por $p_2 : S^2 \rightarrow P^2$ e $p_1 : S^1 \rightarrow P^1$ as aplicações naturais de cada espaço em seu espaço quociente. Dessa forma,

$$p_2(x) = \bar{x} = \{x, -x\}, \text{ com } x \in S^2 \text{ e}$$

$$p_1(x') = \bar{x}' = \{x', -x'\}, \text{ com } x' \in S^1.$$

Seja $G = \{id, \alpha\}$, em que $id : S^n \rightarrow S^n$ é a aplicação identidade e $\alpha : S^n \rightarrow S^n$ é a aplicação tal que $\alpha(x) = -x$, com $n \leq 2$. Temos que id e α são homeomorfismos. Assim, G é um grupo de homeomorfismos e ainda $G \simeq \mathbb{Z}_2$, já que $(\alpha \circ \alpha) = id$.

Definamos uma ação de G em S^n da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} G \times S^n &\longrightarrow S^n \\ (id, x) &\longmapsto id \cdot x = id(x) = x \\ (\alpha, x) &\longmapsto \alpha \cdot x = \alpha(x) = -x. \end{aligned}$$

Observemos que, dado $x \in S^n$, a órbita $G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\} = \{x, -x\}$. Assim

$$(S^n/G) = (S^n / \sim) \cong P^n, n \leq 2.$$

Mostremos que a ação de G em S^n é propriamente descontínua, $n = 1, 2$.

De fato. Dado $x \in S^n$, temos $\alpha \cdot x = \alpha(x) = -x$. Como x e $-x$ são pontos antipodais em S^n , claramente existe uma vizinhança U de x tal que $\alpha \cdot U \cap U = \emptyset$, pois $\alpha \cdot U = \{-y \mid y \in U\}$.

Logo, a ação de G em S^1 e S^2 é propriamente descontínua.

Assim, usando a Proposição 1.3.5 segue que (S^1, p_1) e (S^2, p_2) são espaços de recobrimento regular de P^1 e P^2 , respectivamente. Observemos ainda que estes espaços de recobrimento são de duas folhas (já que pontos antipodais pertencem à mesma classe).

Consideremos $g : P^2 \rightarrow P^1$ tal que $g(\bar{x}) = \overline{f(x)}$. Mostremos que g está bem definida.

De fato. Dados $\bar{x}, \bar{y} \in P^2$, se $\bar{x} = \bar{y}$ então $\{x, -x\} = \{y, -y\}$. Logo $x = y$ ou $x = -y$. Assim $f(x) = f(y)$ ou $f(x) = f(-y) = -f(y)$. Ou seja,

$$\overline{f(x)} = \{f(x), -f(x)\} = \{f(y), -f(y)\} = \overline{f(y)}.$$

Portanto g está bem definida.

Consideremos assim o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{f} & S^1 \\ p_2 \downarrow & & \downarrow p_1 \\ P^2 & \xrightarrow{g} & P^1 \end{array}$$

Mostremos que tal diagrama é comutativo.

De fato. Dado $x \in S^2$, temos

$$(p_1 \circ f)(x) = p_1(f(x)) = \overline{f(x)} \quad e$$

$$(g \circ p_2)(x) = g(p_2(x)) = g(\bar{x}) = \overline{f(x)}.$$

Assim $(p_1 \circ f) = (g \circ p_2)$ e, a comutatividade está provada.

Agora, g é uma aplicação contínua.

De fato. Seja U um subconjunto aberto em P^1 . Como p_1 é contínua, segue que $p_1^{-1}(U)$ é um subconjunto aberto em S^1 . Sendo f uma aplicação contínua, temos

$$f^{-1}(p_1^{-1}(U)) = (p_1 \circ f)^{-1}(U)$$

um subconjunto aberto em S^2 .

Pela comutatividade do diagrama, $(p_1 \circ f)^{-1}(U) = (g \circ p_2)^{-1}(U)$. Dessa forma

$$f^{-1}(p_1^{-1}(U)) = (p_1 \circ f)^{-1}(U) = (g \circ p_2)^{-1}(U) = p_2^{-1}(g^{-1}(U)).$$

Assim, segue que $p_2^{-1}(g^{-1}(U))$ é um subconjunto aberto em S^2 . Logo, como p_2 é aplicação quociente, $g^{-1}(U)$ é um subconjunto aberto em P^2 .

Portanto g é uma aplicação contínua.

Consideremos assim o homomorfismo induzido no grupo fundamental,

$$g_* : \pi_1(P^2) \rightarrow \pi_1(S^1).$$

Sabemos que $\pi_1(P^2) \simeq \mathbb{Z}_2$ que é cíclico de ordem 2 e $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ é cíclico infinito. Assim o homomorfismo g_* deve ser o homomorfismo trivial.

De fato. Seja $g_* : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}$ o homomorfismo. Temos \mathbb{Z}_2 gerado por um t tal que $t^2 = 1$ e $g_*(1) = 1$. Suponhamos que $g_*(t) = s^k$, tal que $k \neq 0$. Dessa forma

$$g_*(1) = g_*(t \cdot t) = g_*(t) \cdot g_*(t) = s^k \cdot s^k = s^{2k} \neq 1, \text{ já que } k \neq 0,$$

o que é uma contradição.

Logo g_* é o homomorfismo trivial.

Por outro lado, seja $[\alpha]$ uma classe de equivalência de caminhos em S^2 tal que os pontos extremos desses caminhos sejam x_0 e $-x_0$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = -x_0$.

Por hipótese temos $f(-x_0) = -f(x_0)$. Dessa forma, os pontos extremos dos caminhos da classe $[(f \circ \alpha)] = f_*([\alpha])$ são $f(x_0)$ e $-f(x_0)$, que são pontos antipodais em S^1 .

Consideremos novamente o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{f} & S^1 \\ p_2 \downarrow & & \downarrow p_1 \\ P^2 & \xrightarrow{g} & P^1 \end{array}$$

Consideremos os homomorfismos induzidos nas classes $p_{2*}([\alpha])$ e $p_{1*}(f_*([\alpha]))$ que são definidos por $[(p_2 \circ \alpha)]$ e $[p_1 \circ (f \circ \alpha)]$, respectivamente.

Temos

$$(p_2 \circ \alpha)(0) = p_2(x_0) = \bar{x}_0 = \{x_0, -x_0\} \quad e$$

$$(p_2 \circ \alpha)(1) = p_2(-x_0) = -\bar{x}_0 = \{x_0, -x_0\}.$$

Portanto $p_{2*}([\alpha]) = [(p_2 \circ \alpha)]$ é uma classe de laços com ponto base \bar{x}_0 em P^2 .

Obtemos também que

$$(p_1 \circ (f \circ \alpha))(0) = p_1(f(x_0)) = \overline{f(x_0)} \quad e$$

$$(p_1 \circ (f \circ \alpha))(1) = p_1(f(-x_0)) = p_1(-f(x_0)) = \overline{f(x_0)}.$$

Logo $p_{1*}(f_*([\alpha])) = [p_1 \circ (f \circ \alpha)]$ é uma classe de laços com ponto base $\overline{f(x_0)}$ em $P^1 \cong S^1$.

