



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Campus de São José do Rio Preto

---

Andrea de Jesus Sacramento

*Sobre a equivalência de contato topológica*

Dissertação de Mestrado  
Pós-Graduação em Matemática

---

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas  
Rua Cristóvão Colombo, 2265, 15054-000  
São José do Rio Preto - SP - Brasil  
Telefone: (17) 3221-2444 - Fax: (17) 3221-2445

Andrea de Jesus Sacramento

*Sobre a equivalência de contato topológica*

Orientador:  
Prof. Dr. João Carlos Ferreira Costa

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
INSTITUTO DE BIOCÊNCIAS, LETRAS E CIÊNCIAS EXATAS  
CAMPUS DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO

São José do Rio Preto

22 de fevereiro de 2011

Andrea de Jesus Sacramento

*Sobre a equivalência de contato topológica*

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Singularidades, junto ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi  
Professor Adjunto  
UNESP - São José do Rio Preto

---

Prof. Dr. João Nivaldo Tomazella  
Professor Adjunto  
UFSCAR - São Carlos

---

Prof. Dr. Marcelo José Saia  
Professor Titular  
USP - São Carlos

São José do Rio Preto, 22 de fevereiro de 2011.

Aos meus amados pais, Alfredo e Sueli.

Aos meus amados irmãos.

Aos meus queridos amigos.

*Dedico.*

# *Agradecimentos*

Primeiramente agradeço a Deus, que todos os dias de minha vida me deu forças para nunca desistir;

À meus pais, Alfredo e Sueli, que me ensinaram a lutar por ideais através de exemplo de vida e de trabalho, responsáveis pela formação de meu caráter e personalidade;

A todos os meus familiares e amigos, que participaram da minha vida durante estes anos de mestrado;

Ao Prof. Dr. João Carlos Ferreira Costa, orientador e amigo que com sua paciência e compreensão me ajudou a completar com êxito essa difícil tarefa;

Aos amigos da minha turma de mestrado: Glauce, Juninho, Érica, Daiani, Michelli, André, pelo companheirismo e pela ajuda nas horas difíceis;

A todos os amigos da minha salinha de estudos, pelos momentos agradáveis e de descontração, pela hora do cappuccino e do chá;

À todos os amigos que de alguma forma colaboraram para a realização deste projeto;

À CAPES pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho.

“Quando Deus quer, não há quem não queira.”

*Ayrton Senna*

# *Resumo*

O objetivo deste trabalho é estudar a equivalência de contato topológica dos germes de aplicações diferenciáveis tendo como plano de fundo o estudo da equivalência de contato clássica (ou  $C^\infty$ - $\mathcal{K}$ -equivalência). Neste sentido, apresentamos inicialmente uma análise detalhada sobre alguns invariantes e propriedades clássicas da equivalência de contato e, em seguida, introduzimos o estudo da versão topológica desta relação de equivalência.

A equivalência de contato topológica (ou  $C^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência) é um tema que recentemente ganhou o interesse de vários pesquisadores por se tratar de uma relação de equivalência cujos invariantes, propriedades e classificações são pouco conhecidos ou inexistentes. Sob esta ótica, investigamos se alguns invariantes encontrados no caso clássico poderiam ser reproduzidos ou adaptados para o caso topológico.

Como parte principal do trabalho, apresentaremos um invariante completo para a equivalência de contato topológica introduzido por T. Nishimura [22]. Este invariante é dado para germes de aplicações finitamente determinadas cujas dimensões da fonte e da meta coincidem.

**Palavras-chave:** Equivalência de contato, equivalência de contato topológica, invariantes reais.

# *Abstract*

The goal of this work is to study the topological contact equivalence of smooth map germs having as background the study of the classical contact equivalence (or  $C^\infty$ - $\mathcal{K}$ -equivalence). In this sense, we firstly present a detailed analysis of some invariants and classical properties of the contact equivalence, and then we introduce the study of the topological version of this equivalence relation.

Recently several researchers have been interested in this subject because it is an equivalence relation whose invariants, properties and classifications are unknown or nonexistent. In this work we investigate if some invariants of contact equivalence could be reproduced or adapted for the topological case.

In chapter 3 we present a complete invariant for the topological contact equivalence introduced by T. Nishimura [22]. This invariant is given to finitely determined map germs whose dimensions of the source and target are equal.

**Keywords:** Contact equivalence, topological contact equivalence, real invariants.



# *Sumário*

<b>Introdução</b>	p. 9
<b>1 Preliminares</b>	p. 11
1.1 Conceitos básicos . . . . .	p. 11
<b>2 Equivalência de contato</b>	p. 16
2.1 $\mathcal{K}$ -invariantes . . . . .	p. 27
2.1.1 $\mathcal{K}$ -codimensão . . . . .	p. 27
2.1.2 Símbolo de Boardman . . . . .	p. 35
2.1.3 Germes $\mathcal{K}$ -finitamente determinados . . . . .	p. 39
2.1.4 Álgebra local . . . . .	p. 40
2.2 Deformações e desdobramentos . . . . .	p. 40
2.3 Classificação de germes . . . . .	p. 47
<b>3 Equivalência de contato topológica</b>	p. 51
3.1 Prova alternativa do Teorema 3.21 . . . . .	p. 64
3.2 Caso $n \neq p$ . . . . .	p. 69
<b>Comentários finais</b>	p. 71
<b>Referências Bibliográficas</b>	p. 73

# *Introdução*

Toda área da Matemática tem sua maneira própria de classificar seus objetos. Em Teoria de Singularidades, os objetos a serem classificados são os germes de aplicações diferenciáveis definidos em variedades diferenciáveis. Existem várias relações de equivalência que nos permitem fazer classificações de tais germes. A principal noção de equivalência utilizada é a  $\mathcal{A}$ -equivalência, ou seja, a equivalência dada por meio de mudanças de coordenadas diferenciáveis na fonte e na meta do germe. Entretanto, decidir se dois germes são  $\mathcal{A}$ -equivalentes não é uma tarefa fácil. Neste cenário, com o intuito de facilitar o problema da  $\mathcal{A}$ -classificação dos germes de aplicações, quem desempenha papel fundamental é a equivalência de contato (ou  $\mathcal{K}$ -equivalência). De fato, a equivalência de contato foi introduzida por J. Mather para reduzir o problema da  $\mathcal{A}$ -classificação dos germes de aplicações estáveis para o problema da classificação de  $\mathbb{R}$ -álgebras (ver [18],[19]). Isso é possível graças a um critério algébrico que caracteriza a equivalência de contato.

Além desta caracterização algébrica, encontramos também uma importante caracterização geométrica descrita por J. Montaldi [20]. Geometricamente, a  $\mathcal{K}$ -equivalência entre dois germes  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  pode ser determinada através do tipo de contato dos gráficos de  $f$  e  $g$  com o  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$  na origem, respectivamente.

O estudo das propriedades, invariantes e caracterizações da  $\mathcal{K}$ -equivalência é clássico dentro da Teoria de Singularidades e bem conhecido. Embora a equivalência de contato desempenhe papel fundamental para descrever a  $\mathcal{A}$ -classificação dos germes estáveis, temos que em geral as  $\mathcal{K}$ -órbitas apresentam moduli. Então, parece natural introduzir versões mais fracas da  $\mathcal{K}$ -equivalência e verificar a existência de invariantes, caracterizações e outras propriedades importantes. Esta é uma das motivações deste trabalho, que tem por objetivo introduzir o estudo da equivalência de contato na sua versão topológica, a chamada equivalência de contato topológica (ou  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência).

Para a  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência, não existem critérios ou caracterizações análogos aos da  $\mathcal{K}$ -equivalência. O artigo de T. Nishimura [22] pode ser visto como o primeiro a considerar o problema de determinar critérios algébricos para a  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência. Para o caso de aplicações finitamente determinadas cujas dimensões da fonte e da meta coincidem, o

valor absoluto do grau das aplicações é um invariante completo para a  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência (ver [22]).

Recentemente, o estudo da  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência ganhou interesse por parte de vários pesquisadores (ver [2], [4], [8], [24]). Alguns destes trabalhos mostram que para aplicações polinomiais reais de grau limitado, a  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência possui um número finito de órbitas. Com isso, o problema da  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -classificação torna-se mais tratável, uma vez que podemos tentar descrever todas as órbitas.

O foco de nosso trabalho é estudar com detalhes a equivalência de contato para depois comparar este estudo com o caso topológico. Este trabalho está distribuído em três capítulos como seguem.

No Capítulo 1, apresentamos alguns conceitos básicos da Teoria de Singularidades, que serão utilizados no decorrer do nosso texto.

No Capítulo 2, definimos a equivalência de contato, estudamos suas propriedades, invariantes e algumas classificações particulares. Além disso, dedicamos uma atenção especial à teoria de deformações e desdobramentos que serão utilizados na demonstração do Teorema 2.76. Este teorema devido a J. Mather, mostra que para germes estáveis as noções de  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{K}$ -equivalências são equivalentes.

No Capítulo 3, introduzimos a  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência. Investigamos se algumas propriedades e invariantes estudados no Capítulo 2 podem ser reproduzidos ou adaptados de maneira análoga para o caso topológico. Nosso objetivo é detalhar os resultados de T. Nishimura contidos no artigo [22], sobretudo o Teorema 3.21. Na Seção 3.1 apresentamos uma prova alternativa para o Teorema 3.21 dado por M. Ruas e G. Valette [24]. Esta prova é baseada num surpreendente resultado, o Teorema 3.27. Este teorema afirma que a trivialidade local do conjunto de zeros de uma deformação contínua garante a trivialidade topológica da deformação, com respeito à equivalência de contato. Na Seção 3.2, discutimos brevemente o que ocorre com a  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência de germes  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinados  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  com  $n < p$ . Neste caso, quaisquer dois germes são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes.

Finalizamos este trabalho com alguns comentários sobre a pesquisa atual envolvendo o tema discorrido neste texto.

# Capítulo 1

## Preliminares

O assunto que iremos abordar nesse texto, aplica-se ao conjunto de aplicações diferenciáveis definidas em variedades diferenciáveis, ou seja,  $f : N^n \rightarrow P^p$ ,  $f$  de classe  $C^\infty$ , onde  $N$  e  $P$  são variedades diferenciáveis de dimensão  $n$  e  $p$ , respectivamente. Como nosso estudo é local trabalharemos com *germes de aplicação* em um ponto  $a \in N$ , isto é, classes de equivalências de aplicações que coincidem em alguma vizinhança de  $a$ . Os pontos  $a \in N$  e  $f(a) \in P$  são chamados, respectivamente, *fonte* e *meta* do germe.

Notação:  $f : (N, a) \rightarrow (P, f(a))$ . Sem perda de generalidade, vamos assumir  $a = 0$  e nos restringiremos ao caso  $N = \mathbb{R}^n$  e  $P = \mathbb{R}^p$ .

Assim, utilizando convenientes sistemas de coordenadas, consideraremos simplesmente

$$f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0),$$

onde  $f$  é uma aplicação diferenciável de classe  $C^\infty$ .

A principal referência deste capítulo é o livro do Gibson [13].

### 1.1 Conceitos básicos

**Definição 1.1.** (*Germes de aplicações diferenciáveis*)

Considere um aberto  $U$  do  $\mathbb{R}^n$  contendo a origem e

$$\mathcal{F} = \{f : U \rightarrow \mathbb{R}^p \mid f \text{ é de classe } C^\infty\}.$$

Podemos definir uma relação de equivalência  $\sim$  em  $\mathcal{F}$  da seguinte forma: sejam  $f_1$  e  $f_2 \in \mathcal{F}$ , com  $f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^p$  e  $f_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Dizemos que  $f_1 \sim f_2$  se existir um aberto

$W \subset U_1 \cap U_2$  contendo a origem tal que  $f_1|_W = f_2|_W$ .

Geometricamente isso significa que, se  $f_1$  e  $f_2$  pertencem à mesma classe de equivalência, então seus gráficos coincidem em uma mesma vizinhança da origem.

Definimos

$$\varepsilon_{n,p} = \frac{\mathcal{F}}{\sim} = \{[f] \mid f \in \mathcal{F}\}.$$

Chamamos a classe de equivalência  $[f]$  de germe de aplicação diferenciável na origem.

Denotamos

$$\varepsilon_{n,p} = \{f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p \mid f \in \mathcal{C}^\infty\}.$$

Quando  $p = 1$  denotamos  $\varepsilon_{n,1}$  apenas por  $\varepsilon_n$ , isto é,

$$\varepsilon_n = \{f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in \mathcal{C}^\infty\}.$$

O conjunto  $\varepsilon_n$  com as operações de adição, multiplicação e multiplicação por escalar é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  com estrutura de anel comutativo com unidade, ou seja,  $\varepsilon_n$  é uma  $\mathbb{R}$ -álgebra comutativa. Já o conjunto  $\varepsilon_{n,p}$  tem estrutura de  $\varepsilon_n$ -módulo.

De fato, dada  $f = (f_1, \dots, f_p) \in \varepsilon_{n,p}$  com cada  $f_i \in \varepsilon_n$ , podemos identificar  $\varepsilon_{n,p}$  com  $\varepsilon_n \times \dots \times \varepsilon_n$  ( $p$  vezes).

**Proposição 1.2.** ([13]) Um germe  $f \in \varepsilon_n$  é inversível se, e somente se,  $f(0) \neq 0$ .

**Definição 1.3.** Definimos  $\mathcal{M}_n = \{f \in \varepsilon_n \mid f(0) = 0\}$ .

**Proposição 1.4.** ([13])  $\mathcal{M}_n$  é o único ideal maximal de  $\varepsilon_n$ .

**Proposição 1.5.** ([13])  $\mathcal{M}_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ , onde cada germe  $x_i : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  é dado por  $x_i(x) = x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ou seja, são os germes representados pelas projeções de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}$ .

**Definição 1.6.** Dado um germe  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  considere a aplicação  $f^* : \varepsilon_p \rightarrow \varepsilon_n$  dada por  $\lambda \mapsto \lambda \circ f$ . Assim,  $f^*$  é um homomorfismo entre álgebras, induzido por  $f$ .

São válidas as seguintes propriedades:

i)  $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ ;

ii)  $(id)^* = id$ ;

iii) Se  $f$  é inversível, então  $f^*$  é inversível e  $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$ .

Observe que  $f^*(x_i) = x_i \circ f = x_i(f_1, \dots, f_p)$ . Como  $x_i$  é a projeção na  $i$ -ésima coordenada temos que  $f^*(x_i) = f_i$ , ou seja,  $f^*(\mathcal{M}_p) = \langle f_1, \dots, f_p \rangle$ . Por simplicidade vamos denotar  $f^*(\mathcal{M}_p) = I_f$ , isto é, o ideal de  $\varepsilon_n$  gerado pelas componentes  $f_1, f_2, \dots, f_p$  de  $f$ .

**Definição 1.7.** *Seja  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ . Definimos a  $\mathbb{R}$ -álgebra local de  $f$  por*

$$Q(f) = \varepsilon_n / I_f = \varepsilon_n / \langle f_1, \dots, f_p \rangle.$$

**Definição 1.8.**  $\mathcal{M}_n^k = \mathcal{M}_n \dots \mathcal{M}_n$  ( $k$  vezes),  $k \in \mathbb{N}^*$ .

*Ou seja,  $\mathcal{M}_n^k$  consiste exatamente dos germes cujos representantes se anulam em 0, juntamente com suas derivadas até a ordem  $k - 1$ .*

**Definição 1.9.** *Seja  $k \geq 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . O  $k$ -jato de  $f$  em 0 é o polinômio*

$$j^k f(0) = x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{1}{k!} x^k f^{(k)}(0),$$

*que é obtido através do truncamento a série de Taylor de grau  $k$  de  $f$  em 0 omitindo-se o termo constante.*

*Dizemos que dois  $k$ -jatos são iguais quando eles são identicamente o mesmo polinômio. O conjunto de todos os  $k$ -jatos é denotado por  $J^k(n, p)$ .*

**Definição 1.10.** *Seja  $(G, *)$  um grupo e  $M$  um conjunto. Uma ação de  $G$  sobre  $M$  é uma aplicação  $\Phi : G \times M \rightarrow M$ , dada por  $\Phi(g, x) = g \cdot x$ , satisfazendo:*

$$(i) \Phi(1, x) = x;$$

*(ii)  $\Phi(g * h, x) = \Phi(g, \Phi(h, x))$ , onde  $x \in M$ ,  $g, h \in G$  e 1 denota a identidade do grupo  $G$ .*

*Dado uma tal ação podemos definir uma relação de equivalência  $\sim$  sobre  $M$  da seguinte forma: dizemos que  $x$  está relacionado com  $y$ ,  $x \sim y$ , quando existe  $g \in G$  tal que  $y = \Phi(g, x)$ . As classes de equivalência desta relação são chamadas órbitas sob a ação e são denotadas por*

$$G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}.$$

Seja

$$\varepsilon_{n,p}^0 = \{f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0) \mid f \in \mathcal{C}^\infty\}.$$

Quando dois elementos  $f, g \in \varepsilon_{n,p}^0$  estão em uma mesma órbita segundo a ação de um grupo  $G$ , dizemos que  $f$  e  $g$  são  $G$ -equivalentes e denotamos por  $f \underset{G}{\sim} g$ .

As relações de equivalência de nosso interesse são aquelas definidas pelas ações dos seguintes grupos (de Mather):

**Definição 1.11.** *Seja  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ . Definimos:*

$\mathcal{R}$  = grupo dos germes de difeomorfismos  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ , cuja ação em  $f$  é a composição à direita, isto é,  $f \circ h^{-1}$ .

$\mathcal{L}$  = grupo dos germes de difeomorfismos  $k : (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ , cuja ação em  $f$  é a composição à esquerda, isto é,  $k \circ f$ .

$\mathcal{A}$  =  $\mathcal{R} \times \mathcal{L}$  grupo das mudanças de coordenadas na fonte e na meta. A ação em  $f$  é dada por  $k \circ f \circ h^{-1}$ .

$\mathcal{C}$  = grupo dos germes de difeomorfismos  $H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$ , tais que  $H(x, y) = (x, \theta(x, y))$ , com  $\theta(x, 0) = 0$ . Se  $\theta_x$  é um difeomorfismo de  $\mathbb{R}^p$ , dependendo de  $x \in \mathbb{R}^n$ , sua ação transforma  $f$  na aplicação

$$x \mapsto \theta_x(f(x)).$$

Equivalentemente  $H$  age no gráfico de  $f$  em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ .

$\mathcal{K} = \mathcal{R} \cdot \mathcal{C}$  (produto semi-direto). É o grupo formado pelos germes de difeomorfismos  $H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$  que são escritos na forma  $H(x, y) = (h(x), \theta(x, y))$ , com  $h \in \mathcal{R}$  e  $\theta(x, 0) = 0$ .

**Observação 1.12.** *O grupo  $\mathcal{C}$  é um subgrupo normal de  $\mathcal{K}$  e os grupos  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{A}$  podem ser identificados com subgrupos de  $\mathcal{K}$ .*

Assim, a partir da Definição 1.11, dados  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  dizemos que

1) Os germes  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{R}$ -equivalentes se existe um difeomorfismo  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tal que  $g = f \circ h^{-1}$ .

2) Os germes  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{L}$ -equivalentes se existe um difeomorfismo  $k : (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  tal que  $g = k \circ f$ .

3) Os germes  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{A}$ -equivalentes se existem difeomorfismos  $h$  e  $k$  tais que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^p, 0) \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{g} & (\mathbb{R}^p, 0) \end{array}$$

Isto é,  $g = k \circ f \circ h^{-1}$ .

4) Os germes  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{C}$ -equivalentes se existe um germe de difeomorfismo  $H$  tal que  $H(x, y) = (x, \theta(x, y))$ , com  $H(x, f(x)) = (x, g(x))$  e  $\theta(x, 0) = 0$ .

A seguir enunciaremos dois lemas importantes que serão usados no decorrer deste texto.

**Lema 1.13.** (Lema de Hadamard [13]) *Seja  $U$  uma vizinhança convexa de  $0$  em  $\mathbb{R}^n$ , e seja  $f$  uma função de classe  $C^r$  definida sobre  $U \times \mathbb{R}^q$  que se anula em  $0 \times \mathbb{R}^q$ . Então existem funções de classe  $C^{r-1}$   $f_1, \dots, f_n$  definidas em  $U \times \mathbb{R}^q$  tais que*

$$f = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n,$$

onde  $x_1, \dots, x_n$  são as funções coordenadas em  $\mathbb{R}^n$ .

**Lema 1.14.** (Lema de Nakayama [13]) *Sejam  $\varepsilon$  um anel com unidade,  $\mathcal{M}$  um ideal de  $\varepsilon$  tal que  $1+x$  é inversível em  $\varepsilon$  para todo  $x \in \mathcal{M}$ . Seja  $M$  um  $\varepsilon$ -módulo e  $A, B$   $\varepsilon$ -submódulos de  $M$  com  $A$  finitamente gerado. Se  $A \subseteq B + \mathcal{M}A$  então  $A \subseteq B$ .*



## Capítulo 2

### Equivalência de contato

A equivalência de contato, ou  $\mathcal{K}$ -equivalência, foi introduzida por J. Mather [19] para reduzir o problema da classificação de germes  $\mathcal{C}^\infty$ -estáveis para o problema da classificação de  $\mathbb{R}$ -algébras isomorfas. De fato, J. Mather provou que para aplicações  $\mathcal{C}^\infty$ -estáveis a  $\mathcal{K}$ -equivalência também implica na  $\mathcal{A}$ -equivalência.

Vimos que vários grupos agem sobre  $\varepsilon_{n,p}$  e um desses grupos é justamente o grupo  $\mathcal{K}$  definido no Capítulo 1, Definição 1.11.

**Definição 2.1.** Dizemos que dois germes  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  são  $\mathcal{K}$ -equivalentes se existem germes de difeomorfismos  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  e  $H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$  satisfazendo a propriedade  $H(\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \mathbb{R}^n \times \{0\}$  e tais que os seguintes diagramas comutam

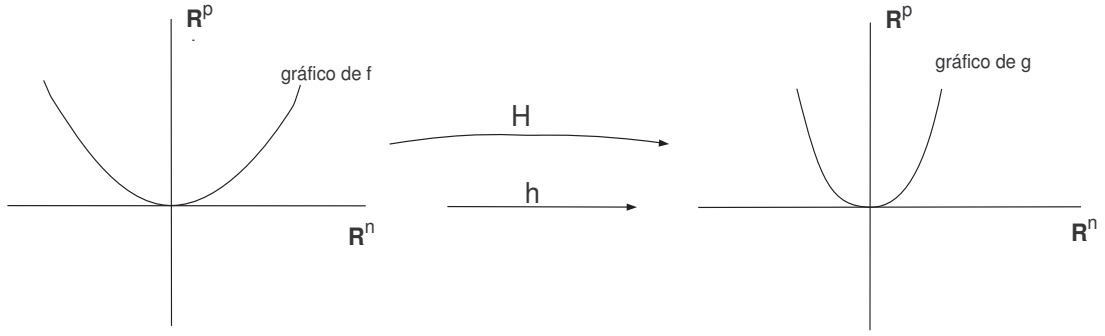
$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{(id, f)} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) & \xrightarrow{\pi_n} & (\mathbb{R}^n, 0) \\ h \downarrow & & H \downarrow & & \downarrow h \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{(id, g)} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) & \xrightarrow{\pi_n} & (\mathbb{R}^n, 0) \end{array}$$

onde  $id : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  é a aplicação identidade do  $\mathbb{R}^n$  e  $\pi_n : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  a projeção canônica.

