



Universidade Estadual Paulista

Câmpus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Ciclos limites e a equação de van der Pol

Pedro Toniol Cardin

Orientador: Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva

Dissertação apresentada ao Instituto de Biologia, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, campus de São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

São José do Rio Preto

Março - 2008

Aos meus pais,
José Carlos Cardin e Maria
Antonia Toniol Cardin
e as minhas queridas irmãs,
Juciene e Laila
dedico.

“É impossível proceder ao infinito na série dos seres que se geram sucessivamente. Deve-se admitir, por isso, que existe um ser necessário que tenha em si toda a razão de sua existência, e do qual procedam todos os outros seres. A este chamamos Deus.”

(São Tomás de Aquino)

Agradecimentos

A DEUS, que é a fonte e o caminho da minha vida.

Aos meus pais e minhas duas irmãs pelo apoio e por sempre estarem do meu lado.

Ao meu tio Valdir Cardin e sua família que inicialmente me acolheu na cidade de São José do Rio Preto e por sua enorme ajuda na minha vivência e na minha adaptação neste novo lugar.

A minha namorada pelo incondicional amor e por sua paciente espera.

Aos meus amigos de república e da minha cidade Ilha Solteira, pelos momentos de descontração.

Aos meus amigos da minha turma de pós-graduação, e demais amigos da Unesp pelo companheirismo em todos os momentos.

Aos meus professores de graduação e pós-graduação. Em especial ao Prof^o. Dr. Paulo Ricardo da Silva, pela orientação, incentivo, crença e paciência na elaboração deste trabalho.

A todas as pessoas e funcionários do IBILCE que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho.

A CAPES pelo auxílio financeiro.

Resumo

Nesta dissertação estudamos critérios para determinar a existência, a não existência e a unicidade de ciclos limites de campos de vetores planares. Mais especificamente, estudamos *equações de Lienard* $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$, onde f e g satisfazem determinadas hipóteses. Em particular estudamos a *equação de van der Pol* $\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$, a qual é conhecida da teoria dos circuitos elétricos. Provamos a existência e a unicidade de ciclos limites para estas equações. Por fim estudamos a equação de van der Pol com o parâmetro $\varepsilon \uparrow \infty$ e o *fenômeno canard* que ocorre ao considerarmos um parâmetro adicional α . As técnicas utilizadas são as usuais de *Análise Assintótica*.

Palavras chave: Ciclos limites, campo de vetores planares, bifurcação de Hopf, equação de van der Pol, sistemas de Lienard.

Abstract

In this work we study the existence, the non existence and the uniqueness of limit cycles of planar vector fields. More specifically, we study Lienard equations $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$, where f and g satisfy some hypothesis. In particular we study the van der Pol equation $\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$, which is knew of the circuit theory. We prove the existence and the uniqueness of limit cycles for these equations. In the last part we study the van der Pol equation with the parameter $\varepsilon \uparrow \infty$ and the canard phenomenon which appears when we consider an additional parameter α . The techniques employed are the usual in the *Asymptotic Analysis*.

Key words: Limit cycles, planar vector fields, Hopf bifurcation, van der Pol equation, Lienard systems.

Sumário

Introdução	9
1 Fundamentos da Teoria Qualitativa	12
1.1 Campos vetoriais e fluxos	12
1.2 Retrato de fase de um campo vetorial	16
1.3 Equivalência e conjugação de campos vetoriais	22
1.4 Estrutura local dos pontos singulares hiperbólicos	26
1.5 Estabilidade local segundo Liapunov	27
2 Campos Planares	31
2.1 Órbitas periódicas e o critério de Bendixson	31
2.2 O teorema de Poincaré–Bendixson	35
2.3 Fluxos e conjuntos limites em superfícies	42
2.4 Ciclos limites	46
2.5 Estrutura local das órbitas periódicas	49
2.5.1 A transformação de Poincaré	49
3 A Equação de van der Pol para Circuitos Elétricos	53
3.1 Circuito elétrico <i>RLC</i>	53
3.2 A equação de van der Pol	56
3.3 Uma bifurcação de Andronov–Hopf	66
4 Sistemas de Lienard	71

4.1	Existência de soluções periódicas para equações de Lienard via Poincaré–Bendixson	73
4.2	Existência de centros para equações de Lienard	76
4.3	Ciclos limites de sistemas de Lienard	81
4.3.1	Alguns resultados recentes sobre ciclos limites de sistemas de Lienard	86
4.4	O 16° Problema de Hilbert	91
5	A Equação $\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$ com $\varepsilon \rightarrow +\infty$	93
5.1	Introdução	93
5.2	Os problemas e os resultados	96
5.3	Alguns teoremas básicos de aproximação	103
5.4	Relaxamento de oscilação clássica	107
5.4.1	O fluxo-rápido	108
5.4.2	As variedades estável e instável	110
5.4.3	Saindo da variedade estável	116
5.4.4	Conclusões	121
5.5	O Fenômeno Canard	123
5.5.1	O caso degenerado	124
5.5.2	O caso geral: análises	127
5.5.3	Patos sub-críticos	131
	Referências Bibliográficas	135

Introdução

O estudo global das curvas que são definidas por equações diferenciais tem seu início com a memória de Henry Poincaré num artigo publicado em 1881, “Sur les courbes définies par une équation différentielle”. Iniciou-se com este trabalho uma linha de pensamento e de contribuições conhecida como *Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias*, na qual a pesquisa sobre *ciclos limites*, que são órbitas periódicas isoladas, é uma das partes mais interessantes e difíceis. Questões como a não existência, a existência, a unicidade e outras propriedades dos ciclos limites tem sido estudadas extensivamente. São conhecidos os métodos de *Bendixson-Dulac*, para a não existência; o *Teorema de Poincaré-Bendixson*, para a existência; métodos de Poincaré, Andronov, Cherkas, Levinson, Leontovich, Lienard, Massera entre outros, para a unicidade; e a análise da *Apliação de Primeiro Retorno de Poincaré* definida numa seção transversal ao fluxo planar, para estudo da estabilidade.

Os ciclos limites de campos de vetores foram definidos por Poincaré. No final da década de 20 van der Pol, Lienard e Andronov, no estudo de oscilações não-lineares de fenômenos elétricos, obtiveram certas equações especiais de segunda ordem para as quais ocorriam os ciclos limites idealizados por Poincaré. Desde então, a não existência, a existência, a unicidade e outras propriedades dos ciclos limites foram estudadas extensivamente por matemáticos e físicos, e mais recentemente também por químicos, biólogos e economistas.

O método mais conhecido para provar a não existência de ciclos limites em uma região simplesmente conexa do plano é o método de Bendixson-Dulac e algumas de suas variações. O método das funções de Dulac também dá limites superiores para o número de trajetórias fechadas em regiões multiplamente conexas.

O conhecido Teorema de Poincaré-Bendixson nos fornece um caminho para provarmos a existência de ciclos limites quando temos convenientes condições satisfeitas. O problema

da unicidade de um ciclo limite para um determinado sistema é, em geral, mais difícil que a existência. Alguns critérios para a unicidade de ciclos limites podem ser obtidos usando a estabilidade ou a instabilidade dos ciclos limites. Existem métodos para a unicidade desenvolvidos por Poincaré, Andronov, Cherkas, Levinson, Leontovich, Lienard, Massera, Sansone, Zhang Zhifen e muitos outros.

Um dos métodos mais eficientes para se estudar problemas de existência e unicidade de ciclos limites no plano é a análise da aplicação de primeiro retorno de Poincaré, definida numa seção transversal ao fluxo. Infelizmente, tal análise em geral não é muito simples.

Os problemas mais difíceis aparecem quando um sistema planar apresenta mais que um ciclo limite e tentamos entender sua distribuição sobre o plano. De fato, o problema mais famoso sobre ciclos limites é devido ao matemático alemão David Hilbert; conhecido como 16° Problema de Hilbert:

Qual é o número máximo de ciclos limites para um campo de vetores polinomial de grau menor ou igual a n e quais são as suas posições relativas no plano?

Outro interessante problema é determinar o número de ciclos limites que bifurcam de um ponto crítico, de um gráfico ou ainda de um centro.

No presente trabalho nos propomos a estudar os diferentes critérios para determinar a existência, a não existência e a unicidade de ciclos limites de campos de vetores planares. Para isso, começamos no primeiro capítulo a relembrar os fundamentos básicos da *Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias*. No segundo capítulo provamos alguns critérios (como o critério de Bendixson e o Teorema de Poincaré–Bendixson) para a não-existência ou existência de ciclos limites de sistemas planares. No terceiro capítulo iniciamos o estudo da famosa equação de van der Pol, fazendo um estudo completo do retrato de fase para um caso particular desta equação, a saber, quando o parâmetro ε é igual a 1. No quarto capítulo nos atemos ao estudo dos chamados *Sistemas de Lienard*, dos quais a equação de van der Pol é um caso particular. Terminamos este capítulo fazendo um pequeno relato sobre o 16° Problema de Hilbert. Finalmente, no quinto capítulo, estudamos novamente a equação de van der Pol agora com o parâmetro ε tendendo ao infinito. Veremos que, se introduzirmos mais um parâmetro α na equação, constataremos

o surgimento de um fenômeno que foi denominado pelos matemáticos que o descobriram de *Fenômeno Canard*, que será descrito naquele capítulo.

Capítulo 1

Fundamentos da Teoria Qualitativa

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos e resultados fundamentais da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias que serão utilizados no decorrer do texto. Para um desenvolvimento mais amplo destes assuntos, recomendamos a leitura da terceira parte de [14].

1.1 Campos vetoriais e fluxos

Seja \mathcal{U} um subconjunto aberto do espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Um **campo vetorial de classe** C^r , $1 \leq r \leq \infty$ ou $r = \omega$, em \mathcal{U} é uma aplicação $X : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^r . Isto é, as derivadas parciais, até ordem r de X se $r < \infty$, e todas se $r = \infty$, existem e são contínuas em \mathcal{U} ; se $r = \omega$, o campo é analítico em \mathcal{U} , isto é, a série de Taylor de X em todo ponto de \mathcal{U} converge uniformemente para X numa vizinhança desse ponto.

Ao campo vetorial X está associado a equação diferencial

$$x' = X(x), \quad \text{onde} \quad x' = \frac{dx}{dt} \tag{1.1}$$

e reciprocamente, à equação diferencial (1.1) está associado o campo de vetores X .

As soluções desta equação, isto é, as aplicações diferenciáveis $\varphi : I \rightarrow \mathcal{U}$ (I intervalo da reta) tais que

$$\varphi'(t) = \frac{d\varphi}{dt}(t) = X(\varphi(t)) \tag{1.2}$$

para todo $t \in I$, são chamadas **trajetórias** ou **curvas integrais** de X .

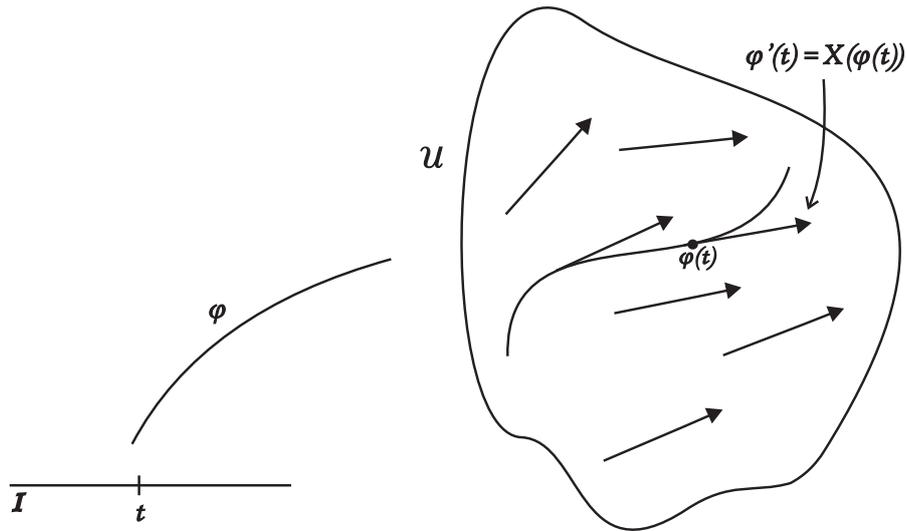


Figura 1.1: Trajetórias do campo X .

Um ponto $x_0 \in \mathcal{U}$ é dito ponto **singular** de X se $X(x_0) = 0$ e ponto **regular** de X se $X(x_0) \neq 0$.

Se x_0 é ponto singular então $\varphi(t) = x_0, t \in \mathbb{R}$, é solução de (1.1). Reciprocamente, se $\varphi(t) = x_0, t \in \mathbb{R}$, é solução de (1.1) então x_0 é ponto singular de X , pois

$$0 = \varphi'(t) = X(\varphi(t)) = X(x_0).$$

Uma trajetória $\varphi : I \rightarrow \mathcal{U}$ de X chama-se **máxima** se para toda trajetória $\psi : J \rightarrow \mathcal{U}$ tal que $I \subseteq J$ e $\varphi = \psi|_I$ se tenha $I = J$ e conseqüentemente $\varphi = \psi$. Neste caso I chama-se **intervalo máximo**.

A equação (1.1) (ou (1.2)) admite a seguinte interpretação geométrica: φ é uma curva integral de X se, e somente se, seu vetor velocidade $\varphi'(t)$ em t coincide com o valor do campo X em $\varphi(t)$. Veja a figura 1.1.

Uma equação diferencial do tipo (1.1) é chamada equação diferencial **autônoma**, devido ao fato que o campo X independe da variável t .

Teorema 1.1.1. *Seja X um campo vetorial de classe $C^r, 1 \leq r \leq \infty$ ou $r = \omega$.*

a) **(Existência e unicidade de soluções máximas).** *Para cada $x \in \mathcal{U}$ existe um intervalo aberto I_x onde está definida a única solução máxima φ_x de (1.1) tal que $\varphi_x(0) = x$.*

b) (**Propriedade de grupo**). Se $y = \varphi_x(t)$ e $t \in I_x$, então $I_y = I_x - t = \{r - t : r \in I_x\}$ e $\varphi_y(s) = \varphi_x(t + s)$ para todo $s \in I_y$.

c) (**Regularidade com relação às condições iniciais**). O conjunto $\Omega = \{(t, x) : x \in \mathcal{U}, t \in I_x\}$ é aberto em \mathbb{R}^{n+1} e a aplicação $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\varphi(t, x) = \varphi_x(t)$ é de classe C^r , $1 \leq r \leq \infty$ ou $r = \omega$, em Ω .

Demonstração – Ver [14], pgs. 211 e 239. Observamos que esta demonstração vale também quando \mathbb{R}^n é substituído por um espaço de Banach E , veja [8]. ■

Definição 1.1.2. A aplicação $\varphi : \Omega \rightarrow \mathcal{U}$ chama-se **fluxo gerado por X** .

Note que as condições da definição de fluxo de classe C^r estão satisfeitas, isto é, $\varphi(0, x) = x$ e $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$, sendo que a última condição é válida apenas nas condições do teorema 1.1.1. É claro que se $I_x = \mathbb{R}$ para todo x , o fluxo gerado por X é um fluxo de classe C^r em \mathcal{U} . Entretanto, muitas vezes $I_x \neq \mathbb{R}$. Por este motivo o fluxo gerado por X é chamado freqüentemente de fluxo local ou grupo local a um parâmetro gerado por X . Esta última denominação decorre do fato de que a condição b) do teorema 1.1.1 define, quando $\Omega = \mathbb{R} \times \mathcal{U}$, um homomorfismo do grupo aditivo dos reais no grupo dos difeomorfismos de classe C^r de \mathcal{U} munido da operação de composição. Ou seja, o homomorfismo é $t \mapsto \varphi_t$, e temos $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ e $\varphi_{-t} = \varphi_t^{-1}$, para $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$. É válida assim a imagem de que os pontos de \mathcal{U} fluem ao longo das trajetórias de X do mesmo modo que um fluido desloca-se ao longo de suas linhas de corrente.

Corolário 1.1.3. Seja X um campo vetorial C^r , $r \geq 1$, em $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $x \in \mathcal{U}$ e $I_x = (\omega_-(x), \omega_+(x))$ é tal que $\omega_+(x) < \infty$ (resp. $\omega_-(x) > -\infty$) então $\varphi_x(t)$ tende a $\partial\mathcal{U}$ quando $t \rightarrow \omega_+(x)$ (resp. $t \rightarrow \omega_-(x)$), isto é, para todo compacto $K \subseteq \mathcal{U}$ existe $\varepsilon = \varepsilon(K) > 0$ tal que se $t \in [\omega_+(x) - \varepsilon, \omega_+(x))$ (resp. $t \in (\omega_-(x), \omega_-(x) + \varepsilon]$) então $\varphi_x(t) \notin K$.

Demonstração – Por contradição suponhamos que exista um compacto $K \subseteq \mathcal{U}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ exista $t_\varepsilon \in [\omega_+(x) - \varepsilon, \omega_+(x))$ tal que $\varphi_x(t_\varepsilon) \in K$. Então, em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $t_n \in [\omega_+(x) - \frac{1}{n}, \omega_+(x))$ tal que $\varphi_x(t_n) \in K$.

É claro que $t_n \rightarrow \omega_+(x)$. Pela compacidade de K , passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que a seqüência $(\varphi_x(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a um ponto $x_0 \in K$. Sejam $b > 0$ e $\alpha > 0$ tais que $B_b \times I_\alpha \subseteq \Omega$, onde $B_b = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x_0| \leq b\} \subseteq \mathcal{U}$ e $I_\alpha = \{t \in \mathbb{R} : |t| < \alpha\}$. Observe que é possível escolher $\alpha > 0$ tal que $B_b \times I_\alpha \subseteq \Omega$. Com efeito, basta encontrarmos $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset \mathcal{U}$ e lembrarmos que, conforme o Teorema de Existência e Unicidade, o comprimento do intervalo depende apenas do r e da constante de limitação do campo X em $B(x_0, r) \subset \mathcal{U}$. (Para mais detalhes veja [2], Teorema 10.12, página 385). Para encontrar $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset \mathcal{U}$ supomos o contrário, ou seja, supomos que

$$\forall r > 0, \exists x_r \in K, B(x_r, r) \not\subseteq \mathcal{U}.$$

Assim, tomando $r = \frac{1}{n}$ temos que

$$\exists x_n \in K, \exists x'_n \notin \mathcal{U}, |x'_n - x_n| < \frac{1}{n}.$$

Como K é compacto, podemos supor, sem perda de generalidade, que existe $x \in K$ tal que $x_n \rightarrow x$. Assim também temos $x'_n \rightarrow x \in K \subset \mathcal{U}$. Como \mathcal{U} é aberto, existe uma bola de centro em x contida em \mathcal{U} , mas isso é uma contradição já que desta forma x'_n pertenceria a essa bola para n suficientemente grande e portanto x'_n também estaria em \mathcal{U} para n suficientemente grande.

Prosseguindo, temos pela parte (c) do teorema 1.1.1, Ω é aberto. Pela parte (b), $\varphi_x(t_n + s)$ está definido para $s < \alpha$ e coincide com $\varphi_y(s)$ para n suficientemente grande, onde $y = \varphi_x(t_n)$. Mas então $t_n + s > \omega_+(x)$, contradição. ■

Corolário 1.1.4. *Se φ é uma solução de (1.1) definida no intervalo máximo I e $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ para $t_1 \neq t_2$, então $I = \mathbb{R}$ e $\varphi(t + c) = \varphi(t)$ para todo t , onde $c = t_2 - t_1$. Isto é, φ é periódica.*

Demonstração – Definindo $\psi : [t_2, t_2 + c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $\psi(t) = \varphi(t - c)$, tem-se $\psi'(t) = \varphi'(t - c) = X(\varphi(t - c)) = X(\psi(t))$ e $\psi(t_2) = \varphi(t_1) = \varphi(t_2)$. Em virtude da unicidade das soluções, tem-se $[t_2, t_2 + c] \subseteq I$ e $\varphi(t) = \varphi(t + c)$ se $t \in [t_1, t_2]$. Prosseguindo

desta maneira, obtemos $I = \mathbb{R}$ e $\varphi(t + c) = \varphi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. ■

Antes de finalizar esta seção, daremos a definição do que vem a ser um conjunto limite. Este conceito será usado para demonstrar o último teorema deste capítulo e será bastante explorado no Capítulo 2.

Definição 1.1.5. *Seja $X : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $\omega_+(p) = +\infty$, definimos o **conjunto ω -limite** do ponto $p \in \mathcal{U}$ (e denotaremos por $\omega(p)$) como sendo o conjunto dos pontos $q \in \mathcal{U}$ para os quais existe uma seqüência $t_n \rightarrow +\infty$ tal que*

$$\varphi(t_n, p) \rightarrow q.$$

*Analogamente, se $\omega_-(p) = -\infty$, definimos o **conjunto α -limite** do ponto $p \in \mathcal{U}$ como sendo o conjunto $\alpha(p)$ dos pontos $q \in \mathcal{U}$ para os quais existe uma seqüência $t_n \rightarrow -\infty$ tal que*

$$\varphi(t_n, p) \rightarrow q.$$

Prova-se que o conjunto ω -limite de um ponto $x \in \mathcal{U}$ é fechado e invariante. Caso a semi-órbita positiva $\mathcal{O}^+(x) = \{\varphi_x(t) : 0 \leq t \leq \omega_+(x)\}$ seja limitada então $\omega(x)$ é compacto, conexo e não-vazio. Se $y \in \omega(x)$ então $\omega(y) = \omega(x)$. Resultados análogos valem também para o conjunto α -limite. As provas destas propriedades podem ser encontradas em [14], Teorema 5, página 245.

1.2 Retrato de fase de um campo vetorial

Definição 1.2.1. *O conjunto $\mathcal{O}(p) = \{\varphi(t, p) : t \in I_p\}$, isto é, a imagem da curva integral de X pelo ponto p , chama-se **órbita** de X pelo ponto p .*

Observe que

$$q \in \mathcal{O}(p) \Leftrightarrow \mathcal{O}(p) = \mathcal{O}(q)$$

pois se $q \in \mathcal{O}(p)$, $q = \varphi(t_1, p)$ e $\varphi(t, q) = \varphi(t, \varphi(t_1, p)) = \varphi(t + t_1, p)$ e $I_p - t_1 = I_q$.

Em outros termos, duas órbitas de X coincidem ou são disjuntas. Isto é, \mathcal{U} fica decomposto numa união disjunta de curvas diferenciáveis, podendo cada uma ser:

1. Imagem biunívoca de um intervalo de \mathbb{R} ;
2. Um ponto;
3. Homeomorfa a um círculo.

No segundo caso $\{p\} = \mathcal{O}(p)$, a órbita chama-se **órbita singular**; no terceiro caso a órbita chama-se **fechada** ou **periódica**. O leitor interessado pode verificar em [14], pg. 217, que em termos da trajetória máxima φ de (1.1) em I , os itens acima correspondem às seguintes alternativas:

1. φ é injetora;
2. $I = \mathbb{R}$ e φ é constante;
3. $I = \mathbb{R}$ e φ é periódica, isto é, existe um $c > 0$ tal que $\varphi(t + c) = \varphi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, e $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ se $|t_1 - t_2| < c$.

Definição 1.2.2. *O conjunto aberto \mathcal{U} , munido da decomposição em órbitas de X , chama-se **retrato de fase** de X . As órbitas são orientadas no sentido das curvas integrais do campo X .*

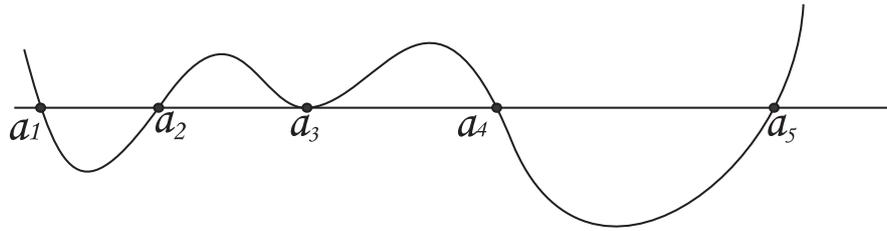
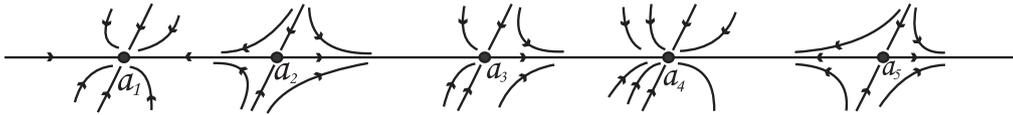
Nas representações gráficas indicamos o sentido positivo de percurso das órbitas por meio de setas.

Exemplo 1. Vamos descrever o retrato de fase de um campo $X = (P, Q)$ em \mathbb{R}^2 , onde $P(x, y) = P(x)$ é uma função contínua que tem um número finito de zeros, a saber $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ e $Q(x, y) = -y$. Denotamos $a_0 = -\infty$ e $a_{n+1} = \infty$.

Em cada intervalo (a_i, a_{i+1}) , $i = 0, 1, \dots, n$, P tem sinal constante. Fixemos um intervalo (a_i, a_{i+1}) no qual P é positivo. Então, se $x \in (a_i, a_{i+1})$ temos que $\varphi(t, x)$, a solução de $x' = P(x)$ por x , é estritamente crescente no seu intervalo máximo $I_x = (\omega_-(x), \omega_+(x))$.

Além disso podemos afirmar que:

- i) Quando $t \rightarrow \omega_-(x)$, $\varphi(t, x) \rightarrow a_i$ e quando $t \rightarrow \omega_+(x)$, $\varphi(t, x) \rightarrow a_{i+1}$.

Figura 1.2: Gráfico de P .Figura 1.3: Retrato de fase de X .

De fato: Se $\varphi(t, x) \rightarrow b > a_i$ quando $t \rightarrow \omega_-(x)$, como $\varphi(t, b)$ é estritamente crescente segue-se que as órbitas $\mathcal{O}(x)$ e $\mathcal{O}(b)$ se interceptam, e em consequência $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(b)$ que é uma contradição. Isto mostra que $\varphi(t, x) \rightarrow a_i$ se $t \rightarrow \omega_-(x)$. Da mesma forma vê-se que $\varphi(t, x) \rightarrow a_{i+1}$ se $t \rightarrow \omega_+(x)$.

ii) Se $i \geq 1$ temos que $\omega_-(x) = -\infty$, pois para todo $t \in I_x$ temos $\varphi(t, x) > a_i > -\infty$, e isso implica devido ao corolário 1.1.3 que $\omega_-(x) = -\infty$.

iii) Se $i < n$ temos que $\omega_+(x) = \infty$, pois da mesma forma que (ii), para todo $t \in I_x$ temos que $\varphi(t, x) < a_{i+1} < \infty$ e isso implica novamente pelo corolário 1.1.3 que $\omega_+(x) = \infty$.

Uma análise similar pode ser utilizada para estudar o caso em que $P(x)$ é negativo no intervalo (a_i, a_{i+1}) .

É claro que se $\psi(t, y)$ é solução de $y' = Q(x, y) = -y$ então $\psi(t, y) = ye^{-t}$.

Assim, o fluxo de X é dado por $\phi(t, x, y) = \phi_{(x,y)}(t) = (\varphi(t, x), ye^{-t})$.

O gráfico de P e o retrato de fase de X podem ser vistos nas figuras 1.2 e 1.3. \square

Exemplo 2. *Sistemas bidimensionais simples.* São bem conhecidos os retratos de fase dos sistemas $x' = Ax + r(x)$, onde A é uma matriz 2×2 com $\det A \neq 0$ e r é de classe C^1 em \mathbb{R}^2 com jacobiano $Dr(0) = 0$. Teremos que todas as configurações que apresentaremos do sistema linear $x' = Ax$, com algumas exceções (a saber, quando os pontos singulares não forem hiperbólicos, conceito que introduziremos adiante), continuarão válidas para

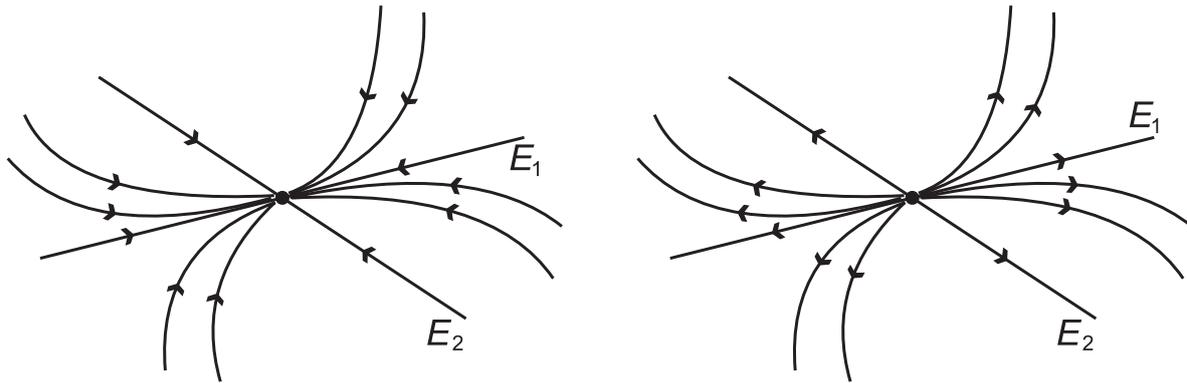


Figura 1.4: Caso a_1 : nó atrator ($\lambda_2 < \lambda_1 < 0$), caso a_2 : nó repulsor ou fonte ($\lambda_2 > \lambda_1 > 0$).

o sistema não-linear $x' = Ax + r(x)$ numa vizinhança do ponto singular $(0, 0)$. Mais precisamente, o retrato de fase de $x' = Ax + r(x)$ numa vizinhança de $(0, 0)$ é a imagem do retrato de fase de $x' = Ax$ por um homeomorfismo h , próximo da identidade, definido numa vizinhança de $(0, 0)$.

A condição $\det A \neq 0$ diz que a origem $0 \in \mathbb{R}^2$ é o único ponto singular do sistema linear. O tipo de ponto singular em $x = 0 \in \mathbb{R}^2$ e suas características de estabilidade são determinadas pelos autovalores λ_1, λ_2 da matriz de coeficientes A . Por sua vez, os autovalores de A são as raízes do polinômio característico

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\text{traço}A)\lambda + \det A$$

do qual obtemos

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{traço}A \pm \sqrt{(\text{traço}A)^2 - 4 \det A}}{2}.$$

Distinguimos os seguintes casos:

- Os autovalores λ_1, λ_2 de A são reais e distintos.
- Os autovalores são complexos conjugados: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$, com $\beta \neq 0$.
- Os autovalores são reais e iguais: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$.

Denotamos por E_1 e E_2 os subespaços gerados pelos vetores que compõem uma base de \mathbb{R}^2 na qual a matriz da parte linear está em forma canônica de Jordan.

A partir desses três casos, são gerados os seguintes subcasos, como esboçados nas figuras 1.4, 1.5, 1.6, 1.7 e 1.8.

Como mencionado acima, pequenas perturbações em alguns dos, ou todos os, coefi-

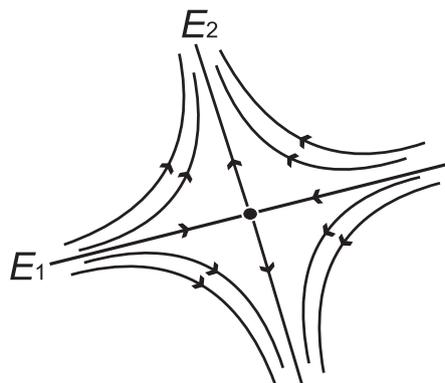


Figura 1.5: Caso a_3 : sela ($\lambda_2 > 0 > \lambda_1$).

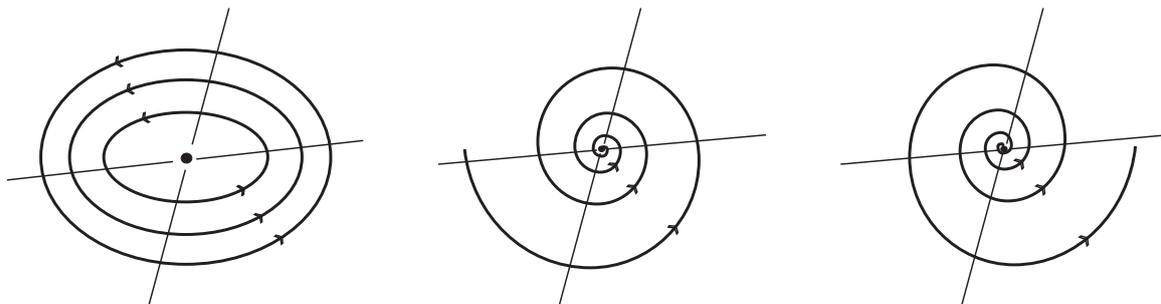


Figura 1.6: Caso b_1 : centro ($\alpha = 0$), caso b_2 : foco estável ($\alpha < 0$), caso b_3 : foco instável ($\alpha > 0$).

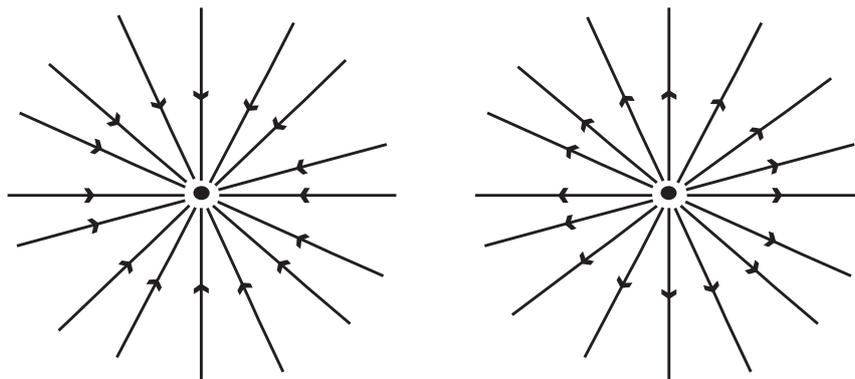


Figura 1.7: Caso c_1 : nó próprio atrator ($\lambda < 0$), caso c'_1 : nó próprio repulsor ($\lambda > 0$).

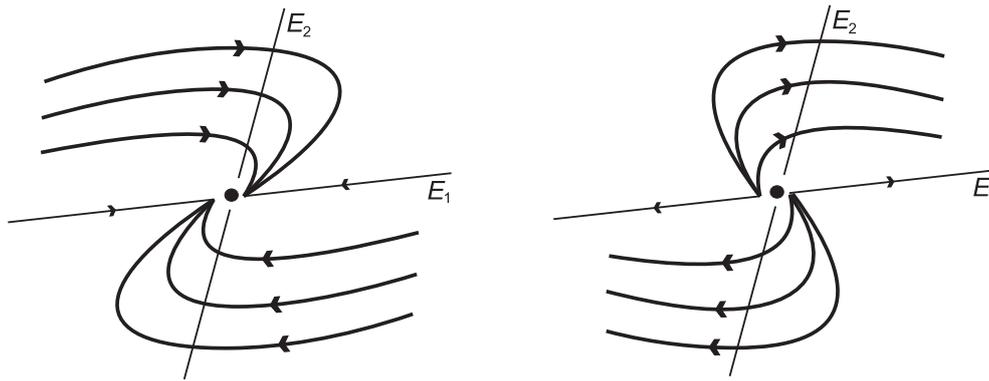


Figura 1.8: Caso c_2 : nó impróprio atrator ($\lambda < 0$), caso c'_2 : nó impróprio repulsor ($\lambda > 0$).

cientes da matriz A , são refletidas em pequenas perturbações nos autovalores. No caso do centro, isto é, quando os autovalores são imaginários puros, uma ligeira mudança nos coeficientes, faz com que os autovalores λ_1 e λ_2 tenham novos valores $\lambda'_1 = \alpha' + i\beta'$ e $\lambda'_2 = \alpha' - i\beta'$, onde α' é pequeno em valor absoluto e $\beta' \approx \beta$. Se $\alpha' \neq 0$, o que acontece quase sempre, então as trajetórias do sistema perturbado são espirais.

Se os autovalores λ_1 e λ_2 são iguais, a singularidade é um nó. Pequenas perturbações nos coeficientes, normalmente fazem com que as raízes iguais se separem. Se as raízes separadas são reais, então a singularidade do sistema perturbado permanece um nó, mas se as raízes separadas são complexas conjugadas, então a singularidade torna-se um ponto espiral. \square

O exemplo seguinte mostra um dos novos casos onde o homeomorfismo h mencionado anteriormente é global e explícito.

Exemplo 3. Seja $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $X(x, y) = (x, -y + x^3)$. O fluxo de X é dado por

$$\varphi(t, (a, b)) = \left(ae^t, \left(b - \frac{a^3}{4} \right) e^{-t} + \frac{a^3}{4} e^{3t} \right)$$

onde $t \in \mathbb{R}$ e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Considere a “sela” $Y(x, y) = (x, -y)$ e seja $\psi(t, p)$ o seu fluxo. Então $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $h(x, y) = (x, y + \frac{x^3}{4})$ satisfaz $h(\psi(t, p)) = \varphi(t, h(p))$. De fato, um cálculo simples

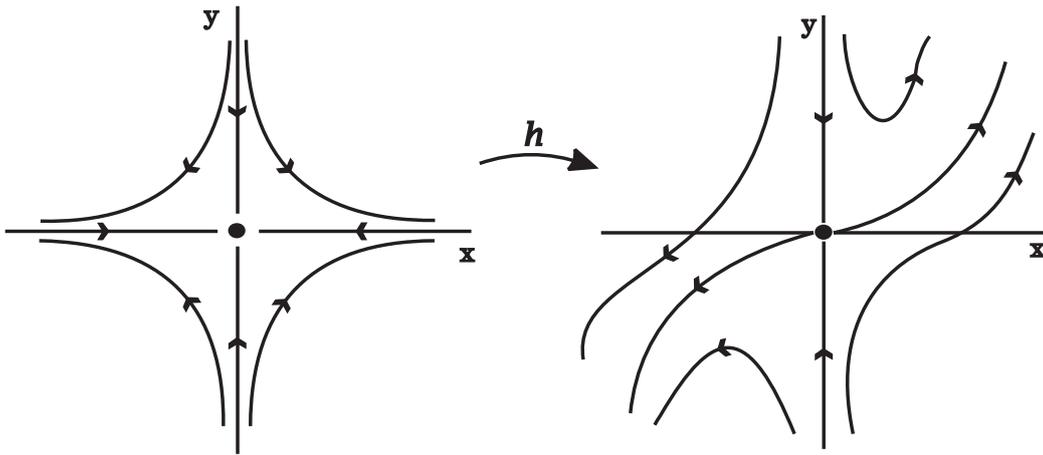


Figura 1.9: Retrato de fase de Y e de X do exemplo 3.

nos dá que o fluxo de Y é $\psi(t, (a, b)) = (ae^t, be^{-t})$. Assim, temos que

$$h(\psi(t, (a, b))) = h(ae^t, be^{-t}) = (ae^t, be^{-t} + \frac{a^3}{4}e^{3t}).$$

Por outro lado,

$$\varphi(t, h(a, b)) = \varphi(t, (a, b + \frac{a^3}{4})) = (ae^t, (b + \frac{a^3}{4} - \frac{a^3}{4})e^{-t} + \frac{a^3}{4}e^{3t}) = (ae^t, be^{-t} + \frac{a^3}{4}e^{3t}).$$

□

1.3 Equivalência e conjugação de campos vetoriais

Introduzimos a seguir várias noções de equivalência entre dois campos vetoriais, as quais permitem comparar seus retratos de fase.