Dessa forma, $p_{2*}([\alpha])$ e $p_{1*}(f_*([\alpha]))$ pertencem, respectivamente, aos grupos fundamentais $\pi_1(P^2, \bar{x}_0)$ e $\pi_1(S^1, \overline{f(x_0)})$.

Afirmamos que $p_{2*}([\alpha]) \neq 1$ e $p_{1*}(f_*([\alpha])) \neq 1$.

De fato. Suponhamos que $p_{2*}([\alpha]) = 1$. Logo $[(p_2 \circ \alpha)] = [c_{\bar{x}_0}]$, com $c_{\bar{x}_0}$ o caminho constante no ponto \bar{x}_0 em P^2 . Assim $(p_2 \circ \alpha) \sim c_{\bar{x}_0}$.

Consideremos agora c_{x_0} que é o caminho constante no ponto $x_0 \in S^2$. Temos

$$p_{2*}([c_{x_0}]) = [(p_2 \circ c_{x_0})] = [c_{\bar{x}_0}].$$

Assim $(p_2 \circ c_{x_0}) \sim c_{\bar{x}_0}$.

Como $(p_2 \circ \alpha) \sim c_{\bar{x}_0}$ e $(p_2 \circ c_{x_0}) \sim c_{\bar{x}_0}$, obtemos $(p_2 \circ \alpha) \sim (p_2 \circ c_{x_0})$.

Agora, como o ponto inicial de α e c_{x_0} são iguais, segue pelo Teorema da Monodromia que $\alpha \sim c_{x_0}$ e seus respectivos pontos finais são iguais. Mas isso é um absurdo, pois $-x_0 \neq x_0$.

Assim segue que $p_{2*}([\alpha]) \neq 1$.

Suponhamos agora que $p_{1*}(f_*([\alpha])) = 1$. Logo $[p_1 \circ (f \circ \alpha)] = [c_{y_0}]$, com $y_0 = \overline{f(x_0)}$. Assim $p_1 \circ (f \circ \alpha) \sim c_{y_0}$.

Observemos que $(f \circ \alpha)$ é um caminho em S^1 com ponto inicial $f(x_0)$ e ponto final $-f(x_0) = f(-x_0)$.

Dado $c_{f(x_0)}$ o caminho constante no ponto $f(x_0) \in P^1$, temos $[(p_1 \circ c_{f(x_0)})] = [c_{y_0}]$. Logo $(p_1 \circ c_{f(x_0)}) \sim c_{y_0}$.

Como $p_1 \circ (f \circ \alpha) \sim c_{y_0}$ e $(p_1 \circ c_{f(x_0)}) \sim c_{y_0}$, segue que $p_1 \circ (f \circ \alpha) \sim (p_1 \circ c_{f(x_0)})$.

Agora, como o ponto inicial de $(f \circ \alpha)$ e $c_{f(x_0)}$ são iguais, segue pelo Teorema da Monodromia que $(f \circ \alpha) \sim c_{f(x_0)}$ e seus respectivos pontos finais são iguais. Mas isso é uma contradição, pois $-f(x_0) \neq f(x_0)$.

Logo, $p_{1*}(f_*([\alpha])) \neq 1$.

Pela comutatividade do diagrama segue que $g_*(p_{2*}([\alpha])) = p_{1*}(f_*([\alpha]))$, em que

$$g_* : \pi_1(P^2, \bar{x}_0) \rightarrow \pi_1(P^1, \overline{f(x_0)}).$$

Assim g_* leva $p_{2*}([\alpha]) \neq 1$ em $p_{1*}(f_*([\alpha])) \neq 1$. Porém, isso contradiz o fato de g_* ser trivial.

Portanto, não existe uma aplicação contínua $f : S^2 \rightarrow S^1$ que preserve pontos antipodais. ■

4.2 Caso Geral

Nosso objetivo principal nesta seção é demonstrar o clássico Teorema de Borsuk-Ulam no caso geral. Para isso iremos precisar de alguns resultados, os quais serão apresentados a seguir.

Definição 4.2.1 *Sejam A e B grupos abelianos livres de mesmo posto. Seja C um grupo cíclico infinito. Dizemos que um homomorfismo*

$$f : A \otimes B \rightarrow C$$

é uma **união dual** se existem elementos básicos a_1, \dots, a_m para A , e b_1, \dots, b_m para B , tal que

$$f(a_i \otimes b_j) = \delta_{ij} \gamma$$

para todo $i, j = 1, \dots, m$, em que γ é um gerador de C .

Teorema 4.2.1 *Seja X uma n -variedade compacta, conexa e sem bordo. Seja F um corpo; assuma que F é igual a \mathbb{Z}_2 se X não é orientável. Seja Λ o gerador de $H^n(X; F)$. Existem (em espaço vetorial) elementos básicos $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ para $H^k(X; F)$ e β_1, \dots, β_m para $H^{n-k}(X; F)$ tal que para $i, j = 1, \dots, m$,*

$$\alpha_i \cup \beta_j = \delta_{ij} \Lambda.$$

Demonstração. Seja $\varepsilon_* : H_0(X; F) \rightarrow F$ a aplicação induzida da aplicação aumentação. Como X é conexo por caminhos, ε_* é um isomorfismo.

Considere X um variedade orientável. Usando a Dualidade de Poincaré, o isomorfismo

$$H^n(X; F) \xrightarrow{\cap \Gamma} H_0(X; F) \xrightarrow{\varepsilon_*} F, \quad (4.1)$$

leva Λ em $1 \in F$, com Λ o gerador de $H^n(X; F)$. Assim $\varepsilon_*(\Lambda \cap \Gamma) = 1$. No caso não orientável, Γ é única.

Para provar o teorema, devemos encontrar elementos $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ de $H^k(X; F)$ e β_1, \dots, β_m de $H^{n-k}(X; F)$ tal que

$$\alpha_i \cup \beta_j = \delta_{ij} \Lambda$$

para $i, j = 1, \dots, m$.

Pela Dualidade de Poincaré, temos o isomorfismo

$$\cap \Gamma : H^{n-k}(X; F) \rightarrow H_k(X; F), \quad (4.2)$$

obtido pelo produto cap .

Agora, pelo Teorema 1.8.3, temos o isomorfismo

$$k^* : H^k(X; F) \rightarrow \text{Hom}_F(H_k(X; F), F). \quad (4.3)$$

obtido pela aplicação de Kronecker k .