Notação:  $f \underset{\mathcal{K}}{\sim} g$ .

Segue da comutatividade do diagrama que:

1)  $H$  leva o gráfico de  $f$  no gráfico de  $g$ , isto é,  $H \circ (id, f) = (id, g) \circ h$ , enquanto  $h$  atua no  $\mathbb{R}^n$ .



2) O difeomorfismo  $H$  é dado por  $H(x, y) = (h(x), \theta(x, y))$ , com  $\theta(x, 0) = 0$ , devido à condição  $H(\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \mathbb{R}^n \times \{0\}$ .

**Exemplo 2.2.** Os germes  $f, g : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  dados por  $f(x, y) = (x^2, y^2)$  e  $g(x, y) = (x^2 + y^2, xy)$  são  $\mathcal{K}$ -equivalentes via os difeomorfismos  $h(x, y) = (x + y, x - y)$  e  $H(x, y, z, w) = (x + y, x - y, 2z + 2w, z - w)$ .

De fato, temos que  $H(x, y, z, w) = (h(x, y), \theta(x, y, z, w))$ , com  $\theta(x, y, 0, 0) = (0, 0)$ . Agora resta verificar se  $H \circ (id, f) = (id, g) \circ h$ .

Note que  $id$  é o germe em zero da aplicação identidade em  $\mathbb{R}^2$ . Daí

$H \circ (id, f)(x, y) = H(x, y, x^2, y^2) = (x + y, x - y, 2x^2 + 2y^2, x^2 - y^2)$ . Por outro lado,

$(id, g) \circ h(x, y) = (id, g)(x + y, x - y) = (x + y, x - y, (x + y)^2 + (x - y)^2, (x + y)(x - y)) = (x + y, x - y, 2x^2 + 2y^2, x^2 - y^2)$ .

Portanto o par  $(h, H)$  satisfaz  $H \circ (id, f) = (id, g) \circ h$  e assim  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{K}$ -equivalentes.

**Observação 2.3.** Se os germes  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{R}$ -equivalentes, então eles são  $\mathcal{K}$ -equivalentes.

De fato, sejam  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  germes  $\mathcal{R}$ -equivalentes, então existe um difeomorfismo  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tal que  $f = g \circ h^{-1}$ .

Considere  $H(x, y) = (h^{-1}(x), \theta(x, y))$ , com  $\theta(x, y) = \pi(x, y) = y$ . Note que  $H$  é inversível, pois  $h$  é difeomorfismo, e  $\theta(x, 0) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Além disso,

$$H \circ (id, f)(x) = H(x, f(x)) = (h^{-1}(x), f(x)) = (h^{-1}(x), g \circ h^{-1}(x)) = (id, g) \circ h^{-1}(x).$$

Assim, o par  $(h^{-1}, H)$  satisfaz a condição para que  $f$  e  $g$  sejam  $\mathcal{K}$ -equivalentes.

**Observação 2.4.** Se dois germes  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{A}$ -equivalentes, então eles são  $\mathcal{K}$ -equivalentes.

De fato, sejam  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  germes  $\mathcal{K}$ -equivalentes. Então existem difeomorfismos  $h$  e  $k$  tais que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^p, 0) \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{g} & (\mathbb{R}^p, 0) \end{array}$$

Ou seja,  $g = k \circ f \circ h^{-1}$ .

Tome  $H(x, y) = (h(x), \theta(x, y))$ , onde  $\theta(x, y) = k(y)$ . Assim  $H$  é um difeomorfismo e dado  $x \in \mathbb{R}^n$ , temos que

$$(H \circ (id, f))(x) = H(x, f(x)) = (h(x), k(f(x))) = (h(x), (k \circ f)(x)) = (h(x), (g \circ h)(x)) = ((id, g) \circ h)(x).$$

Portanto,  $H \circ (id, f) = (id, g) \circ h$ . Logo  $(h, H)$  estabelece uma  $\mathcal{K}$ -equivalência entre  $f$  e  $g$ .

Mais adiante veremos que se dois germes são  $\mathcal{K}$ -equivalentes não necessariamente eles são  $\mathcal{A}$ -equivalentes.

Segue do que vimos no Capítulo 1 e da definição de  $\mathcal{K}$ -equivalência, que se o difeomorfismo  $h$  da Definição 2.1 é justamente a identidade, temos uma  $\mathcal{C}$ -equivalência. Ou seja,

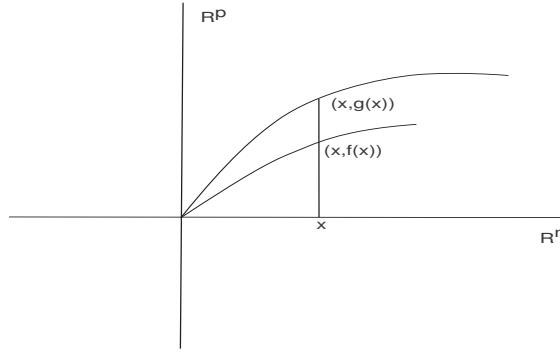
**Definição 2.5.** *Dois germes  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  são  $\mathcal{C}$ -equivalentes quando são  $\mathcal{K}$ -equivalentes via  $\mathcal{K}$ -equivalência  $(id, H)$ . Em outras palavras, o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) & \\ (id, f) \nearrow & & \searrow H \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{(id, g)} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \end{array}$$

Isto é,  $H \circ (id, f) = (id, g)$ .

Notação:  $f \underset{\mathcal{C}}{\sim} g$ .

Neste caso,  $H$  leva o gráfico de  $f$  no gráfico de  $g$  da seguinte forma:



**Observação 2.6.** Uma consequência da definição acima é que: dois germes  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{K}$ -equivalentes se, e somente se, existe um germe inversível  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  para o qual  $f \circ h$  e  $g$  são  $\mathcal{C}$ -equivalentes.

De fato, suponhamos que  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{K}$ -equivalentes, então existe um par de germes de difeomorfismos  $(k, H)$  com  $H = (k, \theta)$  e  $\theta(x, 0) = 0$ , tal que  $H \circ (id, f) = (id, g) \circ k$ . Daí segue que,  $(k, \theta) \circ (id, f) \circ k^{-1} = (id, g)$ , ou seja,  $(k \circ k^{-1}, \theta \circ f \circ k^{-1}) = (id, g)$ .

Logo,  $(id, \theta \circ f \circ k^{-1}) = (id, g)$  o que implica  $(id, \theta) \circ (id, f \circ k^{-1}) = (id, g)$ . Portanto existe um germe inversível  $h = k^{-1} : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  e um par  $(id, H^*)$ , onde  $H^* = (id, \theta)$  com  $\theta(x, 0) = 0$  tal que

$$H^* \circ (id, f \circ h) = (id, g).$$

Ou seja,  $f \circ h$  e  $g$  são  $\mathcal{C}$ -equivalentes.

Reciprocamente, suponhamos que  $f \circ h$  e  $g$  são  $\mathcal{C}$ -equivalentes. Então existe um par de germes de difeomorfismos  $(id, H)$  tais que  $H \circ (id, f \circ h) = (id, g)$ ,  $H(x, y) = (x, \theta(x, y))$  com  $\theta(x, 0) = 0$ .

Tome  $H^* = (h^{-1}, \theta)$ .

Logo  $(h^{-1}, H^*)$  é um par de difeomorfismos que satisfaz

$$H^* \circ (id, f) \circ h = (h^{-1}, \theta) \circ (id, f) \circ h = (id, \theta \circ f \circ h) = (id, g), \text{ isto é,}$$

$$H^*(x, f(x)) = (h^{-1}(x), \theta \circ f \circ h(x)) \text{ com } H^*(x, 0) = (h^{-1}(x), \theta(x, 0)) = (h^{-1}(x), 0).$$

Portanto  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{K}$ -equivalentes.

Este caso particular da equivalência de contato nos ajudará a encontrar critérios algébricos para descobrir se dois germes são  $\mathcal{K}$ -equivalentes.

**Proposição 2.7.** ([13]) Dados  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ , as seguintes condições são equivalentes:

(i)  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{C}$ -equivalentes.

(ii) Os ideais  $I_f$  e  $I_g$  são iguais.

(iii) Existe uma matriz inversível  $(u_{ij})_{p \times p}$  com entradas em  $\varepsilon_n$  para a qual  $f_i = \sum_{j=1}^p u_{ij} g_j$  para  $1 \leq i \leq p$ .

*Demonstração.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Suponhamos que  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{C}$ -equivalentes. Primeiro mostremos que  $I_f \subset I_g$ . Para isso vamos mostrar que cada componente  $f_i$  pode ser escrita da forma

$$f_i = \sum_{j=1}^p a_{ij} g_j$$

com  $a_{ij} \in \varepsilon_n$ .

De fato, como por hipótese  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{C}$ -equivalentes, então existe um difeomorfismo  $H$  para o qual  $H(x, g(x)) = (x, f(x))$  com  $H(x, y) = (x, \theta(x, y))$ , onde  $\theta(x, 0) = 0$ .

Como  $\theta(x, 0) = 0$ , segue que cada componente  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$  de  $\theta$  satisfaz  $\theta_i(x, 0) = 0$ . Pelo Lema de Hadamard podemos escrever

$$\theta_i(x, y) = \sum_{j=1}^p y_j \theta_{ij}(x, y),$$

com  $\theta_{ij}$  funções de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

Assim, para  $y = g(x)$ ,

$$f_i(x) = \theta_i(x, g(x)) = \sum_{j=1}^p g_j(x) \theta_{ij}(x, g(x)), \quad i = 1, \dots, p.$$

Portanto,  $f_i = \sum_{j=1}^p a_{ij} g_j$ ,  $i = 1, \dots, p$ , e  $I_f \subset I_g$ .

Para mostrar que  $I_g \subset I_f$  o procedimento é análogo. Assim  $I_f = I_g$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Suponhamos  $I_f = I_g$ , então podemos escrever

$$g_i = \sum_{j=1}^p a_{ij} f_j$$

$$f_i = \sum_{j=1}^p b_{ij} g_j$$

com  $a_{ij}$  e  $b_{ij} \in \varepsilon_n$ ,  $i = 1, \dots, p$ .

Para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ , sejam  $A_x$  e  $B_x$  matrizes reais  $p \times p$  com entradas  $a_{ij}(x)$  e  $b_{ij}(x)$ , respectivamente.

Segue da Álgebra Linear (ver [1] p. 146) que podemos encontrar uma matriz real  $p \times p$ ,  $C_0$ , tal que  $U_0 = C_0(I - A_0 B_0) + B_0$  é inversível. Além disso, para  $x$  próximo de 0, a matriz  $U_x = C_0(I - A_x B_x) + B_x$  também é inversível.

Seja  $u_{ij}(x)$  as entradas de  $U_x$ . Daí  $f_i = \sum_{j=1}^p u_{ij} g_j$ ,  $i = 1, \dots, p$ , como queríamos.

**(iii)  $\Rightarrow$  (i)** Suponhamos que exista uma matriz  $p \times p$  inversível,  $(u_{ij})$ , com a propriedade citada em **(ii)**.

Vamos definir  $\theta : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  com componentes dadas por

$$\theta_i(x, y) = \sum_{j=1}^p y_j u_{ij}(x); \quad \text{para todo } i = 1, \dots, p.$$

Observe que  $\theta(x, 0) = 0$ .

Agora defina o germe  $H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$  por  $H(x, y) = (x, \theta(x, y))$ . A matriz jacobiana de  $H$  é dada por

$$Jac(H) = \begin{pmatrix} I_{n \times n} & 0_{n \times p} \\ *_{p \times n} & (u_{ij})_{p \times p} \end{pmatrix}$$

onde  $I_{n \times n}$  é a matriz identidade. Assim, como  $\det(Jac(H(0, 0))) \neq 0$ ,  $H$  é um difeomorfismo.

Por construção,  $\theta_i(x, g(x)) = f_i(x)$ ,  $\theta(x, g(x)) = f(x)$  e  $H(x, g(x)) = (x, f(x))$  o que implica que  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{C}$ -equivalentes.

□

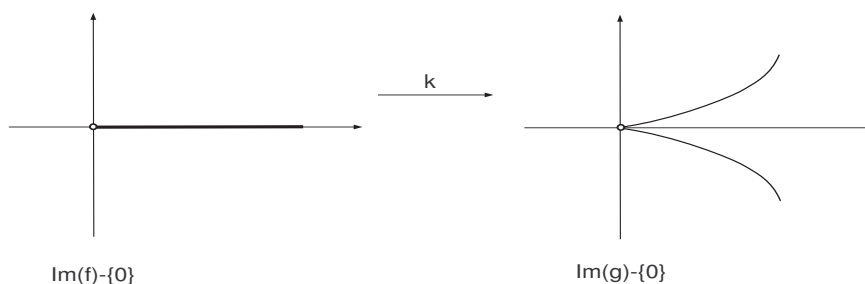
**Exemplo 2.8.** Os germes  $f(x) = (x^2, 0)$  e  $g(x) = (x^2, x^3)$  são  $\mathcal{C}$ -equivalentes.

De fato, observe que  $I_f = \langle x^2 \rangle = \langle x^2, x^3 \rangle = I_g$ .

Portanto pela Proposição 2.7,  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{C}$ -equivalentes (e consequentemente  $\mathcal{K}$ -equivalentes).

**Observação 2.9.** Note que  $f$  e  $g$  dados no exemplo anterior não são  $\mathcal{A}$ -equivalentes.

Suponhamos que  $f, g : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  sejam  $\mathcal{A}$ -equivalentes. Então existem difeomorfismos  $h : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  e  $k : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  para os quais  $g \circ h = k \circ f$ , logo temos que  $k(\text{Im}f - \{0\}) = \text{Im}g - \{0\}$ . Além disso  $k$  é contínua e  $\text{Im}f - \{0\}$  é um conjunto conexo. Logo  $k(\text{Im}f - \{0\})$  também é um conjunto conexo, o que é um absurdo, pois  $\text{Im}g - \{0\}$  é desconexo. Veja:



Logo  $\mathcal{K}$ -equivalência não implica em  $\mathcal{A}$ -equivalência.

**Exemplo 2.10.** Consideremos um germe  $f : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  para o qual as seguintes condições são satisfeitas:

$$f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(k)}(0) = 0 \text{ e } f^{(k+1)}(0) \neq 0,$$

onde a notação  $f^{(i)}(0)$  significa a derivada de  $f$  de ordem  $i$  em  $0$ .

Pelo Lema de Hadamard,  $f(x) = x^{k+1}g(x)$ , para alguma  $g : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  com  $g(0) \neq 0$ . Como  $g$  é inversível na álgebra  $\varepsilon_1$ , temos que  $\langle f \rangle = \langle x^{k+1} \rangle$  e concluímos que  $f$  e  $x^{k+1}$  são  $\mathcal{C}$ -equivalentes.

**Exemplo 2.11.** Os germes  $f(x, y) = (x^2, y^2)$  e  $g(x, y) = (x^2 + y^2, xy)$  são  $\mathcal{A}$ -equivalentes, mas não são  $\mathcal{C}$ -equivalentes.

De fato, tome  $h(x, y) = (x + y, x - y)$  e  $k(x, y) = (2x + 2y, x - y)$  germes de difeomorfismos.

Então,

$$g \circ h(x, y) = g(h(x, y)) = g(x + y, x - y) = (2x^2 + 2y^2, x^2 - y^2)$$

e

$$k \circ f(x, y) = k(f(x, y)) = k(x^2, y^2) = (2x^2 + 2y^2, x^2 - y^2).$$

Portanto  $g \circ h = k \circ f$ . Assim  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{A}$ -equivalentes e conseqüentemente  $\mathcal{K}$ -equivalentes.

Agora veja que  $xy \notin \langle x^2, y^2 \rangle = I_f$ , daí  $I_f \neq I_g$ , ou seja,  $f$  e  $g$  não são  $\mathcal{C}$ -equivalentes.

Com esse exemplo podemos ver que  $\mathcal{A}$ -equivalência não implica em  $\mathcal{C}$ -equivalência.

**Definição 2.12.** *Sejam  $I$  e  $J$  dois ideais em  $\varepsilon_n$ . Dizemos que  $I$  e  $J$  são isomorfos quando existe um isomorfismo  $\varphi : \varepsilon_n \rightarrow \varepsilon_n$ , tal que  $\varphi(I) = J$ .*

**Definição 2.13.** *Sejam  $I$  e  $J$  dois ideais em  $\varepsilon_n$ . Dizemos que  $I$  e  $J$  são isomorficamente induzidos quando existe um isomorfismo  $h^* : \varepsilon_n \rightarrow \varepsilon_n$ , para algum germe inversível  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ , tal que  $h^*(I) = J$ .*

Decorre da Definição 2.13 e das proposições anteriores a seguinte proposição.

**Proposição 2.14.** *([13]) Dois germes  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{K}$ -equivalentes se, e somente se,  $I_f$  e  $I_g$  são isomorficamente induzidos.*

*Demonstração.* Suponhamos que  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  sejam  $\mathcal{K}$ -equivalentes. Então pela Observação 2.6 existe um germe inversível  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  para o qual  $f \circ h$  e  $g$  são  $\mathcal{C}$ -equivalentes. Pela Proposição 2.7  $I_{f \circ h} = I_g$ . Daí cada componente  $f_i \circ h$  de  $f \circ h$  se escreve da seguinte forma

$$f_i \circ h = \sum_{j=1}^p a_{ij} g_j \quad (*)$$

com  $a_{ij} \in \varepsilon_n$ ,  $i = 1, \dots, p$ .

Vamos mostrar que  $h^*(I_f) = I_g$ .

Primeiro mostremos que  $h^*(I_f) \subset I_g$ . Para isto, basta mostrar que  $h^*(f_i) \in I_g$ , para toda  $f_i \in I_f$ . Por definição de  $h^*$ ,  $h^*(f_i) = f_i \circ h$ .

Então,

$$h^*(f_i) = f_i \circ h \stackrel{(*)}{=} \sum_{j=1}^p a_{ij} g_j \in I_g,$$

como queríamos.

Agora mostremos que  $I_g \subset h^*(I_f)$ .

Seja  $k \in I_g$ . Como  $I_{f \circ h} = I_g$ , segue que  $k \in I_{f \circ h}$ . Logo,



$$\begin{aligned}
k &= \sum_{i=1}^p a_i(f_i \circ h) \\
&= a_1(f_1 \circ h) + \dots + a_p(f_p \circ h) \\
&= h^*(a_1 f_1) + \dots + h^*(a_p f_p) \\
&= h^*(a_1 f_1 + \dots + a_p f_p) \\
&= h^*\left(\sum_{i=1}^p a_i f_i\right)
\end{aligned}$$

Como  $\sum_{i=1}^p a_i f_i \in I_f$ , temos que  $k \in h^*(I_f)$ .

Portanto  $h^*(I_f) = I_g$ .

Reciprocamente, suponhamos que  $I_f$  e  $I_g$  são isomorficamente induzidos, ou seja existe um isomorfismo induzido  $h^* : \varepsilon_n \rightarrow \varepsilon_n$  para algum germe inversível  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ , o qual  $h^*(I_f) = I_g$ . Logo  $I_{f \circ h} = I_g$ , e assim os germes  $f \circ h$  e  $g$  são  $\mathcal{C}$ -equivalentes. Pela Observação 2.6  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{K}$ -equivalentes.

□

Embora os grupos de Mather não sejam grupos de Lie e  $\varepsilon_{n,p}$  não seja variedade, é possível seguir o modelo finito de grupos de Lie agindo em variedades e definir objetos que são chamados espaços tangentes à órbita de um germe  $f$ , com respeito a um destes grupos. Neste texto estamos interessados em definir o espaço tangente à  $\mathcal{K}$ -órbita de um germe  $f$ . Como  $\mathcal{K}$  é o produto semi-direto de  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{C}$  vamos analisar duas situações separadamente, antes de definir o  $\mathcal{K}$ -espaço tangente.

Considere inicialmente a aplicação:

$$\begin{aligned}
\phi_f : \mathcal{R} &\rightarrow \varepsilon_{n,p}^0 \\
h &\mapsto f \circ h^{-1}.
\end{aligned}$$

Podemos pensar no espaço tangente à órbita  $\mathcal{R} \cdot f$  como sendo a imagem da diferencial de  $\phi_f$  na identidade.

Observe que  $\phi_f(id) = f$ , onde  $id$  é o germe em zero da aplicação identidade em  $\mathbb{R}^n$ . Logo a diferencial de  $\phi_f$  na identidade é a aplicação linear

$$D_{id}(\phi_f) : T_{id}\mathcal{R} \rightarrow T_f \varepsilon_{n,p}^0.$$

Como  $\mathcal{R}$  é aberto em  $\varepsilon_{n,n}^0$  e  $\varepsilon_{n,p}^0$  tem estrutura de espaço vetorial temos que  $T_{id}\mathcal{R} = \varepsilon_{n,n}^0$  e  $T_f\varepsilon_{n,p}^0 = \varepsilon_{n,p}^0$ .

Assim

$$D_{id}(\phi_f) : \varepsilon_{n,n}^0 \rightarrow \varepsilon_{n,p}^0.$$

Agora queremos deduzir uma fórmula para  $D_{id}(\phi_f)$ .

Considere  $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \varepsilon_{n,n}^0$ .

Podemos pensar em  $h$  como o vetor tangente à curva  $\gamma(t) = id + th$  com  $t$  próximo de zero. Assim  $\gamma'(0) = h$ .