Definição 1.3.1. *Sejam X_1 e X_2 campos vetoriais definidos nos abertos \mathcal{U}_1 e \mathcal{U}_2 do \mathbb{R}^n , respectivamente. Dizemos que X_1 é **topologicamente equivalente** (resp. C^r -**equivalente**) a X_2 se existe um homeomorfismo (resp. um difeomorfismo de classe C^r) $h : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_2$ que leva órbitas de X_1 em órbitas de X_2 preservando a orientação. Mais precisamente, se $p \in \mathcal{U}_1$ e $\mathcal{O}^1(p)$ é a órbita orientada de X_1 passando por p então $h(\mathcal{O}^1(p))$ é a órbita orientada $\mathcal{O}^2(h(p))$ de X_2 passando por $h(p)$.*

Observe que esta definição estabelece uma relação de equivalência entre campos definidos em abertos de \mathbb{R}^n , ou seja, é reflexiva, simétrica e transitiva. O homeomorfismo h chama-se **equivalência topológica** (resp. **diferenciável**) entre X_1 e X_2 .

Definição 1.3.2. *Sejam $\varphi_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\varphi_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ os fluxos gerados pelos campos $X_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $X_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, respectivamente. Dizemos que X_1 é **topologicamente conjugado** (resp. **C^r -conjugado**) a X_2 quando existe um homeomorfismo (resp. um difeomorfismo de classe C^r) $h : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_2$ tal que $h(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(t, h(x))$ para todo $(t, x) \in \Omega_1$.*

Neste caso, tem-se necessariamente $I_1(x) = I_2(h(x))$. O homeomorfismo h chama-se **conjugação topológica** (resp. **C^r -conjugação**) entre X_1 e X_2 .

A relação de conjugação também é uma relação de equivalência entre campos definidos em abertos de \mathbb{R}^n . É claro que toda conjugação é uma equivalência. Uma equivalência h entre X_1 e X_2 leva ponto singular em ponto singular e órbita periódica em órbita periódica. Se h for uma conjugação, o período das órbitas periódicas também é preservado.

Exemplo 4. A função $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $h(x, y) = (x, y + \frac{x^3}{4})$ é uma C^r -conjugação entre $X(x, y) = (x, -y)$ e $Y(x, y) = (x, -y + x^3)$. Com efeito, basta ver o exemplo 3 da seção anterior. \square

Exemplo 5. Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

matrizes de \mathbb{R}^2 com $a > 0$ e $b > 0$. Os sistemas $x' = Ax$ e $x' = Bx$ definem centros cujas órbitas periódicas tem período $\frac{2\pi}{a}$ e $\frac{2\pi}{b}$, respectivamente. Se $a \neq b$, estes sistemas não são conjugados, pois vimos que uma conjugação preserva o período das órbitas periódicas. Por outro lado, $h = Id : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma C^r -equivalência. \square

O lema seguinte fornece uma caracterização para a conjugação diferenciável. Utilizaremos tal lema na demonstração do Teorema do Fluxo Tubular a seguir.

Lema 1.3.3. *Sejam $X_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $X_2 : \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ campos de classe C^r nos abertos \mathcal{U}_1 e \mathcal{U}_2 de \mathbb{R}^n e $h : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_2$ um difeomorfismo de classe C^r . Então h é uma conjugação entre X_1 e X_2 se e somente se*

$$Dh(p)X_1(p) = X_2(h(p)), \quad \forall p \in \mathcal{U}_1. \quad (1.3)$$

Demonstração – Sejam $\varphi_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathcal{U}_1$ e $\varphi_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathcal{U}_2$ os fluxos de X_1 e X_2 , respectivamente. Suponhamos que h satisfaz (1.3). Dado $p \in \mathcal{U}_1$, seja $\psi(t) = h(\varphi_1(t, p))$, $t \in I_1(p)$. Então ψ é solução de $x' = X_2(x)$, $x(0) = h(p)$, pois

$$\psi'(t) = Dh(\varphi_1(t, p)) \cdot \frac{d}{dt} \varphi_1(t, p) = Dh(\varphi_1(t, p)) \cdot X_1(\varphi_1(t, p)) \stackrel{(1.3)}{=} X_2(h(\varphi_1(t, p))) = X_2(\psi(t)).$$

Portanto $h(\varphi_1(t, p)) = \varphi_2(t, h(p))$. Logo, h é uma conjugação entre X_1 e X_2 .

Reciprocamente, suponhamos que h seja uma conjugação. Então para $(t, p) \in \Omega_1$ tem-se que $h(\varphi_1(t, p)) = \varphi_2(t, h(p))$. Derivando esta relação com respeito a t em $t = 0$, obtém-se (1.3). ■

Definição 1.3.4. *Sejam $X : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^r , $r \geq 1$, no aberto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ e $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ um aberto. Uma aplicação diferenciável $f : A \rightarrow \mathcal{U}$ de classe C^r chama-se **seção transversal local** de X (de classe C^r) quando, para todo $a \in A$, $Df(a)(\mathbb{R}^{n-1})$ e $X(f(a))$ geram o espaço \mathbb{R}^n .*

Observação. Consideremos $\Sigma = f(A)$ munido da topologia induzida. Se $f : A \rightarrow \Sigma$ for um homeomorfismo, é usual dizermos que Σ é uma **seção transversal** de X .

Exemplo 6. Sejam $p \in \mathcal{U}$ um ponto regular e $\{v_1, \dots, v_{n-1}, X(p)\}$ uma base de \mathbb{R}^n . Consideremos $B(0, \delta)$ uma bola de \mathbb{R}^{n-1} com centro na origem e raio $\delta > 0$. Para δ suficientemente pequeno, $f : B(0, \delta) \rightarrow \mathcal{U}$ dada por $f(x_1, \dots, x_{n-1}) = p + \sum_{i=1}^{n-1} x_i v_i$ é uma seção transversal local de X em p . □

Teorema 1.3.5 (do fluxo tubular). *Sejam p um ponto regular de $X : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^r , $1 \leq r \leq \infty$ ou $r = \omega$, e $f : A \rightarrow \Sigma$ uma seção transversal local de X de classe C^r*

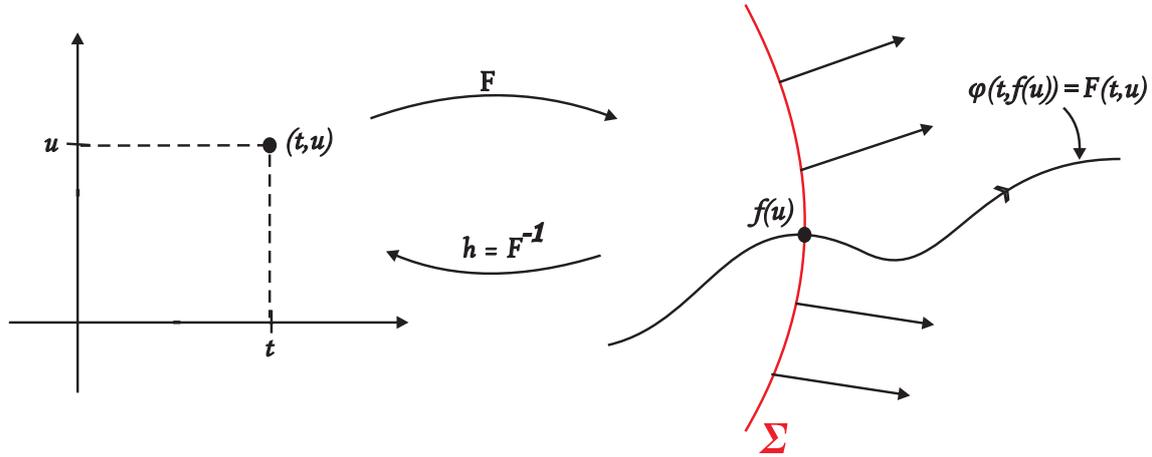


Figura 1.10: Fluxo tubular local na vizinhança de um ponto regular.

com $0 \in A$ e $f(0) = p$. Então existem uma vizinhança V de p em \mathcal{U} e um difeomorfismo $h : V \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$ de classe C^r , onde $\varepsilon > 0$ e B é uma bola aberta em \mathbb{R}^{n-1} de centro na origem $0 = f^{-1}(p)$ tais que:

1. $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$;
2. h é uma C^r -conjugação entre $X|_V$ e o campo constante $Y : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por $Y = (1, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração – Sejam $\varphi : \Omega \rightarrow \mathcal{U}$ o fluxo de X e $F : \Omega_A \rightarrow \mathcal{U}$, onde $\Omega_A = \{(t, u) : (t, f(u)) \in \Omega\}$, definida por $F(t, u) = \varphi(t, f(u))$. F aplica linhas paralelas em curvas integrais de X . Como $DF(0)$ é um isomorfismo temos, pelo Teorema da Função Inversa, que F é um difeomorfismo local em $0 = (0, \bar{0}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Assim, existem $\varepsilon > 0$ e uma bola B em \mathbb{R}^{n-1} com centro na origem 0 tais que $F|_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times B}$ é um difeomorfismo sobre o aberto $V = F((-\varepsilon, \varepsilon) \times B)$. Seja $h = (F|_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times B})^{-1}$. Então $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$, pois $F(0, u) = f(u) \in \Sigma$, para todo $u \in B$. Isto prova (1).

Por outro lado, h^{-1} conjugua Y e X , pois

$$\begin{aligned} Dh^{-1}(t, u) \cdot Y(t, u) &= DF(t, u) \cdot (1, 0, \dots, 0) = D_1F(t, u) = \\ &= X(\varphi(t, f(u))) = X(F(t, u)) = X(h^{-1}(t, u)) \end{aligned}$$

para todo $(t, u) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$. Logo pelo lema 1.3.3, h^{-1} é uma conjugação de Y e X , o que prova (2). ■

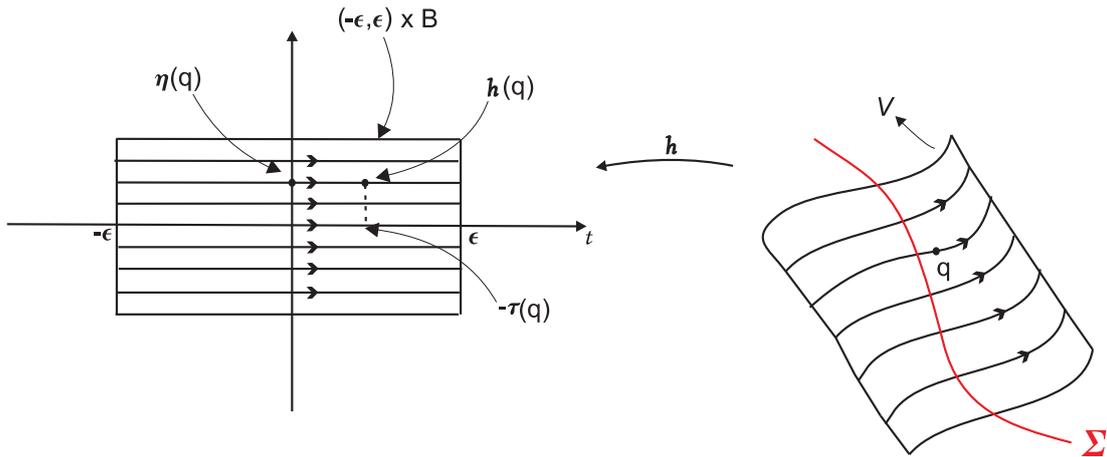


Figura 1.11: Figura relativa ao corolário 1.3.6

Corolário 1.3.6. *Sejam X um campo de classe C^r e Σ uma seção transversal de X , conforme teorema anterior. Para todo ponto $p \in \Sigma$ existem $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$, uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^n e uma função $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r , $1 \leq r \leq \infty$ ou $r = \omega$, tais que $\tau(V \cap \Sigma) = 0$ e*

1. *para todo $q \in V$, a curva integral $\varphi(t, q)$ de $X|_V$ é definida e biunívoca em $J_q = (-\varepsilon + \tau(q), \varepsilon + \tau(q))$;*
2. *$\xi(q) = \varphi(\tau(q), q) \in \Sigma$ é o único ponto onde $\varphi(\cdot, q)|_{J_q}$ intercepta Σ . Em particular, $q \in \Sigma \cap V$ se e somente se $\tau(q) = 0$.*

Demonstração – Sejam h, V e ε como no teorema do fluxo tubular. Ponhamos $h = (-\tau, \eta)$. O campo Y daquele teorema satisfaz a todas as afirmações acima. Como h é uma C^r -conjugação, conclui-se que X também satisfaz estas afirmações. ■

1.4 Estrutura local dos pontos singulares hiperbólicos

Seja p um ponto regular de um campo vetorial X , de classe C^r , $r \geq 1$. Pelo Teorema de Fluxo Tubular, sabemos que existe um difeomorfismo de classe C^r que conjuga X , em uma vizinhança de p com o campo constante $Y = (1, 0, 0, \dots, 0)$. Conseqüentemente, os dois campos X e Y são localmente C^r -conjugados em torno de pontos regulares. Por

causa desta observação podemos considerar satisfatório o conhecimento qualitativo local das órbitas de um campo vetorial em torno de pontos regulares, sendo que existe apenas uma classe de conjugação diferenciável local.

Se p é um ponto singular, a situação é bem mais complexa. Mesmo nos sistemas lineares já se apresentam várias classes diferentes de conjugação diferenciável. Em \mathbb{R}^2 temos a sela, o centro, o nó, etc.

Nesta seção estudaremos os pontos singulares hiperbólicos.

Definição 1.4.1. *Um ponto singular p de um campo vetorial $X : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^r , $r \geq 1$, chama-se **hiperbólico** se todos autovalores da matriz jacobiana de X em p , $DX(p)$, tem parte real diferente de zero.*

Prova-se que se X e Y são campos de classe C^1 localmente conjugados em vizinhanças dos pontos singulares p e q , respectivamente, então p é hiperbólico se e somente se q é hiperbólico.

O teorema seguinte nos garantirá que o comportamento numa vizinhança de um ponto singular hiperbólico é sempre modelado pelo comportamento da parte linear.

Teorema 1.4.2 (Grobman-Hartman). *Sejam $X : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1 no aberto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ e p um ponto singular hiperbólico. Então existem vizinhanças V de p em \mathcal{U} e W de 0 em \mathbb{R}^n tais que $X|_V$ é topologicamente conjugado a $DX(p)|_W$.*

A demonstração deste teorema é dada em [14], (capítulo IX, página 294). Na figura (1.12) temos representados os retratos de fase de um campo não linear numa vizinhança de um ponto singular hiperbólico e de seu linearizado.

1.5 Estabilidade local segundo Liapunov

No intuito de estudar o comportamento assintótico de uma órbita, é interessante usar o método das funções de Liapunov.

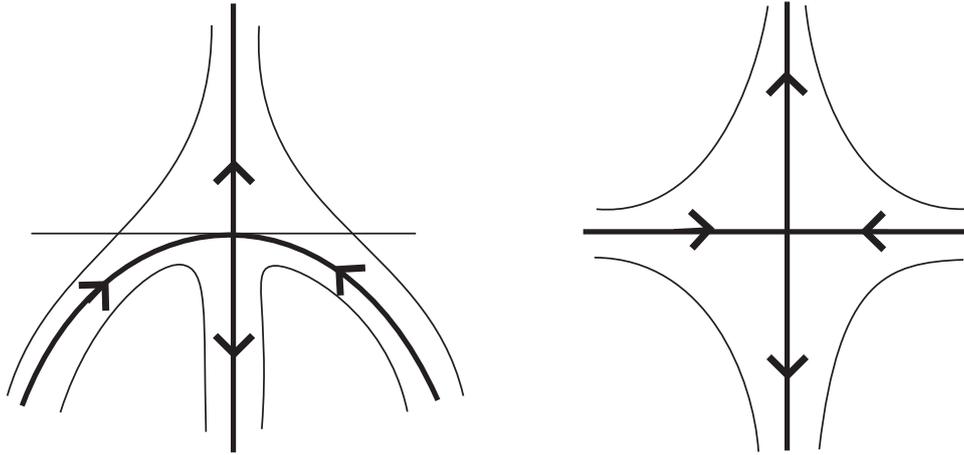


Figura 1.12: Campo não linear e seu linearizado.

Definição 1.5.1. Dados $X : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1 e $p \in \mathcal{U}$ uma singularidade de X , temos que

- p é **estável** se dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $\|x - p\| < \delta$ implica $\|\varphi(t, x) - p\| < \varepsilon$, para todo $t > 0$;
- p é **instável** se não for estável;
- p é **assintoticamente estável** se p é estável e, além disso, existe $\varepsilon > 0$, tal que $\|x - p\| < \varepsilon$ implica $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, x) = p$;
- p é **assintoticamente instável** se p é instável e, além disso, existe $\varepsilon > 0$, tal que $\|x - p\| < \varepsilon$ implica $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, x) = p$.

Sejam $X : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1 no aberto \mathcal{U} e $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função também de classe C^1 . Definimos a derivada de f na direção de X no ponto $p \in \mathcal{U}$ por

$$X \cdot f(p) = \nabla f(p) \cdot X(p).$$

Definição 1.5.2. Dados o campo X , a função f como acima e $p \in \mathcal{U}$ ponto singular de X , temos que

1. f é **função de Liapunov** para o campo X se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{U}$, $f(x) = 0$ se, e somente se, $x = p$ e $X \cdot f(x) \leq 0$, para todo $x \in \mathcal{U}$;
2. f é **função de Liapunov estrita** para o campo X se f é **função de Liapunov** e além disso $X \cdot f(x) = 0$ se, e somente se, $x = p$.

Observação. Note que a condição $X \cdot f(x) \leq 0$, para todo $x \in \mathcal{U}$ e $X \cdot f(x) = 0$ se, e somente se, $x = p$, significa que as trajetórias de X cruzam os níveis de f no sentido decrescente. De fato, se $\varphi(t, x)$ é a trajetória de X pelo ponto regular x numa vizinhança de p então $\varphi(t, x) \neq p$ e portanto

$$\frac{d}{dt}f(\varphi(t, x)) = \nabla f(\varphi(t, x)) \cdot \frac{d}{dt}\varphi(t, x) = \nabla f(\varphi(t, x)) \cdot X(\varphi(t, x)) < 0.$$

Teorema 1.5.3 (Critério de Liapunov). *Se p é uma singularidade isolada do campo $X : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e se existir uma função de Liapunov f definida em algum domínio $D \subseteq \mathbb{R}^n$ contendo p , então p é singularidade estável. Se f for função de Liapunov estrita, então p será singularidade assintoticamente estável.*

Demonstração – Podemos supor que $p = 0$. Tomemos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $B(0, \varepsilon)$ esteja contida nos domínios do campo X e da função f . Como a esfera de raio ε é um compacto do \mathbb{R}^n podemos tomar $\alpha > 0$ o mínimo de f nesta esfera, ou seja,

$$f(x) \geq \alpha, \text{ para todo } x, \text{ com } \|x\| = \varepsilon.$$

Como $f(x) = 0$ somente em $x = 0$, existe $0 < \delta < \varepsilon$ tal que $f(x) < \alpha$, para todo $x \in B(0, \delta)$ e tem-se que nenhuma solução começando em $B(0, \delta)$ pode encontrar a esfera $\|x\| = \varepsilon$ pois f não pode crescer ao longo de uma solução. Portanto, temos que 0 é estável.

Para provar a segunda parte usaremos aqui o conceito de ω -limite que foi introduzido na primeira seção deste capítulo. Tomemos $\varphi(t, x)$ uma trajetória começando em $x \in B(0, \delta) - \{0\}$. Como $\|\varphi(t, x)\| < \varepsilon$, para todo $t > 0$, segue que $\omega(x) \neq \emptyset$ (ver propriedades do ω -limite depois da sua definição). Afirmamos que $f|_{\omega(x)}$ é constante. De fato, se $q_1, q_2 \in \omega(x)$ então existem seqüências t_n, t'_n tais que

$$\varphi(t_n, x) \rightarrow q_1 \text{ e } \varphi(t'_n, x) \rightarrow q_2.$$

Considerando subsequências de t_n, t'_n, t_n tais que $t_{n_k}^1 < t_{n_k}^2 < t_{n_k}^3$ temos, uma vez que f decresce ao longo do fluxo,

$$f(\varphi(t_{n_k}^1, x)) > f(\varphi(t_{n_k}^2, x)) > f(\varphi(t_{n_k}^3, x))$$

e assim $f(q_1) \geq f(q_2) \geq f(q_1)$ e portanto $f(q_1) = f(q_2)$.

Suponhamos que exista $y \in \omega(x)$ tal que $y \neq 0$. Da invariância de $\omega(x)$ segue que $\mathcal{O}(y) \subset \omega(x)$. Segue então que $f|_{\mathcal{O}(y)}$ é constante. Logo, $(f \circ \varphi_y)'(t) = 0$, para todo $t \in I(y)$ e portanto $X \cdot f(\varphi_y(t)) = 0$, para todo $t \in I(y)$. Como f é estrita segue que $\varphi_y(t) = 0$, para todo $t \in I(y)$ e portanto $y = 0$. ■

Capítulo 2

Campos Planares

2.1 Órbitas periódicas e o critério de Bendixson

Dizemos que um campo de vetores definido no plano \mathbb{R}^2 , ou em um aberto do \mathbb{R}^2 , é um **campo planar**. Observamos que as equações diferenciais ordinárias de 2ª ordem clássicas

$$F(x, x', x'') = 0, x \in \mathbb{R}$$

quando expressas na forma de sistemas bidimensionais, via a mudança de variável $y = x'$, têm suas soluções sendo trajetórias de campos planares.

Existem vários resultados específicos de campos planares, e praticamente todos dependem essencialmente do famoso *Teorema da Curva de Jordan* e, por isso mesmo, não são válidos em \mathbb{R}^n , para $n \geq 3$.

Uma **curva fechada simples** é um conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ que é imagem homeomorfa do círculo unitário $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$. Uma **curva fechada simples planar**, ou então uma **Curva de Jordan** é uma curva fechada simples em \mathbb{R}^2 . O Teorema de Jordan afirma que se C é uma curva de Jordan então $\mathbb{R}^2 - C$ tem exatamente duas componentes conexas cujas fronteiras coincidem com C , uma limitada, denominada interior de C (*int* C), que é simplesmente conexa e outra ilimitada, denominada exterior de C (*ext* C). Assim

$$\partial(\text{int } C) = C = \partial(\text{ext } C).$$

Embora intuitivamente óbvio quando se trata de curvas simples, não é difícil de se convencer que a afirmação do Teorema não é exatamente elementar. Uma demonstração do

Teorema da Curva de Jordan, que não será dada aqui, pode ser encontrada, por exemplo, em [9], página 169.

Seja $X : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$. Se a órbita $\mathcal{O}(x)$ de X por $x \in \mathcal{U}$ é periódica então $\mathcal{O}(x)$ é uma curva de Jordan, e portanto o interior e o exterior de $\mathcal{O}(x)$ estão bem definidos pelo Teorema da Curva de Jordan. Pode acontecer, evidentemente, que $\text{int } \mathcal{O}(x) \not\subseteq \mathcal{U}$, mas quando $\text{int } \mathcal{O}(x) \subseteq \mathcal{U}$ temos o seguinte resultado clássico sobre a inexistência de órbitas periódicas, conhecido como critério de Bendixson. Antes disso porém, consideremos uma classe especial de campos que também não possuem órbitas periódicas.

Exemplo 1. Seja $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 no aberto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$. Dizemos que o campo de vetores $X = -\text{grad } f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é o **campo gradiente de potencial** f ; o sinal $-$ é tradicional.

Como sabemos do Cálculo a duas variáveis, em cada ponto $p \in \mathcal{U}$ o vetor gradiente de f em p é ortogonal a curva de nível $S = \{y \in \mathcal{U} : f(y) = f(p)\}$ de f por p ; assim, dado um vetor v tangente a S em $q \in S$, temos sempre $\langle v, \text{grad } f(q) \rangle = 0$ onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica o produto escalar de \mathbb{R}^2 . Se o gradiente for não nulo em p então, localmente, a curva de nível S é uma superfície unidimensional em \mathbb{R}^2 .

Note que os pontos singulares do campo gradiente X são os pontos críticos do potencial f . Por outro lado, se $\varphi(t)$ é uma solução de $x' = X(x)$ então

$$\begin{aligned} (f \circ \varphi)'(t) &= Df(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \langle \text{grad } f(\varphi(t)), X(\varphi(t)) \rangle \\ &= \langle -X(\varphi(t)), X(\varphi(t)) \rangle = -|X(\varphi(t))|^2 \leq 0 \end{aligned}$$

e portanto $(f \circ \varphi)(t)$ não é crescente ao longo das trajetórias de um campo gradiente. Mais do que isso, se $\varphi(0) = x_0$ é um ponto regular de X ($X(x_0) \neq 0$), então $X(\varphi(t)) \neq 0$ para cada t pela unicidade das soluções e portanto $f(\varphi(t))$ é estritamente decrescente.

Assim, nenhum campo gradiente possui trajetória periódica, pois caso contrário se $\varphi(t) = \varphi(t+T)$ acarretaria $f(\varphi(t+T)) < f(\varphi(t)) = f(\varphi(t+T))$, pois como $f(\varphi(t))$ é decrescente, temos $t < t+T$ implica $f(\varphi(t+T)) < f(\varphi(t))$, o que é uma impossibilidade. \square

Exemplo 2. *Campos lineares hiperbólicos* constituem outro caso em que não se tem soluções periódicas. Lembremos que um campo linear X é **hiperbólico** se todos os seus autovalores têm parte real diferente de zero. Para o caso $n = 2$, vimos pelo exemplo 2 da seção 1.2 do capítulo 1 que as fontes, os poços, os nós, as selas e os focos são hiperbólicos. Já o centro nos fornece um exemplo de um campo não hiperbólico. Portanto, neste caso, vemos que os campos lineares hiperbólicos não apresentam soluções periódicas. \square

Lembremos que o divergente do campo X , $\operatorname{div} X : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ é definido por

$$\operatorname{div} X(x, y) = \frac{\partial X_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial X_2}{\partial y}(x, y) = \operatorname{tr}(DX(x, y))$$

onde X_1 e X_2 são as funções componentes de $X = (X_1, X_2)$. Também lembramos que um aberto $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ é dito simplesmente conexo se $\operatorname{int} C \subseteq \mathcal{U}_0$ para cada curva de Jordan $C \subseteq \mathcal{U}_0$. Visualmente isto significa que \mathcal{U}_0 não possui buracos.

Proposição 2.1.1 (Bendixson, 1901). *Seja $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ um aberto simplesmente conexo tal que $\operatorname{div} X$ não é identicamente nulo e nem troca de sinal em \mathcal{U}_0 . Então X não possui órbita periódica inteiramente contida em \mathcal{U}_0 .*

Demonstração – Suponhamos que $\Gamma = \mathcal{O}(x)$ seja uma órbita periódica de X e denotemos $G = \operatorname{int} \Gamma$. Temos que Γ é parametrizada por uma solução (x_1, x_2) de $x' = X(x)$ de modo que $dx_1 = X_1 dt$ e $dx_2 = X_2 dt$. Se $G \subseteq \mathcal{U}_0$ então pelo Teorema de Green, temos

$$\iint_G \operatorname{div} X dA = \iint_G \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \frac{\partial X_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right) dA = \oint_{\Gamma} X_1 dx_2 - X_2 dx_1 = 0$$

pois

$$X_1 dx_2 - X_2 dx_1 = (-X_2, X_1) \cdot (dx_1, dx_2) = (-X_2, X_1)(X_1, X_2) dt = 0 dt = 0.$$

Como X é de classe C^1 em G , segue que o divergente de X é contínuo e portanto $\iint_G \operatorname{div} X = 0$ implica que ou $\operatorname{div} X \equiv 0$ em G ou então $\operatorname{div} X$ troca de sinal em G .

■

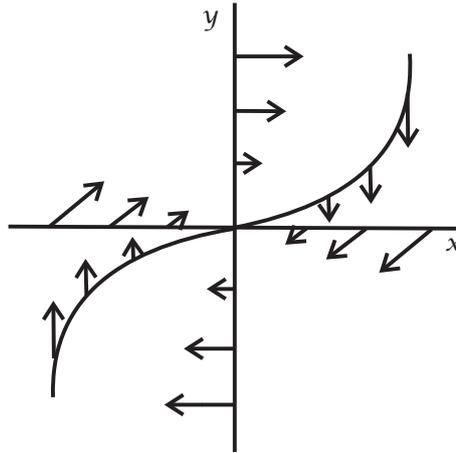


Figura 2.1: Campo de vetores do exemplo 3.

Exemplo 3. Seja $X(x, y) = (y - x^3, -x^3)$. Temos que $\operatorname{div} X(x, y) = -3x^2$, assim $\operatorname{div} X(x, y) \leq 0$ com $\operatorname{div} X(x, y) = 0$ se e somente se $x = 0$ e portanto $\operatorname{div} X$ não é identicamente nulo e nem troca de sinal em nenhum aberto de \mathbb{R}^2 . Logo, pelo Critério de Bendixson, X não possui órbita periódica. Observe, pela figura 2.1 que isto não é de todo óbvio, pois o campo X tem jeito de centro não linear. Observe também que o campo X não é gradiente, e nem é um campo linear hiperbólico. Assim, a proposição anterior não é um caso particular do exemplo 1, nem do exemplo 2. Pelo exemplo a seguir concluímos também que tampouco esses dois exemplos são casos particulares da proposição. De modo que agora temos três critérios distintos que garantem a inexistência de órbitas periódicas para um campo vetorial planar. \square

Exemplo 4. Considere as funções $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x, y) = x^2 - y^2$ e $g(x, y) = x^3$. Note que os campos gradiente $X(x, y) = -\operatorname{grad} f(x, y) = (-2x, 2y)$ e $Y(x, y) = -\operatorname{grad} g(x, y) = (-3x^2, 0)$ são tais que $\operatorname{div} X(x, y) = -2 + 2 = 0$ e $\operatorname{div} Y(x, y) = -6x$. Logo $\operatorname{div} X$ é identicamente nulo e $\operatorname{div} Y$ muda de sinal em \mathbb{R}^2 . Pelo exemplo 1, os campos X e Y não possuem soluções periódicas já que são campos gradientes. \square

Exemplo 5. O campo $B(x, y) = (x, -y)$ é linear hiperbólico, pois tem como autovalores ± 1 , de modo que o campo B é uma sela e é tal que $\operatorname{div} B(x, y) = 1 - 1 = 0$. Pelo exemplo 2, o campo B não possui soluções periódicas. \square

2.2 O teorema de Poincaré–Bendixson

Passamos agora ao teorema de Poincaré–Bendixson, que é um dos poucos resultados gerais sobre existência de órbitas periódicas de campos não lineares, classificando os possíveis conjuntos ω -limite de uma trajetória limitada de um campo planar com um número finito de singularidades no fecho.

Lembramos aqui que dado $X : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de classe C^1 no aberto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ com $\omega_+(p) = +\infty$, o conjunto ω -limite do ponto $p \in \mathcal{U}$ (denotado por $\omega(p)$) é o conjunto dos pontos $q \in \mathcal{U}$ para os quais existe uma seqüência $t_n \rightarrow +\infty$ tal que

$$\varphi(t_n, p) \rightarrow q.$$

Analogamente, se $\omega_-(p) = -\infty$, o conjunto α -limite do ponto $p \in \mathcal{U}$ é o conjunto $\alpha(p)$ dos pontos $q \in \mathcal{U}$ para os quais existe uma seqüência $t_n \rightarrow -\infty$ tal que

$$\varphi(t_n, p) \rightarrow q.$$

Para simplificar a demonstração do teorema de Poincaré–Bendixson vamos dividi-la em quatro lemas. Em todos usamos a seguinte notação: dado $p \in \mathcal{U}$, sempre que usarmos $\omega(p)$ supomos implicitamente que $[0, +\infty) \subseteq I(p)$. Também denotamos por $\mathcal{O}^+(p)$ a semi-órbita positiva de X por p , $\{\varphi_p(t) : 0 \leq t \leq \omega_+(p)\}$; $\varphi_p : I(p) \rightarrow \mathcal{U}$ denotará como sempre a trajetória maximal de X por p , com $I(p) = (\omega_-(p), \omega_+(p))$. Também precisamos de seções transversais. Como $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, uma seção transversal a X é uma aplicação $\xi : I \rightarrow \mathcal{U}$ diferenciável no intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ tal que $0 \in I$ e $\{X(\xi(s)), \xi'(s)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ é linearmente independente, para todo $s \in I$. Dados $x, y \in \xi(I)$, $[x, y]$ denotará o segmento não orientado contido em $\xi(I)$ de extremos x e y . No que segue, denotaremos por $\Sigma = \xi(I)$ uma seção transversal a X .

Lema 2.2.1. *Sejam Σ uma seção transversal a X e $x \in \mathcal{U}$ um ponto regular de X . Suponhamos que $t_1 < t_2 \in I(x)$ são tais que $\varphi_x(t_i) = x_i \in \Sigma$, $i = 1, 2$ e que $\varphi_x(t) \notin \Sigma$ para todo $t_1 < t < t_2$. Então temos*

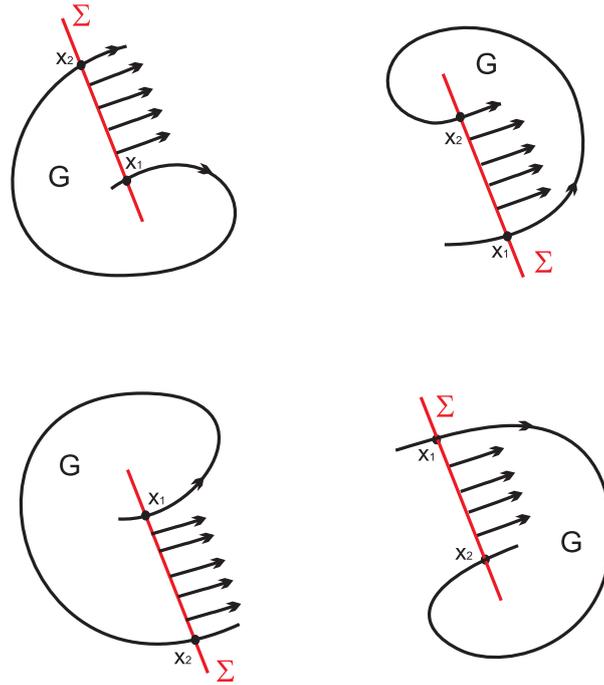


Figura 2.2: Referente ao lema 2.2.1.

1. $x_1 = x_2$ se, e somente se, $\mathcal{O}(x)$ é periódica;
2. Se $x_1 \neq x_2$ então $\mathcal{O}(x) \cap [x_1, x_2] = \{x_1, x_2\}$.

Demonstração – Se $\varphi_x(t_1) = x_1 = x_2 = \varphi_x(t_2)$ então é claro que $\mathcal{O}(x)$ é periódica, pois $t_1 < t_2$. Suponhamos que $x_1 \neq x_2$ e denotemos por $C = [x_1, x_2] \cup \{\varphi_x(t) : t_1 \leq t \leq t_2\}$. Como $\varphi_x(t_1) = x_1$ e $\varphi_x(t_2) = x_2$ temos que C é uma curva de Jordan. Chamemos de $G = \text{int } C$ e $H = \text{ext } C$. Temos quatro casos a considerar como ilustrados na figura 2.2. O primeiro com $\varphi_x(t) \in G$ para $t < t_1$ e $\varphi_x(t) \in H$ para $t > t_2$. O segundo com $\varphi_x(t) \in H$ para $t < t_1$ e $\varphi_x(t) \in G$ para $t > t_2$. O terceiro com $\varphi_x(t) \in G$ para $t < t_1$ e $\varphi_x(t) \in H$ para $t > t_2$ e por fim o quarto caso com $\varphi_x(t) \in H$ para $t < t_1$ e $\varphi_x(t) \in G$ para $t > t_2$. Em todos os casos, $\varphi_x(t) \notin C$ para $t \in I(x) - [t_1, t_2]$ e portanto $\mathcal{O}(x)$ não é periódica e $\mathcal{O}(x) \cap [x_1, x_2] = \{x_1, x_2\}$. ■

Corolário 2.2.2. *Sejam Σ uma seção transversal a X e $x \in \mathcal{U}$ um ponto regular de X tal que $\mathcal{O}^+(x) \cap \Sigma \neq \emptyset$. Se $\mathcal{O}(x)$ é periódica então $\sharp(\mathcal{O}(x) \cap \Sigma) = 1$. Se $\mathcal{O}(x)$ não é periódica então $\mathcal{O}^+(x) \cap \Sigma = \{x_n : n \in P\}$, onde $\emptyset \neq P \subseteq \mathbb{N}$, $x_n = \varphi_x(t_n)$, (t_n) é monótona em \mathbb{R}*

e (x_n) é monótona em Σ , no seguinte sentido: na seção Σ , x_n sempre está entre x_{n-1} e x_{n+1} .

Demonstração – Em primeiro lugar, $\sharp(\mathcal{O}^+(x) \cap \Sigma) \leq \sharp N$, isto é, $\mathcal{O}^+(x) \cap \Sigma$ é no máximo enumerável. De fato, tomando uma caixa de fluxo para Σ obtemos $\delta > 0$ tal que se $\varphi_x(t) \in \Sigma$ então $\varphi_x(s) \notin \Sigma$, para todo s tal que $0 < |s - t| < \delta$. Segue então que o conjunto dos tempos t tais que $\varphi_x(t) \in \Sigma$ é discreto, logo enumerável. Pela parte 1 do Lema 2.2.1, $\mathcal{O}(x)$ é periódica se, e somente se, $\sharp(\mathcal{O}^+(x) \cap \Sigma) = 1$. Suponhamos que $\mathcal{O}(x)$ não é periódica. Se $\sharp(\mathcal{O}^+(x) \cap \Sigma) = 2$, a afirmação do Corolário é óbvia. Consideremos o caso em que $\sharp(\mathcal{O}^+(x) \cap \Sigma) = 3$. Sejam então $x_{n_i} = \varphi_x(t_{n_i})$, $i = 1, 2, 3$ tais que $t_{n_1} < t_{n_2} < t_{n_3}$. Se $x_{n_1} < x_{n_2}$ temos $x_{n_2} < x_{n_3}$ pois caso contrário temos $x_{n_1} < x_{n_3} < x_{n_2}$ e então $x_{n_3} \in [x_{n_1}, x_{n_2}]$ ou então temos $x_{n_3} < x_{n_1} < x_{n_2}$ e então $x_{n_1} \in [x_{n_3}, x_{n_2}]$, ambos impossíveis pela parte 2 do Lema 2.2.1. Logo $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3}$. De modo análogo, se $x_{n_1} > x_{n_2}$ então $x_{n_1} > x_{n_2} > x_{n_3}$. Para $\sharp(\mathcal{O}^+(x) \cap \Sigma) > 3$, basta prosseguir o mesmo raciocínio acima, e chegamos que a seqüência $(x_n) = (\varphi_x(t_n))$ é monótona. ■

Lema 2.2.3. *Sejam Σ uma seção transversal a X e $x \in \mathcal{U}$ um ponto regular de X . Se $y \in \omega(x) \cap \Sigma$ então $\mathcal{O}^+(x) \cap \Sigma = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ onde (x_n) é uma seqüência monótona em Σ . Mais do que isso, (x_n) é constante se, e somente se, $\mathcal{O}(x)$ é periódica e (x_n) é estritamente monótona se, e somente se, $\mathcal{O}(x)$ não é periódica.*

Demonstração – Tomemos uma caixa de fluxo $h : (-\delta, \delta) \times I \rightarrow \mathcal{U}$ para Σ . Se $y \in \omega(x) \cap \Sigma$, existe uma seqüência (t_n^*) , com $t_n^* \rightarrow +\infty$ tal que $\varphi(t_n^*, x) \rightarrow y$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\varphi(t_n^*, x) \in h((-\delta, \delta) \times I)$, e portanto, projetando pelo fluxo obtemos seqüência (t_n) tal que $\varphi(t_n, x) \in \Sigma$ e $|t_n - t_n^*| \rightarrow 0$ de modo que $t_n \rightarrow +\infty$ e $\varphi(t_n, x) \rightarrow y$. Assim $\{\varphi(t_n, x) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{O}^+(x) \cap \Sigma$. Se $\mathcal{O}(x)$ é periódica o Lema é óbvio. Caso contrário, obtemos $\varphi(t_n, x) \neq \varphi(t_m, x)$ para todo $n \neq m$ e portanto $\sharp(\mathcal{O}^+(x) \cap \Sigma) \geq \sharp N$, e pelo Corolário 2.2.2 resulta que $\sharp(\mathcal{O}^+(x) \cap \Sigma) = \sharp N$ e que $(x_n) = (\varphi_x(t_n))$ é uma seqüência estritamente monótona. ■

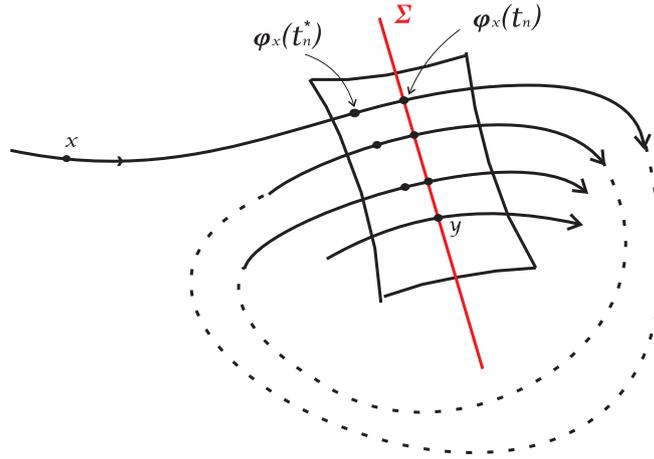


Figura 2.3: Referente ao lema 2.2.3.