Ele está relacionado com o produto cap pela fórmula

$$[k^*(\alpha)](\beta) = [k(\alpha)](\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle = \varepsilon_*(\alpha \cap \beta).$$

Combinando as equações (4.2) e (4.3) obtemos a seguinte sequência de isomorfismos

$$H^{n-k}(X; F) \xrightarrow[\simeq]{\cap \Gamma} H_k(X; F) \simeq \text{Hom}_F(H_k(X; F), F) \xleftarrow[\simeq]{k^*} H^k(X; F).$$

Escolha, arbitrariamente, elementos básicos β_1, \dots, β_m para $H^{n-k}(X; F)$. Sejam $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ os correspondentes elementos básicos para $H_k(X; F)$, definidos pela equação $\beta_j \cap \Gamma = \gamma_j$ para todo $j = 1, \dots, m$. Sejam $\gamma_1^*, \dots, \gamma_m^*$ os correspondentes elementos básicos duais para $\text{Hom}_F(H_k(X; F), F)$, definidos pela equação $\gamma_i^*(\gamma_j) = \delta_{ij}$ para $i, j = 1, \dots, m$. Finalmente, sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ os elementos básicos correspondentes para $H^k(X; F)$, definidos pela equação $k^*(\alpha_i) = \gamma_i^*$ para todo i .

Para mostrar que $\alpha_i \cup \beta_j = \delta_{ij} \Lambda$, é suficiente (aplicando o isomorfismo de $H^n(X; F)$ com F dado pela equação (4.1)) mostrar que

$$\varepsilon_*((\alpha_i \cup \beta_j) \cap \Gamma) = \delta_{ij} \varepsilon_*(\Lambda \cap \Gamma) = \delta_{ij}.$$

De fato.

$$\delta_{ij} = \gamma_i^*(\gamma_j) = [k^*(\alpha_i)](\beta_j \cap \Gamma) = \langle \alpha_i, \beta_j \cap \Gamma \rangle = \varepsilon_*(\alpha_i \cap (\beta_j \cap \Gamma)) = \varepsilon_*((\alpha_i \cup \beta_j) \cap \Gamma).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \varepsilon_*(\delta_{ij} \Lambda \cap \Gamma) &\stackrel{\varepsilon_* \text{ homom.}}{=} \delta_{ij} \varepsilon_*(\Lambda \cap \Gamma) = \delta_{ij} = \varepsilon_*((\alpha_i \cup \beta_j) \cap \Gamma) \stackrel{\varepsilon_* \text{ injetor}}{\implies} \\ &\implies (\alpha_i \cap \beta_j) \cap \Gamma = \delta_{ij} \Lambda \cap \Gamma \stackrel{\cap \Gamma \text{ isom.}}{\implies} \alpha_i \cap \beta_j = \delta_{ij} \Lambda. \end{aligned}$$

■

Teorema 4.2.2 *Se u é o elemento não nulo de $H^1(P^n; \mathbb{Z}_2)$, então u^k é o elemento não nulo de $H^k(P^n; \mathbb{Z}_2)$, para $k = 2, \dots, n$.*

Demonstração. Faremos a prova por indução, começando com $n = 2$.

Sabemos que o espaço vetorial $H^1(P^2; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$ possui dimensão 1. Se u é seu elemento não nulo então, pelo Teorema anterior, $u^2 = u \cup u$ deve ser não nulo.

Agora suponhamos que o teorema seja verdadeiro para dimensão $n - 1$.

A aplicação inclusão $j : P^{n-1} \rightarrow P^n$ induz isomorfismos de homologia e cohomologia (sobre \mathbb{Z}_2) em dimensões menores que n . Dessa forma, por hipótese de indução, se $u \in H^1(P^n; \mathbb{Z}_2)$ é não nulo então também o são u^2, \dots, u^{n-1} . (Lembrando que j^* é um homomorfismo de anel.)

Resta mostrar que $u^n \neq 0$.

Pelo Teorema anterior, existe um elemento básico α_1 para $H^1(P^n; \mathbb{Z}_2)$ e um elemento básico β_1 para $H^{n-1}(P^n; \mathbb{Z}_2)$ tal que $\alpha_1 \cup \beta_1$ gera $H^n(P^n; \mathbb{Z}_2)$. Como u e u^{n-1} são os únicos

elementos não nulos desses grupos, respectivamente, devemos ter $\alpha_1 = u$ e $\beta_1 = u^{n-1}$. Assim $u^n = u \cup u^{n-1} \neq 0$, como desejado. ■

Antes de demonstrarmos o Teorema de Borsuk-Ulam vamos relembrar alguns fatos sobre o espaço projetivo real P^n . Para maiores detalhes consultar [12].

Observação 4.2.1 Consideremos \mathbb{R}^n o conjunto de todas as seqüências reais (x_1, x_2, \dots) tais que $x_i = 0$ para $i > n$ assim, $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Dessa forma, $S^{n-1} \subset S^n$ pois, S^{n-1} é a interseção de S^n com o plano $x_{n+1} = 0$.

Agora a relação de equivalência $x \sim -x$ é a mesma tanto em S^{n-1} quanto em S^n . Logo, $P^{n-1} \subset P^n$.

De fato. P^{n-1} é um subespaço fechado de P^n . Se C é um subconjunto de P^{n-1} , então $p^{-1}(C)$ é fechado em S^{n-1} se, e somente se, ele é fechado em S^n . Assim, C é fechado em P^{n-1} se, e somente se, é fechado em P^n .

Além disso, para cada $k \geq 0$, P^k é uma k -célula do CW-complexo P^n .

Seja E_+^n o hemisfério superior de S^n cujo bordo é S^{n-1} , e considere $i : P^n \rightarrow (P^n, P^{n-1})$ a aplicação inclusão.

A aplicação

$$p \circ i : (E_+^n, S^{n-1}) \longrightarrow (P^n, P^{n-1}).$$

é então uma aplicação característica e assim, pelo Lema 1.10.1, induz isomorfismo em homologia.

Teorema 4.2.3 Se $f : S^n \rightarrow S^m$ é contínua e preserva pontos antipodais, então $n \leq m$. Em particular, não existe aplicação contínua $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$ que preserva pontos antipodais.

Demonstração. Dividiremos a demonstração em três partes.

Parte 1. Sejam $a_n = (1, 0, \dots, 0) \in S^n$ o ponto base de S^n e \mathbb{Z}_2 o corpo com dois elementos.

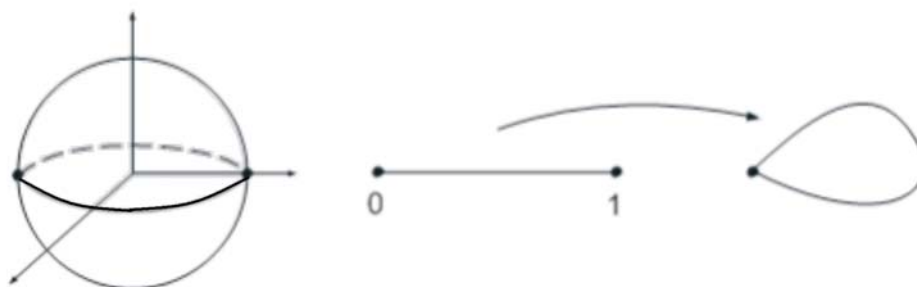
Consideremos $p_n : S^n \rightarrow P^n$ a projeção quociente, que é uma aplicação de recobrimento.