Agora consideremos a curva através de  $f$  que leva  $t$  em  $\phi_f(\gamma(t))$ . Então

$$(\phi_f \circ \gamma(t))(x) = \phi_f(\gamma(t))(x) = (f \circ (id + th)^{-1})(x) = f(x_1 + th_1(x), \dots, x_n + th_n(x)) \text{ e}$$

$$\phi_f \circ \gamma(0) = f(x).$$

Logo

$$D_{id}(\phi_f)(h) = D_{id}(\phi_f)(\gamma'(0)) = (\phi_f \circ \gamma)'(0) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Consequentemente a diferencial procurada é dada por

$$D_{id}(\phi_f) : \quad \varepsilon_{n,n}^0 \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{n,p}^0$$

$$(h_1, \dots, h_n) \mapsto h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

A imagem dessa aplicação linear será o submódulo  $\varepsilon_n \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}$  do  $\varepsilon_n$ -módulo  $\varepsilon_{n,p}^0$ . Este submódulo é chamado de módulo Jacobiano de  $f$ , e o denotaremos por  $J_f = \left\langle \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right\rangle$ .

A segunda aplicação a ser considerada aqui é:

$$F_f : \quad \mathcal{C} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{n,p}^0$$

$$(id, H) \mapsto H \circ (id, f).$$

Para simplificar nossa notação, identificaremos cada  $\mathcal{C}$ -equivalência  $(id, H)$ , onde  $H(x, y) = (x, \theta(x, y))$ , com o germe de aplicação  $\theta$ .

Observemos que  $\psi_f : \varepsilon_{n+p, n+p}^0 \rightarrow \varepsilon_{n,p}^0$ , dada por  $\psi_f(\theta) = \theta \circ (id, f)$  é uma aplicação linear, logo  $\psi_f|_{\mathcal{C}} = F_f$  também é uma aplicação linear e assim  $D_{id}F_f = F_f$ .

Queremos portanto descobrir qual é a imagem de  $F_f$  quando aplicada a germes  $\theta(x, y)$  tais que  $\theta(x, 0) = 0$  para todo  $x$  em  $\mathbb{R}^n$ .

Sejam  $\theta_1, \dots, \theta_p$  as componentes de  $\theta$ , que claramente satisfazem  $\theta_i(x, 0) = 0$ ,  $1 \leq i \leq p$ , para todo  $x$  em  $\mathbb{R}^n$ .

Pelo Lema de Hadamard  $\theta_i(x, y) = \sum_{j=1}^p y_j \alpha_j$ , com  $\alpha_j$  funções de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , e portanto,

$$\theta_i(x, f(x)) = \sum_{j=1}^p f_j \alpha_j.$$

Ou seja,  $\theta_i \in I_f$ .

Provaremos agora que  $D_{id}F_f(T_{id}\mathcal{C}) = F_f(\mathcal{C}) = I_f \cdot \varepsilon_{n,p}$ .

Primeiramente note que

$$\theta \in T_{id}\mathcal{C} \Rightarrow F_f(\theta) = \theta \circ (id, f) = (\theta_1 \circ (id, f), \dots, \theta_p \circ (id, f)) \in I_f \cdot \varepsilon_{n,p}.$$

E portanto  $D_{id}F_f(T_{id}\mathcal{C}) \subset I_f \cdot \varepsilon_{n,p}$ .

Reciprocamente considere  $v = (0, 0, \dots, f_{j_0}, \dots, 0, 0) \in I_f \cdot \varepsilon_{n,p}$ , onde  $f_{j_0}$  ocupa a  $i_0$ -ésima posição na  $p$ -upla.

Tome  $H_t : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$  definida pela matriz  $(n+p) \times (n+p)$  dada por  $I + M$ , onde  $M = (a_{ij})_{(n+p) \times (n+p)}$ , com  $a_{n+i_0, n+j_0} = 1 + t$  com o restante das entradas nulas e  $I$  a matriz identidade em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ .

Claramente temos que  $H_t(x, 0) = (x, 0)$ , e portanto para  $t \neq -1$ ,  $H_t \in \mathcal{C}$ .

Agora considere a curva dada por  $\gamma(t) = H_t$ . Note que  $\gamma'(0)$  é dada pela matriz  $(b_{ij})_{(n+p) \times (n+p)}$ , onde  $b_{n+i_0, n+j_0} = 1$  e o restante das entradas são nulas.

Disto segue que  $\gamma'(0) \cdot (x, f(x)) = (0, \dots, 0, f_{j_0}, 0, \dots, 0)$ .

Identificando  $\theta$  com  $\gamma'(0)$  temos que  $F_f(\theta) = \theta \circ (id, f) = (0, \dots, 0, f_{j_0}, 0, \dots, 0) = v$ .

Portanto, cada um dos geradores de  $I_f \cdot \varepsilon_{n,p}$  pertence à  $D_{id}F_f(T_{id}\mathcal{C})$ , que é um espaço vetorial, logo  $I_f \cdot \varepsilon_{n,p} \subset D_{id}F_f(T_{id}\mathcal{C})$ , como queríamos.

Dessa forma chegamos à seguinte definição formal:

**Definição 2.15.** *Dado um germe  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ , definimos o  $\mathcal{K}$ -espaço tangente de  $f$  como sendo o  $\varepsilon_n$ -submódulo  $T_f = J_f + I_f \cdot \varepsilon_{n,p}$ .*

Definimos a  $\mathcal{K}$ -codimensão de  $f$  como sendo a codimensão de  $T_f$ , ou seja,

$$\mathcal{K}\text{-cod } f = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon_{n,p}}{T_f}.$$

Como já vimos no Capítulo 1, o conjunto  $\varepsilon_{n,p}$  pode ser identificado com  $p$ -cópias de  $\varepsilon_n$  (ou seja,  $\varepsilon_n \times \dots \times \varepsilon_n$   $p$ -vezes). Assim,  $I_f \cdot \varepsilon_{n,p}$  é gerado por todos os vetores da forma

$$(0, 0, \dots, f_i, 0, \dots, 0),$$

com  $f_i$  percorrendo as  $p$  posições da  $p$ -upla,  $i = 1, \dots, p$ .

Por outro lado  $J_f = \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle$ .

**Exemplo 2.16.** *Seja  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  dada por  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .*

*Neste caso,  $J_f = \langle x, y \rangle$  e  $I_f = \langle x^2 + y^2 \rangle$ . Assim, o  $\mathcal{K}$ -espaço tangente de  $f$  é dado por  $T_f = J_f + I_f \cdot \varepsilon_2 = \langle x, y \rangle + \langle x^2 + y^2 \rangle = \langle x, y \rangle = J_f$ .*

**Exemplo 2.17.** *Seja  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  dada por  $f(x, y) = (x^2 + y^2, xy)$ .*

*Aqui temos  $J_f = \langle (2x, y), (2y, x) \rangle$  e  $I_f \cdot \varepsilon_{2,2} = \langle (x^2 + y^2, 0), (0, x^2 + y^2), (0, xy), (xy, 0) \rangle$ . Assim, o  $\mathcal{K}$ -espaço tangente de  $f$  é dado por*

$$\begin{aligned} T_f &= \langle (2x, y), (2y, x), (x^2 + y^2, 0), (0, x^2 + y^2), (0, xy), (xy, 0) \rangle \\ &= \langle (2x, y), (2y, x), (0, xy), (xy, 0) \rangle. \end{aligned}$$

## 2.1 $\mathcal{K}$ -invariantes

Nesta seção investigaremos alguns invariantes para o grupo  $\mathcal{K}$ . Dizemos que uma Propriedade P é invariante com respeito à  $\mathcal{K}$ -equivalência, se  $f \underset{\mathcal{K}}{\sim} g$  e  $f$  possui a propriedade P então  $g$  também possui a propriedade P.

### 2.1.1 $\mathcal{K}$ -codimensão

**Proposição 2.18.** ([13]) *Seja  $M$  um  $\varepsilon_n$ -módulo livre com uma base finita, e seja  $I \subseteq M$  um  $\varepsilon_n$ -submódulo.*

*$I$  tem codimensão finita em  $M$  se, e somente se, existe um inteiro  $k \geq 1$  tal que  $\mathcal{M}_n^k \cdot M \subseteq I$ .*

*Demonstração.* Suponha  $\text{cod} I = j - 1$  e considere a sequência de inclusões

$$I \subset I + \mathcal{M}_n^j \cdot M \subset I + \mathcal{M}_n^{j-1} \cdot M \subset \dots \subset I + \mathcal{M}_n^2 \cdot M \subset I + \mathcal{M}_n \cdot M \subset \varepsilon_n.$$

Então,

$$0 = \text{cod} \varepsilon_n \leq \text{cod}(I + \mathcal{M}_n \cdot M) \leq \text{cod}(I + \mathcal{M}_n^2 \cdot M) \leq \dots \leq \text{cod}(I + \mathcal{M}_n^j \cdot M) \leq \text{cod} I = j - 1.$$

Como na expressão acima existem  $j + 1$  desigualdades e  $j$  números inteiros, então deve ocorrer pelo menos uma igualdade. Assim, existe  $k \geq 1$  tal que

$$\text{cod}(I + \mathcal{M}_n^k \cdot M) = \text{cod}(I + \mathcal{M}_n^{k+1} \cdot M).$$

Mas

$$I + \mathcal{M}_n^{k+1} \cdot M \subset I + \mathcal{M}_n^k \cdot M \Rightarrow I + \mathcal{M}_n^{k+1} \cdot M = I + \mathcal{M}_n^k \cdot M.$$

Assim,

$$\mathcal{M}_n^k \cdot M \subset I + \mathcal{M}_n^k \cdot M = I + \mathcal{M}_n^{k+1} \cdot M = I + \mathcal{M}_n \mathcal{M}_n^k \cdot M.$$

Portanto, pelo Lema de Nakayama temos  $\mathcal{M}_n^k \cdot M \subset I$ , como queríamos.

Reciprocamente, suponha  $\mathcal{M}_n^k \cdot M \subset I$  para algum  $k \in \mathbb{N}$ . Então, concluímos que  $\text{cod} I \leq \text{cod}(\mathcal{M}_n^k \cdot M) < \infty$ .  $\square$

**Observação 2.19.** Da Proposição 2.18 segue que uma condição necessária e suficiente para que  $f$  tenha  $\mathcal{K}$ -codimensão finita é que exista um inteiro  $k \geq 1$  tal que  $\mathcal{M}_n^k \cdot \varepsilon_{n,p} \subseteq T_f$ .

Note que  $\mathcal{M}_n^k \cdot \varepsilon_{n,p} = \langle (0, 0, \dots, m, \dots, 0) \rangle$ , onde  $m$  é um monômio de grau  $k$ , nas variáveis  $x_1, \dots, x_n$ , percorrendo as  $p$  posições possíveis da  $p$ -upla.

**Exemplo 2.20.** O germe  $f(x, y) = (x^2, y^2)$ , (“lenço dobrado em 4”), tem  $\mathcal{K}$ -codimensão finita.

De fato, note que  $J_f$  é gerado por  $\frac{\partial f}{\partial x} = (2x, 0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = (0, 2y)$ , enquanto  $I_f \cdot \varepsilon_{2,2}$  é gerado por  $(x^2, 0)$ ,  $(0, x^2)$ ,  $(y^2, 0)$  e  $(0, y^2)$ . Portanto,

$$T_f = \langle (x, 0), (0, y), (0, x^2), (y^2, 0) \rangle.$$

Verifiquemos se a Observação 2.19 é cumprida para algum  $k$ .

Considere  $k = 1$ . Neste caso

$$\mathcal{M}_2 \cdot \varepsilon_{2,2} = \langle (x, 0), (y, 0), (0, x), (0, y) \rangle.$$

Daí claramente  $(y, 0) \notin T_f$ , logo  $\mathcal{M}_2 \cdot \varepsilon_{2,2} \not\subset T_f$ .

Consideremos agora  $k = 2$ . Então, como  $\mathcal{M}_2^2$  é gerado pelos monômios  $x^2$ ,  $xy$  e  $y^2$ , temos que

$$\mathcal{M}_2^2 \cdot \varepsilon_{2,2} = \langle (x^2, 0), (xy, 0), (y^2, 0), (0, x^2), (0, xy), (0, y^2) \rangle.$$

Como

$$(xy, 0) = y(x, 0) \text{ e } (0, xy) = x(0, y), \text{ segue que } \mathcal{M}_2^2 \cdot \varepsilon_{2,2} \subset T_f.$$

Logo  $f$  tem  $\mathcal{K}$ -codimensão finita.

**Proposição 2.21.** ([13]) *Sejam  $M$  um  $\varepsilon_n$ -módulo livre com uma base finita e  $I \subseteq M$  um  $\varepsilon_n$ -submódulo.*

*$I$  tem codimensão finita se, e somente se,  $\text{cod}_k I = 0$  exceto para um número finito de termos, onde*

$$\text{cod}_k I = \dim \frac{I + \mathcal{M}_n^k \cdot M}{I + \mathcal{M}_n^{k+1} \cdot M}.$$

Neste caso

$$\text{cod} I = \text{cod}_0 I + \text{cod}_1 I + \dots .$$

*Demonstração.* Suponha  $\text{cod} I$  finita, então existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{M}_n^k \cdot M \subset I$ .

Assim, se  $j \geq k$  temos

$$\mathcal{M}_n^j \cdot M \subset \mathcal{M}_n^k \cdot M \subset I.$$

Logo,

$$\text{cod}_j I = \dim \frac{I}{I} = 0, \forall j \geq k.$$

Reciprocamente suponha  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\text{cod}_{k_0} I = 0$ , então

$$I + \mathcal{M}_n^{k_0} \cdot M = I + \mathcal{M}_n^{k_0+1} \cdot M$$

e portanto

$$\mathcal{M}_n^{k_0} \cdot M \subset I + \mathcal{M}_n^{k_0+1} \cdot M.$$

Pelo Lema de Nakayama segue que  $\mathcal{M}_n^{k_0} \cdot M \subset I$ , ou seja,  $I$  tem codimensão finita.

Agora resta mostrar a segunda parte da proposição. Suponha que  $I$  tem codimensão finita, então  $\text{cod}_k I = 0$  exceto para um número finito de termos. Note que:

$$\text{cod}_0 I + \text{cod}_1 I + \dots = \dim \frac{M}{I + \mathcal{M}_n \cdot M} + \dim \frac{I + \mathcal{M}_n \cdot M}{I + \mathcal{M}_n^2 \cdot M} + \dots + \dim \frac{I + \mathcal{M}_n^{k_0-1} \cdot M}{I + \mathcal{M}_n^{k_0} \cdot M}.$$

Como  $I$  tem codimensão finita segue que

$$\dim \frac{I + \mathcal{M}_n^k \cdot M}{I + \mathcal{M}_n^{k+1} \cdot M} = \text{cod}(I + \mathcal{M}_n^{k+1} \cdot M) - \text{cod}(I + \mathcal{M}_n^k \cdot M),$$

logo,

$$\begin{aligned} \text{cod}_0 I + \text{cod}_1 I + \dots &= \\ &= (\text{cod}(I + \mathcal{M}_n \cdot M) - \text{cod} M) + \dots + (\text{cod}(I + \mathcal{M}_n^{k_0} \cdot M) - \text{cod}(I + \mathcal{M}_n^{k_0-1} \cdot M)) \\ &= \text{cod}(I + \mathcal{M}_n^{k_0} \cdot M) - \text{cod} M \\ &= \text{cod}(I + \mathcal{M}_n^{k_0} \cdot M). \end{aligned}$$

Como  $\mathcal{M}_n^{k_0} \cdot M \subset I$  temos  $\text{cod}(I + \mathcal{M}_n^{k_0} \cdot M) = \text{cod} I$ .

□

**Observação 2.22.** Seja  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ . Fazendo  $M = \varepsilon_{n,p}$  e  $I = T_f$  na Proposição 2.21 temos que, se  $f$  tem  $\mathcal{K}$ -codimensão finita, então

$$\mathcal{K}\text{-cod} f = \text{cod}_0 f + \text{cod}_1 f + \dots$$

onde

$$\text{cod}_k f = \dim \frac{T_f + \mathcal{M}_n^k \cdot \varepsilon_{n,p}}{T_f + \mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \varepsilon_{n,p}}.$$

**Observação 2.23.** Note que se nenhuma das componentes  $f_1, \dots, f_p$  de  $f$  envolve termos lineares então  $T_f \subseteq \mathcal{M}_n \cdot \varepsilon_{n,p}$  e portanto  $\text{cod}_0 f = p$ .

**Exemplo 2.24.** Vamos calcular a  $\mathcal{K}$ -codimensão do germe  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  dado por  $f(x, y) = (x^2, y^2)$ .

Como vimos no Exemplo 2.20  $T_f$  é gerado por  $(x, 0)$ ,  $(y^2, 0)$ ,  $(0, y)$  e  $(0, x^2)$ . Pela Observação 2.23  $\text{cod}_0 f = 2$ . Para calcularmos  $\text{cod}_1 f$  temos primeiro que determinar quais geradores de  $\mathcal{M}_2 \cdot \varepsilon_{2,2}$  estão em  $T_f + \mathcal{M}_2^2 \cdot \varepsilon_{2,2}$ . Observe que:

$$\mathcal{M}_2 \cdot \varepsilon_{2,2} = \langle (x, 0), (y, 0), (0, x), (0, y) \rangle,$$

$$\mathcal{M}_2^2 \cdot \varepsilon_{2,2} = \langle (x^2, 0), (y^2, 0), (0, x^2), (0, y^2), (xy, 0), (0, xy) \rangle.$$

Logo,

$$T_f + \mathcal{M}_2^2 \cdot \varepsilon_{2,2} = \langle (x, 0), (y^2, 0), (0, x^2), (0, y), (xy, 0), (0, xy) \rangle.$$

Daí, segue que  $(y, 0)$  e  $(0, x)$  não pertencem a  $T_f + \mathcal{M}_2^2 \cdot \varepsilon_{2,2}$ . E portanto os vetores  $\{(y, 0), (0, x)\}$  formam uma base para o suplemento de  $T_f + \mathcal{M}_2^2 \cdot \varepsilon_{2,2}$  em  $T_f + \mathcal{M}_2 \cdot \varepsilon_{2,2}$ . Então  $\text{cod}_1 f = 2$ .

Podemos parar por aqui, pois como já vimos no Exemplo 2.20,  $\mathcal{M}_2^2 \cdot \varepsilon_{2,2} \subset T_f$ , ou seja,  $f$  tem  $\mathcal{K}$ -codimensão finita, e assim  $\text{cod}_k f = 0$  para todo  $k \geq 2$ .

Portanto,

$$\mathcal{K}\text{-cod } f = \text{cod}_0 f + \text{cod}_1 f = 2 + 2 = 4.$$

**Exemplo 2.25.** Considere o germe  $f : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  definido por  $f(x) = (0, \dots, 0, x^{t+1})$  com  $t \geq 1$ , com  $t \in \mathbb{Z}$ . A  $\mathcal{K}\text{-cod } f = pt + p - 1$ .

Aqui o módulo Jacobiano  $J_f$  é gerado por  $(0, \dots, 0, x^t)$  e o ideal  $I_f$  é gerado pelos vetores da forma  $(0, \dots, 0, x^{t+1}, 0, \dots, 0)$ , onde  $x^{t+1}$  percorre as  $p$  posições da  $p$ -upla.

Segue-se que o  $\mathcal{K}$ -espaço tangente  $T_f$  é gerado pelos vetores  $(0, \dots, 0, x^{t+1}, 0, \dots, 0)$  (com  $x^{t+1}$  percorrendo as  $p - 1$  primeiras posições da  $p$ -upla) mais o vetor  $(0, \dots, 0, x^t)$ .

Calculemos a  $\text{cod}_k f$ .

O ideal  $\mathcal{M}_1^k$  é gerado por  $x^k$ , logo o submódulo  $\mathcal{M}_1^k \cdot \varepsilon_{1,p}$  é gerado pelos vetores da forma  $(0, \dots, 0, x^k, 0, \dots, 0)$ , com  $x^k$  percorrendo as  $p$  posições da  $p$ -upla.

Precisamos verificar quais desses geradores pertencem ao submódulo  $T_f + \mathcal{M}_1^{k+1} \cdot \varepsilon_{1,p}$ .

Consideremos os três casos a seguir:

- $k < t$  : nenhum dos geradores de  $\mathcal{M}_1^k \cdot \varepsilon_{1,p}$  pertence a  $T_f + \mathcal{M}_1^{k+1} \cdot \varepsilon_{1,p}$ , e como há  $p$  geradores temos que  $\text{cod}_k f = p$ .
- $k = t$  : neste caso o único gerador de  $\mathcal{M}_1^k \cdot \varepsilon_{1,p}$  que pertence a  $T_f + \mathcal{M}_1^{k+1} \cdot \varepsilon_{1,p}$  é  $(0, \dots, 0, x^t)$ , portanto  $\text{cod}_k f = p - 1$ .
- $k > t$  : todos os geradores de  $\mathcal{M}_1^k \cdot \varepsilon_{1,p}$  pertencem a  $T_f + \mathcal{M}_1^{k+1} \cdot \varepsilon_{1,p}$  e portanto  $\text{cod}_k f = 0$ .

Assim temos que  $\mathcal{K}\text{-cod } f = pt + p - 1$ .



**Exemplo 2.26.** Vamos calcular a  $\mathcal{K}$ -codimensão de  $f(x, y) = (xy, x^3 + y^3)$ .

Aqui temos  $J_f = \langle (x, 3y^2), (y, 3x^2) \rangle$  e  $I_f \cdot \varepsilon_{2,2} = \langle (xy, 0), (0, xy), (x^3 + y^3, 0), (0, x^3 + y^3) \rangle$ .

Agora veja que:

$$(0, x^3) = \frac{1}{3}x(y, 3x^2) - \frac{1}{3}(xy, 0);$$

$$(0, y^3) = \frac{1}{3}y(x, 3y^2) - \frac{1}{3}(xy, 0);$$

$$(y^3, 0) = y^2(y, 3x^2) - 3xy(0, xy);$$

$$(x^3, 0) = x^2(x, 3y^2) - 3xy(0, xy).$$

Assim  $(x^3, 0), (0, x^3), (y^3, 0), (0, y^3) \in T_f = J_f + I_f \cdot \varepsilon_{2,2}$ . Além disso sabemos que

$$\mathcal{M}_2^3 \cdot \varepsilon_{2,2} = \langle (x^3, 0), (0, x^3), (xy^2), (0, xy^2), (x^2y, 0), (0, x^2y), (y^3, 0), (0, y^3) \rangle,$$

e como  $(xy^2, 0), (0, xy^2), (x^2y, 0), (0, x^2y)$  também pertencem a  $T_f$ , segue que

$$\mathcal{M}_2^3 \cdot \varepsilon_{2,2} \subset T_f + \mathcal{M}_2^4 \cdot \varepsilon_{2,2} = T_f + \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_2^3 \cdot \varepsilon_{2,2}.$$

Portanto pelo Lema de Nakayama, temos que  $\mathcal{M}_2^3 \cdot \varepsilon_{2,2} \subset T_f$ , ou seja,  $f$  tem  $\mathcal{K}$ -codimensão finita. Sabendo desse fato, vamos ao cálculo da  $\mathcal{K}$ -codimensão de  $f$ .

$$\text{cod}_0 f = \dim \frac{T_f + \mathcal{M}_2^0 \cdot \varepsilon_{2,2}}{T_f + \mathcal{M}_2 \cdot \varepsilon_{2,2}} = \frac{\varepsilon_{2,2}}{\mathcal{M}_2 \cdot \varepsilon_{2,2}} = 2;$$

$$\text{cod}_1 f = \dim \frac{T_f + \mathcal{M}_2 \cdot \varepsilon_{2,2}}{T_f + \mathcal{M}_2^2 \cdot \varepsilon_{2,2}} = \frac{\mathcal{M}_2 \cdot \varepsilon_{2,2}}{T_f + \mathcal{M}_2^2 \cdot \varepsilon_{2,2}} = 2;$$

$$\text{cod}_2 f = \dim \frac{T_f + \mathcal{M}_2^2 \cdot \varepsilon_{2,2}}{T_f + \mathcal{M}_2^3 \cdot \varepsilon_{2,2}} = \frac{\mathcal{M}_2^2 \cdot \varepsilon_{2,2}}{T_f} = 2.$$

Para  $k \geq 3$  temos que  $\mathcal{M}_2^k \subseteq T_f$  e portanto a  $\text{cod}_k f = 0$ .