Corolário 2.2.4. *Sejam Σ uma seção transversal a X e $x \in \mathcal{U}$ um ponto regular de X . Se $\omega(x) \cap \Sigma \neq \emptyset$ então $\sharp(\omega(x) \cap \Sigma) = 1$.*

Demonstração – Se $\mathcal{O}(x)$ é periódica aplicamos o Corolário 2.2.2 (de fato se $\mathcal{O}(x)$ é periódica então $\mathcal{O}(x) = \omega(x)$). Se $\mathcal{O}(x)$ não é periódica então pelo Lema 2.2.3 $\mathcal{O}^+(x) \cap \Sigma = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma seqüência estritamente monótona em Σ . Usando a mesma construção do Lema 2.2.3, é fácil ver que cada $y \in \omega(x) \cap \Sigma$ é limite de uma subseqüência de (x_n) . Como (x_n) é monótona, duas subseqüências tem o mesmo e único limite, de modo que $\sharp(\omega(x) \cap \Sigma) = 1$. ■

Lema 2.2.5. *Seja $x \in \mathcal{U}$ um ponto regular de X tal que $\omega(x)$ é compacto e conexo. Se existe $y \in \omega(x)$ tal que $\mathcal{O}(y)$ é periódica então $\omega(x) = \mathcal{O}(y)$ é uma órbita periódica.*

Demonstração – Seja $y \in \omega(x)$ tal que $\mathcal{O}(y)$ é periódica. Então $\mathcal{O}(y) \subseteq \omega(x)$ já que o ω -limite é invariante pelo fluxo. Suponhamos que $\omega(x) - \mathcal{O}(y) \neq \emptyset$. Como $\omega(x)$ é conexo e $\mathcal{O}(y)$ é fechado ($\simeq S^1$) temos que $\omega(x) - \mathcal{O}(y)$ não é fechado em $\omega(x)$, de modo que existe uma seqüência $y_n^* \rightarrow y_0$, e, pela compacidade de $\omega(x)$, $y_0 \in \omega(x) - (\omega(x) - \mathcal{O}(y)) = \mathcal{O}(y)$ e $y_n^* \in \omega(x) - \mathcal{O}(y)$. Seja Σ uma seção transversal de X em y_0 . Projetando pelo fluxo obtemos a partir da seqüência (y_n^*) uma seqüência (\bar{y}_n) , com $\bar{y}_n = \varphi(s_n, y_n^*)$, $|s_n| \rightarrow 0$, tal que $\bar{y}_n \in \Sigma$ e $\bar{y}_n \rightarrow y_0$. Mas $y_n^* \in \omega(x) - \mathcal{O}(y)$ de modo que $\bar{y}_n \in \omega(x) - \mathcal{O}(y)$. Também temos que $\{\bar{y}_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \omega(x) \cap \Sigma$. Pelo Corolário 2.2.4, $\sharp(\omega(x) \cap \Sigma) = 1$ de modo

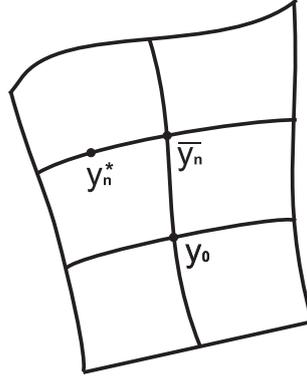


Figura 2.4: Figura referente ao lema 2.2.5.

que forçadamente $\omega(x) \cap \Sigma = \{y_0\}$ e portanto, $\bar{y}_n = y_0 \in \mathcal{O}(y)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o que é impossível pois $\bar{y}_n \notin \mathcal{O}(y)$. Isto mostra que $\omega(x) - \mathcal{O}(y) = \emptyset$ e portanto $\omega(x) = \mathcal{O}(y)$. ■

Lema 2.2.6. *Seja $x \in \mathcal{U}$ um ponto regular de X tal que $\omega(x)$ é compacto e conexo. Se existem $y \in \omega(x)$ e $z \in \omega(y)$ tais que $X(z) \neq 0$ então $\mathcal{O}(y)$ é periódica e $\omega(x) = \mathcal{O}(y)$.*

Demonstração – Suponha que $y \in \omega(x)$. É claro que $\mathcal{O}^+(y) \subseteq \omega(x)$ e que $\omega(y) \subseteq \overline{\mathcal{O}^+(y)} \subseteq \omega(x)$. Suponhamos que existe $z \in \omega(y)$ tal que $X(z) \neq 0$. Tomando Σ uma seção transversal a X em z obtemos, pelo Lema 2.2.3, que $\mathcal{O}^+(y) \cap \Sigma = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, com (y_n) monótona, mas $\mathcal{O}^+(y) \subseteq \omega(x)$, de modo que $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathcal{O}^+(y) \cap \Sigma \subseteq \omega(x) \cap \Sigma$ e portanto pelo Corolário 2.2.4, (y_n) não pode ser estritamente monótona mas é constante, de modo que $\mathcal{O}(y)$ é periódica. Pelo Lema 2.2.5, $\omega(x) = \mathcal{O}(y)$ é uma órbita periódica. ■

Teorema 2.2.7 (Poincaré-Bendixson, ± 1900). *Seja $x \in \mathcal{U}$ dado e suponhamos que existe um compacto $K \subseteq \mathcal{U}$ tal que $\mathcal{O}^+(x) \subseteq K$ e $\sharp(K \cap \text{Sing}(X)) < +\infty$. Então, vale que:*

1. $\omega(x)$ contém somente pontos regulares de X se, e somente se, $\omega(x)$ é uma órbita periódica.
2. $\omega(x)$ contém somente pontos singulares de X se, e somente se, $\omega(x)$ é um ponto singular.

3. $\omega(x)$ contém pontos singulares e regulares de X se, e somente se, existem $x_1, \dots, x_k \in \text{Sing}(X)$ tais que $\omega(x) = \{x_1, \dots, x_k\} \cup \{\mathcal{O}(y_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$, onde $\Lambda \neq \emptyset$ e cada $\mathcal{O}(y_\lambda)$ é uma órbita regular tal que $\alpha(y_\lambda) = \{x_{i_\lambda}\}$ e $\omega(y_\lambda) = \{x_{j_\lambda}\}$ com $i_\lambda, j_\lambda \in \{1, \dots, k\}$.

Demonstração – As três recíprocas são óbvias e como por hipótese $\mathcal{O}^+(x)$ é limitada decorre que $\omega(x)$ é compacto, conexo e não vazio. Se $\omega(x)$ não contém pontos singulares então tomando $y \in \omega(x)$ temos $\emptyset \neq \omega(y) \subseteq \omega(x)$ e portanto existe $z \in \omega(y)$ tal que $X(z) \neq 0$. Pelo Lema 2.2.6, $\omega(x) = \mathcal{O}(y)$ é uma órbita periódica, o que prova a parte 1. Se $\omega(x) \subseteq \text{Sing}(X)$ então $\omega(x) = \{x_0\}$ é uma órbita singular, já que $\omega(x) \subseteq K \cap \text{Sing}(X)$ é um subconjunto conexo de um conjunto finito, o que prova a parte 2. Suponhamos que $\omega(x)$ contém pontos singulares e regulares de X . Então existem $x_1, \dots, x_k \in K$ tais que $\omega(x) \cap \text{Sing}(X) = \{x_1, \dots, x_k\}$. Seja $y \in \omega(x) - \text{Sing}(X)$. Mostremos que $\alpha(y)$ e $\omega(y)$ são exatamente uma destas singularidades. Como $y \in \omega(x)$ temos $\emptyset \neq \omega(y) \subseteq \omega(x)$ e caso $\omega(y) \cap \{x_1, \dots, x_k\} = \emptyset$ teríamos $z \in \omega(y)$ tal que $X(z) \neq 0$ e portanto, pelo Lema 2.2.6, $\mathcal{O}(y) = \omega(x)$ é uma órbita periódica, acarretando $\omega(x) \cap \text{Sing}(X) = \emptyset$, contrário ao suposto. Assim, $\omega(y) \subseteq \text{Sing}(X) \cap K$ e portanto existe $x_{j_\lambda} \in \{x_1, \dots, x_k\}$ tal que $\omega(y) = \{x_{j_\lambda}\}$. Analogamente, com a versão de α -limite do Lema 2.2.6 obtemos $\alpha(y) \subseteq \text{Sing}(X)$. ■

Corolário 2.2.8. *Os únicos conjuntos ω -limite compactos, não-vazios e sem singularidades de um campo planar são as órbitas periódicas do campo.* ■

Observação 1. Um conjunto ω -limite como o do caso 3 do teorema anterior é denominado de **grafo**. Alguns exemplos são dados na figura 2.5.

Observação 2. Tudo que foi feito até aqui para conjuntos ω -limite vale também para conjuntos α -limite, de maneira óbvia: basta lembrar que $\omega^{-X}(x) = \alpha^X(x)$. Assim também temos um Teorema de Poincaré-Bendixson que classifica os conjuntos α -limite.

Proposição 2.2.9. *Seja γ uma órbita periódica de X tal que $\text{int } \gamma \subseteq \mathcal{U}$. Então existe*

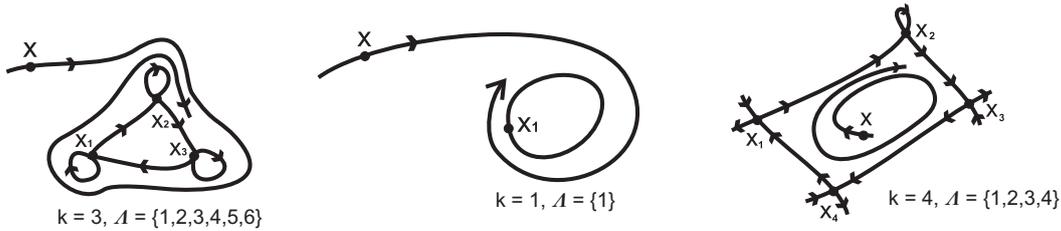


Figura 2.5: Exemplos de grafos.

peelo menos uma singularidade de X em $\text{int } \gamma$.

Demonstração – Seja γ_0 uma órbita periódica de X tal que $G = \text{int } \gamma_0 \subseteq \mathcal{U}$. Então \overline{G} é um compacto invariante por X e, como duas órbitas distintas não se cruzam, dado $x \in G$ temos $\mathcal{O}(x) \subseteq G$. Assim para $x \in G$ temos $\emptyset \neq \omega(x) \subseteq \overline{G}$. Se supormos que $\text{Sing}(X) \cap G = \emptyset$ então pelo Teorema de Poincaré-Bendixson necessariamente $\omega(x)$ é uma órbita periódica. Se $\omega(x) = \gamma_0$ então pela observação 3 do Teorema de Poincaré-Bendixson pelo mesmo motivo $\alpha(x)$ é uma órbita periódica de X e assim $\alpha(x) = \gamma_1 \neq \gamma_0$. De fato, se $\gamma_1 = \gamma_0$ então $x \in \gamma_0$ e isso contradiz o fato de termos escolhido $x \in G$. Assim, pela hipótese $\text{Sing}(X) \cap G = \emptyset$, obtemos outra órbita periódica em $G = \text{int } \gamma_0$. Retomando o processo com γ_1 e $G_1 = \text{int } \gamma_1$, novamente $\text{Sing}(X) \cap G = \emptyset$ produz outra órbita periódica γ_2 tal que $\gamma_2 \subseteq G_1$. Intuitivamente no limite obteremos uma singularidade, isto é, uma “órbita periódica” de período nulo. Para formalizar isto, usamos o Lema de Zorn: se todo subconjunto totalmente ordenado tem cota superior então o conjunto possui elemento maximal. No nosso caso, definimos $\Gamma = \{\gamma : \gamma \text{ é órbita periódica de } X \text{ e } \text{int } \gamma \subseteq \overline{G}\}$. Como $\gamma_0 \in \Gamma$, $\Gamma \neq \emptyset$. A ordem em Γ é (a inversa da dada) por inclusão: $\gamma_1 \leq \gamma_2$ se, e somente se, $\overline{\text{int } \gamma_2} \subseteq \overline{\text{int } \gamma_1}$. Seja $\Phi \subseteq \Gamma$ um conjunto totalmente ordenado e tomemos $K = \bigcap \{\overline{\text{int } \gamma} : \gamma \in \Phi\}$. Pela Propriedade da Interseção Finita K é compacto e $K \neq \emptyset$. É fácil ver que K é invariante por X . Tomando $x \in K$ temos então que $\mathcal{O}(x) \subseteq K$ e portanto $\omega(x) \subseteq K$, $\alpha(x) \subseteq K$. Se $\text{Sing}(X) \cap G = \emptyset$ então $\omega(x)$ ou $\alpha(x)$ é uma órbita periódica γ_k tal que $\overline{\text{int } \gamma_k} \subseteq K$ e portanto $\gamma_k \geq \gamma$, para todo $\gamma \in \Phi$. Assim Φ possui cota superior. Pelo Lema de Zorn, existe $\gamma_* \in \Gamma$ tal que $\gamma_* \geq \gamma$, para todo $\gamma \in \Gamma$. Mas se $\text{Sing}(X) \cap G = \emptyset$ então tomando $x \in \text{int } \gamma_*$ novamente obtemos uma órbita periódica γ' ($= \omega(x)$ ou $= \alpha(x)$) tal que $\overline{\text{int } \gamma'} \subseteq \text{int } \gamma_*$, ou seja, $\gamma' > \gamma_*$. Como $\gamma' \in \Gamma$, isso é

impossível e prova a proposição. ■

Exemplo 6. O campo $X(x, y) = (y, -x^4 - 1)$ não possui órbita periódica, pois não se anula em ponto algum de \mathbb{R}^2 . Note que $\operatorname{div} X \equiv 0$ em \mathbb{R}^2 , X não é campo gradiente e nem é um campo linear hiperbólico. □

2.3 Fluxos e conjuntos limites em superfícies

Como na esfera S^2 ainda vale o Teorema da Curva de Jordan, também o Teorema de Poincaré-Bendixson vale para campos definidos em S^2 . Mas já no toro bidimensional T^2 não vale nenhum destes dois teoremas, pois podemos obter campos X em T^2 tais que $\omega(x) = T^2$ para certos $x \in T^2$, ou seja, $\omega(x)$ é compacto, conexo e não contém singularidades nem é órbita periódica. O exemplo 7 abaixo mostra este caso. Tampouco em \mathbb{R}^3 vale o Teorema de Poincaré-Bendixson.

Para utilizarmos no exemplo 7, provaremos agora dois lemas sobre algumas propriedades do conjunto dos números reais.

Lema 2.3.1. *Seja $G \subseteq \mathbb{R}$, $G \neq \{0\}$ um subgrupo aditivo e G^+ o conjunto dos reais positivos pertencentes a G . Temos*

- (a) G^+ é não vazio;
- (b) Se $\inf G^+ = 0$ então G é denso em \mathbb{R} ;
- (c) Se $\inf G^+ = a > 0$ então $a \in G^+$ e $G = \{0, \pm a, \pm 2a, \dots\}$.

Demonstração – Com efeito, provaremos que dado $r \in \mathbb{R}$ tem-se que para todo $\varepsilon > 0$, $(r - \varepsilon, r + \varepsilon) \cap G \neq \emptyset$. Consideremos primeiro o caso em que $r > 0$. A propriedade Arquimediana dos números reais garante que existe um número racional da forma $\frac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{n} < r$ e $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Temos que $0 < \frac{1}{n}$ e como 0 é o ínfimo de G^+ , então existe $t \in G^+$ tal que $0 < t < \frac{1}{n}$. Considere a seqüência $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (it)_{i \in \mathbb{N}}$ e seja j o maior natural tal que $jt < r$. Assim

$$r - \varepsilon < r < (j + 1)t = jt + t < r + \frac{1}{n} < r + \varepsilon.$$

Como $(j+1)t \in G$ temos que $(r - \varepsilon, r + \varepsilon) \cap G \neq \emptyset$.

Suponhamos agora que $r = 0$. Pela definição de ínfimo, para todo $\varepsilon > 0$, existe $t \in G^+ \subset G$ tal que $0 < t < \varepsilon$ e assim segue o resultado.

Agora se $r < 0$ então $-r > 0$ e assim pelo primeiro caso garantimos a existência de um elemento $t \in G$ tal que $t \in (-r - \varepsilon, -r + \varepsilon)$ e portanto $-t \in (r - \varepsilon, r + \varepsilon)$, o que termina a prova de que G é denso em \mathbb{R} .

Provamos agora o item (c). Se tivéssemos que $a \notin G^+$, pela definição de ínfimo existiriam $g, h \in G^+$ tais que $a < h < g < a + \frac{a}{2}$. Logo, $0 < g - h < (a + \frac{a}{2}) - a = \frac{a}{2} < a$. Mas como $g, h \in G^+$ então $g - h \in G^+$, o que é absurdo pois $g - h < a = \inf G^+$. Portanto, $a \in G^+ \subset G$. Como G é um grupo, segue que vale a inclusão $\{0, \pm a, \pm 2a, \dots\} \subseteq G$.

Mostremos agora a inclusão contrária. Seja $g \in G$. Pela algoritmo da divisão, podemos escrever $g = aq + r$, com $0 \leq r < a$. Isto nos dá que $r = g - aq$ e daí concluímos que $r \in G$. Mostremos que $r = 0$. De fato, se $r \neq 0$ teríamos $0 < r < a$ e $r \in G^+$, o que é absurdo pois $a = \inf G^+$. Logo $r = 0$ e portanto $g = aq \in \{0, \pm a, \pm 2a, \dots\}$. Assim $G \subseteq \{0, \pm a, \pm 2a, \dots\}$ e logo vale a igualdade. ■

Lema 2.3.2. *Dado $d \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ o conjunto $T = \{nd + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$ é denso em \mathbb{R} .*

Demonstração – Afirmamos que T é um subgrupo do grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$. De fato:

- tomando $m = n = 0$ segue que $0 \in T$;
- seja $x \in T$. Logo, $x = m + nd$, com $m, n \in \mathbb{Z}$ e, dessa maneira, $-x = -m - nd$, com $-m, -n \in \mathbb{Z}$ e então $-x \in T$;
- por fim, se $x, y \in T$ então $x = m + nd$, com $m, n \in \mathbb{Z}$ e $y = m_1 + n_1d$, com $n_1, m_1 \in \mathbb{Z}$. Assim $x + y = (m + m_1) + (n + n_1)d$, com $(m + m_1), (n + n_1) \in \mathbb{Z}$. Portanto $x + y \in T$.

Mostremos agora que $0 = \inf T^+$, onde T^+ denota o conjunto dos números positivos pertencentes a T . A partir daí, poderemos concluir que T é denso em \mathbb{R} , aplicando o lema 2.3.1.

Para provar que $0 = \inf T^+$ supomos que $\inf T^+ = a > 0$. Assim pela parte (c) do lema 2.3.1, temos que $a = m + nd$ para algum $m, n \in \mathbb{Z}$, e $T = \{0, \pm a, \pm 2a, \dots\}$. Fazendo $n = 0$ observamos que $\mathbb{Z} \subseteq T$, e fazendo $m = 0$ temos que todos os múltiplos de d , $\{d, 2d, \dots, nd, \dots\}$, pertencem a T .

Distinguimos dois casos:

- primeiro suponha que $a = m + nd$ onde $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}^*$. Seja $\beta \in \mathbb{Z}$. Como $\mathbb{Z} \subseteq T$ temos que $\beta = ka = k(m + nd)$ daí tiramos que $d = \frac{\beta - km}{kn} \in \mathbb{Q}$ o que é absurdo, pois d é irracional;
- suponha agora que $a = m + nd$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n = 0$. Assim todos os elementos de T são inteiros e isto obriga d ser um número inteiro, o que é absurdo.

Logo $\inf T^+ = 0$ e do lema 2.3.1 concluimos que T é denso em \mathbb{R} . ■

Exemplo 7. Seja $X_0(x, y) = (x_0, y_0) \neq (0, 0)$ um campo constante em \mathbb{R}^2 . É imediato verificar que o fluxo deste campo é dado por $\varphi(t, x, y) = (x + tx_0, y + ty_0)$. O campo X_0 induz um campo X no toro T^2 . As trajetórias paralelas do campo X_0 são levadas em trajetórias do campo X que se enrolam paralelamente no toro. É claro que o campo X não apresenta singularidades. Isto pode ser visto mais simplesmente quando identificamos o toro T^2 com o quadrado tubular $R = [0, 1) \times [0, 1)$. Na figura 2.6 apresentamos o retrato de fase de X na versão R do toro. Observe que as trajetórias de X inicialmente (para t pequeno) são linhas retas, até que atingem pela primeira vez um dos lados de R . Neste momento devemos identificar o lado de cima de R com o de baixo e o lado esquerdo com o direito. A trajetória continua em R e tem como traço segmentos de reta paralelos, a partir do ponto de entrada, o qual é identificado com o ponto de saída. A trajetória pode então ser vista como uma seqüência de segmentos de reta, todos com a mesma inclinação, sempre dentro do quadrado R , sendo o fluxo de X em R dado por

$$\varphi(t, x, y) = (x, y) + t(x_0, y_0) \pmod{1}.$$

O comportamento das trajetórias de X depende da inclinação destas retas, que é a inclinação do vetor (x_0, y_0) que define o campo constante X_0 no plano. Supomos que

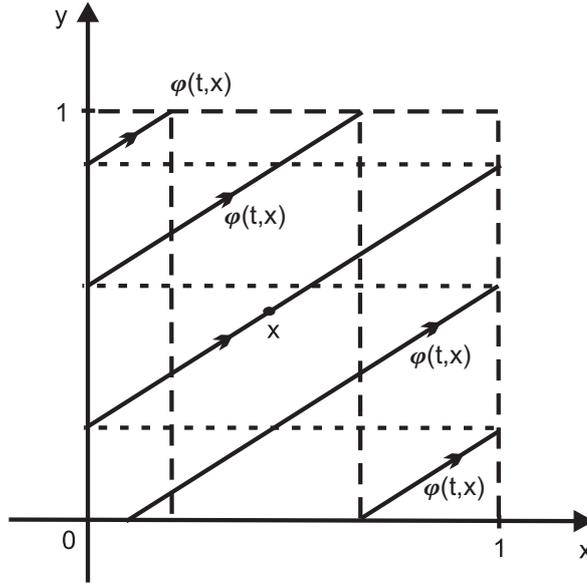


Figura 2.6: Retrato de fase do campo constante X .

$(x_0, y_0) = (1, d)$ com $d \neq 0$. Se a inclinação d é um número racional $\frac{l}{q}$, então para cada (x, y) vale

$$\varphi(q, x, y) = (x, y) + q(x_0, y_0)(\text{mod } 1) = (x, y) + (q, l)(\text{mod } 1) = (x, y)(\text{mod } 1),$$

de modo que todas as órbitas de X são periódicas. Reciprocamente, se alguma órbita de X é periódica, digamos $\varphi(T, x, y) = (x, y) + T(x_0, y_0)(\text{mod } 1) = (x, y)(\text{mod } 1)$ então $T(x_0, y_0) = (x, y) + T(x_0, y_0) - (x, y) \in \mathbb{Z}^2$, ou seja, existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $T(x_0, y_0) = T(1, d) = (n, m) \in \mathbb{Z}^2$ e portanto $T = n \in \mathbb{Z}$ e $d = \frac{m}{T} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, ou seja, a inclinação d é um número racional.

Sendo assim, obtemos uma dicotomia: se a inclinação d das trajetórias é racional, todas as órbitas de X são periódicas e se d é irracional nenhuma órbita de X é periódica.

Vamos mostrar agora que se d é irracional cada órbita no toro é densa no toro. Assim, em particular, como nenhuma órbita no toro é uma singularidade nem é periódica, este campo exibe um contra-exemplo ao teorema de Poincaré-Bendixson no toro, já que o conjunto ω -limite de qualquer ponto no toro é o próprio toro, portanto é não-vazio, não possui singularidade e não é uma órbita periódica.

Supomos então que d é irracional. Para cada $t = n \in \mathbb{Z}$ temos que $\varphi(t, 0, 0) = \varphi(n, 0, 0) = (0, 0) + n(1, d)(\text{mod } 1) = (0, 0) + (n, nd)(\text{mod } 1) = (0, nd)$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$,

vamos identificar o ponto $(0, nd)$ com o ponto $(0, x_n)$, onde $x_n \in [0, 1]$,

Afirmação: O conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ é denso em $[0, 1]$.

E temos portanto, que a trajetória φ de X em T^2 passa por um conjunto denso de pontos do círculo $\{0\} \times [0, 1]$ de T^2 . Isto mostra que a órbita de X por $(0, 0)$ é densa no toro T^2 . Como todas as órbitas de X são translações em \mathbb{R}^2 da órbita por $(0, 0)$, todas as órbitas de X com inclinação irracional são densas em T^2 .

Prova da Afirmação: Para provar a afirmação, aplicamos o lema 2.3.2. Assim a partir da identificação $x \sim y$ se, e somente se, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $y = x + n$, tomamos para cada $n \in \mathbb{Z}$ um $x_n \in [0, 1]$ tal que $nd \sim x_n$ e concluímos que $\{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ é denso em $[0, 1]$. \square

2.4 Ciclos limites

No que segue, continuamos denotando por $X : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de classe C^1 definido no aberto \mathcal{U} .

Definição 2.4.1 (Ciclo limite). *Um ciclo limite do campo X é uma órbita periódica isolada de X . Mais precisamente, uma órbita periódica γ de X é um ciclo limite de X se existir um aberto $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ tal que $\gamma \subseteq \mathcal{U}_0$ e $\mathcal{O}(z)$ não é órbita periódica para nenhum $z \in \mathcal{U}_0$.*

Exemplo 8. Considere o campo

$$X(x, y) = (-y - x(-1 + x^2 + y^2), x - y(-1 + x^2 + y^2)).$$

Fazendo a mudança para coordenadas polares $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ obtemos que

$$x = r \cos \theta \Rightarrow x' = r' \cos \theta - r\theta' \sin \theta$$

$$y = r \sin \theta \Rightarrow y' = r' \sin \theta + r\theta' \cos \theta.$$

Mas

$$x' = -y - x(-1 + x^2 + y^2) = -r \sin \theta - r \cos \theta(-1 + r^2)$$

$$y' = x - y(-1 + x^2 + y^2) = r \cos \theta - r \sin \theta(-1 + r^2)$$

e assim temos

$$-r \sin \theta - r \cos \theta(-1 + r^2) = r' \cos \theta - r\theta' \sin \theta \quad (2.1)$$

$$r \cos \theta - r \sin \theta(-1 + r^2) = r' \sin \theta + r\theta' \cos \theta. \quad (2.2)$$

Multiplicando a equação (2.1) por $(\cos \theta)$ e a equação (2.2) por $(\sin \theta)$ e em seguida somando as duas obtemos

$$r' = -r(-1 + r^2).$$

Agora multiplicando a equação (2.1) por $(-\sin \theta)$ e a equação (2.2) por $(\cos \theta)$ e somando as duas obtemos

$$\theta' = 1.$$

Dessa forma, obtemos o seguinte sistema em coordenadas polares

$$\begin{cases} r' = -r(-1 + r^2) \\ \theta' = 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

do qual obtemos $\theta(t) = t + \theta_0$ e $r(t)$ dado implicitamente por $\ln \frac{r}{(1-r^2)^{\frac{1}{2}}} = t + c$. Observemos que para esboçarmos o retrato de fase no plano xy basta observarmos o sinal de r' e de θ' :

- $\theta' = 1 > 0$ e portanto a componente angular é crescente;
- $r' = -r(-1 + r^2)$ e portanto a componente radial é crescente para $0 < r < 1$ e decrescente para $r > 1$;
- $(r, \theta) = (1, t)$ e $(r, \theta) = (0, t)$ são soluções de (2.3) que nas coordenadas cartesianas representam um ciclo limite e uma singularidade, respectivamente.

Na figura 2.7 temos esboçado o retrato de fase do campo X . □

Definição 2.4.2. Dizemos que γ é um ciclo limite **estável** se existir um aberto $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ tal que $\gamma \subseteq \mathcal{U}_0$ e $\omega(x) = \gamma$ para cada $x \in \mathcal{U}_0$; γ é um ciclo limite **instável** se existir um aberto $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ tal que $\gamma \subseteq \mathcal{U}_0$ e $\alpha(x) = \gamma$ para cada $x \in \mathcal{U}_0$; γ é um ciclo limite **semi-estável** se existir um aberto $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ tal que $\gamma \subseteq \mathcal{U}_0$ e $\omega(x) = \gamma$, para cada $x \in \mathcal{U}_0 \cap$

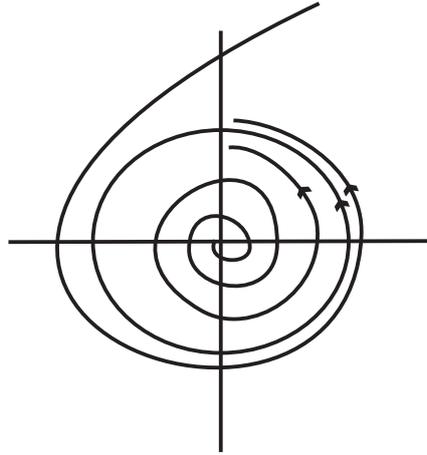


Figura 2.7: Retrato de fase do campo de vetores do exemplo 8.

$ext \gamma$ e $\alpha(x) = \gamma$, para cada $x \in \mathcal{U}_0 \cap int \gamma$ ou então $\omega(x) = \gamma$, para cada $x \in \mathcal{U}_0 \cap int \gamma$ e $\alpha(x) = \gamma$, para cada $x \in \mathcal{U}_0 \cap ext \gamma$.

Observação. Equivalentemente, o ciclo limite γ é dito **estável** se $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$, para todo $q \in \mathcal{U}_0$; γ será **instável** quando $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$, para todo $q \in \mathcal{U}_0$; e finalmente γ será **semi-estável** quando $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$, para todo $q \in \mathcal{U}_0 \cap ext \gamma$ e $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$, para todo $q \in \mathcal{U}_0 \cap int \gamma$, ou $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$, para todo $q \in \mathcal{U}_0 \cap int \gamma$ e $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$, para todo $q \in \mathcal{U}_0 \cap ext \gamma$.

Observemos que o ciclo limite do exemplo acima é estável.

Proposição 2.4.3. *Seja γ um ciclo limite de X . Então ou γ é estável ou instável ou semi-estável.*

Demonstração – Como $X(y) \neq 0$ para todo $y \in \gamma$ existe um aberto $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}$ tal que $\gamma \subseteq \mathcal{U}_1$ e $X(y) \neq 0$ para cada $y \in \mathcal{U}_1$. Tomamos $y_0 \in \gamma$ e uma seção transversal Σ a X em y_0 . Pela continuidade de uma solução φ , existe $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tal que Σ_0 é aberto, $y_0 \in \Sigma_0$ e para cada $y \in \Sigma_0$ existe $t > 0$ tal que $\varphi_y(t) \in \Sigma$, com t próximo ao período de γ . Olhando para esta aplicação de retorno em Σ , temos quatro casos, fixando dois pontos $y_1 < y_0 < y_2$ em Σ , que correspondem aos casos desta Proposição. Os segmentos de trajetória determinam uma região na qual não há nem singularidades e nem órbitas

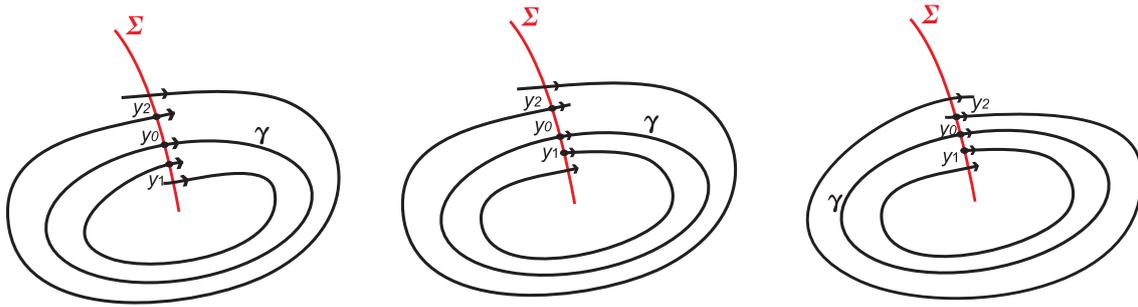


Figura 2.8: Figura referente a Proposição 2.4.3.

periódicas exceto γ e portanto pelo Teorema de Poincaré-Bendixson segue a Proposição. Veja figura 2.8. ■

2.5 Estrutura local das órbitas periódicas

2.5.1 A transformação de Poincaré

A transformação de Poincaré associada a uma órbita fechada γ de um campo vetorial é um difeomorfismo π que descreve o comportamento do campo em uma vizinhança de γ .

Sejam $\{\varphi(t, p) : 0 \leq t \leq T\}$ uma órbita periódica de período T de um campo X de classe C^r , $r \geq 1$ ou $r = \omega$, definido no aberto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ e Σ uma seção transversal a X em p . Em virtude da continuidade do fluxo φ de X , para todo ponto $q \in \Sigma$ próximo de p a trajetória $\varphi(t, p)$ permanece próxima a γ , com t em um intervalo compacto pré-fixado, por exemplo, $[0, 2T]$. Define-se $\pi(q)$ como o primeiro ponto onde esta órbita intercepta Σ . Seja Σ_0 o domínio de π . Naturalmente $p \in \Sigma_0$ e $\pi(p) = p$.

Muitas propriedades do campo X perto de γ se refletem em π . Por exemplo, as órbitas periódicas de X vizinhas de γ correspondem aos pontos periódicos de π , que são os pontos $q \in \Sigma_0$ para os quais $\pi^n(q) = q$ para algum inteiro $n \geq 1$. O comportamento assintótico das órbitas de X perto de γ também é descrito pela transformação de Poincaré π . Assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^n(q) = p \text{ implica } \lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0.$$

Observação. A seção Σ considerada acima é uma hipersuperfície ou uma subvariedade diferenciável $(n-1)$ -dimensional do aberto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. Pode-se supor que a variedade Σ que

aqui aparece é um disco de um subespaço vetorial ou afim de \mathbb{R}^n , sem que isto constitua uma restrição séria.

A seguir, vamos demonstrar que $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ é um difeomorfismo de classe C^r , $r \geq 1$ ou $r = \omega$, sobre sua imagem $\Sigma_1 = \pi(\Sigma_0)$. Vamos usar o Teorema do Fluxo Tubular e seu corolário 1.3.6 para dar precisão a definição de π . Seja V uma vizinhança de p dada pelo corolário 1.3.6. Como $\varphi(T, p) = p$ existe uma vizinhança Σ_0 de p em Σ tal que $\varphi(T, q) \in V$ para todo $q \in \Sigma_0$. Seja $\xi : V \rightarrow \Sigma$ a aplicação definida no corolário 1.3.6. Temos $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ dada por $\pi(q) = \xi(\varphi(T, q))$.

Outra expressão para π é $\pi(q) = \varphi(T + \tau(\varphi(T, q)), q)$, onde $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$ é o tempo $\tau(x)$ que leva a órbita por x em V para interceptar Σ . Do teorema das funções implícitas, τ é de classe C^r .

Destas expressões, resulta que π é da mesma classe de diferenciabilidade que X . A inversa $\pi^{-1} : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_0$ de π é definida tomando-se o campo $-X$. Fica provado que π é um difeomorfismo C^r , com $r \geq 1$ ou $r = \omega$.

Observação. Voltando aos ciclos limites, teremos que sua relação com a transformação de Poincaré vai ser a seguinte: γ será um ciclo limite de X por p se, e somente se, p é um ponto fixo isolado de π . Ainda,

1. γ é estável se, e somente se, $|\pi(x) - p| < |x - p|$, para todo $x \neq p$ próximo de p ;
2. γ é instável se, e somente se, $|\pi(x) - p| > |x - p|$, para todo $x \neq p$ próximo de p ;
3. γ é semi-estável se, e somente se, $|\pi(x) - p| < |x - p|$, para todo $x \in \Sigma \cap ext \gamma$ próximo de p e $|\pi(x) - p| > |x - p|$, para todo $x \in \Sigma \cap int \gamma$ próximo de p , ou o contrário.

Em particular, se X é analítico, e $\pi(x)$ não é a identidade, então $\pi(x) = p + a_k(x - p)^k + \dots$, com $a_k \neq 0$.

Portanto, se k é ímpar, γ é estável se $a_k < 0$ e instável se $a_k > 0$. Se k é par γ é semi-estável. Se $\pi(x) = x$, isto é, todos os a_k são zero, γ está no interior de uma faixa de órbitas periódicas de X .