Primeiramente, provemos que se $\alpha : I \rightarrow S^n$ é um caminho qualquer ligando a_n ao antipodal $-a_n$, então $(p_n \circ \alpha)$ representa o elemento não nulo de $H_1(P^n; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$.

Se α é o caminho usual $\beta(t) = (\cos\pi t, \sin\pi t, 0, \dots, 0)$, com $t \in [0, 1] = I$, então β define um homeomorfismo

$$\beta' : (I, Bd I) \rightarrow (E_+^1, S^0),$$

em que E_+^1 denota o hemisfério superior fechado de S^1 . E a projeção quociente $p_1 : S^1 \rightarrow P^1$ aplica (E_+^1, S^0) sobre (P^1, P^0) , transformando S^0 em um único ponto.



Pela observação anterior

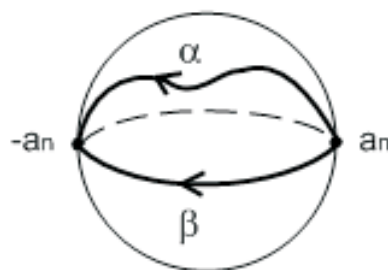
$$p_{1*} : H_1(E_+^1, S^0; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(P^1, P^0; \mathbb{Z}_2)$$

é um isomorfismo e assim, leva um gerador de $H_1(E_+^1, S^0; \mathbb{Z}_2)$ em um ciclo fundamental (gerador) para a 1-célula de P^n .

Além disso, a aplicação identidade, considerada como um 1-simplexo singular $i : \Delta_1 \rightarrow I$, gera $H_1(I, Bd I; \mathbb{Z}_2)$ e, portanto, o 1-simplexo singular $(p_1 \circ \beta \circ i) = (p_1 \circ \beta)$ gera $H_1(P^n; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$.

Assim $(p_n \circ \beta)$ representa o elemento não nulo de $H_1(P^n; \mathbb{Z}_2)$.

Consideremos agora um caminho qualquer α de a_n até $-a_n$ e também, a 1-cadeia singular $(\alpha - \beta)$, com $\beta : I \rightarrow S^n$ tal que $\beta(t) = (\cos\pi t, \sin\pi t, 0, \dots, 0)$.



Como $(\alpha - \beta)$ é um laço, segue que $\partial(\alpha - \beta) = 0$, assim $(\alpha - \beta)$ é um ciclo singular de S^n .

No caso $n > 1$, temos $H_1(S^n) = 0$ e assim, existe uma 2-cadeia singular d tal que $(\alpha - \beta) = \partial(d)$. Obtemos assim

$$(p_n \circ \alpha) - (p_n \circ \beta) = p_{n\#}(\alpha - \beta) = p_{n\#}(\partial(d)) = \partial(p_{n\#}(d)) = \partial(p_n \circ d),$$

logo $(p_n \circ \alpha)$ e $(p_n \circ \beta)$ representam o mesmo elemento em $H_1(P^n; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$, ou seja, $(p_n \circ \alpha)$ gera $H_1(P^n; \mathbb{Z}_2)$.

Agora, se $n = 1$, usamos o fato de que a aplicação $p_1 : S^1 \rightarrow P^1$ tem grau dois. Como $(\alpha - \beta)$ é um ciclo singular de S^1 , segue que o ciclo $(p_n \circ \alpha) - (p_n \circ \beta)$ representa um múltiplo par do gerador ($= 0$) de $H_1(P^1; \mathbb{Z}_2)$.

Dessa forma, $(p_n \circ \alpha)$ gera $H_1(P^1; \mathbb{Z}_2)$.

Parte 2. Seja $f : S^n \rightarrow S^m$ uma aplicação contínua que preserva pontos antipodais. Considere $\rho : S^m \rightarrow S^m$ uma rotação que leva o ponto $f(a_n)$ no ponto base a_m de S^m . Dessa forma, $g = (\rho \circ f)$ é uma aplicação contínua. Além disso,

$$g(-x) = (\rho \circ f)(-x) = \rho(-f(x)) = -(\rho \circ f)(x) = -g(x).$$

Assim, g preserva pontos antipodais e também, $g(a_n) = \rho(f(a_n)) = a_m$, ou seja, a aplicação g leva a_n para a_m .

Consideremos a aplicação contínua $h : P^n \rightarrow P^m$, induzida pela aplicação g , como mostra o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{g} & S^m \\ \downarrow p_n & & \downarrow p_m \\ P^n & \xrightarrow{h} & P^m. \end{array}$$

Temos $h(p_n(x)) = p_m(g(x))$ para $x \in S^n$.

Mostremos que $h_* : H_1(P^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(P^m; \mathbb{Z}_2)$ é não trivial. Para isto, seja α um caminho em S^n de a_n para $-a_n$. Sabendo que g preserva pontos antipodais, temos $g(-a_n) = -g(a_n) = -a_m$. Assim $(g \circ \alpha)$ é um caminho em S^m , com

$$(g \circ \alpha)(0) = g(a_n) = a_m \quad \text{e} \quad (g \circ \alpha)(1) = g(-a_n) = -a_m.$$

Consideremos a aplicação em nível de cadeia, $h_{\#} : C_1(P^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow C_1(P^m; \mathbb{Z}_2)$.

Temos $h_{\#}((p_n \circ \alpha)) = (p_m \circ g \circ \alpha)$. Assim, pela Parte 1, h_* leva o gerador de $H_1(P^n; \mathbb{Z}_2)$ no gerador de $H_1(P^m; \mathbb{Z}_2)$, ou seja, h_* leva o elemento não nulo de $H_1(P^n; \mathbb{Z}_2)$ no elemento não nulo de $H_1(P^m; \mathbb{Z}_2)$.

Portanto, h_* é um homomorfismo não trivial.

Parte 3. Seja $j = m$ ou $j = n$. Pelo Teorema 1.8.3, segue que existe um isomorfismo natural

$$k^* : H^1(P^j; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(H_1(P^j; \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2).$$

Obtemos assim o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H^1(P^m; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{h^*} & H^1(P^n; \mathbb{Z}_2) \\ \downarrow k^* & & \downarrow k^* \\ \text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(H_1(P^m; \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\varphi} & \text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(H_1(P^n; \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2), \end{array}$$

no qual $\varphi(l) = (l \circ h_*)$, para todo homomorfismo $l : H_1(P^m; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, e h^* é um homomorfismo de cohomologia.

Agora, como h_* é um homomorfismo não trivial (pela Parte 2), segue que $h^* : H^1(P^m; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^1(P^n; \mathbb{Z}_2)$ também é não trivial.

Logo, seja $u \in H^1(P^m; \mathbb{Z}_2)$, com $u \neq 0$; assim $h^*(u) \neq 0$. Como h^* é um homomorfismo de anéis, temos $h^*(u^n) = (h^*(u))^n$.

Pelo Teorema 4.2.2, como $h^*(u) \neq 0$ segue que $(h^*(u))^n \neq 0$. Dessa forma, $u^n \in H^1(P^m; \mathbb{Z}_2)$ é não trivial.