Com isso a  $\mathcal{K}$ -cod  $f = \text{cod}_0 f + \text{cod}_1 f + \text{cod}_2 f = 2 + 2 + 2 = 6$ .

**Proposição 2.27.** ([13]) Se dois germes são  $\mathcal{K}$ -equivalentes então eles tem a mesma  $\mathcal{K}$ -codimensão.

*Demonstração.* Vamos inicialmente mostrar a seguinte propriedade **P**:

“Seja  $u = (u_{ij})$  uma matriz inversível  $p \times p$ , com entradas em  $\varepsilon_n$ . Tome  $U : \varepsilon_{n,p} \rightarrow \varepsilon_{n,p}$  um isomorfismo entre espaços vetoriais, dado por  $f \mapsto u \cdot f$ , onde pensamos em  $f$  como um vetor coluna. Chamemos  $g = u \cdot f$ . Então  $U(T_f) = T_g$ .”

Observe que

$$I_g \cdot \varepsilon_{n,p} \subseteq I_f \cdot \varepsilon_{n,p} \subset U(I_f \cdot \varepsilon_{n,p}) \subseteq U(T_f) \quad (*)$$

De fato, primeiramente note que  $g = u \cdot f$ , logo  $I_g \subseteq I_f$  e assim  $I_g \cdot \varepsilon_{n,p} \subseteq I_f \cdot \varepsilon_{n,p}$ .

Agora note que  $U(I_f \cdot \varepsilon_{n,p}) \subseteq U(T_f)$ . Resta mostrar que  $I_f \cdot \varepsilon_{n,p} \subset U(I_f \cdot \varepsilon_{n,p})$ . Então seja  $(0, \dots, 0, f_i, 0, \dots, 0) \in I_f \cdot \varepsilon_{n,p}$ . Vamos mostrar que existe um  $h \in I_f \cdot \varepsilon_{n,p}$  tal que  $U(h) = (0, \dots, 0, f_i, 0, \dots, 0)$ . Note que

$$U(h) = (0, \dots, 0, f_i, 0, \dots, 0) \Leftrightarrow u \cdot h = (0, \dots, 0, f_i, 0, \dots, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_{11}h_1 + u_{12}h_2 + \dots + u_{1p}h_p = 0 \\ \vdots \\ u_{i1}h_1 + u_{i2}h_2 + \dots + u_{ip}h_p = f_i \\ \vdots \\ u_{p1}h_1 + u_{p2}h_2 + \dots + u_{pp}h_p = 0 \end{cases}$$

Como  $(u_{ij})$  é uma matriz inversível, temos que  $\det(u_{ij}) \neq 0$ . Pela regra de Cramer,

$$h_j = \frac{\det D}{\det(u_{ij})}$$

onde

$$D = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1j-1} & 0 & u_{1j+1} & \dots & u_{1p} \\ & & & \vdots & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & f_i & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & \vdots & & & \\ u_{p1} & \dots & u_{pj-1} & 0 & u_{pj+1} & \dots & u_{pp} \end{pmatrix}.$$

Como  $\det D$  é uma combinação linear de  $f_i$ , temos que cada componente de  $h$  é uma combinação linear de  $f_i$ , e portanto  $h$  é uma combinação linear de  $(0, \dots, 0, f_i, 0, \dots, 0) \in I_f \cdot \varepsilon_{n,p}$  com  $f_i$  percorrendo as  $p$  posições da  $p$ -upla. Logo  $h \in I_f \cdot \varepsilon_{n,p}$  como queríamos.

Por outro lado,

$$J_g \subseteq U(J_f) + I_f \cdot \varepsilon_{n,p} \subset U(J_f) + U(I_f \cdot \varepsilon_{n,p}) = U(J_f + I_f \cdot \varepsilon_{n,p}) = U(T_f) \quad (**).$$

A primeira inclusão segue da regra de diferenciação de produto de duas funções, pois  $g = u \cdot f$ . A outra inclusão é imediata.

$$\text{Assim por (*) e (**)} \quad T_g = J_g + I_g \cdot \varepsilon_{n,p} \subset U(T_f).$$

Por um raciocínio análogo mostra-se que  $T_f \subseteq U^{-1}(T_g)$ . Logo  $U(T_f) = T_g$  e a propriedade **P** está provada.

Seja  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  um germe de difeomorfismo e considere  $\psi : \varepsilon_{n,p} \rightarrow \varepsilon_{n,p}$  o isomorfismo dado por  $f \mapsto f \circ h$ .

Nessas condições, se  $g = f \circ h$  podemos afirmar:

$$\mathbf{Afirmação 1:} \quad \psi(T_f) = T_g.$$

De fato, assim como antes é suficiente provar que  $T_g \subset \psi(T_f)$ , o que se reduz a provar que  $I_g \cdot \varepsilon_{n,p} \subset \psi(T_f)$  e  $J_g \subset \psi(T_f)$ .

A primeira inclusão segue do fato que

$$I_g \cdot \varepsilon_{n,p} = I_{\psi(f)} \cdot \varepsilon_{n,p} = \psi(I_f \cdot \varepsilon_{n,p}) \subset \psi(T_f).$$

A outra inclusão deve-se à aplicação da regra da cadeia para  $g = f \circ h$ :

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \circ h \right), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Portanto  $\frac{\partial g}{\partial x_i} \in \psi(J_f) \subset \psi(T_f)$ . Logo  $J_g \subseteq \psi(T_f)$ .

Utilizando a Afirmação 1 vamos agora provar que a  $\mathcal{K}$ -codimensão é um invariante para a  $\mathcal{K}$ -equivalência.

Sejam  $f_1, f_2 : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  germes  $\mathcal{K}$ -equivalentes. Então, existe um germe inversível  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tal que  $f_1 \underset{\mathcal{K}}{\sim} f_2 \circ h$ . Pela Proposição 2.7, existe uma matriz inversível  $p \times p$ ,  $u = (u_{ij})$ , com entradas em  $\varepsilon_n$  tal que  $f_1 = u \cdot (f_2 \circ h)$ .

Pela propriedade **P**, segue que  $T_{f_1}$  é isomorfo a  $T_{f_2 \circ h}$  e pela Afirmação 1,  $T_{f_2 \circ h}$  é isomorfo a  $T_{f_2}$ . Assim, existe um isomorfismo  $U \circ \psi$  que aplica  $T_{f_1}$  sobre  $T_{f_2}$ .

Logo  $\frac{\varepsilon_{n,p}}{T_{f_1}}$  é isomorfo a  $\frac{\varepsilon_{n,p}}{T_{f_2}}$ , e portanto,  $f_1$  e  $f_2$  têm a mesma  $\mathcal{K}$ -codimensão.

□

**Exemplo 2.28.** Como já vimos, os germes  $f(x) = (x^2, 0)$  e  $g(x) = (x^2, x^3)$  são  $\mathcal{K}$ -equivalentes, logo pela Proposição 2.27 possuem a mesma  $\mathcal{K}$ -codimensão, que neste caso é 2.

**Exemplo 2.29.** Vimos também que os germes dados por  $f(x, y) = (x^2, y^2)$  e  $g(x, y) = (x^2 + y^2, xy)$  são  $\mathcal{K}$ -equivalentes. Além disso  $f$  possui  $\mathcal{K}$ -codimensão igual a 4. De acordo com a Proposição 2.27 a  $\mathcal{K}$ -codimensão de  $g$  é 4.

## 2.1.2 Símbolo de Boardman

**Definição 2.30.** Sejam  $I$  um ideal em  $\varepsilon_n$ ,  $x_1, \dots, x_n$  um sistema de coordenadas em  $\mathbb{R}^n$  e  $s \geq 1$  um inteiro. Definimos  $\Delta_s I = I + I'$  onde  $I'$  é o ideal gerado pelos determinantes das submatrizes  $s \times s$  da matriz

$$JI = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

com  $f_1, \dots, f_p$  os geradores do ideal  $I$ .

**Proposição 2.31.** ([13]) O ideal  $\Delta_s I$  obtido na definição acima não depende de nenhuma mudança de geradores e nenhuma mudança de coordenadas, isto é, se  $g_1, \dots, g_q$  são outros geradores para o ideal  $I$  e  $y_1, \dots, y_n$  um outro sistema de coordenadas, então  $\Delta_s I$  coincide com o ideal gerado por  $I$  e pelos determinantes das submatrizes  $s \times s$  da matriz jacobiana

$$JI = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_q}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_q}{\partial y_n} \end{pmatrix}. \quad (\star)$$

*Demonstração.* É suficiente provar que qualquer determinante das submatrizes  $s \times s$  de  $(\star)$  está em  $\Delta_s I$ . Cada  $g_i$  pode ser escrito como combinação linear de  $f_k$ , com coeficientes em  $\varepsilon_n$ . Então cada  $\frac{\partial g_i}{\partial y_j}$  pode ser escrito como combinação linear de  $\frac{\partial f_k}{\partial y_j}$  mais um elemento de  $I$ . Usando a multilinearidade dos determinantes vemos que qualquer determinante das submatrizes  $s \times s$  de  $(\star)$  está no ideal gerado por  $I$  e pelos menores subdeterminantes

$s \times s$  da matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial y_n} \end{pmatrix}. \quad (**)$$

Então será suficiente mostrar que qualquer determinante das submatrizes  $s \times s$  de  $(**)$  está em  $\Delta_s I$ . Para isso observe que pela regra da cadeia escrevemos  $\frac{\partial}{\partial y_j}$  como uma combinação linear de  $\frac{\partial}{\partial x_k}$ , com coeficientes em  $\varepsilon_n$ . O resultado segue aplicando novamente a multilinearidade do determinante.

□

**Observação 2.32.** Note que  $\Delta_s I = I$  para todo  $s > n$  e que  $I \subseteq \Delta_n I \subseteq \Delta_{n-1} I \subseteq \dots \subseteq \Delta_1 I$ .

**Definição 2.33.** Definimos  $\Delta^s I = \Delta_{n-s+1} I$ , com  $I \subseteq \varepsilon_n$ .

**Observação 2.34.** Pela Observação 2.32 e pela Definição 2.33

$$I = \Delta^0 I \subseteq \Delta^1 I \subseteq \dots \subseteq \Delta^n I.$$

**Definição 2.35.** A extensão jacobiana crítica de um ideal  $I$ , é o último ideal  $\Delta^{i_1} I$  de  $I = \Delta^0 I \subseteq \Delta^1 I \subseteq \dots \subseteq \Delta^n I$ , que é próprio. Este ideal tem uma extensão jacobiana crítica  $\Delta^{i_2} \Delta^{i_1} I$ , e assim por diante.

Logo obtemos uma sequência  $\Delta^{i_1} I, \Delta^{i_2} \Delta^{i_1} I, \dots$  e dizemos que  $I$  tem Símbolo de Boardman  $(i_1, i_2, \dots)$ .

**Definição 2.36.** O Símbolo de Boardman de um germe  $f$  é dado pelo Símbolo de Boardman de seu ideal  $I_f$ .

**Exemplo 2.37.** Considere o germe  $f$  dado por  $f(x, y) = (xy, x^2 + y^2)$ . Vamos calcular o Símbolo de Boardman de  $f$ .

Neste caso temos que calcular o Símbolo de Boardman do ideal gerado pelas componentes da  $f$ , ou seja,  $I_f = \langle xy, x^2 + y^2 \rangle$ .

Note que

$$JI_f = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

Então

$$\Delta^0 I_f = \Delta_{2-0+1} I_f = \Delta_3 I_f = I_f;$$

$$\Delta^1 I_f = \Delta_{2-1+1} I_f = \Delta_2 I_f = \langle xy, x^2, y^2 \rangle;$$

$$\Delta^2 I_f = \Delta_{2-2+1} I_f = \Delta_1 I_f = \langle x, y \rangle.$$

Sabemos que  $\Delta^0 I_f \subset \Delta^1 I_f \subset \Delta^2 I_f$ , ou seja,  $I_f \subset \langle xy, x^2, y^2 \rangle \subset \langle x, y \rangle \neq \varepsilon_2$ . Portanto a extensão jacobiana crítica de  $I_f$  é o ideal  $\Delta^2 I_f = \langle x, y \rangle$ , e assim a primeira coordenada do Símbolo de Boardman de  $f$  é 2.

Agora considere  $M = \Delta^2 I_f = \langle x, y \rangle$ , então

$$JM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo,

$$\Delta^0 M = \Delta_{2-0+1} M = \Delta_3 M = M;$$

$$\Delta^1 M = \Delta_{2-1+1} M = \Delta_2 M = \varepsilon_2;$$

$$\Delta^2 M = \Delta_{2-2+1} M = \Delta_1 M = \varepsilon_2.$$

Portanto a extensão jacobiana crítica de  $M$  é o ideal  $\Delta^0 M = M$ . Com isso, a segunda coordenada do Símbolo de Boardman de  $f$  é 0. Observe que a partir daqui o mesmo ocorrerá para as próximas extensões jacobianas críticas.

Portanto o Símbolo de Boardman de  $f$  é  $(2, 0, 0, \dots)$ .

**Proposição 2.38.** ([13]) O Símbolo de Boardman é um invariante para a  $\mathcal{K}$ -equivalência.

*Demonstração.* Sejam  $f, f' : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ , com  $f_1, \dots, f_p$  as componentes de  $f$  e  $f'_1, \dots, f'_p$  as componentes de  $f'$ .

Como  $\mathcal{K}$  é o produto semi-direto dos grupos  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{C}$ , vamos dividir a prova da proposição em duas etapas.

**Etapa 1:** Primeiro suponhamos que  $f$  e  $f'$  são  $\mathcal{C}$ -equivalentes. Pela Proposição 2.7  $I_f = I_{f'}$ , assim os Símbolos de Boardman de  $f$  e  $f'$  coincidem pela Proposição 2.31.

**Etapa 2:** Agora suponhamos que  $f$  e  $f'$  são  $\mathcal{R}$ -equivalentes, então existe um germe de difeomorfismo  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  para o qual  $f' = f \circ h$ . As componentes  $h_1, \dots, h_n$  de  $h$  produzem um sistema de coordenadas. Calculando a matriz jacobiana de

$f'_1, \dots, f'_p$  relativa ao sistema de coordenadas canônica  $x_1, \dots, x_n$  teremos o mesmo ideal se calculássemos a matriz jacobiana de  $f_1, \dots, f_p$  relativa ao sistema de coordenadas  $h_1, \dots, h_n$ . Segue novamente da Proposição 2.31 que  $f$  e  $f'$  têm o mesmo Símbolo de Boardman.

Se  $f$  e  $f'$  são  $\mathcal{K}$ -equivalentes, combinando as idéias das Etapas 1 e 2, segue que  $f$  e  $f'$  têm o mesmo Símbolo de Boardman.  $\square$

**Proposição 2.39.** ([13]) *Considere o germe  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ . Os primeiros  $k$  inteiros Símbolos de Boardman de  $f$  dependem apenas do seu  $k$ -jato.*

*Demonstração.* Seja  $(i_1, i_2, \dots)$  o Símbolo de Boardman de  $f$ . Por definição, é evidente (por indução sobre  $k$ ) que o ideal  $\Delta^{i_k} \Delta^{i_{k-1}} \dots \Delta^{i_1} I$  é gerado pela derivadas parciais de ordem  $\leq k$  de  $f_1, \dots, f_p$ .

Agora o fato deste ideal ser próprio ou não, depende apenas dos valores de todas essas derivadas em zero. Assim  $i_k$  depende apenas do  $k$ -jato de  $f$  em zero.  $\square$

**Definição 2.40.** *Dados  $k$  inteiros  $i_1, i_2, \dots, i_k, \dots$ , dizemos que  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  é do tipo  $\Sigma^{i_1, i_2, \dots, i_k}$  se seu Símbolo de Boardman é  $(i_1, i_2, \dots, i_k, \dots)$ .*

*Definimos  $\Sigma^{i_1, i_2, \dots, i_k}$  como sendo um subconjunto do espaço dos jatos,  $J^k(n, p)$ , que compreende todos os jatos de germes do tipo  $\Sigma^{i_1, i_2, \dots, i_k}$ .*

Uma questão natural é determinar quando o conjunto de singularidade de  $k$ -ésima ordem  $\Sigma^{i_1, i_2, \dots, i_k} \subseteq J^k(n, p)$  é diferente do vazio. Para isso temos a seguinte proposição.

**Proposição 2.41.** ([13])  $\Sigma^{i_1, i_2, \dots, i_k} \subseteq J^k(n, p)$  é diferente do vazio se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas

- i)  $n \geq i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_k \geq 0$
- ii)  $i_1 \geq n - p$
- iii) Se  $i_1 = n - p$  então  $i_1 = i_2 = \dots = i_k$ .

**Exemplo 2.42.** *Em  $J^2(2, 2)$  os únicos conjuntos de singularidade diferente do vazio são:  $\Sigma^{2,2}, \Sigma^{2,1}, \Sigma^{2,0}, \Sigma^{1,1}$  e  $\Sigma^{0,0}$ .*

### 2.1.3 Germes $\mathcal{K}$ -finitamente determinados

**Definição 2.43.** *Seja  $k \in \mathbb{N}$ . Dizemos que o germe  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  é  $k$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinado se, para todo  $g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  com  $j^k g(0) = j^k f(0)$ , então  $g$  é  $\mathcal{K}$ -equivalente a  $f$ .*

**Observação 2.44.** *Em particular, se  $f$  é  $k$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinado, então  $f \underset{\mathcal{K}}{\sim} j^k f(0)$ .*

*De fato, tomando  $g = j^k f(0)$ , temos que  $j^k f(0) = j^k g(0)$ . Como  $f$  é  $k$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinado, temos que  $f \underset{\mathcal{K}}{\sim} j^k f(0)$ .*

**Definição 2.45.** *Dizemos que  $f$  é  $\mathcal{K}$ -finitamente determinado se existe um  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $f$  é  $k$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinado.*

**Proposição 2.46.** *Se  $f$  é  $k_0$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinado, então  $f$  é  $k$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinado para todo  $k \geq k_0$ .*

*Demonstração.* Sejam  $g$  tal que  $j^k g(0) = j^k f(0)$ ,  $k \geq k_0$ . Logo,  $j^{k_0} g(0) = j^{k_0} f(0)$ .

Como  $f$  é  $k_0$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinado segue que  $f \underset{\mathcal{K}}{\sim} g$ , o que conclui a demonstração. □

**Teorema 2.47.** (Wall [27]) *Seja  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  e considere  $k \in \mathbb{N}$ .*

- a) *Se  $f$  é  $k$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinado, então  $\mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \varepsilon_{n,p} \subset T_f$ .*
- b) *Se  $\mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \varepsilon_{n,p} \subset T_f$ , então  $f$  é  $(k+1)$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinado.*
- c) *Se a  $\mathcal{K}$ -codimensão de  $f$  é  $d$ , então  $\mathcal{M}_n^{d+1} \cdot \varepsilon_{n,p} \subset T_f$ .*

**Teorema 2.48.** (Wall [27]) *Seja  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ . As seguintes condições são equivalentes:*

- i)  *$f$  é  $\mathcal{K}$ -finitamente determinado;*
- ii)  *$\mathcal{M}_n^k \cdot \varepsilon_{n,p} \subseteq T_f$  para algum  $k$ ;*
- iii) *a  $\mathcal{K}$ -codimensão de  $f$  é finita.*

**Corolário 2.49.** *Se dois germes  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{K}$ -equivalentes e  $f$  é  $\mathcal{K}$ -finitamente determinado, então  $g$  também é  $\mathcal{K}$ -finitamente determinado.*



*Demonstração.* Do Teorema 2.48 temos que  $f$  tem  $\mathcal{K}$ -codimensão finita.

Já vimos que a  $\mathcal{K}$ -codimensão é um invariante. Portanto  $g$  também tem  $\mathcal{K}$ -codimensão finita. Assim, novamente pelo Teorema 2.48,  $g$  é  $\mathcal{K}$ -finitamente determinado.

□

### 2.1.4 Álgebra local

**Definição 2.50.** *Seja  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ . Definimos a  $\mathbb{R}$ -álgebra local de  $f$  por*

$$Q(f) = \varepsilon_n / I_f = \varepsilon_n / \langle f_1, \dots, f_p \rangle.$$

J. Mather mostrou que para germes  $\mathcal{K}$ -finitamente determinados, a álgebra local associada ao germe é um invariante completo para a  $\mathcal{K}$ -equivalência. Este é o conteúdo do seguinte teorema devido à Mather.

**Teorema 2.51.** *(Mather [19]) Sejam  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  germes  $\mathcal{K}$ -finitamente determinados. Então,  $f$  é  $\mathcal{K}$ -equivalente a  $g$  se, e somente se, as  $\mathbb{R}$ -álgebras locais  $Q(f)$  e  $Q(g)$  são isomorfas.*

**Exemplo 2.52.** *Considere  $f(x, y) = (x, y^3 + xy)$  e  $g(x, y) = (x, y^3)$ . Note que  $I_f = \langle x, y^3 + xy \rangle = \langle x, y^3 \rangle = I_g$ . Então,*

$$Q(f) \approx \mathbb{R} \cdot \{1, y, y^2\} \text{ e } Q(g) \approx \mathbb{R} \cdot \{1, y, y^2\}.$$

*Portanto  $Q(f) \approx Q(g)$ , assim pelo Teorema 2.51  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{K}$ -equivalentes.*

**Exemplo 2.53.** *Considere os germes  $f(x) = x^3$  e  $g(x) = x$ . Note que as  $\mathbb{R}$ -álgebras locais  $Q(f)$  e  $Q(g)$  não são isomorfas, pois apresentam dimensões diferentes como  $\mathbb{R}$ -espaços vetoriais. Logo  $f$  e  $g$  não são  $\mathcal{K}$  equivalentes.*

## 2.2 Deformações e desdobramentos

**Definição 2.54.** *Uma deformação a  $r$ -parâmetros de  $f_0 : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  é um germe  $f : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  com  $f(0, x) = f_0(x)$  e o desdobramento a  $r$ -parâmetros correspondente é o germe  $F : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p, 0)$  dada por  $F(u, x) = (u, f(u, x))$ .*

**Exemplo 2.55.** *Considere  $\|f\|^2$  a função distância ao quadrado padrão associada ao*

germe  $f : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ . O germe  $g : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  dado por

$$g(u, x) = \|f(x) - u\|^2$$

é uma deformação a 2-parâmetros de  $f$ .