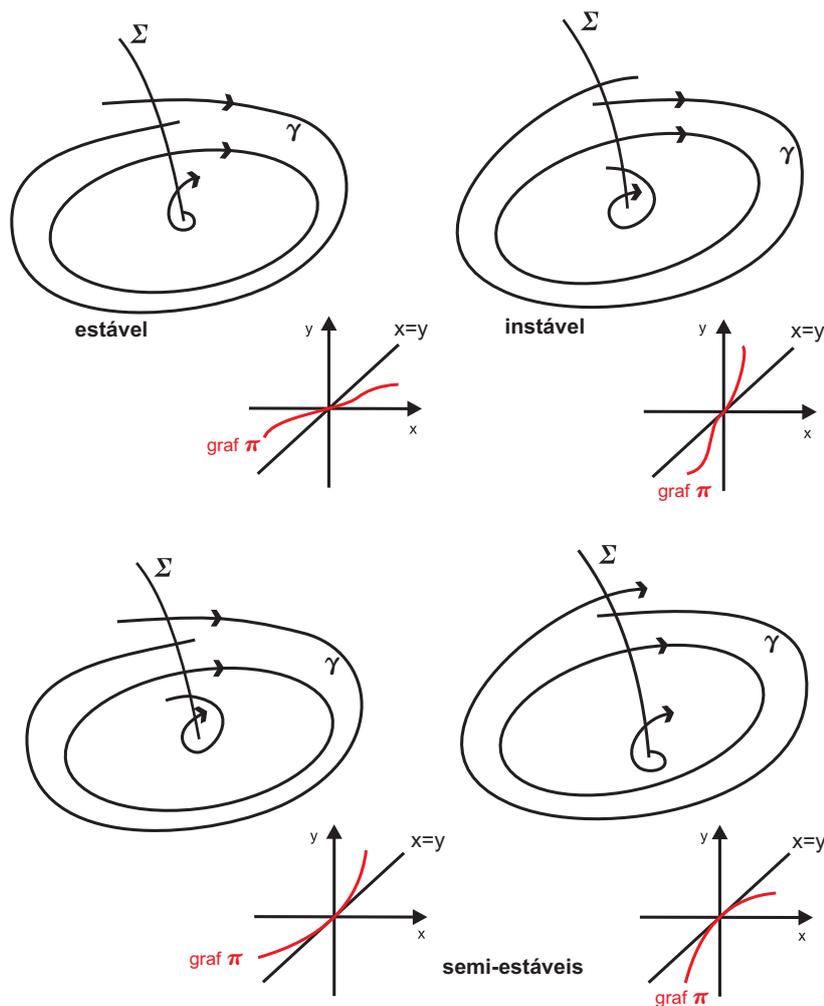


Figura 2.9: Ciclos limites e respectivos gráficos da aplicação de Poincaré π .

No caso em que X é C^1 , se $\pi'(x) < 1$, podemos aplicar o teorema do valor médio e concluir que γ é estável. Por outro lado, γ é instável se $\pi'(x) > 1$. Veja a figura 2.9.

O teorema abaixo, cuja demonstração pode ser obtida em [13], página 30, estabelece uma condição suficiente para que uma órbita periódica seja um ciclo limite estável.

Teorema 2.5.1. *Seja $X = (X_1, X_2) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 no aberto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$. Seja γ uma órbita periódica de X de período T e $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ a transformação de Poincaré em uma seção transversal Σ em $p \in \gamma$. Então*

$$\pi'(p) = \exp\left(\int_0^T \operatorname{div} X(\gamma(t)) dt\right).$$

Em particular, se $\int_0^T \operatorname{div} X(\gamma(t))dt < 0$ então γ é estável, e se $\int_0^T \operatorname{div} X(\gamma(t))dt > 0$, γ é instável. ■

Capítulo 3

A Equação de van der Pol para Circuitos Elétricos

Neste capítulo faremos um estudo qualitativo da equação de van der Pol (com o parâmetro $\varepsilon = 1$). Tal equação é um caso particular das chamadas equações de Lienard. As equações de Lienard modelam o sistema físico de um circuito elétrico RLC . Na primeira seção começamos entendendo matematicamente o que vem a ser um tal circuito. A segunda seção será toda destinada ao estudo da equação de van der Pol (com o parâmetro $\varepsilon = 1$). Na terceira seção estudaremos uma classe mais geral de sistemas de Lienard e encontraremos uma bifurcação de Andronov–Hopf para esta família.

3.1 Circuito elétrico RLC

Exemplos de circuitos elétricos RLC em série e em paralelo podem ser observados na figura 3.1. Vamos explorar somente o circuito a esquerda da figura 3.1, que é um circuito RLC em série. O circuito tem três ramos, um *resistor* marcado por R, um *indutor* marcado por L e um *capacitor* marcado por C.

Através de cada ramo do circuito passa uma *corrente elétrica* que é medida por um número real. Denotemos por i_R , i_L e i_C as medidas das correntes elétricas pelo resistor, indutor e capacitor, respectivamente. As flechas na figura do circuito RLC indicam o caminho que a corrente percorre.

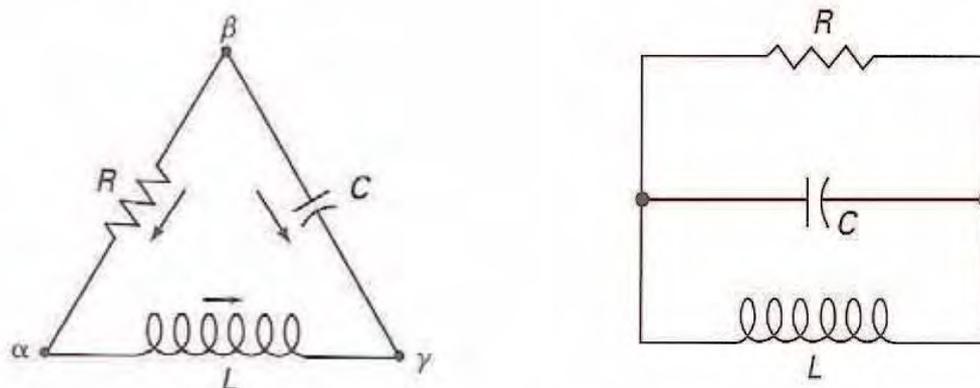


Figura 3.1: Circuitos elétricos RLC em série e em paralelo.

Representaremos num dado momento o estado das correntes no circuito por um ponto $i = (i_R, i_L, i_C) \in \mathbb{R}^3$. A Lei de Corrente de Kirchhoff (LCK) afirma que a corrente total fluindo em um nó é igual a corrente total fluindo fora deste nó. Para o nosso caso isso é equivalente a

$$LCK : i_R = i_L = -i_C.$$

Isto define um subespaço unidimensional K_1 de \mathbb{R}^3 dos estados físicos da corrente.

O estado do circuito é caracterizado pela corrente elétrica $i = (i_R, i_L, i_C)$ juntamente com a *voltagem* ou *tensão elétrica* através de cada ramo. Denotemos as medidas dessas voltagens por v_R , v_L e v_C no ramo resistor, indutor e capacitor, respectivamente. A tensão elétrica é a diferença de potencial e para medi-la utilizamos um aparelho chamado voltímetro. A medida v_R da voltagem no resistor será então dada pela diferença entre a medida da voltagem no nó β e no nó α ,

$$V(\beta) - V(\alpha) = v_R.$$

A direção da flecha é o que determina se $v_R = V(\beta) - V(\alpha)$ ou se $v_R = V(\alpha) - V(\beta)$.

O estado da voltagem no circuito será representado por um ponto $v = (v_R, v_L, v_C) \in \mathbb{R}^3$. Neste caso, temos que

$$v_R + v_L - v_C = (V(\beta) - V(\alpha)) + (V(\alpha) - V(\gamma)) - (V(\beta) - V(\gamma)) = 0.$$

Essa igualdade também é conhecida como Lei de Voltagem de Kirchhoff (LVK). Então

$$LVK : v_R + v_L - v_C = 0.$$

Isto define um subespaço bidimensional K_2 de \mathbb{R}^3 dos estados físicos da voltagem.

O espaço produto $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ é o *espaço* para o circuito. Os estados $(i, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ satisfazendo as leis de Kirchhoff formam um subespaço tridimensional do espaço $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Fisicamente falando, o resistor no circuito *RLC* desempenha uma relação sobre a corrente i_R e a voltagem v_R . No nosso circuito definimos essa relação por uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, assim temos a relação $v_R = f(i_R)$. No caso em que R é um resistor linear convencional temos que f é linear, e então $v_R = K \cdot i_R$. Essa relação também é conhecida como 1ª Lei de Ohm. Para funções não-lineares temos uma Lei de Ohm generalizada. O gráfico da função f é denominada a *característica* do resistor.

Um ponto $(i, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ satisfazendo LCK, LVK e também $f(i_R) = v_R$ será um *estado físico* do circuito e o conjunto $\Upsilon \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ é o conjunto formado pelos *estados físicos*. Assim Υ é o conjunto de pontos $(i_R, i_L, i_C, v_R, v_L, v_C)$ em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ que satisfazem LCK, LVK e a Lei de Ohm generalizada.

No rumo para encontrar uma modelagem matemática para o nosso circuito, a Lei de Faraday especifica que para o indutor e para o capacitor valem que

$$L \frac{d}{dt} i_L(t) = v_L(t) \quad \text{e} \quad C \frac{d}{dt} v_C(t) = i_C(t)$$

onde L e C são constantes positivas chamadas de indutância e capacitância, respectivamente.

Podemos simplificar o conjunto Υ dos estados físicos observando que i_L e v_C determinam as outras quatro coordenadas. De fato, basta notar pela LCK que $i_R = i_L$ e $i_C = -i_L$, pela Lei de Ohm generalizada $v_R = f(i_R) = f(i_L)$ e pela LVK, $v_L = v_C - v_R = v_C - f(i_L)$. Portanto podemos usar \mathbb{R}^2 como nosso espaço de estados, com coordenadas dadas por (i_L, v_C) .

Dessa forma podemos reescrever as equações da Lei de Faraday por

$$L \frac{d}{dt} i_L = v_L = v_C - f(i_L) \quad \text{e} \quad C \frac{d}{dt} v_C = i_C = -i_L.$$

Em particular, como se trata apenas de um exemplo, podemos tomar $L = C = 1$. Escrevendo $x = i_L$ e $y = v_C$, obtemos o seguinte sistema de equações diferencial planar

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y - f(x) \\ \frac{dy}{dt} &= -x.\end{aligned}$$

Este sistema é uma forma particular dos conhecidos *sistemas de Lienard*.

3.2 A equação de van der Pol

A clássica família de equações de van der Pol é a família a 1 parâmetro de equações de segunda ordem dada por

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0,$$

onde $\varepsilon > 0$.

Consideremos a seguinte mudança de coordenadas:

$$X = x, \quad Y = \dot{x} + \int \varepsilon(x^2 - 1)dx.$$

Assim, voltando a denotar as variáveis por x e y , obtemos o sistema de primeira ordem dado por

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y - \varepsilon\left(\frac{x^3}{3} - x\right) \\ \frac{dy}{dt} &= -x.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Fazendo a mudança linear de coordenadas

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{x}{\sqrt{3}}, \frac{y}{\sqrt{3}}\right),$$

temos que a análise da família (3.1) é equivalente a análise de

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y - \varepsilon(x^3 - x) \\ \frac{dy}{dt} &= -x.\end{aligned}\tag{3.2}$$

O sistema acima é do tipo Lienard com $f(x) = \varepsilon(x^3 - x)$.

Vamos estudar o retrato de fase do sistema (3.2) para $\varepsilon = 1$, ou seja, estudaremos o seguinte sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y - x^3 + x \\ \frac{dy}{dt} &= -x.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Temos que uma singularidade do sistema (3.3) é um ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo que

$$\begin{cases} y - x^3 + x = 0 \\ -x = 0 \end{cases}$$

Isso nos dá que a origem $(0, 0)$ é a única singularidade do sistema de van der Pol (3.3).

Para analisar esta singularidade, considere o linearizado do campo $X(x, y) = (y - x^3 + x, -x)$ na origem. Podemos associar tal campo linearizado com o sistema diferencial $Y' = AY$, onde

$$A = DX(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de A são dados como raízes do polinômio de 2º grau

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - \lambda + 1$$

do qual obtemos

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{3}i \right).$$

Assim vemos que a origem é um foco instável para A , ou então, topologicamente falando, a origem é uma fonte para A . Como a parte real de cada autovalor de A é não nula, temos que a origem é uma singularidade hiperbólica do campo X e, portanto, pelo teorema 1.4.2 de Grobman-Hartman a origem é uma fonte para a equação de van der Pol.

Nosso objetivo agora é dar uma descrição completa do retrato de fase da equação de van der Pol. Para isso, denotemos por φ_t o fluxo do sistema (3.3).

Teorema 3.2.1. *Para a equação de van der Pol existe uma única solução periódica não-trivial para a qual toda outra solução (exceto o ponto singular na origem) tende.*

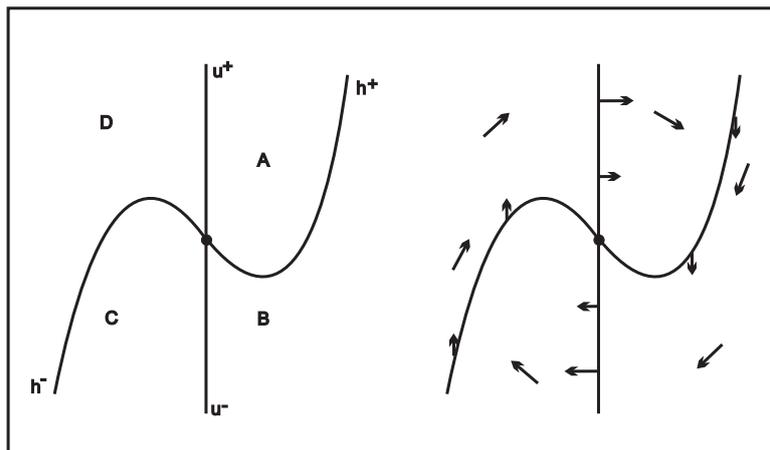


Figura 3.2: Campo de vetores da equação de van der Pol nas curvas u^+, u^-, h^+, h^- e nas regiões A, B, C, D .

Provaremos este teorema adiante. Para isto, definiremos uma transformação de Poincaré e chegaremos que esta possui um único ponto fixo o qual corresponde a única solução periódica não-trivial da equação de van der Pol.

Nosso próximo passo é mostrar que toda solução regular gira ao redor da origem no sentido horário. Para isso, vamos dividir o plano em quatro regiões abertas disjuntas, na qual denotamos por A, B, C e D , como dispostas na figura 3.2. Essas quatro regiões são dadas como complemento das curvas

$$\begin{aligned} y - x^3 + x &= 0 \\ -x &= 0. \end{aligned}$$

Para ser mais preciso, definimos as seguintes quatro curvas:

$$\begin{aligned} u^+ &= \{(x, y) : y > 0, x = 0\}, \\ h^+ &= \{(x, y) : x > 0, y = x^3 - x\}, \\ u^- &= \{(x, y) : y < 0, x = 0\}, \\ h^- &= \{(x, y) : x < 0, y = x^3 - x\}. \end{aligned}$$

Estas curvas são disjuntas e juntamente com a origem elas formam a fronteira das regiões A, B, C e D .

O comportamento do campo de vetores $X(x, y) = (y - x^3 + x, -x)$ dado pela equação de van der Pol em cima destas quatro curvas e nas regiões A , B , C e D pode ser visto na figura 3.2. Essa figura sugere que as trajetórias do campo giram em forma espiral ao redor da origem no sentido horário. Os próximos resultados vão tornar isto mais preciso.

Observação. Pode-se verificar facilmente que o campo $X(x, y) = (y - x^3 + x, -x)$ é simétrico em relação a origem, isto é, $X(-x, -y) = -X(x, y)$. Isto significa que se $(x(t), y(t))$ é uma curva solução, então $(-x(t), -y(t))$ também será.

Proposição 3.2.2. *Qualquer trajetória do campo X começando sobre u^+ entra na região A e cruza as curvas h^+ , u^- e h^- no sentido horário, passando pelas regiões B , C e D antes de retornar a u^+ .*

Demonstração – Seja $(x(t), y(t))$ uma curva solução para o sistema (3.3) começando sobre u^+ , ou seja, $(x(0), y(0)) \in u^+$. Então $x(0) = 0$ e $y(0) > 0$. Uma vez que $x'(0) > 0$, segue que $x(t)$ cresce para t pequeno e isso faz com que tal solução entre na região A . Agora em A temos que $y'(t) < 0$ de modo que esta solução deve decrescer na direção de y e isso fará com que a solução encontre h^+ . Sobre h^+ ainda temos $y'(t) < 0$ e $x' = 0$ de modo que a solução decresce na direção de y entrando na região B . Em B temos $x'(t) < 0$ e $y'(t) < 0$ de modo que a solução vai em direção sudoeste e assim não pode voltar para A . Ficam duas possibilidades: ou a solução cruza u^- ou então tende a $-\infty$ na direção de y e nunca cruza u^- .

Suponhamos que este último caso aconteça. Seja (x_0, y_0) um ponto sobre essa solução na região B . Como $x(t)$ nunca é zero em B , então a curva solução $(x(t), y(t))$ situa-se na faixa S dada por $0 < x \leq x_0$, $y \leq y_0$, e por hipótese temos que $y(t) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow t_0$ para algum t_0 . Provemos que $t_0 = \infty$. Para isso, note que pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$y(t) - y_0 = \int_0^t y'(s) ds = \int_0^t -x(s) ds. \quad (3.4)$$

Mas $0 < x(s) \leq x_0$ e assim só podemos ter $y(t) \rightarrow -\infty$ se $t \rightarrow \infty$.

Analisemos agora $x(t)$ para $0 \leq t < \infty$. Temos que $x' = y - x^3 + x$. Como a quantidade

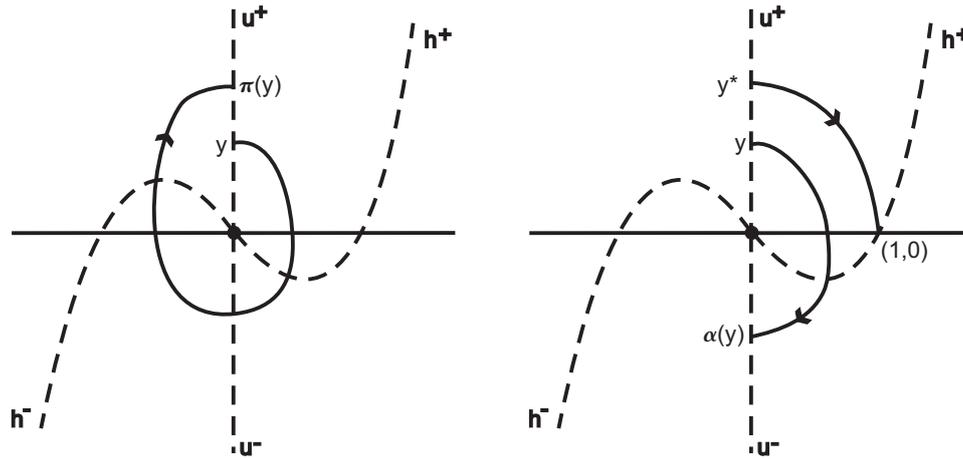


Figura 3.3: A aplicação de Poincaré π e a aplicação α sobre u^+ .

$-x^3 + x$ é limitada na faixa S e $y(t) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow \infty$, segue que

$$x(t) - x_0 = \int_0^t x'(s) ds = \int_0^t [y(s) - x^3(s) + x(s)] ds \rightarrow -\infty \quad (3.5)$$

quando $t \rightarrow \infty$. Mas isso contradiz que $x(t) > 0$. Portanto essa solução deve cruzar u^- .

Usando a simetria do campo X , segue então que tal solução deve passar através das regiões C e D e retornar a u^+ de modo similar. ■

No que segue, identificaremos o eixo dos y com os números reais. Assim se $y_1, y_2 \in u^+ \cup u^-$ escrevemos $y_1 > y_2$ para dizer que y_1 está acima de y_2 .

De posse da última proposição, podemos definir uma transformação de Poincaré π sobre a semi-reta u^+ . Assim, dado um ponto $(0, y_0) \in u^+$, definimos $\pi(y_0)$ como sendo a coordenada y do primeiro retorno de $\varphi_t(0, y_0)$ para u^+ , com $t > 0$. Pela unicidade das soluções temos que π é injetora. Ainda pela unicidade, note que se $y_1 > y_2$ então $\pi(y_1) > \pi(y_2)$, como pode ser visto na figura 3.4.

O próximo teorema é equivalente ao teorema 3.2.1 na versão da transformação de Poincaré.

Teorema 3.2.3. *A transformação de Poincaré definida acima tem um único ponto fixo em u^+ . Além disso, a seqüência $\pi^n(y) = \pi \circ \pi^{n-1}(y)$ tende a esse ponto fixo quando $n \rightarrow \infty$ para todo $y \in u^+$.*

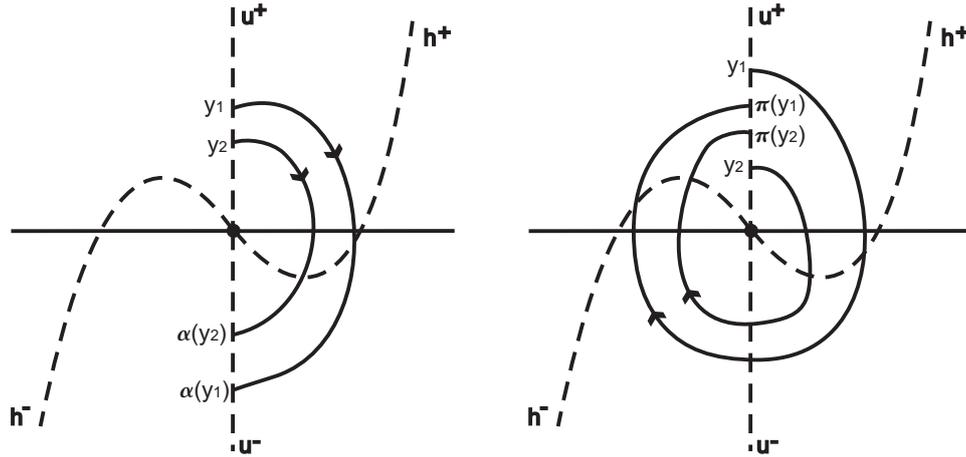


Figura 3.4: Comportamento das aplicações α e π em pontos distintos.

A fim de provar o teorema, definimos uma aplicação $\alpha : u^+ \rightarrow u^-$ onde, para cada $(0, y) \in u^+$, $\alpha(y)$ é a coordenada y do primeiro encontro de $\varphi_t(0, y)$ com u^- , onde $t > 0$. Note pela figura 3.4 que se $y_1 > y_2$ então $\alpha(y_1) < \alpha(y_2)$.

Definimos também para cada $(0, y) \in u^+$ a aplicação $\delta : u^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\delta(y) = \frac{1}{2} \left(\alpha(y)^2 - y^2 \right).$$

Observação. Pela unicidade das soluções, existe um único ponto $(0, y^*) \in u^+$ e tempo t^* tal que o pedaço da curva solução $\{\varphi_t(0, y^*) : 0 \leq t \leq t^*\}$ intercepta a curva h^+ no ponto $(1, 0)$ onde h^+ encontra o eixo dos x . Este fato pode ser visto na figura 3.3.

Usaremos as propriedades da função δ enunciados na proposição seguinte, para completar a prova do teorema 3.2.3.

Proposição 3.2.4. *A função δ definida acima satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\delta(y) > 0$ se $y < y^*$;
2. $\delta(y)$ é monótona, para $y > y^*$, e tende a $-\infty$ quando $y \rightarrow \infty$.

Demonstração – Considere $W : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função energia para o sistema (3.3) que é dada por

$$W(x, y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x x dx = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Seja $p \in u^+$, com $p < y^*$, e suponha que $\alpha(p) = \varphi_\tau(p)$. Denote por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ para $0 \leq t \leq \tau$ a curva solução ligando $p \in u^+$ a $\alpha(p) \in u^-$. Pela definição temos

$$\delta(p) = \frac{1}{2}(\alpha(p)^2 - p^2) = \frac{1}{2}(y(\tau)^2 - y(0)^2) = W(x(\tau), y(\tau)) - W(x(0), y(0)).$$

Assim

$$\delta(p) = \int_0^\tau \frac{d}{dt} W(x(t), y(t)) dt.$$

Mas pela Regra da Cadeia, temos que

$$\frac{d}{dt} W(x, y) = \nabla W(x, y) \cdot (x', y') = (x, y) \cdot (y - x^3 + x, -x) = -x^4 + x^2 = x^2(1 - x^2).$$

Logo

$$\delta(p) = \int_0^\tau \frac{d}{dt} W(x(t), y(t)) dt = \int_0^\tau x(t)^2(1 - x(t)^2) dt. \quad (3.6)$$

Como $p < y^*$ segue que $0 < x(t) < 1$, e então o integrando $x(t)^2(1 - x(t)^2)$ é positivo, e portanto $\delta(p) > 0$. Isso prova a parte 1 da proposição.

Antes de começar a prova da parte 2, lembremos de algumas definições.

Sejam $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva C^1 por partes no plano, com $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, e $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Definimos

$$\int_\gamma F(x, y) = \int_a^b F(x(t), y(t)) dt.$$

Se tivermos que $x'(t) \neq 0$ para $a \leq t \leq b$, então ao longo de γ , y é uma função de x . Assim, podemos escrever $y = y(x)$. Neste caso, usando mudança de variáveis temos

$$\int_a^b F(x(t), y(t)) dt = \int_{x(a)}^{x(b)} F(x, y(x)) \frac{dt}{dx} dx.$$

Portanto

$$\int_\gamma F(x, y) = \int_{x(a)}^{x(b)} \frac{F(x, y(x))}{dx/dt} dx.$$

Se $y'(t) \neq 0$ temos uma expressão similar.

Em vista disto, podemos simplificar a última igualdade de (3.6) reescrevendo-a como

$$\delta(p) = \int_\gamma x^2(1 - x^2),$$

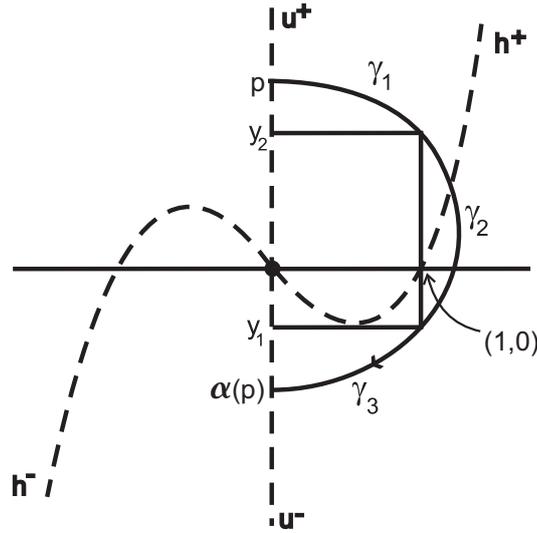


Figura 3.5: As curvas γ_1 , γ_2 e γ_3 .

onde γ é a curva ligando p a $\alpha(p)$ definida anteriormente.

Dividimos esta curva solução γ em três curvas γ_1, γ_2 e γ_3 como exposto na figura 3.5. Vamos restringir nossa atenção para os pontos $p \in u^+$ com $p > y^*$. As curvas γ_1 e γ_3 estão definidas para $0 \leq x \leq 1$, e a curva γ_2 está definida para $y_1 \leq y \leq y_2$. Temos então que

$$\delta(p) = \delta_1(p) + \delta_2(p) + \delta_3(p)$$

onde

$$\delta_i(p) = \int_{\gamma_i} x^2(1-x^2), \quad i = 1, 2, 3.$$

Note que, ao longo de γ_1 , $y(t)$ pode ser olhado como uma função de x . Assim

$$\delta_1(p) = \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)}{dx/dt} dx = \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)}{y-x^3+x} dx.$$

Quando p cresce sobre o eixo y , $y-x^3+x$ cresce (para $(x, y) \in \gamma_1$). Portanto $\delta_1(p)$ decresce quando p cresce.

Sobre γ_3 , ainda podemos olhar $y(t)$ como uma função de x . Neste caso,

$$\delta_3(p) = \int_1^0 \frac{x^2(1-x^2)}{dx/dt} dx = - \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)}{y-x^3+x} dx = \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)}{-(y-x^3+x)} dx.$$

Quando p cresce sobre o eixo y , $y-x^3+x$ decresce (para $(x, y) \in \gamma_3$), e assim $-(y-x^3+x)$

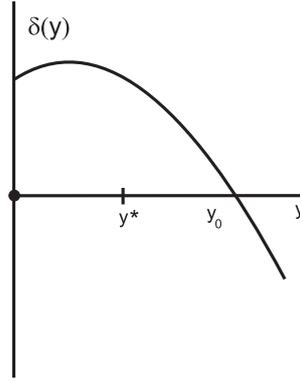


Figura 3.6: O gráfico da função δ .

crece. Portanto $\delta_3(p)$ decresce quando p cresce.

Sobre γ_2 , $x(t)$ pode ser olhado como uma função de y , que está definida para $y_1 \leq y \leq y_2$ e $x \geq 1$. Portanto, temos que

$$\delta_2(p) = \int_{y_2}^{y_1} \frac{x(y)^2(1-x(y)^2)}{dy/dt} dy = \int_{y_2}^{y_1} -x(y)(1-x(y)^2) dy = \int_{y_1}^{y_2} x(y)(1-x(y)^2) dy.$$

Como $x(y) \geq 1$ então o último integrando acima é negativo, e portanto $\delta_2(p) < 0$.

Quando p cresce, o domínio de integração $[y_1, y_2]$ torna-se cada vez maior e a curva γ_2 move-se para a direita. Portanto $x(y)$ cresce de modo que $x(y)(1-x(y)^2)$ decresce. Segue que $\delta_2(p)$ decresce quando p cresce e assim

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \delta_2(p) = -\infty.$$

Conseqüentemente, $\delta(p)$ também decresce e tende a $-\infty$ quando $p \rightarrow \infty$. Isso prova a parte 2 da proposição. ■

Parte do gráfico da função δ pode ser visto na figura 3.6.

Antes da prova do teorema 3.2.3 definimos uma aplicação $\beta : u^- \rightarrow u^+$ da seguinte maneira: para cada $(0, y) \in u^-$, $\beta(y)$ é o primeiro ponto de intersecção da trajetória $\varphi_t(0, y)$ pelo ponto $(0, y)$ com u^+ . Note que, $\pi(y) = (\beta \circ \alpha)(y)$. Pela simetria, temos também que $\beta(y) = -\alpha(-y)$. Ainda, podemos observar pela figura 3.7, que se $y_1 > y_2$ então $\beta(y_1) < \beta(y_2)$.

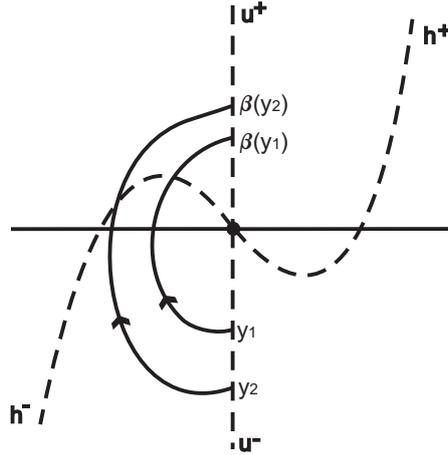


Figura 3.7: Comportamento da aplicação β em pontos distintos.

Demonstração do teorema 3.2.3: A Proposição 3.2.4 nos diz que a função δ troca de sinal. Assim pelo Teorema do Valor Intermediário existe um $y_0 \in u^+$ tal que $\delta(y_0) = 0$. Como a função δ é monótona temos que y_0 é o único ponto em u^+ que satisfaz $\delta(y) = 0$. Conseqüentemente $\alpha(y_0) = -y_0$ e aplicando β nesta última igualdade obtemos que

$$\pi(y_0) = \beta(\alpha(y_0)) = \beta(-y_0) = -\alpha(y_0) = y_0.$$

Portanto y_0 é o único ponto fixo da transformação de Poincaré π .

Mostraremos agora que a seqüência $\pi^n(y) = \pi \circ \pi^{n-1}(y)$ tende a esse ponto fixo quando $n \rightarrow \infty$ para todo $y \in u^+$.

Seja então $y \in u^+$ com $y > y_0$. Assim temos que

$$\pi(y) > \pi(y_0) = y_0.$$

Como δ é decrescente segue que $\delta(y) < \delta(y_0) = 0$ e assim

$$\delta(y) < 0 \Rightarrow \alpha(y)^2 < y^2 \Rightarrow |\alpha(y)| < y \Rightarrow -y < \alpha(y).$$

Portanto $\pi(y) = \beta(\alpha(y)) < \beta(-y) = -\alpha(y) < y$. Assim, vemos que se $y > y_0$ então $y_0 < \pi(y) < y$. Aplicando π nesta última desigualdade obtemos então que

$$y_0 = \pi(y_0) < \pi(\pi(y)) < \pi(y) < y$$

e por indução, podemos mostrar que

$$y_0 < \pi^{n+1}(y) < \pi^n(y) < y,$$

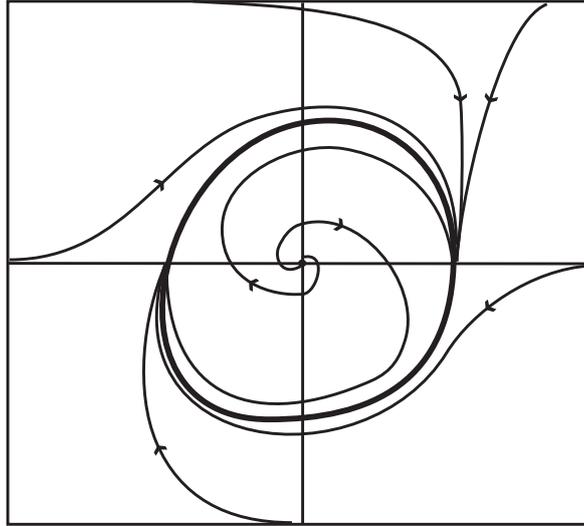


Figura 3.8: Retrato de fase da equação de van der Pol

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Assim, a seqüência $(\pi^n(y))_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona decrescente e limitada por y_0 e y , logo existe $y_1 \geq y_0$ em u^+ tal que $\pi^n(y) \rightarrow y_1$. Note que y_1 é um ponto fixo de π , pois pela continuidade de π , temos

$$\pi(y_1) = \pi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^n(y)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi(\pi^n(y)) = y_1.$$

Como π tem um único ponto fixo, então $y_1 = y_0$. Isso mostra que a solução por $(0, y)$ tende de forma espiral para a solução periódica em $(0, y_0)$ quando $t \rightarrow \infty$.

O caso quando $y < y_0$ é análogo e será omitido aqui. Como toda solução não-trivial encontra u^+ , a prova do teorema está completa. ■

E dessa forma, fica completo a descrição do retrato de fase da equação de van der Pol quando o parâmetro ε é igual a 1. Tal retrato pode ser visualizado na figura 3.8.

3.3 Uma bifurcação de Andronov–Hopf

Começamos esta seção, ilustrando através de um exemplo, o que vem a ser uma bifurcação de Andronov-Hopf. Logo após, estudamos uma classe mais geral de sistemas de Lienard onde também encontramos uma bifurcação deste tipo. Mais especificamente, descrevere-

mos como o retrato de fase do sistema de Lienard, agora com a função f dependendo de um parâmetro μ , pode mudar quando tal parâmetro μ varia. Informalmente falando, um valor μ_0 onde existe uma mudança na classe topológica do retrato de fase é chamado um **ponto de bifurcação**.

Uma bifurcação de Andronov–Hopf em sistemas planares acontece exatamente quando vemos o nascimento de um ciclo limite a partir da mudança de estabilidade de um foco. Mais especificamente, quando consideramos uma família de campos planares $X' = X(x, y, \mu)$ e $\mu_0 \in \mathbb{R}$, com singularidade $p(\mu) = (x_0(\mu), y_0(\mu))$ satisfazendo que $p(\mu)$ é um foco estável para $\mu < \mu_0$, um foco instável para $\mu > \mu_0$ e $DX(p(\mu_0))$ não é hiperbólica, então temos uma bifurcação de Andronov–Hopf.

Exemplo. Considere o campo

$$X(x, y) = (-y - x(\mu + x^2 + y^2), x - y(\mu + x^2 + y^2)).$$

A origem é uma singularidade do campo X e o sistema linearizado é dado por

$$Y' = AY = \begin{pmatrix} -\mu & -1 \\ 1 & -\mu \end{pmatrix} Y.$$

Os autovalores são $-\mu \pm i$, e assim esperamos uma bifurcação quando $\mu = 0$. Note que neste valor o sistema deixa de ser hiperbólico.

Para vermos o que acontece quando μ passa por 0 fazemos a mudança para coordenadas polares $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. Assim vamos obter, da mesma forma como foi feita no exemplo 8 da seção 4 do capítulo 2, o seguinte sistema em coordenadas polares

$$\begin{cases} r' &= -r(\mu + r^2) \\ \theta' &= 1 \end{cases}. \quad (3.7)$$

O retrato de fase do campo X no plano xy é obtido analisando-se o sinal de r' e de θ' . Distinguímos os três seguintes casos do retrato de fase de X , cada um dependendo de certos valores de μ . Observamos que nos três casos a componente angular é sempre crescente, pois $\theta' = 1 > 0$:

- Se $\mu > 0$, temos que $r' = -r(\mu + r^2) < 0$, para todo $r > 0$, de modo que a componente radial é decrescente. Assim toda solução tende para a origem em forma espiral, ou seja, a origem é um foco atrator para o campo X ;
- Para $\mu < 0$, a componente radial é crescente para $0 < r < \sqrt{-\mu}$ e decrescente para $r > \sqrt{-\mu}$. Além disso $r' = 0$ se $r = \sqrt{-\mu}$, assim o círculo de raio $\sqrt{-\mu}$ em coordenadas cartesianas representa um ciclo limite para o campo X . No exemplo 8 da seção 4 do capítulo 2, estudamos o caso particular onde $\mu = -1$;
- Quando $\mu = 0$ temos que $r' = -r^3 < 0$, para todo $r > 0$, de modo que a componente radial é decrescente. Assim toda solução tende para a origem em forma espiral. Neste caso, dizemos que a origem é um foco fraco. Note que para este valor de μ o campo X deixa de ser hiperbólico.

Portanto vemos um exemplo de uma **bifurcação de Andronov–Hopf**, sendo que $\mu = 0$ é o ponto de bifurcação. Na figura 3.9 temos visualizado como o retrato de fase do campo X muda com o respectivo valor do parâmetro μ . \square

Estudaremos agora uma classe mais geral de sistemas de Lienard, onde a função f agora depende de um parâmetro $\mu \in \mathbb{R}$. O comportamento físico do circuito será então descrito pelo sistema de equações diferenciais em \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y - f_\mu(x) \\ \frac{dy}{dt} &= -x.\end{aligned}$$

Particularmente aqui vamos considerar o caso especial onde a função f_μ é dada por $f_\mu(x) = x^3 - \mu x$, onde $\mu \in [-1, 1]$. Ou seja, estudaremos sistemas da forma

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y - x^3 + \mu x \\ \frac{dy}{dt} &= -x.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Podemos pensar o parâmetro μ como sendo a temperatura do resistor. Quando $\mu = 1$ temos o sistema de van der Pol da seção anterior.