Também, pelo Teorema 4.2.2, segue que $n \leq m$ pois, caso contrário $u^n = 0$.

Portanto se $f : S^n \rightarrow S^m$ é uma aplicação contínua que preserva pontos antipodais, então $n \leq m$. ■

Corolário 4.2.1 *Se $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua tal que $f(-x) = -f(x)$, para qualquer $x \in S^n$, então existe um ponto $x \in S^n$ tal que $f(x) = 0$.*

Demonstração. Suponhamos que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in S^n$.

Consideremos uma aplicação $g : S^n \rightarrow S^{n-1}$, definida da seguinte forma

$$g(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}.$$

Segue que g é uma aplicação contínua, já que f é uma aplicação contínua.

Mostremos que g é uma aplicação que preserva pontos antipodais.

De fato. Seja $x \in S^n$,

$$g(-x) = \frac{f(-x)}{|f(-x)|} = \frac{-f(x)}{|-f(x)|} = \frac{-f(x)}{|f(x)|} = -\frac{f(x)}{|f(x)|} = -g(x).$$

Dessa forma, temos uma aplicação contínua que preserva pontos antipodais, o que contraria o Teorema anterior.

Portanto, existe um ponto $x \in S^n$ tal que $f(x) = 0$. ■

O corolário seguinte é conhecido como o **Teorema Clássico de Borsuk-Ulam**.

Corolário 4.2.2 *Se $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua, então existe um ponto $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$. Em particular, f não é injetora.*

Demonstração. Suponhamos que para cada ponto $x \in S^n$, $f(x) \neq f(-x)$.

Definamos a aplicação $g : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, na qual $g(x) = f(x) - f(-x)$.

Sabemos que g é uma aplicação contínua, já que f é contínua. Além disso, g preserva pontos antipodais, pois para todo $x \in S^n$,

$$g(-x) = f(-x) - f(x) = -g(x) \quad \text{e} \quad g(x) \neq 0.$$

Porém, o fato de $g(x) \neq 0$ para todo $x \in S^n$, contradiz o Corolário anterior.

Logo, existe um ponto $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$. ■

Corolário 4.2.3 *Nenhum subconjunto do \mathbb{R}^n é homeomorfo a S^n .*

Demonstração. Suponhamos que exista um subconjunto A do espaço \mathbb{R}^n de modo que A seja homeomorfo a S^n . Assim existe uma aplicação contínua e bijetora $f : S^n \rightarrow A$.

Sejam $i : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação inclusão e $(i \circ f) : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Claramente $(i \circ f)$ é injetora e contínua, pois f é injetora, contínua e i é contínua.

Porém, pelo Corolário anterior, segue que $(i \circ f)$ não pode ser injetora; o que nos dá uma contradição.

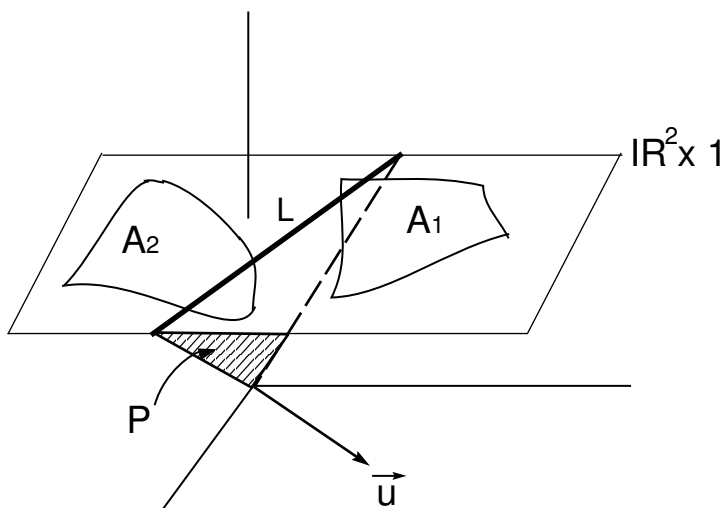
Portanto A não pode ser homeomorfo a S^n . ■

Teorema 4.2.4 (Teorema da Bissecção) *Sejam A_1 e A_2 dois subconjuntos limitados do \mathbb{R}^2 de área não nula. Existe uma reta no \mathbb{R}^2 que bissecta A_1 e A_2 .*

Demonstração. Consideremos A_1 e A_2 no plano $\mathbb{R}^2 \times 1$ em \mathbb{R}^3 , e mostremos que existe uma reta L nesse plano que bissecta cada um desses subconjuntos. Para tanto vamos, inicialmente, exibir uma função contínua $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Dado um ponto \vec{u} de S^2 , consideremos o plano P em \mathbb{R}^3 passando pela origem que possui \vec{u} como seu vetor normal e unitário. Esse plano divide \mathbb{R}^3 em dois espaços; seja $f_i(\vec{u})$ igual a área da parte A_i , $i = 1, 2$, que está no mesmo lado de P , como faz o vetor \vec{u} .

Se \vec{u} é o vetor unitário $\vec{k} = (0, 0, 1)$, então consideramos $f_i(\vec{u}) = \text{área de } A_i$; e se $\vec{u} = -\vec{k}$, então $f_i(\vec{u}) = 0$. Por outro lado, o plano P intercepta o plano $\mathbb{R}^2 \times 1$ em uma reta L que divide $\mathbb{R}^2 \times 1$ em dois planos, e $f_i(\vec{u})$ é a área da parte de A_i que está em um dos lados dessa reta.



Trocando \vec{u} por $-\vec{u}$ obtemos o mesmo plano P , mas $-\vec{u}$ agora aponta para o outro lado de P . Dessa forma, $f_i(-\vec{u})$ é a área da parte de A_i que está no outro lado de P em relação a \vec{u} . Assim segue que

$$f_i(\vec{u}) + f_i(-\vec{u}) = \text{área de } A_i.$$

Agora, considere a aplicação $F : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(\vec{u}) = (f_1(\vec{u}), f_2(\vec{u}))$. Pelo Corolário 4.2.2 temos $F(\vec{u}) = F(-\vec{u})$ para um ponto $\vec{u} \in S^2$. Assim, obtemos \vec{u} tal que $f_i(\vec{u}) = f_i(-\vec{u})$ para $i = 1, 2$. Logo

$$f_i(\vec{u}) = \frac{1}{2} (\text{área de } A_i).$$

Portanto existe uma reta em \mathbb{R}^2 que bissecta A_1 e A_2 . ■

O Teorema anterior pode ser generalizado para mostrar que dados n conjuntos limitados do \mathbb{R}^n de volume n -dimensional não nulo, existe um plano de dimensão $n-1$ em \mathbb{R}^n que bissecta todos eles. A prova para este caso é bem mais sofisticada.

Para o caso $n = 3$, o resultado anterior recebe o nome de "Teorema do Sanduiche de Presunto". Se considerarmos um sanduiche de presunto consistindo de duas metades de um pão e uma fatia de presunto, então o Teorema da Bissecção diz que podemos dividir cada uma delas, de maneira precisa, ao meio com um pequeno corte com a faca.