**Definição 2.56.** Dois desdobramentos a  $r$ -parâmetros de um mesmo germe  $f_0$ ,  $F_1$  e  $F_2$ , são isomorfos se  $F_2 = \psi \circ F_1 \circ \phi$ , onde  $\phi : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0)$  (resp.  $\psi : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p, 0)$ ) é um difeomorfismo local, desdobramento a  $r$ -parâmetros da identidade de  $\mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathbb{R}^p$ ).

**Definição 2.57.** Um desdobramento  $F$  de  $f_0$  é constante se  $F(u, x) = (u, f_0(x))$ . Um desdobramento  $F$  de  $f_0$  é chamado trivial se  $F$  for isomorfo ao desdobramento constante.

**Definição 2.58.** Um germe  $f_0$  é estável se todos os seus desdobramentos são triviais.

**Observação 2.59.** Vale ressaltar que existem inúmeras condições aparentemente diferentes de estabilidade. No entanto temos várias equivalências entre elas. Veja [15]

**Definição 2.60.** Dizemos que  $f$  é uma deformação  $\mathcal{K}$ -transversal de  $f_0$  quando

$$\mathbb{R} \cdot \{\dot{f}_1, \dots, \dot{f}_r\} + T_{f_0} = \varepsilon_{n,p}$$

onde  $\dot{f}_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}|_{u=0}$  e  $u_1, \dots, u_r$  são as coordenadas canônicas de  $\mathbb{R}^r$ .

**Observação 2.61.** O germe  $f_0$  admite uma deformação  $\mathcal{K}$ -transversal se, e somente se,  $f_0$  tem  $\mathcal{K}$ -codimensão finita.

Baseado na Observação 2.61, podemos construir explicitamente deformações  $\mathcal{K}$ -transversais de um germe  $f_0$ .

Seja  $f_0 : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  um germe de aplicação de  $\mathcal{K}$ -codimensão  $r$ . Escolhemos  $f_1, \dots, f_r \in \varepsilon_{n,p}$  tais que

$$\mathbb{R} \cdot \{f_1, \dots, f_r\} + T_{f_0} = \varepsilon_{n,p}.$$

Assim, a deformação  $g : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  dada por

$$g(u, x) = f_0(x) + \sum_{i=1}^r u_i f_i(x),$$

é uma deformação  $\mathcal{K}$ -transversal de  $f_0$ , como consequência da Definição 2.60.

**Exemplo 2.62.** O germe  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  dado por  $f(x, y) = (x^2, y^2)$  tem  $\mathcal{K}$ -codimensão 4, e sabemos que  $T_f = \langle (x, 0), (y^2, 0), (0, y), (0, x^2) \rangle$ . Logo o suplemento

de  $T_f$  em  $\varepsilon_{2,2}$  é dado por  $\mathbb{R} \cdot \{(1, 0), (0, 1), (y, 0), (0, x)\}$ . Assim  $g : (\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  com componentes dada por

$$g_1 = x^2 + u_1 y + u_3$$

$$g_2 = y^2 + u_2 x + u_4$$

é uma deformação  $\mathcal{K}$ -transversal de  $f$ .

**Definição 2.63. (Equivalência de Deformações)** Seja  $f_0 : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ . Duas deformações  $f$  e  $g$  a  $r$ -parâmetros de  $f_0$  são  $\mathcal{K}$ -equivalentes se existir um germe de difeomorfismo  $\Phi : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0)$  da forma  $\Phi(u, x) = (u, \phi(u, x))$ , com  $\phi(0, x) = x$ , tal que  $\Phi^*(I_g) = I_f$ .

**Definição 2.64. (Deformações Induzidas)** Sejam  $f : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  uma deformação a  $r$ -parâmetros de um germe  $f_0 : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  e  $h : (\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r, 0)$ . Podemos obter uma deformação a  $s$ -parâmetros  $g : (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  de  $f_0$  dada por  $g(v, x) = f(h(v), x)$ , chamada deformação induzida por  $h$ .

Escrevemos  $g = h^*f$  e nesta situação  $h$  é uma mudança de parâmetros.

**Definição 2.65. (Deformações Versais)** Uma deformação  $f$  de  $f_0$  é dita  $\mathcal{K}$ -versal se toda deformação  $g$  de  $f_0$  for  $\mathcal{K}$ -equivalente a  $h^*f$ , onde  $h$  é uma aplicação conveniente entre os espaços dos parâmetros de  $g$  e  $f$ .

**Observação 2.66.** Seja  $f : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  uma deformação  $\mathcal{K}$ -versal a  $r$ -parâmetros de  $f_0$ . Tomemos  $g$  outra deformação  $\mathcal{K}$ -versal a  $r$ -parâmetros de  $f_0$ . Então existe um germe de aplicação  $\Psi : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0)$  tal que  $I_{f \circ \Psi} = I_g$ .

De fato, como  $f$  é  $\mathcal{K}$ -versal, existe um germe de aplicação  $h : (\mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r, 0)$  tal que  $g$  é  $\mathcal{K}$ -equivalente a  $h^*f$ . Assim, por definição, existe

$$\Phi : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0)$$

$$(v, x) \mapsto (v, \phi(v, x)),$$

um germe de difeomorfismo (desdobramento a  $r$ -parâmetros da identidade em  $\mathbb{R}^n$ ) tal que

$$\Phi^*(I_{h^*f}) = I_{(h^*f) \circ \Phi} = I_g.$$

Considere  $\varphi : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0)$  dado por  $\varphi(v, x) = (h(v), x)$ .

Portanto existe um germe de aplicação

$$\Psi = \varphi \circ \Phi : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0)$$

$$(v, x) \mapsto (h(v), \phi(v, x))$$

tal que  $(h^*f) \circ \Phi = f \circ \Psi$ , ou seja,  $I_{f \circ \Psi} = I_g$ .

Quando  $f_0$  tem  $\mathcal{K}$ -codimensão finita, digamos  $c$ , uma deformação  $\mathcal{K}$ -versal a  $c$ -parâmetros de  $f_0$  é chamada de  $\mathcal{K}$ -universal.

**Teorema 2.67.** (Teorema da  $\mathcal{K}$ -versalidade [13]) *Seja  $f : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  uma deformação a  $r$ -parâmetros do germe  $f_0 : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ . Então,  $f$  é  $\mathcal{K}$ -versal se, e somente se,  $f$  é  $\mathcal{K}$ -transversal.*

*Demonstração.* Suponhamos que  $f$  seja  $\mathcal{K}$ -versal. Temos que mostrar que  $f$  é  $\mathcal{K}$ -transversal, isto é, que

$$\mathbb{R} \cdot \{\dot{f}_1, \dots, \dot{f}_r\} + T_{f_0} = \varepsilon_{n,p}.$$

Como  $\mathbb{R} \cdot \{\dot{f}_1, \dots, \dot{f}_r\} + T_{f_0} \subset \varepsilon_{n,p}$  sempre, basta mostrar que  $\varepsilon_{n,p} \subset \mathbb{R} \cdot \{\dot{f}_1, \dots, \dot{f}_r\} + T_{f_0}$ .

Consideremos um germe  $g_0$  em  $\varepsilon_{n,p}$  e uma deformação a 1-parâmetro  $g$  de  $f_0$  dada por  $g(v, x) = f_0(x) + vg_0(x)$ . Por hipótese  $g$  é  $\mathcal{K}$ -equivalente (como deformação) à deformação induzida  $H = h^*f$ , com  $h : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r, 0)$ ,  $h = (h_1, \dots, h_r)$ . Assim

$$H(v, x) = f(h(v), x) \text{ e } \dot{H} = \frac{\partial h_1}{\partial v}(0)\dot{f}_1 + \dots + \frac{\partial h_r}{\partial v}(0)\dot{f}_r.$$

Logo  $\dot{H}$  está em  $\mathbb{R} \cdot \{\dot{f}_1, \dots, \dot{f}_r\}$ .

Agora usando o fato que  $g$  e  $H$  são deformações  $\mathcal{K}$ -equivalentes, temos que  $\dot{g} - \dot{H}$  está em  $T_{f_0}$ , e portanto  $\dot{g}$  está em  $\mathbb{R} \cdot \{\dot{f}_1, \dots, \dot{f}_r\} + T_{f_0}$ . Mas  $\dot{g} = g_0$ , logo  $g_0$  está em  $\mathbb{R} \cdot \{\dot{f}_1, \dots, \dot{f}_r\}$ .

A recíproca, não será feita aqui. Podemos encontrá-la em [17] p. 20. □

**Proposição 2.68.** ([13]) *Seja  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  um germe de posto  $r$ . Então existe um germe inversível  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  para o qual  $F = f \circ h$  é um desdobramento a  $r$ -parâmetros de um germe de posto zero.*

*Demonstração.* Fazendo mudanças de coordenadas na fonte e na meta, podemos supor que a matriz jacobiana de  $f$  avaliada em 0, é

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde  $I_r$  é a matriz identidade,  $r \times r$ .

Considere o germe  $g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r, 0)$  cujas componentes são as primeiras  $r$  componentes  $f_1, \dots, f_r$  de  $f$ . Claramente  $g$  tem posto  $r$ , assim pela Forma Local das Submersões existe um germe inversível  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  para o qual  $g \circ h$  é uma projeção  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_r)$ . E então  $F = f \circ h$  é o germe procurado.

□

**Definição 2.69.** (*Aplicação associada a uma deformação  $\mathcal{K}$ -versal*) Sejam  $f_0 : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  e  $f$  uma deformação a  $s$ -parâmetros de  $f_0$ . Definimos  $\pi_f : (V_f, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^s, 0)$  a restrição da projeção canônica  $\pi : (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^s, 0)$ , onde  $V_f = f^{-1}(0)$ , como sendo o germe de aplicação associada à  $f$ .

**Proposição 2.70.** (*Martinet [16]*) Sejam  $f, g : (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$   $s$ -deformações  $\mathcal{K}$ -versais dos germes  $f_0, g_0 : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ , respectivamente. Se  $f_0$  e  $g_0$  são  $\mathcal{K}$ -equivalentes então  $\pi_f$  e  $\pi_g$  são  $\mathcal{A}$ -equivalentes.

*Demonstração.* Vamos dividir a prova em dois casos.

**Caso 1.** Primeiro considere o caso em que  $f_0 = g_0$ . Assim temos que  $f$  e  $g$  são deformações  $\mathcal{K}$ -versais de  $f_0$ , logo pela Observação 2.66, existe um germe  $\Psi : (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n, 0)$  dado por  $\Psi(v, x) = (h(v), \phi(v, x))$  tal que  $I_{f \circ \Psi} = I_g$ . Daí temos que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{\Psi} & (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n, 0) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ (\mathbb{R}^s, 0) & \xrightarrow{h} & (\mathbb{R}^s, 0) \end{array}$$

De fato,

$$(\pi \circ \Psi)(v, x) = \pi(\Psi(v, x)) = \pi(h(v), \phi(v, x)) = h(v) = h(\pi(v, x)) = (h \circ \pi)(v, x).$$

Além disso temos que  $I_{f \circ \Psi} = I_g$ , assim existe uma matriz inversível  $M(v, x)$  com entradas em  $\varepsilon_{s+n}$  tal que  $(f \circ \Psi)(v, x) = M(v, x) \cdot g(v, x)$ .

Agora, seja  $(v, x) \in V_g = g^{-1}(0)$ , logo  $g(v, x) = 0$ . Daí,

$$f(\Psi(v, x)) = (f \circ \Psi)(v, x) = M(v, x) \cdot g(v, x) = 0.$$

Portanto  $\Psi(v, x) \in f^{-1}(0) = V_f$ . De onde segue que o diagrama abaixo também

comuta

$$\begin{array}{ccc} (V_g, 0) & \xrightarrow{\pi_g} & (\mathbb{R}^s, 0) \\ \Psi \downarrow & & \downarrow h \\ (V_f, 0) & \xrightarrow{\pi_f} & (\mathbb{R}^s, 0) \end{array}$$

Ou seja,  $\pi_f$  e  $\pi_g$  são  $\mathcal{A}$ -equivalentes.

**Caso 2.** Agora considere o caso geral, quando  $f_0$  e  $g_0$  são  $\mathcal{K}$ -equivalentes.

Como  $f_0$  e  $g_0$  são  $\mathcal{K}$ -equivalentes existe um germe inversível  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tal que  $f_0 \circ h$  e  $g_0$  são  $\mathcal{C}$ -equivalentes, logo pela Proposição 2.7 existe uma matriz inversível  $M(x)$ , com entradas em  $\varepsilon_n$  para os quais  $g_0(x) = M(x) \cdot f_0(h(x))$ . Evidentemente a deformação a  $s$ -parâmetros  $g'(u, x) = M(x) \cdot f(u, h(x))$  de  $g_0$ , onde  $f$  é uma deformação  $\mathcal{K}$ -versal de  $f_0$ , também é  $\mathcal{K}$ -versal. Assim segue do Caso 1 que  $\pi_g$  e  $\pi_{g'}$  são  $\mathcal{A}$ -equivalentes.

Mostremos agora que  $\pi_f$  e  $\pi_{g'}$  são  $\mathcal{A}$ -equivalentes.

O difeomorfismo local na origem

$$\begin{aligned} (id \times h) : (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n, 0) \\ (u, x) &\mapsto (u, h(x)). \end{aligned}$$

leva  $V_{g'}$  sobre  $V_f$ .

De fato, seja  $(u, x) \in V_{g'}$  então  $g'(u, x) = 0$ , logo  $(id \times h)(u, x) = (u, h(x)) \in V_f$ , pois  $g'(u, x) = M(x) \cdot f(u, h(x)) = 0$  o que implica que  $f(u, h(x)) = 0$ , ou seja,  $(u, h(x)) \in V_f$ .

Podemos trocar  $\Psi$  por  $(id \times h)$  no diagrama anterior, de modo que  $\pi_f$  e  $\pi_{g'}$  ainda continuam  $\mathcal{A}$ -equivalentes.

Portanto pela transitividade da  $\mathcal{A}$ -equivalência, temos que  $\pi_f$  e  $\pi_g$  são  $\mathcal{A}$ -equivalentes. □

**Definição 2.71.** *Seja  $f : (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  uma deformação a  $s$ -parâmetros de um germe  $f_0 : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ . Dizemos que  $f$  é regular se o posto de  $f$  em  $0$  é  $p$ . Nesse caso segue que  $(s + n) \geq p$ .*

**Definição 2.72.** *Seja  $f : (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  uma deformação a  $s$ -parâmetros de um germe  $f_0 : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ . Dizemos que  $\bar{f} : (\mathbb{R}^t \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  é uma extensão de  $f$  se  $\bar{f}(0, u, x) = f(u, x)$ .*

**Proposição 2.73.** *(Martinet [16]) Sejam  $f : (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  uma deformação regular de  $f_0 : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  e  $\bar{f} : (\mathbb{R}^t \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  uma extensão (regular) de  $f$ .*

O germe  $\pi_{\bar{f}}$  é um desdobramento trivial de  $\pi_f$  se, e somente se,  $\bar{f}$  é  $\mathcal{K}$ -equivalente a  $h^*f$ , onde  $h : (\mathbb{R}^t \times \mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^s, 0)$  é um germe de submersão.

**Proposição 2.74.** (Martinet [16]) Toda deformação  $g$   $\mathcal{K}$ -versal a  $q$ -parâmetros de um germe  $f_0$  de  $\mathcal{K}$ -codimensão  $r$ , ( $q > r$ ), é  $\mathcal{K}$ -equivalente a  $h^*f$ , onde  $h : (\mathbb{R}^q, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r, 0)$  é um germe de submersão.

**Teorema 2.75.** (Martinet [16]) Seja  $f : (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  uma deformação regular de  $f_0$ . O germe  $\pi_f$  é estável se, e somente se,  $f$  é  $\mathcal{K}$ -versal.

*Demonstração.* Seja  $\bar{g}$  uma outra deformação de  $f_0$  dada por  $\bar{g}(v, x) = f_0(x) + g(v, x)$  para alguma  $g$  tal que  $g(0, x) = 0$ .

A soma  $\bar{f}(v, u, x) = f(u, x) + g(v, x)$  é uma extensão de  $f$  e  $\pi_{\bar{f}}$  é um desdobramento de  $\pi_f$ .

Do fato de  $\pi_f$  ser estável, segue que  $\pi_{\bar{f}}$  é  $\mathcal{K}$ -trivial e pela Proposição 2.73  $\bar{f}$  é  $\mathcal{K}$ -equivalente a  $h^*f$ , onde  $h : (\mathbb{R}^t \times \mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^s, 0)$  é um germe de submersão.

Então,

$$\bar{f}(v, u, x) = M(v, u, x) \cdot (f \circ \Phi)(v, u, x) = M(v, u, x) \cdot f(h(v, u), \phi(v, u, x)),$$

onde  $\Phi$  é dado como na Definição 2.63.

Fazendo-se  $u = 0$ , temos que:

$$\bar{f}(v, 0, x) = M(v, 0, x) \cdot f(h(v, 0), \phi(v, 0, x)), \text{ mas } \bar{f}(v, u, x) = f(u, x) + g(v, x), \text{ logo}$$

$$f(0, x) + g(v, x) = M(v, 0, x) \cdot f(h(v, 0), \phi(v, 0, x)).$$

Assim

$$\bar{g}(v, x) = M_0(v, x) \cdot f(h_0(v), \phi_0(v, x)),$$

onde  $h_0 = h|_{u=0}$ ,  $\phi_0 = \phi|_{u=0}$  e  $M_0 = M|_{u=0}$ . Logo  $\bar{g}$  é  $\mathcal{K}$ -equivalente a  $h_0^*f$ , isto é,  $f$   $\mathcal{K}$ -versal.

Reciprocamente dado um desdobramento de  $\pi_f$ , podemos construir uma extensão  $\bar{f}$  de  $f$ , tal que esse desdobramento se identifica com  $\pi_{\bar{f}}$ .

Como  $f$  é  $\mathcal{K}$ -versal (por hipótese), segue pela Proposição 2.74 que  $\bar{f}$  é  $\mathcal{K}$ -equivalente a  $h^*f$ , onde  $h$  é um germe de submersão, isto é,  $\bar{f}$  é uma extensão  $\mathcal{K}$ -trivial de  $f$ .

Por Proposição 2.73  $\pi_{\bar{f}}$  é trivial e portanto  $\pi_f$  é estável. □

**Teorema 2.76.** (Martinet [16]) *Sejam  $f_0, g_0 : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  germes estáveis. Então  $f_0$  e  $g_0$  são  $\mathcal{A}$ -equivalentes se, e somente se,  $f_0$  e  $g_0$  são  $\mathcal{K}$ -equivalentes.*

*Demonstração.* Já vimos na Observação 2.4 que se dois germes são  $\mathcal{A}$ -equivalentes então eles são  $\mathcal{K}$ -equivalentes.

Agora suponhamos que  $f_0$  e  $g_0$  são  $\mathcal{K}$ -equivalentes.

Consideremos  $f, g : (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  deformações regulares a  $s$ -parâmetros de  $f_0$  e  $g_0$  respectivamente, dadas por

$$f(y, x) = -y + f_0(x) \quad e \quad g(y, x) = -y + g_0(x).$$

Note que

$$V_f = f^{-1}(0) = \{(y, x) \mid f(y, x) = 0\} = \{(y, x) \mid f_0(x) = y\}$$

e

$$V_g = g^{-1}(0) = \{(y, x) \mid g(y, x) = 0\} = \{(y, x) \mid g_0(x) = y\}.$$

Daí  $\pi_f(y, x) = y = f_0(x)$  e  $\pi_g(y, x) = y = g_0(x)$ .

Logo chegamos que  $\pi_f = f_0$  e  $\pi_g = g_0$ . Como  $f_0$  e  $g_0$  são germes estáveis segue que  $\pi_f$  e  $\pi_g$  são estáveis e portanto pelo Teorema 2.75 temos que  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{K}$ -versais.

Com isso temos que  $f$  e  $g$  são deformações  $\mathcal{K}$ -versais de  $f_0$  e  $g_0$ , respectivamente, mas  $f_0$  e  $g_0$  são  $\mathcal{K}$ -equivalentes, logo pela Proposição 2.70,  $\pi_f$  e  $\pi_g$  são  $\mathcal{A}$ -equivalentes, ou seja,  $f_0$  e  $g_0$  são  $\mathcal{A}$ -equivalentes.  $\square$

**Proposição 2.77.** ([13]) *Seja  $F : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p, 0)$  um desdobramento a  $r$ -parâmetros de um germe  $f_0 : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ . Então  $f_0$  e  $F$  têm o mesmo Símbolo de Bordman.*

## 2.3 Classificação de germes

O objetivo desta seção é apresentar algumas classificações com respeito à  $\mathcal{K}$ -equivalência.

**Definição 2.78.** *Seja  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  um germe de aplicação diferenciável. Definimos coposto  $f = n - \text{posto } f$ .*

**Proposição 2.79.** (Splitting Lema [13]) *Seja  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ ,  $f \in \mathcal{M}_n^2$ , um germe de coposto  $c$  e  $\mathcal{K}$ -codimensão finita, então  $f$  é  $\mathcal{K}$ -equivalente a um germe da forma  $a$  um*



germe

$$g(x_1, \dots, x_c) \pm x_{c+1}^2 \pm \dots \pm x_n^2$$

com  $g \in \mathcal{M}_c^3$ .

**Proposição 2.80.** ([13]) *Seja  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  um germe de  $\mathcal{K}$ -codimensão finita, então seu Símbolo de Boardman deve ter a forma  $(i_1, \dots, i_k, 0, 0, \dots)$  para algum  $k \geq 1$ .*

Analisaremos a classificação de germes para alguns casos especiais:

**Caso 1:**  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ .

Neste caso existem duas possibilidades para o Símbolo de Boardman de primeira ordem de  $f$ :  $\Sigma^{n-1}$  e  $\Sigma^n$ .