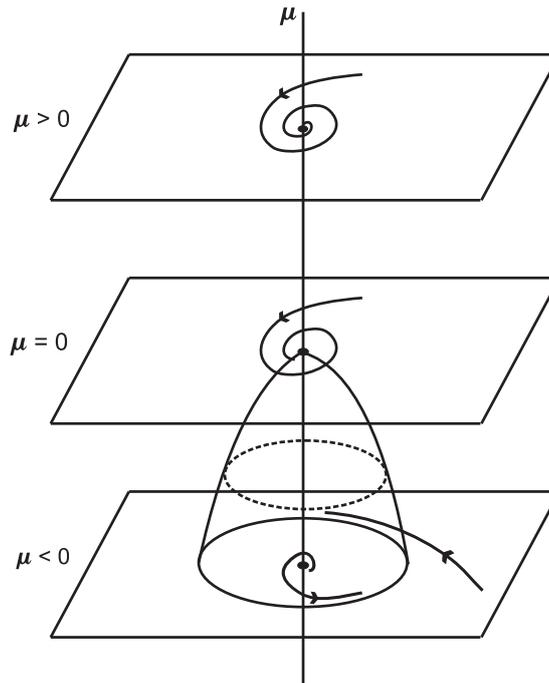


Figura 3.9: Variação do retrato de fase do sistema (3.7) no plano (x, y) .

Começamos o estudo vendo que a origem continua sendo a única singularidade do sistema (3.8). O sistema linearizado de (3.8) é dado por

$$Y' = AY = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Y. \quad (3.9)$$

Os autovalores de A são as raízes do polinômio de 2º grau

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - \mu\lambda + 1$$

do qual obtemos

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4} \right).$$

Assim podemos tirar que:

- Para $-1 \leq \mu < 0$ os autovalores λ_{\pm} são complexos com parte real negativa e, assim, temos que a origem é um foco estável para o sistema linearizado (3.9), ou então, topologicamente falando, a origem é um poço para o sistema (3.9). Como neste caso a origem é singularidade hiperbólica, segue pelo teorema 1.4.2 de Grobman-Hartman que a origem também é um poço para o sistema (3.8). E portanto, toda solução tende para origem;

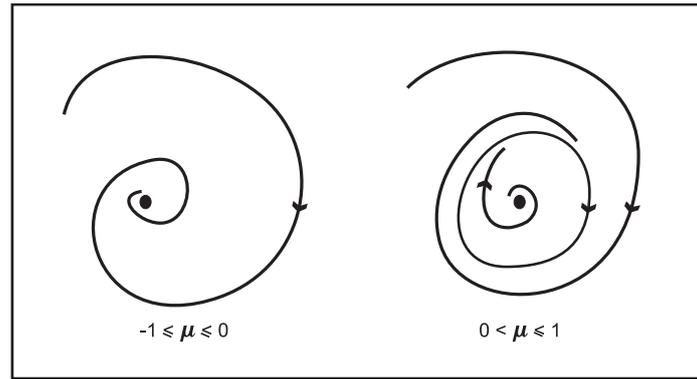


Figura 3.10: Variação do retrato de fase do sistema (3.8) no plano.

- Quando $0 < \mu \leq 1$ os autovalores λ_{\pm} são complexos com parte real positiva e, neste caso, a origem é um foco instável para o sistema linearizado (3.9), ou topologicamente falando, a origem é uma fonte para o sistema (3.9), e novamente pelo teorema 1.4.2 de Grobman-Hartman temos que a origem também é uma fonte para o sistema (3.8). A análise feita na seção 3.2 pode ser aplicada neste caso em que $\mu \in (0, 1]$. E assim vemos o nascimento de uma única solução periódica γ_{μ} quando μ passa através de zero. Tal solução atrai toda outra solução não-trivial e além disso, temos que $\gamma_{\mu} \rightarrow 0$ quando $\mu \rightarrow 0$;
- O valor $\mu = 0$ é exatamente quando o sistema (3.8) deixa de ser hiperbólico, pois neste caso temos os autovalores imaginários puros $\lambda_{\pm} = \pm i$.

Fica então definido um exemplo de uma **bifurcação de Andronov–Hopf**, sendo que $\mu = 0$ é o ponto de bifurcação. Note pela figura 3.10 que a estrutura básica do retrato de fase do sistema (3.8) muda quando μ passa pelo valor 0.

Capítulo 4

Sistemas de Lienard

O objetivo deste capítulo é o estudo de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem que podem ser escritas como

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0. \quad (4.1)$$

Tais equações são conhecidas como *equações de Lienard*.

Na literatura existente sobre o assunto encontramos duas maneiras distintas para encontrarmos um sistema planar equivalente. A primeira delas é a maneira usual, que consiste em considerarmos $\dot{x} = y$ e assim o sistema planar é dado por

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -f(x, y)y - g(x). \quad (4.2)$$

A segunda maneira é utilizada somente para o caso particular em que $f(x, \dot{x}) = f(x)$, isto é, para equações do tipo

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0. \quad (4.3)$$

Para chegar no sistema planar equivalente a esta equação via essa segunda maneira, vamos mudar a variável x da equação (4.3) para s e daí temos

$$\ddot{s} + F'(s)\dot{s} + g(s) = 0 \quad (4.4)$$

onde $F'(s) = f(s)$. Perante a mudança de coordenadas $x = s$ e $y = \dot{s} + F(s)$ temos que

$$\dot{y} = \ddot{s} + F'(s)\dot{s} = -g(s) = -g(x)$$

e

$$\dot{x} = \dot{s} = y - F(s) = y - F(x)$$

e no qual chegamos ao sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases}. \quad (4.5)$$

O Teorema de Poincaré–Bendixson estabelecido no capítulo 2 é usualmente utilizado para estabelecer a existência de órbitas periódicas de certos sistemas. Um problema muito mais delicado é determinar o número exato de ciclos limites de um certo sistema ou de uma certa classe de sistemas dependendo de parâmetros. Estudamos neste capítulo resultados clássicos sobre a existência e a quantidade de ciclos limites de **sistemas de Lienard** (4.5) para F, g satisfazendo determinadas condições. O primeiro resultado que estudaremos sobre a unicidade de ciclos limites dos sistemas (4.5), foi primeiro estabelecido pelo físico francês A. Lienard e por essa razão os sistemas da forma (4.5) são chamados de **Sistemas de Lienard**.

Esta forma inclui a famosa equação de van der Pol

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (4.6)$$

da teoria dos circuitos elétricos como um caso especial.

Lembremos que na primeira seção do Capítulo 3 foi estabelecido pela análise física de um circuito elétrico RLC um caso particular de um sistema de Lienard, onde naquele caso $g(x) = x$. Na segunda seção do Capítulo 3 demos uma descrição completa do retrato de fase de um sistema de Lienard (a equação de van der Pol (4.6) com o parâmetro $\varepsilon = 1$), sendo as funções F e g definidas por $F(x) = x^3 - x$ e $g(x) = x$.

O capítulo está organizado da seguinte maneira. Inicialmente vamos aplicar o Teorema de Poincaré–Bendixson para encontrarmos órbitas periódicas de equações de Lienard da forma geral (4.1). Em seguida estabeleceremos condições para a existência de um centro para o caso onde $f(x, \dot{x}) = f(x)$ e finalmente estabeleceremos condições para a existência de ciclos limites. Observamos que para obtermos ciclos limites a forma apropriada para

a equação de Lienard é a dada pelo sistema (4.5) e as técnicas utilizadas serão meras generalizações do que já estudamos quando analisamos a existência de ciclos limites da equação de van der Pol.

4.1 Existência de soluções periódicas para equações de Lienard via Poincaré–Bendixson

O Teorema de Poincaré–Bendixson pode ser empregado para obter outros teoremas sobre a existência de soluções periódicas de tipos mais abrangentes de equações diferenciais. O seguinte resultado é um destes teoremas. O tipo de equação diferencial que investigaremos é da forma (4.1). O sistema equivalente à equação é dado por (4.2).

Teorema 4.1.1. *Suponhamos que as funções f e g na equação (4.1) sejam contínuas e que se verifiquem as seguintes condições:*

1. *existe $a > 0$ tal que $f(x, y) > 0$ quando $x^2 + y^2 > a^2$;*
2. *$f(0, 0) < 0$ (e portanto $f(x, y) < 0$ numa vizinhança da origem);*
3. *$g(0) = 0$, $g(x) > 0$ quando $x > 0$, e $g(x) < 0$ quando $x < 0$;*
4. *$G(x) = \int_0^x g(u)du \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow \infty$.*

Então, nestas condições, a equação de Lienard (4.1) tem pelo menos uma solução periódica.

Demonstração – Pela condição 3 temos que, $g(0) = 0$ e $g(x) \neq 0$ para $x \neq 0$. Isso nos diz que a origem é a única singularidade do sistema (4.2). Consideremos a função

$$\varepsilon(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + G(x).$$

Essa função representa a energia do sistema de Lienard (4.2).

Claramente temos que $G(0) = 0$ e $G(x) > 0$ quando $x \neq 0$. Além disso, a função G é monótona crescente para o infinito (por 4) e é contínua. Portanto, segue também que $\varepsilon(0, 0) = 0$ e $\varepsilon(x, y) > 0$ para $x \neq 0$ e $y \neq 0$ (ou seja, a função ε é positiva definida), e ε é

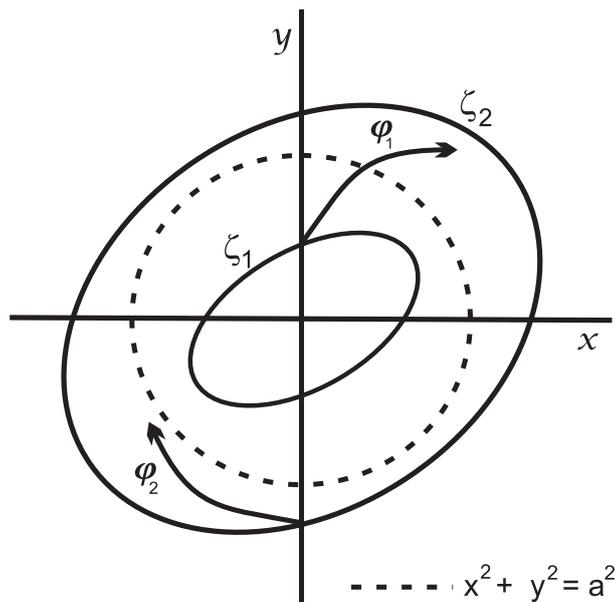


Figura 4.1: Figura referente ao Teorema 4.1.1.

contínua e cresce monotonicamente em toda direção radial da origem. Portanto a família de curvas de nível

$$\varepsilon(x, y) = c$$

consiste de curvas fechadas simples ao redor da origem. Quando $c \rightarrow 0$ as curvas de níveis se aproximam da origem e quando $c \rightarrow \infty$ eles se tornam infinitamente distantes da origem (essa é a principal consequência da condição 4).

Podemos escolher um nível c suficientemente pequeno, digamos $c = c_1$, e chamaremos a curva de nível por ζ_1 , de modo que ζ_1 esteja inteiramente contida na vizinhança da origem onde, pela condição 2, $f(x, y) < 0$. Vamos examinar uma trajetória φ_1 começando em um ponto sobre ζ_1 . Temos que,

$$\dot{\varepsilon}(x, y) = \nabla \varepsilon(x, y) \cdot (\dot{x}, \dot{y}) = (g(x), y) \cdot (y, -f(x, y)y - g(x)) = -y^2 f(x, y).$$

Assim, para todo (x, y) sobre a curva ζ_1 (exceto quando $y = 0$), temos que $\dot{\varepsilon}$ é positivo, pois $f(x, y) < 0$. Então, vamos escolher a trajetória φ_1 começando em um ponto sobre ζ_1 com $y \neq 0$. Dessa forma, a trajetória φ_1 segue em direção ao exterior de ζ_1 e nunca pode ir para o interior de ζ_1 , visto que para isso acontecer a trajetória φ_1 iria cruzar o interior de alguma curva de nível em direção a origem, mas isso seria um absurdo pois $\dot{\varepsilon} \geq 0$ sobre

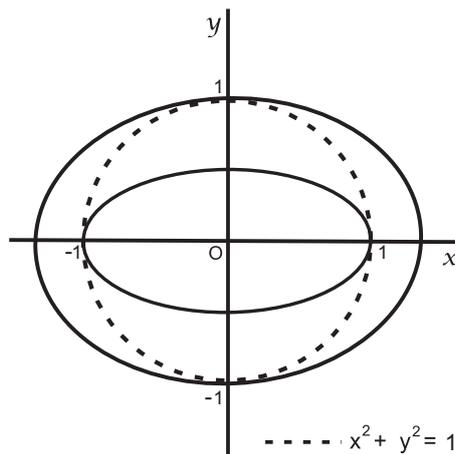


Figura 4.2: Região onde encontramos uma órbita periódica da equação 4.7.

toda curva de nível suficientemente próxima a ζ_1 , assim como sobre ζ_1 .

Podemos escolher também, pela condição 4, uma outra curva de nível ζ_2 para c suficientemente grande, digamos $c = c_2$, de modo que ζ_2 esteja inteiramente fora do círculo $x^2 + y^2 = a^2$ onde, pela condição 1, $f(x, y) > 0$. Seja φ_2 uma trajetória começando sobre ζ_2 ou cruzando ζ_2 . Para todo (x, y) sobre ζ_2 (exceto quando $y = 0$), temos que $\dot{\varphi}_2$ é negativo, pois $f(x, y) > 0$. Assim, toda trajetória começando sobre ζ_2 ou cruzando ζ_2 segue em direção ao interior de ζ_2 , ou são tangentes (quando $y = 0$). Com um argumento similar como o dado acima, tal trajetória não pode mais escapar para o exterior de ζ_2 .

Portanto, vemos que qualquer trajetória começando sobre ζ_1 ou sobre ζ_2 permanece na região limitada por ζ_1 e ζ_2 , e assim, pelo Teorema de Poincaré-Bendixson, existe uma solução periódica nessa região. ■

Exemplo. Como uma aplicação do teorema anterior, vamos mostrar que a equação

$$\ddot{x} + (x^2 + \dot{x}^2 - 1)\dot{x} + x^3 = 0 \quad (4.7)$$

tem uma solução periódica, e vamos localizá-la entre duas curvas de nível da função ε .

Aplicaremos o teorema para as funções f e g dadas por $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ e $g(x) = x^3$. Temos que, as funções G e ε serão dadas por

$$G(x) = \int_0^x g(u) du = \frac{x^4}{4} \quad \text{e} \quad \varepsilon(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{4}$$

e as curvas de nível de ε são descritas pela equação

$$\frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2} = c.$$

A solução periódica obtida pelo teorema situa-se entre duas curvas de nível da função ε , uma no interior, e outra no exterior, da curva $f(x, y) = 0$ ou $x^2 + y^2 = 1$, e melhor será a precisão da região que compreenderá a solução periódica quanto melhor for a escolha das duas curvas de nível no interior e no exterior de $x^2 + y^2 = 1$. O que queremos encontrar é respectivamente o min / max de $\frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2}$ sujeito a $x^2 + y^2 = 1$. O cálculo, usando o método dos multiplicadores de Lagrange, nos dá que $\max = \frac{1}{2}$ e $\min = \frac{1}{4}$, respectivamente. (Veja a figura 4.2). \square

4.2 Existência de centros para equações de Lienard

Nesta seção, estabeleceremos a existência de um centro para a equação diferencial anteriormente definida

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0. \quad (4.8)$$

ou então para o sistema equivalente

$$\begin{cases} \dot{x} = & y \\ \dot{y} = & -f(x)y - g(x) \end{cases}. \quad (4.9)$$

Teorema 4.2.1. *Suponhamos que em alguma vizinhança da origem as funções f e g da equação (4.8) ou então do sistema equivalente (4.9) sejam contínuas e que se verifiquem as seguintes condições:*

1. $f(x)$ é ímpar, e quando $x > 0$, $f(x)$ é só positiva ou só negativa;
2. $g(x)$ é ímpar, e $g(x) > 0$ quando $x > 0$ (e portanto $g(0) = 0$);
3. $g(x) > \alpha f(x)F(x)$ para $x > 0$, onde $F(x) = \int_0^x f(u)du$ e $\alpha > 1$.

Então, nestas condições, a origem é um centro para a equação de Lienard (4.8).

Antes de demonstrarmos o teorema acima vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo. Como uma aplicação do teorema anterior, vamos mostrar que a equação

$$\ddot{x} + x\dot{x} + x^3 = 0$$

tem um centro na origem. Definindo as funções f e g como $f(x) = x$ e $g(x) = x^3$ teremos então que as condições 1 e 2 são satisfeitas, pois f e g são funções ímpares, $f(x) = x$ é só positiva no semi-plano $x > 0$ e $g(x) = x^3 > 0$ quando $x > 0$. Também temos que $F(x) = \frac{1}{2}x^2$, e portanto $f(x)F(x) = \frac{1}{2}x^3$. Dessa forma,

$$g(x) - \alpha f(x)F(x) = \frac{1}{2}x^3(2 - \alpha)$$

e assim quando $1 < \alpha < 2$ temos que $g(x) > \alpha f(x)F(x)$ para todo $x > 0$, e logo a condição 3 é satisfeita. (Veja figura 4.3). \square

Observemos que o sistema planar equivalente a equação do exemplo acima, cujo retrato de fase é dado na figura 4.3, é

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -xy - x^3 \end{cases} \quad (4.10)$$

É claro que, sendo a existência de um centro invariante por equivalência topológica, se tivéssemos considerado a mudança de Lienard concluiríamos também que o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \frac{x^2}{2} \\ \dot{y} = -x^3 \end{cases}$$

possui um centro na origem.

Demonstração do Teorema 4.2.1. Vamos supor na condição 1 que $f(x) > 0$ quando $x > 0$. O caso $f(x) < 0$ é análogo, basta trocar t por $-t$. Uma vez que as funções f e g são ímpares, as trajetórias do sistema (4.9) são simétricas em relação ao eixo y . Mais especificamente, o campo de vetores $X(x, y) = (y, -f(x)y - g(x))$ é reversível com relação

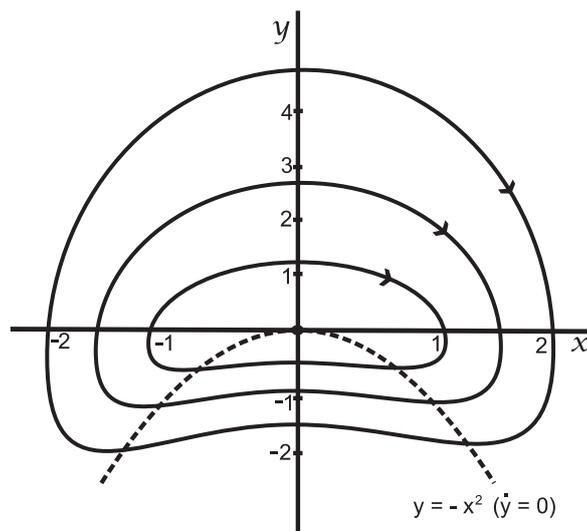


Figura 4.3: Retrato de fase do sistema 4.10.

a involução linear $R(x, y) = (-x, y)$, isto é,

$$X \circ R = -R \circ X$$

e o conjunto dos pontos fixos de R é exatamente o eixo y .

Pela condição 2, temos que a origem é a única singularidade do sistema de Lienard (4.9). Consideremos novamente a função energia

$$\varepsilon(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + G(x)$$

onde $G(x) = \int_0^x g(u)du$.

Assim como no teorema anterior, a família de curvas de nível

$$\varepsilon(x, y) = c$$

onde $c > 0$ é um parâmetro, define uma família de curvas fechadas simples ao redor da origem. Quando $c \rightarrow 0$ as curvas fechadas se aproximam da origem. Vamos considerar aqui uma tal família, de modo que as curvas estejam contidas na vizinhança da origem onde as condições do teorema estão satisfeitas (para isso basta tomar parâmetros c suficientemente pequenos).

Seja ζ_0 um membro arbitrário dessa família, e considere a trajetória φ começando em um ponto A da intersecção de ζ_0 com o eixo y . Neste ponto, temos $y > 0$ e assim $\dot{x} > 0$,

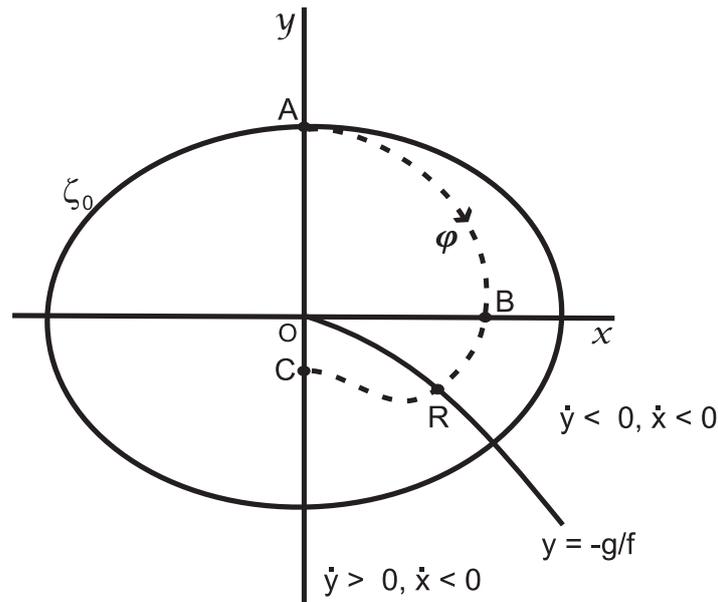


Figura 4.4: Trajetória presa num nível da função energia.

de modo que φ avança para à direita no primeiro quadrante. Temos também que,

$$\dot{\epsilon}(x, y) = -y^2 f(x)$$

e, neste caso, para todo (x, y) sobre a trajetória φ , temos que $\dot{\epsilon}$ é negativo. Então a trajetória φ segue em direção ao interior de ζ_0 e tem de permanecer aí e, dessa forma, φ vai encontrar o eixo dos x em um ponto B no interior da curva ζ_0 .

Neste ponto temos $y = 0$ e $x > 0$, de modo que, $\dot{x} = 0$ e $\dot{y} = -g(x) < 0$ e, então a trajetória decresce na direção de y e entra no quarto quadrante e não volta mais para o primeiro quadrante. Além disso, como $\dot{\epsilon}(x, y) < 0$ no quarto quadrante, a trajetória φ continua no interior de ζ_0 . Neste momento, podemos ter duas possibilidades: ou φ cruza o eixo y em algum ponto C onde $y < 0$, ou então tende ao único ponto de equilíbrio na origem.

Mostremos que esta última possibilidade não pode acontecer. No quarto quadrante temos que $\dot{x} < 0$, porém $\dot{y} = -f(x)y - g(x)$ pode assumir valores positivos e negativos. Para tratar este caso, consideremos a curva

$$y = -\frac{g(x)}{f(x)}.$$

Sobre esta curva temos que $\dot{y} = 0$ (e também $\frac{dy}{dx} = 0$), e ela divide a região onde $\dot{y} > 0$

daquela onde $\dot{y} < 0$. Suponhamos inicialmente que tal curva se aproxima da origem, ou seja, que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{g(x)}{f(x)} \right] = 0.$$

Entrando no quarto quadrante, a trajetória φ se encontra na região acima da curva $y = -\frac{g(x)}{f(x)}$ onde se tem $\dot{x} < 0$ e $\dot{y} < 0$. Assim, φ decresce na direção de x e de y e portanto deve encontrar tal curva em um ponto R de coordenadas (x_1, y_1) . Neste ponto, $\dot{x} < 0$ e $\dot{y} = 0$ e então φ decresce na direção de x ficando agora abaixo da curva $y = -\frac{g(x)}{f(x)}$ onde se tem $\dot{x} < 0$ e $\dot{y} > 0$ e, dessa maneira, φ decresce na direção de x e cresce na direção de y encontrando o eixo dos y em um ponto C de coordenadas $(0, y_0)$. Mostremos que $y_0 < 0$.

No arco determinado pelos pontos R e C , \widehat{RC} , temos que

$$y_1 - y_0 = \int_0^{x_1} \frac{dy}{dx} dx.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} y_0 &= y_1 - \int_0^{x_1} \frac{dy}{dx} dx = y_1 + \int_0^{x_1} [f(x) + y^{-1}g(x)] dx = -\frac{g(x_1)}{f(x_1)} + F(x_1) + \int_0^{x_1} y^{-1}g(x) dx \\ &< -\frac{g(x_1)}{f(x_1)} + F(x_1) \quad (\text{pois } g(x) > 0, y \leq 0 \text{ sobre } 0 \leq x \leq x_1) \\ &< -\alpha F(x_1) + F(x_1) < 0 \quad (\text{pela condição 3}). \end{aligned}$$

Logo $y_0 < 0$, e pela simetria das trajetórias do sistema (4.9) em relação ao eixo y , segue que φ é uma trajetória fechada.

Retornamos agora para a possibilidade que a curva $y = -\frac{g(x)}{f(x)}$ não passa através da origem. Como $g(x) > 0$ e $f(x) > 0$ quando $x > 0$, então a curva situa-se inteiramente abaixo do eixo x , e neste caso, a trajetória φ também deve permanecer abaixo do eixo x como mostrado na figura 4.5, e assim não pode tender ao ponto singular na origem.

Finalmente, como toda esta argumentação é independente da proximidade do ponto A da origem, segue que a origem é um centro para o sistema (4.9). ■

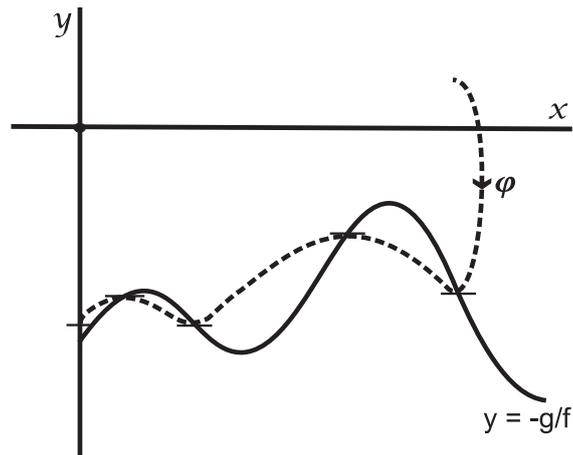


Figura 4.5: Curva $y = -g(x)/f(x)$ não atingindo a origem.

4.3 Ciclos limites de sistemas de Lienard

Nesta seção, vamos considerar sistemas de Lienard da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -g(x). \end{cases} \quad (4.11)$$

Vamos primeiramente provar um teorema devido ao físico francês A. Lienard. Para as funções F e g satisfazendo determinadas condições, este resultado garante a existência de um único ciclo limite para o sistema (4.11). No restante da seção apresentaremos alguns outros resultados sobre a existência e a quantidade de ciclos limites para (4.11).

Teorema 4.3.1 (Lienard). *Suponhamos que as funções F e g no sistema (4.11) são funções ímpares e de classe C^1 em \mathbb{R} tais que $g'(x) > 0$ para todo x , $F(0) = 0$, $F'(0) < 0$, F tem um único zero positivo em $x = a$ e é monótona crescente para infinito para $x \geq a$. Então o sistema de Lienard (4.11) tem exatamente um ciclo limite o qual é estável.*

Observamos que a hipótese de que $g'(x) > 0$ para todo x pode ser trocado pela hipótese mais geral $xg(x) > 0$ para todo $x \neq 0$. Apenas observamos que a prova neste caso seria um pouco diferente da prova que daremos. Mais detalhes deste outro caso pode ser encontrado em [11].

Demonstração – A prova do Teorema de Lienard segue os mesmos passos da prova

sobre a unicidade do ciclo limite feita na segunda seção do Capítulo 3 para a equação de van der Pol com o parâmetro $\varepsilon = 1$.

Uma singularidade do sistema (4.11) é um ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo que $y = F(x)$ e $g(x) = 0$ e pelas hipóteses sobre as funções F, g temos que a origem $(0, 0)$ é o único ponto singular do sistema de Lienard (4.11). Para analisar esta singularidade, consideremos o linearizado do campo $X(x, y) = (y - F(x), -g(x))$ na origem. Podemos associar tal campo linearizado com o sistema diferencial $Y' = AY$, onde

$$A = DX(0, 0) = \begin{pmatrix} -F'(0) & 1 \\ -g'(0) & 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de A são dados como raízes do polinômio de 2º grau

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 + F'(0)\lambda + g'(0)$$

do qual obtemos

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(-F'(0) \pm \sqrt{F'(0)^2 - 4g'(0)} \right).$$

Como $g'(x) > 0$ para todo x , segue que $F'(0)^2 - 4g'(0) \leq F'(0)^2$ e assim a parte do autovalor obtida do cálculo da raiz ou é imaginária ou tem módulo menor que $|F'(0)|$ de modo que o ponto singular na origem é instável pois $F'(0) < 0$, ou então, topologicamente falando, a origem é uma fonte para A . Como a origem é uma singularidade hiperbólica do campo X pelo teorema 1.4.2 de Grobman-Hartman a origem também é uma fonte para o sistema de Lienard.

Note que o fluxo do sistema (4.11) sobre o eixo positivo dos y é horizontal e aponta para à direita, enquanto que no eixo negativo dos y é horizontal mas agora apontando para à esquerda. Já sobre a curva $y = F(x)$ o fluxo é vertical apontando para baixo quando $x > 0$ e apontando para cima quando $x < 0$. Na figura 4.6 temos o campo de direções do sistema (4.11).

Como por hipótese as funções F e g são ímpares, verifica-se facilmente que o campo $X(x, y) = (y - F(x), -g(x))$ associado ao sistema de Lienard (4.11) é simétrico em relação a origem, isto é, $X(-x, -y) = -X(x, y)$. Isto significa que se $(x(t), y(t))$ é uma curva solução, então $(-x(t), -y(t))$ também será.

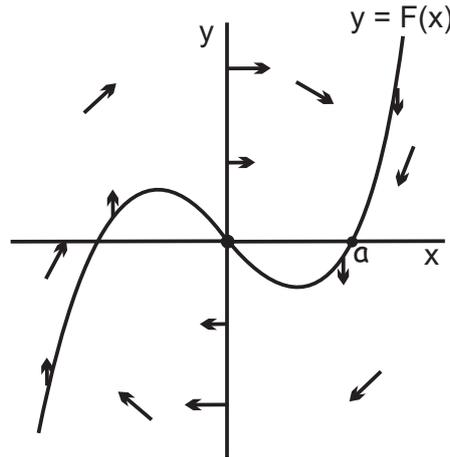


Figura 4.6: Campo de vetores da equação de Lienard.

Por um argumento análogo aquele dado na Proposição 3.2.2, qualquer trajetória φ começando em um ponto sobre o eixo positivo dos y , deve cruzar verticalmente a curva $y = F(x)$ e então cruzar horizontalmente o eixo y negativo. Pela simetria do sistema (4.11), segue que a trajetória φ deve retornar ao eixo y positivo de modo similar e φ será uma trajetória fechada se, e somente se, bater na mesma altura no eixo y positivo e no eixo y negativo. De fato, lembrando a demonstração da Proposição 3.2.2, temos que as conclusões tiradas a partir das equações (3.4) e (3.5) são exatamente as mesmas pois as hipóteses sobre F e g garantem isso.

Dessa forma, podemos definir novamente, assim como foi feita na seção 3.2, a transformação de Poincaré π , e as aplicações α e δ sobre o eixo positivo dos y .

De modo similar, a Proposição 3.2.4 sobre a função δ também continua válida agora para as funções F e g nas hipóteses do Teorema de Lienard. Apenas deve-se notar agora que a função energia para o sistema (4.11) tem a forma

$$W(x, y) = \frac{y^2}{2} + G(x) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x g(x)dx$$

e, dessa forma, teremos que

$$\delta(p) = \int_0^\tau \frac{d}{dt} W(x(t), y(t)) dt = \int_0^\tau -g(x(t))F(x(t)) dt = \int_\gamma -g(x)F(x),$$

onde $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $0 \leq t \leq \tau$ é a curva ligando p a $\alpha(p)$.

Para finalizar observamos também que, de modo análogo ao estabelecido no Teorema 3.2.3, a transformação de Poincaré π tem um único ponto fixo sobre o eixo positivo dos

y . Além disso, a seqüência $\pi^n(y) = \pi \circ \pi^{n-1}(y)$ tende a esse ponto fixo quando $n \rightarrow \infty$ para todo ponto no eixo positivo dos y .

Isto nos diz que existe um único ciclo limite atrator para a equação ou sistema de Lienard (4.11), o que conclui a demonstração do Teorema de Lienard. ■

Como uma consequência do Teorema de Lienard, tiramos a seguinte importante informação sobre a existência e unicidade do ciclo limite para o famoso caso particular da equação de Lienard, a saber, a equação de van der Pol.

Corolário 4.3.2. *Para $\varepsilon > 0$, a equação de van der Pol (4.6) tem um único ciclo limite o qual é estável.*

Demonstração – Com efeito, para a equação de van der Pol (4.6) temos que as funções F e g são dadas por

$$F(x) = \varepsilon \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \quad \text{e} \quad g(x) = x.$$

Claramente estas funções são ímpares e de classe C^1 em \mathbb{R} . Além do mais, $xg(x) = x^2 > 0$, para todo $x \neq 0$, $F(0) = 0$, $F'(0) = -1 < 0$, $x = \sqrt{3}$ é o único zero positivo de F , e para $x \geq \sqrt{3}$, F é monótona e cresce para o infinito quando $x \rightarrow \infty$. Assim, as hipóteses do Teorema de Lienard são satisfeitas para estas funções. Portanto, para todo $\varepsilon > 0$, a equação de van der Pol (4.6) tem um único ciclo limite atrator. ■

Na seção 3.2 provamos este resultado para o caso particular onde $\varepsilon = 1$. O ciclo limite da equação de van der Pol (4.6) para o caso $\varepsilon = 1$ é mostrado na figura 3.8. Na figura 4.7 temos mostrado novamente o ciclo limite da equação (4.6) para $\varepsilon = 1$ e também para $\varepsilon = 0, 1$. Pode-se mostrar que quando $\varepsilon \rightarrow 0$ o ciclo limite da equação (4.6) é assintótico ao círculo de raio 2 centrado na origem.

Exemplo 1. Suponha que as funções F e g no sistema (4.11) sejam dadas por

$$F(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1} \quad \text{e} \quad g(x) = x.$$

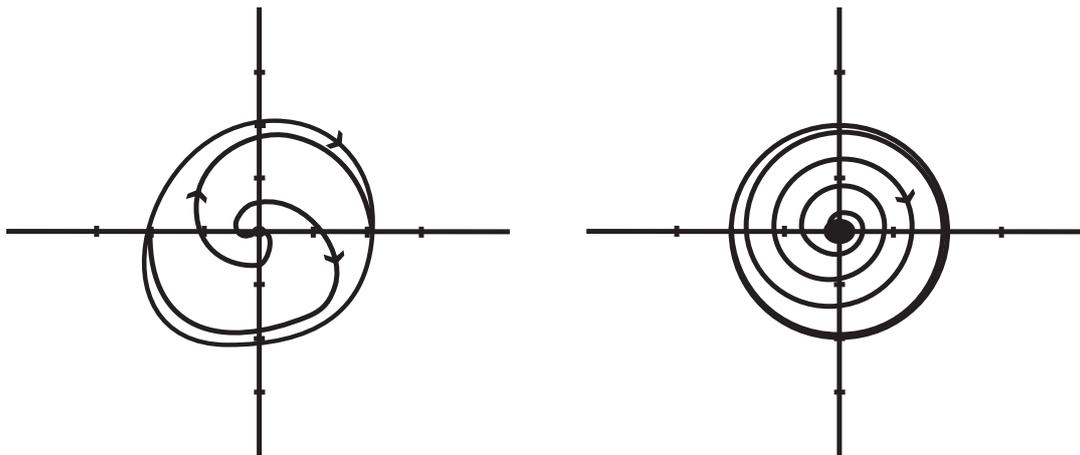


Figura 4.7: Ciclo limite da equação de van der Pol para $\varepsilon = 1$ e $\varepsilon = 0, 1$.

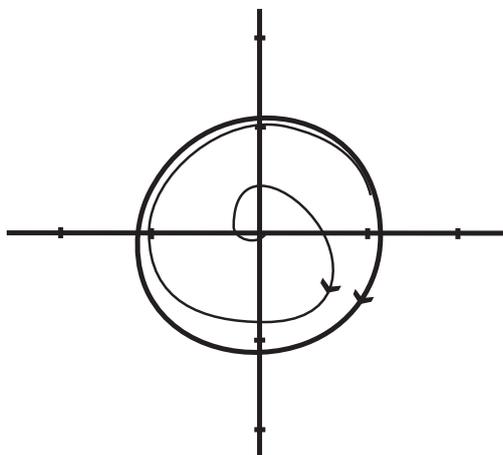


Figura 4.8: Ciclo limite para o sistema de Lienard do exemplo 1.

Então F e g satisfazem as hipóteses do Teorema de Lienard. Com efeito, claramente F e g são funções de classe C^1 definidas para todo real. Além disso, temos que

$$F(-x) = \frac{(-x)^3 - (-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x^3 + x}{x^2 + 1} = -F(x) \quad \text{e} \quad g(-x) = -x = -g(x),$$

ou seja, F e g são funções ímpares. Além do mais, $xg(x) = x^2 > 0$, para todo $x \neq 0$, $F(0) = 0$, $F'(0) = -1 < 0$, e $x = 1$ é o único zero positivo de F , e para $x \geq 1$, F é monótona e cresce para o infinito quando $x \rightarrow \infty$.

Portanto, segue que o sistema (4.11) com estas funções tem exatamente um ciclo limite que é estável. Este ciclo limite é mostrado na figura 4.8. \square

4.3.1 Alguns resultados recentes sobre ciclos limites de sistemas de Lienard

Nesta seção vamos apresentar alguns resultados de pesquisas recentes sobre ciclos limites de sistemas de Lienard.

Em 1958 o matemático chinês Zhang Zhifen provou o seguinte importante resultado complementando o Teorema de Lienard.

Teorema 4.3.3 (Zhang). *Sejam dados $a < 0 < b$. Suponhamos que no sistema (4.11) as funções F e g são de classe C^1 em (a, b) satisfazendo as seguintes condições:*

1. $xg(x) > 0$ para todo $x \neq 0$;
2. $G(x) \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow a$ se $a = -\infty$ e $G(x) \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow b$ se $b = \infty$;
3. $\frac{f(x)}{g(x)}$ é monótona crescente sobre $(a, 0) \cup (0, b)$ e não é constante em nenhuma vizinhança de $x = 0$. ■

Então, o sistema (4.11) terá no máximo um ciclo limite na região $a < x < b$. Além disso se existir tal ciclo ele será estável.

Exemplo 2. Perko recentemente utilizou este teorema para mostrar que para $\alpha \in (0, 1)$, o sistema quadrático

$$\begin{cases} \dot{x} = -y(1+x) + \alpha x + (\alpha+1)x^2 \\ \dot{y} = x(1+x) \end{cases} \quad (4.12)$$

tem exatamente um ciclo limite que é estável.

Note que, sobre a reta $x = -1$ o fluxo do sistema (4.12) é horizontal e aponta para a direita. Portanto, qualquer trajetória fechada do sistema (4.12) situa-se na região $x > -1$. Se definirmos uma nova variável independente τ por $d\tau = -(1+x)dt$ então o sistema

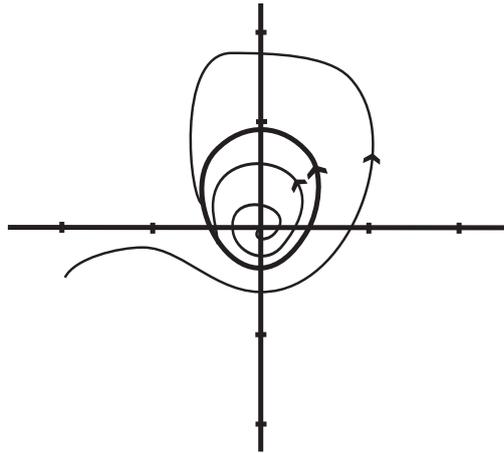


Figura 4.9: Ciclo limite para o sistema de Lienard do exemplo 2 para $\alpha = 0,02$.