4.3 Borsuk-Ulam implica Brouwer: uma construção direta

O Teorema de Borsuk-Ulam e o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer são teoremas bastante conhecidos em topologia e com uma essência similar. Ambos são resultados não construtivos de existência com algumas conclusões surpreendentes. A maioria dos livros textos que cobrem estes teoremas não mencionam que ambos estão relacionados - embora, de fato, o Teorema de Borsuk-Ulam implica no Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Os teoremas são geralmente provados usando mecanismos de topologia algébrica ou conceitos de grau de uma aplicação. Que um teorema implica no outro pode assim ser estabelecido uma vez que tais mecanismos sejam entendidos, mas isto requer bastante conhecimento. Além disso, tais provas tendem a ser indiretas, confiando na equivalência destes teoremas de existência com correspondentes teoremas da não existência. Por exemplo, J. Dugundji e A. Granas (em [6]) mostram que o Teorema de Borsuk-Ulam é equivalente a afirmação de que não preservando antípodas, uma aplicação contínua $f : S^n \rightarrow S^n$ pode ser homotópica a uma aplicação constante. Assim podemos ver que o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer é um caso especial pois, pode-se mostrar que ele

é equivalente a afirmação de que a aplicação identidade $id : S^n \rightarrow S^n$ (a qual preserva antípodas) não é homotópica a uma aplicação constante.

Entretanto, uma aproximação indireta não é realmente necessária, e talvez uma prova mais direta dará uma idéia melhor de como os dois teoremas estão relacionados. O propósito desta seção é apresentar uma prova de que o Teorema de Borsuk-Ulam implica o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, baseada no artigo de F. E. Su ([14]), na qual a existência de pontos antipodais em um teorema produz o ponto fixo afirmado no outro.

4.3.1 A Idéia

Como motivação, apresentaremos resumidamente um esboço de uma construção que mostra como o Teorema de Borsuk-Ulam implica o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Preferimos pensar em D^n como $[-1, 1]^n$, o “n-cubo” em \mathbb{R}^n . Similarmente, pensaremos em S^n como o bordo do $(n+1)$ -cubo $[-1, 1]^{n+1}$ em \mathbb{R}^{n+1} :

$$S^n = \{x \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}), |x_i| \leq 1 \text{ e } \max |x_i| = 1\}.$$

A n-esfera cúbica é homeomorfa a n-esfera usual via projeção radial. De fato, esse é um homeomorfismo preservando antípodas, assim o Teorema de Borsuk-Ulam é válido para aplicações sobre n-esferas cúbicas.

Escolhemos trabalhar com n-esferas cúbicas e n-discos pois, construir e descrever funções em tais objetos fica mais fácil em coordenadas retangulares.

Dado $f : D^n \rightarrow D^n$, gostaríamos de construir uma aplicação $g : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que codificasse f de tal maneira que a existência de Borsuk-Ulam pontos antipodais para g implicasse na existência de um Brouwer ponto fixo para f .

A idéia é a seguinte: na n-esfera cúbica temos as faces superior e inferior do cubo como cópias homeomorfas de D^n . Estas, são separadas por uma faixa “equatorial”, consistindo das outras faces. Nossa tarefa é definir uma função contínua g nessas três regiões de S^n .

Na face superior, definimos g de tal modo que um zero de g implica um ponto fixo para f . Definimos assim g , na face inferior, tal que a imagem de cada ponto seja a negativa da imagem do seu antípoda na face superior. Tal aplicação é dita **preservando antípodas**, ou seja, $g(-x) = -g(x)$.

Se pudermos dividir a região equatorial com uma aplicação que está também preservando antípodas mas que nunca zera, então o Teorema de Borsuk-Ulam garante a existência de pontos antipodais que foram aplicados por g no mesmo ponto. Como g está preservando antípodas, esses pontos antipodais devem ser aplicados no zero, o que por construção não pode ocorrer na faixa equatorial. Um zero para g nas faces superior e inferior implicam assim em um ponto fixo para f .

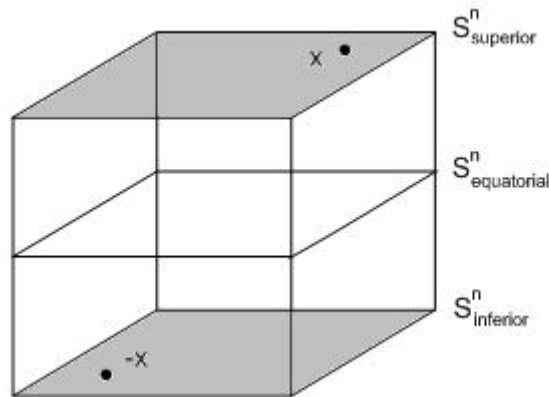
4.3.2 A Construção

Visamos construir uma aplicação $g = (g_1, g_2, \dots, g_n) : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que seja contínua e preserve antípodas, isto é, $g(-x) = -g(x)$.

Primeiramente, construiremos g nas faces superior e inferior. Note que cada face, na qual alguma coordenada $x_k = \pm 1$, é um n -cubo. Quando $x_{n+1} = \pm 1$, obtemos:

$$S_{superior}^n = \{x \in S^n \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 1)\} \quad \text{e} \quad S_{inferior}^n = \{x \in S^n \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_n, -1)\},$$

que denotam as faces superior e inferior da cúbica S^n .



Considere $p : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por $p(x) = (x_1, \dots, x_n)$, isto é, p ignora a última coordenada. Temos $p(-x) = -p(x)$.

Para todo $x \in S_{superior}^n$, defina $g(x) = p(x) - f(p(x))$. Obtemos neste caso que

$$g(-x) = p(-x) - f(p(-x)) = -p(x) - f(-p(x)) = -p(x) + f(p(x)) = -g(x).$$

Agora, para todo $x \in S_{inferior}^n$, defina $g(x) = p(x) + f(-p(x))$. Neste caso

$$g(-x) = p(-x) + f(-p(-x)) = -p(x) + f(p(x)) = -p(x) - f(-p(x)) = -g(x).$$

Assim, em ambos os casos anteriores segue que g preserva antípodas.

A aplicação g é contínua, já que f e p são contínuas. E, se $g(x) = 0$ então $p(x)$ é um ponto fixo para f .

Queremos definir agora g nas faces “laterais” da n -esfera cúbica de tal forma que esta se iguale continuamente com g na $S_{superior}^n$ e na $S_{inferior}^n$ e além disso, continue preservando pontos antipodais mas, que nunca seja zero nas laterais. Esta última parte é a mais trabalhosa.

Devemos tentar estender os valores de g linearmente da face superior para a face inferior porém, isto não garante que $g \neq 0$ nas faces laterais. Entretanto, os seguintes lemas mostram que se definirmos g adequadamente no equador, podemos estender linearmente os valores do equador para as faces superior e inferior sem criar um novo zero para g .

Definição 4.3.1 Dizemos que F é uma face “lateral” da cúbica S^n se existe algum k , $1 \leq k \leq n$, tal que para todo x pertencente a F , x_k é constante e igual a $+1$ ou -1 .