- Se  $f$  é do tipo  $\Sigma^{n-1}$ , então  $f$  é não singular e pelo Teorema da Forma Local das Submersões  $f$  é equivalente ao germe da projeção.

- Se  $f$  é do tipo  $\Sigma^n$ , então  $f$  tem coposto 1 e temos a seguinte proposição:

**Proposição 2.81.** ([13]) *Seja  $f \in \mathcal{M}_n^2$  um germe de coposto 1 e  $\mathcal{K}$ -codimensão finita  $k \geq 1$ , então  $f$  é  $\mathcal{K}$ -equivalente a um germe da forma*

$$x_1^{k+1} \pm x_2^2 \pm \dots \pm x_n^2$$

**Caso 2:**  $f : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ , com  $p \geq 2$ .

Neste caso também existem duas possibilidades para o Símbolo de Boardman de primeira ordem de  $f$ :  $\Sigma^0$  e  $\Sigma^1$ .

- Se  $f$  é do tipo  $\Sigma^0$ , então  $f$  é não singular e pela Forma Local das Imersões temos que uma forma normal para  $f$  é dada pela inclusão.

- Se  $f$  é do tipo  $\Sigma^1$ , temos a seguinte proposição:

**Proposição 2.82.** ([13]) *Seja  $f : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  um germe do tipo  $\Sigma^1$  e  $\mathcal{K}$ -codimensão finita. Então  $f$  é necessariamente do tipo  $\Sigma^{1,1,\dots,1,0}$ , com o número 1 repetido  $k$  vezes para algum  $k \geq 1$ . E nesse caso  $f$  é  $\mathcal{K}$ -equivalente a  $(0, \dots, 0, x^{k+1})$ .*

*Demonstração.* Que  $f$  é do tipo  $\Sigma^{1,1,\dots,1,0}$  é uma consequência imediata das Proposições 2.41 e 2.80.

Afirmamos que  $f$  é do tipo  $\Sigma^{1,1,\dots,1,0}$  se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

$$i) \frac{\partial^j f_1}{\partial x^j}(0), \dots, \frac{\partial^j f_p}{\partial x^j}(0) \quad j \leq k;$$

$$ii) \text{alguma } \frac{\partial^j f_i}{\partial x^j}(0) \neq 0 \quad j = k + 1;$$

onde  $f_1, \dots, f_p$  são componentes de  $f$ .

De fato, por indução sobre  $k$ , pode-se verificar que  $\Delta^1 \dots \Delta^1 I_f$  é gerado por  $I_f$  e pelas derivadas  $\frac{\partial^j f_i}{\partial x^j}$ , com  $1 \leq i \leq p$ ,  $1 \leq j \leq k$ . Daí, a afirmação segue imediatamente.

Como  $\mathcal{M}_n^k$  é gerado pelos polinômios de grau igual a  $k$ , temos que as condições  $i)$  e  $ii)$  são equivalentes a dizer que  $I_f = \langle x^{k+1} \rangle$ , então pela Proposição 2.7  $f$  é  $\mathcal{C}$ -equivalente a  $(0, \dots, 0, x^{k+1})$ , e portanto  $\mathcal{K}$ -equivalente.

□

**Caso 3:**  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ .

Neste caso o Símbolo de Boardman de primeira ordem de  $f$  pode ser:  $\Sigma^0$  ou  $\Sigma^1$ .

- Se  $f$  é do tipo  $\Sigma^0$ , então  $f$  é não singular e pelo Teorema da Aplicação Inversa  $f$  é equivalente ao germe da identidade.

- Se  $f$  é do tipo  $\Sigma^1$ , temos a seguinte proposição:

**Proposição 2.83.** ([13]) *Seja  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  um germe do tipo  $\Sigma^1$  e  $\mathcal{K}$ -codimensão finita. Então,  $f$  é necessariamente do tipo  $\Sigma^{1,1,\dots,1,0}$ , com o número 1 repetido  $k$  vezes para algum  $k \geq 1$ . Nesse caso  $f$  é  $\mathcal{K}$ -equivalente a  $(x, y^{k+1})$ .*

*Demonstração.* Como na prova da proposição anterior, o fato de  $f$  ser do tipo  $\Sigma^{1,1,\dots,1,0}$  é uma consequência imediata das Proposições 2.41 e 2.80.

Como  $f$  tem posto 1, sabemos pela Proposição 2.68 que existe um germe inversível  $h : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  para o qual  $F = f \circ h$  é o desdobramento a 1-parâmetro de um germe  $f_0 : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  de posto 0, ou seja,  $f$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente a esse desdobramento e, portanto,  $\mathcal{K}$ -equivalente. Assim  $F$  e  $f$  possuem o mesmo Símbolo de Boardman. Além disso pela Proposição 2.77  $f_0$  e  $F$  tem o mesmo Símbolo de Boardman, logo  $f_0$  é tipo  $\Sigma^{1,1,\dots,1,0}$  (com o número 1 repetido  $k$  vezes).

Claramente  $f$  é  $\mathcal{K}$ -equivalente a  $(x, f_0(y))$ . Mas pela Proposição 2.82,  $f_0(y)$  é  $\mathcal{K}$ -equivalente a  $y^{k+1}$  e portanto,  $f$  é  $\mathcal{K}$ -equivalente a  $(x, y^{k+1})$ . □

- Se  $f$  é do tipo  $\Sigma^2$ , teremos três possibilidades para os Símbolos de Boardman de

segunda ordem:  $\Sigma^{2,0}$ ,  $\Sigma^{2,1}$  e  $\Sigma^{2,2}$ . Porém veremos apenas o caso  $\Sigma^{2,0}$ , que será dado pela seguinte proposição:

**Proposição 2.84.** ([13]) *Seja  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  um germe do tipo  $\Sigma^{2,0}$  e  $\mathcal{K}$ -codimensão finita. Então,  $f$  é  $\mathcal{K}$ -equivalente a um dos seguintes germes listados abaixo:*

$$I_{a,b} : (xy, x^a + y^b); b \geq a \geq 2$$

$$II_{a,b} : (xy, x^a - y^b); b \geq a \geq 2 \text{ e } a, b \text{ pares}$$

$$IV_{a,b} : (x^2 + y^2, x^a); a \geq 3$$

A classificação sob  $\mathcal{K}$ -equivalência é uma grande ferramenta na classificação de germes com respeito à  $\mathcal{A}$ -equivalência, pois quando se trata de germes estáveis vimos no Teorema 2.76 que essas noções de equivalência são equivalentes.

## Capítulo 3

# Equivalência de contato topológica

A equivalência de contato topológica ou  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência é uma versão topológica da  $\mathcal{K}$ -equivalência de Mather dada na Definição 2.1. Isso quer dizer que basta substituir a palavra “difeomorfismos” por “homeomorfismos” na Definição 2.1. Procedendo da mesma maneira, podemos obter definições topológicas de outras relações de equivalência citadas neste texto, dadas a partir dos grupos  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{K}$  definidos na Definição 1.11. Denotaremos tais equivalências por:  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{A}$  equivalências. Como o foco deste trabalho é a equivalência de contato, definiremos precisamente a equivalência de contato topológica.

**Definição 3.1.** Dizemos que dois germes  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  são topologicamente  $\mathcal{K}$ -equivalentes (ou  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes) se existem germes de homeomorfismos  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  e  $H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$  satisfazendo a propriedade  $H(\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \mathbb{R}^n \times \{0\}$  e tais que os seguintes diagramas comutam

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{(id, f)} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) & \xrightarrow{\pi_n} & (\mathbb{R}^n, 0) \\ h \downarrow & & H \downarrow & & \downarrow h \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{(id, g)} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) & \xrightarrow{\pi_n} & (\mathbb{R}^n, 0) \end{array}$$

onde  $id : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  é a aplicação identidade do  $\mathbb{R}^n$  e  $\pi_n : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  a projeção canônica.

Notação:  $f \underset{\mathcal{C}^0-\mathcal{K}}{\sim} g$ .

O homeomorfismo  $H$  aplica o gráfico de  $f$  no gráfico de  $g$ , enquanto  $h$  atua em  $\mathbb{R}^n$ . E assim como no Capítulo 2,  $H$  é dado por  $H(x, y) = (h(x), \theta(x, y))$ , com  $\theta(x, 0) = 0$ .

Em particular definimos a  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência quando  $h$  dado na Definição 3.1 é a identidade.

**Exemplo 3.2.** *Os germes de funções em uma variável real  $f(x) = x^3$  e  $g(x) = x$  são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes.*

*De fato, basta considerar os homeomorfismos  $h = id : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  e  $H : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, 0)$  dado por  $H(x, y) = (x, y^3)$ . Assim estes germes são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes e portanto  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes.*

**Observação 3.3.** *Visto que todo difeomorfismo é também um homeomorfismo, temos que se dois germes são  $\mathcal{K}$ -equivalentes então eles são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes, mas a recíproca deste fato não é verdadeira. Por exemplo os germes do Exemplo 3.2 são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes e não são  $\mathcal{K}$ -equivalentes, uma vez que  $2 = \mathcal{K}\text{-cod } f \neq \mathcal{K}\text{-cod } g = 0$ .*

*Recorde que vimos no Capítulo 2, que a  $\mathcal{K}$ -codimensão é um invariante para a  $\mathcal{K}$ -equivalência.*

**Definição 3.4.** *Um germe  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p)$  é  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinado, se existe um número positivo  $k$  tal que todo germe  $g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  com  $j^k g(0) = j^k f(0)$ ,  $g$  é  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalente a  $f$ .*

**Proposição 3.5.** *(Wall [27], p. 518) Seja  $f$  um germe de aplicação analítica. Então,  $f$  é  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinada se, e somente se,  $(f^{-1}(0) \cap \Sigma f) - \{0\} = \emptyset$  como germe.*

**Observação 3.6.** *A implicação*

$$\mathcal{C}^0\text{-}\mathcal{K}\text{-finitamente determinado} \Rightarrow (f^{-1}(0) \cap \Sigma f) - \{0\} = \emptyset$$

*é sempre verdadeira, mesmo o germe sendo de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .*

Alguns invariantes conhecidos para a  $\mathcal{K}$ -equivalência, como a  $\mathcal{K}$ -codimensão e os Símbolos de Boardman não são invariantes para a  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência. Além disso, a  $\mathbb{R}$ -álgebra local e a  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -determinação finita também não são invariantes para a  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência. Vejamos alguns exemplos:

**Exemplo 3.7.** *Considere os germes  $f(x) = x^3$  e  $g(x) = x$ .*

*Vimos no Exemplo 3.2 que  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes. Já pela Observação 3.3 vimos que a  $\mathcal{K}$ -codimensão dos germes são diferentes, além disso claramente as  $\mathbb{R}$ -álgebras locais  $Q(f)$  e  $Q(g)$  não são isomorfas, pois apresentam dimensões diferentes como  $\mathbb{R}$ -espaços vetoriais. Logo estes objetos não são invariantes para a  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência.*

**Exemplo 3.8.** Considere  $f(x, y) = xy$  e  $g(x, y) = xy^3$ .

Note que estes germes são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{A}$ -equivalentes, pois basta tomar os germes de homeomorfismos  $h(x, y) = (x^3, y)$  e  $k(x) = x^3$ . Portanto,  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes. Além disso,  $f$  é  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinado, mas o mesmo não ocorre com  $g$ . Portanto, temos que a  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -determinação finita não é um invariante para a  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência.

**Exemplo 3.9.** Novamente considere os germes  $f(x) = x^3$  e  $g(x) = x$ .

Estes germes têm Símbolo de Boardman distintos, a saber  $(1, 1, 0, \dots)$  e  $(0, 0, 0, \dots)$ , respectivamente. Assim, o símbolo de Boardman também não é um invariante da  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência.

Assim, os ingredientes clássicos relacionados à equivalência de contato não são invariantes para a  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência. Então é natural buscar algum invariante para a  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência que seja baseado em propriedades topológicas. Mas ainda assim outro problema que dificulta o estudo desta relação de equivalência é a falta de um critério algébrico, como tínhamos no caso da  $\mathcal{C}^\infty$ - $\mathcal{K}$ -equivalência (ver Proposição 2.7). A princípio, não é possível obter uma versão topológica da Proposição 2.7. De fato, suponhamos que estivéssemos interessados em uma versão topológica para a Proposição 2.7, (i)  $\Leftrightarrow$  (iii). Então, se considerarmos por exemplo germes  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes  $f(x) = x^3$  e  $g(x) = x$ , precisaríamos dar condições a um germe da matriz  $M$ ,  $1 \times 1$ , satisfazendo algo do tipo

$$f = M \cdot g.$$

Assim, se de forma mais natural, assumirmos  $M$  inversível com entradas contínuas, deveríamos ter  $M(0) \neq 0$  e poderíamos escrever  $M(x) = a(x) + c$ , onde  $a$  é uma função contínua com  $a(0) = 0$  e  $c$  uma constante real não nula. Ficariamos então com

$$x^3 = (a(x) + c)x \Leftrightarrow x(x^2 - c) = a(x)x. \quad (*)$$

Fazendo  $x$  tender a 0, segue de (\*) que

$$0 \neq -c = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - c)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} a(x) = 0,$$

o que é um absurdo.

Portanto supondo  $M$  inversível com entradas contínuas, não obtemos uma versão topológica da Proposição 2.7.

Como podemos notar, os resultados com as propriedades e invariantes para a

$C^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência são incompletos. Na verdade não existem caracterizações algébricas ou geométricas. Apenas em 1997, T. Nishimura [22] descobriu um invariante (completo) para a  $C^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência: o valor absoluto do grau, no caso  $n = p$ . Recentemente outros trabalhos obtiveram novos resultados importantes como [2], [4] e [8]. Vamos apresentar neste texto o invariante introduzido por Nishimura.

O lema a seguir fornece uma condição suficiente para a  $C^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência e é peça fundamental na demonstração do Teorema 3.21.

**Lema 3.10.** (Nishimura [22]) *Sejam  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  aplicações contínuas onde  $U$  é uma vizinhança da origem em  $\mathbb{R}^n$ . Suponha que exista uma família de aplicações contínuas  $F_t : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $t \in [0, 1]$ , tal que as seguintes condições são satisfeitas*

- i)  $F_0 = f$  e  $F_1 = g$  ou  $\bar{g} = (g_1, \dots, g_{p-1}, -g_p)$ ;
- ii)  $F_t^{-1}(0) = f^{-1}(0)$  para todo  $t \in [0, 1]$ ;
- iii) para qualquer  $t \in [0, 1]$ , o vetor  $F_t(x)$  não pertence ao conjunto  $\{\alpha F_0(x) \mid \alpha < 0\}$ , para qualquer  $x \in U - f^{-1}(0)$ .

Então,  $F_t$  é  $C^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalente a  $F_{t'}$ , quaisquer que sejam  $t, t' \in [0, 1]$ . Em particular,  $f$  é  $C^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalente a  $g$ .

*Demonstração.* Fixe  $t \in [0, 1]$  qualquer. Vamos mostrar que  $F_t$  é  $C^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalente a  $f = F_0$ . De fato, considere uma família de homeomorfismos  $\tilde{h}_x : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  definida por

$$\tilde{h}_x(y) = \alpha_x(\|y\|) \cdot y$$

dependendo apenas da variável  $x$  de  $U$ , onde  $\alpha_x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua dependendo de  $\|y\|$  ( $\neq 0$ ) conforme apresentaremos a seguir.

Note que ao compararmos  $\|F_0(x)\|$  com  $\|F_t(x)\|$  para  $x \in U$  temos três possibilidades:

I.)  $\|F_0(x)\| = \|F_t(x)\|$ .

Neste caso tome  $\alpha_x(\|y\|) = 1$  para todo  $y \in \mathbb{R}^p - \{0\}$ .

Observe que o caso  $x \in F_0^{-1}(0) = F_t^{-1}(0)$  está incluído aqui.

II.)  $0 < \|F_t(x)\| < \|F_0(x)\|$ .

Neste caso tome  $\alpha_x$  definida por:

$$\alpha_x(\|y\|) = \begin{cases} \frac{\|F_t(x)\|}{\|F_0(x)\|} & \text{se } 0 < \|y\| \leq \|F_0(x)\|; \\ \frac{2(\|F_t(x)\| - \|F_0(x)\|)}{\|y\|} + \frac{2\|F_0(x)\| - \|F_t(x)\|}{\|F_0(x)\|} & \text{se } \|F_0(x)\| \leq \|y\| \leq 2\|F_0(x)\|; \\ 1 & \text{se } 2\|F_0(x)\| \leq \|y\|. \end{cases}$$

III.)  $0 < \|F_0(x)\| < \|F_t(x)\|$ .

Neste caso tome  $\alpha_x$  definida por:

$$\alpha_x(\|y\|) = \begin{cases} \frac{\|F_t(x)\|}{\|F_0(x)\|} & \text{se } 0 < \|y\| \leq \|F_0(x)\|; \\ \frac{2\|F_t(x)\|(\|F_t(x)\| - \|F_0(x)\|)}{2\|F_t(x)\| - \|F_0(x)\|} \frac{1}{\|y\|} + \frac{\|F_t(x)\|}{2\|F_t(x)\| - \|F_0(x)\|} & \text{se } \|F_0(x)\| \leq \|y\| \leq 2\|F_t(x)\|; \\ 1 & \text{se } 2\|F_t(x)\| \leq \|y\|. \end{cases}$$

Se definimos a função  $\alpha_x$  como acima, então  $\tilde{h}_x$  é um homeomorfismo para qualquer  $x \in U$ . Além disso,  $\tilde{h}_x$  depende continuamente de  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Construa outra família de homeomorfismos  $\bar{h}_x : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  dependendo continuamente da variável  $x \in U$ . De acordo com a relação entre  $\tilde{h}_x(F_0(x))$  e  $F_t(x)$  para  $x \in U$ , temos dois casos.

I.)  $\tilde{h}_x(F_0(x)) = F_t(x)$ .

Neste caso defina  $\bar{h}_x$  como a aplicação identidade.

II.)  $\tilde{h}_x(F_0(x)) \neq F_t(x)$ .

Neste caso, observe que  $\|\tilde{h}_x(F_0(x))\| = \|F_t(x)\| > 0$ , pela construção da  $\tilde{h}_x$ .

Pela condição **iii)** da hipótese sobre a família  $F_t$  e pela construção de  $\tilde{h}_x$ , segue que os dois vetores  $\tilde{h}_x(F_0(x))$  e  $F_t(x)$  de  $\mathbb{R}^p$  são linearmente independentes sobre  $\mathbb{R}$ . Considere o espaço vetorial

$$V_x = \mathbb{R} \cdot \{\tilde{h}_x(F_0(x))\} \oplus \mathbb{R} \cdot \{F_t(x)\}.$$

Seja  $\theta_x$  o ângulo entre  $\tilde{h}_x(F_0(x))$  e  $F_t(x)$ , o qual é unicamente determinado no intervalo aberto  $(0, \pi)$ . Usando este ângulo  $\theta_x$ , construímos uma função ângulo  $\Theta_x : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  da seguinte forma.



$$\Theta_x(s) = \begin{cases} \theta_x & \text{se } 0 \leq s \leq \|F_t(x)\|; \\ -\frac{\theta_x}{\|F_t(x)\|}s + 2\theta_x & \text{se } \|F_t(x)\| \leq s \leq 2\|F_t(x)\|; \\ 0 & \text{se } 2\|F_t(x)\| \leq s. \end{cases}$$

Decomponha o  $\mathbb{R}^p$  na soma direta

$$\mathbb{R}^p = V_x \oplus \tilde{V}_x,$$

onde  $V_x$  é o espaço vetorial bi-dimensional  $V_x$  com orientação padrão induzida pelo  $\mathbb{R}^2$  através do isomorfismo linear  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow V_x$  tal que  $L(\vec{e}_1) = \tilde{h}_x(F_0(x))$  e  $L(\vec{e}_2) = F_t(x)$ , onde  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$  são os vetores da base canônica do  $\mathbb{R}^2$ . Usando a função ângulo  $\Theta_x$  construímos a aplicação  $\bar{h}_x : V_x \oplus \tilde{V}_x \rightarrow V_x \oplus \tilde{V}_x$  como segue:

$$\bar{h}_x(y_1, y_2) = (\phi_{\Theta_x(\|y_1\|)}(y_1), y_2),$$

onde  $\phi_{\Theta_x(\|y_1\|)}$  é a aplicação rotação de ângulo  $\Theta_x(\|y_1\|)$ ,

$$\phi_{\Theta_x(\|y_1\|)} = \begin{pmatrix} \cos(\Theta_x(\|y_1\|)) & -\sin(\Theta_x(\|y_1\|)) \\ \sin(\Theta_x(\|y_1\|)) & \cos(\Theta_x(\|y_1\|)) \end{pmatrix}.$$

Assim,  $\bar{h}_x$  é um homeomorfismo para qualquer  $x \in U$  e depende continuamente de  $x$ .

Portanto,  $\bar{h}_x \circ \tilde{h}_x(F_0(x)) = F_t(x)$  para qualquer  $x \in U$ . Defina então a aplicação  $H : U \times \mathbb{R}^p \rightarrow U \times \mathbb{R}^p$  por  $H(x, y) = (x, \bar{h}_x \circ \tilde{h}_x(y))$ .

Por construção,  $H$  é injetiva e contínua. Pelo Teorema da Invariância do Domínio (ver [21]) podemos considerar nossa aplicação  $H$  um homeomorfismo. Assim, o par  $(id, H)$  satisfaz as condições da Definição 3.1 fornecendo uma  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência entre  $F_0 = f$  e  $F_t$ , para  $t$  fixo desde o início. Portanto,  $F_t$  e  $F_{t'}$  são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes, quaisquer que sejam  $t, t' \in [0, 1]$ .

Como  $g$  e  $\bar{g} = (g_1, \dots, g_{p-1}, -g_p)$  são trivialmente  $\mathcal{L}$ -equivalentes, então podemos concluir que  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes.  $\square$

**Definição 3.11.** Dizemos que dois germes  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  são topologicamente  $\mathcal{V}$ -equivalentes (ou  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{V}$ -equivalentes) se existir um germe de homeomorfismo  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tal que  $h(f^{-1}(0)) = g^{-1}(0)$ .

**Exemplo 3.12.** *Sejam  $f, g : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  dadas por  $f(x, y) = x^2 - y^3$  e  $g(x, y) = x^2 - y$ . Então  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{V}$ -equivalentes.*

*De fato, veja que  $f^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^3\}$  e  $g^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y\}$ .*

*Tome  $h : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  dada por  $h(x, y) = (x, y^3)$ .*

*Note que  $h$  é um homeomorfismo e além disso  $h(f^{-1}(0)) = g^{-1}(0)$ . Portanto  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{V}$ -equivalentes.*

É fácil ver que se dois germes  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes então eles são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{V}$ -equivalentes. Basta tomar o difeomorfismo  $h$  que atua no  $\mathbb{R}^n$  da definição de  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência para satisfazer a condição da  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{V}$ -equivalência entre  $f$  e  $g$ .