(4.12) toma a forma do sistema de Lienard

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = y - \frac{\alpha x + (\alpha + 1)x^2}{1 + x} \\ \frac{dy}{d\tau} &= \frac{dy}{dt} \frac{dt}{d\tau} = -x. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Neste caso é possível verificar que as hipóteses do Teorema de Lienard não são satisfeitas (por exemplo, a função $F(x) = \frac{\alpha x + (\alpha + 1)x^2}{1 + x}$ não é ímpar). Porém as hipóteses do Teorema de Zhang são satisfeitas. Portanto, este sistema tem exatamente um ciclo limite estável. O ciclo limite para este sistema com $\alpha = 0,02$ pode ser visualizado na figura 4.9 \square

Em 1981, Zhang provou outro teorema interessante sobre o número de ciclos limites dos sistemas de Lienard (4.11).

Teorema 4.3.4 (Zhang). *Suponhamos que, $g(x) = x$, F de classe C^1 em \mathbb{R} , e que a função $f(x)$ tenha sempre exatamente dois zeros positivos $a_1 < a_2$ com $F(a_1) > 0$ e $F(a_2) < 0$, e ainda $f(x)$ é monótona crescente para $x > a_2$. Então, o sistema (4.11) terá no máximo dois ciclos limites.* \blacksquare

Exemplo 3. Considere o sistema de Lienard (4.11) com

$$g(x) = x \quad \text{e} \quad f(x) = F'(x) = 1.6x^4 - 4x^2 + 0.8.$$

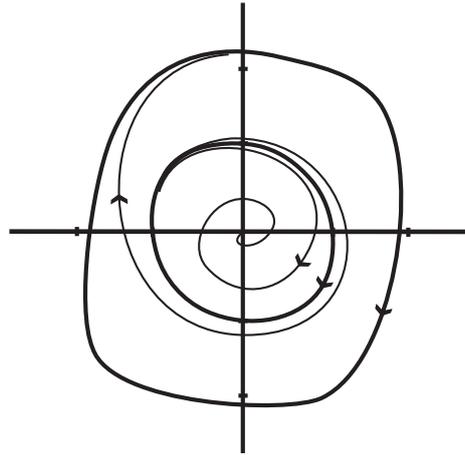


Figura 4.10: Os dois ciclos limites para o sistema de Lienard do exemplo 3.

Não é difícil mostrar que estas funções se encaixam nas hipóteses do Teorema de Zhang 4.3.4. Portanto segue que o sistema de Lienard (4.11) com $g(x) = x$ e $F(x) = 0.32x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 0.8x$ tem no máximo dois ciclos limites. De fato, este sistema tem exatamente dois ciclos limites que podem ser visualizado na figura 4.10. \square

É claro que, quanto mais específicas forem as funções $F(x)$ e $g(x)$ em (4.11), mais podemos saber sobre o número de ciclos limites que o sistema (4.11) tem. Por exemplo, se $g(x) = x$ e $F(x)$ é polinomial, temos o seguinte resultado.

Teorema 4.3.5 (Lins, de Melo e Pugh). *O sistema de Lienard (4.11) com $g(x) = x$ e $F(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, onde $a_1a_3 < 0$ tem exatamente um ciclo limite. Tal ciclo será estável se $a_1 < 0$ e instável se $a_1 > 0$.* \blacksquare

Observação. O matemático russo Rychkov mostrou que o sistema (4.11) com $g(x) = x$ e $F(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5$ tem no máximo dois ciclos limites.

Recentemente, estes mesmos autores do teorema 4.3.5 diante das várias evidências lançaram a seguinte conjectura.

Conjectura de Lins Neto, de Melo e Pugh: O número de ciclos limites do

sistema de Lienard (4.11) com $g(x) = x$ e F um polinômio de grau $2n + 1$, é no máximo n .

Note que, o teorema 4.3.5 diz um pouco mais que o caso particular $n = 1$ desta conjectura. Na literatura existente sobre o assunto encontra-se a prova desta conjectura para $n = 1$. Observamos que para $n \geq 2$ o resultado ainda encontra-se em aberto.

Porém, tal conjectura foi desfeita pelos autores Freddy Dumortier, Daniel Panazzolo e Robert Roussarie em um artigo publicado no ano de 2007. Estes autores deram um contra exemplo de um sistema no caso $n = 3$, e conseguiram encontrar quatro ciclos limites para tal sistema. Este artigo pode ser encontrado na referência [3].

Teorema 4.3.6 (Blows e Lloyd). *O sistema de Lienard (4.11) com $g(x) = x$ e $F(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2m+1}x^{2m+1}$, tem no máximo m ciclos limites numa vizinhança de $(0, 0)$ e existem coeficientes $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2m+1}$ com sinais alternados tal que o sistema (4.11) tem m ciclos limites em tal vizinhança. ■*

Teorema 4.3.7 (Perko). *Para $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, o sistema (4.11) com*

$$g(x) = x \quad e \quad F(x) = \varepsilon(a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2m+1}x^{2m+1})$$

tem no máximo m ciclos limites e, além disso, para $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, este sistema tem exatamente m ciclos limites nos quais são assintóticos aos círculos de raios r_j , para $j = 1, 2, \dots, m$, centrados na origem, quando $\varepsilon \rightarrow 0$ se, e somente se, a equação de grau m

$$\frac{a_1}{2} + \frac{3a_3}{8}\rho + \frac{5a_5}{16}\rho^2 + \frac{35a_7}{128}\rho^3 + \dots + \binom{2m+2}{m+1} \frac{a_{2m+1}}{2^{2m+2}}\rho^m = 0 \quad (4.14)$$

tem m raízes positivas $\rho = r_j^2$, $j = 1, 2, \dots, m$. ■

Exemplo 4. O Teorema 4.3.7 nos dá condições de construir sistemas polinomiais com a quantidade de ciclos limites que desejarmos. Por exemplo, suponha que queremos

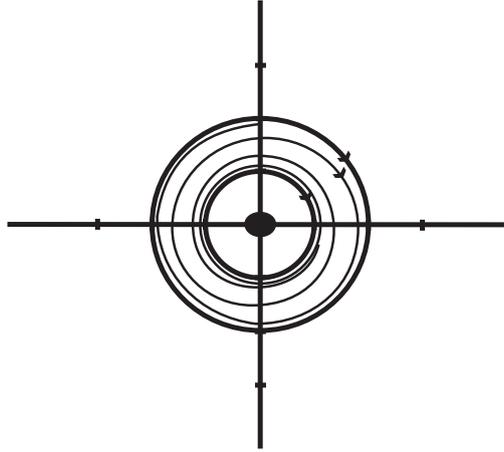


Figura 4.11: Os ciclos limites do sistema de Lienard do exemplo 4 para $\varepsilon = 0,01$.

encontrar um sistema polinomial na forma do Teorema 4.3.7 com exatamente dois ciclos limites assintóticos aos círculos de raio $r = 1$ e $r = 2$. Para fazer isso, vamos igualar o polinômio $(\rho - 1)(\rho - 4)$ com o polinômio dado na equação (4.14) para $m = 2$, e assim vamos determinar os coeficientes a_1 , a_3 e a_5 . Então a igualdade fica

$$\rho^2 - 5\rho + 4 = \frac{5a_5}{16}\rho^2 + \frac{3a_3}{8}\rho + \frac{a_1}{2}.$$

Isso implica que $a_5 = \frac{16}{5}$, $a_3 = \frac{-40}{3}$ e $a_1 = 8$. Para $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, o Teorema 4.3.7 nos dá que o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - \varepsilon\left(8x - \frac{40}{3}x^3 + \frac{16}{5}x^5\right) \\ \dot{y} &= -x \end{aligned}$$

tem exatamente dois ciclos limites assintóticos aos círculos de raio $r = 1$, $r = 2$. Estes dois ciclos limites para $\varepsilon = 0,01$ podem ser vistos na figura 4.11. \square

Exemplo 5. Vamos agora construir um sistema polinomial utilizando o teorema 4.3.7 com três ciclos limites os quais são assintóticos aos círculos de raio $r = 1$, $r = 2$ e $r = 3$. Para isso, novamente vamos igualar o polinômio $(\rho - 1)(\rho - 4)(\rho - 9)$ com o polinômio dado na equação (4.14) para $m = 3$, e assim vamos determinar os coeficientes a_1 , a_3 , a_5 e a_7 . Então a igualdade fica

$$\rho^3 - 14\rho^2 - 49\rho - 36 = \frac{35a_7}{128}\rho^3 + \frac{5a_5}{16}\rho^2 + \frac{3a_3}{8}\rho + \frac{a_1}{2}.$$

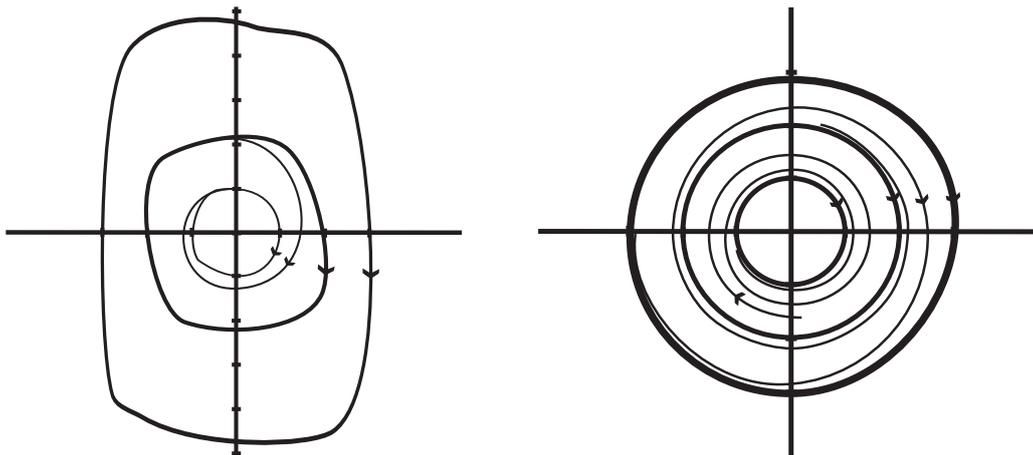


Figura 4.12: Os ciclos limites para o sistema de Lienard do exemplo 5 com $\varepsilon = 0,01$ e $\varepsilon = 0,001$.

Essa equação nos dá que $a_7 = \frac{128}{35}$, $a_5 = -\frac{224}{5}$, $a_3 = \frac{392}{3}$ e $a_1 = -72$.

Dessa forma, para $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, o teorema 4.3.7 nos diz que o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - \varepsilon\left(72x - \frac{392}{3}x^3 + \frac{224}{5}x^5 - \frac{128}{35}x^7\right) \\ \dot{y} &= -x\end{aligned}$$

tem exatamente três ciclos limites nos quais são assintóticos aos círculos de raio $r = 1$, $r = 2$ e $r = 3$. Os ciclos limites para este sistema para $\varepsilon = 0,01$ e $\varepsilon = 0,001$ são mostrados na figura 4.12. \square

4.4 O 16° Problema de Hilbert

Os Problemas de Hilbert são uma lista de 23 problemas propostos pelo matemático alemão David Hilbert no Congresso Internacional de Matemática de Paris em 1900. Nenhum dos problemas tinha tido solução até então, e vários deles acabaram se tornando muito influentes na matemática do século XX. Nessa conferência, ele publicou 10 dos problemas (1, 2, 6, 7, 8, 13, 16, 19, 21, e 22), e o resto da lista foi publicado mais tarde.

Seu 16° problema, ou pelo menos a segunda parte deste problema, pergunta sobre a determinação do número máximo H_n de ciclos limites de um sistema polinomial de grau

n do tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{i+j=0}^n a_{ij}x^i y^j \\ \dot{y} = \sum_{i+j=0}^n b_{ij}x^i y^j \end{cases} . \quad (4.15)$$

A seguir apresentamos como tal problema vem sendo tratado ao longo desses anos, e os avanços que dele tiveram.

- Sabemos que qualquer sistema linear em \mathbb{R}^2 não tem ciclo limite. Logo $H_1 = 0$;
- Já para sistemas não-lineares, por exemplo para um sistema quadrático ($n = 2$), o número de Hilbert ainda não foi bem determinado, sabe-se apenas que existe e é finito;
- Em 1962, o matemático russo N.V. Bautin provou que qualquer sistema quadrático tem no máximo 3 ciclos limites bifurcando da origem. Por algum tempo acreditou-se que $H_2 = 3$;
- Mas, em 1979, os matemáticos chineses S.L. Shi, L.S. Chen e M.S. Wang produziram exemplos de sistemas quadráticos com quatro ciclos limites. Portanto $H_2 \geq 4$;
- Perante todas as evidências acredita-se que $H_2 = 4$ e em 1984, Y.X. Chin afirmou ter provado este resultado. Porém, alguns erros foram apontados por Y.L. Cao;
- Com relação a H_3 , é conhecido que um sistema cúbico pode ter no máximo onze ciclos limites bifurcando da origem ;
- Em 1983, J.B. Li e outros produziram um exemplo de um sistema cúbico com onze ciclos limites. Tudo o que se pode dizer até agora é que $H_3 \geq 11$;
- Para sistemas polinomiais planares, o 16° Problema de Hilbert tem gerado muitas pesquisas matemáticas nos últimos anos.

Capítulo 5

A Equação $\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$ com

$$\varepsilon \rightarrow +\infty$$

5.1 Introdução

Neste capítulo vamos introduzir o estudo de sistemas do tipo *lento-rápido* que modelam sistemas onde ocorrem variações de oscilação.

Depois de Balthasar van der Pol ¹, que em 1920 introduziu sua famosa equação, este assunto tem sido objeto de grande interesse matemático. Lembremos que a equação de van der Pol, introduzida no capítulo 2, é dada por

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \tag{5.1}$$

onde ε é um parâmetro positivo. Para esta equação, um relaxamento de oscilação surge quando o parâmetro ε é grande. A fim de obter um quadro heurístico do que isso significa, vamos utilizar o procedimento introduzido por Lienard (1928). Mais especificamente vamos utilizar a mudança de coordenadas

$$y = \frac{\dot{x}}{\varepsilon} + F(x)$$

¹Balthasar van der Pol, nascido em 27 de janeiro de 1889, Utrecht, Holanda, foi graduado em 1916 na Universidade de Utrecht, e tinha principais tendências físicas. Defendeu sua tese de doutorado em 1920 nessa mesma universidade. Neste período e por muitos anos posteriores os trabalhos de matemáticos e físicos em universidades holandesas envolveram o estudo da mecânica celeste no qual freqüentemente estava contido alguma teoria de perturbação. Van der Pol morreu em 1959.

onde $F(x) = \int_0^x (x^2 - 1)dx = \frac{x^3}{3} - x$. Dessa forma, temos que

$$\dot{y} = \frac{\ddot{x}}{\varepsilon} + F'(x)\dot{x} = \frac{\ddot{x}}{\varepsilon} + (x^2 - 1)\dot{x} = -\frac{x}{\varepsilon}$$

com o que chegamos ao sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= \varepsilon [y - F(x)] \\ \dot{y} &= -\frac{x}{\varepsilon} \end{cases}. \quad (5.2)$$

As trajetórias do sistema (5.2) satisfazem a equação

$$[y - F(x)] \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\varepsilon^2}. \quad (5.3)$$

Quando o parâmetro ε é grande o lado direito da igualdade (5.3) é pequeno, o que nos leva a acreditar que, nestas novas coordenadas, as trajetórias podem ser aproximadas por partes das curvas $y = \text{constante}$ e $y = F(x)$. Alguns estudos mais adiante na direção do retrato de fase, nos produzirá o ciclo limite dado na figura 5.3.

Vamos definir agora, uma nova variável independente \hat{t} e também vamos renomear o parâmetro fazendo

$$t = \varepsilon \hat{t} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\varepsilon} = \mu^{\frac{1}{2}}.$$

Dessa forma, teremos a partir do sistema (5.2) que

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\hat{t}} &= \frac{dx}{dt} \varepsilon = \varepsilon^2 [y - F(x)] = \frac{1}{\mu} [y - F(x)] \\ \frac{dy}{d\hat{t}} &= \frac{dy}{dt} \varepsilon = -x \end{aligned}$$

e portanto, o sistema de Lienard equivalente a equação de van der Pol nessa nova variável independente, será dado por

$$\begin{cases} \mu \frac{dx}{d\hat{t}} &= y - F(x) \\ \frac{dy}{d\hat{t}} &= -x \end{cases}. \quad (5.4)$$

Sistemas de equações diferenciais dependendo de um parâmetro $\mu > 0$ como (5.4) acima geralmente são chamados de **sistemas lento-rápido** ou ainda de **problemas**

de perturbação singular. Tais problemas têm sido estudados por métodos analíticos, métodos numéricos e métodos assintóticos. Carrier e Lewis, em 1953, foram os primeiros a tratar com relaxamento de oscilação desse ponto de vista.

Em 1983, num texto intitulado de *Relaxation Oscillations including a standard chase on French ducks* (referência [6]), o autor W. Eckhaus chama atenção sobre os diferentes métodos com que este assunto foi e vem sendo estudado pelos diversos matemáticos da área. Ele destaca que seu interesse em relaxamento de oscilação surgiu da confrontação com um desenvolvimento periférico, constituído pela introdução e uso de Análise Não-Estândar no estudo de problemas de perturbação singular.

Nesta presente dissertação, vamos seguir o caminho estudado por W. Eckhaus em [6].

Análise Não-Estândar é uma invenção em Lógica Matemática devido a Abraham Robinson (1966), que consiste na introdução de números infinitamente pequenos nas análises. Robinson encarregou-se de ligar “Análise Não-Estândar” com conceitos de expansões assintóticas em um livro com Lightstone (1975), porém tal livro acabou por não ser muito influente entre os profissionais de análise assintótica. Recentemente um grupo de matemáticos franceses, centrado em Georg H. Reeb da Universidade de Strasbourg, partiram para o uso de Análise Não-Estândar em problemas aplicados. Isso resultou em um fluxo de publicações, culminando em uma monografia por Lutz e Goze (1981), onde uma lista extensiva de referências podem ser encontradas.

Este grupo foi responsável pela descoberta de um novo fenômeno que eles denominaram “Les Canard”. Posteriormente descreveremos e estudaremos com mais detalhes o que vem a ser tal fenômeno.

Profissionais de Análise Não-Estândar fortemente proclamam que os seus métodos são mais simples e, portanto, como sendo o enfoque mais tradicional. Para um analista Estândar isso é difícil de ser verificado, pois de fato ele acaba se deparando com muitas dificuldades na tentativa de checar os raciocínios com respeito a exatidão e consistência. Fica então como sendo um desafio para os analistas tradicionais, assim como o colocado por Lutz e Goze quando descreviam o problema-Canard. Eles afirmaram que: “...neste problema de perturbação singular com dois parâmetros é quase impossível usar os métodos

clássicos de expansões assintóticas...”.

W. Eckhaus (1983) (referência [6]), em seus estudos sobre o problema dos Canards observa que até então as ferramentas de análise assintótica não tinham sido exploradas em problemas de relaxamento de oscilação.

Neste texto iremos mostrar que uma análise simples e elementar é capaz de produzir uma rigorosa e dedutiva teoria, assim como a que foi feita por W. Eckhaus. Tentaremos fornecer um tratamento (estândar) independente dos problemas e vamos mostrar como várias dificuldades podem ser superadas, até certo ponto, por técnicas elementares.

5.2 Os problemas e os resultados

Consideremos um sistema cujas equações englobam a equação (5.4) obtida na seção anterior. Por ser mais usual na Teoria Geométrica das Perturbações Singulares vamos chamar o parâmetro novamente de ε .

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} &= y - F(x) \\ \dot{y} &= -(x + \alpha) \end{cases} \quad (5.5)$$

Agora ε é um parâmetro positivo pequeno e α é um parâmetro cujo papel será explicado futuramente. A função $F(x)$ pode ser qualquer função suficientemente diferenciável que tenha o gráfico semelhante ao que está desenhado na figura 5.1 em alguma parte do plano xy , ou seja, assumimos que a função F cumpre as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} F'(x) &> 0 \quad \text{para } x > 0; \\ F'(x) &< 0 \quad \text{para } -l < x < 0; \\ F'(x) &> 0 \quad \text{para } x < -l. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Observe que este é o caso da equação de van der Pol, onde temos $F(x) = \frac{x^3}{3} - x$, a menos da translação $x_1 = x - 1$, $y_1 = y + \frac{2}{3}$. Com essa translação, a função F terá a seguinte nova cara

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2.$$

Vamos considerar o caso em que perto de $x = 0$ se tem

$$F'(x) = xg(x), \quad g(0) > 0.$$

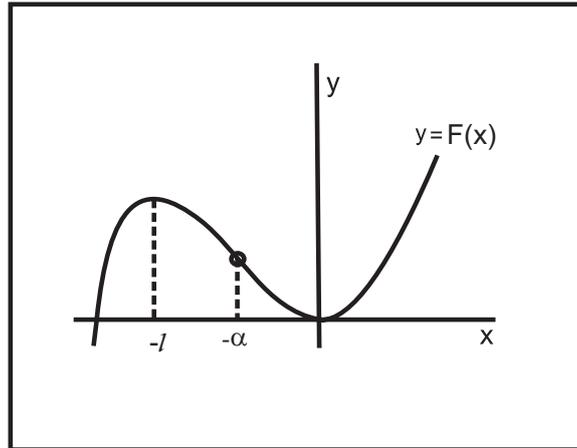


Figura 5.1: A curva $y = F(x)$, onde $\dot{x} = 0$ e o ponto singular $(-\alpha, F(-\alpha))$.

Analogamente perto de $x = -l$,

$$F'(x) = (x + l)h(x), \quad h(-l) < 0.$$

Temos que o ponto $(x, y) = (-\alpha, F(-\alpha))$ é a única singularidade do sistema (5.5). Para analisar esta singularidade, consideremos o linearizado do campo $X(x, y) = (\frac{1}{\varepsilon}(y - F(x)), -(x + \alpha))$ nesse ponto. Podemos associar tal campo linearizado com o sistema diferencial $Y' = AY$, onde

$$A = DX(-\alpha, F(-\alpha)) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\varepsilon}F'(-\alpha) & \frac{1}{\varepsilon} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de A são dados como raízes do polinômio de 2º grau

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 + \frac{F'(-\alpha)}{\varepsilon}\lambda + \frac{1}{\varepsilon}$$

do qual obtemos

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(-\frac{F'(-\alpha)}{\varepsilon} \pm \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{F'(-\alpha)^2 - 4\varepsilon} \right).$$

Pelas propriedades de F' temos que quando $0 < \alpha < l$ então $-l < -\alpha < 0$ e assim $-F'(-\alpha) > 0$, e quando $\alpha < 0$ ou $\alpha > l$ então $-\alpha > 0$ ou $-\alpha < -l$ e neste caso $-F'(-\alpha) < 0$. Como a parte do autovalor obtida do cálculo da raiz ou é imaginária ou tem módulo menor que $|\frac{F'(-\alpha)}{\varepsilon}|$ segue que o ponto singular $(-\alpha, F(-\alpha))$ é instável quando $0 < \alpha < l$ e estável quando $\alpha < 0$ ou $\alpha > l$.

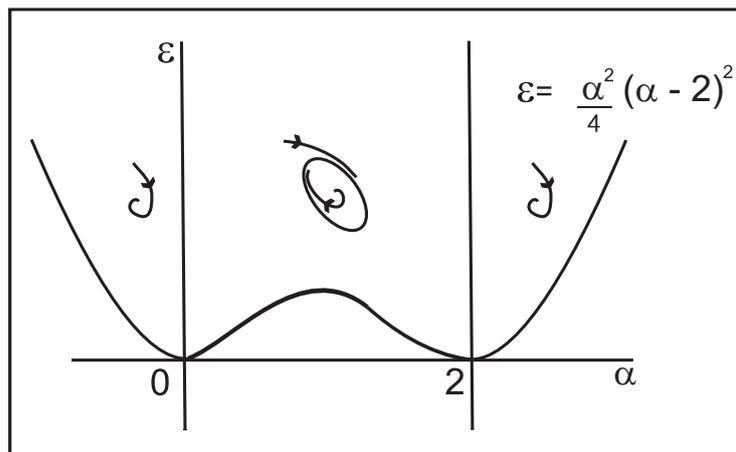


Figura 5.2: Diagrama de bifurcação para a equação de van der Pol.

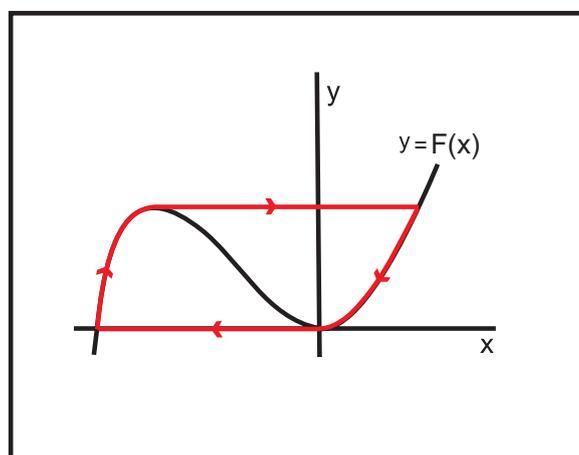


Figura 5.3: A figura aproximada de um ciclo limite de um sistema como (5.5).

Para a equação de van der Pol (ou seja, quando $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2$), temos o diagrama de bifurcação dado na figura 5.2.

Para a equação de van der Pol temos exatamente o que mostra a figura 5.2, quando o parâmetro $\alpha \in (0, 2)$ existe um único ciclo limite e, quando $\alpha < 0$ ou $\alpha > 2$ não teremos nenhum ciclo limite. A prova deste fato pode ser encontrada em [10].

Algo semelhante acontecerá para o sistema geral. Quando $\alpha \in (0, l)$, existirá exatamente um ciclo limite o qual, a menos de uma translação, pode ser visto na figura 5.3. Quando $\alpha < 0$ ou $\alpha > l$, não existirá nenhum ciclo limite (referência [6]).

Um grupo de matemáticos não-estândar formado por Benoit, Callot, Diener e Di-

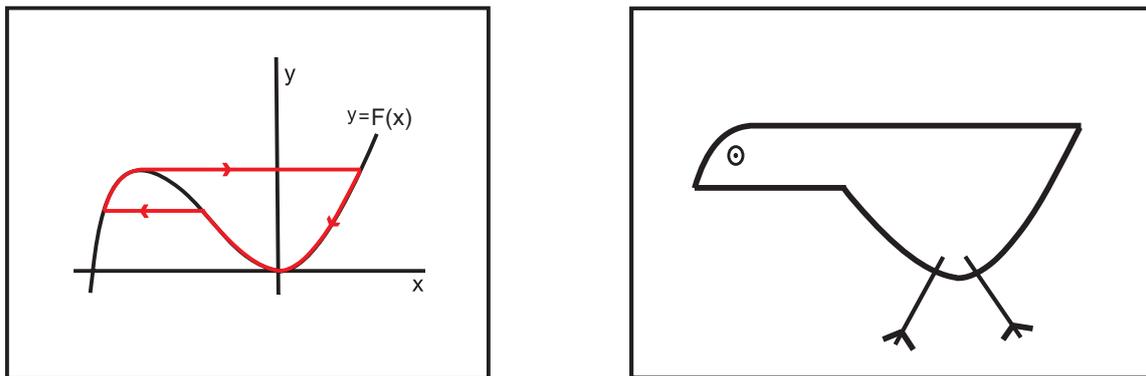


Figura 5.4: Um ciclo limite “Canard” e o “porquê” do nome.

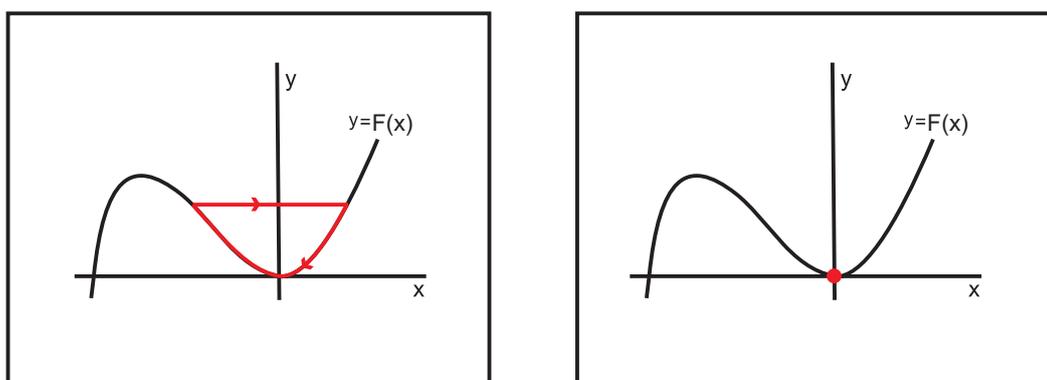


Figura 5.5: Pato sem cabeça.

ener (1973, 1980) estudou a seguinte questão: como tal ciclo limite desaparece quando o parâmetro α passa pelo valor zero, ou pelo valor l . No que segue vamos nos concentrar no caso em o parâmetro α passa por zero. O outro caso é inteiramente análogo.

Voltando a equação de van der Pol, foi descoberto por esse grupo de matemáticos que existe um valor $\alpha = \alpha_c(\varepsilon)$ tal que para α em uma pequena vizinhança de α_c o ciclo limite deforma sobre a curva dada na figura 5.4 à esquerda.

Se partirmos para um lado cômico do formato deste ciclo limite e acrescentarmos algumas linhas ao desenho à esquerda dado na figura 5.4 produziremos o desenho de um pato como o dado na figura 5.4 à direita.

Quando o parâmetro α diminui (ainda na vizinhança de α_c) a cabeça do pato vai se tornando pequena até que em certo momento ela desaparece, ficando um pato sem cabeça. O pato continua a reduzir quando α tende a zero e desaparece para $\alpha = 0$. Isso pode ser

visualizado na figura 5.5.

Por essa razão este fenômeno é chamado de *fenômeno Canard* que em francês significa *fenômeno Pato* pela aparência do ciclo limite.

Para o parâmetro ε pequeno, a variação de α no qual um fenômeno Canard é observado é extremamente pequena. É interessante pensar sobre os Canards da seguinte maneira: veremos posteriormente que, numa vizinhança de $y = F(x)$ para $x > 0$ (e $x < -l$) existirá uma variedade estável, e numa vizinhança de $y = F(x)$ para $-l < x < 0$ teremos uma variedade instável. Na situação Canard as trajetórias que se aproximam da variedade estável continuam ao longo da variedade instável. Esta é uma situação altamente não-usual.

Para terminar esta parte, vamos apresentar os resultados que obteremos nas próximas seções. Vamos considerar o parâmetro $\alpha \in (0, l)$, com $\alpha \neq o(1)$ e $\alpha - l \neq o(1)$, ou seja, que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha(\varepsilon) \neq 0 \text{ e } l.$$

Este é o caso de um relaxamento de oscilação clássica. Vamos desenvolver uma linha de raciocínio que permite estabelecer dedutivamente o quadro global das trajetórias. Neste caso, iremos obter o seguinte resultado.

Resultado: Qualquer trajetória começando na parte exterior da curva $ABCD$ na figura 5.6 alcança uma pequena vizinhança da curva $ABCD$ em tempo finito e permanece nessa vizinhança pra sempre. Tal vizinhança é uma faixa tubular cuja largura depende obviamente de ε . Em particular, a largura da faixa é $O(\varepsilon)$ na parte correspondente a (A, B) e (C, D) e $O(\varepsilon^{\frac{2}{3}})$ na parte correspondente a (B, C) e (D, A) . O movimento ao longo de (A, B) , (C, D) está em intervalos de tempo unitários, e o movimento ao longo de (B, C) , (D, A) está sobre uma escala de tempo de ordem ε .

Observação. Note que qualquer trajetória nas condições do resultado acima não pode subir nem descer ao longo do segmento DB na figura 5.6. Para ver isso, consideremos o sistema reduzido, ou seja, o sistema lento (5.5) com o parâmetro $\varepsilon = 0$. Dessa forma,

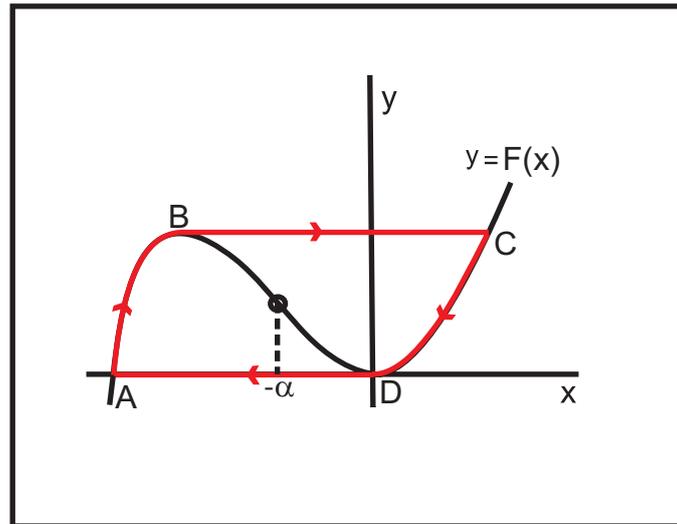


Figura 5.6: Ciclo limite com movimento rápido ao longo dos segmentos BC e DA e movimento lento ao longo dos arcos AB e CD.

ficamos com

$$\begin{cases} \dot{y} = F(x) \\ \dot{x} = -(x + \alpha) \end{cases} \quad (5.7)$$

O sistema (5.7) representa uma dinâmica em cima da curva $y = F(x)$. Isso nos dá a seguinte equação com impasse

$$F'(x)\dot{x} = -(x + \alpha).$$

Temos que, $x = -\alpha$, $x = 0$ e $x = -l$ são os pontos singulares e temos o seguinte comportamento

- quando $x < -\alpha$ então $x + \alpha < 0$ e assim $\dot{y} = -(x + \alpha) > 0$, ou seja, y cresce;
- quando $x > -\alpha$ então $x + \alpha > 0$ e assim $\dot{y} = -(x + \alpha) < 0$ e, dessa forma, y decresce.

O retrato de fase do sistema reduzido (5.7) pode ser visto na figura 5.7. Notemos na figura 5.7 a direção das flechas no segmento referente ao segmento DB na figura 5.6. Isso nos garante que qualquer trajetória do sistema (5.5) (quando $\alpha \in (0, l)$, com $\alpha \neq o(1)$ e $\alpha - l \neq o(1)$) não pode subir nem descer ao longo do segmento DB .

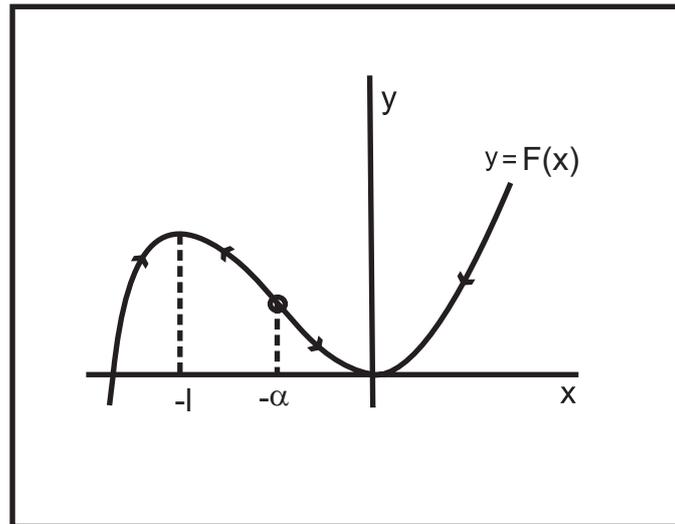


Figura 5.7: Retrato de fase do sistema (5.7).

Depois vamos considerar o caso em que $\alpha = o(1)$ (ou seja, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha(\varepsilon) = 0$). Parte das trajetórias seguem do mesmo raciocínio do que já tivermos feito. Estaremos particularmente interessados em trajetórias que continuam ao longo da variedade estável e instável. Estabeleceremos que uma configuração Canard de fato ocorre quando α está na vizinhança de $\alpha_c(\varepsilon)$ e daremos uma expansão assintótica para $\alpha_c(\varepsilon)$ e para as trajetórias que seguem ao longo das variedades estável e instável.

Mostraremos que existem dois principais tipos de Canards. Recordemos que foi explicitado antes que $F'(x) = xg(x)$. Se acontecer de $g'(0) > 0$ então $\alpha_c(\varepsilon) > 0$ e assim uma configuração Canard será obtida e o ponto singular é instável. Mais precisamente, um fenômeno Canard é caracterizado por

$$\alpha = \alpha_c(\varepsilon) + \sigma \exp \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (5.8)$$

Para $\sigma > 0$ temos um pato como no dado na figura 5.4 à esquerda, e a medida que k está crescendo a cabeça do pato vai encolhendo. De fato o valor de k determina o ponto no qual as trajetórias saem da variedade instável. Quando α passa por $\alpha_c(\varepsilon)$, isto é, quando $\sigma < 0$, vamos ter um pato sem cabeça, e novamente ela continua a reduzir quando k cresce.

O segundo tipo de Canards ocorre quando $g'(0) < 0$. Neste caso, $\alpha_c(\varepsilon) < 0$ e o ponto singular é estável. Essa é uma situação mais complicada no qual dentro do ciclo limite

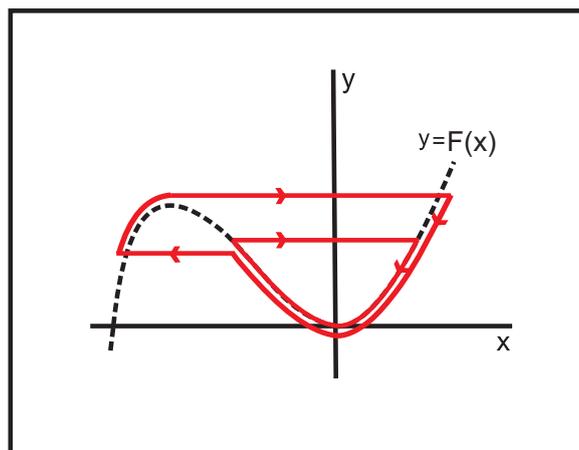


Figura 5.8: Um ciclo limite canard com outro ciclo limite instável dentro.

Canard estável existe um segundo ciclo limite instável. A configuração Canard fica ainda assim caracterizada pela equação (5.8). Para algum $\sigma > 0$ e $k > 0$, uma típica configuração descrita acima pode ser vista na figura 5.8.

Observemos que a equação de van der Pol está inserida no primeiro caso. Desta forma limitar-nos-emos a estudar somente o primeiro caso.

5.3 Alguns teoremas básicos de aproximação

Nesta seção vamos enunciar dois resultados que servirão como ferramentas para as nossas análises posteriores. O primeiro deles afirma essencialmente que em uma situação “regular”, sistemas “vizinhos” possuem soluções “vizinhas”.

Antes de apresentar estes dois resultados relembremos de alguns conceitos básicos de aproximação assintótica, inclusive que já vinham sendo mencionados nas seções anteriores. Começamos com a definição de uma *função de ordem*.