Lema 4.3.1 Para todo x pertencente a $F \cap (S_{inferior}^n \cup S_{superior}^n)$, a função coordenada $g_k(x)$ é 0 ou possui o mesmo sinal de x_k .

Demonstração. Temos, pela definição de g em $F \cap S_{superior}^n$, $g_k(x) = x_k - f_k(p(x))$ e, em $F \cap S_{inferior}^n$, $g_k(x) = x_k + f_k(-p(x))$.

Agora, f é uma aplicação em um n -cubo, logo $|f_k| \leq 1$. Assim,

se $x_k = 1$ então $g_k(x) \geq 0$ para todo x em $F \cap (S_{inferior}^n \cup S_{superior}^n)$;

e se $x_k = -1$ então $g_k(x) \leq 0$ para todo x em $F \cap (S_{inferior}^n \cup S_{superior}^n)$.

Portanto, para todo x em $F \cap (S_{inferior}^n \cup S_{superior}^n)$, a função coordenada $g_k(x)$ é 0 ou possui o mesmo sinal de x_k . ■

Agora seja $S_{equador}^n = \{x \in S^n \mid x = (x_1, \dots, x_n, 0)\}$ o equador de S^n . Para todo $x \in S_{equador}^n$, defina g em $S_{equador}^n$ por

$$g(x) = p(x) + \frac{g(x_1, \dots, x_n, -1) + g(x_1, \dots, x_n, 1)}{2}. \quad (4.4)$$

Temos, para todo $x \in S_{\text{equador}}^n$

$$g(-x) = p(-x) + \frac{g(-x_1, \dots, -x_n, -1) + g(-x_1, \dots, -x_n, 1)}{2} = -p(x) + \frac{-g(x_1, \dots, x_n, 1)}{2} + \frac{-g(x_1, \dots, x_n, -1)}{2} = -\left(p(x) + \frac{g(x_1, \dots, x_n, -1) + g(x_1, \dots, x_n, 1)}{2}\right) = -g(x).$$

Logo, g preserva antípodas no equador.

Lema 4.3.2 *Para todo x pertencente a S_{equador}^n , se $|x_k| = 1$ então a função coordenada $g_k(x)$ não é 0 e possui o mesmo sinal que x_k .*

Demonstração. Pelo Lema 4.3.1 segue que se $|x_k| = 1$ então $g_k(x)$ é 0 ou possui o mesmo sinal de x_k nas faces superior e inferior. Dessa forma, usando a equação (4.4) e o fato que $p_k(x) = x_k = \pm 1$, obtemos $g_k(x)$ não nula no equador e possuindo o mesmo sinal que x_k . ■

Para definir g sobre o equador devemos calcular a média dos valores dos correspondentes pontos em S_{superior}^n e S_{inferior}^n , e assim “levantar” tal média por $p(x)$ (a qual é igual a x_k na k -ésima coordenada) de maneira a “empurrá-la” longe de ser eventualmente zero.

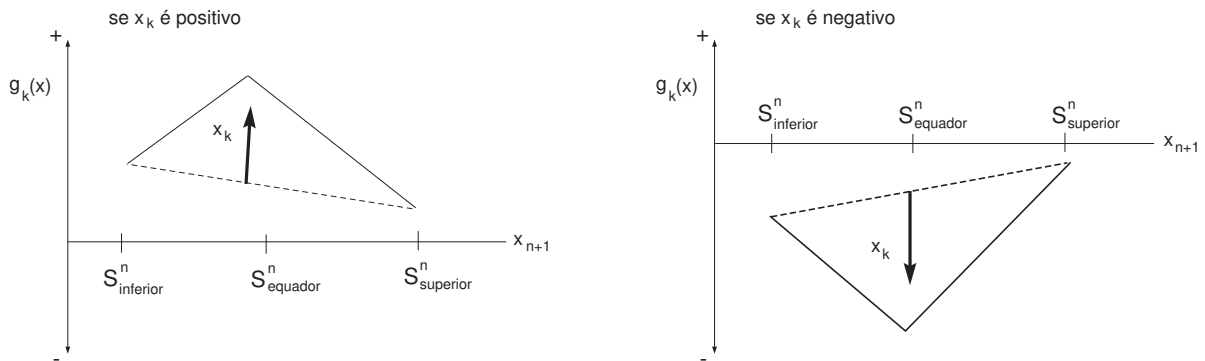


Figura 4.1: Os gráficos mostram uma seção transversal dos valores de g_k ao longo da “longitude” da n -esfera cúbica nas faces determinadas por $x_k = \pm 1$.

Definiremos agora g continuamente no restante de S^n , estendendo-a linearmente do equador para valores em S_{inferior}^n e S_{superior}^n . Isto é, para $0 \leq x_{n+1} \leq 1$, seja

$$g(x) = x_{n+1}g(x_1, \dots, x_n, 1) + (1 - x_{n+1})g(x_1, \dots, x_n, 0). \quad (4.5)$$

E, para $-1 \leq x_{n+1} \leq 0$, seja

$$g(x) = -x_{n+1}g(x_1, \dots, x_n, -1) + (1 + x_{n+1})g(x_1, \dots, x_n, 0). \quad (4.6)$$

Notemos que g é contínua e preserva antípodas. Além disso, ela pode atingir o valor 0 somente em $S_{superior}^n$ ou $S_{inferior}^n$, devido ao seguinte lema.

Lema 4.3.3 *Se $|x_{n+1}| < 1$, então $g(x) \neq 0$.*

Demonstração. Como, por hipótese, $|x_{n+1}| < 1$, estaremos assim em uma face lateral e dessa forma, existe algum k com $1 \leq k \leq n$, para o qual $x_k = \pm 1$.

Mostraremos que $g(x)$ não pode ser zero provando que a função coordenada $g_k(x)$ é não-nula.

Consideremos as equações (4.5) e (4.6). Segue, pelos Lemas 4.3.1 e 4.3.2 que $g_k(x_1, x_2, \dots, x_n, \pm 1)$ e $g_k(x_1, x_2, \dots, x_n, 0)$ possuem o mesmo sinal que x_k , e esta última é não-nula. Além disso, $(1 - x_{n+1})$ e $(1 + x_{n+1})$ são estritamente positivos pois $|x_{n+1}| < 1$.

Portanto, obtemos agora das equações (4.5) e (4.6) que $g_k(x)$ é não-nula e, de fato, possui o mesmo sinal que x_k . ■

Para concluir que Borsuk-Ulam implica Brouwer, observe que pelo Teorema de Borsuk-Ulam aplicado a função $g : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada anteriormente, existe um par $\{x, -x\}$ tal que $g(x) = g(-x)$.

Porém, $g(x) = -g(-x)$ já que, pela construção feita anteriormente, g está preservando antípodas.

Dessa forma, $g(x) = g(-x) = 0$ o que, pelo Lema 4.3.3, implica que um dos elementos de $\{x, -x\}$ estão em $S_{superior}^n$. Sem perda de generalidade, suponhamos que seja x .