Assim, uma pergunta natural é se a equivalência topológica do conjunto de zeros é um invariante completo para a  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência.

O corolário a seguir dá uma resposta afirmativa a essa pergunta no caso de funções  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinadas, com  $n \geq 2$ .

**Corolário 3.13.** *(Nishimura [22]) Sejam  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  ( $n \geq 2$ ) germes de funções  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinados. Então,  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes se, e somente se,  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{V}$ -equivalentes.*

*Demonstração.* Suponhamos  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$   $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{V}$ -equivalentes. Então existe um germe de homeomorfismo  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tal que  $h(f^{-1}(0)) = g^{-1}(0)$ .

Como  $f$  é  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinado (resp.  $g$ ), para todo representante  $\tilde{f}$  de  $f$  (resp.  $\tilde{g}$  de  $g$ ) existe uma vizinhança  $U$  de 0 em  $\mathbb{R}^n$  tal que todo ponto de  $\tilde{f}^{-1}(0) \cap U - \{0\}$  (resp.  $\tilde{g}^{-1}(0) \cap U - \{0\}$ ) é regular. Daí, como germes na origem, segue que uma das seguintes condições são satisfeitas:

- a)  $\text{ sinal}(f(x)) = \text{ sinal}(g \circ h(x))$  para todo  $x \in U - f^{-1}(0)$ , ou
- b)  $\text{ sinal}(f(x)) = \text{ sinal}(-g \circ h(x))$  para todo  $x \in U - f^{-1}(0)$ .

Suponha que a) ocorra. Defina uma homotopia linear  $F_t : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  ( $t \in [0, 1]$ ) como

$$F_t(x) = (1 - t)f(x) + tg \circ h(x).$$

Então, pela construção de  $F_t$  temos

- 1)  $F_0 = f$  e  $F_1 = g \circ h$ ;

2)  $F_t^{-1}(0) = f^{-1}(0)$  para todo  $t \in [0, 1]$ , devido a condição a).

3) Para todo representante de  $f$ ,  $g$  e  $h$ , existe uma vizinhança  $U$  de 0 em  $\mathbb{R}^n$  tal que para todo  $t \in [0, 1]$ , o vetor  $F_t(x)$  não pertence ao conjunto  $\{\alpha F_0(x) \mid \alpha < 0\}$  para todo  $x \in U - f^{-1}(0)$ . Novamente usamos fortemente a condição a).

Portanto pelo Lema 3.10,  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes.

Se ocorrer b), então tome a homotopia  $F_t(x) = (1 - t)f(x) - tg \circ h(x)$ .

□

**Corolário 3.14.** (Nishimura [22]) *Sejam  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  germes de aplicações contínuas e sejam  $F, G : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r, 0)$  desdobramentos de  $f$  e  $g$ , respectivamente. Se  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes então  $F$  e  $G$  são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes.*

*Demonstração.* Sejam  $\tilde{F}, \tilde{G} : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r, 0)$  desdobramentos triviais de  $f$  e  $g$ , respectivamente, dados por

$$\tilde{F}(x, u) = (f(x), u) \quad e \quad \tilde{G}(x, u) = (g(x), u).$$

Como  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes,  $\tilde{F}$  e  $\tilde{G}$  também são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes, obviamente. Como por hipótese  $F$  e  $G$  são desdobramentos de  $f$  e  $g$ , respectivamente, podemos considerar

$$F(x, u) = (\tilde{f}(x, u), u), \quad \text{com } \tilde{f}(x, 0) = f(x) \quad e$$

$$G(x, u) = (\tilde{g}(x, u), u), \quad \text{com } \tilde{g}(x, 0) = g(x).$$

Agora defina as homotopias

$$F_t, G_t : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r, 0) \quad t \in [0, 1],$$

por

$$F_t(x, u) = (f(x) + t[\tilde{f}(x, u) - f(x)], u) \quad e \quad G_t(x, u) = (g(x) + t[\tilde{g}(x, u) - g(x)], u).$$

Então temos,  $F_0 = \tilde{F}$ ,  $F_1 = F$ ,  $G_0 = \tilde{G}$  e  $G_1 = G$ .

Como  $\tilde{f}(x, 0) = f(x)$  e  $\tilde{g}(x, 0) = g(x)$ , temos  $F_t^{-1}(0) = \tilde{F}^{-1}(0)$  e  $G_t^{-1}(0) = \tilde{G}^{-1}(0)$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

Se  $u \neq 0$ , então trivialmente para todos os representantes de  $f$ ,  $g$ ,  $F$  e  $G$ , existe uma vizinhança  $U$  de 0 em  $\mathbb{R}^n$  tal que para todo  $t \in [0, 1]$ , o vetor  $F_t(x, u)$  (resp.  $G_t(x, u)$ ) não

pertence ao conjunto

$$\{\alpha F_0(x, u) = (\alpha f(x), \alpha u) \mid \alpha < 0\} \text{ para todo } x \in U - \tilde{F}^{-1}(0)$$

$$\text{(resp. } \{\alpha G_0(x, u) = (\alpha g(x), \alpha u) \mid \alpha < 0\} \text{ para todo } U - \tilde{G}^{-1}(0)).$$

Agora se  $u = 0$ , então  $F_t(x, 0) = \tilde{F}(x, 0) = F_0(x, 0)$  e  $G_t(x, 0) = G_0(x, 0)$ . Portanto nesse caso a condição **iii**) do Lema 3.10 também ocorre.

Logo pelo Lema 3.10, podemos concluir que  $F$  e  $\tilde{F}$  são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes e  $G$  e  $\tilde{G}$  são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes. Ou seja,

$$F \underset{\mathcal{C}^0\text{-}\mathcal{K}}{\sim} \tilde{F} \underset{\mathcal{C}^0\text{-}\mathcal{K}}{\sim} \tilde{G} \underset{\mathcal{C}^0\text{-}\mathcal{K}}{\sim} G.$$

Portanto  $F$  e  $G$  são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes. □

O teorema a seguir é uma ferramenta usada na demonstração do Teorema 3.21. Antes de enunciá-lo, precisamos definir uma notação.

Dado  $\varepsilon > 0$ , seja  $S_\varepsilon^{n-1} = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid y_1^2 + \dots + y_n^2 = \varepsilon\}$  e  $D_\varepsilon^n = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid y_1^2 + \dots + y_n^2 \leq \varepsilon\}$ .

**Teorema 3.15.** (Teorema do Cone de Fukuda [12]) *Seja  $n \neq 4$ . Então, dado um subconjunto semialgébrico  $W$  de  $J^r(n, n)$ , existe um inteiro  $s$ , dependendo apenas de  $n$  e  $r$ , e um subconjunto semialgébrico fechado  $\sum_W$  de  $(\pi_r^s)^{-1}(W)$  com codimensão  $\geq 1$  tais que para qualquer aplicação  $\mathcal{C}^\infty$   $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  com  $j^s f(0) \in (\pi_r^s)^{-1}(W) - \sum_W$ , existe um número positivo  $\varepsilon_0$  tal que para qualquer número  $\varepsilon$  com  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  temos*

*i) O conjunto  $f^{-1}(S_\varepsilon^{n-1})$  é uma subvariedade  $\mathcal{C}^\infty$  sem fronteira, que é homeomorfa a esfera unitária padrão  $S_1^{n-1}$ ;*

*ii) A restrição  $f : f^{-1}(D_\varepsilon^n) \rightarrow D_\varepsilon^n$  é  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{A}$ -equivalente ao cone*

$$c(f) : f^{-1}(S_\varepsilon^{n-1}) \times [0, \varepsilon] / f^{-1}(S_\varepsilon^{n-1}) \times \{0\} \rightarrow S_\varepsilon^{n-1} \times [0, \varepsilon] / S_\varepsilon^{n-1} \times \{0\},$$

*da restrição  $f : f^{-1}(S_\varepsilon^{n-1}) \rightarrow S_\varepsilon^{n-1}$ , definido por  $c(f)(x, t) = (f(x), t)$ .*

*Um germe  $f$  para o qual existe um  $\varepsilon_0$  satisfazendo i) e ii) é chamado tipo cone.*

**Observação 3.16.** *Para provar o Teorema 3.21 Nishimura usa o resultado acima de Fukuda. A restrição  $n \neq 4$  que aparece no teorema está relacionada à conjectura de Poincaré que não estava provada nesta época. Atualmente, com a prova da conjectura de Poincaré podemos eliminar essa restrição. Mesmo assim, mantivemos o resultado com*

a restrição pois é como aparece no artigo de Nishimura [22] no qual está baseado este capítulo.

Vale observar que o Teorema do Cone de Fukuda vale em geral se  $n \leq p$ , mas como estamos interessados no caso  $n = p$  nos restringimos a este caso. Além disso, se  $n = p$ , a condição de  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -determinação finita de um germe  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  implica que  $f^{-1}(0) = \{0\}$ , como germe. Sendo assim, a noção de grau está bem definida para  $f$ .

Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação contínua definida numa vizinhança da origem tal que 0 é um ponto isolado em  $f^{-1}(0)$ . Então existe um  $r > 0$  tal que  $B_r \cap f^{-1}(0) = \{0\}$ , onde  $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$ . Seja ainda  $S_r$  a fronteira da  $B_r$ ,  $S_r = \partial B_r$ .

Definimos o grau topológico local de  $f$  em 0, denotado por  $\text{grau}(f)$ , como sendo o grau topológico da aplicação

$$\begin{aligned} \frac{f}{\|f\|} : S_r &\rightarrow S_1^{n-1} \\ x &\mapsto \frac{f(x)}{\|f(x)\|}. \end{aligned}$$

**Definição 3.17.** Toda aplicação  $f : S_1^n \rightarrow S_1^n$  induz um homomorfismo de grupo  $f_* : H_n(S_1^n) \rightarrow H_n(S_1^n)$  dado por  $f_*(z) = d \cdot z$ , onde  $H_n(S_1^n) = \mathbb{Z}$ . O inteiro  $d$  é definido como sendo o grau da aplicação  $f$ .

**Observação 3.18.** Sejam  $f, g : S_1^n \rightarrow S_1^n$  aplicações contínuas.

- 1) Se  $f$  e  $g$  são homotópicas então  $\text{grau}(f) = \text{grau}(g)$ ;
- 2)  $\text{grau}(f \circ g) = \text{grau}(f) \cdot \text{grau}(g)$ .

Como estamos trabalhando com germes de aplicações  $\mathcal{C}^\infty$ , podemos calcular o grau de uma aplicação da seguinte forma:

**Definição 3.19.** Dada uma aplicação  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e um valor regular  $y$  de  $f$ , definimos o grau da aplicação de  $f$  em  $y$  por

$$\text{grau}(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{senal}(\det \text{jac} f(x)),$$

$$\text{onde } \text{senal}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0; \\ -1 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

É possível provar que nesse caso o grau não depende do valor regular escolhido, assim podemos denotar  $\text{grau}(f, y)$  apenas por  $\text{grau}(f)$ .

**Exemplo 3.20.** Considere a aplicação  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ . O grau da aplicação  $f$  é 2.

De fato, o  $\det \text{jac} f(x, y) = 4x^2 + 4y^2$ . Daí segue que o ponto  $(0, 0)$  é o único ponto singular de  $f$ . Assim para um número  $\varepsilon > 0$ , o ponto  $(0, \varepsilon)$  é um ponto regular de  $f$  e  $f(0, \varepsilon) = (-\varepsilon^2, 0)$  é um valor regular de  $f$ .

Portanto,  $f^{-1}(-\varepsilon^2, 0) = \{(0, \varepsilon), (0, -\varepsilon)\}$ . Com isso

$$\text{grau}(f) = \sum_{(x,y) \in f^{-1}(-\varepsilon^2, 0)} \text{sinal}(\det \text{jac} f(x, y)) = 1 + 1 = 2.$$

Conforme veremos a seguir, o valor absoluto do grau é um invariante completo para a  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência.

**Teorema 3.21.** (Teorema de Nishimura [22]) Sejam  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  germes  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinados e  $n \neq 4$ . Então,

$$f \text{ e } g \text{ são } \mathcal{C}^0\text{-}\mathcal{K}\text{-equivalentes se, e somente se, } |\text{grau}(f)| = |\text{grau}(g)|.$$

*Demonstração.* Suponhamos que  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes, então existe um homeomorfismo  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  e uma família de homeomorfismos  $H_x : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ) tal que  $H_x(f(x)) = g(h(x))$ .

Seja  $F_t : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  ( $t \in [0, 1]$ ) uma homotopia da forma

$$F_t(x) = H_{(1-t)x}(f(x)).$$

Então temos que  $F_0(x) = H_x(f(x))$  e  $F_1(x) = H_0(f(x))$ . Além disso, o germe  $f$  é  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinado, então  $f^{-1}(0) = \{0\}$ . Agora  $H_{(1-t)x} : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  é um germe de homeomorfismo para todo  $t \in [0, 1]$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ , assim  $F_t^{-1}(0) = \{0\}$ . Como  $F_0(x)$  e  $F_1(x)$  são homotópicas, temos

$$\text{grau}(F_0) = \text{grau}(F_1).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|\text{grau}(f)| &= |\pm 1| |\text{grau}(f)| \\
&= |\text{grau}(H_0)| |\text{grau}(f)| \\
&= |\text{grau}(H_0 \circ f)| \\
&= |\text{grau}(F_1)| \\
&= |\text{grau}(F_0)| \\
&= |\text{grau}(g \circ h)| \\
&= |\text{grau}(g)| |\text{grau}(h)| \\
&= |\text{grau}(g)|.
\end{aligned}$$

Agora suponhamos  $|\text{grau}(f)| = |\text{grau}(g)|$ . Temos por hipótese que o germe  $f$  é  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinado, então existe  $r \in \mathbb{N}$  tal que  $f$  é  $r$ - $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinado.

Seja  $W = \{h \in J^r(n, n) \mid h - j^r f(0) = 0\}$ . Como por hipótese  $f$  (resp.  $g$ ) é  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinada, aplicando o Teorema do Cone de Fukuda, temos que existe uma aplicação  $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  do tipo cone tal que  $f$  e  $\tilde{f}$  são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes. Da mesma forma podemos encontrar uma aplicação do tipo cone  $\tilde{g}$  tal que  $g$  e  $\tilde{g}$  são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes.

Assim pela primeira parte da demonstração do teorema  $|\text{grau}(\tilde{f})| = |\text{grau}(f)|$  e  $|\text{grau}(\tilde{g})| = |\text{grau}(g)|$ .

Portanto  $|\text{grau}(\tilde{g})| = |\text{grau}(\tilde{f})|$ .

Vamos considerar algum representante de  $\tilde{f}$  (resp.  $\tilde{g}$ ) mas continuaremos usando a mesma notação  $\tilde{f}$  (resp.  $\tilde{g}$ ) para este representante.

Segue do Teorema 3.15 i) que existe um homeomorfismo

$$\phi_f : S_{\varepsilon_0}^{n-1} \rightarrow \tilde{f}^{-1}(S_{\varepsilon_0}^{n-1}) \quad (\text{resp. } \phi_g : S_{\varepsilon_0}^{n-1} \rightarrow \tilde{g}^{-1}(S_{\varepsilon_0}^{n-1})).$$

Agora defina a aplicação  $F : S_{\varepsilon_0}^{n-1} \rightarrow S_{\varepsilon_0}^{n-1}$  por

$$F(x) = \tilde{f} \circ \phi_f(x) \quad (\text{resp. } G(x) = \tilde{g} \circ \phi_g(x)).$$

Como  $\phi_f$  (resp.  $\phi_g$ ) é um homeomorfismo, temos

$$|\text{grau}(F)| = |\text{grau}(\tilde{f}|_{\tilde{f}^{-1}(S_{\varepsilon_0}^{n-1})})|$$

$$(\text{resp. } |\text{grau}(G)| = |\text{grau}(\tilde{g}|_{\tilde{g}^{-1}(S_{\varepsilon_0}^{n-1})})|)$$

Seja  $c(\tilde{f})$  o cone de  $\tilde{f} : \tilde{f}^{-1}(S_{\varepsilon_0}^{n-1}) \rightarrow S_{\varepsilon_0}^{n-1}$  e  $c(\tilde{g})$  o cone de  $\tilde{g} : \tilde{g}^{-1}(S_{\varepsilon_0}^{n-1}) \rightarrow S_{\varepsilon_0}^{n-1}$ .

Então

$$\begin{aligned} |\text{grau}(\tilde{f}|_{\tilde{f}^{-1}(S_{\varepsilon_0}^{n-1})})| &= |\text{grau}(c(\tilde{f}))| \quad e \\ |\text{grau}(\tilde{g}|_{\tilde{g}^{-1}(S_{\varepsilon_0}^{n-1})})| &= |\text{grau}(c(\tilde{g}))| \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.15 ii) e pela primeira parte que mostramos do teorema,

$$\begin{aligned} |\text{grau}(c(\tilde{f}))| &= |\text{grau}(\tilde{f})| \quad e \\ |\text{grau}(c(\tilde{g}))| &= |\text{grau}(\tilde{g})|. \end{aligned}$$

Juntando todas as igualdades obtidas segue que  $|\text{grau}(F)| = |\text{grau}(G)|$ . Pelo Teorema do Grau de Brouwer (ver [25]), temos que existe uma homotopia  $H_t : S_{\varepsilon_0}^{n-1} \rightarrow S_{\varepsilon_0}^{n-1}$  ( $t \in [0, 1]$ ) tal que  $H_0 = F$  e  $H_1 = G$  ou  $\overline{G}$ .

Considere  $c(H_t) : S_{\varepsilon_0}^{n-1} \times [0, 1]/S_{\varepsilon_0}^{n-1} \times \{0\} \rightarrow S_{\varepsilon_0}^{n-1} \times [0, 1]/S_{\varepsilon_0}^{n-1} \times \{0\}$  o cone desta homotopia, ou seja,  $c(H_t)(x, s) = (H_t(x), s)$ . Então,

$$\begin{aligned} c(H_0) &= c(F) \quad e \quad c(H_1) = c(G) \quad \text{ou} \quad \overline{c(G)}; \\ c(H_t)^{-1}(0) &= \{0\} \quad \text{para todo} \quad t \in [0, 1]; \end{aligned}$$

Agora identifique  $S_{\varepsilon_0}^{n-1} \times [0, 1]/S_{\varepsilon_0}^{n-1} \times \{0\}$  com  $D_{\varepsilon_0}^n$  canonicamente. Além disso, como  $c(H_t)$  é o cone de  $H_t$ , por compacidade de  $[0, 1]$  existe um subconjunto finito  $\{t_0, t_1, \dots, t_k\}$  de  $[0, 1]$  tal que  $0 = t_0 < \dots < t_k = 1$  e para qualquer inteiro  $i$  com  $0 \leq i \leq k - 1$  e qualquer  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  o vetor

$$c(H_t)(x) \notin \{\alpha c(H_{t_i})(x) \mid \alpha < 0\}$$

para todo  $x \in S_{\varepsilon_0}^{n-1} \times [0, 1]/S_{\varepsilon_0}^{n-1} \times \{0\} \approx D_{\varepsilon_0}^n$ .

Logo pelo Lema 3.10,  $c(F)$  e  $c(G)$  são  $\mathcal{C}^0\text{-}\mathcal{K}$ -equivalentes.

Visto que o cone  $c(\phi_f)$  (resp.  $c(\phi_g)$ ) é um homeomorfismo,  $c(F)$  e  $c(\tilde{f})$  (resp.  $c(G)$  e  $c(\tilde{g})$ ) são  $\mathcal{C}^0\text{-}\mathcal{R}$ -equivalentes.

Portanto,

$$f \underset{\mathcal{C}^0\text{-}\mathcal{K}}{\sim} \tilde{f} \underset{\mathcal{C}^0\text{-}\mathcal{A}}{\sim} c(\tilde{f}) \underset{\mathcal{C}^0\text{-}\mathcal{R}}{\sim} c(F) \underset{\mathcal{C}^0\text{-}\mathcal{K}}{\sim} c(G) \underset{\mathcal{C}^0\text{-}\mathcal{R}}{\sim} c(\tilde{g}) \underset{\mathcal{C}^0\text{-}\mathcal{A}}{\sim} \tilde{g} \underset{\mathcal{C}^0\text{-}\mathcal{K}}{\sim} g$$

Então  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{C}^0\text{-}\mathcal{K}$ -equivalentes.



□

**Exemplo 3.22.** Considere  $f, g : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  dadas por  $f(x, y) = (x^2, y^2)$  e  $g(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ . Os germes não são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes.

De fato, aqui temos que  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinadas, além disso  $\text{grau}(f) = 0$  e  $\text{grau}(g) = 2$ .

O grau topológico citado no Teorema 3.21 pode ser calculado pela seguinte fórmula de Eisenbud-Levine:

$$|\text{grau}(f)| = \dim_{\mathbb{R}} Q(f) - 2\dim_{\mathbb{R}} I,$$

onde  $I$  é o ideal maximal de  $Q(f)$  com respeito a propriedade  $I^2 = 0$ .

Esta fórmula algébrica para o grau de um germe de aplicação  $\mathcal{C}^\infty$  pode ser encontrada em [10]. Assim podemos reescrever o Teorema 3.21 da seguinte forma:

**Corolário 3.23.** Sejam  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  germes  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinados e  $n \neq 4$ . Então,  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes se, e somente se,

$$\dim_{\mathbb{R}} Q(f) - 2\dim_{\mathbb{R}} I(f) = \dim_{\mathbb{R}} Q(g) - 2\dim_{\mathbb{R}} I(g),$$

onde  $I(f)$  é o ideal maximal da  $\mathbb{R}$ -álgebra local  $Q(f)$  com respeito a propriedade  $I^2 = 0$ . Analogamente  $I(g)$ .

## 3.1 Prova alternativa do Teorema 3.21

O nosso objetivo nesta seção é dar uma prova alternativa para o Teorema 3.21, baseado no artigo [24]. Para isso precisamos de alguns conceitos preliminares.

Seja  $F : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^p$  uma deformação entre  $F_0$  e  $F_1$ , que a cada  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, 1]$  associa  $F_t(x) \in \mathbb{R}^p$ . Vamos indicar por  $O_t$  o eixo- $t$ .

**Definição 3.24.** Dizemos que uma deformação  $F$  é  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -trivial se existem aplicações  $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  e  $h : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tais que para todo  $t \in [0, 1]$ , o par  $(h_t, H_t)$  é uma  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência entre  $F_0$  e  $F_t$ .