Definição 5.3.1. Uma função $\delta(\varepsilon)$ será chamada uma **função de ordem** se $\delta(\varepsilon)$ é contínua e positiva (ou negativa) no intervalo $(0, \varepsilon_0]$, onde ε_0 é um parâmetro positivo pequeno, e se $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon)$ existe. As vezes, denotamos a função de ordem $\delta(\varepsilon)$ com índices do tipo $\delta_i(\varepsilon)$, $i = 1, 2, \dots$.

Para comparar funções de ordem usamos os chamados símbolos de Landau.

Definição 5.3.2. *Temos:*

1. $\delta_1(\varepsilon) = O(\delta_2(\varepsilon))$ para $\varepsilon \rightarrow 0$ se existe uma constante k tal que $|\delta_1(\varepsilon)| \leq k|\delta_2(\varepsilon)|$ para $\varepsilon \rightarrow 0$;
2. $\delta_1(\varepsilon) = o(\delta_2(\varepsilon))$ para $\varepsilon \rightarrow 0$ se $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_1(\varepsilon)}{\delta_2(\varepsilon)} = 0$.

Exemplos.

$$\varepsilon^n = o(\varepsilon^m) \text{ para } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ se } n > m;$$

$$\varepsilon \sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = O(\varepsilon) \text{ para } \varepsilon \rightarrow 0;$$

$$\varepsilon^2 \log \varepsilon = o(\varepsilon^2 \log^2 \varepsilon) \text{ para } \varepsilon \rightarrow 0;$$

$$e^{-\frac{1}{\varepsilon}} = o(\varepsilon^n) \text{ para } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ e todo } n \in \mathbb{N}.$$

□

Note que se $\delta_1(\varepsilon) = o(\delta_2(\varepsilon))$ então isso implica que $\delta_1(\varepsilon) = O(\delta_2(\varepsilon))$. Por exemplo, $\varepsilon^2 = o(\varepsilon)$ e $\varepsilon^2 = O(\varepsilon)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Definição 5.3.3. *Temos:* $\delta_1(\varepsilon) = O_S(\delta_2(\varepsilon))$ para $\varepsilon \rightarrow 0$ se $\delta_1(\varepsilon) = O(\delta_2(\varepsilon))$ e $\delta_1(\varepsilon) \neq o(\delta_2(\varepsilon))$ para $\varepsilon \rightarrow 0$.

Exemplos.

$$\varepsilon \sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = O_S(\varepsilon);$$

$$\varepsilon \log \varepsilon = O_S(2\varepsilon \log \varepsilon + \varepsilon^3).$$

□

No que segue, omitiremos “para $\varepsilon \rightarrow 0$ ” já que estamos considerando o parâmetro ε pequeno. Estamos em condições agora de estimar a ordem de magnitude de funções $\phi(t, \varepsilon)$ definida em um intervalo I , $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Definição 5.3.4 (Ordem de magnitude de ϕ_ε em I). *Temos:*

1. $\phi_\varepsilon = O(\delta(\varepsilon))$ em I se existe uma constante k tal que $\|\phi\| = O(\delta(\varepsilon))$, onde $\delta(\varepsilon)$ é uma função de ordem sobre $(0, \varepsilon_0]$ e $\|\cdot\|$ uma norma para ϕ como uma função de t ;
2. $\phi_\varepsilon = o(\delta(\varepsilon))$ se $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|\phi_\varepsilon\|}{\delta(\varepsilon)} = 0$.
3. $\phi_\varepsilon = O_S(\delta(\varepsilon))$ em I se $\phi_\varepsilon = O(\delta(\varepsilon))$ e $\phi_\varepsilon \neq o(\delta(\varepsilon))$.

Definição 5.3.5. *Temos que, $\psi_\varepsilon(t)$ é uma aproximação assintótica de $\phi_\varepsilon(t)$ sobre um intervalo I se*

$$\phi_\varepsilon(t) - \psi_\varepsilon(t) = o(1), \quad \text{uniformemente para } t \in I.$$

Ou então, para intervalos ε -dependentes definimos:

Definição 5.3.6. *$\psi_\varepsilon(t)$ é uma aproximação assintótica de $\phi_\varepsilon(t)$ sobre a escala de tempo $[\delta(\varepsilon)]^{-1}$ se*

$$\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon = o(1), \quad \text{sobre escalas de tempo } [\delta(\varepsilon)]^{-1}.$$

Em geral, obtemos séries de aproximações assintóticas (ou expansões) sobre algum intervalo I . Essas são expressões da forma

$$\tilde{\phi}_\varepsilon(t) = \sum_{n=1}^m \delta_n(\varepsilon) \phi_{n_\varepsilon}(t)$$

no qual $\delta_n(\varepsilon)$ são funções de ordem com $\delta_{n+1} = o(\delta_n)$, $n = 1, \dots, m-1$ e para as funções $\phi_{n_\varepsilon}(t)$ temos que $\phi_{n_\varepsilon} = O_S(1)$ sobre I . Para uma dada função ϕ_ε sobre o intervalo I , a série assintótica $\tilde{\phi}_\varepsilon$ é chamada uma aproximação assintótica de ordem m de ϕ_ε sobre I se

$$\phi_\varepsilon(t) - \tilde{\phi}_\varepsilon(t) = o(\delta_m(\varepsilon)) \text{ sobre } I.$$

Exemplo. Considere

$$\begin{aligned} \phi_\varepsilon(t) &= \sin(t + \varepsilon t) \text{ sobre } I = [0, 2\pi], \\ \tilde{\phi}_\varepsilon(t) &= \sin(t) + \varepsilon t \cos(t) - \frac{1}{2} \varepsilon^2 t^2 \sin(t). \end{aligned}$$

As funções de ordem são $\delta_n(\varepsilon) = \varepsilon^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ e claramente

$$\phi_\varepsilon(t) - \tilde{\phi}_\varepsilon(t) = o(\varepsilon^2) \text{ sobre } I,$$

e assim $\tilde{\phi}_\varepsilon(t)$ é uma aproximação assintótica de terceira ordem de $\phi_\varepsilon(t)$ sobre I . \square

Consideramos agora uma função $x(\tau, \varepsilon)$, com ε um parâmetro pequeno e τ um *tempo rescalonado* que é solução da equação diferencial

$$\frac{dx}{d\tau} = F(x, \tau, \varepsilon), \quad \text{com } x(0, \varepsilon) = x_0.$$

Aqui a função $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz as seguintes condições:

1. $F(x, \tau, \varepsilon)$ é contínua e uniformemente limitada em G , onde $G = \{x : x \in \overline{D}\} \times \{\tau : 0 \leq \tau < A\} \times \{\varepsilon : 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$, e D é algum subconjunto aberto limitado do \mathbb{R}^n ;
2. $F(x, \tau, \varepsilon)$ é Lipschitziana com relação a variável espacial x em G , ou seja, existe uma constante positiva L tal que

$$\|F(x_1, \tau, \varepsilon) - F(x_2, \tau, \varepsilon)\| \leq L\|x_1 - x_2\|.$$

Seja $D_0 \subset D$ qualquer subconjunto compacto. Podemos agora formular o seguinte teorema:

Teorema 5.3.7. *Considere F_1, F_2 como acima e as funções $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ dadas por*

$$x^{(1)}(\tau, \varepsilon) = x_0^{(1)} + \int_0^\tau F_1[x^{(1)}(\tau', \varepsilon), \tau', \varepsilon] d\tau'$$

e

$$x^{(2)}(\tau, \varepsilon) = x_0^{(2)} + \int_0^\tau F_2[x^{(2)}(\tau', \varepsilon), \tau', \varepsilon] d\tau'$$

e suponhamos que

1. $x_0^{(1)}, x_0^{(2)} \in D_0$, com $|x_0^{(1)} - x_0^{(2)}| \leq \delta_0(\varepsilon)$, onde $\delta_0(\varepsilon) = o(1)$;
2. Para todo $x \in \overline{D}$ e $0 \leq \tau \leq A$, se tenha $|F_1(x, \tau, \varepsilon) - F_2(x, \tau, \varepsilon)| \leq \delta_f(\varepsilon)$, onde $\delta_f(\varepsilon) = o(1)$;

3. A solução $x^{(2)}(\tau, \varepsilon)$ existe para $0 \leq \tau \leq T < A$, e $x^{(2)}(\tau, \varepsilon) \in D_0$.

Então a solução $x^{(1)}(\tau, \varepsilon)$ existe para $0 \leq \tau \leq T$ e nesse intervalo

$$|x^{(1)}(\tau, \varepsilon) - x^{(2)}(\tau, \varepsilon)| = O(\delta_0(\varepsilon)) + O(\delta_f(\varepsilon)).$$

■

Este teorema é uma versão adaptada do bem conhecido teorema da “dependência contínua sobre os parâmetros”. O próximo resultado é um teorema que é conhecido em análise assintótica como um Teorema de Extensão.

Teorema 5.3.8. *Suponhamos que $x^{(2)}(\tau, \varepsilon)$ seja uma aproximação de $x^{(1)}(\tau, \varepsilon)$, satisfazendo*

$$x^{(1)}(\tau, \varepsilon) - x^{(2)}(\tau, \varepsilon) = o(1)$$

com a região de validade dada por $0 \leq \tau \leq T$, onde T pode ser tomado um número positivo arbitrário. Então existe uma função ordem $\tilde{\delta}(\varepsilon) = o(1)$ tal que $x^{(2)}(\tau, \varepsilon)$ é uma aproximação de $x^{(1)}(\tau, \varepsilon)$ para $0 \leq \tau \leq \frac{1}{\tilde{\delta}(\varepsilon)}$.

Analogamente, se $x^{(2)}(\tau, \varepsilon)$ é uma aproximação de $x^{(1)}(\tau, \varepsilon)$ para $0 < d \leq \tau \leq T$, onde d pode ser tomado qualquer número arbitrariamente pequeno, então existe uma função ordem $\hat{\delta}(\varepsilon) = o(1)$ tal que a aproximação vale para $\hat{\delta}(\varepsilon) \leq \tau \leq T$. ■

As provas destes dois teoremas podem ser encontradas em [5].

5.4 Relaxamento de oscilação clássica

Lembremos que estamos estudando o sistema

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} &= y - F(x) \\ \dot{y} &= -(x + \alpha) \end{cases} \quad (5.9)$$

com F satisfazendo as condições dadas em (5.6). Nesta seção consideramos o caso em que $0 < \alpha < l$, com $\alpha \neq o(1)$ e $\alpha - l \neq o(1)$. Estudaremos as trajetórias deste sistema com condições iniciais arbitrárias $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$.

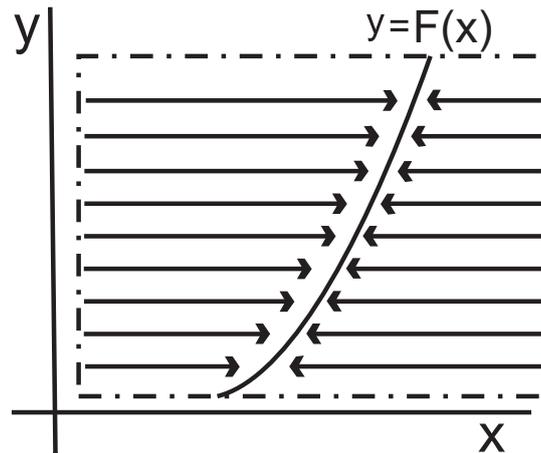


Figura 5.9: Parte do retrato de fase do sistema (5.9), com $\varepsilon = 0$, numa vizinhança de $y = F(x)$, onde $F'(x) > 0$.

5.4.1 O fluxo-rápido

Consideremos o par (x_0, y_0) tais que $y_0 - F(x_0) \neq 0$. Seja D_0 qualquer parte do plano xy no qual se tenha a condição $F'(x) > 0$ como indicado na figura 5.9.

Considerando uma nova variável independente $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$, temos que o sistema (5.9) toma a nova forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = y - F(x) \\ \frac{dy}{d\tau} = -\varepsilon(x + \alpha) \end{cases} \quad (5.10)$$

O fluxo-rápido é dado pelo sistema (5.10) quando o parâmetro $\varepsilon = 0$, ou seja, quando temos o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = y - F(x) \\ \frac{dy}{d\tau} = 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

Consideremos os campos

$$F_1(x, \tau, \varepsilon) = (y - F(x), -\varepsilon(x + \alpha)) \quad \text{e} \quad F_2(x, \tau, \varepsilon) = (y - F(x), 0)$$

associados aos sistemas (5.10) e (5.11), respectivamente. Sejam

$$x^{(1)} = (x(\tau), y(\tau)) \quad \text{e} \quad x^{(2)} = (\hat{x}(\tau), \hat{y}(\tau))$$

trajetórias dos campos F_1 e F_2 , respectivamente, ambos com condição inicial (x_0, y_0) . Então para a solução $x^{(2)}$ temos que $\hat{y}(\tau) = y_0$ e $\hat{x}(\tau)$ satisfaz que

$$\frac{d\hat{x}}{d\tau} = y_0 - F(\hat{x}); \quad \hat{x}(0) = x_0. \quad (5.12)$$

Assim usando o teorema 5.3.7 obtemos que

$$|(x(\tau), y(\tau)) - (\hat{x}(\tau), \hat{y}(\tau))| = |(x(\tau) - \hat{x}(\tau), y(\tau) - \hat{y}(\tau))| = O(\varepsilon) + O(\varepsilon),$$

e isso implica que

$$y(\tau) - y_0 = O(\varepsilon) \quad \text{e} \quad x(\tau) - \hat{x}(\tau) = O(\varepsilon) \quad (5.13)$$

onde $0 \leq \tau \leq T$.

É fácil estabelecer (e mais detalhes serão dados posteriormente) que a solução $\hat{x}(\tau)$ existe para todo τ e, portanto, em (5.13), na região de validade, podemos tomar para T um número positivo arbitrário. Portanto, pelo Teorema de Extensão 5.3.8 temos que existe uma função de ordem $\delta(\varepsilon) = o(1)$ tal que

$$y(\tau) - y_0 = o(1) \quad \text{e} \quad x(\tau) - \hat{x}(\tau) = o(1) \quad (5.14)$$

onde $0 \leq \tau \leq \tau^*(\varepsilon) = \frac{T}{\delta(\varepsilon)}$.

Olhemos melhor para a função $\hat{x}(\tau)$ solução da equação (5.12). Por uma análise elementar encontramos que o ponto crítico $\hat{x} = \hat{x}_0$ solução de $y_0 - F(\hat{x}) = 0$ é assintoticamente estável. Além disso, para valores grandes de τ independentes de ε , temos que

$$\hat{x}(\tau) = \hat{x}_0 + O(e^{-F'(\hat{x}_0)\tau}). \quad (5.15)$$

Mas como $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-F'(\hat{x}_0)\frac{T}{\delta(\varepsilon)}} = 0$ segue que

$$\hat{x}(\tau^*(\varepsilon)) = \hat{x}\left(\frac{T}{\delta(\varepsilon)}\right) = \hat{x}_0 + o(1),$$

e conseqüentemente

$$x(\tau^*(\varepsilon)) - \hat{x}_0 = o(1). \quad (5.16)$$

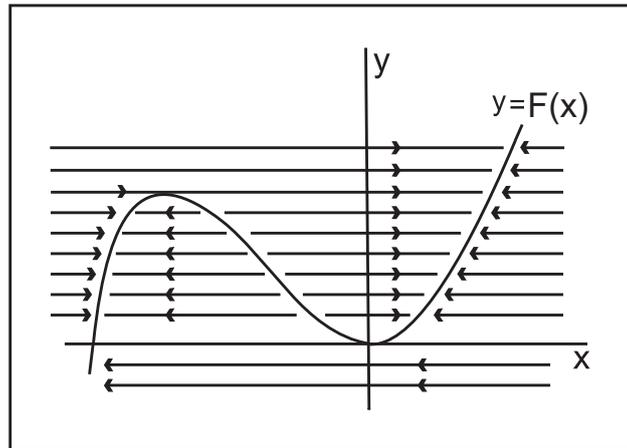


Figura 5.10: O fluxo-rápido.

Assim, as trajetórias penetram em uma $o(1)$ vizinhança da curva $y = F(x)$. Aplicando estes resultados globalmente obtemos o desenho do fluxo dado na figura 5.10. Os dois ramos de $y = F(x)$ sobre os quais $F'(x) > 0$ estão atraindo todas as trajetórias começando em pontos satisfazendo $y_0 - F(x_0) \neq 0$.

Notemos que na unidade de tempo original o fluxo é rápido, toda ação ocorrendo sobre intervalos de tempo

$$0 \leq t \leq \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}T.$$

Olhando para a equação (5.15) vemos que a equação (5.16) valerá para qualquer função de ordem $\delta(\varepsilon) = o(1)$ e, portanto, para intervalos de tempo estendido tal que $\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)} = o(1)$, as trajetórias já atingem a $o(1)$ vizinhança de $y = F(x)$.

5.4.2 As variedades estável e instável

Nesta seção ainda estamos considerando qualquer subdomínio D_0 no qual se tenha $F'(x) > 0$, como o esboçado na figura 5.9. Vamos estudar mais estritamente o comportamento das trajetórias na $o(1)$ vizinhança de $y = F(x)$. Para isso, introduzimos a transformação

$$y = F(x) + \sigma(\varepsilon)\phi(t),$$

onde $\sigma(\varepsilon)$ é qualquer função de ordem tal que $\varepsilon \prec \sigma(\varepsilon) \prec 1$, isto é, $\sigma(\varepsilon) = o(1)$ e $\frac{\varepsilon}{\sigma(\varepsilon)} = o(1)$, ou seja, satisfazendo que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma(\varepsilon) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\sigma(\varepsilon)} = 0.$$

Dessa forma, obtemos do sistema (5.9) que

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d\phi}{dt} &= \frac{\varepsilon}{\sigma(\varepsilon)} \left(\frac{dy}{dt} - F'(x) \frac{dx}{dt} \right) = \frac{\varepsilon}{\sigma(\varepsilon)} \left[-(x + \alpha) - F'(x) \left(\frac{y - F(x)}{\varepsilon} \right) \right] = \\ &= -\frac{\varepsilon}{\sigma(\varepsilon)} (x + \alpha) - F'(x) \phi. \end{aligned}$$

Assim, do sistema (5.9) obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{d\phi}{dt} = -F'(x)\phi - \frac{\varepsilon}{\sigma}(x + \alpha) \\ \varepsilon \frac{dx}{dt} = \sigma\phi \end{cases} \quad (5.17)$$

e se considerarmos como nova variável independente a variável $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$ o sistema (5.17) toma a nova forma

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{d\tau} = -F'(x)\phi - \frac{\varepsilon}{\sigma}(x + \alpha) \\ \frac{dx}{d\tau} = \sigma\phi \end{cases} \quad (5.18)$$

Para o parâmetro $\varepsilon = 0$ no sistema (5.18) temos o fluxo-rápido dado pelo seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{d\tau} = -F'(x)\phi \\ \frac{dx}{d\tau} = 0 \end{cases} \quad (5.19)$$

Note que, quando $\varepsilon = 0$ também temos pela continuidade da função de ordem σ que $\sigma(\varepsilon) = 0$.

Se $(\hat{\phi}(\tau), \hat{x}(\tau))$ é uma solução do sistema (5.19) com condição inicial $(\hat{\phi}(0), \hat{x}(0)) = (\phi_0, x_0)$, então encontraremos que $\hat{x}(\tau) = x_0$ e $\hat{\phi}(\tau)$ satisfaz que

$$\frac{d\hat{\phi}}{d\tau} = -F'(x_0)\hat{\phi}, \quad \hat{\phi}(0) = \phi_0. \quad (5.20)$$

Resolvendo a equação diferencial (5.20) obtemos que

$$\hat{\phi}(\tau) = \phi_0 e^{-F'(x_0)\tau}.$$

Pelo teorema 5.3.7 as soluções $(\phi(\tau), x(\tau))$ do sistema (5.18), podem ser aproximados com um erro $o(1)$ pelas soluções do sistema (5.19) encontradas acima. Essas tais soluções $(\hat{\phi}(\tau), \hat{x}(\tau))$ existem para todo τ , e a aproximação é portanto válida em $0 \leq \tau \leq T$, para todo $T > 0$. Dessa forma, podemos utilizar o teorema de extensão 5.3.8 e concluir que a aproximação é válida para $0 \leq \tau \leq \tau^*(\varepsilon)$, onde $\tau^*(\varepsilon) = \frac{T}{\delta(\varepsilon)}$, com $\delta(\varepsilon)$ alguma função de ordem tal que $\delta(\varepsilon) = o(1)$.

Porém, observe que

$$\hat{\phi}(\tau^*(\varepsilon)) = \hat{\phi}\left(\frac{T}{\delta(\varepsilon)}\right) = \phi_0 e^{-F'(x_0)\frac{T}{\delta(\varepsilon)}}.$$

Como $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon) = 0$ (pois $\delta(\varepsilon) = o(1)$) segue que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{T}{\delta(\varepsilon)} = +\infty$. Assim $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-F'(x_0)\frac{T}{\delta(\varepsilon)}} = 0$ (pois $F'(x_0) > 0$). Logo, temos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{\phi}(\tau^*(\varepsilon)) = 0,$$

e portanto, podemos concluir que vale a seguinte igualdade

$$\hat{\phi}(\tau^*(\varepsilon)) = o(1)$$

e conseqüentemente

$$\phi(\tau^*(\varepsilon)) = o(1).$$

Dessa forma, as trajetórias começando em alguma vizinhança $\sigma(\varepsilon)$ satisfazendo que $\sigma(\varepsilon) = o(1)$ e $\frac{\varepsilon}{\sigma(\varepsilon)} = o(1)$ entrarão numa vizinhança ainda menor de $y = F(x)$. Isso fortemente sugere que a parte interessante do fluxo ocupa lugar na vizinhança definida por $\sigma(\varepsilon) = \varepsilon$. As trajetórias não escapam do subdomínio D_0 antes delas alcançarem tal vizinhança.

Assim, consideramos no sistema (5.18), $\sigma(\varepsilon) = \varepsilon$, isto é, consideramos o sistema

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{d\tau} = -F'(x)\phi - (x + \alpha) \\ \frac{dx}{d\tau} = \varepsilon\phi \end{cases} \quad (5.21)$$

Para o parâmetro $\varepsilon = 0$ no sistema (5.21) temos o fluxo-rápido dado pelo sistema

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{d\tau} = -F'(x)\phi - (x + \alpha) \\ \frac{dx}{d\tau} = 0 \end{cases} \quad (5.22)$$

Vamos repetir agora os mesmos estudos feitos acima agora para o sistema (5.21).

Se $(\hat{\phi}(\tau), \hat{x}(\tau))$ é uma solução do sistema (5.22) com condição inicial $(\hat{\phi}(0), \hat{x}(0)) = (\phi_0, x_0)$, então $\hat{x}(\tau) = x_0$ e $\hat{\phi}(\tau)$ satisfaz que

$$\frac{d\hat{\phi}}{d\tau} = -F'(x_0)\hat{\phi} - (x_0 + \alpha), \quad \hat{\phi}(0) = \phi_0. \quad (5.23)$$

Resolvendo a equação diferencial (5.23) obtemos que

$$\hat{\phi}(\tau) = -\frac{x_0 + \alpha}{F'(x_0)} + \left(\phi_0 + \frac{x_0 + \alpha}{F'(x_0)} \right) e^{-F'(x_0)\tau}.$$

Agora se considerarmos $(\phi(\tau), x(\tau))$ uma solução do sistema (5.21), podemos usar o teorema de aproximação 5.3.7 e encontrar que

$$x(\tau) - x_0 = O(\varepsilon) \quad \text{e} \quad \phi(\tau) - \hat{\phi}(\tau) = O(\varepsilon), \quad \forall 0 \leq \tau \leq T.$$

As soluções $(\hat{\phi}(\tau), \hat{x}(\tau))$ encontradas acima existem para todo τ , e dessa forma a aproximação é válida em $0 \leq \tau \leq T$, para todo $T > 0$. Assim, pelo teorema de extensão 5.3.8 a aproximação é válida para $0 \leq \tau \leq \tau^*(\varepsilon)$, onde $\tau^*(\varepsilon) = \frac{T}{\delta(\varepsilon)}$, com $\delta(\varepsilon)$ alguma função de ordem tal que $\delta(\varepsilon) = o(1)$.

Da mesma forma como já fizemos em outros cálculos anteriormente, temos que

$$\hat{\phi}(\tau^*(\varepsilon)) = \phi_0(x_0) + o(1),$$

onde $\phi_0(x_0) = -\frac{x_0 + \alpha}{F'(x_0)}$ e, conseqüentemente,

$$\phi(\tau^*(\varepsilon)) = \phi_0(x_0) + o(1).$$

Temos assim encontrado que todas as trajetórias começando em D_0 são atraídas em intervalos de tempo $t = o(1)$ para a curva definida por

$$y = F(x) + \varepsilon[\phi_0(x) + o(1)] \quad (5.24)$$

onde $\phi_0(x) = -\frac{x + \alpha}{F'(x)}$.

A equação (5.24) dá os primeiros dois termos da expansão assintótica para a variedade estável. O fluxo na curva (5.24) deve satisfazer a equação

$$\frac{dx}{dt} = \phi_0(x) + o(1). \quad (5.25)$$

Podemos construir facilmente os termos mais elevados da expansão. Retornando para o sistema (5.21) e introduzindo

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon\phi_1$$

iremos obter que

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon\phi = \varepsilon(\phi_0 + \varepsilon\phi_1)$$

e

$$\varepsilon \frac{d\phi_1}{d\tau} = \frac{d\phi}{d\tau} - \frac{d\phi_0}{d\tau} = -F'(x)\phi - (x + \alpha) - \frac{d\phi_0}{d\tau} = -F'(x)(\phi_0 + \varepsilon\phi_1) - (x + \alpha) - \frac{d\phi_0}{d\tau}.$$

Mas

$$\frac{d\phi_0}{d\tau} = \frac{d\phi_0}{dx} \frac{dx}{d\tau} = \frac{d\phi_0}{dx} \cdot \varepsilon\phi = \varepsilon \frac{d\phi_0}{dx} (\phi_0 + \varepsilon\phi_1) = \varepsilon\phi_0 \frac{d\phi_0}{dx} + \varepsilon^2\phi_1 \frac{d\phi_0}{dx}$$

e

$$\begin{aligned} -F'(x)(\phi_0 + \varepsilon\phi_1) - (x + \alpha) &= -F'(x)\phi_0 - \varepsilon F'(x)\phi_1 - (x + \alpha) = \\ &= -F'(x) \left(-\frac{x + \alpha}{F'(x)} \right) - \varepsilon F'(x)\phi_1 - (x + \alpha) = -\varepsilon F'(x)\phi_1. \end{aligned}$$

Assim, chegamos ao sistema

$$\begin{cases} \frac{d\phi_1}{d\tau} = -F'(x)\phi_1 - \varepsilon\phi_1 \frac{d\phi_0}{dx} - \phi_0 \frac{d\phi_0}{dx} \\ \frac{dx}{d\tau} = \varepsilon(\phi_0 + \varepsilon\phi_1) \end{cases}. \quad (5.26)$$

Se voltarmos para a variável independente original $t = \varepsilon\tau$ teremos o sistema

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{d\phi_1}{dt} = -F'(x)\phi_1 - \varepsilon \frac{d\phi_0}{dx} \phi_1 - \phi_0 \frac{d\phi_0}{dx} \\ \frac{dx}{dt} = \phi_0 + \varepsilon\phi_1 \end{cases}. \quad (5.27)$$

Fazendo $\varepsilon = 0$ no sistema (5.26) obtemos o fluxo-rápido dado pelo seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{d\phi_1}{d\tau} = -F'(x)\phi_1 - \phi_0 \frac{d\phi_0}{dx} \\ \frac{dx}{d\tau} = 0 \end{cases}. \quad (5.28)$$

Vamos proceder da mesma forma como já vínhamos fazendo. Assim, consideramos $(\hat{\phi}_1(\tau), \hat{x}(\tau))$ uma solução do sistema (5.28) com condição inicial $(\hat{\phi}_1(0), \hat{x}(0)) = (\phi_1^0, x_0)$. Então $\hat{x}(\tau) = x_0$ e $\hat{\phi}_1(\tau)$ satisfaz que

$$\frac{d\hat{\phi}_1}{d\tau} = -F'(x_0)\hat{\phi}_1 - \phi_0(x_0) \frac{d\phi_0}{dx}(x_0), \quad \hat{\phi}_1(0) = \phi_1^0. \quad (5.29)$$

Resolvendo a equação diferencial (5.29) obtemos que

$$\hat{\phi}_1(\tau) = \phi_1(x_0) + [\phi_1^0 - \phi_1(x_0)]e^{-F'(x)\tau},$$

onde $\phi_1(x_0) = -\frac{1}{F'(x_0)}\phi_0(x_0)\frac{d\phi_0}{dx}(x_0)$.

Agora se considerarmos $(\phi_1(\tau), x(\tau))$ uma solução do sistema (5.26), podemos usar o teorema de aproximação 5.3.7 e encontrar que

$$x(\tau) - x_0 = O(\varepsilon) \quad \text{e} \quad \phi_1(\tau) - \hat{\phi}_1(\tau) = O(\varepsilon), \quad \forall 0 \leq \tau \leq T.$$

As soluções $(\hat{\phi}_1(\tau), \hat{x}(\tau))$ encontradas acima existem para todo τ , e a aproximação é portanto válida em $0 \leq \tau \leq T$, para todo $T > 0$. Assim, pelo teorema de extensão 5.3.8 a aproximação é válida para $0 \leq \tau \leq \tau^*(\varepsilon)$, onde $\tau^*(\varepsilon) = \frac{T}{\delta(\varepsilon)}$, com $\delta(\varepsilon)$ alguma função de ordem tal que $\delta(\varepsilon) = o(1)$.

Fazendo os cálculos encontramos que

$$\hat{\phi}_1(\tau^*(\varepsilon)) = \phi_1(x_0) + o(1),$$

e, conseqüentemente,

$$\phi_1(\tau^*(\varepsilon)) = \phi_1(x_0) + o(1).$$

Encontramos assim que todas as trajetórias começando em D_0 são atraídas em intervalos de tempo de ordem unitária para a curva definida por

$$y = F(x) + \varepsilon\phi_0(x) + \varepsilon^2[\phi_1(x) + o(1)] \tag{5.30}$$

onde $\phi_0(x) = -\frac{x + \alpha}{F'(x)}$ e $\phi_1(x) = -\frac{1}{F'(x)}\phi_0(x)\frac{d\phi_0}{dx}(x)$.

A equação (5.30) nos dá a expansão assintótica para a variedade estável com os primeiros três termos.

Podemos continuar nesta linha de raciocínio e introduzir no sistema (5.26)

$$\phi_1 = \phi_1(x) + \varepsilon\phi_2.$$

Com os mesmos raciocínios de antes podemos continuar com a análise de ϕ_2 , e assim por diante. E, dessa forma, chegaremos na seguinte expressão da expansão assintótica para a variedade estável

$$y = F(x) + \varepsilon\phi_0(x) + \varepsilon^2\phi_1(x) + \dots$$

Resumindo, encontramos variedades estável nas vizinhanças dos dois ramos de $y = F(x)$ sobre os quais $F'(x) > 0$, e analisamos o fluxo ao longo dessas variedades. Notemos que uma análise inteiramente similar pode ser feita para a vizinhança do ramo de $y = F(x)$ sobre o qual $F'(x) < 0$. Basta simplesmente inverter a direção do tempo e tomar D_0 tal que o ponto singular é excluído e, dessa forma, vamos obter a expansão assintótica da variedade instável.

5.4.3 Saindo da variedade estável

Retornamos agora para o quadro global do retrato de fase. Para fixar as idéias seguimos as trajetórias que percorrem a variedade estável para $x > 0$.

Depois de intervalos de tempo de ordem unitária (ver equação (5.25)) o fluxo entra em uma vizinhança de $x = 0$. A primeira questão é: até que distância podemos prolongar os resultados da variedade estável? Para responder esta questão repetimos as análises feitas na seção anterior, olhando agora para pequenas vizinhanças de $x = 0$. Para isso, consideramos ainda a transformação

$$\phi(t) = \frac{y - F(x)}{\sigma(\varepsilon)}.$$

Porém, escrevemos agora

$$F'(x) = xg(x), \quad \text{com } g(x) > 0,$$

e também escrevemos

$$x = \delta(\varepsilon)\xi, \quad \text{com } \xi \geq d > 0$$

onde $\delta(\varepsilon) = o(1)$ é uma função de ordem e d é qualquer número independente de ε . Por razões que se tornarão claras futuramente consideraremos a função de ordem $\delta(\varepsilon)$ tal que

$$\frac{\varepsilon}{\delta^3(\varepsilon)} = o(1).$$

Finalmente introduzimos, para qualquer tal função δ , a mudança de tempo

$$\tau = \frac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon}t,$$

e assim, obteremos a partir do sistema (5.17) que

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\tau} &= \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon} \left(-F'(x)\phi - \frac{\varepsilon}{\sigma}(x + \alpha) \right) \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)} = -\frac{xg(x)\phi}{\delta(\varepsilon)} - \frac{\varepsilon}{\sigma\delta}(x + \alpha) = \\ &= -\xi g(\delta\xi)\phi - \frac{\varepsilon}{\sigma\delta}(\alpha + \delta\xi) \end{aligned}$$

e também

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{x}{\delta(\varepsilon)} \right) = \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \frac{\sigma\phi}{\varepsilon} \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)} = \frac{\sigma\phi}{\delta(\varepsilon)^2}$$

e, dessa forma, chegamos ao sistema

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{d\tau} = -\xi g(\delta\xi)\phi - \frac{\varepsilon}{\sigma\delta}(\alpha + \delta\xi) \\ \frac{d\xi}{d\tau} = \frac{\sigma}{\delta^2}\phi \end{cases} . \quad (5.31)$$

Se considerarmos no sistema (5.31) a hipótese de que

$$\sigma = \delta^2 \bar{\sigma}(\varepsilon),$$

com $\bar{\sigma}(\varepsilon) = o(1)$ satisfazendo a condição $\frac{\varepsilon}{\delta^3 \bar{\sigma}} = o(1)$ teremos que as funções de ordem δ e σ no sistema (5.31) satisfazem as mesmas propriedades que a função de ordem σ no sistema (5.17). Isso nos permitirá utilizar argumentos inteiramente análogos ao da seção anterior e encontrar que na escala de tempo $\tau = \frac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon}t$, as trajetórias começando em alguma vizinhança $\sigma(\varepsilon)$, onde

$$\sigma = \delta^2 \bar{\sigma}(\varepsilon),$$

e $\bar{\sigma}(\varepsilon)$ satisfaz que

$$\bar{\sigma}(\varepsilon) = o(1) \quad \text{e} \quad \frac{\varepsilon}{\delta^3 \bar{\sigma}} = o(1)$$

vão se contrair para uma determinada vizinhança de $y = F(x)$. Isso fortemente sugere que a continuação das trajetórias que chegam ao longo da variedade estável percorrem uma $\frac{\varepsilon}{\delta}$ vizinhança de $y = F(x)$.

Consideremos então agora esta vizinhança, ou seja, vamos tomar agora que

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}.$$

Dessa forma, o fluxo ao longo da variedade estável estendida satisfaz as equações

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{d\tau} = -\xi g(\delta\xi)\phi - (\alpha + \delta\xi) \\ \frac{d\xi}{d\tau} = \frac{\varepsilon}{\delta^3}\phi \end{cases}. \quad (5.32)$$

Voltamos agora nossa atenção para a seguinte vizinhança

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon^{\frac{1}{3}}} \quad (\delta(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{3}}),$$

onde as considerações da variedade estável deixam de valer. Retornando para as equações básicas (5.9), a expansão em série de Taylor de F em torno de zero nos dá que

$$F(x) = \frac{1}{2}g(0)x^2 + O(x^3) = x^2\left[\frac{1}{2}g(0) + O(x)\right]$$

e introduzindo

$$y = \varepsilon^{\frac{2}{3}}\eta$$

iremos obter que

$$\varepsilon^{\frac{2}{3}}\frac{d\eta}{dt} = \frac{dy}{dt} = -(x + \alpha) = -(\alpha + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\xi)$$

e

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\frac{2}{3}}\frac{d\xi}{dt} &= \frac{\varepsilon^{\frac{2}{3}}}{\varepsilon^{\frac{1}{3}}}\frac{dx}{dt} = \varepsilon^{\frac{1}{3}}\frac{(y - F(x))}{\varepsilon} = \varepsilon^{-\frac{2}{3}}y - \varepsilon^{-\frac{2}{3}}F(x) = \eta - \varepsilon^{-\frac{2}{3}}x^2\left[\frac{1}{2}g(0) + O(x)\right] = \\ &= \eta - \xi^2\left[\frac{1}{2}g(0) + O(\varepsilon^{\frac{1}{3}}\xi)\right] \end{aligned}$$

e, assim, chegamos ao sistema

$$\begin{cases} \varepsilon^{\frac{2}{3}}\frac{d\eta}{dt} = -(\alpha + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\xi) \\ \varepsilon^{\frac{2}{3}}\frac{d\xi}{dt} = \eta - \xi^2\left[\frac{1}{2}g(0) + O(\varepsilon^{\frac{1}{3}}\xi)\right] \end{cases}. \quad (5.33)$$

Ambas equações do sistema (5.33) possuem uma escala de tempo comum. Assim se considerarmos $\tau = \varepsilon^{-\frac{2}{3}}t$ o sistema (5.33) se transforma em

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{d\tau} = -(\alpha + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\xi) \\ \frac{d\xi}{d\tau} = \eta - \xi^2[\frac{1}{2}g(0) + O(\varepsilon^{\frac{1}{3}}\xi)] \end{cases}. \quad (5.34)$$

Podemos estudar o comportamento do sistema (5.33) escalonando o tempo para $\tau = \varepsilon^{-\frac{2}{3}}t$, ou então olhar diretamente para a equação das trajetórias que é definida por

$$\frac{d\xi}{d\eta} = -\frac{\eta - \xi^2[\frac{1}{2}g(0) + O(\varepsilon^{\frac{1}{3}}\xi)]}{\alpha + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\xi}. \quad (5.35)$$

Em se tratando em obter a continuação das trajetórias que surgem ao longo da variedade estável, o estudo direto das trajetórias é mais conveniente. Considere a equação que aproxima a equação (5.35), ou seja, a equação (5.35) com o parâmetro $\varepsilon = 0$

$$\alpha \frac{d\hat{\xi}}{d\eta} = -\eta + \frac{1}{2}\hat{\xi}^2g(0).$$

Por uma transformação simples podemos obter a equação de Riccati e soluções em termos de funções de Airy. Uma escolha adequada da constante de integração nos permite definir uma única solução $\hat{\xi}_0(\eta)$, no qual para valores grandes de η , se comporta como dado abaixo

$$\hat{\xi}_0(\eta) = \sqrt{\frac{\eta}{\frac{1}{2}g(0)}}[1 + O(\frac{1}{\eta})].$$

Para analisar esta solução, primeiro vamos olhar para valores positivos de η . Temos que, a função $\hat{\xi}_0(\eta)$ é limitada sobre qualquer intervalo limitado. Aplicamos assim o teorema de aproximação 5.3.7 e concluímos que para qualquer função $\xi(\eta)$ solução de (5.35) com

$$\xi(0) - \hat{\xi}_0(0) = O(\varepsilon^{\frac{1}{3}})$$

temos que

$$\xi(\eta) - \hat{\xi}_0(\eta) = O(\varepsilon^{\frac{1}{3}}) \quad \text{para } \eta \leq A,$$

onde A pode ser tomado qualquer número positivo independente de ε . Podemos assim, aplicar o teorema de extensão 5.3.8 e concluir que existe alguma função de ordem $\delta^*(\varepsilon) = o(1)$ tal que

$$\xi(\eta) - \hat{\xi}_0(\eta) = o(1) \quad \text{para } \eta \leq \frac{A}{\delta^*(\varepsilon)}.$$

Já pode-se dizer agora que as soluções alcançaram a região da variedade estável estendida. Além disso, é fácil verificar que o gráfico da função $\hat{\xi}_0(\eta)$ no domínio estendido, coincide com a curva que define a primeira aproximação da variedade estável, ou seja, a curva $y = F(x)$.