Assim $g(x) = p(x) - f(p(x)) = 0$ em $S_{superior}^n$ implica que para $y = p(x) \in D^n$, temos $f(y) = y$, o que prova o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. ■

Conclusão:

Estabelecemos assim as relações propostas na introdução deste trabalho, entre os cinco Teoremas Clássicos da Topologia aqui estudados.

Referências Bibliográficas

- [1] ARKOWITZ, M.; BROWN, R. F. The Lefschetz-Hopf Theorem and Axioms for the Lefschetz Number. **Fixed Point Theory and Applications**, Hindawi Publishing Corporation, p.1-11, ago. 2003.
- [2] BREDON, G. E. **Topology and Geometry**. New York: Springer-Verlag, 1997.
- [3] BROWN, R. F. **The Lefschetz Fixed Point Theorem**. London: Scott-Foresman, 1971.
- [4] CROOM, F. H. **Basic concepts of algebraic topology**. New York: Springer-Verlag, 1978.
- [5] DOLD, A. **Lectures on Algebraic Topology**. 2.ed. Berlin: Springer-Verlag, 1980.
- [6] DUGUNDJI, J.; GRANAS, A. **Fixed Point Theory**. Warsaw: Polish Scientific Publishers, 1982.
- [7] GONÇALVES, D.L.; KIIHL, J.C.S. **Teoria do Índice**. 14º Colóquio Brasileiro de Matemática. Rio de Janeiro: IMPA, 1985.
- [8] HATCHER, A. **Algebraic Topology**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [9] JEZIERSKI, J.; MARZANTOWICZ, W. **Homotopy Methods in Topological Fixed and Periodic Points Theory**. v.3. Netherlands: Springer-Verlag, 2006.
- [10] MAEHARA, R. The Jordan Curve Theorem via the Brouwer Fixed Point Theorem. **The American Mathematical Monthly**, v.91, n.10, p.641-643, dez. 1984.
- [11] MASSEY, W.S. **Algebraic Topology: An Introduction**. New York: Springer-Verlag, 1967.

-
- [12] MUNKRES, J.R. **Elements of Algebraic Topology**. New York: Addison-Wesley, 1984.
- [13] ——— **Topology**. New York: Addison-Wesley, 2000.
- [14] SU, F. E. Borsuk-Ulam implies Brouwer: a direct construction. **The American Mathematical Monthly**, v.104, n.9, p.855-859, nov. 1997.
- [15] TRINCA, C. C. **O Número de Lefschetz e Teoremas do Tipo Borsuk-Ulam**. 2004. 57 f. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, UNESP, São José do Rio Preto, 2004.
- [16] VEBLEN, O. Theory of plane curves in non-metrical analysis situs. **Transactions of the American Mathematical Society**, v.6, n.1, p.83-98, jan. 1905.
- [17] VICK, J.W. **Homology Theory**. New York: Springer-Verlag, 1973.
- [18] WONG, P. **Lectures on Fixed Point Theory**. Notas de mini-curso, XV Encontro Brasileiro de Topologia. Rio Claro: UNESP, 2006.
- [19] WONG, P. **Teoria de Pontos Fixos**. Notas de mini-curso, XIV Encontro Brasileiro de Topologia. Campinas: UNICAMP, 2004.

Índice Remissivo

- anel de cohomologia, 36
- anti-comutatividade, 37
- aplicação aumento, 29
- aplicação avaliação, 38
- aplicação característica, 40
- aplicação celular, 42
- aplicação compactamente fixada, 58
- aplicação d-compacta, 57
- aplicação de Kronecker, 38
- atuar livremente, 12

- células, 40
- cadeia singular, 32
- cadeia singular relativa, 34
- cadeias relativas, 29
- co-bordo, 32, 35
- co-cadeia, 31, 35
- co-ciclo, 32
- cohomologia relativa, 32, 35
- cohomologia simplicial, 32
- cohomologia singular, 35
- complexo de cadeia reduzido, 29
- complexo de cadeia singular, 33, 34
- complexo simplicial, 20
- complexo simplicial abstrato, 24
- cone de suspensão, 73
- conjunto dos pontos fixos, 45, 60

- conjunto geometricamente independente, 19
- conjunto vértice, 24
- coordenadas baricêntricas, 19, 22
- curva de Jordan, 47
- CW-complexo, 40

- dimensão de um simplexo, 20, 24

- espaço adjacente, 21
- espaço euclidiano generalizado, 23
- espaço projetivo (real), 15
- espaço vetorial classificado, 66
- espaços de recobrimento, 14
- esquematisação dos vértices, 25

- fórmula bordo, 37
- fórmula co-bordo, 36
- face de um simplexo, 20, 24
- fibra, 15

- G-ação, 12
- G-aplicação, 12
- G-espaço, 12
- grau de uma aplicação, 58

- homologia local, 34
- homologia reduzida, 29, 31, 33, 34
- homologia relativa, 30, 31, 34
- homologia simplicial, 29, 31
- homologia singular, 33, 34

- índice de Kronecker, 38
 índice de pontos fixos, 60
 índice de pontos fixos reduzido, 77
 levantamento de caminho, 16
 levantamento de homotopia, 16
 n-esqueleto, 40
 n-variedade, 39
 número de folhas do recobrimento, 17
 número de Lefschetz, 70
 número de Lefschetz relativo, 70
 operador bordo, 28
 operador co-bordo, 31
 órbita, 13
 orientação de um espaço, 57
 p-bordo, 29–31
 p-cadeia, 28, 30
 p-ciclo, 29–31
 p-esqueleto, 21
 p-simplexo padrão, 32
 p-simplexo singular, 32
 poliedro, 21
 polytope, 21
 ponto fixo, 45
 preservar pontos antipodais, 84, 98
 produto cap, 37
 produto cup, 36
 produto tensorial, 26, 27
 projeção de recobrimento, 15
 projeção quociente, 15
 propriamente descontínuo, 13
 Propriedade da Extensão da Homotopia, 43
 realização geométrica, 25
 recobrimento regular, 18
 recobrimento universal, 18
 retração, 45, 63
 retração de deformação, 42
 retrato, 45, 63
 retrato de deformação, 43
 retrato de vizinhança euclidiana, 63
 $S_{equador}^n$, 100
 $S_{inferior}^n$, 99
 $S_{superior}^n$, 99
 sequência exata, 13, 14
 simplexo, 18, 19, 24
 simplexo orientado, 27
 simplexo singular linear, 33
 subcomplexo, 21, 24
 subdivisão baricêntrica, 22
 subpoliedro, 21
 suspensão de um espaço, 73
 Teorema da Curva de Jordan, 47
 Teorema da Dualidade de Poincaré, 39
 Teorema da Monodromia, 17
 Teorema de Borsuk-Ulam, 84, 91, 95
 Teorema de Lefschetz-Hopf, 77
 Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, 45, 82
 Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz, 81
 transformação de recobrimento, 17
 união dual, 88
 vizinhança elementar, 15