Dizemos que uma deformação é semialgebricamente  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -trivial se os homeomorfismos escolhidos forem semialgêbricos. Isto significa que seus respectivos gráficos são conjuntos semialgêbricos.

O lema a seguir é uma adaptação do Lema 3.10 de Nishimura.

**Lema 3.25.** *Sejam  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  dois germes de aplicações contínuas. Suponha que*

$$i) f^{-1}(0) = g^{-1}(0);$$

$$ii) \frac{g(x)}{\|g(x)\|} \neq -\frac{f(x)}{\|f(x)\|}, \text{ para todo } x \text{ próximo da origem em que } \|f(x)\| \neq 0.$$

*Então,  $f$  é  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalente a  $g$ .*

**Lema 3.26.** *(Ruas-Valette [24]) Seja  $F : U \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^p$  uma deformação contínua entre  $F_0$  e  $F_1$  tal que  $F_t^{-1}(0)$  é constante com relação a  $t$ . Seja*

$$G_t(x) := \frac{\|F_0(x)\|}{\|F_t(x)\|} \cdot F_t(x),$$

com  $G_t(x) = 0$  se  $F_t(x) = 0$ .

*Então,  $G_t$  é  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalente a  $F_t$ .*

*Demonstração.* A prova segue os mesmos passos do Lema 3.10.

Primeiro definimos uma função  $\alpha$  sobre o complemento de  $F^{-1}(0)$ , para diferentes casos.

Assuma primeiro  $0 < \|F_0(x)\| \leq \|F_t(x)\|$ .

Seja

$$\alpha(x, t, r) = \begin{cases} \frac{\|F_0(x)\|}{\|F_t(x)\|} & \text{se } 0 < r \leq \|F_t(x)\|; \\ \frac{2(\|F_0(x)\| - \|F_t(x)\|)}{r} + \frac{2\|F_t(x)\| - \|F_0(x)\|}{\|F_t(x)\|} & \text{se } \|F_t(x)\| \leq r \leq 2\|F_t(x)\|; \\ 1 & \text{se } 2\|F_t(x)\| \leq r. \end{cases}$$

Agora assumamos  $0 < \|F_t(x)\| < \|F_0(x)\|$ . Neste caso definimos  $\alpha$  como segue,

$$\alpha(x, t, r) = \begin{cases} \frac{\|F_0(x)\|}{\|F_t(x)\|} & \text{se } 0 < r \leq \|F_t(x)\|; \\ \frac{2\|F_0(x)\|(\|F_0(x)\| - \|F_t(x)\|)}{r(2\|F_0(x)\| - \|F_t(x)\|)} + \frac{\|F_0(x)\|}{2\|F_0(x)\| - \|F_t(x)\|} & \text{se } \|F_t(x)\| \leq r \leq 2\|F_0(x)\|; \\ 1 & \text{se } 2\|F_0(x)\| \leq r. \end{cases}$$

Observe que as diferentes funções envolvidas na definição de  $\alpha$  se colam de modo a obter uma função contínua sobre seu domínio.

A função  $\alpha$  é limitada, o que significa que aplicação

$$H(x, t, y) = (x, t, \alpha(x, t, \|y\|) \cdot y)$$

estende-se continuamente quando  $\|y\|$  tende a zero.

Veja que  $H$  é um homeomorfismo, pois a aplicação  $r \mapsto r\alpha(x, t, r)$  é um homeomorfismo para todo  $(x, t)$  fixo.

Além disso,

$$H(x, t, 0) = (x, t, 0) \quad e$$

$$H(x, t, F_t(x)) = (x, t, \alpha(x, t, \|F_t(x)\|) \cdot F_t(x)) = (x, t, \frac{\|F_0(x)\|}{\|F_t(x)\|} \cdot F_t(x)) = (x, t, G_t(x)),$$

ou seja,  $H_t$  aplica o gráfico de  $F_t$  sobre o gráfico de  $G_t$ .

Portanto a aplicação  $H$  é uma  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência entre  $F$  e  $G$ . □

**Teorema 3.27.** (*Ruas-Valette [24]*) *Seja  $F : U \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^p$  um deformação contínua entre  $F_0$  e  $F_1$ . Se  $F_t^{-1}(0)$  é localmente topologicamente trivial na origem, então  $F$  é  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -trivial.*

*Demonstração.* A hipótese de que  $F_t^{-1}(0)$  é localmente topologicamente trivial na origem, significa que os conjuntos de zeros  $F_t^{-1}(0)$  são homeomorfos. Sem perda de generalidade, vamos assumir que  $F_t^{-1}(0)$  é constante com relação a  $t$ . Além disso, podemos encontrar uma aproximação  $G$  de  $F$ , onde  $G$  é  $\mathcal{C}^\infty$  fora  $F_t^{-1}(0)$  e satisfaz

$$\|G_t(x) - F_t(x)\| \leq \frac{\|F_t(x)\|}{2}.$$

Isso implica que o seno do ângulo entre  $G_t(x)$  e  $F_t(x)$  é menor que  $\frac{1}{2}$ . Daí para todo  $x$  próximo da origem com  $\|F_t(x)\| \neq 0$  tem-se  $\|G_t(x)\| \neq 0$ . Assim, temos que

$$F^{-1}(0) = G^{-1}(0) \quad e$$

$$\frac{G_t(x)}{\|G_t(x)\|} \neq -\frac{F_t(x)}{\|F_t(x)\|}.$$

Portanto pelo Lema 3.25  $G$  é  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalente a  $F$ . Podemos então substituir  $F$  por  $G$  se necessário, e assumir que  $F$  é  $\mathcal{C}^\infty$  fora de seu conjunto de zeros (e contínua em todos os lugares). Pelo Lema 3.26 podemos assumir também que a norma de  $F_t$  é constante

com relação a  $t$ .

Assim, a prova do teorema pode ser reduzida ao caso em que  $F$  é  $\mathcal{C}^\infty$  no complemento de  $F^{-1}(0)$  e  $F_t$  tem norma constante. Assumiremos esse fato sem mudança de notações.

Para  $(x, y, t) \in U \times \mathbb{R}^p \times [0, 1]$ , vamos definir o campo de vetores

$$v(x, y, t) := \left(0, \frac{\partial F}{\partial t}(x, t), 1\right).$$

O vetor  $v$  é tangente ao gráfico de  $F_t$  para todo ponto do gráfico. Como a norma de  $F_t$  é constante com relação a  $t$ , o vetor  $v(x, F_t(x), t)$  é tangente a variedade  $U \times S_{(\|F_t(x)\|)^2}^{p-1} \times [0, 1]$  para todo  $(x, t) \in U \times [0, 1]$ .

Dado um ponto  $q = (x, y, t) \in U \times \mathbb{R}^p \times [0, 1]$ , vamos denotar por  $P_q$  a projeção sobre o espaço tangente em  $q$  de  $U \times S_{(\|y\|)^2}^{p-1} \times [0, 1]$ . Então podemos definir

$$w(q) := P_q(v(q)).$$

Temos assim um campo de vetores que é tangente ao conjunto  $\{(x, y, t) \mid \|y\| = \|F_t(x)\|\}$  e que coincide com  $v$  sobre o gráfico de  $F_t$ .

Agora definimos,

$$\eta(x, y, t) = \begin{cases} \partial t, & \text{se } F_t(x) = 0 \text{ ou } y = 0; \\ \alpha\left(\frac{\|y\|}{\|F_t(x)\|}\right)w(x, \frac{\|F_t(x)\|}{\|y\|}y, t) + (1 - \alpha\left(\frac{\|y\|}{\|F_t(x)\|}\right))\partial t, & \text{se } y \neq 0 \text{ e } F_t(x) \neq 0; \end{cases}$$

onde  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função  $\mathcal{C}^\infty$  tal que  $\alpha(1) = 1$  e identicamente zero sobre o complemento de  $[\frac{1}{2}, 2]$ , e  $\partial t = (0, 0, 1)$ .

Esse campo de vetores satisfaz as seguintes propriedades:

- 1)  $\pi(\eta(q)) = \eta(\pi(q)) = (0, 0, 1)$  (onde  $\pi$  é a projeção ortogonal sobre o  $\mathbb{R}^p$ );
- 2)  $\eta(x, y, t)$  é tangente a variedade  $U \times S_{(\|y\|)^2}^{p-1} \times [0, 1]$ ;
- 3)  $\eta$  é tangente ao gráfico de  $F$ .

Como reduzimos nossa prova ao caso em que  $F$  é  $\mathcal{C}^\infty$  fora de  $F^{-1}(0)$ , obtemos então um campo de vetores que é  $\mathcal{C}^\infty$  fora de  $F^{-1}(0) \times \mathbb{R}^p$ . As condições 1) e 2) acarretam a existência de curvas integrais. Embora esse campo de vetores não seja contínuo em todos os lugares, afirmamos que ele é integrável e dará origem a um fluxo contínuo  $H$  que realizará a  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -trivialidade desejada. Para ver isso, observe que o fluxo existe

localmente em qualquer ponto para o qual  $F_t(x)$  é não nulo, visto que o campo de vetores é  $\mathcal{C}^\infty$ . Sobre  $F^{-1}(0)$  o campo  $\eta$  é igual a  $(0, 0, 1)$  e também gera curvas integrais.

A unicidade das curvas integrais segue da condição 2). Esta condição implica que o fluxo preserva distância em  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ , o que significa que as curvas integrais não podem estar em  $F^{-1}(0)$ . Assim, a continuidade do fluxo precisa ser verificada apenas ao longo de  $F^{-1}(0)$ . A condição 1) implica que a primeira componente é contínua e a condição 2) implica que a componente normal tende a zero quando aproximamos de  $F^{-1}(0)$ .

Assim, obtivemos uma família de homeomorfismos a um parâmetro que realiza a trivialização desejada. Das condições 3) e 1) temos que o homeomorfismo  $H$  preserva o gráfico da  $F$  e também o  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ . E, se definimos  $h = id_{\mathbb{R}^n}$  a condição 1) implica que todas as condições da Definição 3.1 estão satisfeitas.

□

**Proposição 3.28.** (*Ruas-Valette [24]*) *Sejam  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  duas aplicações polinomiais de fibras finitas com  $|\text{grau}(f)| = |\text{grau}(g)|$ . Então, existe uma deformação contínua  $F : U \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  entre  $f$  e  $g$  ou  $-g$  satisfazendo  $F^{-1}(0) = O_t$ .*

Para provar o resultado acima, os autores em [24] utilizam como ferramenta principal o Segundo Lema de Isotopia de Thom (ver [14]). Como não é de nosso interesse tratar neste texto a teoria de estratificação de Thom-Whitney, iremos omitir a prova da Proposição 3.28.

A seguir daremos uma prova alternativa para o Teorema 3.21 de Nishimura proposta por Ruas e Valette em [24]. A principal diferença entre as provas é que em [24] os autores utilizam-se do Segundo Lema de Isotopia de Thom (devido à Proposição 3.28) ao invés do Teorema da Estrutura Cônica de Fukuda.

**Prova alternativa do Teorema 3.21:** A implicação que devemos analisar é a que diz que se os graus das aplicações em valor absoluto são iguais então as aplicações são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes. De fato, como  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinadas por hipótese, podemos assumir que elas são aplicações polinomiais de fibras finitas. Pela Proposição 3.28 (baseada no Segundo Lema de Isotopia de Thom), existe uma deformação contínua  $F : U \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  entre  $f$  e  $g$  ou  $-g$  satisfazendo  $F^{-1}(0) = O_t$ . Mas pelo Teorema 3.27 podemos concluir que a deformação  $F$  é  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -trivial. Como  $-g$  é  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalente a  $g$ , segue que  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes como queríamos. □

## 3.2 Caso $n \neq p$

Vimos nas seções anteriores um invariante completo para a  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência no caso  $n = p$ . Vimos também, como decorrência do Lema 3.10 que se  $n \geq 2$  e  $p = 1$ , o conjunto dos zeros é um  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -invariante para germes  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinados. Ainda tratando do caso de funções, recentemente L. Birbrair, J.C.F. Costa, A. Fernandes e S. Alvarez introduziram um invariante completo para germes de funções definíveis em estruturas o-minimais (ver [2]). Estes mesmos autores apresentam algumas formas normais com respeito à  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -classificação de germes de funções analíticas reais em duas variáveis. Outros recentes resultados abordando a  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência de aplicações com  $n > p$  aparecem nos trabalhos [8], [4] e [24]. Nesta seção, vamos elucidar os principais resultados do caso  $n < p$  descrito em [8]. Este caso é bem peculiar pois conforme veremos no Teorema 3.31, quando  $n < p$  a  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência não distingue germes  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinados. Os exemplos a seguir ilustram e motivam este fato.

**Exemplo 3.29.** *Os germes  $f(x) = (x^2, 0)$  e  $g(x) = (x, 0)$  são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes.*

*De fato, observe inicialmente que  $f(x) = (x^2, 0)$  e  $\psi_1(x) = (x^2, x^3)$  são  $\mathcal{K}$ -equivalentes (Proposição 2.7). O mesmo ocorre com  $g(x) = (x, 0)$  e  $\psi_2(x) = (x^2, x)$ .*

*Além disso,  $\psi_2(x) = (x^2, x)$  e  $\psi_1(x) = (x^2, x^3)$  são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes, pois o par de homeomorfismos  $h(x) = x$  e  $H(x, y_1, y_2) = (x, y_1, y_2^3)$  satisfaz as hipóteses da Definição 3.1.*

*Assim,*

$$f \underset{\mathcal{K}}{\sim} \psi_1 \underset{\mathcal{C}^0\text{-}\mathcal{K}}{\sim} \psi_2 \underset{\mathcal{K}}{\sim} g,$$

*e, portanto  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes.*

**Exemplo 3.30.** *Os germes  $f(x, y) = (x, y, 0)$  e  $g(x, y) = (x, y^2, xy)$  são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes.*

*De fato, observe primeiramente que  $f \underset{\mathcal{K}}{\sim} (x, y^2, y)$  e  $f \underset{\mathcal{K}}{\sim} (x, y^2, y^3)$ . Logo, basta mostrar que  $(x, y^2, xy) \underset{\mathcal{C}^0\text{-}\mathcal{K}}{\sim} (x, y^2, y^3)$ .*

*Para isto, considere os homeomorfismos*

$$h(x, y) = (x^3, y^3) \text{ e } H(x, y, z_1, z_2, z_3) = (x^3, y^3, z_1^3, z_2^3, z_3^9).$$

*Eles estabelecem a  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência entre os germes  $(x, y^2, y)$  e  $(x, y^2, y^3)$ . Assim,*

$$f \underset{\mathcal{K}}{\sim} (x, y^2, y) \underset{\mathcal{C}^0\text{-}\mathcal{K}}{\sim} (x, y^2, y^3) \underset{\mathcal{K}}{\sim} g,$$

e portanto,  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes.

De um modo geral, no caso  $n < p$ , é possível mostrar que quaisquer dois germes  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinados são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes. A confirmação disto é dado pelo teorema dado a seguir.

**Teorema 3.31.** (Costa [7]) *Sejam  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  germes de aplicações  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -finitamente determinados e  $n < p$ ,  $n \neq 4, 5$ . Então,  $f$  e  $g$  são  $\mathcal{C}^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalentes.*

A prova desse teorema segue os mesmos passos da prova do Teorema 3.21. As ferramentas usadas para prová-lo são o Teorema 3.15 e o Lema 3.10. Além disso, um fato crucial que ocorre no caso  $n < p$  é que quaisquer duas aplicações da esfera  $S_1^n$  em  $S_1^p$  são homotópicas.

## *Comentários finais*

Para classificação de germes, um dos primeiros problemas que surgem é saber se o número de classes de equivalência em questão é finito ou não. Quando é possível mostrar que o número de órbitas com relação a alguma relação de equivalência é finito, dizemos que esta classe de germes tem a propriedade da finitude das órbitas. Ter essa propriedade significa tornar o trabalho de classificação mais tratável.

Em [11], T. Fukuda provou um teorema de finitude com respeito à  $\mathcal{A}$ -equivalência topológica, para germes de funções polinomiais de grau limitado por uma certa constante  $k$ . Como consequência do resultado de Fukuda, temos que a propriedade da finitude das órbitas também ocorre para a  $C^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência, uma vez que  $C^0$ - $\mathcal{A}$ -equivalência implica em  $C^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência. Resultados de finitude para aplicações são, em geral, difíceis de serem verificados ou provados. Em [4], os autores provam a propriedade de finitude para a  $C^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência de germes de aplicações polinomiais de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^2$ , conforme o teorema a seguir:

**Teorema.** Seja  $P^k(n, 2)$  o conjunto de todos os germes de aplicações polinomiais  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ ,  $f = (f_1, f_2)$ , com grau  $f_1, f_2 \leq k$ . Então o conjunto das classes de equivalência, com relação a  $C^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência, é finita.

A prova do teorema de finitude acima utiliza um tipo de argumento parecido com o de Nishimura no Teorema 3.21. Conforme vimos no Capítulo 3, no Teorema 3.21 relacionamos a equivalência de contato topológica de germes finitamente determinados de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^n$ , com o tipo de homotopia da restrição de seus representantes no complemento da origem. Em [4], os autores provam que se os conjuntos de zeros são os mesmos, os germes são topologicamente  $\mathcal{K}$ -equivalentes se as restrições de seus representantes no complemento do conjunto de zeros são homotópicas. Como o conjunto dos tipos de homotopia de aplicações semialgébricas definidas em conjuntos semialgébricos com complexidade limitada é finito, isso garante a prova da finitude enunciada no teorema.

Recentemente, M. Ruas e G. Valette em [24] generalizaram este resultado para aplicações de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^p$ .

Em [5] os autores mostram um teorema de finitude para germes de funções polinomi-



ais com respeito à bi-Lipschitz  $\mathcal{K}$ -equivalência. A bi-Lipschitz  $\mathcal{K}$ -equivalência é a versão bi-Lipschitz da equivalência de contato. É definida de modo análogo à  $C^0$ - $\mathcal{K}$ -equivalência, substituindo as palavras “homeomorfismos” na Definição 3.1 por “homeomorfismos bi-Lipschitz”. A propriedade de finitude também foi mostrada para germes de aplicações com respeito à bi-Lipschitz  $\mathcal{K}$ -equivalência em [24].

Vale ressaltar que os resultados de finitude citados acima são do tipo existência e não fornecem qualquer sugestão de quais são as formas normais para uma possível classificação destes germes.

## *Referências Bibliográficas*

- [1] O. B. Almeida, *Teoria do grau e aplicações*, Dissertação de Mestrado, UFCG, Campina Grande, PB (2006).
- [2] S. Alvarez, L. Birbrair, J.C.F Costa, A. Fernandes, *Topological  $\mathcal{K}$ -equivalence of analytic function-germs*, Cent. Eur. J. Math. 8 (2010), no. 2, 338-345.
- [3] L. J. Bettini, *Deformações versais e classificação de aplicações estáveis*, Dissertação de Mestrado, UFSCAR, São Carlos, SP (1977).
- [4] L. Birbrair, J.C.F Costa, A. Fernandes, *Finiteness theorem for topological contact equivalence of map germs*, Hokkaido Mathematical Journal Vol. 38 (2009) 511-517.
- [5] L. Birbrair, J.C.F Costa, A. Fernandes, M.A.S. Ruas,  *$\mathcal{K}$ -bi-Lipschitz equivalence of real function germs*, Proc. Amer. Math. Soc. 135, no. 4 (2007) 1089-1095.
- [6] J. Bochnak, M. Coste, M-F. Roy, *Real Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin 1998.
- [7] J. C. F Costa, *Equivalências de contato topológica e bi-Lipschitz de germes de aplicações diferenciáveis*, Tese de Doutorado, ICMC-USP 2005.
- [8] J. C. F Costa, *A note on topological contact equivalence*. LMS Lecture Note Series 380 (2010).
- [9] M. Coste, K. Kurdyka, *On the link of a stratum in a real algebraic set*, Topology 31 (1992), no. 2, 323-336.
- [10] D. Eisenbud, H.I Levine, *An algebraic formula for the degree of a  $C^\infty$  map-germ*, Ann. Math. 106 (1977) 19-44.
- [11] T. Fukuda, *Types topologiques des polynômes*, Publ. Math. I.E.H.S. 46 (1976) 87-106.
- [12] T. Fukuda, *Local topological properties of differentiable mappings I*, Invent. Math. 65 (1981/82), 227-250.
- [13] C. G. Gibson, *Singular points of smooth mappings*, Research Notes in Math. 25, Pitman, London 1979.
- [14] C. G. Gibson, K. Wirthmuller, A. du Plessis, E. Looijenga, *Topological stability of smooth mappings*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 552. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.
- [15] M. Golubitsky, V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Graduate texts in mathematics, vol. 14, Springer-Verlag, New York, 1973.

- [16] J. Martinet, *Déploiements versels des applications différentiables et classification des applications stables*, Lectures notes in mathematics, vol. 535, Springer, Berlin, 1976.
- [17] J. Martinet, *Singularités des fonctions et applications différentiables*, Monografias de matemática da PUC, RJ no.1 (1977).
- [18] J. Mather, *Stability of  $C^\infty$  mappings, III. Finitely determined mapgerms*, Publ. Math I.H.E.S, 35 (1968) 279-308.
- [19] J. Mather, *Stability of  $C^\infty$ -mappings, IV: classification of stable map-germs by  $\mathbb{R}$ -álgebras*, Publ. Math. I.H.E.S. 37 (1970) 223-248.
- [20] J. Montaldi, *On contact between submanifolds*, Michigan Math. J. 33 (1986), no. 2, 195-199.
- [21] J. R. Munkres, *Topology*, 2nd edition. Prentice Hall. 2000.
- [22] T. Nishimura, *Topological  $\mathcal{K}$ -equivalence of smooth map germs*, Stratifications, Singularities and Differential Equations, I (Marseille 1990, Honolulu, HI 1990), Travaux en Cours, 54, Hermann, Paris (1997) 82-93.
- [23] H. A. Pedroso, *Bi-equivalência de contato*, Dissertação de Mestrado, USP, São Carlos, SP 1980.
- [24] M. A. S Ruas, G. Valette,  *$C^0$  and bi-Lipschitz  $\mathcal{K}$ -equivalence of mappings*, Math. Z, aceito para publicação 2010.
- [25] E. H. Spanier *Algebraic topology*, McGraw-Hill Book Company, 1996.
- [26] F. Tari, *Singularidade de Aplicações Diferenciáveis*, Notas de aula, ICMC-USP, São Carlos, SP (1998).
- [27] C. T. C. Wall, *Finite determinacy of smooth map-germs*, Bull. London Math. Soc. 13 (1981), 481-539.

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 22 de Fevereiro de 2011.

---

Andrea de Jesus Sacramento