Olhamos agora para valores $\eta < 0$. Para η negativo, a função $\hat{\xi}_0$ explode em algum valor finito η_c , e comporta-se em uma vizinhança como $(\eta - \eta_c)^{-1}$, $\eta_c < 0$. O valor numérico de η_c depende de $g(0)$ e α . Aplicando o teorema de aproximação 5.3.7 concluímos que

$$\xi(\eta) - \hat{\xi}_0(\eta) = O(\varepsilon^{\frac{1}{3}}) \quad \text{para} \quad \eta_c + d \leq \eta \leq 0,$$

onde d pode ser tomado qualquer número positivo arbitrariamente pequeno. Finalmente, pelo teorema de extensão 5.3.8, existe alguma função de ordem $\delta^*(\varepsilon) = o(1)$ tal que

$$\xi(\eta) - \hat{\xi}_0(\eta) = o(1) \quad \text{para} \quad \eta_c + \delta^*(\varepsilon) \leq \eta \leq 0. \quad (5.36)$$

Fica assim totalmente explorado a aplicabilidade de $\hat{\xi}_0(\eta)$ como uma aproximação.

Vamos tomar agora algum ponto no domínio estendido (5.36) como um novo ponto de partida da investigação, isto é, um ponto

$$(x_0, y_0) = \left(\varepsilon^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\delta^*} \xi^0, \varepsilon^{\frac{2}{3}} \eta^0 \right).$$

Temos que, $\eta^0 < 0$, e como $\frac{d\hat{\xi}}{d\eta} > 0$, segue que também devemos ter $\xi^0 < 0$.

Em um primeiro exercício podemos rescalonar de acordo com as condições iniciais, isto é,

$$x = \varepsilon^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\delta^*} \xi \quad y = \varepsilon^{\frac{2}{3}} \eta$$

e começar ainda as análises das equações básicas (5.9). Não é difícil se convencer que em termos das variáveis ξ e η o fluxo pode ser aproximado com uma precisão $\delta^*(\varepsilon)$ por

$$\hat{\eta}(\tau^*) = \eta^0 \quad \text{e} \quad \hat{\xi}(\tau^*) = \frac{\xi^0}{\frac{g(0)}{2} \xi^0 \tau^* + 1}, \quad (5.37)$$

onde $\tau^* = \frac{t}{\varepsilon^{\frac{2}{3}}}$. Claramente, em algum tempo finito, digamos τ_1^* , a aproximação $\hat{\xi}(\tau^*)$ explode. Portanto, devemos parar em algum $\tau^* - \tau_1^* = o(1)$, rescalonar novamente e começar de novo. Mas isso somente reproduzirá as equações (5.37) com $\delta^*(\varepsilon)$ ainda menor. O processo pode ser repetido desde que $\varepsilon^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\delta^*} = o(1)$.

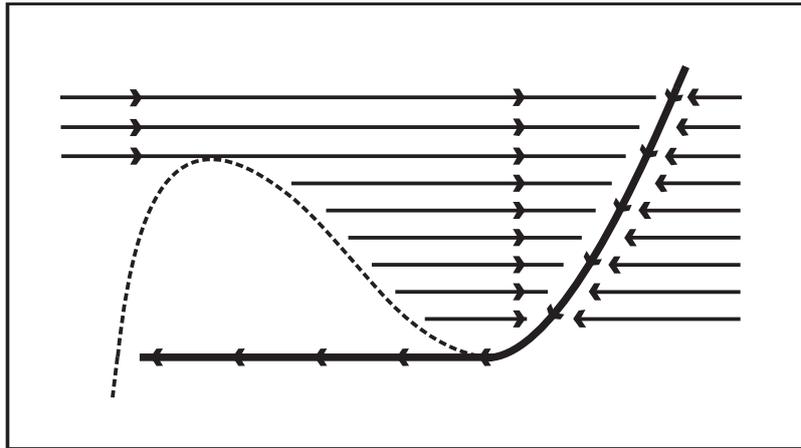


Figura 5.11: Chegada e afastamento da variedade estável.

Assim concluímos que as trajetórias deixam toda $o(1)$ vizinhanças de $x = 0$, no qual o fluxo é constantemente acelerado.

A conclusão final é que após intervalos de tempo $t_1 = O(\varepsilon^{\frac{1}{3}})$ o fluxo alcança o fluxo-rápido e as trajetórias seguem de acordo com a subseção 5.4.1 em direção ao segundo ramo de $y = F(x)$ no qual $F'(x) > 0$, como indicado na figura 5.11.

5.4.4 Conclusões

Observe a figura 5.12. Podemos resumir nossos resultados como segue: Começamos com condições iniciais arbitrárias $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$ tais que $y_0 - F(x_0) \neq 0$. Estudamos na subseção 5.4.1 o fluxo-rápido e os resultados lá obtidos conduziram as trajetórias para um dos dois ramos de $y = F(x)$ no qual $F'(x) > 0$. Para fixar as idéias consideramos o ramo que está situado para $x > 0$. Na subseção 5.4.2 observamos a aproximação das trajetórias para a variedade estável (localizada em uma $O(\varepsilon)$ vizinhança de $y = F(x)$) e analisamos este fluxo ao longo desta variedade. Na subseção 5.4.3 vimos que os resultados para a variedade estável podem ser estendidos para uma certa $o(1)$ vizinhança de $x = 0$. Saindo da variedade estável as trajetórias permanecem em uma $O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$ vizinhança de uma curva bem definida, no qual conduz as trajetórias para o semi-plano $x < 0$. Aí então o fluxo rapidamente acelera e alcança ainda o fluxo-rápido com $y = O(\varepsilon^{\frac{2}{3}})$. Ao longo do segmento DA os resultados da subseção 5.4.1 podem ser aplicados. Ao longo do arco AB

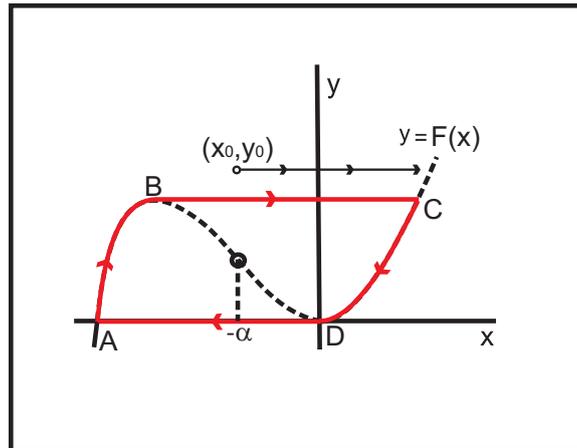


Figura 5.12: O ciclo limite de um relaxamento de oscilações clássico.

aplicamos os resultados da subseção 5.4.2. Na vizinhança do ponto B temos os resultados da subseção 5.4.3, e finalmente, sobre o segmento BC podemos aplicar novamente a subseção 5.4.1.

A existência de uma solução periódica (o ciclo limite) em uma $o(1)$ vizinhança de $ABCD$ é uma questão quase que trivial. Isso segue por exemplo como uma consequência direta do teorema de Poincaré–Bendixson.

Finalmente observamos que as análises e os resultados desta seção podem ser facilmente estendidos para um sistema mais geral como o dado abaixo

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dx}{dt} = y - F(x) \\ \frac{dy}{dt} = -H(x) \end{cases} . \quad (5.38)$$

Apenas condições técnicas simples sobre a função $H(x)$ são necessárias, a principal delas sendo que sobre o intervalo de x que é de interesse na figura 5.12 a equação $H(x) = 0$ terá uma única raiz $-\alpha$ localizado como indicado na figura 5.12.

A equação diferencial de segunda ordem correspondente ao sistema (5.38) é

$$\varepsilon \frac{d^2x}{dt^2} + F'(x) \frac{dx}{dt} + H(x) = 0.$$

5.5 O Fenômeno Canard

Nesta seção estudaremos o sistema

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dx}{dt} = y - F(x) \\ \frac{dy}{dt} = -x - \alpha(\varepsilon) \end{cases} \quad (5.39)$$

agora com α satisfazendo que $\alpha(\varepsilon) = o(1)$. Isso significa que o ponto singular $(-\alpha, F(-\alpha))$ está próximo da origem.

Grande parte das trajetórias seguem o mesmo raciocínio que fizemos na seção anterior. Estamos agora particularmente interessados em trajetórias que seguem CD e então uma parte de DB na figura 5.12, isto é, elas seguem primeiro na variedade estável e então uma parte da variedade instável. Tais trajetórias (se existirem) serão chamadas de *trajetórias-canard* pois elas constituem uma parte importante do fenômeno Canard. Esta situação das trajetórias-canard podem ser vista na figura 5.4 à esquerda.

Na procura por trajetórias que continuam ao longo de uma possível vizinhança de $y = F(x)$ começamos com a transformação

$$y = F(x) + \varepsilon\phi$$

e então ficamos com o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \phi \\ \varepsilon \frac{d\phi}{dt} = -F'(x)\phi - x - \alpha \end{cases} \quad (5.40)$$

Continuaremos escrevendo

$$F'(x) = xg(x).$$

Além disso, iremos um passo além na transformação ϕ , considerando

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon\phi_1, \quad \text{onde} \quad \phi_0(x) = -\frac{x + \alpha}{F'(x)}.$$

Recordando que $\alpha = o(1)$, vamos obter que

$$\phi = -\frac{1}{g(x)} + \varepsilon\phi_1.$$

Dessa forma, o sistema (5.40) torna-se

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{g(x)} + \varepsilon\phi_1 \\ \varepsilon\frac{d\phi_1}{dt} = -xg\phi_1 - \varepsilon\frac{g'}{g^2}\phi_1 - \frac{\alpha}{\varepsilon} + \frac{g'}{g^3} \end{cases}. \quad (5.41)$$

O sistema (5.41) será o principal objeto do nosso estudo.

5.5.1 O caso degenerado

Primeiro vamos estudar o caso em que

$$g'(x) = 0, \text{ ou seja, } g(x) = g_0 > 0.$$

Como $F'(x) = xg(x)$, isso significa que a curva $y = F(x) = \frac{g_0}{2}x^2$ é uma parábola estrita pelo menos na parte do plano xy que estamos considerando. Este caso será de interesse, pois nos ajudará a aprender sobre a natureza do fenômeno e desenvolver os métodos de análise.

No caso degenerado o sistema (5.41) torna-se

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{g_0} + \varepsilon\phi_1 \\ \varepsilon\frac{d\phi_1}{dt} = -xg_0\phi_1 - \frac{\alpha}{\varepsilon} \end{cases}. \quad (5.42)$$

As trajetórias do sistema (5.42) obedecem a seguinte equação

$$\varepsilon\left(-\frac{1}{g_0} + \varepsilon\phi_1\right)\frac{d\phi_1}{dx} = -xg_0\phi_1 - \frac{\alpha}{\varepsilon}. \quad (5.43)$$

Observemos que para $\alpha = 0$, $\phi_1(x) = 0$ é uma solução da equação (5.43).

Lembremos que a curva

$$y = F(x) + \varepsilon\phi_0(x), \quad \text{onde } \phi_0(x) = -\frac{x + \alpha}{F'(x)}$$

é a expressão com os dois primeiros termos da expansão assintótica para a variedade estável. No caso que estamos, para $\alpha = 0$, esta curva torna-se

$$y = F(x) - \frac{\varepsilon}{g_0}.$$

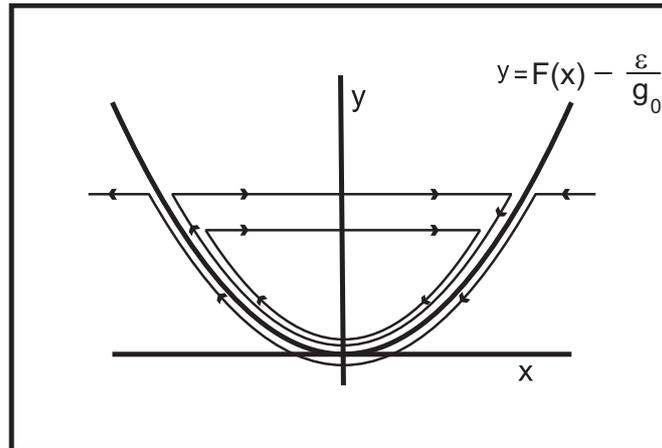


Figura 5.13: Retrato de fase do sistema (5.42) para $\alpha = 0$.

Esta curva está bem definida para todo x e é a união das variedades estável e instável.

Para $\alpha = 0$ podemos obter o retrato de fase completo através da solução implícita da equação (5.43) que é dada por

$$\phi_1(x) = \phi_1^0 \exp\left\{\frac{x^2 - x_0^2}{2\varepsilon} g_0^2 + \varepsilon g_0 [\phi_1(x) - \phi_1^0]\right\}.$$

O retrato de fase do sistema (5.42) para $\alpha = 0$ pode ser visto na figura 5.13.

Nosso principal objetivo nesta subseção é estudar perturbações do retrato de fase do sistema (5.42) para $\alpha \neq 0$. O próximo resultado nos dá as condições para a existência de soluções $\phi_1(x)$, para $x \in [x_1, x_0]$, com $x_0 > 0$ e $x_1 < 0$, que são limitadas para $\varepsilon \downarrow 0$.

Proposição 5.5.1. *As soluções $\phi_1(x)$ da equação (5.43) são limitadas sobre um intervalo $[x_1, x_0]$ se, e somente se, as soluções $\hat{\phi}_1(x)$ da equação linearizada são limitadas. ■*

A prova com todos os detalhes desta proposição podem ser encontradas em [6], páginas 475, 476 e 477.

Observação. A limitação de ϕ_1 implica na proximidade da componente y das trajetórias do sistema (5.39) com a curva $y = F(x)$ quando $\varepsilon \downarrow 0$.

Podemos estabelecer, por “variação de constantes”, a seguinte representação para

$\phi_1(x)$ e $\hat{\phi}_1(x)$

$$\phi_1(x) = \hat{\phi}_1(x) + \varepsilon e^{\frac{x^2 g_0^2}{2\varepsilon}} g_0 \int_{x_0}^x e^{-\frac{x'^2 g_0^2}{2\varepsilon}} \phi_1 \frac{d\phi_1}{dx'} dx',$$

onde

$$\hat{\phi}_1(x) = \phi(x_0) e^{\frac{1}{2\varepsilon}(x^2 - x_0^2)g_0^2} + \frac{\alpha}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} g_0 e^{\frac{1}{2\varepsilon}x^2 g_0^2} \int_{x_0}^x e^{-\frac{x'^2 g_0^2}{2\varepsilon}} dx'.$$

Consideremos que $x_0 > 0$ e $x < 0$. Por uma expansão assintótica elementar obtemos que

$$\hat{\phi}_1(x) = \phi(x_0) e^{\frac{1}{2\varepsilon}(x^2 - x_0^2)g_0^2} + \frac{\alpha}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{1}{2\varepsilon}x^2 g_0^2} [-\sqrt{2\pi} + O(e^{-\frac{1}{2\varepsilon}x^2 g_0^2}) + O(e^{-\frac{1}{2\varepsilon}x_0^2 g_0^2})]. \quad (5.44)$$

A fim de ter o segundo termo da equação (5.44) limitado, devemos tomar

$$\alpha = \sigma \varepsilon^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2\varepsilon}k^2 g_0^2}, \quad (5.45)$$

onde σ e k são constantes numéricas. Dessa forma, a equação (5.44) torna-se

$$\hat{\phi}_1(x) = \phi(x_0) e^{\frac{1}{2\varepsilon}(x^2 - x_0^2)g_0^2} + \sigma e^{\frac{1}{2\varepsilon}(x^2 - k^2)g_0^2} [-\sqrt{2\pi} + O(e^{-\frac{1}{2\varepsilon}x^2 g_0^2}) + O(e^{-\frac{1}{2\varepsilon}x_0^2 g_0^2})]. \quad (5.46)$$

Note que na equação (5.45), σ é quem determina o sinal de α . Quando $\sigma > 0$ o ponto singular $(-\alpha, F(-\alpha))$ é instável. Com o valor de k crescendo, isso faz com que α tenda para zero. Quando $\sigma < 0$ e k é um número grande o ponto singular é estável, mas próximo de zero.

Note que em (5.46) o primeiro termo da soma é dominante quando $x_0^2 < k^2$ (pois neste caso $x^2 - x_0^2 > x^2 - k^2$) e o segundo termo da soma é dominante quando $x_0^2 > k^2$ (pois neste caso $x^2 - x_0^2 < x^2 - k^2$). Isso leva para o retrato de fase dado na figura 5.14.

Todas as trajetórias que atingem a variedade estável em um ponto $x_0 > k$ para $x > 0$, continuam ao longo da variedade instável e saltam para fora dela em $x = -k$. As trajetórias permanecem em uma $O(\varepsilon^2)$ vizinhança da variedade, e saltam para fora para à esquerda para $\sigma > 0$, por causa que o termo dominante em $\hat{\phi}_1(x)$ é então negativo.

As trajetórias que atingem a variedade estável em um ponto $x_0 < k$ são governadas pelo primeiro termo de $\hat{\phi}_1(x)$ e o retrato do fluxo permanece como na figura 5.13.

Todas as trajetórias parecem agora terem sido incluídas e ainda existem trajetórias que pulam para fora da variedade instável para $x < -k$, como na figura 5.14. A pergunta

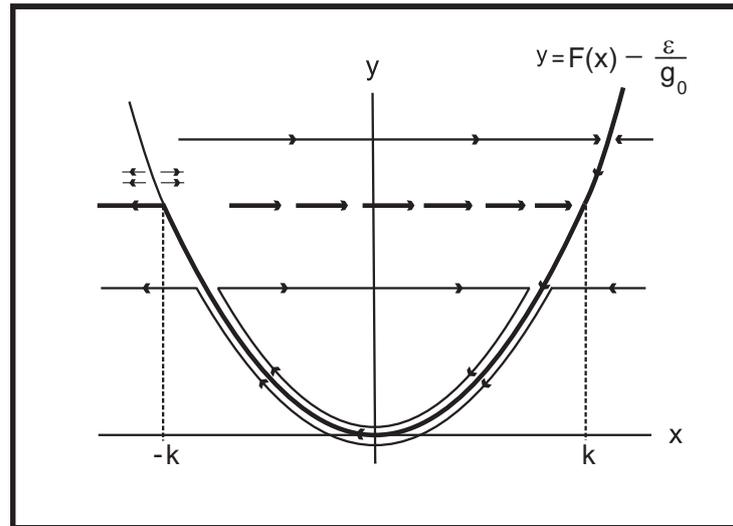


Figura 5.14: Retrato de fase do sistema (5.42) com $\sigma > 0$.

agora é: de onde elas se aproximam? Notemos que em (5.46) ambos os termos da soma são da mesma ordem de magnitude se $x_0^2 = k^2$, assim há uma possibilidade de contra-balanceamento. De fato, pela mesma técnica que temos usado até agora, podemos analisar na direção inversa de x as trajetórias começando perto da variedade instável para $x_0 < -k$. Todas estas trajetórias se aproximam da “sombra” da trajetória-canard, o qual atinge a variedade estável em $x_0 = k$ como ilustrado na figura 5.14.

Notemos que quando k cresce, o que faz o ponto singular tender para zero, cresce a distância sobre o qual as trajetórias movem ao longo da variedade instável.

Finalmente consideramos o caso $\sigma < 0$. A verificação dos detalhes deste caso serão deixadas para o leitor. O retrato de fase para $\sigma < 0$ pode ser visto na figura 5.15.

5.5.2 O caso geral: análises

Recordamos algumas colocações do que estamos analisando. Temos introduzido que

$$y = F(x) - \frac{\varepsilon}{g(x)} + \varepsilon^2 \phi_1$$

$$F'(x) = xg(x).$$

Vamos considerar um intervalo de x tal que $g(x) > 0$. As trajetórias do sistema (5.41) obedecem a seguinte equação

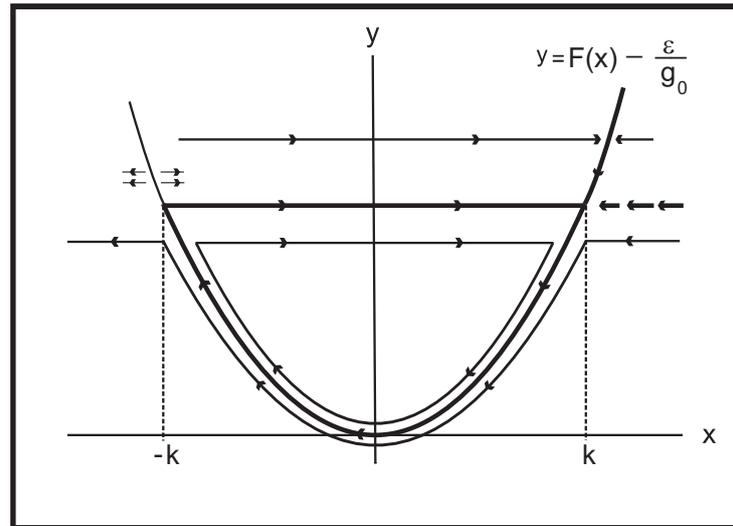


Figura 5.15: Retrato de fase do sistema (5.42) com $\sigma < 0$.

$$\varepsilon \left[-\frac{d}{dx} \left(\frac{\phi_1}{g} \right) + \varepsilon \phi_1 \frac{d\phi_1}{dx} \right] = -xg\phi_1 - \frac{\alpha}{\varepsilon} + \frac{g'}{g^3}. \quad (5.47)$$

Primeiro vamos dar formalmente a expansão assintótica para as trajetórias-canard e mencionaremos a expressão do valor especial $\alpha = \alpha_c(\varepsilon)$ na vizinhança do qual elas ocorrem. Na construção formal removemos em cada passo do processo de expansão, o termo do lado direito da equação (5.48) que é diferente de zero na origem por uma escolha adequada de α . Isto permite então definir um termo correspondente da expansão para a trajetória-canard como uma função que é bem-definida pela origem. Este plano funciona da seguinte maneira:

Tomamos

$$\frac{\alpha}{\varepsilon} = \frac{g'(0)}{g^3(0)} + \varepsilon \alpha_1 \quad (5.48)$$

e, além disso, definimos a função $\psi_1(x)$ por

$$\frac{g'(x)}{g^3(x)} - \frac{g'(0)}{g^3(0)} = x\psi_1(x).$$

Fica então natural tomar

$$\phi_1(x) = \frac{\psi_1(x)}{g(x)} + \varepsilon \phi_2(x).$$

Retornando para a equação das trajetórias (5.47), isso produzirá a seguinte nova equação

$$\varepsilon \left\{ \frac{d}{dx} \left(\frac{\phi_2}{g} \right) + \varepsilon \left[\frac{d}{dx} \left(\phi_2 \frac{\psi_1}{g} \right) + \varepsilon \phi_2 \frac{d\phi_2}{dx} \right] \right\} = -xg\phi_2 - \alpha_1 + \frac{d}{dx} \left(\frac{\psi_1}{g^2} \right) - \varepsilon \frac{\psi_1}{g} \frac{d}{dx} \left(\frac{\psi_1}{g} \right). \quad (5.49)$$

Para o próximo passo tomamos

$$\alpha_1 = \frac{d}{dx} \left(\frac{\psi_1}{g^2} \right)_{x=0} + \varepsilon \alpha_2$$

e definimos uma função $\psi_2(x)$ por

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\psi_1}{g^2} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\psi_1}{g^2} \right)_{x=0} = x\psi_2(x)$$

e então fica natural tomar

$$\phi_2(x) = \frac{\psi_2(x)}{g(x)} + \varepsilon \phi_3(x).$$

Isso irá produzir uma equação mais complicada para $\phi_3(x)$, o qual não será dada. As regras do plano parecem estar ficando claras agora. Em cada passo temos uma equação das trajetórias da estrutura

$$\varepsilon L_n \phi_n = -xg\phi_n - \alpha_{n-1} + H(x, \varepsilon),$$

onde L_n é um operador diferenciável e $H(x, \varepsilon)$ é uma função explícita. Removemos do lado direito da equação acima o termo que é diferente de zero na origem pela escolha

$$\alpha_{n-1} = H(0, 0) + \varepsilon \alpha_n$$

e definimos

$$H(x, 0) - H(0, 0) = x\psi_n(x)$$

e

$$\phi_n(x) = \frac{\psi_n(x)}{g(x)} + \varepsilon \phi_{n+1}(x).$$

Esse exercício pode ser prosseguido até quando quiser. O resultado é uma expansão assintótica formal, bem definida sobre qualquer intervalo de x tal que $g(x) > 0$.

Procedendo de maneira análoga ao da subseção 5.5.1, podemos estabelecer uma fórmula implícita para as soluções $\phi_1(x)$ da equação (5.47). Essa expressão é como segue

$$\phi_1(x) = \phi_1(x, \phi_1) + \phi_2(x, \phi_1)$$

onde

$$\begin{aligned}\phi_1(x, \phi_1) &= g(x)e^{\frac{1}{\varepsilon}Q(x)}\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_0}^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}Q(s)}\left(\frac{\alpha}{\varepsilon} - \frac{g'}{g^3}\right)ds \\ \phi_2(x, \phi_1) &= \frac{g(x)}{g(x_0)}\phi_1(x_0)e^{\frac{1}{\varepsilon}[Q(x)-Q(x_0)]}\end{aligned}$$

onde

$$Q(x) = \hat{Q}(x) + \varepsilon^2\left[g(x)\phi_1(x) - \int_0^x g'(s)\phi_1(s)ds\right]$$

e

$$\hat{Q}(x) = \int_0^x sg^2(s)ds.$$

Observação 1. Pode-se mostrar que a linearização

$$\hat{\phi}_1(x) = \phi_1(x, 0) + \phi_2(x, 0),$$

quando limitada, é uma aproximação válida de $\phi_1(x)$.

Observação 2. É também possível mostrar que as trajetórias do sistema (5.41), ou seja, as soluções $\phi_1(x)$ da equação (5.47), que são limitadas, realmente seguem a *trajetória-canard* quando o parâmetro α está na vizinhança do valor especial α_c . É possível ainda constatar que a expressão para α_c é dada por

$$\alpha_c(\varepsilon) = \varepsilon\frac{g'(0)}{g^3(0)} + O(\varepsilon^2).$$

Além do mais se considerarmos perturbações do parâmetro α dadas por

$$\alpha = \alpha_c(\varepsilon) + \sigma\varepsilon^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{k^2}{\varepsilon}}$$

é possível obter que as trajetórias pulam para fora da trajetória-canard em um ponto $x = x_c^* + O(\varepsilon)$, onde $x_c^* < 0$.

Os detalhes das provas das afirmações contidas na observação acima podem ser encontradas em [6], páginas 481, 482 e 483.

5.5.3 Patos sub-críticos

Nesta subseção vamos considerar o caso em que

$$g'(0) > 0.$$

Neste caso, temos que $\alpha_c > 0$ e o ponto singular localizado em $-\alpha_c$ é ainda instável.

Um exemplo deste caso ocorre para a equação de van der Pol. Lembremos que para a equação de van der Pol temos que

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2$$

logo

$$F'(x) = x^2 + 2x = x(x + 2) = xg(x).$$

Assim, no caso de van der Pol, temos $g(x) = x + 2$ e, portanto, $g'(x) = 1$ para todo x .

Restringiremos nossas análises para o caso

$$g'(x) > 0 \quad \text{para} \quad x \geq -l.$$

Começamos primeiro estudando o pulo para fora das trajetórias governadas pelo termo $\phi_2(x, 0)$, isto é,

$$\phi_2(x, 0) = \frac{g(x)}{g(x_0)} \phi_1(x_0) e^{\frac{1}{2}[\hat{Q}(x) - \hat{Q}(x_0)]}.$$

Uma trajetória que atinge a variedade estável em um ponto $x = x_0 > 0$ deixará a trajetória-canard em um ponto $x = x_c^* < 0$ tal que

$$\hat{Q}(x_c^*) = \hat{Q}(x_0).$$

Considere

$$\hat{Q}(\bar{x}) - \hat{Q}(x_0) = \int_{x_0}^{\bar{x}} z g^2(z) dz \tag{5.50}$$

e tomamos \bar{x} tal que

$$F(\bar{x}) = F(x_0).$$

Podemos reescrever a equação (5.50) da seguinte forma

$$\hat{Q}(\bar{x}) - \hat{Q}(x_0) = \int_{x_0}^{\bar{x}} z g^2(z) dz = - \int_{\bar{x}}^{x_0} g(z) F'(z) dz =$$

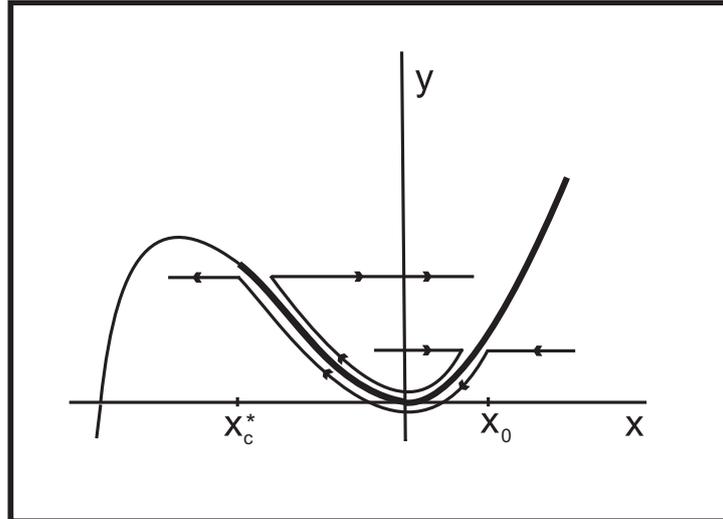


Figura 5.16: Chegada e afastamento da trajetória-canard.

$$\begin{aligned}
 &= -[g(x_0)F(x_0) - g(\bar{x})F(\bar{x})] + \int_{\bar{x}}^{x_0} g'(z)F(z)dz = \\
 &= -F(x_0)[g(x_0) - g(\bar{x})] + \int_{\bar{x}}^{x_0} g'(z)F(z)dz = \int_{\bar{x}}^{x_0} g'(z)[F(z) - F(x_0)]dz.
 \end{aligned}$$

Como $F(z) - F(x_0) < 0$ para $z \in (\bar{x}, x_0)$ teremos que

$$\hat{Q}(\bar{x}) - \hat{Q}(x_0) < 0 \quad \text{para} \quad g'(z) > 0.$$

Dessa forma, as trajetórias seguem de forma espiral para fora como ilustrado na figura 5.16.

Não é difícil agora esboçar o quadro total do fluxo. Temos que

$$\alpha = \alpha_c(\varepsilon) + \sigma \varepsilon^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{k^2}{\varepsilon}}.$$

Para $\sigma > 0$ temos o fluxo esboçado na figura 5.17.

O ponto x_j é definido por

$$\hat{Q}(x_j) - k^2 = 0.$$

Consideramos \tilde{x}_j tal que

$$\hat{Q}(x_j) - \hat{Q}(\tilde{x}_j) = 0.$$

Todas as trajetórias que atingem a variedade estável em um ponto $x_0 > \tilde{x}_j$ saltam para fora da trajetória-canard em um ponto $x = x_j$. As trajetórias que atingem a variedade

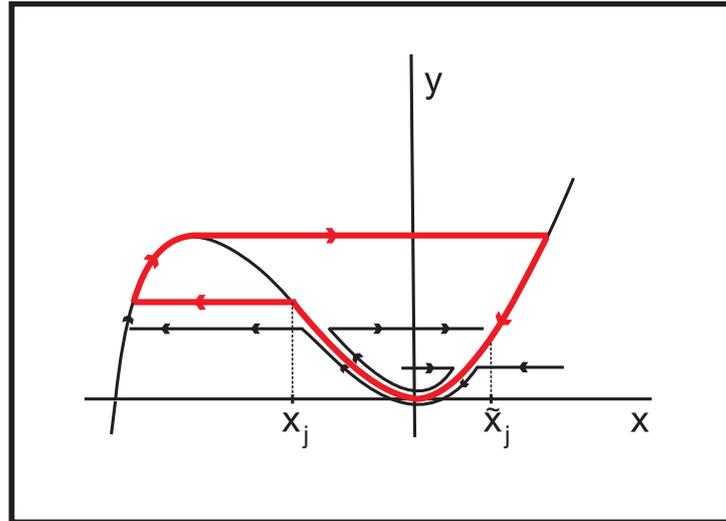


Figura 5.17: Um pato sub-crítico e algumas trajetórias típicas.

estável para $x < \tilde{x}_j$ permanecem por um tempo como esquematizado na figura 5.16, até o momento em que elas atingem a variedade estável em algum $x_0 > \tilde{x}_j$. Quando k cresce a cabeça do pato diminui. Para um valor de k tal que $x_j + l = o(1)$ nossas análises deixam de ser válidas, pois então teremos que $g' = o(1)$. Além disso, continuando a crescer o valor de k , produzirá um pato com uma cabeça praticamente inexistente e trajetórias um tanto complicadas perto de $x = -l$, o qual não temos tentado analisar.

Quando $\sigma < 0$ e portanto $\alpha < \alpha_c(\varepsilon)$ a situação é ainda clara e o fluxo é esboçado na figura 5.18.

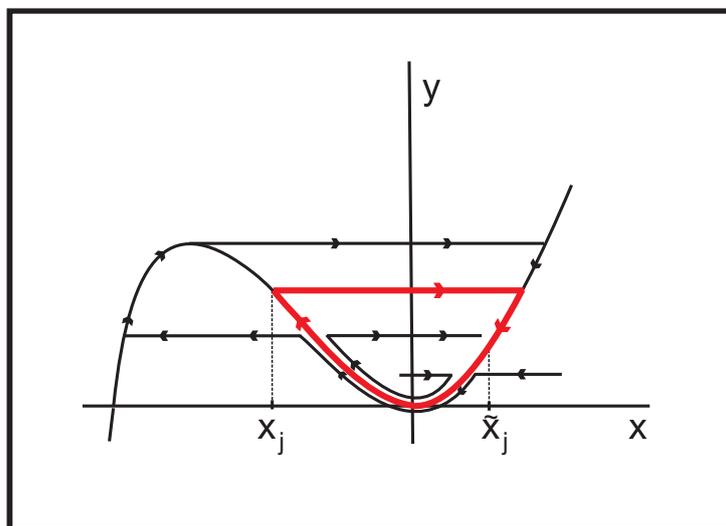


Figura 5.18: Um pato sub-crítico sem cabeça e algumas trajetórias típicas.

Referências Bibliográficas

- [1] DEVANEY, R.L., HIRSCH, M. AND SMALE, S., **Differential Equations, Dynamical Systems, and An Introduction to Chaos**, Elsevier Academic Press, San Diego, 2004.
- [2] DOERING, C.I. AND LOPES, A.O. , **Equações Diferenciais Ordinárias**, Coleção Matemática Universitária - IMPA, Rio de Janeiro, 2005.
- [3] DUMORTIER, F., PANAZZOLO, D. AND ROUSSARIE, R., **More limit cycles than expected in Lienard equations**, Proc. Amer. Math. Soc. 135 , 1895-1904, 2007.
- [4] DUMORTIER, F. AND ROUSSARIE, R., **Canard cycles and center manifolds**, Memoirs Amer. Mat. Soc. 121, 1996.
- [5] ECKHAUS, W., **Asymptotic analysis of singular perturbations**, Studies in Mathematics and its Applications, 9. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1979.
- [6] ECKHAUS, W., **Relaxation Oscillations including a standard chase on French ducks**, in Asymptotic Analysis II, Springer Lect. Notes in Math. 985, 449-494, 1983.
- [7] HIRSCH, M. AND SMALE, S., **Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra**, Academic Press, New York, 1974.
- [8] LIMA, E.L., **Análise no Espaço \mathbb{R}^n** , E. Blücher, 1970.
- [9] LINS NETO, A., **Funções de uma Variável Complexa**, Projeto Euclides CNPq, 1996.

- [10] LINS NETO, A.; DE MELO, W.; PUGH, C., **On Liénard equations**, Proc. Symp. Geom. and Topol., Springer Lectures Notes in Math. , 597, 335-357, 1977.
- [11] PERKO, L., **Differential Equations and Dynamical Systems**, Springer, New York, 2000.
- [12] SCARDUA, B.C.A., **Tópicos de Equações Diferenciais Ordinárias**, 22° Colóquio Brasileiro de Matemática – IMPA, Rio de Janeiro, 1999.
- [13] SOTOMAYOR, J., **Curvas definidas por Equações Diferenciais no Plano**, 13° Colóquio Brasileiro de Matemática – IMPA, 1981.
- [14] SOTOMAYOR, J., **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

Índice Remissivo

- Órbita, 16
 - fechada ou periódica, 17
 - singular, 17
- 16º Problema de Hilbert, 91
- Aproximação assintótica, 103, 105
- Balthasar van der Pol, 93
- Bifurcação de Andronov–Hopf, 66, 68, 70
- Campo gradiente, 32
- Campo vetorial, 12
 - trajetórias ou curvas integrais, 12
- Campos de vetores planar, 31
- Ciclo limite, 46
 - estável, 47, 48
 - instável, 47, 48
 - semi-estável, 47, 48
- Conjectura de Lins, de Melo e Pugh, 88
- Conjugação topológica entre campos vetoriais, 23
- Conjuntos limite
 - α -limite, 16, 35
 - ω -limite, 16, 35
- Crítério de Bendixson, 33
- Crítério de Liapunov, 29
- Curva de Jordan, 31
- Curva fechada simples, 31
- Divergente de um campo, 33
- Equação de van der Pol, 53, 56–59, 66, 72, 73, 84, 93, 94, 96, 98, 99, 102, 131
- Equivalência topológica entre campos vetoriais, 22
- Expansão assintótica, 101, 113, 115, 128
- Expansões assintótica, 96, 105
- Fenômeno Canard, 99, 100, 102, 123
- Fluxo, 14
- Função
 - de Liapunov, 29
 - de Liapunov estrita, 29
 - de ordem, 103
- Grafo, 40
- Intervalo máxima, 13
- Lienard
 - equações, 53, 71, 73, 76, 84
 - sistemas, 56, 66, 68, 72, 81, 86, 94
- Ordem de magnitude, 104
- Ponto regular, 13
- Ponto singular, 13

assintoticamente estável, 28
assintoticamente instável, 28
estável, 28
hiperbólico, 27
instável, 28

Retrato de fase, 17

Seção transversal, 24

Seção transversal local, 24

Teorema

de Blows e Lloyd, 89

de Perko, 89

Critério de Liapunov, 29

da Curva de Jordan, 31, 42

de Aproximação, 106

de Extensão, 107

de Grobman-Hartman, 27, 57, 70, 82

de Lienard, 81, 84-87

de Lins, de Melo e Pugh, 88

de Poincaré-Bendixson, 35, 39, 40, 42,
72, 73, 122

de Zhang, 86, 87

do Fluxo Tubular, 24, 50

Toro bidimensional, 42, 44

Trajetória máxima, 13

Transformação de Poincaré, 49, 58, 60, 65,